

(1-30)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**"PRINCIPIOS VARIACIONALES Y SISTEMAS PFAFFIANOS
EN TEORIAS DE LA GRAVITACION"**

T E S I S

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN FISICA

p r e s e n t a

JAMES CLARK KEITH

MEXICO, D. F.

1970



Universidad Nacional
Autónoma de México

Biblioteca Central

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PREFACIO.

La presente tesis tiene como finalidad elaborar una formulación lagrangiana general de gravitación y otras interacciones. Dichas formulaciones se limitan generalmente a esquemas de geometría de espacios curvos de Riemann o de espacios llanos de Minkowski. Tales espacios pueden emplearse como marcos de referencia "naturales" para la descripción de los fenómenos físicos.

Se desarrollará el formalismo de manera tan general que pueda extenderse posteriormente a la resolución de problemas experimentales bastante complejos, de interés básico para la física gravitacional.

En esta tesis trataremos la gravitación y otras interacciones desde un punto de vista algo más general.

En esta tesis trataremos la gravitación y otras interacciones desde un punto de vista algo más general.

El programa consiste en establecer las integrales de acción y las densidades lagrangianas correspondientes que describen al sistema físico. El estudio se fundamenta en sistemas pfaffianos continuos y las transformaciones infinitesimales integrables.

Se combinarán la teoría de transformaciones continuas, y sus condiciones de integrabilidad, con los métodos del cálculo de variaciones. Al mismo tiempo introduzco un método importante de multiplicadores que entran en los lagrangianos condicionados por constricciones geométricas.

Se mostrará al final como el presente esquema conduce directamente a una formulación lagrangiana completa de la teoría de gravitación y otras interacciones en el espacio-tiempo llano de Minkowski, según G. D. Birkhoff.

JAMES CLARK KEITH
Universidad Nacional Autónoma de México
Mayo de 1970.

AGRADECIMIENTOS

Durante el curso de este trabajo, recibí la ayuda económica de la COMISION NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR de México, y el apoyo de mis padres: Mr. and Mrs. JAMES D. KEITH.

INDICE

- I. SISTEMAS DINAMICOS PFAFFIANOS.
- II. PRINCIPIOS DE TRABAJO VIRTUAL Y EL FORMALISMO LAGRANGIANO CON CONSTRUCCIONES ADICIONALES ENTRE LAS VARIABLES - EL METODO DE MULTIPLICADORES.
- III. TEORIAS DE LA GRAVITACION EN ESPACIOS ARBITRARIOS.
- IV. FORMULACION LAGRANGIANA DE INTERACCIONES COVARIANTES EN EL ESPACIO-TIEMPO LLANO.
- V. FORMULACION LAGRANGIANA COMPLETA DE INTERACCION DE LA TEORIA DE G. D. BIRKHOFF EN EL ESPACIO-TIEMPO LLANO DE MINKOWSKI.

I. SISTEMAS DINAMICOS PFAFFIANOS.

Supongo desde un principio que el lector está familiarizado con las propiedades analíticas y geométricas principales de sistemas pfaffianos de ecuaciones diferenciales totales de primer grado, así como su generalización a formas diferenciales de otros grados. Véase Schuh (1968 §8) y Flanders (1963).

El objetivo final es deducir formas precisas de los lagrangianos de interacción que resultan para movimientos de puntos en diferentes tipos de espacios y campos externos. Se considerarán en particular campos escalares, vectoriales y tensoriales, que resultan como términos en el desarrollo en serie de los coeficientes de las ecuaciones de Pfaff en potencias de las componentes u^i del vector velocidad, es decir el vector unitario tangente a la línea de universo.

Los resultados suministran una formulación covariante adecuada de sistemas dinámicos generales sujetos a ciertas constricciones geométricas impuestas por la naturaleza misma del espacio dado, por ejemplo, espacio llano o curvo.

Por lo pronto recordemos la naturaleza de las ecuaciones de Pfaff. Supongamos que $P_i(x^i)$ son las componentes en el espacio-N de una suma de k vectores normales $\vec{P}^{(k)}$ funcionalmente independientes y mutuamente perpendiculares. Estos vectores pueden describirse en términos de un conjunto de k vectores básicos $\hat{e}_n = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_k)$ normales al subespacio $(\hat{e}_{k+1}, \dots, \hat{e}_n)$:

$$\vec{P} = N^n \hat{e}_n \quad n = (1, 2, \dots, k)$$

$$\vec{P}^{(1)} = N^1 \hat{e}_1$$

$$\vec{P}^{(2)} = N^2 \hat{e}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{P}^{(k)} = N^k \hat{e}_k$$

(1)

Primero supongamos que los $\vec{P}^{(n)}$ de la última relación son vectores constantes cuya magnitud y dirección no dependen de la posición en el espacio-N. Con los k vectores $\vec{P}^{(n)}$ asociamos un elemento del hiperplano de N - k dimensiones con desplazamientos arbitrarios dentro del elemento, dados por:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dv^t \hat{e}_t \\ t &= (k+1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

De estas definiciones y (1) tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot d\vec{x} &= (N^n \hat{e}_n) \cdot (dv^t \hat{e}_t) = 0 \\ \vec{P}^{(n)} \cdot d\vec{x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

para cada vector normal independiente.

Vemos que en el primer caso las ecuaciones de Pfaff simplemente describen hiperplanos. En el segundo caso puede pensarse que describen elementos locales de los hiperplanos. Finalmente, cuando los $\vec{P}^{(n)}$ no son vectores constantes sino funciones continuas de las coordenadas $\vec{P}^{(n)}(x^1, x^2, \dots, x^N)$ entonces las ecuaciones de Pfaff,

$$\vec{P}(x^1) \cdot d\vec{x} = 0 \quad (4)$$

describen las condiciones necesarias para unir o ensamblar elementos locales contiguos, $P(x^i)$, $P(x^i + dx^i)$, para formar bandas lisas finitas de superficie.

Si los $\vec{P}(x^i)$ están aún más "condicionados", por ejemplo si deben tener un cierto número A de integrales exactos $\oint^A(x^1, \dots, x^N) = c^A$ tales que,

$$\begin{aligned} d\theta^{\tilde{A}} &= \lambda_{\tilde{k}}^{\tilde{A}} p_{\tilde{i}}^{\tilde{k}} dx^{\tilde{i}} \\ &= (\lambda_{\tilde{1}}^{\tilde{A}} \vec{P}^{(1)} + \lambda_{\tilde{2}}^{\tilde{A}} \vec{P}^{(2)} + \dots + \lambda_{\tilde{k}}^{\tilde{A}} \vec{P}^{(k)}) d\vec{x} = 0 \\ \tilde{A} &= (1, 2, \dots, A) \quad \tilde{k} = (1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (5)$$

entonces las ecuaciones de Pfaff (4) pueden llevar inclusive a familias de determinadas superficies integrales con bandas características. Cuando $k = A$, las últimas ecuaciones pueden resolverse para $P^k_i(x^i)$ en términos de los gradientes de $\phi^A(x^i)$:

$$P^k_i(x^i) = \gamma^k_A \frac{\partial \phi^A}{\partial x^i} \quad (6)$$

Para P^k_i condicionados, los valores de la integral $\int \vec{P} \cdot d\vec{x}$ entre dos puntos fijos de un subespacio correspondiente a una solución, no dependerán del camino que los une siempre que este camino permanezca dentro de dicho subespacio. El camino real tomado depende de cuales subespacios conectan los 2 puntos y esto a su vez queda determinado por los valores iniciales de las x^i_0 .

La dimensión s del subespacio local correspondiente a un sistema de ecuaciones de Pfaff que lo definen,

$$\Omega^{\tilde{k}} = P^{\tilde{k}}_i(x^i) dx^i = 0 \quad (7)$$

$$\tilde{k} = (1, \dots, k) \quad i = (1, \dots, N)$$

es siempre $s = N - k$. El que el espacio local pueda extenderse a una superficie finita de s -dimensiones que satisfaga las ecuaciones dadas, depende en general de que las relaciones (7) sean integrales en el sentido de (6).

Para ecuaciones de Pfaff no integrables o no-holónicas, las soluciones integrales en general tienen dimensionalidad más pequeña, $s^* < s$ que el subespacio local. Una importante (y obvia) excepción se presenta cuando el número de los parámetros independientes del subespacio de la solución es igual a uno. El número de las ecuaciones en la integral equivalente a tales sistemas no integrables es:

$$\nu \geq \frac{k}{k+1} (k+s) = k \quad \text{para } s = 1 \quad (8)$$

Pero entonces, $k = N - s$, o aquí $k = N - 1$, y:

$$s^* = s = 1 \quad (9)$$

En este sentido las trayectorias unidimensionales de la dinámica son los casos más simples que pueden tratarse por métodos pfaffianos. Supongamos que está dada una superficie continua arbitraria o trayectoria fija en el espacio ordinario de n dimensiones. Por consideraciones anteriores es evidente que la elección adecuada de los $P_i^k(x^i)$ en cada punto del espacio n nos permite formular un sistema de ecuaciones pfaffianas locales (generalmente no-integrables) que se integran en superficies o curvas que caracterizan completamente el subespacio deseado.

Con frecuencia resulta más conveniente trabajar con parámetros independientes intrínsecos $(a^1, a^2, \dots, a^s)$ del subespacio y expresar todas las x^i simétricamente en términos de ellos. Un punto $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ pertenece a este subespacio cuando está dado por alguna función de los parámetros independientes a^r , por ejemplo:

$$\begin{aligned} x^i &= f^i(a^1, a^2, \dots, a^s) \\ i &= (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{10}$$

de los espacios ampliados pueden caracterizarse por un sistema de K ecuaciones de Pfaff inducidas en N variables, con la condición solamente de que $N - K$ dé la dimensión del subespacio deseado.

Por ejemplo, supongamos que las ecuaciones pfaffianas originales,

$$\begin{aligned} \Omega^{\tilde{k}} &= p^{\tilde{k}}_i(x^i) dx^i = 0 \\ \tilde{k} &= (1, \dots, k) \quad i = (1, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

describen un cierto subespacio del espacio ordinario de N-dimensiones. Suponiendo que estas relaciones diferenciales son funcionalmente independientes, pueden resolverse para k de las dx^i en términos de las $n - k$ restantes, resulta:

$$\begin{aligned} dx^1 &= U^1_r dx^r \\ &\vdots \\ &\vdots \\ dx^k &= U^k_r dx^r \\ r &= (k+1, k+2, \dots, n) \end{aligned} \quad (13)$$

Para extender el espacio- n mencionado, introduzcamos una transformación de coordenadas local que exprese las s variables "independientes" ($dx^{k+1}, \dots, dx^n$) en (13) en términos de r parámetros independientes ($a^1, \dots, a^s$) tales que:

$$\begin{aligned} dx^{k+r} &= A^r_t da^t \\ r, t &= (1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (14)$$

Comparando (13) y (14) se tienen $k + s = n$ ecuaciones de Pfaff,

$$dx^i = P^i_r(x^i, a^r) da^r \quad (15)$$

en $N = k + 2s$ variables (x^i, a^r). Estas definen un subespacio local de $N - n = s$ dimensiones del espacio ampliado de las nuevas variables x^i, a^r . Este proceso tiene la ventaja de poner todas las coordenadas x^i del espacio original en

igualdad de condiciones como funciones dependientes de los parámetros independientes a^r .

