

(1-40)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE OYARZABAL

INVERSION DEL ESPACIO, REFLEXION DEL
TIEMPO Y CONJUGACION DE CARGA

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE OYARZABAL

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A
ALBERTO ALONSO Y CORIA

México, D.F.

1973



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES

A MI HERMANO

MIS PAGES

A. MI HERMANO

I N D I C E .

C A P I T U L O I .

PARIDAD, CONJUGACION DE CARGA, INVERSION DEL TIEMPO

Introducción	1
1.1 Paridad	
1.1a Generalidades	6
1.1b.- Paridad del Pion	12
1.1c.- Tratamiento General.....	14
1.2.- Conjugación de carga.....	20
1.3.- Reflexión del tiempo	29

C A P I T U L O II .

VIOLACION A LA PARIDAD .

2.1.- El enigma. θ - λ	34
2.2.- Limite para la conservación de \mathcal{P}	36
2.3.- Decaimiento β	39

C A P I T U L O III .

TEOREMA PTC .

Introducción	55
3.1a Reflexión fuerte.....	57
3.1b.- Conjugación Hermitiana	60
3.1c.- TPC.....	61
3.2.- Algunas aplicaciones.....	64

C A P I T U L O IV .

EL MESON K^0 Y LA VIOLACION A LA SIMETRIA CP 73 |

4.1.- Las particulas K_1^0 y K_2^0	73
4.2.- Formalismo de Wigner-Weisskopf.....	77
4.3.- Consecuencias de CP	86
4.4.- El descubrimiento del proceso $K_L^0 \rightarrow 3\pi$	88

4.5 - Formalismo Canónico	95
---------------------------------	----

C A P I T U L O V .

VIOLACION DE T	102
----------------------	-----

CONCLUSIONES	108
--------------------	-----

APENDICE A

A.1.- Teoría del campo	109
------------------------------	-----

A.2.- Cuantización	113
--------------------------	-----

A.3.- Teorema de Noether	123
--------------------------------	-----

A.4.- Cuantización del campo electromagnético	131
---	-----

APENDICE B.

B.1.- Ecuación de Dirac	135
-------------------------------	-----

B.1.a.- Derivación	135
--------------------------	-----

B.1.b.- Propiedades	137
---------------------------	-----

B.1.c.- solución de onda plana	141
--------------------------------------	-----

B.1.d Límite no relativista	146
-----------------------------------	-----

B.2.- Fermiones	147
-----------------------	-----

82.	
82.	
80.	
81.	
82.	

82.	
82.	
80.	
81.	
82.	
82.	

NO HAY CIENCIA SIN FANTASIA
NI ARTE SIN REALIDAD

PROLOGO

A través de la historia el hombre, y no por vanidad, se ha preocupado por el abismal mundo del espejo. Así, se funde la imaginación del hombre con la imagen espejo del mundo "real" presentando una vasta región para el recreo de la creatividad del novelista.

El físico, en un principio escéptico, niega la existencia de diferencias entre el mundo y el mundo a través de un espejo. Sin embargo el pensamiento del hombre sufre una conmoción al establecerse en 1957 que el mundo del espejo es definitivamente distinto al nuestro. Si bien no tan poético no por ello menos extraño que el imaginado por los pensadores.

El tiempo, ese ente intangible y tan presente. Esa angustia del hombre por definir su futuro y pasado. Mas ¿que es futuro?. En el mundo macroscópico la respuesta nos la ofrece la mecánica estadística, respuesta basada, no en sí, en las leyes que obedecen las partículas sino en la hueste de parámetros que son involucrados en el sistema. Pero ¿puede definirse un futuro en el mundo i

rreverente de una partícula? ¿que le pasaria al universo si en lugar de envejecer rejuvenecieramos?.

Este trabajo presenta, como primer capítulo, lo que significa un espejo en la teoría de campo (inversión del espacio) y el trocar futuro por pasado (reflexión del tiempo). Se presenta además el intercambio entre partículas y antipartículas preparando el terreno para observar si es posible discernir entre nuestro mundo y su antítesis.

Los espejos, sin embargo, no obedecen las reglas de juego que nos hubiera gustado (¿?) que jugaran. Por ello se dedica el segundo capítulo a un análisis de la violación de P en el decaimiento β , presentandose un caso simplificado, y aprovechando para introducir en forma simple una de las técnicas para atacar interacciones en la teoría de campo.

El tercer capítulo versa sobre el teorema PTC ofreciendo una demostración para teorías de campo lagrangianas hecha por Lüders. Se analizan tambien las consecuencias principales de este teorema y la hipótesis de invariancia PC.

La naturaleza, sin embargo, no tranquila con el estropicio realizado, hecha por tierra la hipótesis de invariancia PC. El cuarto capítulo analiza la violación a

esta simetría y por ende (a través del teorema PTC) de la invariancia bajo T, desarrollando para ello el formalismo de Wigner-Weisskopf y coronándolo con la presentación del formalismo canónico del sistema $K^0-\bar{K}^0$.

No satisfechos aún del medio para mostrar la violación de T, dedicamos un pequeño capítulo para tratar de exhibirla de una forma indirecta.

Para las personas no familiarizadas con la teoría de campo se ofrecen dos apéndices con los resultados más relevantes.

CAPITULO I
 PARIDAD, CONJUGACION DE CARGA,
 INVERSION DEL TIEMPO

Introducción

Consideremos la operación de inversión del espacio o paridad

$$\begin{aligned} \vec{r} &\xrightarrow{P} \vec{r}' = -\vec{r} \\ t &\rightarrow t' = t \end{aligned}$$

Bajo esta transformación el sistema de ejes cartesianos es invertido (fig. 1), llevando entonces un sistema derecho a un sistema izquierdo.

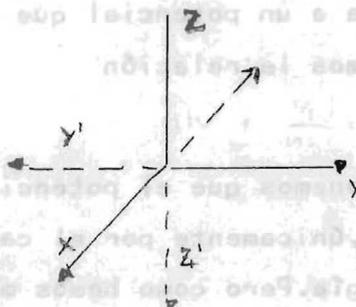


figura 1

En la física clásica no existe ninguna diferencia entre estos dos sistemas, esto es, no es posible distinguir entre izquierda y derecha. Por ejemplo, si construimos dos aparatos, uno de ellos imagen espejo del otro, la física clásica no puede establecer ninguna diferencia en el comportamiento de ellos. (Dos relojes contruidos de esa forma da

rían exactamente la misma hora). Seamos más precisos; consideremos una partícula libre, su energía estará dada en términos de su momento por la relación

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

de ahí que, si a esta ecuación le aplicamos la operación paridad

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow -\vec{p}$$

y por lo tanto

$$E \longrightarrow E$$

esto es, la energía es un escalar ante la inversión del espacio. Si ahora, consideramos el caso en que nuestra partícula se haya sujeta a un potencial que dependa solo de las coordenadas, tendremos la relación

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

si por ejemplo suponemos que el potencial es un pseudoescalar, la partícula, únicamente por el cambio de descripción, perdería energía. Pero como hemos mencionado que la energía es un escalar, entonces es necesario que

$$V(\vec{r}) \longrightarrow V'(\vec{r}) = V(-\vec{r})$$

Al colocar nuestra partícula en un campo eléctrico sabemos que la energía será ahora

$$E \longrightarrow E - q\psi(\vec{r})$$

pero entonces al invertir el espacio

$$E - q\psi(\vec{r}) = E' - q\psi'(\vec{r})$$

implicando por consiguiente que el potencial eléctrico se transforma como

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi'(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

Si la colocamos en un campo puramente magnético entonces el momento será

$$\vec{p} = \frac{e}{c} \vec{A}$$

Usando de nuevo que la energía es un escalar obtenemos

$$\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{x}) = -\vec{A}(-\vec{r}, t)$$

Por último, observando las ecuaciones

$$\square \vec{A} = \vec{J}$$

$$\square \psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$$

obtenemos

$$\rho(\vec{x}) \rightarrow \rho(-\vec{r}, t)$$

$$\vec{J}(\vec{x}) \rightarrow -\vec{J}(-\vec{r}, t)$$

De aquí podemos concluir que las leyes de la física (clásica) son invariantes ante la operación de la paridad.

La base de la discusión consistió entonces, en considerar a la energía como escalar. Con este tipo de argumentos es fácil observar que ante la transformación

$$\vec{r} \xrightarrow{T} \vec{r}' = \vec{r}$$

$$t \xrightarrow{T} t' = -t$$

llamada inversión del tiempo, las leyes de la física clásica son de nuevo invariantes. Por ejemplo, en el caso de la

energía, usando la misma fundamentación

$$E \xrightarrow{T} E$$

es claro que

$$V(\vec{r}) \xrightarrow{T} V(\vec{r})$$

$$\rho(\vec{r}) \xrightarrow{T} \rho(\vec{r})$$

Como \bar{A} debe presentar el mismo comportamiento que \bar{p}

$$\bar{A}(x) \longrightarrow \bar{A}'(x) = -\bar{A}(\vec{r}, -t)$$

$$\bar{J}(x) \longrightarrow -\bar{J}(\vec{r}, -t)$$

$$\rho(x) \longrightarrow \rho(\vec{r}, -t)$$

concluyendo de nuevo que las leyes de la física clásica son invariantes bajo la inversión del tiempo. Así pues es te tipo de conceptos trataron de llevarse a la mecánica cuántica y a la teoría de campo (cuántico relativista), el capítulo versará en la forma en que fueron introducidos.

Estas simetrías íntimamente relacionadas con la cinemática, son llamadas simetrías dinámicas. Existe otra simetría discreta en la mecánica cuántica, llamada -- conjugación de carga. Esta es una simetría algebraica, pues no entra en juego más allá que las propiedades algebraicas de los operadores.

Para ilustrar la física del problema, considere el caso de una partícula en un campo eléctrico producido por dos placas paralelas.

El sistema original es representado en la figura 2 (considerando a la partícula positiva).

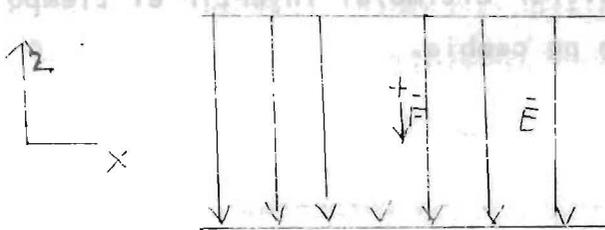


figura 2

Haciendo la inversión ; entonces , por tanto la situación gráfica será

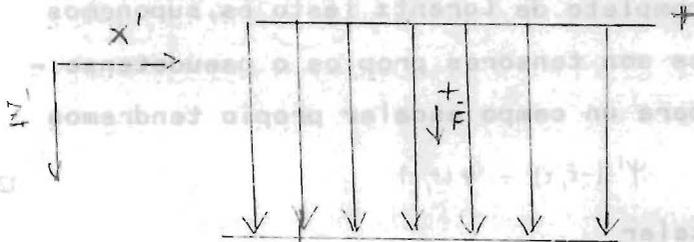


figura 3

Si aplicamos al sistema original la conjugación de carga, esto es, si sustituimos todas las partículas positivas por negativas y viceversa, tendremos

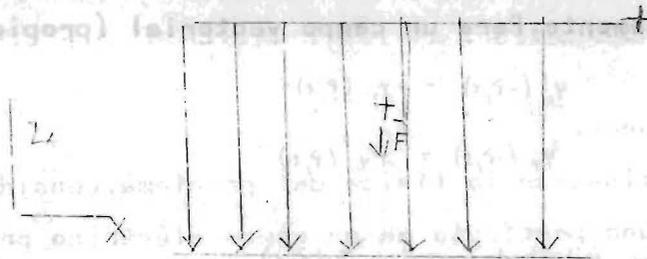


figura 4

esto es, la dirección del campo cambió, pero sin embargo - el comportamiento de la partícula será el mismo que en - la situación original. Por último, al invertir el tiempo, la situación gráfica no cambia.

1.1 PARIDAD

1.1a Generalidades

Supongamos que los campos no solo son invariantes bajo el grupo propio de Lorentz sino son representaciones del grupo completo de Lorentz (esto es, suponemos que nuestros campos son tensores propios o pseudotensores). Por ejemplo, para un campo escalar propio tendremos

$$\psi'(-\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \quad 12$$

para un pseudoescalar

$$\psi'(-\vec{r}, t) = -\psi(\vec{r}, t)$$

Esto es, tendremos en general para un campo escalar

$$\psi'(-\vec{r}, t) = \begin{cases} \psi(\vec{r}, t) \\ -\psi(\vec{r}, t) \end{cases} \quad 13$$

con ψ para un campo escalar propio y para el pseudoescalar respectivamente. Para un campo vectorial (propio)

$$\psi'_i(-\vec{r}, t) = -\psi_i(\vec{r}, t)$$

$$\psi'_i(-\vec{r}, t) = \psi_i(\vec{r}, t)$$

o sea

$$\psi'_\mu(-\vec{r}, t) = \sum_{\nu} T_{\mu\nu} \psi_\nu(\vec{r}, t) \quad 14$$

donde

$$\|T_{xy}\| = \|\delta_{xy} (-1)^{\delta_{xy}}\| = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

Es claro entonces que $\beta = 1$ representa la transformación

$$\psi'(-\vec{r}, \tau) = \psi(\vec{r}, \tau)$$

$$\psi'(-\vec{r}, \sigma) = -\psi(\vec{r}, \tau)$$

la cual corresponde a un pseudovector. A la cantidad (tanto en el caso vectorial como escalar) se le acostumbra denominar como la paridad intrínseca del campo.

En la teoría de campo (cuántica) la invariancia bajo un grupo de transformaciones significa que las ecuaciones de campo y las reglas de conmutación o anti-conmutación no cambian. Esto es, el sistema original y el transformado son equivalentes, en el sentido en que todos los resultados físicos son los mismos en cualquiera de los dos sistemas.

Denotemos las observables del sistema original por Ω y al vector de estado por Φ . La transformación llevará a estos a Ω' y Φ' respectivamente. Una transformación de semejanza deja invariantes a todas las ecuaciones de operadores, además de no cambiar el espectro de eigenvalores y como queremos además que los valores de expectación de las observables no cambien, podemos pedir enton

ces que se satisfagan las relaciones

$$\Omega^{-1} = U \Omega U^{-1}$$

$$\Phi^{\dagger} = U \bar{\Phi}$$

y además que U sea unitario, ya que de esa forma

$$\begin{aligned} (\Phi^{\dagger}, \Omega^{\dagger} \Phi) &= (U \bar{\Phi}, U \Omega U^{-1} (U \Phi)) = (U \bar{\Phi}, U \Omega \Phi) \\ &= (U^{\dagger} U \bar{\Phi}, \Omega \Phi) = (\bar{\Phi}, \Omega \Phi) \end{aligned}$$

Así por ejemplo, si consideramos un campo escalar propio (1.2), podemos expresar la transformación de inversión del espacio como

$$P \phi(x) P^{-1} = \phi(-\vec{r}, \tau)$$

siendo P un operador unitario en el espacio de Hilbert. A este operador P se le llama operador paridad.

Si usamos ahora el desarrollo en series de Fourier (A.36) para un campo escalar, obtendremos

$$\begin{aligned} P \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \right) P^{-1} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ P a_{\vec{k}} P^{-1} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + P a_{\vec{k}}^{\dagger} P^{-1} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \end{aligned}$$

por otro lado

$$\phi(-\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$$

como estamos sumando sobre todo el espacio \vec{k}

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} f(-\vec{k})$$

por consiguiente, de (1.6) concluimos

$$P a_{\vec{k}} P^{-1} = a_{-\vec{k}}$$

$$P a_{\vec{k}}^{\dagger} P^{-1} = a_{-\vec{k}}^{\dagger}$$

Si hubiéramos considerado un campo pseudoescalar, habría aparecido un signo menos en (17). Esto es, en general tendremos

$$P a_{\vec{k}} P^{-1} = \zeta a_{-\vec{k}} \quad ; \quad P a_{\vec{k}}^{\dagger} P^{-1} = \zeta a_{-\vec{k}}^{\dagger}$$

donde ζ es la paridad intrínseca.

Ahora bien, si consideramos un estado de una partícula con momento \vec{k}

$$\bar{\Phi} = a_{\vec{k}}^{\dagger} \Phi_0$$

entonces

$$P \bar{\Phi} = P a_{\vec{k}}^{\dagger} P^{-1} P \Phi_0 = \zeta a_{-\vec{k}}^{\dagger} P \Phi_0$$

Pidiendo que el vacío sea un eigenestado de la paridad - con eigenvalor uno

$$P \Phi_0 = \Phi_0$$

18

obtenemos entonces que

$$P \bar{\Phi} = \zeta a_{-\vec{k}}^{\dagger} \Phi_0$$

lo cual muestra que los eigenestados del momento de una partícula no pueden ser eigenestados de la paridad, excepto en el caso de que la partícula este en reposo ($\vec{k} = \vec{0}$)

En este último caso

$$P \Phi = \zeta \Phi$$

Justificando así, el haber llamado a ζ , paridad intrínseca de la partícula.

Es deseable sin embargo, considerar eigenestados más generales de la paridad. Estos pueden encontrarse

si se desarrollan los campos en ondas esféricas en lugar de usar ondas planas, esto es (para un campo hermitiano)

$$\phi(\lambda) = c \sum_{k,l,m} \left\{ a_{k,l,m} \psi_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) + a_{k,l,m}^\dagger \psi_l^*(r) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \right\}$$

donde $k=|k|$; $a_{k,l,m}^\dagger$ es el operador de creación para una partícula en un estado de momento angular (l, m) y con momento de magnitud k ; $\psi_l(r)$ es la función de Bessel esférica, y c representa a los factores de normalización.

Recordando que la inversión espacial (1.1) en coordenadas esféricas es

$$r \rightarrow r' = r \quad ; \quad \theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta \quad ; \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \pi$$

y además que

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow (-1)^l Y_l^m(\theta', \varphi')$$

aplicando (1.3) y (1.2) concluimos que

$$P a_{k,l,m} P^{-1} = \beta (-1)^l a_{k,l,m}$$

$$P a_{k,l,m}^\dagger P^{-1} = \beta (-1)^l a_{k,l,m}^\dagger$$

Si consideramos ahora el estado de una partícula con un cierto momento angular y una cierta proyección de este; tendremos

$$\hat{J} = a_{k,l,m}^\dagger \hat{J}_0$$

aplicando P y usando la convención expresada en (1.6)

$$P \hat{J} = P a_{k,l,m}^\dagger P^{-1} P \hat{J}_0 = \beta (-1)^l a_{k,l,m}^\dagger \hat{J}_0 = \beta \hat{J}$$

o sea: los estados de una sola partícula con momento angular \hat{J} son eigenestados de la paridad con eigenvalor

$$\beta = (-1)^l$$

llamado paridad (espacial) del estado.

Este resultado se puede generalizar para un sistema en el que se tengan n partículas de varias clases. Si consideramos un estado Φ con momento angular L y proyección M ; tendremos

$$P\Phi = \gamma\Phi$$

con

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n (-1)^L$$

1.10

donde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son las paridades intrínsecas de las partículas.

Asignemos ahora una paridad intrínseca a los campos espinoriales. La transformación de un espinor de Dirac bajo una transformación de Lorentz ortócrona es

$$(B.15)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = L\psi(x)$$

donde L está determinada por (B.14)

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = L^{-1} \gamma_\nu L$$

En nuestro caso particular necesitamos resolver

$$-\gamma_4 = L^{-1} \gamma_4 L$$

$$\gamma_4 = L^{-1} \gamma_4 L$$

cuya solución es

$$L = \gamma_4$$

con γ_4 arbitraria. Por tanto

$$\Psi'(x') = \gamma_4 \Psi(x)$$

llamando a γ_4 la paridad intrínseca del campo de los fermiones.

Podemos entonces corroborar la invariancia de la ecuación de Dirac bajo la inversión del espacio;

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \partial'_\mu + \kappa) \Psi'(x') &= \gamma_4 (\gamma_\mu \partial'_\mu + \kappa) \gamma_4 \Psi \\ &= \gamma_4 (-\gamma_i \partial_i + \gamma_4 \partial_4 + \kappa) \gamma_4 \Psi \\ &= \gamma_4 (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \Psi = 0 \end{aligned}$$

1.1b Paridad del Pión

En 1950 Panofsky y su grupo encontraron que cuando una muestra de gas de hidrógeno bajo presión es bombardeada por un haz de mesones π^- con una energía cercana a 30 Mev., las partículas son capturadas en algún momento en una órbita de Bohr alrededor del protón, y en un tiempo de aproximadamente 10^{-12} seg. caen al estado base 1S, siendo esta captura totalmente electromagnética. Como el pión interacciona fuertemente con el protón este meso átomo tiene, por tanto, corta vida. Las reacciones que se producen son



y



El experimento se realizó también con un blanco de Deuterio en lugar del de hidrógeno, obteniendo así las reacciones

$$\vec{n} + \vec{l} \rightarrow n + n + \frac{1}{2}$$

$$\vec{n} + \vec{l} \rightarrow n + n$$

Analicemos este último proceso. El deuterón está en su estado base y por consiguiente no tiene momento angular orbital, pero tiene espín ($s=1$). El mesón π^- está en la órbita 1S y por tanto no tiene momento angular orbital, no teniendo además espín. Así pues, el momento angular orbital inicial es $L=0$ y el momento angular total J es uno. Como el neutrón tiene espín $\frac{1}{2}$ el espín resultante de los dos neutrones será $S=0$ o $S=1$. por consideración del momento angular total, tenemos las posibles parejas (S,L) ;

$$(0,1); (1,0); (1,1); (1,2)$$

Sabemos que para el singulete ($S=0$) la parte del espín es antisimétrica frente al intercambio de dos partículas, mientras que para el triplete ($S=1$) es simétrica. Ahora bien, si L es par, debido a que la parte espacial de la función de onda contiene a los armónicos esféricos, será simétrica ante el intercambio de dos partículas (el problema puede reducirse al problema de un solo cuerpo con cierta masa reducida, siendo el intercambio de dos partículas equivalente al intercambio $\psi_{l,m} \rightarrow -\psi_{l,m}$ en el problema reducido). Así pues, como el principio de Pauli requiere que la función de onda total sea antisimétrica, la única posibilidad es $S=1$ y $L=1$.

Debido a (1.10) la paridad del estado ini

cial es

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_\pi \mathcal{J}_n \mathcal{J}_p$$

mientras que la del estado final

$$\mathcal{J}_f = (-1) \mathcal{J}_n \mathcal{J}_n$$

Por conservación de la paridad ($\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_f$)

$$\mathcal{J}_\pi \mathcal{J}_n \mathcal{J}_p = -\mathcal{J}_n \mathcal{J}_n$$

Pero el protón y el neutrón son, esencialmente, la misma partícula en dos distintos estados de carga. Por tanto es de esperarse que

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_p$$

así

$$\mathcal{J}_\pi = -1$$

esto es, los mesones π son partículas pseudoescalares.

1.1c Tratamiento General

Como se ha visto nuestro tratamiento ha involucrado muchas suposiciones. Aún cuando la experiencia en mecánica clásica muestra a los procesos invariantes ante la inversión de coordenadas, es prudente dejar abierta la posibilidad de tener una interacción no invariante bajo \mathcal{P} . Esto es, los campos asociados a los diferentes tipos de partículas no son necesariamente representaciones covariantes de la representación de Lorentz.

Consideremos una transformación \mathcal{B} que nos lleve de una situación física a otra situación física. De

notemos el estado de un sistema por $\psi = \lambda \bar{\psi}_0$, donde λ es un producto de operadores de campo y $\bar{\psi}_0$ es el vacío. Bajo la transformación U , $\bar{\psi}$ debe de ir a un estado $\bar{\psi}'$, el cual podemos representar por $\bar{\psi}' = \lambda' \bar{\psi}_0$, pero como queremos llegar a una situación física, debemos pedir que los operadores de campo satisfagan

$$U \psi U^{-1} = \psi' U$$

ya que de esa forma ψ' obedece la misma álgebra de operadores. Si se pide además que

$$U \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_0$$

condición necesaria si U no intercambia operadores de creación y de aniquilación, se tiene

$$U^{-1} \psi U = \lambda^{-1} \psi' U = U \lambda^{-1} \psi = U \psi$$

Si además U es unitario o antiunitario, la ortonormalización de los estados no cambia.