Ilustremos el modo como se pueden formular principios variacionales en términos de las ecuaciones de Pfaff, considerando el caso más simple de sólo un parámetro independiente, $da^r \rightarrow ds$: Este parámetro puede identificarse con la longitud de arco de una trayectoria unidimensional en el espacio de configuración extendido o en el espacio de estado.

Exijamos ahora por lo pronto que no aparezcan explícitamente derivadas de orden superior al primero en las variables x^i en las ecuaciones de movimiento resultantes. Esto significa por ejemplo que en lugar de considerar d^2x^i/ds^2 , está definido un nuevo sistema de n variables,

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} \quad (16)$$

de manera que solo se tienen que considerar las primeras derivadas, dx^i/ds , du^i/ds .

Las ecuaciones de Pfaff para un parámetro independiente s con $(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n) \longrightarrow (x^1, x^2, \dots, x^{2n})$ y $N = 2n + 1$ son entonces:

$$\Omega^k = p_m^k(s, x^m) dx^m + q^k(s, x^m) ds = 0 \quad (17)$$

$$m, k = (1, 2, \dots, 2n)$$

Para que resulte un subespacio unidimensional, las $N - 1$ ecuaciones en N variables (s, x^m) deben ser funcionalmente independientes. Es decir, puede aplicarse directamente la regla de Cramer para resolver (17) las dx^i en términos de ds , con las siguientes formas normales resultantes,

$$\Omega_{\text{normal}}^k = -dx^k + U^k(s, x^m) ds = 0 \quad (18a)$$

o equivalentemente:

$$\frac{dx^1}{U^1(s, x^m)} = \frac{dx^2}{U^2(s, x^m)} = \dots = \frac{dx^{N-1}}{U^{N-1}(s, x^m)} = ds \quad (18b)$$

Cualquier ecuación de Pfaff que se satisfaga a lo largo de la trayectoria-solución será una combinación lineal de las $N - 1$ ecuaciones diferenciales totales (17) o (18), las cuales entonces caracterizan completamente el sistema dinámico. Por consiguiente, introduciendo ciertos multiplicadores arbitrarios $\lambda_k(s, x^m)$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega &= \lambda_k \Omega^k = \lambda_k p_m^k dx^m + \lambda_k q^k ds \\ &= X_m dx^m - Z ds = 0\end{aligned}\tag{19}$$

Las condiciones para que aquí se comporte Z como una función hamiltoniana, con $dZ/ds = \partial Z/\partial s$, son que los coeficientes $X_m = X_m(x^n)$ solamente sean funciones de las x^m y que no dependan explícitamente de s . En tal caso, a lo largo de la trayectoria c^1 en el espacio-estado (s, x^m) asociemos con la forma pfaffiana (19) la integral:

$$\int_{c^1} \omega = \int_{c^1} X_m(x^m) dx^m - Z(s, x^m) ds \tag{20}$$

Luego, cambiemos a nuevas variables usando las relaciones funcionales,

$$x^m = x^m(z^1, \dots, z^n, p^1, \dots, p^n) \quad (21)$$

con un determinante funcional no singular:

$$J = \frac{\partial(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n})}{\partial(z^1, \dots, z^n, p^1, \dots, p^n)} \neq 0 \quad (22)$$

Supongamos simplemente aquí que las x^m son mutuamente independientes, por consiguiente también las z^i, p^i . Apliquemos ahora el teorema de reducción de Darboux (véase Schuh (1968 §8.3)) a la forma par $X_m(x^m) dx^m$ y reducirla a una forma canónica general:

$$X_m(x^m) dx^m = p_i dz^i \quad (23)$$

$$m = (1, \dots, 2n) \quad i = (1, \dots, n)$$

Aquí el número de las z^i, p^i es igual al número de las x^m .

Substituyamos (23) y (21) en (20) para que la última ecuación se reduzca a:

$$\int_{C^1} \omega = \int_{C^1} p_i dz^i - Z(s, z^i, p^i) ds \quad (24)$$

Porque s es el único parámetro independiente, una integral entre puntos exteriores fijos tal como la (24) puede definirse por:

$$I \equiv \int_{s_1}^{s_2} (p_i \frac{dz^i}{ds} - Z) ds \quad (25)$$

Busquemos ahora las ecuaciones que tienen que satisfacer las p^i, z^i para que la acción I tenga un valor estacionario tal que $\delta I = 0$. Definamos,

$$\mathcal{L}(s, z^i, p^i, \frac{dz^i}{ds}) \equiv p_i \frac{dz^i}{ds} - Z(s, z^i, p^i) \quad (26)$$

y pongamos $\delta \mathcal{L} = 0$ para las variaciones de variables

"dependientes" z^i, p^i con s fijo, es decir, con $\delta s = 0$, siguiendo el método conocido:

$$\delta \mathcal{L} = p_i \delta \frac{dz^i}{ds} + \frac{dz^i}{ds} \delta p_i - \delta Z \equiv 0 \quad (27)$$

Porque s y ds no variarán respecto a las variaciones virtuales infinitesimales de las coordenadas z^i, p^i ,

$$\begin{aligned} \delta z^i &\equiv \bar{z}^i - z^i = \epsilon_1 \theta^i(z^i) \\ \delta p^i &\equiv \bar{p}^i - p^i = \epsilon_2 \psi^i(p^i) \end{aligned} \quad (28)$$

encontramos que:

$$\delta \frac{dz^i}{ds} \equiv \frac{d\bar{z}^i}{ds} - \frac{dz^i}{ds} = \frac{d}{ds} \delta z^i \quad (29)$$

Usando estas últimas variaciones y las reducciones por integraciones parciales apropiadas, las variaciones

δI de la integral (25) podemos entonces escribir como:

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{s_1}^{s_2} \delta \mathcal{L} ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(-\frac{dp_i}{ds} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \right) \delta z^i + \left(\frac{dz^i}{ds} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right) \delta p_i \\ &\equiv 0\end{aligned}\tag{30}$$

$i = (1, 2, \dots, n)$

Debido a que las variaciones δp^i , δz^i son independientes y arbitrarias, los coeficientes de las variaciones en (30) deben de anularse idénticamente para que $\delta I = 0$. De estas condiciones resultan ahora las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \quad \frac{dz^i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \tag{31}$$

Puesto que, $\mathcal{L} \equiv p_i \frac{dz^i}{ds} - Z(z^i, p^i, s)$, además con (31) encontramos que,

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dz^i}{ds}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^i} = 0$$

donde las $u^i \equiv dz^i/ds$ entran ahora como nuevas variables dependientes, y $u^i = u^i(s)$. Por consiguiente, la primera relación de (31) conduce a las ecuaciones conocidas de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \quad (33)$$

$$i = (1, 2, \dots, n)$$

donde, de (32), $\mathcal{L} = \mathcal{L}(s, z^i, u^i)$ no depende en las p^i .

Se derivaron estos resultados empezando con las

ecuaciones de Pfaff (19) en las $2n + 1$ variables $(x^1, \dots, x^{2n}, s)$, luego reduciendo estas ecuaciones a su forma canónica (24), y finalmente obteniendo las ecuaciones canónicas de Hamilton (31). Sin embargo, como se sugiere por medio de (33), existe también una formulación lagrangiana que da resultados equivalentes con las variaciones δu^i relacionadas a la δx^i por:

$$\delta u^i \equiv \frac{d}{ds} \delta x^i \quad (34)$$

Estas últimas relaciones generalmente son válidas a condición de que los parámetros infinitesimales ϵ_k que pertenecen a las transformaciones virtuales,

$$\delta x^i = \epsilon_k v_r^k(s, x^i, u^i) \quad (35)$$

en sí mismos no dependen de las variables, es decir son

constantes. Por otro lado, conocemos que si exigimos que el lagrangiano se mantenga invariante bajo transformaciones locales de calibración, $\epsilon_k = \epsilon_k(x^i)$ siendo funciones de las x^i , en consecuencia obtenemos teorías tales como la relatividad general, véase Sokolik & Konopleva (1965); Utiyama (1956).

II. PRINCIPIOS DE TRABAJO VIRTUAL Y EL FORMALISMO LAGRANGIANO CON CONSTRICCIONES ADICIONALES ENTRE LAS VARIABLES-----EL METODO DE MULTIPLICADORES.

Antes de llegar hacia nuestro objetivo, de una formulación lagrangiana de interacciones invariante en sistemas dinámicos, parece conveniente desviarse un poco con el fin de esclarecer completamente como el procedimiento lagrangiano aquí propuesto viene directamente de los sistemas pfaffianos tratados anteriormente y de la conexión consiguiente con los principios de trabajo virtual.

Para empezar, consideremos el sistema definitorio de $m = 2n$ ecuaciones de Pfaff (17) en $N = 2n + 1$ variables. Con un cambio conveniente de variables canónicas $(s, z^i, p^i) \longrightarrow (s, x^i, u^i)$, es evidente que el sistema de $2n + 1$ variables, puede simplemente escogerse como:

$$s, x^1, x^2, \dots, x^n, u^1, u^2, \dots, u^n \quad (36)$$

Aquí la variable dependiente $u^i(s)$ está definida por $u^i \equiv dx^i/ds$.

Usando la regla de Cramer, como en (18), resolvamos de nuevo (12) para las dx^i, du^i en términos de ds , obtendremos las formas normales:

$$\begin{aligned} \Omega^i &= -dx^i + U^i(s, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n) ds = 0 \\ \Omega^{n+1} &= -du^i + A^i(s, x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n) ds = 0 \\ i &= (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (37)$$

Los teoremas fundamentales de existencia y unicidad para el conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas ordinarias (37) (ver ref. Sneddon 1957 §1.2), nos dicen que: En tanto que las funciones $U^i(s, x^i, u^i)$ y $A^i(s, x^i, u^i)$ sean continuas y satisfagan condiciones apropiadas de Lipschitz en la región en consideración, entonces en esa región existen funciones continuas y únicas $x^i(s)$, $u^i(s)$

con derivadas continuas que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{dx^i}{ds}(s) = U^i(s, x^i, u^i) \quad (38a)$$

$$\frac{du^i}{ds}(s) = A^i(s, x^i, u^i) \quad (38b)$$

La última de estas relaciones sugiere la forma deseada de las ecuaciones de fuerza que gobiernan un sistema dinámico, es decir, con aceleración du^i/ds explícitamente dada en términos de coordenadas de posición y velocidad. No obstante las ecuaciones (38a,b) no están aún "condicionadas" y por lo tanto pueden describir cualquier trayectoria arbitraria en un espacio de dimensión $2n + 1$. Nuestra tarea es encontrar cuáles trayectorias realmente coinciden con los movimientos de un sistema dinámico.