Definiremos la operación formal del operador paridad a través de los campos, los cuales estarán en el esquema de interacción. Esto lo hacemos por conveniencia - pues de esa forma podemos tratar interacciones con derivadas de los campos, además de que las ecuaciones de campo aparecen como si no existiera interacción. Como la definición se va a hacer a través de los campos, hay que verificar que sido establecida correctamente, esto es, que nos lleve de una situación física a otra situación física. El operador paridad se define como el operador unitario que

satisface

$$\psi^P(x) = P \psi(\bar{r}, t) P^{-1} = \eta_{\rho}^{\rho} \psi(-\bar{r}, t)$$

$$\psi^{\dagger P}(x) = P \psi^{\dagger}(\bar{r}, t) P^{-1} = \eta^{\rho} \psi^{\dagger}(-\bar{r}, t)$$

$$A_i^{\rho}(x) = P A_i(\bar{r}, t) P^{-1} = -\eta_{\rho}^{\rho} A_i(-\bar{r}, t)$$

$$A_0^{\rho}(x) = P A_0(\bar{r}, t) P^{-1} = \eta_{\rho}^{\rho} A_0(-\bar{r}, t)$$

$$\chi^{\rho}(x) = P \chi(x) P^{-1} = \eta_{\rho}^{\rho} \chi(-\bar{r}, t)$$

$$\bar{\chi}^{\rho}(x) = P \bar{\chi}(x) P^{-1} = -\eta^{\rho} \bar{\chi}(-\bar{r}, t)$$

114

Hay que comprobar entonces que este es un mapa del álgebra de operadores en si misma, esto es, hay que verificar que los nuevos operadores satisfacen las relaciones (A.6, A.45, A.61, A.86, A.87, B.40, D.49).

Debemos constatar entonces que $\psi^{\rho}(x)$ satisface la ecuación de Klein Gordon. Ahora como

$$\nabla_{\bar{r}}^2 = \delta_i \delta_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (-x_i)^2} = \nabla_{-\bar{r}}^2$$

tenemos pues

$$(\square - m^2) \psi^{\rho} = \eta \left(\nabla_{-\bar{r}}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2 \right) \psi(-\bar{r}, t) = 0$$

ya que $\psi(x)$ satisface la ecuación de Klein Gordon. Las reglas de conmutación:

$$[\psi^{\rho}(\bar{r}, t), \psi^{\rho}(\bar{r}', t)] = [\eta^{\rho} \psi(-\bar{r}, t), \eta \psi(-\bar{r}', t)] = \eta^{\rho} \eta [\psi(-\bar{r}, t), \psi(-\bar{r}', t)]$$

a través de (A.6) se convierten en

$$-\eta^{\rho} \eta \delta(\bar{r}' - \bar{r}, t - t') = -\eta^{\rho} \eta \delta(\bar{r} - \bar{r}', t - t')$$

o sea; los campos guardarán las relaciones de conmutación siempre que $\eta^{\rho} \eta = 1$ esto es si

$$|\eta_{\rho}^{\mu}|^2 = 1$$

1.15a

Para el caso del campo electromagnético, la corroboración de la ecuación de Maxwell es similar a la hecha para la ecuación de Klein Gordon. Los nuevos campos A_{μ}^{ρ} y los estados Φ^{ρ} deben de satisfacer la condición restringida de Lorentz (A.34)

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} A_{\mu}^{\rho} \Phi^{\rho} &= (-\eta \frac{\partial}{\partial x_0} A^{\rho}(-\vec{r}, t) + \eta \frac{\partial}{\partial t} A_0^{\rho}(-\vec{r}, t)) \times \Phi(-\vec{r}, t) \\ &= \eta \left(\frac{1}{\partial t - x_0} A^{\rho}(-\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} A_0^{\rho}(-\vec{r}, t) \right) \Phi(-\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$

(la última ecuación es cero puesto que (A.34) se satisface en todos los puntos del espacio). Por otro lado

$$\begin{aligned} [A_{\mu}^{\rho}(x), A_{\nu}^{\rho}(x')] &= (-i) \int d^3x'' \eta^{\mu\nu} [A_{\mu}(-\vec{r}, t), A_{\nu}(-\vec{r}', t')] \\ &= (-i) \int d^3x'' \eta^{\mu\nu} i \partial_{\mu\nu} D(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \\ &= \eta^{\mu\nu} i \partial_{\mu\nu} D(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la regla de conmutación (A.36) y una de las propiedades expresadas en (A.35). Comparando con (A.36) llegamos a la conclusión de que se obtiene invariancia del álgebra de operadores si $\eta^{\mu\nu} = \pm 1$, o sea

$$\eta = \pm 1$$

Por último, para el caso del campo de Dirac:

$$\begin{aligned} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) \Psi^{\rho}(x) &= \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \gamma_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \kappa \right) \eta_{\mu\nu} \Psi^{\rho}(-\vec{r}, t) \\ &= \left(-\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \gamma_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \kappa \right) \eta_{\mu\nu} \Psi^{\rho}(-\vec{r}, t) \\ &= i \eta \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + \gamma_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \kappa \right) \Psi^{\rho}(-\vec{r}, t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{ \psi_{\lambda}^{\mu}(\vec{r}, t), \bar{\psi}_{\lambda}^{\nu}(\vec{r}', t) \} &= \eta \eta^* \{ \psi_{\lambda}^{\mu}(\vec{r}, t), \bar{\psi}_{\lambda}^{\nu}(\vec{r}', t) \} \\
 &= \eta \eta^* \{ \psi_{\lambda}^{\mu}(\vec{r}, t), \bar{\psi}_{\lambda}^{\nu}(\vec{r}', t) \} \\
 &= \eta \eta^* \{ \psi_{\lambda}^{\mu}(\vec{r}, t), \bar{\psi}_{\lambda}^{\nu}(\vec{r}', t) \} \\
 &= \eta \eta^* \{ \psi_{\lambda}^{\mu}(\vec{r}, t), \bar{\psi}_{\lambda}^{\nu}(\vec{r}', t) \} \\
 &= \eta \eta^* \delta_{\lambda \nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}')
 \end{aligned}$$

por tanto si

$$\int_{\mathbb{R}^3} \eta^* \eta = 1$$

1.15c

obtenemos la misma álgebra de operadores.

Concluimos entonces que las definiciones -- (1.14) son un mapeo del álgebra de operadores en si misma, con las restricciones (1.15) (en el caso de tener un mesón sin carga, la restricción será $\eta = \pm 1$). Así pues, con sideramos a (1.14) como la definición de inversión espacial.

Si podemos encontrar $\eta^{\mu}, \eta^{\nu}, \eta^{\rho}$ con la propiedad

$$\eta^{\mu} H(\vec{r}, t) \eta^{\mu} = H(\vec{r}, t)$$

o equivalentemente (a través de (A.7))

$$\eta^{\mu} \mathcal{H}(t) \eta^{\mu} = \mathcal{H}(t)$$

entonces

$$\frac{\partial \psi^{\mu}}{\partial t} = \eta^{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \eta^{\mu} = - \eta^{\mu} \mathcal{H}(t) \psi = - \eta^{\mu} \mathcal{H}(t) \eta^{\mu} \psi = - \mathcal{H}(t) \psi$$

esto es, nuestro nuevo estado, obedece la misma ecuación --

dinámica que el sistema original, y en este caso, el sistema es invariante bajo \mathbb{P} .

Por ejemplo, si consideramos la interacción de Yukawa entre fermiones y mesones

$$H = -iG \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \phi$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P} H \mathbb{P}^{-1} &= -iG \mathbb{P} \bar{\Psi} \mathbb{P}^{-1} \gamma_5 \mathbb{P} \Psi \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \phi \mathbb{P}^{-1} = -\eta^m |\eta|^2 (-iG) \bar{\Psi}(-\vec{r}, t) \gamma_5 \Psi(-\vec{r}, t) \phi(-\vec{r}, t) \\ &= -\eta^m H(-\vec{r}, t) \end{aligned}$$

por tanto se debe escoger $\eta^m = -1$ para que la interacción sea invariante bajo \mathbb{P} . En este caso al campo Ψ se le llama pseudoescalar. Hay que hacer notar que este nombramiento está ligado con el tipo de interacción en que el campo aparece. De hecho, es posible que un campo no tenga paridad, puesto que ante ciertas interacciones el factor de fase (paridad) debe de ser distinto.

Un ejemplo hipotético de una interacción, la cual no pueda hacerse invariante, está dado por

$$H = \bar{\Psi}_a \Psi_b \bar{\Psi}_c (1 + \gamma_5) \Psi_d + \text{Adjunto}$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} H \mathbb{P}^{-1} &= \eta_a^* \eta_b \eta_c^* \eta_d \bar{\Psi}_a(-\vec{r}, t) \gamma_4 \gamma_4 \Psi_b(-\vec{r}, t) \bar{\Psi}_c(-\vec{r}, t) \gamma_4 (1 + \gamma_5) \gamma_4 \Psi_d(-\vec{r}, t) + \text{Ad.} \\ &= \eta_a^* \eta_b \eta_c^* \eta_d \bar{\Psi}_a \Psi_b \bar{\Psi}_c (1 - \gamma_5) \Psi_d + \text{Ad.} \end{aligned}$$

no existiendo entonces, ninguna forma de selección de η_a ,

η_b , η_c , η_d de forma que hagan al Hamiltoniano invariante.

1.2 CONJUGACION DE CARGA

La conjugación de carga es una operación que nos transforma partículas en antipartículas a través de cambiar el signo de todas sus propiedades intrínsecas, pero no alterando las propiedades del grupo de Poincaré.

Consideremos dos estados correspondientes a un mesón con carga positiva y a un mesón con carga negativa

$$\Phi_1(k) = a^\dagger(k) \Phi_0$$

$$\bar{\Phi}_1(k) = b^\dagger(k) \bar{\Phi}_0$$

Supongamos ahora la existencia de un operador unitario con la propiedad de transformar partículas en antipartículas

$$C b^\dagger(k) \bar{\Phi}_0 = \eta_c^\dagger a^\dagger(k) \bar{\Phi}_0$$

$$C a^\dagger(k) \bar{\Phi}_0 = \eta_c b^\dagger(k) \bar{\Phi}_0$$

El término η_c es llamado paridad intrínseca de carga del campo. Como C debe satisfacer

$$C^2 = \mathbb{I}$$

tenemos

$$|\eta_c|^2 = 1$$

1.17

Si se supone además que

$$C \bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}_0$$

1.18

entonces

$$\mathcal{U} a^T(E) \mathcal{U}^{-1} = \eta_c b^T(E) \bar{\Phi}_0$$

esto es

$$\mathcal{U} a^T(E) \mathcal{U}^{-1} = \eta_c b^T(E)$$

1.19a

análogamente

$$\mathcal{U} b^T(E) \mathcal{U}^{-1} = \eta_c^* a^T(E)$$

1.19b

de donde

$$\mathcal{U} a(E) \mathcal{U}^{-1} = \eta_c^* b(E)$$

1.19c

$$\mathcal{U} b(E) \mathcal{U}^{-1} = \eta_c a(E)$$

entonces

$$\mathcal{U} N^+(E) \mathcal{U}^{-1} = N^-(E)$$

$$\mathcal{U} N^-(E) \mathcal{U}^{-1} = N^+(E)$$

por lo tanto de (A.76)

$$\mathcal{U} Q \mathcal{U}^{-1} = -Q$$

120

resultado que era de esperarse puesto que estamos intercambiando partículas con carga positiva con partículas con carga negativa. Es importante notar que (1.20) nos indica que el operador de carga no conmuta con el operador conjugación de carga (esta aseveración es válida aún cuando no estemos trabajando con mesones) y por tanto no pueden tener ambos eigenestados simultáneos a menos que la carga total sea cero.

Aplicando ahora la conjugación de carga para los campos (A.52)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \varphi^T) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ \mathcal{L}_-(\mathbf{k}) \varphi^T e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathcal{L}_+(\mathbf{k}) \varphi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ b(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ &= \eta_c^\dagger \varphi^T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Podemos obtener las relaciones

$$\mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}), \varphi^T) = \eta_c^\dagger \varphi^T(\mathbf{x}) \equiv \varphi^c(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{L}(\varphi^T(\mathbf{x}), \varphi) = \eta_c \varphi(\mathbf{x}) \equiv \varphi^{\dagger c}(\mathbf{x})$$

Ahora bien, la densidad lagrangiana para el caso mesónico (A.9) se transforma bajo la conjugación de carga como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \varphi^T) &= \mathcal{L}(-i\eta_c \varphi^T, i\eta_c^\dagger \varphi) = m^2 \varphi^T \varphi \\ &= - (i\eta_c i\eta_c^\dagger \varphi^T + m^2 \varphi \varphi^T) \end{aligned}$$

esto es, el lagrangiano permanecerá invariante si los campos φ y φ^T conmutaran. Este lagrangiano se obtuvo a través del lagrangiano clásico y este es indiferente al orden en el producto de los campos. Así pues, podemos reescribir en el caso clásico, $\varphi \varphi^T$ por $\frac{1}{2}(\varphi \varphi^T + \varphi^T \varphi)$. Si reemplazamos entonces a $\varphi \varphi^T$ por $\frac{1}{2}(\varphi \varphi^T + \varphi^T \varphi)$, obtenemos la simetría buscada, implicando tan solo que nuestro nuevo lagrangiano diferirá del original por una constante, ya que

$$\frac{1}{2}(\varphi \varphi^T + \varphi^T \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi \varphi^T) + \frac{1}{2}(\varphi^T \varphi) = \varphi \varphi^T$$

y además

$$\frac{1}{2}(\varphi \varphi^T + \varphi^T \varphi) = \frac{1}{2}(\varphi \varphi^T) + \frac{1}{2}(\varphi^T \varphi) = \varphi \varphi^T$$

si $c = -i \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta(x-y) \right]_{x=y}$ entonces

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \psi^\dagger \partial_\mu \psi + \partial_\mu \psi \partial_\mu \psi^\dagger) = \psi^\dagger \partial_\mu \psi + c$$

Un punto muy importante es que estas constantes c son de hecho infinitas ($\sim \delta(0)$) pero aún cuando la situación no es extraña, posee la ventaja de que al calcular la energía o carga, la constante infinita que aparece y que se ignoraba por representar cambios de escala, se cancela (Apén. A). Como las expresiones son muy extensas, escribiremos explícitamente la simetrización solo cuando sea necesario, sobreentendiéndose en adelante que los campos están propiamente simetrizados.

Para mesones sin carga, el campo se transforma como

$$\mathcal{C} \phi \mathcal{C}^{-1} = \eta_c \phi(x)$$

$$\mathcal{C} S^\dagger(\vec{k}) \Phi_0 = \eta_c S^\dagger(\vec{k}) \Phi_0$$

1.22

En el caso del campo electromagnético

$$\mathcal{C} A_\mu(x) \mathcal{C}^{-1} = \eta_c A_\mu(x)$$

$$\mathcal{C} \alpha_\lambda(\vec{k}) \Phi_0 = \eta_c \alpha_\lambda^\dagger(\vec{k}) \Phi_0$$

1.23

debiéndose satisfacer en ambas

$$\eta_c^2 = 1$$

Como la conjugación de carga nos lleva de una partícula a su correspondiente antipartícula, en el ca

so del campo de Dirac, tendremos (para estados de una sola partícula)

$$C C_S^\dagger(\vec{p}) \bar{\psi}_0 = \eta_c d_{S'}^\dagger(\vec{p}) \bar{\psi}_0 \quad (S \neq S')$$

esto es, los operadores de creación y de aniquilación se transformarán como

$$C C_S(\vec{p}) C^{-1} = \eta_c^* d_{S'}(\vec{p})$$

$$C C_S^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = \eta_c^* d_{S'}^\dagger(\vec{p})$$

$$C d_{S'}(\vec{p}) C^{-1} = \eta_c C_{S'}(\vec{p})$$

$$C d_{S'}^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = \eta_c^* C_{S'}^\dagger(\vec{p})$$

$$S \neq S' \quad |\eta_c|^2 = 1$$

Estas relaciones implican que el operador de carga total para el campo de Dirac cambió de signo bajo la conjugación de carga. (como ya lo habíamos anticipado)

Antes de seguir adelante, recordamos que los espinores u y v satisfacen (B.26) de ahí que

$$(i \gamma_\lambda P_\lambda + k) u = 0$$

$$\bar{v} (i \gamma_\lambda P_\lambda - k) = 0$$

transformando la segunda ecuación obtenemos

$$(i \tilde{\gamma}_\lambda P_\lambda - k) \tilde{v} = 0$$

Ahora, el conjunto de matrices $-\tilde{\gamma}_\mu$ guarda las reglas de anticonmutación y por consiguiente existirá una matriz unitaria M_C con la propiedad (B.5) (teorema fundamental de Pauli)

La matriz M_c es antisimétrica. Para demostrarlo, observamos primero que

$$Y_a \sim -(M_c^{-1} Y_a M_c) \sim -\tilde{M}_c \tilde{Y}_a \tilde{M}_c^{-1} = -\tilde{M}_c M_c^{-1} Y_a M_c \tilde{M}_c^{-1}$$

como $M_c M_c^{-1}$ conmuta con todas las Y_a entonces $M_c \tilde{M}_c^{-1}$ debe de ser un múltiplo de la unidad (Apendice B)

$$M_c \tilde{M}_c^{-1} = k I$$

esto es

$$M_c = k \tilde{M}_c \quad \tilde{M}_c = k M_c$$

de aquí

$$M_c = k \tilde{M}_c = k^2 M_c$$

y por tanto, como

$$k = \pm 1$$

$$M_c = \pm \tilde{M}_c$$

Observemos ahora como actua la matriz M_c sobre las 16 - cantidades que forman el álgebra de Dirac.

$$(M_c^{-1} \mathbb{I}) \sim = \mathbb{I} \tilde{M}_c^{-1} = k M_c^{-1}$$

$$(M_c^{-1} Y_a) \sim = \tilde{Y}_a \tilde{M}_c^{-1} = k \tilde{Y}_a M_c^{-1} = -k M_c^{-1} Y_a$$

$$(M_c^{-1} Y_a Y_b) \sim = i \tilde{Y}_b \tilde{Y}_a \tilde{M}_c^{-1} = i k \tilde{Y}_b \tilde{Y}_a M_c^{-1} = i k M_c^{-1} Y_b Y_a = i k M_c^{-1} Y_a Y_b \quad a \neq b$$

$$(M_c^{-1} Y_a Y_a) \sim = i \tilde{Y}_a \tilde{Y}_a \tilde{M}_c^{-1} = i(-1) k M_c^{-1} Y_a Y_a = -i k M_c^{-1} Y_a Y_a \quad a \neq Y^2$$

$$(M_c^{-1} Y_5) \sim = \tilde{Y}_5 \tilde{M}_c^{-1} = k M_c^{-1} Y_5$$

Si $k = -1$ tendríamos 4+6=10 matrices antisimétricas linealmente independientes, hecho que resulta imposible puesto -

que una matriz antisimétrica de 4×4 contiene tan solo 6 elementos independientes. Por tanto

$$k = -1$$

esto es, la matriz M_C es antisimétrica

$$M_C = -\tilde{M}_C$$

(Multiplicando a (1.26) por la izquierda por

M_C

$$(i\gamma_\lambda p_\lambda + \kappa) M_C \tilde{v} = 0$$

Comparando entonces con (B.2E) concluimos

$$u = M_C \tilde{v}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} (\hat{V} \cdot \bar{p}) M_C \tilde{v} &= p_k i \gamma_4 \gamma_5 \gamma_k M_C \tilde{v}_4 \tilde{v}^\dagger = (-i \tilde{v}_4 M_C^{-1} \gamma_k \gamma_5 \gamma_4 p_k)^\dagger \\ &= (-i \tilde{v}_4 \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \tilde{\gamma}_4 p_k M_C^{-1})^\dagger = (-i M_C p_k \gamma_4 \gamma_5 \gamma_k v_4)^\dagger \\ &= s i \bar{p}_i M_C \tilde{u} = -s i \bar{p}_i M_C \tilde{u} \end{aligned}$$

(Donde se ha hecho uso de (1.20, 1.25, B.2E)). Esto significa

$$u(\bar{p}, s') = M_C \tilde{v}(\bar{p}, s)$$

análogamente obtenemos

$$v(\bar{p}, s') = M_C \tilde{u}(\bar{p}, s)$$

Aplicando entonces la operación conjugación de carga al desarrollo en serie del campo de Dirac. (B.42)

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \Psi \mathcal{C}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{\kappa}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^2 \left\{ \mathcal{C} c_s(\vec{p}) \mathcal{C}^{-1} u(\vec{p}, s) e^{i p x} + d^\dagger(\vec{p}) v(\vec{p}, s) e^{-i p x} \right\} \\
&= \frac{\eta_c^*}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{\kappa}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^2 \left\{ d_s(\vec{p}) u(\vec{p}, s) e^{i p x} + c_s^\dagger(\vec{p}) v(\vec{p}, s) e^{-i p x} \right\} \\
&= \frac{\eta_c^*}{\sqrt{V}} M_c \sum_{\vec{p}} \left(\frac{\kappa}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^2 \left\{ d_s(\vec{p}) \tilde{u}(\vec{p}, s) e^{i p x} + c_s^\dagger(\vec{p}) \tilde{v}(\vec{p}, s) e^{-i p x} \right\} \\
&= \eta_c^* M_c \tilde{\Psi}(x) \equiv \Psi_{\mathcal{C}}(x)
\end{aligned}$$

1.30

De igual forma

$$\bar{\Psi}(x) \equiv \mathcal{C} \bar{\Psi}(x) \mathcal{C}^{-1} = \eta_c \Psi^T(x) M_c^{-1}$$

Para campos espinoriales el lagrangiano contiene términos de la forma $\bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta$ etc. Ahora bien, por ser arbitrario el orden de los factores, hace plausible un arreglo. Como los campos satisfacen reglas de anticonmutación es conveniente antisimetrizar todas las expresiones, esto es

$$\bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta \longrightarrow \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta - \Psi_\beta \bar{\Psi}_\alpha)$$

Este tipo de reemplazos, no afectan la física del problema, puesto que

$$\frac{1}{2} (\bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta - \Psi_\beta \bar{\Psi}_\alpha) = \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta + \frac{1}{2} i S_{\alpha\beta}(c) = \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\beta + a$$

La expresión antisimetrizada difiere de la original por una constante, la cual hace de nuevo inútiles los cambios de escala necesarios en el cálculo de la energía y la carga. En adelante, se sobreentenderá que todos los lagrangianos estarán simetrizados en los campos de bosones y antisimetrizados en los de fermiones.

1.3 REFLEXION DEL TIEMPO

En física clásica cualquier operación que invierta el orden del tiempo en un sistema físico, induce los siguientes cambios

espacio	\vec{x}	\longrightarrow	\vec{x}
momento	\vec{p}	\longrightarrow	$-\vec{p}$
energía	E	\longrightarrow	E
densidad de corriente	\vec{j}	\longrightarrow	$-\vec{j}$
momento angular	\vec{J}	\longrightarrow	$-\vec{J}$

En mecánica cuántica el operador que invierte el sentido del tiempo posee propiedades más complejas que el de conjugación de carga y el de inversión del espacio. La transformación la definiremos como

$$x_i \longrightarrow x_i' = x_i$$

$$x_4 \longrightarrow x_4' = -x_4$$

1.31

Como sabemos, una transformación unitaria deja invariantes las reglas de conmutación. Supongamos que el operador T , que realiza la inversión del tiempo, es unitario. Esto es

$$T x_i T^{-1} = x_i$$

$$T x_4 T^{-1} = -x_4$$

$$T^{-1} = T^\dagger$$

Por ser unitario se debería satisfacer

$$[x', y'] = c \delta c$$

pero

$$[Tx', Ty'] = [x', -y'] = -c \delta c$$

Esta contradicción nos muestra la imposibilidad de expresar nuestra transformación a través de un operador unitario. La dificultad puede ser eliminada si exigimos además que bajo la transformación los números complejos c realicen el mapeo

$$T c T^{-1} = c^*$$

Esto puede verse de la siguiente forma

$$T c \delta c T^{-1} = T [x', y'] T^{-1} = [Tx', Ty'] = [x', -y'] = -c \delta c$$

Bajo esta transformación, T deja de ser lineal; de hecho, es antilineal pues satisface

$$T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2)$$

$$T(\lambda \phi) = T A T^{-1} T \phi = \lambda^* T \phi$$

Se recuerda que para operadores antilineales la inversa y la transpuesta están definidas en la misma forma que para los operadores lineales, pero su adjunto se define por

$$(\phi_1, A^* \phi_2) = (A \phi_1, \phi_2)^* = (\phi_1, A \phi_2)$$

1.32

donde A es el operador antilineal.

Bajo la reflexión del tiempo, si nuestro estado original era

$$\bar{\Phi} = \lambda (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n) \bar{\Phi}_0$$

(\sim representa a un producto de operadores de creación), cambiará a

$$\bar{\Phi}^{\Pi} = \lambda (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n) \bar{\Phi}_0$$

Necesitamos definir la transformación de forma que nos lleve de una situación física a otra situación física.-- Para ello definiremos, de forma semejante al caso de la paridad, una transformación (en nuestro caso no lineal) de la siguiente forma

$$\phi^{\Pi}(\lambda) = \Pi A(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^M \phi(\lambda^*)$$

$$\chi^{\Pi}(\lambda) = \Pi \chi(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^m \chi(\lambda^*)$$

$$\chi^{\Pi\Pi}(\lambda) = \Pi \chi^{\Pi}(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^{m^*} \chi^{\Pi}(\lambda^*)$$

$$A_i^{\Pi}(\lambda) = \Pi A_i(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^e A_i(\lambda)$$

$$A_0^{\Pi}(\lambda) = \Pi A_0(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^f A_0(\lambda)$$

$$\psi^{\Pi}(\lambda) = \Pi \psi(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^e M_0^{-1} \psi(\lambda^*)$$

$$\bar{\psi}^{\Pi}(\lambda) = \Pi \bar{\psi}(\lambda) \Pi^{-1} = \int_{\Pi}^{f^*} \bar{\psi}(\lambda^*) M_R$$

con la condición adicional que los números obedezcan la ley de transformación

$$\lambda^{\Pi} = \Pi \lambda \Pi^{-1} = \lambda^*$$

Donde M_0 está definida a través de M por

$$M_0 = \lambda M$$

de forma que tenemos las relaciones

$$\tilde{\gamma}_M = M_B^{-1} \gamma_M M_B$$

136

Restá probar que la transformación antilineal definida en (134) es un mapeo del álgebra de operadores en si misma. La comprobación es directa y por tanto solo se hará como ejemplo el caso mesónico.

$$(\square^\pi - m^2) \varphi^\pi(x) = \eta (\square - m^2) \varphi(x^*) = \eta (\partial_\mu \partial_\mu - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2) \varphi(t, \vec{r}, t)$$

como el campo $\varphi(x)$ satisface la ecuación de Klein Gordon en todo punto del espacio

$$(\square^\pi - m^2) \varphi^\pi(x) = 0$$

Para la regla de conmutación

$$\begin{aligned} [\varphi^{\pi T}(x), \varphi^\pi(x')] &= |\eta|^2 [\varphi^T(x^*), \varphi(x'^*)] = |\eta|^2 i \Delta(t-t'; \vec{r}-\vec{r}') \\ &= -|\eta|^2 i \Delta(t-x-x') = \pi |\eta|^2 i \Delta(x-x') \pi^{-1} \end{aligned}$$

esto es: si $|\eta|^2 = i$

$$[\varphi^{\pi T}(x), \varphi^\pi(x')] = [\varphi^T(x), \varphi(x')]^\pi$$

que es el resultado buscado.

Al verificar, como el ejemplo anterior, las reglas de conmutación para los diversos campos, se encuentran las siguientes restricciones sobre las η_i .

$$|\eta^m|^2 = \eta^{\rho^2} = |\eta^f|^2 = \eta^M^2 = 1$$

137

La ecuación dinámica en t del sistema original es

$$\lambda^{-1}(t) \dot{\tilde{x}}(t) = \lambda^{-1} \dot{x}(t)$$

la condición de invariancia implica que el sistema reflejado obedezca al tiempo τ la misma ecuación que el sistema original al tiempo t ; esto es

$$\lambda^{-1}(t) \dot{\tilde{x}}(t) = \lambda^{-1} \dot{x}(t) \quad (1.28)$$

por definición

$$\tilde{x}(\tau) = \Pi \tilde{x}(t)$$

Por consiguiente

$$\lambda^{-1} \dot{\tilde{x}}(\tau) = \lambda^{-1} \Pi \dot{\tilde{x}}(t) = \Pi \lambda^{-1} \dot{x}(t) = \Pi H(t) \tilde{x}(t) = \Pi H(t) \Pi^{-1} (\Pi \tilde{x}(t))$$

Por lo tanto de (1.28) obtenemos que el sistema será invariante si podemos escoger los factores de fase de tal forma que

$$\Pi H(t) \Pi^{-1} = H(t) \quad (1.29a)$$

o bien

$$\Pi H(\tilde{t}, \tau) \Pi^{-1} = H(\tilde{t}, \tau) \quad (1.29b)$$

CAPITULO II

VIOLACION A LA PARIDAD

2.1 EL ENIGMA

En 1956 se conocía la existencia de un mesón

ρ^0 o $\rho_{\pi\pi}$ que decaía en tres piones de la siguiente forma



Se conocía además, la existencia de otro mesón, el mesón

ρ^0 o $\rho_{\pi\pi}$, que decae como



Analicemos estos dos casos. En el proceso (22) como los dos piones carecen de espín, el momento angular total del sistema de los dos piones, medido en el centro de masa del mesón ρ^0 que decae, es igual al momento orbital de los dos piones; teniendo como posibles valores

$$J=0, 1, 2, \dots$$

Las paridades de los estados son, correspondientemente

$$P = (-1)^L = (-1)^J$$

Por consiguiente, los estados del sistema de dos piones son $0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$. Ahora, si el momento angular y la paridad se conservan en la interacción débil que da lu

gar al decaimiento de ϱ , entonces los estados posibles para ϱ son $0^+, 1^-, 2^+, 3^-, 4^+$ etc.

En el caso del decaimiento del mesón η , consideremos solo aquellos decaimientos en los cuales uno de los piones es muy lento, esto es, no tiene momento angular con respecto al centro de masa de los otros dos piones. Como $\lambda_{\pi} = -1$ entonces los estados serán $(\eta = \sum_{\pi} \lambda_{\pi}^3 (-1)^L)$ $0^-, 1^+, 2^-, 3^+, \dots$. En un análisis exhaustivo hecho por Dalitz y colaboradores, sin hacer la suposición del pión lento, llegaron a la conclusión de que los estados $0^+, 1^-, 2^+, \dots$ eran definitivamente prohibidos. De todo esto, se concluye que ϱ y η tienen paridades distintas y por consiguiente debemos concluir que son diferentes partículas.

Experimentalmente se encuentra que tanto la masa como la vida media de las dos partículas coinciden. (dentro de los límites experimentales). Las secciones transversales de producción de los mesones K , tienen aparentemente la misma dependencia en energía, y por último, las secciones transversales de dispersión en los núcleos son iguales. Estos resultados serían inmediatos si el mesón ϱ y el η no fueran dos sino uno solo; sin embargo, el precio por suponer esto, sería la violación a la paridad y por esta razón, se hicieron numerosos esfuerzos para explicar este tipo de resultados sin suponer la identidad de las partículas. A pesar de todo, solo fue posible

explicar parcialmente el fenómeno.

2.2 LIMITE PARA LA CONSERVACION DE P

Si la paridad no es estrictamente conservada, los estados atómicos y nucleares serían mezclas, consistentes en una mayor parte por el estado al cual son usualmente asignadas, junto con otra pequeña porción de estados con la paridad opuesta. Como existen ciertas reglas de selección de paridad observadas con cierta precisión experimentalmente, el grado de mezcla debe de ser muy pequeño. La no conservación de la paridad implica la existencia de interacciones que mezclan paridades. Por ejemplo, supongamos que el hamiltoniano para una cierta reacción está dado por

$$H = H_c + F H_v$$

donde H_v es la componente que viola la paridad y F es el grado de mezcla. Entonces, la probabilidad de una transición que viole la paridad es proporcional a $|F|^2$, existiendo además un término de interferencia; esto puede verse (recordando que la probabilidad de transición a primer orden es proporcional a $|\langle \psi_f | H | \psi_i \rangle|^2$) a través de:

$$\begin{aligned} |\langle \psi_f | H_c + F H_v | \psi_i \rangle|^2 &= |\langle \psi_f | H_c | \psi_i \rangle + F \langle \psi_f | H_v | \psi_i \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi_f | H_c | \psi_i \rangle|^2 + |F|^2 |\langle \psi_f | H_v | \psi_i \rangle|^2 + 2 F \langle \psi_f | H_c | \psi_i \rangle \langle \psi_f | H_v | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

En espectroscopía atómica (si se conserva la paridad) no

puede haber transiciones entre dos estados atómicos de distinta paridad. Como no han sido observadas líneas espectrales prohibidas por esta regla, se puede establecer un límite superior para el grado de la mezcla, siendo este

$$|F|^2 \approx 10^{-6}$$

En espectroscopía nuclear se puede establecer un límite menor; por ejemplo, en 1961 Donovan, Alburger, y Wilinkston de un examen de las propiedades de decaimiento de un nivel 2^- en 0^{16} establecieron un límite de

$$|F|^2 \lesssim 7 \cdot 10 \times 10^{-13}$$

A través de medir la magnitud del término de interferencia es posible establecer otro límite dentro del cual la paridad se conserva. Consideremos la dispersión de un haz de protones polarizados en la dirección Z perpendicular a su momento, por un núcleo; si se calculan las intensidades de dispersión en dos direcciones A y B relacionadas por una reflexión en el plano X-Y, se encuentra que difieren en aproximadamente un 1%. Si la dispersión es producida por una interacción que conserva la paridad más otra que no la conserva, por ejemplo si el elemento de matriz es de la forma

$$S_{fi} = a + b \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} \equiv a \left(1 + F \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

las amplitudes de dispersión en la dirección A y B estarán en proporción

y por tanto, el resultado experimental requiere $|F| \sim 10^{-2}$

Aparentemente la violación a la conservación de la paridad permitiría a las partículas neutras tener un momento dipolar eléctrico. Por ejemplo, si un neutrón tiene un momento dipolar eléctrico, entonces en presencia de un campo eléctrico externo \vec{E} el valor de expectación de \hat{N} contendrá a la energía potencial del dipolo en el campo \vec{E} ; la cual es proporcional al producto escalar del momento dipolar por la intensidad del campo. La dirección del momento dipolar debe de ser asociada con un vector intrínseco de la partícula, esto es, debe de tener la dirección del espín. Ahora, como

$$\hat{P} \hat{T} \cdot \vec{E} \hat{P}^{-1} = -\hat{T} \cdot \vec{E}$$

no puede existir momento dipolar eléctrico a menos que se viole la paridad. La energía del dipolo tendrá la forma

$$F e d \langle \hat{T} \cdot \vec{E} \rangle$$

donde d es una constante con las dimensiones de longitud, la cual es determinada por las diversas interacciones que violan la paridad del neutrón. d no puede ser calculada en forma exacta, pero debe de ser, a lo más, del orden de las dimensiones del neutrón. Por tanto, la magnitud del momento es

$$\frac{1}{2} \sim F \times 10^{-13} \text{ cm.}$$

Un límite superior ha sido obtenido por Smith, Purcell, - Ramsey (1957)

$$\frac{1}{e} |\mu_e| \leq 0.5 \times 10^{-20} \text{ cm.}$$

Posteriormente J.K. Baird, P.D. Miller y N. Ramsey (1969) ob tuvieron

$$\frac{1}{e} |\mu_e| < 5 \times 10^{-23} \text{ cm.}$$

por tanto

$$|F|^2 \leq 10^{-17}$$

Sin embargo

$$\Pi (\vec{r} \cdot \vec{E}) \Pi^{-1} = -\vec{r} \cdot \vec{E} \quad 2.5$$

esto significa que es necesario para que exista un momento dipolar eléctrico que, además, el sistema no sea invariante bajo la inversión del tiempo.

2.3 DECAIMIENTO β

La primera teoría del decaimiento β fué elaborada por Fermi en 1934. Fermi visualizó el decaimiento β de un núcleo complejo, básicamente como el decaimiento de uno de los neutrones que lo constituyen en un protón; esto es



La teoría que el desarrolló la hizo haciendo una analogía con la teoría de generación de radiación e-

electromagnética. Como la radiación electromagnética es --
proporcional al cuadrivector de corriente eléctrica ---

$J_\mu = c e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, Fermi supuso que los nucleones generaban radiación γ proporcionalmente a la corriente asociada con la transformación de neutrón a protón $\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n$. Ahora, la amplitud de interacción debe de ser un escalar y por consiguiente un segundo cuadrivector debe de ser asociado con la corriente. La densidad hamiltoniana para la interacción quedó expresada como

$$H = c (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) (\gamma_\mu \psi_e \psi_\nu) + A d_j \quad 2.7$$

donde c es la constante de acoplamiento que define la fuerza de la interacción. El proceso (2.6) puede ser representado como

$$n + \nu \rightarrow p + e^-$$

lo cual hacemos por conveniencia, puesto que es más fácil de manejar en esta forma simétrica. (la figura 2.1 muestra la representación gráfica del proceso)

No hay ninguna razón por la que la densidad

hamiltoniana (2.7) no deba de ser construida a través de los otros cinco covariantes asociados con la ecuación de Dirac. Esto es, podemos pensar que la densidad hamiltoniana es de la forma

$$H = \sum_{i=1}^5 c_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\gamma_i \psi_e \psi_\nu) + A d_j$$

donde

$$\Gamma_1 = 1 \quad (S; \text{escalar})$$

$$\Gamma_4 = \gamma_M \gamma_5 \quad (A; \text{Bivector vector})$$

$$\Gamma_2 = \gamma_M \quad (V; \text{vector})$$

$$\Gamma_5 = \gamma_5 \quad (P; \text{Bivector escalar})$$

$$\Gamma_3 = \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu \quad (T; \text{tensor})$$

28

Por último; Yang y Lee señalaron que la interacción podría ser invariante ante la reflexión de las coordenadas, proponiendo

$$H = \sum_{i=1}^5 c_i (\bar{\Psi}_p \Gamma^i \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \Gamma^i \gamma_5 \Psi_\nu) + \text{Adj.} \quad (2.9)$$

(se podría haber puesto la matriz γ_5 entre los espinores de los nucleones pero la interacción resultante coincidiría con (2.9))

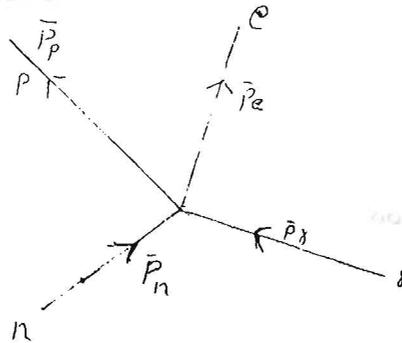


figura 2.1

Consideremos ahora el caso particular

$$H = c (\bar{\Psi}_p \gamma_M (1 - \gamma_5) \Psi_n) (\bar{\Psi}_e \gamma_M (1 - \gamma_5) \Psi_\nu) + \text{Adj.} \quad (2.10)$$

la amplitud de transición es, a primer orden

$$M_{fi} \equiv \int dt \langle f | \mathcal{H}(t) | i \rangle = \int d^4x \langle f | \mathcal{H}(x) | i \rangle$$

donde el estado final es un protón con momento \bar{p}_p y un electrón con momento \bar{p}_e , mientras que el inicial consis-

te de un neutrón y un neutrino (con momento \vec{p}_n y \vec{p}_ν respectivamente). Utilizando el desarrollo (B.42) para un campo de fermiones y haciendo la hipótesis de que el neutrino tiene una masa muy pequeña pero distinta de cero, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle f | H(x) | i \rangle &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{r}, t) \gamma_n(t, \vec{r}) \gamma_n \bar{\psi}_\nu(t, \vec{r}) + \text{Adj} | i \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\frac{\chi_p \chi_n \alpha_c \chi_\nu}{V_p V_n V_c V_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \int d^3x e^{i\chi(\vec{p}_n + \vec{p}_\nu - \vec{p} - \vec{k})} \\ &\quad \bar{u}(\vec{p}_\nu, s_\nu) \gamma_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}_n, s_n) \bar{u}(\vec{k}, s) \chi_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}, s_p) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\frac{\chi_p \chi_n \alpha_c \chi_\nu}{V_p V_n V_c V_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\chi(\vec{p}_n + \vec{p}_\nu - \vec{p} - \vec{k})} \bar{u}(\vec{p}_\nu, s_\nu) \gamma_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}_n, s_n) \bar{u}(\vec{k}, s) \chi_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}, s_p)$$

como en la expresión, la posición x solo aparece en la exponencial y

$$\int d^3x e^{i\chi x} = (2\pi)^3 \delta(\chi) \quad 2.11$$

tenemos

$$\int d^3x \langle f | H(x) | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\frac{\chi_p \chi_n \alpha_c \chi_\nu}{V_p V_n V_c V_\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\vec{p}_\nu, s_\nu) \gamma_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}_n, s_n) \bar{u}(\vec{k}, s) \chi_n(t, \vec{r}) u(\vec{p}, s_p) \quad 2.12$$

$|M_{fi}|^2$ representa la probabilidad total para todo el espacio y para todos los tiempos de que ocurra la transición $\Phi_i \rightarrow \Phi_f$. Encontraremos ahora la probabilidad de transición por unidad de tiempo y de volumen. (el procedimiento es simple pero no formal. En teoría de dispersión pueden encontrarse métodos formales para obtener estos resultados)

$$|M_{fi}|^2 = \frac{c^2 (2\pi)^8}{V^4} \left[\frac{\hbar_p \hbar_n \hbar_e \hbar_\nu}{p_{0p} p_{0n} p_{0e} p_{0\nu}} \right] |A|^2 \left[\delta^4(p_n + p_\nu - p_e - p_p) \right]^2$$

$$= \frac{c^2 (2\pi)^4}{V^4} \left[\frac{\hbar_p \hbar_n \hbar_e \hbar_\nu}{p_{0p} p_{0n} p_{0e} p_{0\nu}} \right] |A|^2 \delta^4(p_n + p_\nu - p_e - p_p) \int d^4x$$

2.13

donde

$$A = \bar{u}_p \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_n \bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_\nu$$

2.14

(2.13) se ha obtenido escribiendo una de las funciones δ como en (2.11) y tomando $p=0$.La integral

$$\int d^4x$$

representa el volumen total del espacio-tiempo, de forma que la probabilidad de transición por unidad de volumen por unidad de tiempo es

$$\omega_{fi} = c^2 (2\pi)^4 \frac{1}{V^4} \delta^4(p_n + p_\nu - p_e - p_p) \left[\frac{\hbar_p \hbar_n \hbar_e \hbar_\nu}{p_{0p} p_{0n} p_{0e} p_{0\nu}} \right] |A|^2$$

2.15

Podríamos calcular por ejemplo la probabilidad por unidad de tiempo de obtener una partícula β^- con una energía entre w y $w + dw$ estando el neutrón polarizado.

El número de estados en que, digamos, el protón tenga un momento entre \vec{p}_p y $\vec{p}_p + d\vec{p}_p$ es

$$\frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_p$$

así pues, como no estamos interesados en obtener cierta polarización exepcto para el neutrón

$$\omega_{fi} = \frac{c^2}{V^2 (2\pi)^2} \sum_{\substack{\text{espines} \\ (\text{exepcto} \\ \text{neutrón})}} \left[d^3 \vec{p}_p d^3 \vec{p}_e \delta^4(\vec{p}_n + \vec{p}_\nu - \vec{p}_e - \vec{p}_p) \left[\frac{\hbar_p \hbar_n \hbar_e \hbar_\nu}{p_{0p} p_{0n} p_{0e} p_{0\nu}} \right] |A|^2 \right]$$

2.16

donde $\int^3 \vec{p}_e$ lo podemos expresar como

$$\int^3 \vec{p}_e = \int^2 \int^1 \vec{p}_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} E_e dE_e d\Omega \quad 2.17$$

Deseamos calcular ahora $\sum |A|^2$. Para ello, consideramos un término de la forma

$$T_{s's'} \equiv \bar{u}(\vec{p}', s') \circ u(\vec{p}, s)$$

donde \circ es una matriz de 4×4 actuando sobre el espacio de los espinores.

$$\begin{aligned} |T_{s's'}|^2 &= T_{s's'} T_{s's'}^\dagger = [\bar{u}(\vec{p}', s') \circ u(\vec{p}, s)] [\bar{u}(\vec{p}', s') \circ u(\vec{p}, s)]^\dagger \\ &= \bar{u}(\vec{p}', s') \circ u(\vec{p}, s) u^\dagger(\vec{p}, s) \gamma_4 \gamma_4 O^\dagger (u^\dagger(\vec{p}', s') \gamma_4)^\dagger \\ &= \bar{u}(\vec{p}', s') \circ u(\vec{p}, s) \bar{u}(\vec{p}, s) \check{O} u(\vec{p}', s') \end{aligned}$$

donde $\check{O} \equiv \gamma_4 O^\dagger \gamma_4$ 2.18

usando (B.37) y (B.35) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{s's'} |T_{s's'}|^2 &= \sum_{s's'} \bar{u}(\vec{p}', s') \circ \Delta^\dagger(\vec{p}) \check{O} u(\vec{p}', s') \\ &= \sum_{s's'} (\bar{u}(\vec{p}', s') \circ \Delta^\dagger(\vec{p}) \check{O} \Delta^\dagger(\vec{p}') u(\vec{p}', s') - v(\vec{p}', s') \circ \Delta^\dagger(\vec{p}) \check{O} \Delta^\dagger(\vec{p}') v(\vec{p}', s')) \quad 2.19 \end{aligned}$$

Si consideramos ahora un término de la forma

$$\sum_{s's'} \{ \bar{u}(\vec{p}', s') Q u(\vec{p}, s) - \bar{v}(\vec{p}', s') Q v(\vec{p}, s) \}$$

con Q una matriz de 4×4 arbitraria, obtenemos, en vista de (B.36), que este término puede expresarse como

$$\sum_{s's'} (\bar{u}_\alpha \gamma_{\alpha\beta} u_\beta - \bar{v}_\alpha \gamma_{\alpha\beta} v_\beta) = Q_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^4 Q_{\alpha\alpha} = \text{tr } Q$$

Llevando esta expresión a (2.19)

$$\sum_{s's'} |T_{s's'}|^2 = \text{tr} (\circ \Delta^\dagger(\vec{p}) \check{O} \Delta^\dagger(\vec{p}')) \quad 2.20$$