Geométricamente, con cada punto (s, x^i, u^i) del

espacio-estado, las relaciones (38a,b) puede pensarse como la asociación de $2n$ tangentes direccionales dx^i/ds , du^i/ds que especifican completamente la dirección de un elemento de línea dado de una trayectoria arbitraria en el espacio-estado.

Además, cada trayectoria unida de elementos de línea en el espacio-estado se proyecta en una curva $x^i = x^i(s)$ en un hiperplano $u^i = a^i$ (constantes) y en otra $u^i = u^i(s)$ en un hiperplano normal $x^i = b^i$ (constantes). La intersección de hipercilindros normales originados en las curvas $x^i = x^i(s)$, $u^i = u^i(s)$ de proyección, es idéntica con la trayectoria en el espacio-estado. Cambiando a una trayectoria variada en el espacio-estado conduce por consiguiente a proyecciones variadas en las secciones normales $u^i = a^i$, $x^i = b^i$.

Enfoquemos nuestra atención en la proyección $x^i = x^i(s)$ en el hiperplano $u^i = a^i$. La pendiente de esta curva en cada uno de sus puntos está dada por funciones $U^i(s, x^i, u^i)$ donde las u^i se refieren a coordenadas u^i de un punto de la trayectoria real en el espacio-

estado. Entonces:

$$dx^i(s) = U^i(s, x^i, u^i) ds \quad (39)$$

La idea es utilizar la proyección $x^i = x^i(s)$ sobre $u^i = a^i$ (constantes) para caracterizar la trayectoria real en el espacio-estado.

Dentro del hiperplano, $u^i = a^i$ (constantes), asociemos entonces a cada punto de $x^i = x^i(s)$ una dirección tangencial (es decir, el elemento de línea (39)) y n normales funcionalmente independientes (elementos de plano sobre $u^i = a^i$, con componentes P_m^k). Ambos, elementos de línea y de plano, satisfacerán un sistema acoplado de ecuaciones de Pfaff:

$$\Omega_{línea}^i = - dx^i + U^i(s, x^i, u^i) ds \equiv 0 \quad (40a)$$

$$\Omega_{\text{planos normales}}^k = P_m^k d\chi^m = P_i^k dx^i + P_{n+1}^k ds = 0 \quad (40b)$$

$k = (1, \dots, n) \quad m = (1, \dots, n+1)$

$$\chi^i = x^i \quad \chi^{n+1} = s$$

Cuando las n relaciones funcionalmente independientes (40b) son resueltas por la regla de Cramer para n de las dx^i en términos de ds , el resultado naturalmente conduce a (40a). Entonces las componentes normales P_m^k definidas en (40b) deben de la misma manera ser funciones de punto (s, x^i, u^i) en el espacio-estado, es decir, $P_m^k = P_m^k(s, x^i, u^i)$ donde $k = (1, 2, \dots, n)$ y $m = (1, 2, \dots, n+1)$.

Las componentes P_m de una normal arbitraria a la curva $x^i = x^i(s)$ en el hiperespacio $u^i = a^i$ puede entonces expresarse como combinaciones lineales de $k = n$ normales funcionalmente independientes P_m^k de (40a):

$$P_m = \alpha_k P_m^k \quad (41)$$

$$k = (1, \dots, n) \quad m = (1, \dots, n+1)$$

Aquí los multiplicadores α_k pueden ser funciones de las s, x^i, u^i .

De (41), las componentes P_m de una normal arbitraria a $x^i = x^i(s)$ que está en el hiperplano $u^i = a^i$ satisfacen

la siguiente ecuación de Pfaff:

$$P_m dx^m = \alpha_k p^k_m dx^m = 0 \quad (42)$$

Esto es una consecuencia directa de las relaciones de definición (40a,b).

De hecho, multiplicando (40a) por $-P_i$ resulta:

$$P_i dx^i - P_i U^i ds = 0 = P_m dx^m \quad (43)$$

comparando los coeficientes de los dos lados encontramos que,

$$P_{n+1} = -P_i U^i \quad (44)$$

lo cual muestra (como era de esperarse) que solo n de las $n + 1$ componentes P_m en el espacio s, x^i son funcionalmente independientes.

La siguiente tarea involucra el seleccionar de entre todas las trayectorias posibles (38a,b), que conectan dos puntos fijos en el espacio-estado de dimensión $2n + 1$, únicamente aquellas trayectorias estacionarias cuyas coordenadas satisfacen un principio variacional, o lo que es equivalente, un sistema apropiado de ecuaciones de Euler-Lagrange como en (33).

Si el lagrangiano no contiene explícitamente las aceleraciones $\alpha^i \equiv du^i/ds$, entonces es equivalente al minimizar la proyección $x^i = x^i(s)$ en el espacio s, x^i al minimizar la trayectoria ampliada en el espacio-estado de dimensión $2n + 1$. Para mostrarlo, tomemos el lagrangiano escalar invariante $\mathcal{L}$ que resulta de (38) expresados en términos de los multiplicadores λ_i, η_i ,

$$\mathcal{L} \equiv \lambda_i (u^i - U^i) + \eta_i (\alpha^i - A^i) \quad (45)$$

$$i = (1, \dots, n)$$

donde $u^i \equiv dx^i/ds$ y $\alpha^i \equiv du^i/ds$. Entonces,

$\partial \mathcal{L} / \partial \alpha^i \equiv 0$ implica que $\gamma_i = 0$, y por lo tanto no entra en el segundo grupo de términos $\gamma_i (\alpha^i - A^i)$. Nos quedamos con el primer grupo de términos $\lambda_i (u^i - U^i)$ que son aquellos asociados con la proyección $x^i = x^i(s)$ en el espacio s, x^i . Debido a esta reducción afectiva en la dimensionalidad del problema, es suficiente desde ahora limitar las operaciones a las proyecciones $x^i = x^i(s)$ en el espacio s, x^i .

Introduzcamos ahora una suposición física, de modo que una partícula puntual que se mueva a lo largo de una curva en el espacio s, x^i y que pase a través de dos puntos fijos $A(s_1)$ y $B(s_2)$, seguirá exactamente esa curva cuyas coordenadas dan un valor estacionario, $\delta I_0 \equiv 0$, a la funcional:

$$I_0 = \int_{A(s_1)}^{B(s_2)} P_m dx^m$$

(46)

$$\delta I_0 \equiv 0$$

Una interpretación física interesante de ésta suposición es la premisa que las leyes de la naturaleza únicamente describen trayectorias de equilibrio donde $\delta I_0 \equiv 0$, y excluyendo todas las demás posibles trayectorias inequilibradas donde $\delta I \gtrless 0$. Por supuesto este requisito debe entenderse solamente en el sentido de movimiento clásico.

Comparemos el principio básico postulado en (46) con el principio de trabajo virtual nulo. En su forma más general la anulación del trabajo virtual total, $\delta W^* = F_i^{\text{total}} \delta x^i = 0$, por desplazamientos arbitrarios, δx^i , implica la anulación de la fuerza total, es decir,

$$F_i^{\text{total}} = F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}} = 0 \quad (47)$$

en cualquier punto.

En este caso, supongamos que las variables $s, x^i, u^i, du^i/ds$ solamente entran en consideración en el principio de trabajo virtual $\delta W^* = F_i^{\text{total}} \delta x^i = 0$. La última relación puede expresarse como:

$$\delta W^* \equiv \lambda_k L_i^k \delta x^i = 0 \quad (48)$$

$$L_i^k \delta x^i = 0 \quad (\text{condiciones subsidiarias})$$

$$\tilde{k} = (1, \dots, k) \quad i = (1, \dots, n)$$

Puesto que $\lambda_k L_i^k$ son las componentes de la fuerza total en un punto, tenemos: $\therefore$

$$\lambda_k L_i^k \equiv F_i^{\text{total}}(s, x^i, u^i, \frac{du^i}{ds}) \equiv 0 \quad (49)$$

Siguiendo los métodos conocidos, (véase Lanczos (1966 §V.1)), multipliquemos (48) por ds e integremos sobre la trayectoria entre los puntos fijos, $A(s_1), B(s_2)$, en el espacio s, x^i , para obtener:

$$\int_{s_1}^{s_2} \delta W^* ds = \int_{s_1}^{s_2} F_i^{\text{total}} \delta x^i ds \quad (50)$$

En general, algunas o todas de las k formas pfaffianas funcionalmente independientes,

$$\omega_{(1)} = L_i^k \delta x^i \quad (51)$$

para desplazamientos virtuales ($\delta s \equiv 0$) puede no ser integrables en el sentido de que $F_i \delta x^i$ pueda derivarse de la variación virtual de un lagrangiano escalar $\mathcal{L}(s, x^i, u^i)$ como:

$$\int_{s_1}^{s_2} (F_i \delta x^i) ds = \int_{s_1}^{s_2} (\delta \mathcal{L}) ds \quad (52)$$

Sin embargo, para constricciones "integrables" definidas como en (52), se obtiene inmediatamente (ya que $\delta s \equiv 0$):

$$\int_{s_1}^{s_2} F_i^{\text{total}} \delta x^i ds = \delta \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{L} ds \quad (53)$$

Por consiguiente, en este caso se tiene,

$$F_i^{\text{total}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0 \quad (54)$$

es decir, las ecuaciones de Lagrange (ciertas en cada punto de la trayectoria estacionaria en el espacio s, x^i) son de hecho idénticas a la anulación de las componentes F_i de la fuerza integrable total (aplicada + reacción) en un punto. Consideremos ahora las relaciones (46) en este sentido.

Las últimas relaciones muestran que las ecuaciones de Lagrange son equivalentes con $F_i^{\text{total}} = 0$, siempre que la F_i^{total} sean de naturaleza integrable en el sentido de (52).*

* Las contribuciones restantes no-integrables, cualesquiera que sean, agregarán simplemente términos dependientes en la aceleración $A^i(s, x^i, u^i, du^i/ds)$ a las ecuaciones de Lagrange (54). Tales contribuciones no son derivables de gradientes escalares como $\partial \mathcal{L} / \partial x^i$, $\partial \mathcal{L} / \partial u^i$. Entonces $F_i^{\text{total}} = (F_i)_{\text{integrable}} + A_i = 0$.

Ya que $F_i^{\text{total}} = F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}}$ de (47), a condición de que F_i^{aplicada} y $F_i^{\text{reacción}}$ sean independientemente de naturaleza integrable, puede entonces (53) igualmente escribirse en la forma ampliada,

$$\int_{s_1}^{s_2} (F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}}) \delta x^i ds = \delta \int (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) ds \quad (55)$$

donde $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ son lagrangianos respectivamente generados por F_i^{aplicada} y $F_i^{\text{reacción}}$. Estos argumentos están por supuesto limitados a fuerzas integrables en el sentido de (52). Que tal suposición no es de hecho demasiado restringida y además abarca una clase muy amplia de sistemas dinámicos de gran interés físico, se mostrará en la discusión de las siguientes páginas.

Parace razonable suponer que toda la información acerca del sistema que está contenida en los lagrangianos $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ de interacción y reacción en (55), es de hecho

una consecuencia de cualquier sistema de k ecuaciones de Pfaff funcionalmente independientes (40a,b) que definen la curva $x^i = x^i(s)$ en el espacio s, x^i . El único "truco" tiene lugar cuando un número adicional de relaciones auxiliares (constricciones) existen entre las variables originales s, x^i, u^i .

Digamos que α es el número de dichas relaciones de constricción, y pueden expresarse además como relaciones diferenciales totales adicionales. Si existen k relaciones pfaffianas (40a,b), que definen un sistema inicialmente sin constricciones, entonces aparecerán $k + \alpha$ ecuaciones de Pfaff funcionalmente independientes que definirán el sistema constreñido. Por consiguiente, tiene que aumentarse el número de diferenciales totales, de $n + 1$ a $n + \alpha + 1$. Por ejemplo:

$$dx^i, ds \text{ ----- } dx^i, d\xi^\alpha, ds \quad (56)$$

El sistema resultante ampliado correspondiente a (40a) puede entonces escribirse en forma normal como:

$$\tilde{\Omega}^i = - dx^i + U^i(s, x^i, \xi^\alpha, u^i, \frac{d\xi^\alpha}{ds}) ds = 0 \quad (57)$$

$$\tilde{\Omega}^{n+\tilde{\alpha}} = - d\xi^{\tilde{\alpha}} + V^{\tilde{\alpha}}(s, x^i, \xi^\alpha, u^i, \frac{d\xi^\alpha}{ds}) ds = 0$$

$$i = (1, \dots, n) \quad \tilde{\alpha} = (1, \dots, \alpha)$$

Como se pide, las diferenciales dx^i y $d\xi^\alpha$ a lo largo de la proyección $x^i = x^i(s)$, están entonces totalmente definidas en términos de desplazamientos ds de la variable independiente.

En casos de interés físico las constricciones (57) que son integrables por naturaleza entre las variables s, x^i, u^i son tales que las ξ^α y $d\xi^\alpha$ se comportan como variables mudas y pueden despreciarse. Es decir, sólo constricciones del tipo,

$$d\xi^{\tilde{\alpha}} = \tilde{A}^{\tilde{\alpha}}_i(s, x^i, u^i) dx^i + \tilde{B}^{\tilde{\alpha}}(s, x^i, u^i) ds = 0 \quad (58)$$

se presentan en casos prácticos.

Tomando en cuenta lo anterior, el sistema dinámico constreñido (57) se reduce a la forma más simple:

$$\tilde{\Omega}^i = -dx^i + U^i(s, x^i, u^i) \, ds = 0 \quad (59a)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{n+\tilde{\alpha}} &= A^{\tilde{\alpha}}_i(s, x^i, u^i) \, dx^i + B^{\tilde{\alpha}}(s, x^i, u^i) \, ds = 0 \\ i &= (1, 2, \dots, n) \quad \tilde{\alpha} = (1, 2, \dots, \alpha) \end{aligned} \quad (59b)$$

Ya que el parámetro independiente se somete a variaciones arbitrarias ds en (59a,b) los coeficientes de ds se anulan lo que conduce a las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$-u^i + U^i(s, x^i, u^i) = 0 \quad (60a)$$

$$A^{\alpha}_i(s, x^i, u^i) u^i + B^{\alpha}(s, x^i, u^i) = 0 \quad (60b)$$

$$u^i \equiv \frac{dx^i(s)}{ds}$$

Con las restricciones anteriores, supongamos ahora que para sistemas dinámicos constreñidos, la integral de acción real $I = \int P_m d\chi^m$ que queremos minimizar, como en (46), puede expresarse como una combinación lineal o como una superposición de formas pfaffianas funcionalmente independientes del tipo (59a,b), por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_{A(s_1)}^{B(s_2)} P_m d\chi^m = \int_{s_1}^{s_2} (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) ds \\
 &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\lambda_i (-u^i + U^i) + \bar{\lambda}_\alpha (A^\alpha_i u^i + B^\alpha) \right] ds
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

$$\delta I_0 \equiv 0$$

En (61), se puede identificar a $\mathcal{L}$ con el lagrangiano de interacción de las fuerzas aplicadas y a $\bar{\mathcal{L}}$ con el lagrangiano que describe a cualquier constrictión invariante geométrica (u otra) que debe existir entre

las variables del sistema real durante el movimiento.

Excluyendo los términos que se anulan en la integración, recordemos de (52) que las partes principales de (61) pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &\equiv F_i^{\text{aplicada}} \cdot \delta x^i \\ \delta \bar{\mathcal{L}} &\equiv F_i^{\text{reacción}} \cdot \delta x^i\end{aligned}\quad (62)$$

Estas ecuaciones pueden entenderse como definiciones de las fuerzas aplicadas de interacción y las fuerzas de reacción. Comparándolos con (61), los lagrangianos, para fuerzas así definidas, pueden expresarse como:

$$\mathcal{L} \equiv \lambda_i (-u^i + U^i) \quad \text{interacciones externas} \quad (63a)$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha} (A^{\alpha}_i u^i + B^{\alpha}) \quad \begin{array}{l} \text{Constricciones} \\ \text{intrínsecas} \end{array} \quad (63b)$$

De entre las $3n + \alpha + 1$ variables $(s, x^i, u^i, \lambda_i, \bar{\lambda}_\alpha)$ involucradas (63a,b) las ecuaciones de Euler-Lagrange para trayectorias estacionarias suministran automáticamente $2n + \alpha$ relaciones, que son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} = 0 \quad \begin{array}{l} n \text{ ecuaciones de} \\ \text{movimiento} \end{array}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = -u^i + U^i = 0 \quad (63')$$

$n +$ condiciones
auxiliares entre
las variables
 (s, x^i, u^i) .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\lambda}_\alpha} = A^\alpha_i u^i + B^\alpha = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores tienen la forma de condiciones auxiliares. Estas condiciones indican que el lagrangiano total, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}$, es aquí un invariante absoluto (precisamente cero) en cada punto, análogamente a la fuerza total de (47).

Sí, además de las relaciones (63') los multiplicadores,

$$\lambda_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} \equiv P_i(s, x^i, u^i) \quad (63'')$$

no se dejan indeterminados, sino mas bien se consideran como n funciones $P_i(s, x^i, u^i)$, arbitrariamente prescritas, (digamos los campos externos presentes en cada punto del espacio), entonces (63') da $2n + \alpha$ relaciones entre las $2n + \alpha + 1$ variables $(s, x^i, u^i, \bar{\lambda}_\alpha)$. Con eliminaciones apropiadas, cada una de las variables $(x^i, u^i, \bar{\lambda}_\alpha)$ puede por lo tanto especificarse inequívocamente en términos de la variable s , como se deseaba.

En virtud de las definiciones (62) los lagrangianos $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ de (63a,b) tienen dimensiones de energía. Más aún, la derivación anterior del principio de acción,

$\delta I_0 = 0$, del principio de trabajo virtual por medio de (50) nos lleva a identificar $\mathcal{L}$ con la energía de

interacción. La que sirve para acoplar el sistema a campos externos por medio de multiplicadores prescritos $\lambda_i = p_i(s, x^i, u^i)$. Análogamente $\bar{\mathcal{L}}$, que aquí se considera como surgido de las constricciones intrínsecas entre las variables (s, x^i, u^i) , puede pensarse que caracteriza a potenciales internos cuyos gradientes motivan las fuerzas de reacción de las constricciones que satisface el sistema.

Ejecutando las variaciones indicadas en (61), como es usual con valores fijos de variable independiente s , ($\delta s \equiv 0$), y entre extremos fijos s_1 y s_2 , se obtienen las fuerzas aplicadas y de reacción de (62) en términos de sus respectivos lagrangianos $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$. Esto es:

$$F_i^{\text{aplicada}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} \quad (64a)$$

$$F_i^{\text{reacción}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial u^i} \quad (64b)$$

Ahora de (55) recordamos que

$$\int_{s_1}^{s_2} \delta (\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}) ds = \int_{s_1}^{s_2} (F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}}) \delta x^i ds \quad (55')$$

de modo que se define un lagrangiano total $\mathcal{L}^*$ como

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}, \quad (65)$$

entonces es evidente que (64a,b) satisfacen relaciones análogas a las (54), a saber:

$$\begin{aligned} F_i^{\text{total}} &= F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial u^i} = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

III. TEORIAS DE LA GRAVITACION EN ESPACIOS ARBITRARIOS.

Queda por considerar qué formas pueden tomar $\mathcal{L}$ y $\overline{\mathcal{L}}$ en un sistema físico. Para obtener la forma general de $\mathcal{L}$ sin llegar necesariamente a los mecanismos físicos involucrados, simplemente desarrollemos los coeficientes pfaffianos $\lambda_i = P_i(s, x^i, u^i)$ y $\emptyset(s, x^i, u^i) = \lambda_i u^i$, que aparecen en (63a) en una serie de potencias del vector unitario tangente u^i . Resulta:

$$\lambda_i(s, x^i, u^i) = \lambda_i^0(s, x^i) + \lambda_{ij}(s, x^i) u^j + \dots$$

$$\emptyset(s, x^i, u^i) = \emptyset^0(s, x^i) + \emptyset_j(s, x^i) u^j + \dots$$

(67)

$$\emptyset \equiv \lambda_i u^i$$

Sustituyendo estos últimos desarrollos para la λ_i y para la $\emptyset \equiv \lambda_i u^i$ en (63a) y reagrupando términos del mismo grado en las u^i , llegaremos al siguiente lagrangiano de interacción de campos externos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \emptyset^0(s, x^i) + \psi_i(s, x^i) u^i + \psi_{ij}(s, x^i) u^i u^j \\ (67') \\ + \psi_{ijk}(s, x^i) u^i u^j u^k + \dots \end{aligned}$$

Por la simetría de los productos u^i , $u^i u^j$, $u^i u^j u^k$, etc., solamente componentes totalmente simétricas de ψ_i , ψ_{ij} , ψ_{ijk} , etc., contriubyen a los términos no nulos de las interacciones. En la práctica los campos externos arbitrariamente aplicados que determinan trayectorias estacionarias e integrables, en el sentido de (52), probablemente no dependen del punto particular de la trayectoria desde el cual s se mide. Entonces, así parece razonable para otros argumentos imponer una restricción más a los campos $\emptyset^0$, ψ_i , ψ_{ij} , etc., en (67'), de tal manera que no dependan explícitamente de s . Así que,

cambiando la anotación a las convenciones usuales, el lagrangiano de interacción (67') se reduce finalmente a la forma:

$$\mathcal{L} = \phi(x^i) + eA_i(x^i) u^i + mh_{jk}(x^i) u^j u^k + \dots \quad (68)$$

Aquí, e y m , que deben pensarse como constantes absolutas, indican la intensidad del acoplamiento de los campos externos a la partícula puntual de la trayectoria y dan $\mathcal{L}$ en unidades de energía.