Consideremos ahora el decaimiento de un neutrón polarizado en alguna dirección \vec{n} medida en su sistema en reposo. Necesitamos entonces el operador de proyección para un espinor de Dirac correspondiente a una partícula polarizada en la dirección \vec{n} . Observamos que el operador $i\gamma_5 \not{n}$ tiene cuadrado igual a uno si $\eta_\mu \eta_\mu = 1$ y conmuta con $\not{p} + i\kappa$ si $\not{p}_\mu \eta_\mu = 0$; por consiguiente podemos encontrar eigenestados simultáneos si $p = (\kappa, 0, 0, 0)$ y $n_0 = 0$. Entonces como

$$i\gamma_5 \not{n} = i\gamma_5 \gamma_\mu \eta_\mu = i\gamma_5 \gamma_\mu \eta_\mu = i\gamma_4 \gamma_5 \delta_{\mu 4} \eta_\mu \gamma_4 = \hat{\sigma} \cdot \vec{n} \gamma_4$$

un eigenestado simultáneo de $\not{p} + i\kappa = p_4 + i\kappa$ y $i\gamma_5 \not{n}$ corresponde al de una partícula en reposo con el espín apuntando en la dirección \vec{n} . El operador de proyección es por tanto

$$\frac{1}{2} (1 - i \not{n} \gamma_5) \quad 2.21$$

En este caso

$$\sum_{s_1} |T_{s_1 s_2}|^2 = \sum_{s_1 s_2} \bar{u}(\vec{p}', s_1) O \left(\frac{1}{2} (1 - i \not{n} \gamma_5) \right) u(\vec{p}, s_2) \bar{u}(\vec{p}, s_2) \not{O}(\vec{p}', s_1)$$

de ahí que (2.20) se modificará por

$$\sum_{s_1 s_2} |T_{s_1 s_2}|^2 = \text{tr} \left(O \left(\frac{1}{2} (1 - i \not{n} \gamma_5) \right) \Delta^+(\vec{p}') \not{O} \Delta^+(\vec{p}) \right) \quad 2.22$$

así

$$\sum |A|^2 = \text{tr} \left\{ \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \Delta^+(\vec{p}_\nu) \gamma_4 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \gamma_4 \Delta^+(\vec{p}_\nu) \right\} + \text{tr} \left\{ \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \left(\frac{1}{2} (1 - i \not{n} \gamma_5) \right) \times \Delta^+(\vec{p}_\mu) \gamma_4 \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \gamma_4 \Delta^+(\vec{p}_\nu) \right\}$$

Podemos simplificar las trazas, puesto que

$$\gamma_4 \gamma_\nu (1 + \gamma_5) \gamma_4 = \gamma_4 \gamma_\nu \gamma_4 (1 - \gamma_5) = 2\delta_{\nu 4} \gamma_4 (1 - \gamma_5) - \gamma_\nu (1 - \gamma_5) = (2\delta_{\nu 4} - 1) \gamma_\nu (1 - \gamma_5)$$

(En la última expresión no se está sumando sobre el índice Y . En el siguiente desarrollo cuando se sume sobre Y se escribirá explícitamente) (E.34) nos dice que

$$\Lambda^* = \frac{p + ik}{2 + k}$$

además

$$(1 - Y_5)(1 - Y_7) = 2(1 - Y_5)$$

$$(1 - Y_5)(1 + Y_5) = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Y_4 Y_7 (1 + Y_5) Y_4 \frac{p_4 k_4 + ik}{2 + k} Y_4 (1 - Y_5) &= (2 + k)^{-1} (2 + 2k - 1) Y_4 (p_4 Y_4 Y_4 (1 + Y_5) + \Lambda^* Y_4 (1 + Y_5)) (1 - Y_5) \\ &= 2(2 + k)^{-1} (2 + 2k - 1) p_4 Y_4 Y_4 (1 - Y_5) \end{aligned} \quad 2.23$$

El cálculo de las trazas se simplifica si recordamos

$$\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B A) \quad \text{E.23}$$

y si observamos

$$\text{tr}(Y_4 Y_7 \dots Y_{2n}) = 0 \quad \text{E.24}$$

(la demostración puede hacerse por inducción usando las reglas de anticonmutación y la ecuación (E.23)); esto es

$$\text{tr}(Y_4 \dots Y_{2n}) = \text{tr}(Y_4 Y_7 \dots Y_{2n} Y_4)$$

La primera traza la podemos reescribir como

$$\text{tr}(Y_4 (1 - Y_5) \Lambda^* (p^4 + q Y_7 (1 - Y_5) Y_4 \Lambda^* (p^4))) = -\frac{1}{4k^2 k^2} 2(2 + 2k - 1) p_4^2 p_4^2 \text{tr}(Y_4 Y_4 (1 - Y_5) Y_4) \quad 2.25$$

mientras que la segunda

$$\text{tr}\left\{Y_4 (1 - Y_5) \frac{1}{2} (1 + Y_5) Y_4 \Lambda^* (p^4) Y_4 Y_7 (1 + Y_5) Y_4 \Lambda^* (p^4)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4k^n k^p} (2\delta_{\gamma\gamma} - 1) \rho_\eta^p \left\{ \text{tr} [\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\mu (1-\gamma_5) \beta_\lambda^\eta \gamma_\lambda] + \rho_\eta^p \eta_\lambda k^\eta \text{tr} [\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\mu (1-\gamma_5) \gamma_\lambda \gamma_5] \right\}$$

$$= -\frac{1}{4k^n k^p} (2\delta_{\gamma\gamma} - 1) \rho_\eta^p (\rho_\lambda^\eta + \eta_\lambda k^\eta) \text{tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\mu (1-\gamma_5) \gamma_\lambda \}$$

226

por otro lado

si α es un número complejo $\text{tr} \alpha = 4\alpha$

227

$$\text{tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{tr} (\gamma_\nu \gamma_\mu) = \text{tr} (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) = 8\delta_{\mu\nu} - \text{tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu)$$

entonces

$$\text{tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}$$

228

análogamente

$$\text{tr} (\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\mu \gamma_\lambda) = 4(\delta_{\nu\eta} \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\eta\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\eta\mu})$$

229

Es posible establecer además

$$\text{tr} (\gamma_\nu \gamma_\eta \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_5) = 4\varepsilon_{\nu\eta\mu\lambda}$$

230

donde $\varepsilon_{\nu\eta\mu\lambda}$ es 1 si $(\nu, \eta, \mu, \lambda)$ es una permutación par de $(1, 2, 3, 4)$, es -1 si es una permutación impar, y es cero si se repite algún índice.

Entonces

$$\sum |A|^2 = \frac{16}{8k^n k^p k^p k^p} \sum_{\nu=1}^4 (2\delta_{\nu\nu} - 1) (2\delta_{\nu\nu} - 1) \left\{ \rho_\omega^p \rho_\mu^p (\delta_{\nu\omega} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\omega\nu} + \delta_{\nu\nu} \delta_{\omega\mu} + \delta_{\nu\omega\mu\nu}) \times \right.$$

$$\left. \lambda (\rho_\eta^p \rho_\lambda^\eta + \rho_\eta^p \eta_\lambda k^\eta) (\delta_{\nu\eta} \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\eta\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\eta\mu} + \varepsilon_{\nu\eta\mu\lambda}) \right\}$$

pero

$$\sum_{\nu=1}^4 (2\delta_{\nu\nu} - 1) (2\delta_{\nu\nu} - 1) f_\nu f'_\nu = \sum_{\nu=1}^4 f_\nu f'_\nu$$

$$\sum_{\nu} (\varepsilon_{\nu\omega\mu\lambda} (\delta_{\nu\omega} \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\omega\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\omega\mu}) + \varepsilon_{\nu\eta\mu\lambda} (\delta_{\nu\eta} \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\eta\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\eta\mu}) + \varepsilon_{\nu\eta\mu\lambda} (\delta_{\nu\omega} \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\omega\lambda} + \delta_{\nu\lambda} \delta_{\omega\mu})) =$$

$$= 2(\varepsilon_{\eta\omega\mu\lambda} + \varepsilon_{\nu\omega\mu\lambda}) = 0$$

$$\sum_{\lambda} = \sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} - 2 (\epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda} - \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda})$$

por otro lado

$$\sum_{\lambda} |A_{\lambda}|^2 = \frac{N}{K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda}} \rho_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} (\rho_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} + \rho_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda}) \epsilon_{\lambda} \epsilon_{\lambda}$$

$$= \frac{N}{K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda}} \left[\rho_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} (\epsilon_{\lambda}^{\lambda}) + \rho_{\lambda}^{\lambda} \rho_{\lambda}^{\lambda} (\epsilon_{\lambda}^{\lambda}) \right] \quad 23$$

En la expresión (216) aparece el factor —

$K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda} K^{\lambda}$ por consiguiente la dependencia en la masa de neutrino desaparece.

La expresión (216) es de la forma

$$a + b \hat{p} \cdot \hat{n} = a + c \cos \theta$$

la cual muestra una forma de verificar la conservación —

de la paridad, ya que si invertimos las coordenadas — — —

$$\hat{p} \cdot \hat{n} \rightarrow -\hat{p} \cdot \hat{n} \quad \text{y por tanto una asimetría entre } \theta \text{ y } 180^\circ - \theta$$

mostraría la presencia de este término.

La situación experimental, es, sin embargo, más compleja. Yang y Lee propusieron la observación del decaimiento β de un núcleo .(en particular Co^{60}). Este decaimiento — puede ser representado por



Ahora, la parte espacial de la función de onda de las partículas

que emergen, es de la forma $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$, como por otro lado la ma-

yoría de los procesos de decaimiento involucran energías de me

nos de 1 Mev. y además una estimación — — —

de r es el radio nuclear, que a su vez

$$r \sim \frac{A^{\frac{1}{3}}}{m_n} \sim \frac{A^{\frac{1}{3}}}{180} \text{ Mev}^{-1}$$

entonces

$$pr \sim \frac{1}{100} ; e^{ipr} \sim 1$$

lo cual indica que las partículas salientes prefieren no adquirir momento angular ya que e^{ipr} puede ser desarrollado en una serie de armónicos esféricos, conteniendo funciones Bessel que se comportan como $(pr)^l$ para pequeñas pr . Cuando un decaimiento β tiene $l=0$ es llamado una transición permitida; si cambia el momento angular por una unidad, primera transición prohibida; por dos unidades, segunda transición prohibida, etc.. En la transición permitida el sistema electrón neutrino puede ser emitido con los espines paralelos o antiparalelos formando un estado triplete o singlete respectivamente. Tenemos entonces

- 1) La transición de Fermi, con un cambio en el espín nuclear de

$$\Delta J = 0$$

- 2) Transición de Gamow-Teller, correspondiendo a espines paralelos del sistema neutrino electrón, con un cambio en el espín nuclear de

$$|\Delta J| = 1$$

(pero la transición $0 \rightarrow 0$ es prohibida).

Como ejemplos de estas transiciones, tenemos

$$0^{++} \rightarrow N^{1/2+} + e^{+} + \nu$$

Fermi

espín $0 \rightarrow 0$

$$1^{+} \rightarrow 2^{++} + e^{+} + \nu$$

Gamow-Teller

espín $1 \rightarrow 0$

pero la transición

$$n \rightarrow p + e^{+} + \bar{\nu}$$

espín $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

es mixta.

El proceso representado en (28) debe de ser introducido en un núcleo complejo, debiéndose tener en cuenta la multiplicidad de los nucleones y su extensión espacial. A primer orden

$$M_{fi} = \langle N_{2i1}^A | e^{-i\vec{y}} | H | N_2^A \rangle = G_i \langle N_{2i1}^A | A_i C_i | N_2^A \rangle \left[\frac{K^{\tau} N^{\nu}}{15^{\tau} P^{\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{u}_e \gamma_{\mu} u_{\nu} \quad 232$$

donde hemos procedido como antes, haciendo también la hipótesis de la masa no cero del neutrino. El elemento de matriz es de la forma

$$\langle N_{2i1}^A | A_i C_i | N_2^A \rangle = \langle N_{2i1}^A | \sum_{j=1}^A \mathcal{T}_j C_j | N_2^A \rangle \quad 233$$

donde \mathcal{T}_j es el operador que transforma el nucleón j de un neutrón a un protón, y C_j se transforma como escalar, vector, tensor, pseudovector, pseudoescalar ($i = 1, 2, 3, 4, 5$ respectivamente).

Como las energías involucradas en el decaimien

to β son pequeñas comparadas con la masa del núcleo, podemos hacer consideraciones no relativistas para el elemento de matriz (233).

Es fácil ver que en el límite no relativista (apéndice B)

$$(\bar{u} \sigma_u) (\bar{u} \beta_u) \rightarrow (\bar{u} u) (\hat{u} u)$$

$$(\bar{u} \sigma_v u) (\bar{u} \beta_v u) \rightarrow (\bar{u} u) (\bar{u} \gamma_u)$$

$$(\bar{u} \sigma_{\mu\nu} u) (\bar{u} \beta_{\mu\nu} u) \rightarrow (\bar{u} \sigma_{\mu\nu} u) (\bar{u} \hat{\sigma}_{\mu\nu} u)$$

$$(\bar{u} \sigma_{\mu\nu} u) (\bar{u} \beta_{\mu\nu} u) \rightarrow (\bar{u} \sigma_{\mu\nu} u) (\bar{u} \hat{\sigma}_{\mu\nu} u)$$

$$(\bar{u} \sigma_{\rho} u) (\bar{u} \beta_{\rho} u) \rightarrow 0$$

(σ son las matrices de Pauli de 2×2 y $\hat{\sigma}$ son las matrices de 4×4). (234) nos muestra que las partes escalar y vectorial son incapaces de causar cambios en el espín nuclear y por consiguiente se los asocia a transiciones de Fermi, mientras que los términos tensorial y pseudoescalar se asocian a transiciones Gamow-Teller.

Los elementos de matriz de la parte nuclear son entonces dados en la notación

$$M_F = \langle N_{Z+1}^A | \sum_j \beta_j^+ | N_Z^A \rangle$$

$$M_{GT} = \langle N_{Z+1}^A | \sum_j \beta_j^+ \tau_j | N_Z^A \rangle$$

pudiendo entonces representar el elemento de matriz para (28) como

$$M_{fi} = M_F \frac{1}{N_f} [\bar{u}_e (1 + \gamma_5 \gamma_4)] + M_{GT} \frac{1}{N_i} [\bar{u}_e \hat{\sigma} \cdot \tau \gamma_4] \quad 235$$

donde N_i son los términos de normalización para los leptones.

Es claro que si consideramos en lugar de --

(28), (29); se convertirá en

$$M_{fi} = M_F \frac{1}{N_i} [\bar{u}_e (c_1 + c_2 \gamma_4 + c_3 \gamma_5 + c_4 \gamma_4 \gamma_5) u_\nu] + M_{GF} \frac{1}{N_i} [\bar{u}_\nu (\gamma_4 + c_1 \gamma_4 + c_2 \gamma_5 + c_3 \gamma_4 \gamma_5) u_e] \quad (28)$$

Yang y Lee calcularon, en el decaimiento β , - la probabilidad por unidad de tiempo de obtener un electrón con una energía entre w y $w + dw$ y un ángulo θ entre el momento del electrón y la dirección del momento angular nuclear. Obteniendo (para una transición permitida)

$$N(w, \theta) dw d\cos\theta d\phi = \frac{2}{4\pi} F(Z, w) \rho(w, w_0 - w)^2 \left(1 + \frac{2}{w} \alpha \beta + \frac{2}{w} \right) \rho(w, w_0 - w) \quad (29)$$

donde (si el núcleo no es polarizado)

$$\begin{aligned} \beta &= (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} [(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_F^2 + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_{GF}^2] \\ &= \frac{1}{2} [(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_F^2 + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_{GF}^2] \\ &= \frac{1}{2} [(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_F^2 + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) M_{GF}^2] \end{aligned}$$

Para un valor fijo de la energía del electrón (29) - es de la forma

$$I(\theta) = \text{constante} \times (1 + \alpha \beta \cos\theta + \beta^2 \cos^2\theta)$$

donde

$$\alpha \beta = \frac{1}{2} \frac{M_{GF}^2}{M_F^2} \frac{w}{w_0 - w}$$

Si se considera un núcleo polarizado, aparecen términos de interferencia. Escogiendo al eje Z como -

la dirección de polarización y restringiéndose a transiciones Gamow-Teller, la constante α queda expresada como

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\langle J_2 \rangle}{J} & \text{para transiciones } J \rightarrow J-1 \\ -\beta \frac{\langle J_2 \rangle}{J+1} & \text{para transiciones } J \rightarrow J+1 \\ \beta \frac{\langle J_2 \rangle}{J+1} & \text{para transiciones } J \rightarrow J \end{cases}$$

donde $\langle J_2 \rangle$ es la componente promedio del espín del núcleo inicial, y β es una combinación de las constantes de acoplamiento.

$$\beta = K_2 \left[C_T C_T^{1*} - C_A C_A^{1*} + i \frac{g_A^2}{g_V^2} (C_A C_T^{1*} + C_T C_A^{1*}) \right] |M_{CT}|^2 V_e \frac{2}{3 + \frac{\sum L}{W}} \quad 22e$$

(recuérdese que estamos trabajando con unidades $\hbar = c = 1$)

A principios de 1957 C.S. Wu et al realiza ron el experimento, polarizando Co^{60} . El decaimiento permitido de Co^{60} cambia el espín por una unidad y debe de ser por tanto una interacción Gamow-Teller. Se encontró una gran asimetría en la distribución de los electrones entre θ y $180^\circ - \theta$, siendo el coeficiente de esta simetría (α) negativo, esto es, la emisión de electrones es favorecida en la dirección opuesta a la del espín nuclear. Se encontró que a la velocidad de $v/c \approx 0.6$ el valor de α era de aproximadamente 0.4, teniendo la relación $\frac{\langle J_2 \rangle}{J_2} \approx 0.60$; esto es $\beta \approx 0.7$.

La violación a la paridad ha quedado bien establecida, puesto que además del experimento de Wu, ha sido observada en decaimientos de mesones e hiperones. Sin em-

bargo, como el mesón θ (τ) no tiene espín, no existe más evidencia de la violación de la paridad en su decaimiento, que la extraordinaria coincidencia entre este mesón y el mesón η . Consideramos entonces $\theta = \eta$.

CAPITULO III

TEOREMA PTC

Introducción

Una simple relegación de la paridad acarrearía problemas en la física, de forma que al establecerse experimentalmente la violación a la paridad, cobró mucha importancia un teorema, el cual establece la invariancia, bajo ciertas condiciones, de los procesos ante el producto $P\pi C$ (en general cualquier permutación de P, C, π).

Con respecto a este teorema J. Schwinger, si bien no lo estableció explícitamente en sus artículos (1953), si asumió esencialmente su validez, y derivó de él la conexión entre espín y estadística. Demostraciones posteriores y discusiones del teorema, procedieron en la dirección opuesta; se asumía la conexión usual entre espín y estadística derivando entonces el teorema. La primera conjetura sobre la existencia de este teorema fue enunciada por Lüders en 1952, siendo sugerida la formulación correcta del teorema por B. Zumino en 1953. Hay que destacar las contribuciones a su establecimiento realizadas por Pauli y por Bell.

Las hipótesis del teorema son las siguientes:

1.- El lagrangiano del proceso es local e invariante bajo el grupo propio de Lorentz.

2.- Validez de la conexión usual entre espín y estadística.

(Estas demostraciones son basadas en teorías de campo lagrangianas. Es importante notar que Jost haciendo uso del formalismo de Wightman y de hipótesis mucho más débiles, ha logrado establecer el teorema de una forma mucho más general.)

Para la demostración del teorema seguiremos la prueba dada por G. Lüders en 1957. La demostración se hace a través de construir explícitamente una operación bajo la cual la teoría es invariante y después mostrar que esta operación es idéntica con el producto $\pi \otimes \pi$. La construcción de esta operación se hace a su vez en dos pasos; la reflexión fuerte, propuesta por Pauli, y la conjugación hermitiana. Como se verá estas operaciones son un mapeo del álgebra de operadores en si misma, dejando la densidad hamiltoniana de interacción invariante, aparte de cambiar las coordenadas.

3.1a Reflexión Fuerte

La operación consiste esencialmente en una reflexión del espacio y del tiempo

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \quad t \rightarrow -t$$

junto con una transformación de los campos de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(-x) & A_\mu(x) &\rightarrow -A_\mu(-x) \\ \psi(x) &\rightarrow \psi(-x) & \psi^T(x) &\rightarrow \psi^T(-x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(-x) & \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(-x) \end{aligned} \quad 3.1a$$

Fácilmente se comprueba la invariancia de las ecuaciones de campo. Mas, al analizar las relaciones de conmutación - para los bosones, encontramos una diferencia en el signo. Esto es (en el caso de mesones sin carga por ejemplo)

$$[\psi(x), \psi(x')] \rightarrow [\psi(-x), \psi(-x')] = \psi(x-x) = -(\Delta(x-x'))$$

El problema puede evitarse imponiendo la condición un -- tanto artificial de que el orden de los factores en un -- producto de operadores de campo debe de ser invertido. En otras palabras

$$AB \dots C \rightarrow C' \dots B'A' \quad 3.1b$$

donde A', B', \dots, C' representan a los operadores A, B, \dots, C transformados de acuerdo a (3.1). Bajo esta condición

$$[\psi(x), \psi(x')] \rightarrow [\psi(-x), \psi(-x')] = \Delta(x-x')$$

que es el resultado deseado. La demostración para los demás campos de bosones es análoga, y para el campo de Dirac (el cambio de orden en los factores es irrelevante en es

te caso)

$$\begin{aligned}
 \{ \psi_a(x), \psi_b(y) \} &\rightarrow \frac{1}{i} \{ (i \nabla^2 - y) \psi_a(x), (i \nabla^2 - x) \psi_b(y) \} = -\psi_a(x), \psi_b(y) \{ \psi_a(-y), \psi_b(-x) \} \\
 &= -\psi_a(x), \psi_b(y) \{ \psi_a(-y), \psi_b(-x) \} \\
 &= -i \left(\psi_a(x) \frac{\partial}{\partial y} \psi_b(y) - \psi_b(y) \frac{\partial}{\partial x} \psi_a(x) \right) \Delta(y-x) \\
 &= -i \left(\psi_a(x) \frac{\partial}{\partial (x-y)} \psi_b(y) - \psi_b(y) \frac{\partial}{\partial (x-y)} \psi_a(x) \right) \Delta(x-y) \\
 &= -i \delta_{ab}(x-y)
 \end{aligned}$$

Hasta el momento sólo hemos definido la operación de reflexión fuerte en forma consistente. Necesitamos demostrar que el sistema es invariante ante este tipo de transformaciones. La transformación mandará

$$\mathcal{H}(t) \rightarrow \mathcal{H}'(-t)$$

Ahora bien, el sistema será invariante, si la ecuación dinámica es satisfecha con la nueva forma del hamiltoniano. Esto es

$$-i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{H}'(-t) \Phi = 0$$

o sea, necesitamos demostrar

$$H(x) \rightarrow H'(x) = H(-x)$$

ya que de esa forma

$$H(x) = H(-x)$$

32

La densidad hamiltoniana de interacción es la componente (4,4) de un tensor, y se compone, de números c, de los operadores de campo y de los operadores diferen

ciales actuando sobre los campos; pudiendo haber además factores tales como $\gamma_0, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_0$ con algunas contracciones sobre los índices. Si despreciamos por el momento campos de espín $\frac{1}{2}$, entonces vemos como consecuencia de la definición (B.11) que cada tensor de rango par toma un signo más bajo la reflexión fuerte, mientras que si es de rango impar toma un signo menos (además de reemplazarse x por $-x$). Hemos pedido anteriormente que la teoría fuera simetrizada siempre en los campos de Bose y por consiguiente un rearrreglo de los factores no introduciría ningún cambio. Concluimos entonces que como $H(x)$ es un tensor de rango par, bajo la reflexión fuerte

$$H(x) \rightarrow H(-x)$$

siempre que no esten presentes campos de espín $\frac{1}{2}$.