El problema dinámico básico en ausencia de cualesquier constricciones internas (es decir, con $\bar{\mathcal{L}} = 0$) se reduce entonces a calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para los acoplamientos escalar, vectorial y tensorial (ϕ , $eA_i u^i$, $mh_{jk} u^j u^k$, etc.) de (68). Ya que los campos ϕ , A_i , h_{ij} , etc., entran linealmente, cada contribución puede calcularse separadamente y superponerse al resultado final. Algunos cálculos se harán en la siguiente parte.

Sólo falta discutir la naturaleza de los lagrangianos $\bar{\mathcal{L}}$ de constricción (63b) y las fuerzas de constricción correspondientes $F_i^{\text{reacción}}$ involucradas según (64b). Para este propósito, es suficiente hacer notar que la naturaleza de dichas constricciones es, muchas veces, geométrica.

Empleando argumentos bien conocidos, recordemos que pueden definirse ciertas clases de espacios (proyectivo, afín, euclidiano, etc.) en términos de invariantes que caracterizan a los grupos asociados de las transformaciones permitidas.

De especial interés en esta discusión es la constricción intrínseca:

$$u^i u_i = 1 \quad g_{ij} = (1, -1, -1, -1) \quad (69)$$

Lo anterior suministra la condición invariante que debe cumplirse en cada punto de un espacio-tiempo llano de Minkowski.

De (63b) el correspondiente lagrangiano de

constricción $\bar{\mathcal{L}}$, para el espacio tiempo de Minkowski, por consiguiente debe ser de la forma:

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (u^i u_i - 1) \quad (70)$$

donde $\bar{\lambda}$ es un multiplicador indeterminado. La condición de constricción $u_i u^i - 1 \equiv 0$ se cumple en cada punto. Esto contrasta con el lagrangiano $\mathcal{L}$ de (63a) donde los multiplicadores λ_i determinan arbitrariamente los campos externos prescritos cuya pendiente $dx^i/ds = U^i$ es la parte que queda por determinar.

Sustituyendo $\bar{\mathcal{L}}$ de (70) en las ecuaciones de fuerza (64b) y fijandose que $-F_i^{\text{reacción}} = F_i^{\text{aplicada}}$, fácilmente se llega al siguiente resultado:

$$-\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^i} + \frac{d}{ds} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial u^i} = \frac{d}{ds} (\bar{\lambda} u_i) = F_i^{\text{aplicada}} \quad (71)$$

El lagrangiano de constricción $\bar{\mathcal{L}}$ (70) que caracteriza a las teorías de fuerza en espacio-tiempo llano, genera entonces fuerzas de reacción (o inerciales) $d\bar{\lambda}u_i/ds$ en concordancia con las suposiciones anteriores.

Por otro lado, supongamos que los movimientos dinámicos no están restringidos a espacio-tiempo llano.

Supongamos en cambio que están constreñidos a espacio-tiempo curvo de geometría riemanniana. Entonces, el requisito (69) conduce a condiciones de constricción más restringidas que aquellas impuestas por la forma métrica riemanniana:

$$g_{jk}(x^i) u^j u^k = 1 \quad (72)$$

El lagrangiano de constricción $\bar{\mathcal{L}}$ correspondiente a la condición invariante (72), en analogía con (70), es entonces:

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (g_{jk}(x^i) u^j u^k - 1) \quad (73)$$

En ausencia de cualquier interacción externa $\mathcal{L}$ del tipo (68) en espacio riemanniano curvo, el lagrangiano total $\mathcal{L}^*$ consiste solamente de $\bar{\mathcal{L}}$. Las trayectorias estacionarias resultantes de $\mathcal{L}^*$ son entonces simplemente geodésicas en el espacio riemanniano, es decir:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0 \quad \frac{d\bar{\lambda}}{ds} = 0 \quad (74)$$

$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} g^{mi} (g_{mj,k} + g_{km,j} - g_{jk,m})$$

Si existen ciertas fuerzas externas dentro del espacio riemanniano, deben agregarse al lado derecho de (74). Con $\mathcal{L}^* = \bar{\mathcal{L}} + \mathcal{L}$ se encuentra que:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} \quad (75)$$

$\mathcal{L}$ en general aquí está dado por (68).

Quitando algunas constricciones, por ejemplo como las de (69) o (72), debe ser posible, al menos en principio, construir $\bar{\mathcal{L}}$ empleando los invariantes (menos en número) que caracterizan a espacios aún más generales, como aquellos que están basados en geometrías no riemanniana, afín, proyectiva, etc.. Sin embargo, por razones de simplicidad, el campo de la presente discusión está limitado a aquellas interacciones físicas y fenómenos naturales superpuestos en un fondo de espacio-tiempo llano.

En resumen, esta sección muestra el carácter unificador de los métodos pfaffianos cuando son aplicados en la solución de sistemas dinámicos con una variable independiente.

Al empezar, $N - 1$ ecuaciones de Pfaff en N variables con coeficientes continuos, describen elementos de líneas ensamblados que se unen para generar trayectorias arbitrarias en espacio-estado o espacio ampliado de configuración. Las trayectorias mínimas estacionarias o de equilibrio pueden entonces escogerse de entre todas las posibles trayectorias por un principio variacional adecuado.

Las resultantes ecuaciones de movimiento de Lagrange (o las ecuaciones canónicas de Hamilton) son covariantes, de forma invariante, sencillamente debido a la invariancia de las formas pfaffianas escalares ante transformaciones de coordenadas generales no singulares.

En los casos integrables, aquí considerados, se ha mostrado que el principio del trabajo virtual total nulo $\oint W^* = F_i \delta x^i = 0$, y el principio variacional $\oint \mathcal{L}^* ds = 0$, para seleccionar las curvas estacionarias, son esencialmente equivalentes.

Puesto que F_i aplicada δx^i y F_i reacción δx^i son integrables independientemente, en el sentido anterior, puede efectuarse la división posterior de $\mathcal{L}^*$ en los lagrangianos de interacción externa y restricción interna, $\mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}}$. Todo esto conduce a una interpretación física fructífera del método bien conocido, de los multiplicadores de Lagrange para sistemas con extremos constreñidos.

En el presente caso, las condiciones de restricción que entran en $\bar{\mathcal{L}}$, identifican la naturaleza del espacio

propuesto de fondo, multiplicando sus invariantes algebraicos por ciertos multiplicadores indeterminados $\bar{\lambda}_\alpha$.

Además, siempre que actúan fuerzas externas en el espacio, éstas se introducen por medio del lagrangiano de interacción $\mathcal{L}$ (68). Las restricciones físicas sobre los campos exigen además que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente en la variable independiente s .

Las aplicaciones del procedimiento lagrangiano general a sistemas dinámicos desarrollados aquí, se efectuarán en el próximo capítulo. Se considerará especialmente la teoría de G. D. Birkhoff de fuerzas en el espacio-tiempo de Minkowski y en particular a la derivación lagrangiano covariante de las fuerzas gravitacionales correspondientes que afectan los movimientos dinámicos de una partícula puntual.

IV. FORMULACION LAGRANGIANA DE INTERACCIONES COVARIANTE EN EL ESPACIO-TIEMPO LLANO.

En este capítulo aplicaremos los resultados anteriores al cálculo de fuerzas de interacción y las correspondientes ecuaciones de movimiento de una partícula puntual en el espacio-tiempo llano.

Como se mencionó en (69) la condición de constricción invariante que caracteriza la geometría pseudo-euclidiana de Minkowski está dada por:

$$g_{ij} u^i u^j = u^i u_i = 1 \quad (76)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Todas las transformaciones permitidas (movimientos) de un punto en el espacio-tiempo de Minkowski son tales que mantienen la forma cuadrática (76), y los coeficientes g_{ij} , absolutamente invariantes. Lo que es mas, la invariancia de la forma (76) sirve para definir los movimientos permitidos, es decir, transformaciones puntuales en el cuadri-espacio.

Cualquiera que sea el movimiento, mientras suceda en espacio-tiempo llano, las cuatro componentes de la velocidad de universo (u^1, u^2, u^3, u^4) deben estar constreñidas de tal manera que en cada punto de cualquier trayectoria $u^i u_i - 1 = 0$. De acuerdo con el capítulo anterior, resulta que el lagrangiano de constricción $\bar{\mathcal{L}}$ (70) debe agregarse al lagrangiano de interacción libre $\mathcal{L}$ (68). Si no existen otras restricciones, entonces el lagrangiano total $\mathcal{L}^*$ del sistema dinámico es precisamente:

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \bar{\mathcal{L}} \quad (77)$$

donde:

$$\mathcal{L} = \phi(x^i) + eA_i(x^i) u^i + mh_{jk}(x^i) u^j u^k + \dots \quad (78a)$$

$$\bar{\mathcal{L}} \equiv \frac{1}{2} \bar{\lambda} (u^i u_i - 1) \quad (78b)$$

Aquí $\bar{\lambda}$ es un multiplicador indeterminado y los factores e y m que dan la intensidad de acoplamiento se consideran como constantes absolutas.

Solamente consideremos términos hasta segundo grado en la velocidad de universo u^i en (78a). Efectuando variaciones $\delta \mathcal{L}^* = 0$ y tomando en cuenta que:

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{du^i}{ds} \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (79)$$

obtenemos después de algunas reducciones y cancelaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \frac{du_i}{ds} &= (\theta_{,i} - u_i \frac{d\theta}{ds}) + e(A_{j,i} - A_{i,j})u^j \\ &+ m(h_{jk,i} - 2h_{ij,k} + u_i \frac{dh_{jk}}{ds}) u^j u^k \\ &- 2m(h_{ij} - u_i u^k h_{jk}) \frac{du^j}{ds} \end{aligned} \quad (80)$$

Estas relaciones satisfacen obviamente las condiciones de ortogonalidad:

$$u^i \frac{du_i}{ds} = 0 \quad (81)$$

Además, puesto que suponemos que $\mathcal{L}$ es aquí explícitamente independiente de s , la ley de energía $dH^*/ds = \partial H^*/\partial s = 0$, (donde H^* está definida por $H^* = u^i \partial \mathcal{L}^*/\partial u^i - \mathcal{L}^*$), nos muestra que:

$$\frac{dH^*}{ds} = \frac{d}{ds} (m h_{jk} u^j u^k - \emptyset + \bar{\lambda}) = 0 \quad (82)$$

Usando la condición auxiliar de integrabilidad (82) y eliminando $d\emptyset/ds$ de las ecuaciones (80) resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \frac{du_i}{ds} &= \emptyset_{,i} + f_i^{e.m.} + f_i^g - u_i \frac{d\bar{\lambda}}{ds} \\ &\quad - m(h_{ij,k} u^j u^k + 2 h_{ij} \frac{du^j}{ds}) \end{aligned} \quad (83)$$

$$f_i^{e.m.} = e(A_{j,i} - A_{i,j})u^j$$

$$f_i^g = m(h_{jk,i} - h_{ij,k})u^j u^k$$

Ahora reduciendo la condición (82) además de las condiciones asociadas,

$$\emptyset_{,i} - m(u^j u^k h_{jk,i} + h_{ij} \frac{du^j}{ds}) = \bar{\lambda}_{,i} - k \frac{du_i}{ds} \quad (82')$$

donde el factor escalar k puede anularse o ser una función de las variables (x^i, u^i) o una constante.

Sustituyendo las condiciones (82') en las relaciones reducidas (83) y cancelando términos, resulta la siguiente

reducción extraordinaria:

$$(\bar{\lambda} + k) \frac{du_i}{ds} = (\lambda_{,i} - u_i \frac{d\bar{\lambda}}{ds}) + f_i^{e.m.} + f_i^g \quad (84)$$

Aquí $\bar{\lambda}$ se comporta como si fuera solamente una función de las x^i , y $f_i^{e.m.}$, f_i^g se definen como en (83).

Hagamos notar que la teoría expresada por (84) es análoga en espacio-tiempo llano a la teoría tensorial-escalar de Brans-Dicke (véase Dicke (1962) y (1964)) en el espacio-tiempo curvo de Riemann.

Se supone que las ecuaciones (84) representan la formulación más sencilla de una teoría general de interacciones en espacio-tiempo llano. En el siguiente capítulo compararemos estos resultados con un caso relevante de teorías en el espacio-tiempo llano, a saber la teoría de G. D. Birkhoff (1943).

V. FORMULACION LAGRANGIANA COMPLETA DE INTERACCION DE LA TEORIA DE G. D. BIRKHOFF EN EL ESPACIO-TIEMPO LLANO DE MINKOWSKI.

Es interesante ver que G. D. Birkhoff, al trabajar su teoría de la relatividad general covariante de fuerzas en el espacio-tiempo llano, utilizó una condición de constricción adicional más exigente aún que $u^i u_i = 1$. Examinemos la naturaleza de esta restricción adicional, y finalmente indicaremos como la teoría de Birkhoff puede derivarse de un formalismo lagrangiano invariante.

De hecho, Birkhoff estableció sus ideas dentro del marco de la dinámica relativista de flúidos. Empezó por postular un tensor de energía-ímpetu de la materia homogénea adiabática ($p = p(\xi)$):

$$T_{ij} = T_{ji} = \rho u_i u_j - p g_{ij} \quad (85)$$

$$i, j = (1, 2, 3, 4)$$

Aquí $\rho(x^i)$, $u^i(x^i)$ son respectivamente distribuciones continuas de densidad y velocidad prescritas como funciones en puntos fijos (x^1, x^2, x^3, x^4) del espacio-tiempo de Minkowski.

Por consiguiente, se define formalmente una densidad de fuerza volumétrica cuadridimensional, (véase, Birkhoff (1950, pp.954,976))), como la divergencia de T_{ij} :

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{materia} \quad (86)$$

Por razones de integrabilidad, (véase, Birkhoff (1950 ibid.)), se impuso un requisito adicional sobre lo que

son esencialmente las fuerzas de reacción f_i en (86), a saber, que esta fuerza sea dondequiera normal a la cuadri-velocidad u^i , es decir:

$$u^i f_i = 0 \quad (87)$$

Para nuestros propósitos, parece conveniente hacer a un lado el anterior marco de fluídos empleado por Birkhoff, y formular la idea esencial de fondo involucrada en el postulado físico (87), como sigue:

Ya que $F_i^{\text{total}} = F_i^{\text{aplicada}} + F_i^{\text{reacción}} = 0$, como se definió en (62), en presencia de constricciones que dan cuadri-fuerzas de reacción no nulas, se tendrá siempre que:

$$F_i^{\text{aplicada}} = - F_i^{\text{constricciones de reacción}} \neq 0 \quad (88)$$

$$i = (1, 2, 3, 4)$$

La contraparte de $u^i f_i = 0$ en (87) entonces en este caso es simplemente el postulado físico que demanda que

las fuerzas de reacción sean siempre normales a subespacio, $dx^i = u^i ds$, de desplazamientos permitidos, es decir:

$$u^i F_i^{\text{constricciones de reacción}} \equiv 0 \quad (89a)$$

Como consecuencia de (88), (89a) implica entonces simultáneamente la condición necesaria independiente:

$$u^i F_i^{\text{aplicada}} \equiv 0 \quad (89b)$$

Cualquiera de las condiciones (89a,b) puede pensarse como consecuencia de la otra.

Por esta razón, en acuerdo a (89b), las cuadrifuerzas aplicadas que se derivan del lagrangiano de interacción libre $\mathcal{L}$ (68) debe ser análogamente siempre perpendicular a las u^i , es decir a la trayectoria dinámica

en espacio-tiempo llano.

Las restricciones (89a,b), son completamente análogas al principio del trabajo virtual simplificado siguiente:

$$\begin{aligned}
 dw_{\text{aplicado}} &= F_i^{\text{aplicada}} dx^i \equiv 0 \\
 dw_{\text{reacción de constricciones}} &= F_i^{\text{reacción de constricciones}} dx^i \equiv 0
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

Físicamente estas relaciones sirven para definir sistemas "en equilibrio". En tales sistemas las fuerzas de reacción que provienen de constricciones geométricas (e independientemente las fuerzas aplicadas) por definición no efectúan trabajo en cualquier punto. Por consiguiente, ni uno ni el otro de los cuadri-vectores F_i^{aplicada} ó $F_i^{\text{reacción}}$ tiene ninguna de sus componentes tangencial al subespacio de los desplazamientos permitidos.

Para sistemas en espacios tridimensionales que estén en "equilibrio", (véase Lanczos (1966 § III.1)), los principios de trabajo virtual análogos en forma a (90) dicen que las fuerzas de reacción no son disipativas. Un ejemplo elemental de lo anterior nos lo da una partícula deslizándose sin fricción encima de una mesa.

Este principio se mantiene válido para sistemas dinámicos en tres dimensiones a condición de que las fuerzas inerciales sean incluidas como una parte de las fuerzas aplicadas. Para este caso se obtiene una forma simplificada del principio de d'Alembert.

Una partícula sobre la superficie de la tierra estará en "equilibrio" en este sentido, solamente en los polos y en el ecuador, en donde los desplazamientos permitidos son normales a las fuerzas de reacción o de constricción.

Otro ejemplo nos lo da una partícula "en equilibrio" en el marco propio en reposo de un disco que gira en el espacio tridimensional. Solamente cuando las fuerzas de reacción sean normales a la orilla del disco, se encontrará la partícula "en equilibrio".

En contraste al caso tridimensional, cuando se lleva al caso de cuatro dimensiones, con las fuerzas de reacción identificadas con la reacción del sistema a constricciones geométricas, existen buenas razones para pensar que los principios de trabajo virtual simplificados se cumplen en cada punto de una trayectoria estacionaria (del espacio-tiempo) de una partícula puntual. Como lo hizo notar G. D. Birkhoff (1950 *ibid.*), el origen de estas razones surge del análisis de ciertos criterios de integrabilidad necesarios.

Supongamos ahora que todo sistema dinámico que merezca este nombre debe ser sistema "en equilibrio" en cuatro dimensiones. "En equilibrio" debe entenderse aquí en el sentido de las definiciones (90) ó sus equivalentes (89), (87). Por consiguiente, las fuerzas de reacción asociadas con las constricciones geométricas (e independientemente las fuerzas aplicadas) se postulan ser normales a los desplazamientos permitidos, o lo que es lo mismo, normal al vector tangente unitario u^i .

El que esta suposición sea de hecho sostenible, se

debe en gran manera de que los resultados de la teoría estén de acuerdo con las observaciones experimentales de los fenómenos naturales. Enfatizamos que la actual consideración es meramente una consecuencia teórica de los postulados (89a,b), y no una cuestión de la validez de los postulados. Inclusive, la forma exacta de los campos ϕ , A_i , h_{jk} , etc., no necesita entrar en estos argumentos (es decir, no se debe especificar a priori la fuente de los campos). Mejor dicho, solamente se necesita considerar la forma covariante de las ecuaciones de fuerza resultantes, que contienen estos campos, y sus gradientes.

Como resulta, las condiciones extra (89a,b) introducidas en la forma (87) por G. D. Birkhoff es todo lo que se requiere para efectuar una modificación del sistema menos "condicionado" de las ecuaciones de fuerza en espacio-tiempo llano obtenidas en (80) y (84), empleando solamente la restricción geométrica $u^i u_i = 1$. Como era de esperarse esta modificación conduce a las expresiones propuestas por Birkhoff para las cuadri-fuerzas "atómica", eléctrica y gravitacional en espacio-tiempo llano.

Con referencia a los lagrangianos de constricción y de interacción en (78a,b), los postulados adicionales (89a,b) usando definiciones (64a,b) para F_i aplicada y F_i constricción, después de efectuar reducciones encontramos que se impone sobre el sistema (80) ó (84) las condiciones adicionales:

$$u^i F_i^{\text{aplicada}} \equiv 0 \longrightarrow \frac{d}{ds} (m u^j u^k h_{jk} - \emptyset) \equiv 0 \quad (91a)$$

$$u^i F_i^{\text{constricción}} \equiv 0 \longrightarrow \frac{d\tilde{\lambda}}{ds} \equiv 0 \quad (91b)$$

Se ve que las últimas relaciones suministran condiciones más restrictivas que las relaciones análogas (82) asociadas al sistema (80), a saber:

$$\frac{d}{ds} (m u^j u^k h_{jk} - \emptyset + \tilde{\lambda}) \equiv 0 \quad (82')$$

Existen solamente dos maneras en que las condiciones (91a) pueden generalmente satisfacerse. En la primera, u^i permanece normal a la suma de las fuerzas aplicadas, es decir a $u^i \sum_{(a)} F_i^{(a)} \equiv 0$. Por lo tanto, se obtiene:

$$\text{CASO I.} \quad \frac{d\theta}{ds} \equiv \frac{d}{ds}(m u^j u^k h_{jk}) \quad (92a)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds} \equiv 0 \quad (92b)$$

En el segundo caso, cada una de las fuerzas aplicadas permanece independientemente normal a u^i , es decir $u^i F_i^{(a)} \equiv 0$. Por lo tanto, en este caso se tiene:

$$\text{CASO II.} \quad \frac{d\theta}{ds} \equiv 0 \quad \frac{d}{ds}(m u^j u^k h_{jk}) \equiv 0 \quad (93a)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds} \equiv 0 \quad (93b)$$

Por lo pronto, examinemos el CASO I. Puesto que, por definición, $\emptyset = \emptyset(x^i)$, la potencial $\emptyset$ es explícitamente independiente de s y u^i , tal que (79) reduce a

$$\frac{d\emptyset}{ds} = u^j \emptyset_{,j} \quad (94)$$

Entonces, puede expanderse (92a) usando (94) y (79).