Los campos de Dirac sólo pueden entrar en una teoría invariante ante transformaciones de Lorentz, en la forma de los cinco covariantes S, T, V, A, P (B.18). Estas cantidades tensoriales obedecen las mismas reglas de cambio de signo ante la reflexión fuerte, que se satisfacían en el caso de los bosones. Demostraremos por ejemplo el caso escalar; (como ya se había mencionado en el capítulo I, requerimos que los campos espinoriales estén antisimetrizados, de ahí que el escalar representado en (B.18) por $\bar{\psi}\psi$ realmente se lee $\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha - \bar{\psi}_\beta \psi_\beta$). Entonces, bajo la reflexión fuerte tenemos

$$\begin{aligned}
 -(\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\alpha)(x) &\rightarrow -(i\bar{\psi}(-x)\gamma_5)_\alpha (i\gamma_5 \psi(-x))_\alpha + (i\gamma_5 \psi(-x))_\alpha (i\bar{\psi}(-x)\gamma_5)_\alpha \\
 &= -\gamma_{5\alpha\beta} \psi_\beta(-x) \bar{\psi}_\alpha(-x) \gamma_5 \gamma_\alpha + \gamma_{5\alpha\beta} \gamma_{5\alpha\beta} \bar{\psi}_\beta(-x) \psi_\alpha(-x) \\
 &= (\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\alpha)(-x)
 \end{aligned}$$

De forma que el término escalar ante la transformación - no cambia de signo. Análogamente se muestra que para P y T no hay cambio de signo mientras que para V y A si existe. Por tanto el resultado previamente obtenido no se altera. Esto significa que para cualquier interacción invariante ante transformaciones de Lorentz (local), es invariante también ante la reflexión fuerte. Hay que puntualizar el hecho de que se ha supuesto antisimetrización de los campos espinoriales aún cuando se trate de diferentes campos. (por ejemplo $\bar{\psi}_x^p \psi_x^p + \bar{\psi}_x^p \bar{\psi}_x^p$)

3.1b Conjugación Hermitiana

Bajo la conjugación hermitiana

$$\psi(x) \rightarrow \psi^\dagger(x)$$

$$A_{\mu\nu}(x) \rightarrow A_{\mu\nu}(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^\dagger(x)$$

$$\psi^\dagger(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \quad 33a$$

$$\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}^\dagger(x)$$

$$\bar{\psi}^\dagger(x) \rightarrow \psi(x)$$

además, para números

$$c \rightarrow c^*$$

33b

De nuevo el producto de operadores debe de ser invertido

$$AB \dots C \rightarrow C' \dots B'A'$$

Demostraremos que es un mapeo del algebra de operadores en si misma. Para el caso del campo escalar -- (con carga) es claro que Υ^T satisface la ecuación de Klein Gordon de forma que lo único que es necesario mostrar es que la transformación de $[\Upsilon^T(x), \Upsilon(y)]$ da $-i\Delta(x-y)$ (el signo es contrario puesto que $t \rightarrow -t$) Aplicando la transformación al conmutador tenemos

$$[\Upsilon^T(x), \Upsilon(y)] = [\Upsilon(y), \Upsilon(x)] = i\Delta(y-x) = -i\Delta(x-y)$$

pudiendose mostrar en forma directa para los demás campos.

Bajo esta transformación la densidad hamiltoniana permanece invariante ya que es hermitiana.

$$H(x) \rightarrow H'(x) = H(x)$$

de forma que

$$H(t) \rightarrow H'(t) = H(t)$$

3.1c TPC

El producto de las dos transformaciones nos dará una transformación que es un mapeo del álgebra en si misma y que además deja al hamiltoniano invariante. Como se hace un doble cambio en la posición de los operadores, los productos no se alterarán y por consiguiente podemos interpretar a esta transformación como una trans

formación en el espacio de Hilbert. (mapea $\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$). Podemos entonces escribir a esta, como

$$\varphi(\lambda) \longrightarrow \varphi^R(\lambda) = \mathbb{R} \varphi(\lambda) \mathbb{R}^{-1} = \varphi(-\lambda)$$

$$\varphi(\lambda) \longrightarrow \varphi^I(\lambda) = \mathbb{I} \varphi(\lambda) \mathbb{I}^{-1} = \varphi^*(-\lambda)$$

$$\varphi^+(\lambda) \longrightarrow \varphi^{+R}(\lambda) = \mathbb{R} \varphi^+(\lambda) \mathbb{R}^{-1} = \varphi^+(-\lambda)$$

$$A_\mu(\lambda) \longrightarrow A_\mu^R(\lambda) = \mathbb{R} A_\mu(\lambda) \mathbb{R}^{-1} = -A_\mu(-\lambda)$$

$$\varphi(\lambda) \longrightarrow \varphi^R(\lambda) = \mathbb{R} \varphi(\lambda) \mathbb{R}^{-1} = -i \tilde{\gamma}_5 \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}^{\dagger}(-\lambda)$$

$$\bar{\varphi}(\lambda) \longrightarrow \bar{\varphi}^R(\lambda) = \mathbb{R} \bar{\varphi}(\lambda) \mathbb{R}^{-1} = -i \tilde{\gamma}^{\dagger}(-\lambda) \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_5$$

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^R = \mathbb{R} \mathcal{L} \mathbb{R}^{-1} = \mathcal{L}^*$$

3.5

Rápidamente se reconoce que esta última transformación tiene las características del producto $\mathbb{R} \Pi \mathcal{L}$.

- 1.- $\tau \rightarrow -\tau$ $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$ (Π)
- 2.- operadores de campo en sus adjuntos (\mathcal{L})
- 3.- $\bar{\tau} \rightarrow -\bar{\tau}$ (\mathbb{P})

Demostraremos entonces que (3.5) es precisamente el producto $\mathbb{R} \Pi \mathcal{L}$ si escogemos los factores de fase adecuados.

Para el campo de mesones tenemos (1.21)

$$\mathcal{L} \varphi(x) \mathcal{L}^{-1} = \eta^{\mu\nu} \varphi^{\dagger}(\lambda)$$

y por (1.34)

$$\Pi \mathcal{L} \varphi(x) \mathcal{L}^{-1} \Pi^{-1} = \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \varphi^{\dagger}(\lambda)$$

por último de (1.14)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \psi^\dagger(x) d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \psi^\dagger(x) d^3x \quad (3.6)$$

Si escogemos $\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) \psi^\dagger(x) d^3x = 1$ lo cual es posible puesto que la única restricción es $|\eta| = 1$, entonces comparando (3.6) con (3.5) concluimos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$$

La demostración para los demás bosones es análoga y para el campo de Dirac tenemos

$$\mathcal{L}(\psi(x)) \mathcal{L}^{-1} = \eta_c^* M_c \tilde{\psi}(x)$$

$$\mathbb{P} \mathcal{L}(\psi(x)) \mathcal{L}^{-1} \mathbb{P}^{-1} = \eta_c^* \eta_c^* M_c^* (\tilde{\psi}(x^*)) M_B \tilde{\psi}(x^*)$$

M_c y M_B son unitarias y además (1.35) establece que $M_B = \gamma_5 M_c$

por tanto

$$M_c^* (\tilde{\psi}(x^*) M_B) = M_c^{-1} (\tilde{\psi}(x^*) \gamma_5 M_c) = (\tilde{\psi}(x^*) \gamma_5 M_c M_c^{-1}) = \tilde{\psi}(x^*)$$

así

$$\mathbb{P} \mathcal{L}(\psi(x)) \mathcal{L}^{-1} \mathbb{P}^{-1} = \eta_c^* \eta_c^* \gamma_5 \tilde{\psi}(x^*)$$

de (1.14)

$$\mathbb{P} \mathbb{P} \mathcal{L}(\psi(x)) \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathcal{L}^{-1} = \eta_c^* \eta_c^* \eta_c^* \eta_c^* \gamma_5 \tilde{\psi}(x^*)$$

por lo tanto si $\eta_c^* \eta_c^* \eta_c^* \eta_c^* = 1$

quedando entonces establecido el teorema.

La condición $\eta_{\mu}^{\mu} \eta_{\nu}^{\nu} \eta_{\lambda}^{\lambda} = 1$ (para todo tipo de campos) es necesaria si el orden de las tres transformaciones es $\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbb{C}$. Para otros órdenes las condiciones cambian, pero siempre es posible satisfacerlas; en el caso $\mathbb{T}\mathbb{C}\mathbb{P}$ la condición es $\eta_{\mu}^{\mu} \eta_{\nu}^{\nu} = 1$ mientras que en el caso $\mathbb{P}\mathbb{C}\mathbb{T}$ es $\eta_{\mu}^{\mu} \eta_{\nu}^{\nu} \eta_{\lambda}^{\lambda} = 1$.

3.2 ALGUNAS APLICACIONES

Consideremos ahora un hamiltoniano \mathcal{H} de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{fuerte}} + \mathcal{H}_{\text{débil}}$$

donde ambos términos son invariantes bajo transformaciones propias de Lorentz. En las siguientes discusiones supondremos que $\mathcal{H}_{\text{fuerte}}$ es invariante bajo $\mathbb{C}, \mathbb{P}, \mathbb{T}$. Las fases η de los campos son escogidas de tal manera que

$$\mathbb{C} \mathcal{H}_{\text{fuerte}} \mathbb{C}^{-1} = \mathcal{H}_{\text{fuerte}} \quad \text{etc.}$$

Recordamos que las interacciones débiles pueden violar la invariancia $\mathbb{C}, \mathbb{P}, \mathbb{T}$. Es posible establecer los siguientes teoremas:

TEOREMA 1.- Si una partícula A decae a través de la interacción $\mathcal{H}_{\text{débil}}$ y si la partícula y su correspondiente antipartícula \bar{A} no decaen en los mismos productos finales, entonces a primer orden en $\mathcal{H}_{\text{débil}}$ las masas y vidas

medias de A y \bar{A} coinciden.

Consideremos primero las masas. La masa m de una partícula A será representada como el eigenvalor de la ecuación

$$\mathcal{H} |A\rangle = m |A\rangle$$

donde el hamiltoniano \mathcal{H} representa la suma de los hamiltonianos (tanto fuertes como débiles) que contribuyen a la masa observable de la partícula. Tenemos entonces

$$\langle A | \mathcal{H} |A\rangle = \langle A | \mathcal{H} |A\rangle = m \langle A | A \rangle$$

Si \mathcal{H} es invariante bajo $P\pi$ entonces

$$\langle A | \mathcal{H} |A\rangle = \langle P\pi A | \mathcal{H} |P\pi A\rangle = \langle A | \mathcal{H} |A\rangle$$

por tanto

$$\langle A | \mathcal{H} |A\rangle = \langle A | \pi^{-1} P^{-1} \mathcal{H} P \pi |A\rangle \quad 3.7$$

El estado $|R(A)\rangle = P\pi |A\rangle$ es un estado en el cual todas sus partículas son intercambiadas por sus correspondientes antipartículas teniendo estas el mismo momento que las partículas originales (P, π cambian el signo del momento). Esto es, podemos identificar en cierta forma

$$|R(A)\rangle \leftrightarrow |\bar{A}\rangle \quad 3.8$$

Para ilustrar mejor el argumento, consideremos el estado de una sola partícula (sin espín)

$$|A\rangle = |k\rangle$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \bar{\Phi}_0 &= \mathbb{R} \pi \mathcal{L} \alpha^\dagger(\mathbf{k}) \Phi_0 = \eta_c \mathbb{R} \pi b^\dagger(\mathbf{k}) \Phi_0 \\
 &= \eta_c \eta_\pi \mathbb{R} b^\dagger(-\mathbf{k}) \Phi_0 = \eta_c \eta_\pi \eta_R b^\dagger(\mathbf{k}) \Phi_0 \\
 &\equiv \eta_R b^\dagger(\mathbf{k}) \Phi_0
 \end{aligned}$$

de aquí que

$$\langle B | \mathcal{H} | A \rangle = \langle B | \mathbb{R}^{-1} \mathcal{H} \mathbb{R} | A \rangle$$

como \mathbb{R} es antilineal, debido a (1.32)

$$\begin{aligned}
 \langle B | \mathcal{H} | A \rangle &= (\Phi_B, \mathbb{R}^{-1} \mathcal{H} \mathbb{R} \Phi_A) = (\mathbb{R} \Phi_B, \mathcal{H} \mathbb{R} \Phi_A)^* \\
 &= \eta_R \eta_R^* (\bar{\Phi}_B, \mathcal{H} \bar{\Phi}_A)^* = \eta_R \eta_R^* \langle B | \mathcal{H} | A \rangle^*
 \end{aligned}$$

así pues, (3.7) queda como

$$\langle A | \mathcal{H} | A \rangle = |\eta_R|^2 \langle \bar{A} | \mathcal{H} | \bar{A} \rangle^* = \langle \bar{A} | \mathcal{H} | \bar{A} \rangle$$

esto implica

$$\langle \bar{A} | \mathcal{H} | \bar{A} \rangle = m \langle \bar{A} | \bar{A} \rangle$$

concluimos entonces

$$m = \bar{m}$$

Si la partícula tiene espín, el espín de la antipartícula obtenida a través de $\mathcal{L} \mathbb{R} \pi$ apunta en la dirección opuesta. Este hecho es inmaterial para una partícula libre; la condición de invariancia de Lorentz requerida para el teorema $\mathcal{L} \mathbb{R} \pi$ cubre simetría rotacional y por consiguiente podemos obtener de nuevo la dirección original del espín.

Se define la vida media de una partícula como el inverso de la probabilidad total de transición por

unidad de tiempo. Esto es

$$\mathcal{T}^{-1} = \int_f d\psi_i$$

(\int_f indica suma sobre todos los estados finales) lo cual, a primer orden, es proporcional a

$$\sum_f |\langle f | H | A \rangle|^2$$

(ecuación (2.15) por ejemplo)

En el caso de partículas sin espín (3.9) -

nos indica

$$|\langle B | H | A \rangle| = |\langle \bar{B} | H | \bar{A} \rangle|$$

quedando por tanto demostrado el teorema. Para partículas con espín la demostración puede hacerse de una manera similar.

TEOREMA 2. - Si además de lo que se supone al principio de la sección, asumimos que \mathcal{H} es estrictamente invariante ante la conjugación de carga y además que el estado final $|B\rangle$ está compuesto por partículas libres, entonces a primer orden de $\mathcal{H}_{d' b' l}$ no existen términos de interferencia entre términos que violen la paridad y términos que la conserven.

Definiendo

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{d' b' l} + P \mathcal{H}_{d' b' l} P^{-1})$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} (\mathcal{H}_{d' b' l} - P \mathcal{H}_{d' b' l} P^{-1})$$

entonces

$$H_{\text{des}} = H_1 + H_2$$

y además

$$P H_1 P^{-1} = H_1$$

$$P H_2 P^{-1} = -H_2$$

3.11

En general el estado final será una mezcla

$$|B\rangle = c_1 |B_1\rangle + c_2 |B_2\rangle$$

3.12

donde las amplitudes de transición (a primer orden)

$$c_1 = \langle B_1 | H_1 | A \rangle$$

$$c_2 = \langle B_2 | H_2 | A \rangle$$

3.13

proviene de los dos tipos de interacción H_1 y H_2 que llevan a los estados $|B_1\rangle$ y $|B_2\rangle$ respectivamente. La probabilidad total de transición es proporcional a

$$|\langle B | H_1 + H_2 | A \rangle|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + 2 \operatorname{Re} c_1 c_2^*$$

Lo que deseamos demostrar entonces es que el término de interferencia $\operatorname{Re} c_1 c_2^*$ es cero.

Por el teorema PTC tenemos

$$(P \psi \Pi)^{-1} H_{1,2} P \psi \Pi = H_{1,2}$$

y de (3.11)

$$H_{1,2} = \pm \Pi^{-1} \psi^{-1} H_{1,2} \psi \Pi$$

3.14

donde el signo positivo corresponde a H_1 y el negativo a H_2 . Por otro lado

$$\psi^{-1} H_{1,2} \psi = \psi^{-1} H_{\text{des}} \psi = \pm \psi^{-1} H_{\text{des}} \psi$$

Es fácil ver de la demostración que es posible escoger las fases de tal forma que $\mathcal{C}P = P\mathcal{C}$. Como por hipótesis $\mathcal{H}_{\text{decaimiento}}$ conmutaba con el operador conjugación de carga

$$\mathcal{C}^{-1} \mathcal{H}_{\text{decaimiento}} \mathcal{C} = \mathcal{H}_{\text{decaimiento}}$$

por tanto, de (3.14)

$$\mathcal{H}_{\text{decaimiento}} = \pm \mathbb{P}^{-1} \mathcal{H}_{\text{decaimiento}} \mathbb{P}$$

usando (3.13)

$$c_{\nu, \ell}^* = \langle B_{\nu, \ell} | \mathcal{H}_{\text{decaimiento}} | A \rangle^* = \langle B_{\nu, \ell} | \mathbb{P}^{-1} \mathcal{H}_{\text{decaimiento}} \mathbb{P} | A \rangle^*$$

pero \mathbb{P} es antilineal y unitario lo que implica

$$c_{\nu, \ell}^* = \pm \langle \mathbb{P} B_{\nu, \ell} | \mathcal{H}_{\text{decaimiento}} \mathbb{P} | A \rangle \quad 3.15$$

Como $\mathcal{H}_{\text{partícula}}$ no es el responsable del decaimiento de las partículas, ambos $|A\rangle$ y $|B\rangle$ son eigenestados estacionarios de $\mathcal{H}_{\text{partícula}}$ de forma que

$$\mathcal{H}_{\text{partícula}} \Phi = E \Phi$$

$\mathcal{H}_{\text{partícula}}$ conmuta con \mathbb{P} , por tanto

$$\mathcal{H}_{\text{partícula}} \mathbb{P} \Phi = E \mathbb{P} \Phi$$

esto es, el estado $\mathbb{P} \Phi$ tiene la misma energía que el estado Φ . Como sin embargo la inversión del tiempo cambia el signo de μ , el estado $\mathbb{P} \Phi$ tiene una componente de momento angular opuesta a la del estado Φ . Como hemos supuesto además que los estados iniciales y finales fueran estados libres, es indistinguible la orientación del momento angular y por consiguiente (3.15) puede reescribirse como

$$c_{1,2}^* = \pm \langle B_{1,2} | H_{1,2} | A \rangle = \pm c_{1,2}$$

concluyendo por tanto que c_1 es real mientras que c_2 es imaginario puro, y por lo tanto

$$\text{Re } c_2 c_2^* = 0$$

Otra forma de concluir (3.15) puede obtenerse si observamos que en un estado libre Φ ; $\Phi \sim \gamma_J^A$ y que además $\gamma_J^M = -\gamma_J^{N^*}$ (convención de fase de Condon y Shortley).Entonces

$$\begin{aligned} c_1^* &= (\gamma_{1,2}^M, H_{1,2} \Phi_A^*) = (\gamma_{1,2}, H_{1,2}^+ \Phi_A)^* \\ &= (\Phi_A, H_{1,2} \gamma_{1,2}) = (\gamma_{1,2}, H_{1,2} \Phi_A) \end{aligned}$$

No podemos llevar este teorema directamete al decaimiento β , puesto que los estados finales e iniciales no son libres debido a la interacción electromagnética. Sin embargo como se ve en la ecuación (2.37) el término que toma en cuenta la interacción electromagnética es muy pequeño ya que está multiplicado por el factor $Z^2 e^2 m/\rho$. Si no hubiera interacción en el estado final este término no estaría presente y el teorema se aplicaría, concluyendo así la no invariancia bajo \mathcal{C} . Como la asimetría observada por Wu es muy grande, no es posible adjudicar la presencia de este término a la interacción electromagnética y por ende, en el caso del decaimiento β no hay invariancia bajo la conjugación de carga.

Ha podido establecerse que no sólo el término en

$$\text{Re} [c_T c_T^* - i c_A c_A^* + i \frac{ze^2}{\mu} (c_A c_T^* + c_A^* c_T)]$$

que toma en cuenta la interacción electromagnética es -- despreciable, sino que de hecho no se ha encontrado dependencia alguna; lo que viene, primero, a reforzar nuestra conclusión sobre violación de la conjugación de carga y segundo a sugerir la invariancia de la interacción bajo la reflexión del tiempo. Esta última parte puede verse como sigue:

El hamiltoniano de interacción esta dado por

$$H = \sum_{i,k} c_{ik} \bar{\psi}_\alpha \Gamma^i \psi_\beta \bar{\psi}_c \Gamma^k \psi_d + \text{Adjunto} \quad (k=i \text{ o } k=6-i)$$

de aquí que

$$\Pi H \Pi^{-1} = \sum_{i,k} c_{ik}^* \eta_\alpha^\nu \eta_\beta^\mu \eta_c^\lambda \eta_d^\sigma \Gamma^i M_B \Gamma^k M_B^{-1} \psi_\nu \bar{\psi}_\mu \psi_\lambda \bar{\psi}_\sigma + \text{Adj.}$$

Ahora

$$\Gamma^i M_B^{-1} \psi_\alpha M_B = \tilde{\psi}_\alpha$$

$$M_B \Gamma^i M_B^{-1} = \tilde{\gamma}_\alpha \dots \tilde{\gamma}_\rho = \Gamma^i$$

entonces

$$\Pi H \Pi^{-1} = \sum c_{ik}^* \eta_\alpha^\nu \eta_\beta^\mu \eta_c^\lambda \eta_d^\sigma \bar{\psi}_\nu \Gamma^i \psi_\mu \bar{\psi}_\lambda \Gamma^k \psi_\sigma + \text{Adj.}$$

Pedir invariancia ante inversión del tiempo es equivalente a

$$\Pi H(\psi, \psi) \Pi^{-1} = H(\psi, -\psi)$$

Es necesaria y suficiente la condición

$$C_{iK}^* \eta = C_{iK}$$

donde

$$\eta = \eta_a^* \eta_b \eta_c^* \eta_d$$

esto implica

$$\frac{C_{11}}{C_{11}^*} = \frac{C_{12}}{C_{12}^*} = \frac{C_{21}}{C_{21}^*} = \dots = \frac{C_{22}}{C_{22}^*}$$

que en nuestro caso se traduce en que el término

$$C_A C_T^* + C_A^* C_T$$

es real y por consiguiente (2.27) se reduce a

$$\text{Re} [C_T C_T^* - C_A C_A^*]$$

no existiendo en la asimetría, por tanto, dependencia en θ .

Durante un período corto de tiempo todo parecía indicar que la verdadera simetría era PC (argumento propuesto por Landau en 1957). Sin embargo, esta idea pronto tuvo que ser desechada pues en 1964 J.H.Christenson, J. L. Fitch y R. Turley encontraron en un decaimiento particular del mesón K^0 evidencia para aseverar la no invariancia bajo PC .

El mesón eta neutro, que salió del anonimato poco ha y que tiene la curiosa particularidad de ser su propia anti-partícula. Apenas se lo descompone, el mesón produce tres pi-mesones de los cuales uno es neutro, pobrecito, y los otros dos son positivo y negativo respectivamente para enorme tranquilidad de todo mundo. Hasta que (los Franzini de por medio) se descubre que la conducta de los dos pi-mesones no es simétrica; la armoniosa noción de que la antimateria es el reflejo exacto de la materia se pincha como un globito. ¿Qué va a ser de nosotros? Los Franzini no se han asustado en absoluto ; está muy bien que los dos pi-mesones sean hermanos enemigos, porque eso ayuda a reconocerlos e identificarlos. Hasta la física tiene sus Talleyrand.

JULIO CORTAZAR

El mesón es neutro, que sale del momento
 poco ha y que tiene la curiosa particularidad
 de ser un grupo anti-partícula. Antes de la
 descomposición, el mesón produce tres tipos de mesones
 de los cuales uno es neutro, positivo y los
 otros dos son positivo y negativo respectivamente.
 Este parte en la simetría de todo mundo
 hasta que (los fragmentos de por medio) se des-
 cubren que la conducta de los dos mesones
 no es simétrica. El momento nuclear de los
 fragmentos es el reflejo exacto de la materia
 se produce como un planeta. Que va a ser de los
 otros. Los fragmentos de los mesones se
 descomponen en los dos tipos de mesones.
 Los fragmentos negativos, porque son negativos. Por
 consiguiente se identificaron. Hasta la física

CAPITULO IV

EL MESON K^0 Y LA VIOLACION A LA SIMETRIA CP

4.1 LAS PARTICULAS K_1^0 Y K_2^0

En 1955 Gell-mann y Pais hicieron notar que el decaimiento del kaón neutro tenfa ciertas peculiaridades pues aún cuando se esperaba que las partículas K^0 y \bar{K}^0 fueran distintas (una con extrañeza igual a 1 y la otra con $S=-1$) se podrían transformar una en la otra a través de la acción de interacciones débiles. En particular sugirieron el proceso

$$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \rightarrow \bar{K}^0$$

Para tratar esta situación, propusieron el cambio de representación

$$\psi_1 \equiv |K_1^0\rangle \equiv \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\psi + \psi^\tau}{\sqrt{2}} \quad 4.1$$

$$\psi_2 \equiv |K_2^0\rangle \equiv \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{i\sqrt{2}} = \frac{\psi - \psi^\tau}{i\sqrt{2}} \quad 4.2$$

los cuales son eigenestados de \mathcal{C} con eigenvalores ± 1 respectivamente, si se escoge la fase arbitraria de \mathcal{C} de forma que

$$|\bar{K}^0\rangle = \mathcal{C} |K^0\rangle$$

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$$

Esto es; si se supone invariancia bajo \mathbb{C} , el estado $|K^0\rangle$ puede decaer solo a estados con $\eta_i = 1$, mientras que $|K^{\pm}\rangle$ solo lo podrá hacer a los que tengan $\eta_i = -1$. Cuando se produce un mesón K^0 (por ejemplo $\pi^+ + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$) debemos de pensar el proceso como la producción de una superposición coherente de K_1^0 y K_2^0 ya que

$$|K^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle + i |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad 4.3$$

mientras que en la producción de un K^0 (por ejemplo en $p + K^- \rightarrow n + \bar{K}^0$) corresponde a la producción de la superposición coherente

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle - i |K_2^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad 4.4$$

Como los piones no tienen espín, la conservación del momento angular requiere que los dos piones resultantes del decaimiento

$$K^0 \rightarrow \pi \pi$$

posean un momento angular relativo igual al espín del Kaón. Un estado sin carga, de dos piones son momento angular determinado, wa un eigenestado de \mathbb{C} con eigenvalor $(-1)^L$ ya que la acción de \mathbb{C} corresponde a la de intercambiar los dos piones. Como K_1^0 es una partícula sin espín, es esta la componente capaz del decaimiento 2. Se realizaron algunos experimentos para rectificar - la validez de la teoría de la mezcla de dos partículas, pero el experimento

concluyente fué propuesto por el mismo Pais junto con - Piccioni en 1955 y confirmado por Piccioni y sus colaboradores.

Pais y Piccioni mostraron que la interacción de la componente K_2^0 con la materia debería exhibir un efecto notable si las interacciones de K^0 y \bar{K}^0 con los núcleos son apreciablemente diferentes. De el hecho de que las reacciones del tipo



tienen una sección transversal grande se infiere que los procesos



también debeb de tenerla. Debido a la extrañeza, no es posible para la K^0 tener este tipo de interacción. Entonces se espera que las \bar{K}^0 sean fuertemente absorvidas por los núcleos, mientras que las K^0 sólo realizarán una dispersión elástica y por consiguiente interaccionarán con los núcleos con una mucho menor sección transversal.

El experimento propuesto (idealizado) es el siguiente. El blanco A es bombardeado con piones π^- con una energía alta, y por consiguiente se producen mesones K^0 por la reacción (46) (y otras similares); algunos - kaones decaerán a través del proceso a $\pi^+\pi^-$ con una vida

media τ_1 (esto es, correspondiente a la componente K_1^0). - Si suponemos $\tau_2 \gg \tau_1$ (τ_2 , es la vida media de la componente K_2^0) entonces podemos encontrar un tiempo τ tal que $\tau_2 \gg \tau \gg \tau_1$ de forma que la componente K_1^0 ha desaparecido prácticamente, mientras que la componente K_2^0 está casi con la misma intensidad original. Si consideramos un absorbente ideal de \bar{K}^0 que permita el paso de las K^0 , entonces solo emergerá de B (figura 4.1), la componente K^0 de la onda K_2^0 incidente, la cual puede ser reexpresada en términos de K_1^0 y K_2^0 , obteniéndose así que la componente K_1^0 es regenerada con la mitad de la intensidad original. Así pues esperamos encontrar decaimientos $\pi^+ \pi^-$ después de B con frecuencia cuatro veces menor que cerca de A.

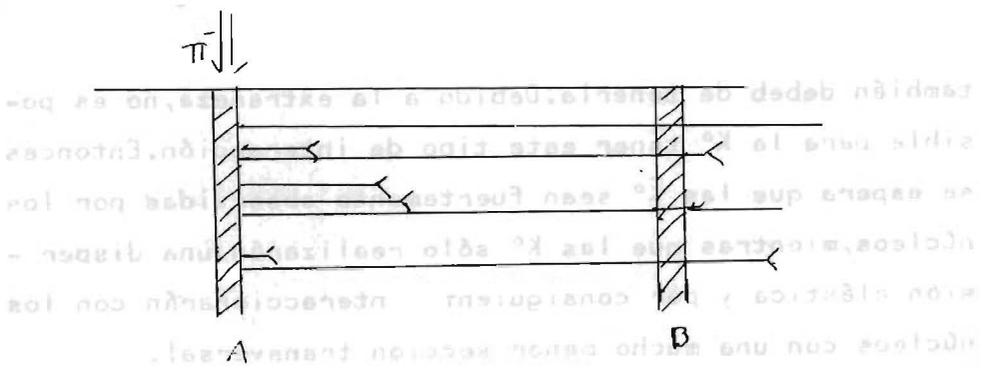


figura 4.1

Con el descubrimiento de la violación de la paridad y de la conjugación de carga, las hipótesis de este desarrollo dejan de ser válidas. Landau (en 1957), al -

enfatisar que la violación a β y \mathcal{C} no requería abandonar necesariamente nuestra idea de invariancia, asumiendo invariancia $\beta\mathcal{C}$ demostró que la teoría de Gell-mann-Pais se podría aplicar como antes (sólo es necesario leer $\beta\mathcal{C}$ donde antes había \mathcal{C}).

Lee, Oehme y Yang (1957) examinaron el problema, suponiendo únicamente invariancia $\beta\mathcal{C}$. Para ello, usaron un formalismo creado por Wigner y Weisskopf en 1930. Una adaptación de este formalismo a nuestro caso es el -- que daremos a continuación.

4.2 FORMALISMO DE WIGNER-WEISSKOPF

El formalismo de Wigner-Weisskopf nos permite describir la evolución en el tiempo de sistemas no estables. Consideremos el hamiltoniano del problema en dos partes H_0 y H_1 tales que $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ sean eigenestados degenerados de H_0 ($H_0|\phi_i\rangle = m_{\phi_i} = m_{\phi_0} = E_1 \neq E_2$) y H_1 sea el que induce --- transiciones entre los eigenestados $\{|\phi_i\rangle\}$ de H_0 , y por consiguiente también entre $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$. Deseamos entonces describir el desarrollo en el tiempo de un estado que es inicialmente una superposición de los estados $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$.

El sistema está gobernado por la ecuación de Schrödinger, esto es

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

con la condición inicial $|\psi(0)\rangle = a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle \equiv |\psi_0\rangle$

Como el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, podemos expresar la solución en la forma

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt)|\psi_0\rangle$$

4.7

El operador e^{iA} se define como

$$e^{iA} = I + iA + \frac{1}{2}i^2A^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} A^n$$

pudiéndose demostrar que existe (esto es, que la serie en cierto sentido converge) si el operador A es acotado.

Tomemos ahora la transformada de Laplace de la ecuación (4.7)

$$|\tilde{\psi}(s)\rangle = \int_0^{\infty} e^{-st} |\psi(t)\rangle dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-iHt} |\psi_0\rangle dt$$

4.8

se puede expresar como combinación lineal de eigenvectores de H . Si $|\eta_\omega\rangle$ es un eigenvector de H con eigenvalor λ_ω entonces

$$\exp(-iHt) |\eta_\omega\rangle = \exp(-i\lambda_\omega t) |\eta_\omega\rangle$$

$$(1 + iH)^{-1} |\eta_\omega\rangle = (1 + i\lambda_\omega)^{-1} |\eta_\omega\rangle$$

4.9

por lo tanto

$$|\tilde{\psi}(s)\rangle = \sum_{\omega} a_{\omega} \int_0^{\infty} e^{-(s+iH)t} |\eta_\omega\rangle dt = \sum_{\omega} a_{\omega} \frac{-1}{s+i\lambda_{\omega}} e^{-(s+i\lambda_{\omega})t} |\eta_\omega\rangle \Big|_0^{\infty}$$

Debido a que $\text{Re}(s) > 0$ (recuérdese que λ_ω es real)

$$|\tilde{\psi}(s)\rangle = \sum_{\omega} a_{\omega} (s+i\lambda_{\omega})^{-1} |\eta_\omega\rangle = (s+iH)^{-1} |\psi_0\rangle$$

4.10

La transformada de Laplace inversa es

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} e^{st} |\tilde{\Psi}(s)\rangle ds$$

donde la ϵ ($\epsilon > 0$) es escogida de tal forma que todos los polos de $|\tilde{\Psi}(s)\rangle$ queden a la izquierda de $\text{Re}(s) = \epsilon$. $|\Psi(t)\rangle$ queda entonces expresada como

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} e^{st} (s+iH)^{-1} |\Psi_0\rangle ds$$

Haciendo el cambio de variable $E = iS$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{i}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{-iEt} (-iE+iH)^{-1} |\Psi_0\rangle dE$$

Como H es un operador hermitiano, sus eigenvalores son reales; por tanto, los polos de $(E-H)^{-1} |\Psi_0\rangle$ (en vista de una situación análoga a la que se tenía para obtener (4.9)) estarán siempre en la recta real. Podemos entonces expresar

a $|\Psi(t)\rangle$ como

$$|\Psi(t)\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{-iEt} (H-E)^{-1} |\Psi_0\rangle dE = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt} (E+i\epsilon-H)^{-1} |\Psi_0\rangle dE$$

ya que la ϵ es arbitrariamente pequeña.

En algunos casos de interés, se puede pensar que la contribución de H_1 es pequeña y que por consiguiente es una buena aproximación considerar las aportaciones de este operador solamente hasta segundo orden. Definimos al operador G como

$$G \equiv (E+i\epsilon-H)^{-1} = ((E+i\epsilon-H_0)-H_1)^{-1} \quad 4.11$$

(se ha omitido el símbolo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ por comodidad y por esta razón se seguirá omitiendo en el resto de la discusión). A

este operador lo podemos desarrollar de la forma

$$G = \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} + \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} H_1 \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} + \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} H_1 \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} H_1 \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} + \dots$$

Esta expresión se obtiene de la siguiente manera: El operador $(A+B)^{-1}$ se puede expresar como

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} (1 + B(A+B)^{-1}) \quad 4.12$$

Aplicamos ahora el método de iteraciones sucesivas de -- Newmann, esto es, la aproximación enésima de $(A+B)^{-1}$ será

$$(A+B)^{-1}_n = A^{-1} (1 + B(A+B)^{-1}_{n-1})$$

Por consiguiente $(A+B)^{-1}$ a primer orden quedaría expresado como

$$(A+B)^{-1}_1 = A^{-1} + A^{-1} B A^{-1}$$

a segundo orden

$$(A+B)^{-1}_2 = A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} B A^{-1}$$

etc.

El operador G a segundo orden queda entonces

$$G = (E + i\epsilon - H_0)^{-1} + (E + i\epsilon - H_0)^{-1} H_1 (E + i\epsilon - H_0)^{-1} + (E + i\epsilon - H_0)^{-1} H_1 (E + i\epsilon - H_0)^{-1} H_1 (E + i\epsilon - H_0)^{-1}$$

Siguiendo la misma línea de teoría de perturbaciones, es conveniente ahora hacer uso de la ortonormalidad y completitud de los estados $| \psi \rangle$, $| \chi \rangle$ y $| \phi \rangle$. Denotaremos -- por $| \psi \rangle$ a los estados $| \psi \rangle$ y $| \chi \rangle$; recuerdese que por $| \phi \rangle$ estamos denotando a los eigenvectores de H_0 --

rentes de $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$. Por $|\phi_\alpha\rangle$ denotaremos a cualquier uno de los dos estados, esto es

$$H_0 |\phi_\alpha\rangle = E_\alpha |\phi_\alpha\rangle$$

$$I = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + \sum_{\beta} |\phi_\beta\rangle\langle\phi_\beta| = \sum_{\alpha} |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$$

por lo tanto, si $G_0 = (E + i\epsilon - H_0)^{-1}$

$$\begin{aligned} \langle\phi_i|G|\phi_i\rangle &= \langle\phi_i|G_0 + G_0 H_1 G_0 + G_0 H_1 G_0 H_1 G_0|\phi_i\rangle \\ &= \langle\phi_i|G_0|\phi_i\rangle + \langle\phi_i|G_0 \cdot H_1 \cdot G_0|\phi_i\rangle + \langle\phi_i|G_0 \cdot H_1 \cdot G_0 \cdot H_1 \cdot G_0|\phi_i\rangle \\ &= \langle\phi_i|G_0|\phi_i\rangle + \sum_{\alpha\alpha'} \langle\phi_i|G_0|\phi_\alpha\rangle \langle\phi_\alpha|H_1|\phi_{\alpha'}\rangle \langle\phi_{\alpha'}|G_0|\phi_i\rangle + \\ &\quad + \sum_{\alpha\alpha'\alpha''} \langle\phi_i|G_0|\phi_\alpha\rangle \langle\phi_\alpha|H_1|\phi_{\alpha'}\rangle \langle\phi_{\alpha'}|G_0|\phi_{\alpha''}\rangle \langle\phi_{\alpha''}|H_1|\phi_{\alpha'''}\rangle \langle\phi_{\alpha'''}|G_0|\phi_i\rangle \end{aligned} \quad 4.13$$

pero

$$\langle\phi_\alpha|G_0|\phi_{\alpha'}\rangle = \frac{1}{E - E_\alpha} \delta_{\alpha\alpha'}$$

y como por hipótesis las $|\phi_i\rangle$ son degeneradas ($E_1 = E_2$)

(4.13) queda entonces como

$$\begin{aligned} \langle\phi_i|G|\phi_i\rangle &= \frac{1}{E - E_i} \delta_{ii} + \left(\frac{1}{E - E_i}\right)^2 \langle\phi_i|H_1|\phi_i\rangle + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{E - E_i}\right)^2 \langle\phi_i|H_1|\phi_\alpha\rangle \langle\phi_\alpha|H_1|\phi_i\rangle \frac{1}{E + i\epsilon - E_\alpha} \\ &= \frac{1}{E - E_i} \delta_{ii} + \left(\frac{1}{E - E_i}\right)^2 \langle\phi_i|H_1|\phi_i\rangle + \sum_{\beta} \left(\frac{1}{E - E_i}\right)^2 \left(\frac{1}{E + i\epsilon - E_\beta}\right) \langle\phi_i|H_1|\phi_\beta\rangle \langle\phi_\beta|H_1|\phi_i\rangle \\ &\quad + \left(\frac{1}{E - E_i}\right)^3 \sum_{i''} \langle\phi_i|H_1|\phi_{i''}\rangle \langle\phi_{i''}|H_1|\phi_i\rangle \end{aligned}$$

En el espacio de los estados $|k^0\rangle$ y $|\bar{k}^0\rangle$ podemos escribir a $G(E)$ como una matriz de 2×2 .

$$G(E) = (E + i\epsilon - E_i + R(E))^{-1} \quad 4.14$$

donde

$$-\langle \psi_1 | R(E) | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | H_1 | \psi_1 \rangle + \sum_s \frac{\langle \psi_1 | H_1 | \psi_s \rangle \langle \psi_s | H_1 | \psi_1 \rangle}{E_1 + i\epsilon - E_s} \quad 4)5$$

ya que a segundo orden

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | R(E) | \psi_1 \rangle &= \langle \psi_1 | R(E) | \psi_1 \rangle + \sum_{s \neq 1} \langle \psi_1 | R(E) | \psi_s \rangle \langle \psi_s | \psi_1 \rangle \\ &= \langle \psi_1 | R(E) | \psi_1 \rangle + \frac{1}{E - E_1 + i\epsilon} \sum_{s \neq 1} \langle \psi_1 | H_1 | \psi_s \rangle \langle \psi_s | H_1 | \psi_1 \rangle + \\ &+ \sum_{s \neq 1} \left[\langle \psi_1 | R(E) | \psi_s \rangle \langle \psi_s | \psi_1 \rangle + \frac{1}{E - E_1 + i\epsilon} \langle \psi_1 | H_1 | \psi_s \rangle \langle \psi_s | H_1 | \psi_1 \rangle \right] = \dots \end{aligned}$$

Además de la aproximación hecha al utilizar teoría de perturbaciones a segundo orden, el formalismo de Wigner-Weisskopf supone válido reemplazar $R(E)$ por $R(E_1)$. Esto es, se está pensando que $G(E)$ tiene un pico pronunciado en un pequeño rango de energías ΔE alrededor de E_1 . Como para $\epsilon \gg 1$ $e^{-i\epsilon t}$ oscila rápidamente como función de E , la aproximación puede ser utilizada para calcular $|\psi(t)\rangle$ si ϵ no es muy grande comparada con $1/\Delta E$.

Consideremos ahora los eigenvectores $|K\rangle$ y $|\bar{K}\rangle$ de $R(m_K)$ (recuérdese que $E_i = m_{K_i}$), con eigenvalores

$$k_{K,S} = 1/k_{\bar{K},S} + \frac{1}{\epsilon} i\chi_{K,S} \quad 4)6$$

respectivamente. Como puede observarse, los eigenvalores no son reales; esto se debe a que la matriz $R(m)$ no es hermitiana, teniendo además como consecuencia que los estados $|\bar{K}\rangle$ y $|\bar{S}\rangle$ no son necesariamente ortogonales.

Si $|\psi(t)\rangle = |k_2\rangle$ de (412) y (414) obtene -

mos

$$\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt} \langle \psi_1 | (E+i\epsilon - H)^{-1} | \psi_2 \rangle dE = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt} \langle \psi_1 | (E+i\epsilon - E_1 + R(E))^{-1} | k_2 \rangle dE$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iEt}}{E + (\kappa_2 - E_1) + i\epsilon} dE \langle \psi_1 | k_2 \rangle$$

el valor de esta integral puede obtenerse haciendo el --

cambio de variable $y = (E - E_1 + \kappa_2) + \frac{1}{2} i \chi_2$; así

$$\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty + \frac{1}{2} i \chi_2}^{\infty + \frac{1}{2} i \chi_2} \frac{e^{-iyt}}{y + i\epsilon} dy \right) e^{i(-E_1 + \kappa_2 + \frac{1}{2} i \chi_2)t} \langle \psi_1 | k_2 \rangle \quad 417$$

Integramos ahora sobre el contorno C_∞ , el cual se mues -
tra en la figura 4.2 (haciendo tender $R_0 \rightarrow \infty$ ya que en es -
te caso el valor de la integral sobre el círculo se anula).

Para que la integral no sea cero es necesaria la condición

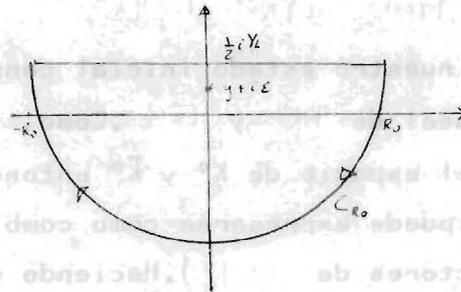


figura 4.2

$\chi_2 > 0$ puesto que de esta forma el contorno C_∞ contiene
al polo. En consecuencia, usando el teorema del residuo

$$\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle = e^{-i(E_1 - \kappa_2)t} e^{-\frac{1}{2} \chi_2 t} \langle \psi_1 | k_2 \rangle \quad 418a$$

en particular

$$\langle k_s^0 | \psi(t) \rangle = e^{-i(E_s - \mu_s)t} e^{i\chi_s t} \quad 4.18L$$

Para el caso $|\psi(t)\rangle = |k_s^0\rangle$ obtenemos de forma análoga -

$$\langle k_s^0 | \psi(t) \rangle = e^{-i(E_s - \mu_s)t} e^{i\chi_s t} \quad 4.18C$$

Inferimos entonces el siguiente resultado; los eigenvectores de la matriz $R(m)$ son estados con masas $m_s = m_k + \mu_s$ y $m_L = m_k - \mu_L$ y vidas promedio $2/\chi_s$ y $2/\chi_L$. (los subíndices indican la convención usual de estos estados: S para el estado de menor vida (short lifetime) y L para el estado de vida mayor (long lifetime)).

En el caso que tengamos un estado $|\psi(t)\rangle$ arbitrario, podemos encontrar su comportamiento en el tiempo, desarrollándolo en términos de $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$ esto es

$$|\psi(t)\rangle = \alpha |K^0\rangle + \beta |\bar{K}^0\rangle$$

(por hipótesis nuestro estado inicial consistía de una combinación lineal de $|K^0\rangle$ y $|\bar{K}^0\rangle$. Como $R(m)$ por definición actúa en el espacio de K^0 y \bar{K}^0 entonces cualquier estado inicial puede expresarse como combinación lineal de los eigenvectores de $R(E)$). Haciendo uso de los resultados ya obtenidos

$$\langle K^0 | \psi(t) \rangle = \alpha e^{-i(E_K - \mu_K)t} e^{i\chi_K t} + \beta e^{-i(E_{\bar{K}} - \mu_{\bar{K}})t} e^{i\chi_{\bar{K}} t}$$

Quisieramos hacer notar lo siguiente: El valor principal de la integral de una función $f(x)$ con polo en x_0 (f es una función real de variable real) está defini

do por

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 + \epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 - \epsilon}^b f(x) dx \quad x_0 \in [a, b]$$

Si F es una función regular en una banda (entre a y b) tanto arriba como abajo del eje real, entonces, integrando

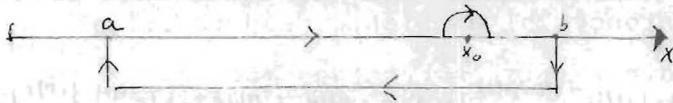


figura 4.3

sobre los contornos que se muestran en la figura 4.3 y -
sumando

$$P \int_a^b \frac{F(x)}{x - x_0} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 + \epsilon} \frac{F(x)}{x - x_0 - i\epsilon} dx - i\pi \int_a^b \delta(x - x_0) F(x) dx \quad x_0 \in [a, b]$$

Ahora bien, la suma sobre β en la expresión para $R(E)$, es en realidad una suma generalizada, esto es, contiene además de una suma discreta, una integral. Podemos definir entonces a las matrices hermitianas M y Γ como

$$M_{\beta\gamma} = m_{\beta\gamma} + \langle \phi_\beta | H_1 | \phi_\gamma \rangle + P \sum_{\beta} \frac{\langle \phi_\beta | H_1 | \phi_\beta \rangle \langle \phi_\beta | H_1 | \phi_\gamma \rangle}{m_\beta - E_\beta}$$

$$\frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma} = \pi \sum_{\beta} \delta(m_\beta - E_\beta) \langle \phi_\beta | H_1 | \phi_\beta \rangle \langle \phi_\beta | H_1 | \phi_\gamma \rangle$$

satisfaciendo además la relación

$$M - \frac{1}{2} i \Gamma = m_k - R \quad 4.20$$

Se sigue entonces de (4.19)

$$\langle \psi_i | \psi(t) \rangle = \langle \psi_i | e^{-i(M - \frac{1}{2}i\Gamma)t} | \psi(0) \rangle$$

4.21

Si definimos

$$\chi = \begin{pmatrix} \langle k^0 | \psi(t) \rangle \\ \langle \bar{k}^0 | \psi(t) \rangle \end{pmatrix}$$

4.22

entonces

$$i \frac{d\chi}{dt} = \langle \psi_i | M - \frac{1}{2}i\Gamma | e^{-i(M - \frac{1}{2}i\Gamma)t} | \psi(0) \rangle = \langle \psi_i | (M - \frac{1}{2}i\Gamma) | \psi_i \rangle \langle \psi_i | e^{-i(M - \frac{1}{2}i\Gamma)t} | \psi(0) \rangle$$

o sea, χ satisface la ecuación

$$i \frac{d\chi}{dt} = (M - \frac{1}{2}i\Gamma) \chi \tag{4.23}$$

Lo que significa que en el subespacio $K^0 - \bar{K}^0$ podemos visualizar el sistema como si evolucionara debido a la acción de una matriz no hermitiana $(M - \frac{1}{2}i\Gamma)$.