Resulta:

$$u^i (\emptyset_{,i} - m u^j u^k h_{jk,i} - 2m h_{ij} \frac{du^j}{ds}) \equiv 0 \quad (95)$$

De la constricción geométrica fundamental $u^i u_i = 1$, que caracteriza el espacio-tiempo de Minkowski, se obtiene por diferenciación respecto a s , con coeficientes g_{ij} constantes y dados por (76):

$$u^i \frac{du_i}{ds} = 0 \quad (96)$$

Por lo general, puede satisfacerse (95) a condición de que solamente la cantidad entre paréntesis tenga la misma dirección que du_i/ds , es decir solamente a condición de que:

$$\emptyset_{,i} - m u^j u^k h_{jk,i} - 2m h_{ij} \frac{du^j}{ds} \equiv k \frac{du_i}{ds} \quad (97)$$

k puede ser aquí constante o puede ser una función escalar arbitraria de las variables y los campos. En casos excepcionales, k ó du_i/ds pueden ser idénticamente cero.

El siguiente paso es utilizar (97) y (92a) para calcular el primer término del lado derecho de la relación (80):

$$\begin{aligned} \emptyset_{,i} - u_i \frac{d\emptyset}{ds} &\equiv k \frac{du_i}{ds} + m u^j u^k h_{jk,i} + 2m h_{ij} \frac{du^j}{ds} \\ &\quad - m u_i u^j u^k \frac{dh_{jk}}{ds} - 2m u_i u^k h_{jk} \frac{du^j}{ds} \end{aligned} \quad (98)$$

Esta condición es sinónima de las condiciones postuladas (91a) o equivalentemente (92a).

Sustituyendo (98) en las ecuaciones no-condicionadas (80) y cancelando términos, llegamos finalmente al siguiente resultado algo sorprendente:

$$(\bar{\lambda} - k) \frac{du_i}{ds} = e(A_{j,i} - A_{i,j})u^j + m(h_{jk,i} - h_{ij,k})u^j u^k \quad (99)$$

Esta relación también satisface la condición de ortogonalidad $u^i du_i/ds = 0$.

Siguiendo una cadena de razonamientos análoga a la que condujo a (98), el CASO II en (93) da similarmente las siguientes condiciones de eliminación que coexisten simultáneamente con el postulado (93a):

$$\begin{aligned} -m u^j \frac{dh_{ij}}{ds} - 2m h_{ij} \frac{du^j}{ds} &= k \frac{du_i}{ds} \\ \frac{d\emptyset}{ds} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (100)$$

Debemos comparar estas relaciones con (97).

Sustituyendo (100) en (80) y eliminando términos, se obtiene finalmente las ecuaciones de fuerza en espacio-tiempo llano correspondientes a las constricciones adicionales $u^i F_i^{(a)} = 0$, $u^i F_i^{\text{constricción}} = 0$ de (93a,b):

$$\begin{aligned}
 (\bar{\lambda} - k) \frac{du_i}{ds} &= \phi_{,i} + e(A_{j,i} - A_{i,j})u^j \\
 &+ m(h_{jk,i} - h_{ij,k})u^j u^k
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad \frac{d\bar{\lambda}}{ds} = 0$$

Puesto que $d\bar{\lambda}/ds$ es siempre cero, $\bar{\lambda}$ debe permanecer constante a lo largo de s . Entonces $\bar{\lambda}$ es, o una primera integral de movimiento o una constante absoluta. El multiplicador k es en general una función indeterminada de las variables. Sin embargo, en casos especiales donde $\bar{\lambda} - k$ se considera como un factor de escala constante y absoluto, análogamente a e y m , lo anterior sigue siendo

cierto si $\bar{\lambda} - k \equiv 1$. En este caso (101) reproduce exactamente la forma de las ecuaciones de fuerza de G. D. Birkhoff para la materia, electricidad y gravitación en el espacio-tiempo llano (véase G. D. Birkhoff (1950 pp. 920-928)).

El método anterior de eliminación es vulnerable a una extensión directa para casos donde el lagrangiano de interacción $\mathcal{L}$ es de orden superior al segundo grado en las u^i . Por ejemplo, definamos al lagrangiano de interacción "cosmológica" como:

$$g \, C_{ijk} \, u^i u^j u^k \quad (102)$$

tomemos a C_{ijk} como completamente simétrico en todos los índices, en virtud de la simetría correspondiente de los productos $u^i u^j u^k$. Por la misma razón, potenciales tensoriales completamente simétricos son suficientes para describir interacciones de cualquier grado en las u^i .

La aplicación directa del método anterior, con:

$$\frac{d}{ds}(g_{ij} u^i u^j) \equiv 0 \quad (103)$$

en concordancia con los postulados (93a) conduce inmediatamente a las componentes de las cuadri-fuerzas "cosmológicas" siguientes:

$$g(C_{jkm,i} - C_{ijk,m}) u^j u^k u^m \quad (104)$$

Ya que las fuerzas son lineales en los campos, estos términos pueden entonces sumarse directamente al lado derecho de (101).

Lo que se ha probado aquí es que, las ecuaciones covariantes de fuerza de G. D. Birkhoff, en realidad, se derivan directamente de un formalismo lagrangiano invariante, del mismo tipo del que condujo a las relaciones de la fuerza en espacio-tiempo llano, (80). De hecho, las ecuaciones de Birkhoff resultan de someter (80) a las

condiciones auxiliares simples de Birkhoff (89). Esto último establece que todos los sistemas dinámicos en cuatro dimensiones están "en equilibrio" en el sentido de que las fuerzas aplicadas y de constricción se supone que son normales a la trayectoria de la partícula.

Se deduce que, aunque hay que poner cierto cuidado al escoger las constricciones geométricas y dinámicas, una vez que estas constricciones estén seleccionadas, no existen problemas fundamentales involucrados en el cálculo de las ecuaciones de movimiento de Birkhoff con cualesquiera ecuaciones covariantes de movimiento obtenibles de un formalismo lagrangiano invariante. De hecho, como se ve de argumentos generales, la solución del problema no es más difícil que calcular geodésicas en la teoría de Einstein.

Las ecuaciones covariantes de fuerza resultantes deben entonces considerarse de una validez general una vez que las constricciones básicas han sido seleccionadas. En teorías de espacio-tiempo llano, como la de Birkhoff, existe aún la cuestión de que campos $\emptyset$, A_i , h_{ij} , etc.,

deben determinarse para casos particulares.

En el caso de fuentes puntuales, es costumbre deducir los campos totales de la superposición de soluciones puntuales que satisfagan las ecuaciones inhomogéneas de Poisson de la forma:

$$\square \vartheta = -4\pi \varrho \quad (105a)$$

$$\square A_i = -4\pi \sigma v_i \quad (105b)$$

$$\square h_{ij} = -4\pi \chi T_{ij} \quad (105c)$$

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x_i}$$

Las soluciones puntuales de estas últimas ecuaciones toman la forma covariante bien conocida:

$$\vartheta = \frac{D}{v_k R^k}, \quad A_i = \frac{e v_i}{v_k R^k}, \quad h_{ij} = \frac{\chi M (a v_i v_j + b g_{ij})}{v_k R^k} \quad (106)$$

donde D , e , y $\sqrt{M}$ son constantes absolutas que indican la intensidad del acoplamiento entre la fuente y su campo. Así, $\emptyset$, A_i , h_{ij} , se transforman respectivamente como escalares vectores y tensores doblemente covariantes en el espacio-tiempo de Minkowski.

En (105c) el tensor de energía-ímpetu T_{ij} tiene la siguiente forma general, que se postula para un fluido homogéneo adiabático y relativista en espacio-tiempo llano (véase G. D. Birkhoff (1950 pp. 973-)).

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - p(\rho) g_{ij} \equiv \rho (a v_i v_j + b g_{ij}) \quad (107)$$

Aquí a y b son funciones sin dimensiones, determinadas por la ecuación de estado del fluido, y $v_i(x^i)$ son las componentes de la velocidad del fluido en el punto fijo bajo consideración. De acuerdo con la definición (107), T_{ij} puede incluir la densidad de energía del campo, o de "materia".

Aunque las ecuaciones de la fuerza covariante de Birkhoff (101) posean una estructura covariante bien

definida, la teoría es aún fenomenológica al grado que las funciones $\underline{a}$ y $\underline{b}$, que entran en las definiciones (106) y (107) de h_{ij} y T_{ij} , están indeterminadas.

Para su solución central, G. D. Birkhoff considera una superposición de soluciones puntuales de nucleones individuales ligados, para los cuales la velocidad de perturbación infinitesimal en las colisiones se postula igual a la velocidad de la luz. Esto garantiza que no haya una subsecuente violación de las leyes que gobiernan el movimiento del fluido relativista. Todas las partículas-fuente que generan componentes del campo gravitacional (106), pueden entonces considerarse como materia ligada con una velocidad de perturbación $v = c = 1$. Para un estado ligeramente perturbado del fluido, los valores en equilibrio de ρ_0 y p_0 , se convierten en $\rho_0 + \delta\rho$ y $p_0 + \delta p$. Las ecuaciones de divergencia, $T_{ij,j} = 0$, pueden ser manipuladas para que den la velocidad de perturbación:

$$v_{\text{perturbación}} = \sqrt{\frac{-d\mathcal{L}b/d}{d\mathcal{L}a/d + d\mathcal{L}b/d}} \equiv 1 \quad (108)$$

Suponiendo que a y b sean independientes de $\mathcal{L}$, la ecuación (108) se reduce a,

$$b/a = -\frac{1}{2} \quad (109)$$

y esta relación, a sustituirse en (107) y (106), sirve para definir el fluído perfecto de Birkhoff, junto con las soluciones puntuales (nucleones) correspondientes para h_{ij} :

$$T_{ij}^{\text{fluído perfecto}} = \mathcal{L}(2 v_i v_j - g_{ij}) \quad (110a)$$

$$h_{ij}^{\text{solución puntual}} = \frac{\mathcal{L}M(2 v_i v_j - g_{ij})}{v_k R^k} \quad (110b)$$

Cuando el potencial (110b), se sustituye por h_{ij} en las ecuaciones covariantes de movimiento (101), las

trayectorias resultantes para los movimientos de un punto en el campo de un cuerpo central fijo, resultan estar de acuerdo con las tres pruebas "cruciales" de la relatividad general. La teoría de Birkhoff, por lo tanto, da resultados que concuerdan con todas las evidencias observacionales actuales de los efectos gravitacionales.