4.3 CONSECUENCIAS DE CP

Consideremos ahora el caso particular en que el hamiltoniano de interacción H_i es invariante ante \mathcal{CP} . Esto es

$$\mathcal{CP} H_i (\mathcal{CP})^{-1} = H_i$$

tenemos entonces

$$\langle \bar{k}^0 | H_i | k^0 \rangle = \langle \bar{k}^0 | (\mathcal{CP})^{-1} H_i (\mathcal{CP}) | k^0 \rangle = \langle k^0 | H_i | \bar{k}^0 \rangle$$

$$\langle k^0 | H_i | \bar{k}^0 \rangle = \langle \bar{k}^0 | H_i | k^0 \rangle$$

$$\langle \psi_i | H_i | k^0 \rangle = \langle \psi_i | (\mathcal{CP})^{-1} H_i (\mathcal{CP}) | k^0 \rangle = \eta_{k^0}^{\psi_i} \eta_{\bar{k}^0}^{\psi_i} \langle \psi_i | H_i | \bar{k}^0 \rangle$$

(por ψ_i entendemos a un estado con las cargas y momentos

invertidos y con el mismo espín y energía que ϕ_β) Así pues, es posible establecer ciertas relaciones entre los elementos de matriz. Por ejemplo

$$M_{11} = m_k + \langle k^0 | H_I | k^0 \rangle + P \sum_{\beta} \frac{1}{m_k - E_{\beta}} \langle k^0 | H_I | \phi_{\beta} \rangle \langle \phi_{\beta} | H_I | k^0 \rangle$$

Como en el tercer término estamos sumando sobre todos los estados posibles

$$M_{11} = m_k + \langle \bar{k}^0 | H_I | \bar{k}^0 \rangle + P \sum_{\beta} \frac{1}{m_k - E_{\beta}} \langle \bar{k}^0 | H_I | \phi_{\beta} \rangle \langle \phi_{\beta} | H_I | \bar{k}^0 \rangle$$

esto es

$$M_{11} = M_{22} \quad 4.24a$$

análogamente

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} \quad 4.24b$$

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$$

$$M_{12} = M_{21}$$

0 sea, la matriz de masa y la de decaimiento son reales y simétricas. Los eigenvectores de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con eigenvalores $a+b$ y $a-b$ respectivamente. Por consiguiente en el límite de invariancia $\hat{C}P$ los estados físicos con masa y vida promedio bien definidas (eigenvectores de $R^{(m)}$) son

$$|k_2^0\rangle = \frac{|k^0\rangle - |\bar{k}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|k_1^0\rangle = \frac{|k^0\rangle + |\bar{k}^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

(la i en $|k_2\rangle$ es un factor de fase conveniente). Hemos --
obtenido por tanto, en el caso particular de tener invariancia \mathcal{CP} , la teoría de Gell-mann-Pais.

4.4 EL DESCUBRIMIENTO DEL PROCESO $K_L^0 \rightarrow 2\pi$

Para 1964 se había establecido una cota superior para la frecuencia del decaimiento de K_2^0 en dos piones cargados, siendo esta de aproximadamente $1/300$ de todas las otras formas de decaimiento. (M. Bardon, K. Lande, L. M. Lederman, W. Chinowsky en 1958 y D. Neagu, E. O. Okonov, N. I. Petrov, A. M. Rosanova, V. A. Rusakov en 1961). Al tratar de mejorar este resultado J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch y R. Turlay encontraron evidencia suficiente para asegurar la existencia del decaimiento $K_S^0 \rightarrow 2\pi$.

El esquema del dispositivo experimental se muestra en la figura 4.4. Un blanco de Berilio fué colocado en un sincrotrón, seleccionando la radiación neutra emitida a través de un colimador. Las partículas cargadas fueron separadas usando un magneto. El detector consistía en dos espectrómetros dispuestos simétricamente con respecto al haz incidente. Con el fin de evitar (minimizar) radiación secundaria, el espacio donde ocurría el decaimiento se llenó de Helio. Para calibrar el aparato se usó una placa de tungsteno como regenerador, colocándola en la región

donde debía producirse el decaimiento. Como el mesón K_1^0 decae en 2π esto producía un efecto muy similar al que se esperaba medir. Al realizarse el experimento, se encontró que la distribución de masa y ángulo entre los momentos de los productos, aparecen iguales que en el caso de los productos $\pi^+\pi^-$ del decaimiento de un K_1^0 regenerado, concluyendo así la existencia del decaimiento $K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. La frecuencia que reportaron fué

$$P = \frac{R(K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{R(K_2^0 \rightarrow \text{otros modos cargados})} = 2.0 + 0.4 \times 10^{-2}$$

Resultado similar al obtenido casi simultáneamente por Abashian et al. quienes hicieron el experimento en el vacío.

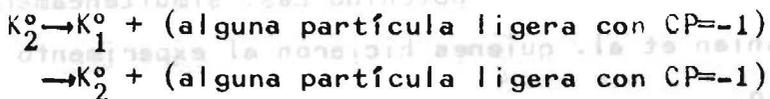
Ahora bien, si se acepta que el decaimiento descrito realmente corresponde al decaimiento $K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, entonces es claro que la invariancia CP se viola, puesto que, como ya se dijo antes, K_2^0 es un estado con eigenvalor $CP=-1$ y $\pi^+\pi^-$ es un estado con $CP=+1$. Sin embargo la situación es muy distinta a la que se presentó en el caso de la violación a la paridad. En este último caso, una vez mostrada su violación por la señora Wu, otros experimentos corroboraron los resultados obtenidos. Sin embargo, en el único sistema en el que se ha detectado violación a la simetría CP es en el sistema $K^0-\bar{K}^0$. Muchos físicos fueron reacios a aceptar el hecho de la violación CP , pen-

sando que, como el efecto era tan pequeño, este podía ser explicado buscando algún factor que originalmente se hubiera pasado por alto.

Todos los intentos hechos para explicar el resultado del experimento, se basan en una de las siguientes aseveraciones

I.-La medida hecha, no corresponde al decaimiento de la componente de vida larga del kaón.

a) la observación representa eventos de cascada -- del tipo



b) existe un mesón escalar con masa muy cercana a la masa del kaón que decae en 2π .

c) las dos partículas en las que K_2^0 decae, no son piones.

II.-El efecto es una consecuencia de una asimetría CP del medio donde decae el kaón.

III.-El decaimiento $K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ no implica necesariamente una violación a la simetría CP .

El tipo de ideas descrito en I y III es descartado al realizarse experimentos de regeneración e interferencia. Discutamos esto con un poco más de detalle.- Supongamos que tenemos inicialmente un haz de K^0 (o indi

ferentemente \bar{k}^0) y colocamos un regenerador cuando el haz se puede considerar un haz de K_L^0 puro ($|\psi\rangle \gg |\bar{\psi}\rangle$). De el otro lado del regenerador el vector de estado será de la forma

$$a |K_L^0\rangle + b |K_S^0\rangle$$

La probabilidad de que este estado decaiga en dos piones de cierta carga ($\pi^+\pi^-$) en el tiempo t , está dada por

$$P_{\pi^+\pi^-}(t) = \sum_{\beta} |\langle \phi_{\beta} | \psi(t) \rangle|^2$$

(sumando sobre todos los momentos de los piones, $\phi_{\beta} \equiv \pi^+\pi^-$)

$$|\psi(0)\rangle = a |K_L^0\rangle + b |K_S^0\rangle$$

Haciendo uso de (4.11) obtenemos

$$P_{\pi^+\pi^-}(t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\beta} |\langle \phi_{\beta} | \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iE t} G(E) |\psi_0\rangle dE|^2$$

de (4.12) vemos que

$$G = G_0 + G_0 H_1 G$$

de forma

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\beta} | G | K_L^0 \rangle &= \langle \phi_{\beta} | G_0 (1 + H_1) G | K_L^0 \rangle = \frac{1}{E + i\epsilon - E_{\beta}} \langle \phi_{\beta} | 1 + H_1 G | K_L^0 \rangle \\ &= \frac{1}{E + i\epsilon - E_{\beta}} \left(\sum_{\gamma} \langle \phi_{\beta} | H_1 | \psi_{\gamma} \rangle \langle \psi_{\gamma} | G | K_L^0 \rangle + \sum_{\beta'} \langle \phi_{\beta} | H_1 | \psi_{\beta'} \rangle \langle \psi_{\beta'} | G | K_L^0 \rangle \right) \end{aligned}$$

Si eliminamos los términos de orden igual o superior a H_1^2 obtenemos

$$\langle \phi_{\beta} | G | K_L^0 \rangle = \frac{1}{E + i\epsilon - E_{\beta}} \left(\langle \phi_{\beta} | H_1 | K^0 \rangle \langle K^0 | G | K_L^0 \rangle + \langle \phi_{\beta} | H_1 | \bar{K}^0 \rangle \langle \bar{K}^0 | G | K_L^0 \rangle \right)$$

De la definición de K_L^0 tenemos

$$\langle \phi_{\beta} | G | K_L^0 \rangle = \frac{1}{E + i\epsilon - E_{\beta}} \left(\langle \phi_{\beta} | H_1 | K^0 \rangle \langle K^0 | K_L^0 \rangle + \langle \phi_{\beta} | H_1 | \bar{K}^0 \rangle \langle \bar{K}^0 | K_L^0 \rangle \right) \frac{1}{E + i\epsilon - m + K_L}$$

usando el hecho que $\langle \phi_{\beta} | G | K_i^0 \rangle = 0$ entonces

$$\langle \phi_{\beta} | G | K_i^0 \rangle = \frac{1}{E + i\epsilon - E_{\beta}} \frac{1}{E + i\epsilon - m_K + K_L} \langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle$$

Con el mismo método que el utilizado para la obtención de (4.18a) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \phi_{\beta} | G | K_i^0 \rangle e^{-iEt} dE = \frac{1}{E_{\beta} - m_K + K_L} \left(e^{-iE_{\beta}t} - e^{-i(m_K - m_K)t} \right) \langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle$$

Este resultado es totalmente análogo para K_S^0 y por tanto

$$P_{\pi^+\pi^-}(t) = \sum_{\beta} \left| a \frac{\langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle}{E_{\beta} - m_K + K_L} \left(e^{-iE_{\beta}t} - e^{-i(m_L - \frac{1}{2}(K_L))t} \right) + b \frac{\langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle}{E_{\beta} - m_K + K_L} \times \right. \\ \left. \times \left\{ e^{-iE_{\beta}t} - e^{-i(m_S - \frac{1}{2}(K_S))t} \right\} \right|^2$$

Como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{\beta} (2\pi) \delta(E - E_{\beta}) f(E) = \sum_{\beta} f(E_{\beta})$$

tenemos

$$P_{\pi^+\pi^-}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{\beta} (2\pi) \delta(E - E_{\beta}) \left| a \frac{\langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle}{E - m_K + K_L} \left(e^{-iEt} - e^{-i(m_L - \frac{1}{2}K_L)t} \right) \right. \\ \left. + b \frac{\langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle}{E - m_K + K_S} \left(e^{-iEt} - e^{-i(m_S - \frac{1}{2}K_S)t} \right) \right|^2 \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left\{ |a|^2 \frac{1}{(E - m_L)^2 + \frac{1}{4}K_L^2} \left(1 + e^{-2\epsilon t} - 2 \operatorname{Re} e^{i(E - m_L + \frac{1}{2}K_L)t} \right) \Gamma_{LL}(E, \pi^+\pi^-) \right. \\ \left. + |b|^2 \frac{1}{(E - m_S)^2 + \frac{1}{4}K_S^2} \left(1 + e^{-2\epsilon t} - 2 \operatorname{Re} e^{i(E - m_S + \frac{1}{2}K_S)t} \right) \Gamma_{SS}(E, \pi^+\pi^-) \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{a^* b \Gamma_{LS}(E, \pi^+\pi^-)}{(E - m_L + \frac{1}{2}K_L)(E - m_S + \frac{1}{2}K_S)} \left(1 + e^{-2\epsilon t} - 2 \operatorname{Re} e^{i(m_L - m_S - \frac{1}{2}(K_L + K_S))t} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - e^{iEt} e^{-i(m_S - \frac{1}{2}K_S)t} \right] \right\}$$

donde

$$\frac{1}{2} \Gamma_{LL}(E, \pi^+\pi^-) = \pi \sum_{\beta} \delta(E - E_{\beta}) \langle K_i^0 | H_I | \phi_{\beta} \rangle \langle \phi_{\beta} | H_I | K_i^0 \rangle$$

etc. (recuerde que la suma es sobre todos los posibles

momentos del estado $\pi^+ \pi^-$, esto es

$$\Gamma(E) = \sum_{\tau} \Gamma(E, \tau)$$

(\sum_{τ} suma sobre todos los posibles modos de decaimiento)).

Como puede observarse, la probabilidad de transición será apreciable si la energía no difiere mucho de m_L y m_S . Si γ_L y γ_S son pequeñas, será una buena aproximación considerar

$$\Gamma_{LL}(E, \pi^+ \pi^-) = \Gamma_{LL}(m_K, \pi^+ \pi^-) \equiv \Gamma_{LL}$$

etc. La integral se puede calcular usando para los primeros dos términos el contorno que se muestra en la figura 4.5. Para el tercer término, en la parte proporcional a e^{iEt}

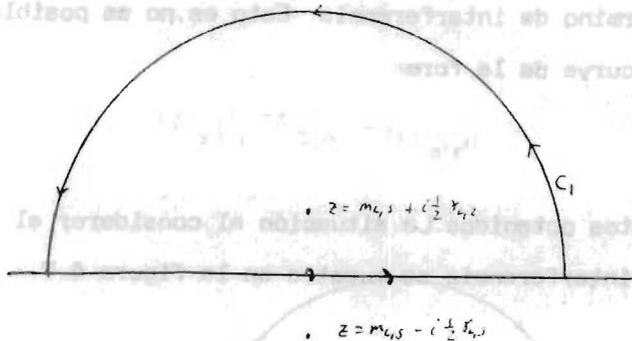


figura 4.5

el contorno C_3 (figura 4.6). Entonces

$$\begin{aligned} P_{\pi^+ \pi^-}(t) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi i \left[\frac{1}{i\gamma_L} \Gamma_{LL} (1 + e^{-\gamma_L t} - 2 \operatorname{Re} e^{-\gamma_L t}) + \frac{1}{i\gamma_S} \Gamma_{SS} (1 - e^{-\gamma_S t}) \right] \right. \\ & + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{a^* b}{(m_L - m_S) + \frac{1}{2} (\gamma_L + \gamma_S)} \Gamma_{LS} (1 + e^{i(m_L - m_S)t} e^{\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S)t} + \right. \\ & \left. \left. - e^{i(m_L - m_S)t} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S)t} + \frac{a^* b}{(m_L - m_S) + \frac{1}{2} (\gamma_L + \gamma_S)} \Gamma_{SL} (1 - e^{-\gamma_S t}) e^{-i(m_L - m_S)t} e^{-\frac{1}{2}(\gamma_L + \gamma_S)t} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 t}) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_3}{\Gamma_3} (1 - e^{-\gamma_3 t}) + 2Re \frac{-\frac{1}{2} \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{m_2 - m_3} \frac{1}{\frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_3)}}{(1 - e^{i(m_2 - m_3) - \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_3)t})}$$

La rapidez de decaimiento es por tanto (probabilidad de transición por unidad de tiempo

$$R_{n+n'}(t) \equiv \frac{d}{dt} P_{n+n'}(t) = i|\mu|^2 \Gamma_{L2} e^{\gamma_2 t} + i|\mu|^2 \Gamma_{L3} e^{\gamma_3 t} + 2Re \frac{1}{(m_2 - m_3)} \Gamma_{L3} e^{i(m_2 - m_3) - \frac{1}{2}(\gamma_2 + \gamma_3)t}$$

Como es posible medir directamente este decaimiento, se puede verificar fácilmente la presencia del término (oscilante) de interferencia. En 1966 dos grupos distintos (Alff-Steinberger et al y Bodenhausen et al) usando cobre y carbón como regeneradores, mostraron que las distribuciones de decaimiento no podían ser ajustadas sin incluir el término de interferencia. Esto es, no es posible ajustar una curva de la forma

$$P_{n+n'}(t) = a e^{-\gamma_1 t} + b e^{-\gamma_2 t}$$

a los datos obtenidos. La situación al considerar el término de interferencia se muestra en la figura 4.7.

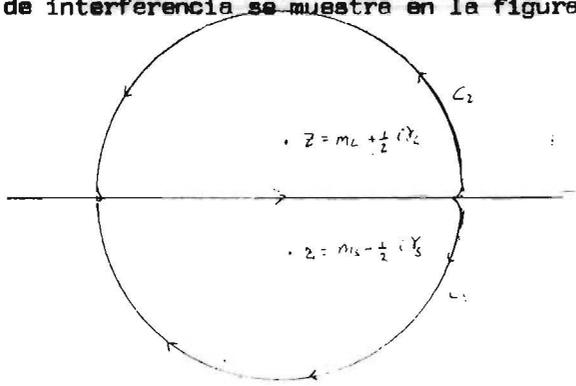


figura 4.6

Ahora bien, como dos haces de partículas no pueden interferir a menos que se esté trabajando con haces de partículas idénticas producidas coherentemente, la observación hecha del fenómeno de interferencia elimina totalmente la posibilidad de que la medida realizada no corresponda al decaimiento de la componente larga del k_{α} .

Sólo resta ahora mencionar la posibilidad de que la violación \mathcal{CIP} sea un efecto del medio en que se realizó el experimento. La idea consiste en que la parte del universo en que vivimos es asimétrica puesto que domina la materia sobre la antimateria. Es posible mostrar que el sistema $K^0 - \bar{K}^0$ es muy sensible a pequeñas perturbaciones, de forma que se ve afectado por efectos que en otros sistemas no es posible observarlos. Sin embargo, la teoría tropezó con dificultades, quedando más tarde definitivamente relegada por evidencia experimental (mediciones sobre la dependencia en energía de la razón de decaimiento).

4.5 FORMALISMO CANONICO

Hemos hablado anteriormente de las restricciones que impone a las matrices M y Γ el suponer invariancia \mathcal{CIP} . Veamos ahora que tipo de restricciones impo

ne el teorema $P \Pi C$.

Ahora si en caso de partículas no - Si H_1 es tal que

$$(\Pi \mathcal{L} P)^{-1} H_1 \Pi \mathcal{L} P = H_1$$

entonces

$$\langle k^0 | H_1 | k^0 \rangle = \langle \bar{k}^0 | H_1 | \bar{k}^0 \rangle^* = \langle \bar{k}^0 | H_1 | \bar{k}^0 \rangle$$

$$\langle \phi_s | H_1 | k^0 \rangle = \langle \phi_s | \Pi^{-1} \eta_k^R \eta_k^C \eta_s^R \eta_s^C H_1 \Pi | \bar{k}^0 \rangle = \eta_k^R \eta_k^C \eta_s^R \eta_s^C \langle \bar{k}^0 | H_1 | \phi_s \rangle$$

análogamente a (4.24) se sigue que

$$M_{11} = M_{22} \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} \quad 4.26$$

(observese que la invariancia bajo $\Pi \mathcal{L} P$ no restringe a - los otros términos; por ejemplo

$$\langle \bar{k}^0 | H_1 | k^0 \rangle = \langle k^0 | \Pi^{-1} H_1 \Pi | \bar{k}^0 \rangle = \langle \bar{k}^0 | H_1 | k^0 \rangle$$

La matriz $M^{-1/2} \Gamma$ tendrá entonces la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de esta matriz son

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{bc}$$

y los eigenvectores

$$\begin{pmatrix} p \\ \pm q \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Entonces

$$|k_s^0\rangle = \frac{p|k^0\rangle + \mp | \bar{k}^0 \rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}$$

$$|k_s^0\rangle = \frac{p|k^0\rangle - \mp | \bar{k}^0 \rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}$$

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{M_{11} - \frac{1}{2}i\Gamma_1}{M_{21} - \frac{1}{2}i\Gamma_2}} \quad 4.28$$

Invirtiendo las ecuaciones (4 27)

$$|K^0\rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} (|K_1^0\rangle - |K_2^0\rangle)$$

Así pues, si por ejemplo inicialmente tenemos un mesón K^0 (de (4 21))

$$\langle K_2^0 | \psi(t) \rangle = \langle K_2^0 | e^{-i(M - \frac{1}{2}\Gamma)t} | \psi(0) \rangle = \frac{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}}{2p} (e^{-im_1 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} + e^{-im_2 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t} \langle K_2^0 | K_2^0 \rangle) \quad 4.30$$

donde

$$\langle K_2^0 | K_2^0 \rangle = \left(\frac{p \langle K_2^0 | K_1^0 \rangle + q \langle K_2^0 | \bar{K}_1^0 \rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} \right) \left(\frac{p \langle K_1^0 | K_2^0 \rangle - q \langle \bar{K}_1^0 | K_2^0 \rangle}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} \right) = \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2} \quad 4.31$$

Podemos pensar al proceso físico, como una -- transformación que lleva el estado inicial $|\psi\rangle$ al estado final $|\phi\rangle$. Esto es

$$|\phi\rangle = S|\psi\rangle$$

Al operador S se le conoce como matriz-S. Una propiedad importante que debe de satisfacer este operador es la de unitaridad, puesto que por conservación de probabilidad

$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi | S^\dagger S | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

y por consiguiente $S^\dagger S$ debe de ser la unidad. Como estamos interesados en transiciones entre diferentes estados, extraeremos de S al operador unidad y debido a que en el proceso físico se conserva la energía

$$S_{fi} = S_{fi} - 2i\pi \delta(E_i - E_f) T_{fi}$$

4.32

Desarrollemos a (4.32) como

$$S_{fi} = S_{fi} + i\pi \delta(E_i - E_f) T_{fi}$$

Donde S_{fi} es la matriz-S cuando no están presentes las interacciones que inducen el decaimiento. Sea $|\psi_c\rangle$ una partícula estable en ese límite; entonces

$$\langle \psi_c | S_0 | \psi_c \rangle = 0$$

Como S_1 y S_0 son unitarios, a primer orden en S_1

$$S_1^\dagger S_0 + S_0^\dagger S_1 = 0$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_c | S_1^\dagger S_1 + S_1^\dagger S_0 | \psi_c \rangle = \int_S \langle \psi_c | S_0^\dagger | \psi_c \rangle \langle \psi_c | S_1 | \psi_c \rangle + \langle \psi_c | S_1^\dagger | \psi_c \rangle \langle \psi_c | S_0 | \psi_c \rangle \\ &= \langle \psi_c | S_0^\dagger | \psi_c \rangle - \langle \psi_c | S_0 | \psi_c \rangle + \langle \psi_c | S_1^\dagger | \psi_c \rangle \langle \psi_c | S_0 | \psi_c \rangle \\ &= \langle \psi_c | S_1 | \psi_c \rangle + \langle \psi_c | S_1^\dagger | \psi_c \rangle \langle \psi_c | S_0 | \psi_c \rangle \end{aligned} \quad 4.33$$

Sea $|\psi_y\rangle$ un eigenestado de S_0 con eigenfase $2\delta_y$. Esto es

$$S_0 | \psi_y \rangle = e^{2i\delta_y} | \psi_y \rangle \quad 4.34$$

(por conservación de la probabilidad todo eigenvalor de un eigenvector de S_0 debe de tener magnitud uno). Así -- pues, usando (4.33) podemos calcular

$$\langle \psi_c | S_1 | \psi_y \rangle = - \langle \psi_c | S_1^\dagger | \psi_y \rangle \langle \psi_y | S_0 | \psi_y \rangle = -e^{2i\delta_y} \langle \psi_c | S_1^\dagger | \psi_y \rangle \quad 4.35$$

El teorema PCT nos implica la relación

$$\langle \psi_c | S_1 | \psi_y \rangle = \langle \psi_y | S_1 | \psi_c \rangle$$

de forma que de (4.35) tendremos

$$\langle \psi_3 | T | \psi_2 \rangle = e^{2i\delta} \langle \psi_3 | T | \psi_2 \rangle^* \quad 4.36$$

A primera aproximación el elemento de matriz T es

$$T_{\alpha\beta} = \langle \psi_\alpha | H_I | \psi_\beta \rangle$$

pudiendo entonces expresar a (4.36) como

$$\langle \psi_3 | H_I | \psi_2 \rangle = e^{2i\delta} \langle \psi_3 | H_I | \psi_2 \rangle^* \quad 4.37$$

Despreciemos ahora efectos electromagnéticos.