Por otra parte, parece probable, como se sugiere por la manera en que h_{ij} surge de T_{ij} , que la forma verdadera de la solución puntual de h_{ij} depende del estado final de la materia nuclear.

Uno puede preguntarse, por ejemplo, si las soluciones puntuales para nucleones con y sin spin nuclear, difieren una de la otra de un modo detectable debido a los efectos del momento angular. ¿Es posible que una estrella que consistiese solamente de hidrógeno, (spin $\frac{1}{2}$), generase diferentes componentes detectables h_{ij} del campo gravitacional, que una estrella similar que consistiese de helio, (spin 0)?

Una ventaja de las teorías en espacio-tiempo llano es que tienden a destacar la importancia de cuestiones de este

tipo involucrados con la masa gravitacional activa. Las fuerzas de espacio-tiempo llano provienen de campos generados por fuentes externas, y, por lo tanto, puede pensarse que son sensibles a la estructura interna de las fuentes, particularmente a la velocidad de perturbación nuclear y el spin.

Por otro lado, en teorías de espacio-tiempo curvo, donde los efectos gravitacionales aparecen por condiciones de constricción del espacio de Riemann, (véase (75)), los efectos de la estructura interna de las fuentes externas están parcialmente ocultos por la geometría. Por ejemplo, lo usual en tales teorías es postular de antemano la estructura del espacio, como en la solución central simétrica de Schwarzschild. Posteriormente procedemos a calcular las geodésicas correspondientes en el espacio postulado. El resultado es que no se explica como se generó el espacio curvo.

En el sentido opuesto a las ecuaciones de constricción puramente geométricas (74) del espacio de Riemann, vayamos al otro extremo y digamos algo acerca del caso de

interacción pura donde tendremos solamente:

$$\mathcal{L}^* \equiv \mathcal{L} = \emptyset + eA_i u^i + mh_{jk} u^j u^k + \dots \quad (111)$$

La derivada total del hamiltoniano en este caso es simplemente:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{d}{ds} \left(u^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^i} - \mathcal{L} \right) = \frac{d}{ds} (mh_{jk} u^j u^k - \emptyset + \dots) = 0 \quad (112)$$

Como en (93a), supongamos que (112) se satisface al tener:

$$\frac{d\emptyset}{ds} = 0 \quad \frac{d}{ds} (mh_{jk} u^j u^k) = 0 \dots \quad (113)$$

La segunda de estas relaciones puede extenderse para darnos:

$$u^i \left(u^j \frac{dh_{ij}}{ds} + 2 h_{ij} \frac{du^j}{ds} \right) = 0 \quad (114)$$

Por suposición, en este caso de interacción pura, no hay constricciones geométricas, (es decir, relaciones adicionales entre las variables x^i, u^i). Entonces las u^i son independientes, y para que (114) se satisfaga para u^i arbitraria, es necesario que el coeficiente entre paréntesis en (114) sea idénticamente cero. Usando este hecho, las ecuaciones de movimiento, que se derivan de (111), simplemente se reducen a:

$$\begin{aligned} \emptyset_{,i} + e(A_{j,i} - A_{i,j})u^j + m(h_{jk,i} - h_{ij,k})u^j u^k \\ + \dots = 0 \end{aligned} \quad (115)$$

Esencialmente, estas relaciones son en forma idénticas a las ecuaciones de fuerza (101) de G. D. Birkhoff, menos el término de fuerza inercial, que surge de la restricción geométrica, $u^i u_i = 1$, que caracteriza al espacio-

tiempo llano.

¡Debe notarse que la simple apariencia de (115) se siente algo rara, debido a que la falta de constricciones geométricas nos deja aquí sin geometría; No obstante, en un caso importante donde el observador no está acelerado con respecto al marco propio de la partícula puntual, las du_i/ds por definición son cero, y (115) coincide con las ecuaciones de fuerza de Birkhoff en el espacio-tiempo llano (101).

Se concluye entonces que el caso de interacción pura (111, 115), tiene cierto significado en marcos que son inerciales (u^i constantes) con respecto a marco propio en reposo ($u^1=1$; $u^2=u^3=u^4=0$) de la partícula puntual. Se sigue que las fuerzas "aparentes", (por ejemplo, centrífugas, Coriolis, etc.), que aparecen en el marco propio deben de estar relacionadas con la aceleración aparente de las fuentes de los campos h_{ij} en (115).

Para mostrarlo, llevemos el cálculo de la cuadrifuerza al mismo marco propio (en reposo) donde (115) toma la forma:

$$\frac{d}{dt}(eA_i + mh_{i1}) = \frac{\partial}{\partial x^i}(eA_1 + mh_{11}) \quad (116)$$

Usando (106), las ecuaciones (116) suministran las siguientes fuerzas vectoriales tridimensionales que actúan en el marco propio en reposo de la partícula puntual:

$$\frac{d}{dt}(2m v_1 h \vec{v}) = e(-\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{v}A_1) + m \vec{v}h_{11} \quad (117)$$

Aquí, $\vec{v}$ es la velocidad aparente de la fuente, como se observa desde el marco propio en reposo de la partícula, y $v_1 = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. El término izquierdo de la primera ecuación de (117) es esencialmente la fuerza "aparente" de Mach que surge cuando la fuente se acelera respecto a la partícula.

La ventaja intrínseca de calcular las interacciones

en el marco propio, o en alguno de sus marcos inerciales asociados, es que ni las componentes de la cuadri-aceleración du^i/ds , ni las derivadas de orden superior entran en el lagrangiano del sistema. Entonces, el método íntegro del tratamiento anterior puede manejarse con cierta confianza, aún cuando los potenciales externos $\emptyset, A_i, h_{ij}$ (106) tengan que extenderse a tiempos retardados, $t - R/c$, para tomar en cuenta sus velocidades de propagación finitas.

En suma, aquí se han introducido las ecuaciones de fuerza covariantes para el caso de partículas puntuales urgidas por campos externos y constreñidas a moverse en el espacio-tiempo llano.

Se supone que el movimiento dinámico coincide con las trayectorias estacionarias, $\delta \mathcal{L}^* = 0$, de un lagrangiano invariante $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \overline{\mathcal{L}}$ que consiste de dos partes:

i) $\mathcal{L} = \emptyset + eA_i u^i + mh_{jk} u^j u^k + \dots$, el que caracteriza las interacciones de una partícula puntual de carga e y masa propia m con los campos externos $\emptyset, A_i, h_{ij}$, etc..

ii) Un lagrangiano de constricción $\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (u^i u_i - 1)$, el que impone condiciones integrables que restringen el movimiento a un marco de referencia del espacio-tiempo de Minkowski.

Sin constricciones adicionales, las ecuaciones covariantes de movimiento que resultan son de forma algo complicada (80). Posteriormente, al imponer las condiciones $u^i F_i^{\text{aplicada}} = u^i F_i^{\text{constricción}} = 0$, como primeramente lo propuso G. D. Birkhoff, conduce a varias cancelaciones en (80), que esencialmente resultan en las ecuaciones covariantes de fuerza de Birkhoff simplificadas (101).

En marcos que se mueven con velocidad constante relativa al marco propio en reposo de una partícula puntual, du_i/ds es igual a cero, y las fuerzas de constricción geométrica se anulan.

Se queda uno entonces con una teoría cuyas ecuaciones de fuerza coinciden con la teoría de interacciones puras (115), $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, donde $u^i F_i^{\text{aplicada}}$

automáticamente es cero. En el sistema propio en reposo, o sus sistemas inerciales asociados, todas las fuerzas se derivan sólo de las interacciones externas. En particular, las fuerzas "aparentes" centrífugas y otras de aceleración pueden derivarse en términos de interacciones gravitacionales remotas con la demás materia relativamente acelerada del universo, de acuerdo con el principio de Mach.

Parece aquí que el punto importante es que las teorías covariantes de cuadri-fuerzas en espacio-tiempo llano, como la propuesta por G. D. Birkhoff, surgen de una manera natural como trayectorias estacionarias

$\delta \mathcal{L}^* = 0$ de un lagrangiano parcial $\mathcal{L}$ "condicionado" por constricciones "físicas" y condiciones geométricas.

Ya que tales teorías de espacio-tiempo llano resultan directamente de un principio lagrangiano variacional usual, puede suponerse que éstas manifiestan un alto grado de generalidad, y pueden usarse con cierta confianza, una vez que se acepten las condiciones de restricción fundamental.

BIBLIOGRAFIA

- Birkhoff, G.D. (1950,1943), COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS,
Amer. Math. Soc.
- (1942), "El concepto matemático de tiempo y
la gravitación", Boletín Soc. Mat.
Mex. 1, 4-5, p.1-23 (1944)
- Dicke, R.H. (1964), "Experimental Relativity", véase
DeWitt.
- Eddington, A.S. (1954), THE MATHEMATICAL THEORY OF
RELATIVITY, Cambridge.
- Einstein, A. (1955), MEANING OF RELATIVITY, 5th. Ed.
Princeton.
- Flanders, H. (1963), DIFFERENTIAL FORMS, Academic Press.
- Graef-Fernández, C. (1952), "Campo gravitacional de un
punto masa en movimiento
arbitrario en la teoría de
Birkhoff", Rev.Mex. de Fis.,
1, 1, 11.
- Lanczos, C. (1966,1949), THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF
MECHANICS, Univ. of Toronto.
- Moshinsky, M. (1950), "On the interactions of Birkhoff's
gravitational field with the
electromagnetic and pair fields",
Phys. Rev. 80, 4, 514-519.
- Nordström, G. (1912), "Relativitätssprinzip und Gravitation",
Phys. Zeit., 13, 1126.
- Schuh, J.F. (1968), MATHEMATICAL TOOLS FOR MODERN PHYSICS,
Philips Technical Library.

- Snedon, I.N. (1957), ELEMENTS OF PARTIAL DEFFERENTIAL EQUATIONS, McGraw-Hill.
- Sokolik, S.A. & Konopleva, N.P. (1965), "Unified description of interactions", Nuc. Phys., 72, 667-676.
- Utiyama, R. (1956), "Invariant theoretical interpretation of interactions", Phys. Rev., 10, 5, 1597-1607.
- DeWitt, C. & DeWitt, B. (1963,1964), RELATIVITY, GROUPS AND TOPOLOGY, Gordon & Breach.