Como el isospín se conserva en interacciones fuertes, -- los eigenestados de isospín serían también eigenestados de S_0 . Por ejemplo

$$S_0 |2\pi, I=0\rangle = e^{i\delta_0} |2\pi, I=0\rangle$$

$$S_0 |2\pi, I=2\rangle = e^{i\delta_2} |2\pi, I=2\rangle \quad 4.38$$

A los estados de dos piones los podemos desarrollar en términos de los eigenestados del isospín. Esto es

$$|n^+ n^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2\pi, I=0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |2\pi, I=2\rangle$$

$$|n^0 n^0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |2\pi, I=0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |2\pi, I=2\rangle \quad 4.39$$

Definiendo

$$\langle 2\pi, I | H_I | n^+ \rangle = A_I e^{i\delta_I} \quad 4.40$$

entonces (de (4.37))

$$\langle 2\pi, I | H_I | n^+ \rangle = e^{2i\delta_I} A_I^* e^{-i\delta_I} = A_I^* e^{i\delta_I}$$

Adoptemos aquí la convención propuesta por Wu y Yang consistente en tomar a A_0 real y positiva. Calculemos

$$A_0^2 \equiv \langle 2\pi, I=0 | H_I | n^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 14^2}} (FA_0 e^{i\delta_0} + 4A_0 e^{i\delta_0}) = \frac{1}{\sqrt{10^2 + 14^2}} (14+4) A_0 e^{i\delta_0} \quad 4.41$$

$$a_0^L \equiv \langle 2\pi, I=0 | H_1 | k_S^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} (p-q) A_0 e^{i\phi_0} \quad 4.42$$

Análogamente

$$a_2^{S,L} = \langle 2\pi, I=2 | H_1 | k_{S,L}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} (A_2 p \pm A_2^* q) \quad 4.43$$

(el signo superior para la componente corta y el inferior para la larga). En términos de estas podemos calcular

$$a_{+-}^{S,L} \equiv \langle \pi^+ \pi^- | H_1 | k_{+-}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} A_2 F \right) p \pm \left(\sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} A_2^* F \right) q \right\} \quad 4.44$$

$$a_{00}^{L,S} \equiv \langle \pi^0 \pi^0 | H_1 | k_{00}^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{1}{3}} A_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_2 F \right) p \pm \left(\sqrt{\frac{1}{3}} A_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_2^* F \right) q \right\}$$

donde

$$F = \exp(i\delta_2 - \delta_0) \quad 4.45$$

Definamos las siguientes cantidades de interés experimental

$$\eta_{\pm} = \frac{a_{+-}^L}{a_{+-}^S}; \quad \eta_{00} = \frac{a_{00}^L}{a_{00}^S} \quad 4.46$$

$$\varepsilon = \frac{p-q}{p+q} \quad 4.47$$

(observese que si el proceso fuera invariante ante \mathcal{CP} entonces $\varepsilon=0$). Calculemos η_{+-} ; de (4.44)

$$\begin{aligned} \eta_{+-} = \frac{a_{+-}^L}{a_{+-}^S} &= \frac{(\sqrt{2} A_0 + A_2 F) p - (\sqrt{2} A_0 + A_2^* F) q}{(\sqrt{2} A_0 + A_2 F) p + (\sqrt{2} A_0 + A_2^* F) q} = \frac{\sqrt{2} A_0 (p-q) + F (A_2 p - A_2^* q)}{\sqrt{2} A_0 (p+q) + F (A_2 p + A_2^* q)} \\ &= \frac{\sqrt{2} A_0 \varepsilon + \frac{1}{2} F (A_2 (1+\varepsilon) - A_2^* (1-\varepsilon))}{\sqrt{2} A_0 + \frac{1}{2} F (A_2 (1+\varepsilon) + A_2^* (1-\varepsilon))} \end{aligned} \quad 4.48$$

En vista de la base experimental de la regla $|\Delta I| = \frac{1}{2}$, entonces

$$\left| \frac{A_2}{A_0} \right| \ll 1$$

Haciendo la asignación $\frac{A_2}{A_0} \rightarrow 0$ obtenemos que

$$\eta_{+-} \approx \epsilon$$

como experimentalmente

$$R(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-) = (0.750 \pm 0.003) 10^6 \text{ seg}^{-1}$$

$$R(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-) = (2.02 \pm 0.10) 10^7 \text{ seg}^{-1}$$

y η_{+-} está relacionada a través de (4.46), esto es

$$|\eta_{+-}| = \frac{R(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{R(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}$$

entonces

$$|\eta_{+-}| = (1.73 \pm 0.07) \epsilon^{-3}$$

implicando por consiguiente que ϵ es pequeña. Así pues, -

desarrollando (4.46) a primer orden en ϵ y A_2/A_0

$$\eta_{+-} \approx \epsilon + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \frac{F}{A_0} \text{Im} A_2 \approx \epsilon + \epsilon^2$$

Análogamente

$$\eta_{-+} = \epsilon - 2\epsilon^2$$

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE OYARZABAL

VIOLACION DE T

Jost mostró que la hipótesis de localidad en el teorema $\mathcal{CP}\pi$ puede ser removida y reemplazada - por una condición más débil que le llamó "localidad débil" y un postulado concerniente a las propiedades analíticas de los valores de expectación. La validez de este tipo de hipótesis, y por consiguiente la validez del teorema $\mathcal{CP}\pi$, ha sido tema de un gran número de artículos en la literatura de la física.

Si suponemos válido el teorema $\mathcal{CP}\pi$ entonces al violarse \mathcal{CP} automáticamente es necesaria una violación a la simetría π , de forma que se tenga invariancia ante $\mathcal{CP}\pi$. El problema es entonces determinar si efectivamente se viola π y por que cantidad. Esto último lo haremos siguiendo el análisis hecho por Casella en 1968-1969.

Supongamos que el sistema $K^0 - \bar{K}^0$ es invariante únicamente ante π ; entonces es claro que

$$M_{12} = M_{21} \quad ; \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$$

Los eigenvalores de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

con $\lambda_{\pm} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2}$

con los eigenvectores

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$$

esto es

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} (p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2 + |q|^2}} (q|K^0\rangle + p|\bar{K}^0\rangle)$$

5.1

Como (4.36) indica que

$$\langle c|T|\beta\rangle = e^{2i\phi} \langle c|T|\beta\rangle$$

entonces la invariancia bajo T implica que en las relaciones

$$\langle 2\pi; \Pi | H_1 | K^0 \rangle = A_r e^{i\delta_r}$$

5.2

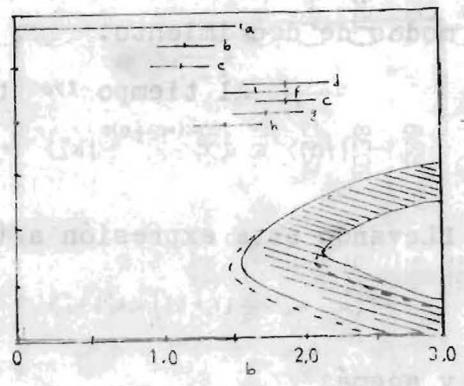
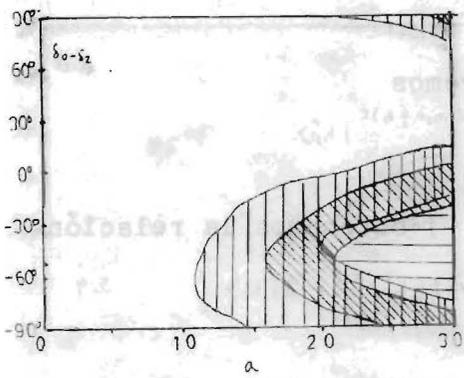
$$\langle 2\pi; \Pi | H_1 | \bar{K}^0 \rangle = \bar{A}_r e^{i\delta_r}$$

A_r y \bar{A}_r son reales.

Antes de proseguir, observaremos que si nuestro estado $|\psi(t)\rangle$ es una mezcla arbitraria de los estados $|K_2^0(t)\rangle$ y $|K_1^0(t)\rangle$ entonces la conservación de probabilidad establece que la disminución en el cuadrado de la norma de $|\psi(t)\rangle$ es compensada con la probabilidad de decaimiento del estado $|\psi(t)\rangle$.

$ \eta_{+-} $	$1.91 \pm 0.06 \times 15$	Fitch, Roth, Russ, Vernon,	Phys Rev	<u>164</u>	1711	(1967)
$ \eta_{00} ^2$	$-2 \pm 7.0 \times 15$	Bartlett	<u>et al</u> Phys Rev Lett	<u>21</u>	588	(1968) a
	$4.9 \pm 1.2 \times 15$	Banner	<u>et al</u> Phys Rev.	<u>188</u>	2033	(1969) b
	$14.1 \pm 3.9 \times 15$	Cence	<u>et al</u> Phys Rev Lett	<u>22</u>	1210	(1969) c
	$4.08 \pm 0.9 \times 15$	Barmin	<u>et al</u> Phys Lett	338	377	(1970) d
	$3.61 \pm 1.9 \times 15$	Budagov	<u>et al</u> Phys Rev	<u>02</u>	815	(1970) e
	$8.7 \pm 3.7 \times 15$	Chollet	<u>et al</u> Phys Lett	<u>318</u>	658	(1970) f
	$9.9 \pm 3.4 \times 15$	Fassner	<u>et al</u> Nuov Cin7	<u>79A</u>	57	(1970) g
	$7.4 \pm 2.0 \times 15$	Wolff	<u>et al</u> Phys Lett	<u>368</u>	517	(1871) h
ξ_+	$45^\circ \pm 50^\circ$	Fitch, Roth, Ross Vernon	Phys, Rev Lett	<u>15</u>	73	(1965)
	$30^\circ \pm 45^\circ$	Firestone	<u>et al</u> Phys, Rev, Lett	<u>16</u>	556	(1966)
	$70^\circ \pm 21^\circ$	Bott- Boden- hausen	<u>et al</u> Phys Lett	<u>248</u>	438	(1967)
	$25^\circ \pm 35^\circ$	Mishke	<u>et al</u> Phys, Rev, Lett	<u>18</u>	138	(1967)
	$34.5 \pm 10^\circ$	Bennet	<u>et al</u> Phys Lett	<u>278</u>	248	
	$47.6^\circ \pm 12.1^\circ$	Bohn	<u>et al</u> Nul Phys	<u>89</u>	605	(1869)
	$46.2 \pm 7.4^\circ$	Faissner	<u>et al</u> Phys Lett	<u>308</u>	209	(1868)
	$43.40 \pm 4.4)$	Jensen	<u>et al</u> Phys LettRev	<u>23</u>	615	(1970)
	$38.0^\circ \pm 12.0!$	Balats	<u>et al</u> Soviet Journal of nocphys	<u>13</u>	53	(1971)
$(m_c - m_s) \times 10^{-1}$	0.481 ± 0.018	Rosenfeld	<u>et al</u> Rev. Mod Phys	<u>40</u>	77	(1968)

representa una serie de espaldas...
región sobre el espacio... incluyendo a todos los



a) Región de violación de T. En la región de líneas inclinadas existe al menos una solución en los rangos I y II. En la de líneas verticales existe una solución dentro y fuera de II. En la de líneas horizontales todas las soluciones caen en el - rango IV.

b) a-h representa a los valores de r obtenidos de la medición de Fitch para $|\eta_{12}|$ y de las mediciones de $|\eta_{01}|$ (tabla 5.1) (la absisaaes arbitraria) Las líneas sólidas fueron obtenidas u sendo el valor promedio $\langle \alpha \rangle = 49^\circ \pm 8^\circ$ (N. Barash Schmidt et al Uni. Of. Calif. Lawrence Rad. Lab. Repot) . Las curvas seccionadas representan a $\langle \alpha \rangle = 39^\circ - 6^\circ$ (Viena, Conference) y para la región sombreada (no puede establecerse violación de T ahí) $\langle \alpha \rangle = 43^\circ - 8^\circ$ (cern, conference)

Debido a la regla... se espera un valor...
esto... y por tanto

$$\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle + \sum_F |\langle F | T | \psi(t) \rangle|^2 = 0 \quad 5.3$$

donde \sum_F representa suma sobre el espín, isoespín e integración sobre el espacio fase incluyendo a todos los modos de decaimiento.

Al tiempo $t > 0$ tendremos

$$|\psi(t)\rangle = a e^{-i(m_L - \frac{1}{2}k_L)t} |K_L^>\rangle + b e^{-i(m_S - \frac{1}{2}k_S)t} |K_S^>\rangle$$

Llevando esta expresión a (5.3) obtenemos la relación

$$i(m_S - m_L - \frac{i}{2}(Y_S + Y_L)) \langle K_L^> | K_S^>\rangle = \sum_F \langle F | T | K_L^>\rangle^* \langle F | T | K_S^>\rangle \quad 5.4$$

y además

$$Y_S = \sum_F |\langle F | T | K_S^>\rangle|^2 \quad ; \quad Y_L = \sum_F |\langle F | T | K_L^>\rangle|^2 \quad 5.5$$

Regresemos ahora al modo 2π ; definiremos las siguientes cantidades de interés

$$\epsilon_0 = \frac{\langle 2\pi, I=0 | T | K^>\rangle}{\langle 2\pi, I=0 | T | K_S^>\rangle} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{\langle 2\pi, I=2 | T | K^>\rangle}{\sqrt{2} \langle 2\pi, I=0 | T | K_S^>\rangle}$$

$$\omega = \frac{\langle 2\pi, I=2 | T | K_S^>\rangle}{\langle 2\pi, I=0 | T | K_S^>\rangle}$$

(Es fácil observar que si se supone invariancia CP entonces $\epsilon_0 = \epsilon$; $\epsilon_2 = \epsilon'$). De las definiciones (4.46)

$$\eta_{+-} = \frac{\epsilon_0 + \epsilon_2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \omega} \quad ; \quad \eta_{00} = \frac{\epsilon_0 - 2\epsilon_2}{1 - \sqrt{2} \omega}$$

Debido a la regla $|A_i| = \frac{1}{\lambda}$ se espera un valor pequeño para la ω ($|\frac{A_2}{A_0}| \ll 1$) y por tanto

$$\eta_{+-} = \epsilon_0 + \epsilon_2$$

5.6

$$\eta_{00} = \epsilon_0 - 2\epsilon_2$$

Como los valores experimentales de $|\eta_{+-}|$ y $|\eta_{00}|$ son muy pequeños se sigue que tanto ϵ_0 como ϵ_2 son pequeños y del mismo orden de magnitud ($\sim 10^{-3}$).

En vista de (5.1) y (5.2) podemos reescribir a ϵ_0 y ϵ_2 en la forma

$$\epsilon_0 = \frac{A_0 \rho - q \bar{A}_0}{A_0 q + \rho \bar{A}_0}$$

$$\epsilon_2 = \frac{A_2 \rho - \bar{A}_2 q}{A_0 q + \rho \bar{A}_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}$$

Como

$$\text{Im}(\epsilon_2 e^{-i(\delta_2 - \delta_0)}) = \frac{A_2 A_0 + \bar{A}_2 \bar{A}_0}{A_0^2 + \bar{A}_0^2} \text{Im} \epsilon_0 = O\left(|\epsilon| \frac{A_2}{A_0}\right)$$

entonces

$$\theta_2 \equiv \arg \epsilon_2 = \delta_2 - \delta_0 \quad \text{o} \quad \delta_2 - \delta_0 + \pi \quad 5.7$$

Supongamos por último que el término en la derecha de (5.4) está prácticamente saturado con los estados de dos piones. Por tanto

$$iA = \left(\frac{1}{2}(K_1 + K_2) + i(m_1 - m_2)\right) = \eta_{+-} |\langle \pi^+ \pi^- | T | K_S^0 \rangle|^2 + |\langle \pi^+ \pi^- | T | K_S^0 \rangle|^2 \eta_{00}$$

Donde

$$iA \equiv \langle K_L^0 | K_S^0 \rangle = \frac{2i \text{Im} \rho^* q}{|\rho|^2 + |q|^2}$$

Experimentalmente se encuentra que el cociente

$$R \equiv \frac{|\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_S^0 \rangle|^2}{|\langle \pi^0 \pi^0 | T | K_S^0 \rangle|^2 + |\langle \pi^+ \pi^- | T | K_S^0 \rangle|^2}$$

tiene un valor de $R = 0.313 \pm 0.007$. Como el denominador de R coincide precisamente con γ_5 (5.5) entonces

$$\begin{aligned} iA \left(\frac{1}{2} (\gamma_5 + \gamma_6) + i(m_3 - m_4) \right) &= \eta_{00} \gamma_5 R + \eta_{11} \gamma_5 (1-R) \\ &= \gamma_5 (\epsilon_0 - \epsilon_2 (1-3R)) \approx \gamma_5 \epsilon_0 \end{aligned}$$

pero $\epsilon_2 \gg \epsilon_0$ lo que implica

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_5 + \gamma_6}{\gamma_5} \right) \approx \frac{1}{2}$$

y por tanto

$$\epsilon_0 \approx \frac{A}{2} \left(i - \frac{2(m_3 - m_4)}{\gamma_5} \right)$$

de aquí que

$$\phi_0 = \arg \epsilon_0 \approx \arg \tan \frac{2(m_3 - m_4)}{\gamma_5} - \frac{\pi}{2}$$

5.8

Supondremos por último que el error cometido al obtener ϕ_0 es menor que 10° .

De las mediciones experimentales de m_3, m_4, γ_5 , se obtiene la relación

$$\phi_0 = -46^\circ \pm 10^\circ \text{ ó } 134^\circ \pm 10^\circ$$

Definiendo la razón r por

$$r = \frac{|\eta_{00}|}{|\eta_{11}|}$$

entonces experimentalmente se encuentra que

$$0 \leq r \leq 2$$

(existen serios problemas al medir el parámetro; observe se la tabla 5.1). A la diferencia $\delta_0 - \delta_2$ la consideraremos en el rango

$$-90^\circ \leq \delta_0 - \delta_2 \leq 90^\circ$$

El análisis se hará en términos de la cantidad $\theta_+ = \arctan(\eta_+)$ la cual podemos encontrar en vista de las ecuaciones -- (5.6) (5.7) y (5.8). Consideremos los siguientes -- rangos de valores que pudiera tomar θ_+ ; I) $54^\circ \leq \theta_+ \leq 72^\circ$; II) $93^\circ \leq \theta_+ \leq 183^\circ$; III) $-126^\circ \leq \theta_+ \leq -108^\circ$; IV) otros.

A las soluciones teóricas que caen en II las podemos considerar como soluciones factibles solo si no existe invariancia bajo \mathbb{T} . Esto se debe a que el dato experimental para θ_+ esta en el primer cuadrante. Para valores fijos de r y $\delta_0 - \delta_2$ y para $\Delta\theta_0 = 0$ existen dos parejas de soluciones para θ_+ ; cada pareja consistente de dos miembros defasados 180° . Si para ciertos valores de r y $\delta_0 - \delta_2$ encontramos que θ_+ esta en la región II, concluimos que la simetría \mathbb{T} no es conservada para estos datos. En la figura 5.1 se muestran las regiones donde se viola, observando además los resultados experimentales para los valores de r y $\delta_0 - \delta_2$. (las regiones punteadas corresponden a los errores en la medición de θ_+). Podemos concluir entonces la no invariancia bajo \mathbb{T} en el sistema $K^\circ - \bar{K}^\circ$.

CONCLUSIONES

Hemos observado que nuevamente algunos de nuestros conceptos, profundamente arraigados en nuestras ideas clásicas, no corresponden a la realidad.

La idea de invariancia e la inversión del espacio y conjugación de carga, es necesario desterrarla al menos en interacciones débiles. Queda abierta la puerta sin embargo a una invariancia bajo T, aunque aparentemente poco probable. (se espera poder establecerla con nuevos datos experimentales)

Resta tan solo sugerir una búsqueda de métodos para establecer límites (experimentales) de invariancia CPT en el peculiar sistema $K^0-\bar{K}^0$.¹⁷

APENDICE A

A.1 TEORIA DE CAMPO

Si consideramos una teoría de campo clásica de la cual conocemos su lagrangiano, sabemos de la mecánica clásica que el lagrangiano será de la forma

$$\mathcal{L} = \int L \cdot d^3\vec{r}$$

donde la densidad lagrangiana L depende del campo $\Psi^\alpha(\vec{r}, t)$ y de sus derivadas $\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial t}$. Por conveniencia usaremos la siguiente notación

$$x_1 \equiv x \quad ; \quad x_2 \equiv y \quad ; \quad x_3 \equiv z \quad ; \quad x_4 \equiv ct \equiv cX_0$$

$$x = (\vec{r}, ct)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \Psi^\alpha = \partial_\mu \Psi^\alpha$$

Usaremos además unidades naturales, esto es

$$\hbar = 1 = c = m_e$$

Definiendo la integral de acción por

$$I = \int_{\Omega} d^4x L(\Psi^\alpha(x); \partial_\mu \Psi^\alpha(x))$$

donde d^4x denota el elemento de tetravolumen

$$dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = d^3\vec{r} dt$$

Si aplicamos el principio de Hamilton, es decir, si requere-

rimos que

$$\delta I = 0$$

A.3

$$\delta \psi^\alpha = 0 \quad \text{en la superficie } \partial\Omega$$

tendremos

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} \delta \psi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \delta \partial_\nu \psi^\alpha \right\}$$

Como

$$\delta \partial_\nu \psi^\alpha = \partial_\nu \delta \psi^\alpha$$

entonces

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \right) \right\} \delta \psi^\alpha + \int_{\partial\Omega} d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \delta \psi^\alpha \right\}$$

pero debido al teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \delta \psi^\alpha \right\} = \int_{\partial\Omega} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \delta \psi^\alpha$$

esta integral se anula ya que $\delta \psi^\alpha = 0$ en la superficie. Aplicando (A.3) obtenemos

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} \right) \right\} \delta \psi^\alpha = 0 \quad \text{A.4 a}$$

lo cual implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\alpha} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi^\alpha} = 0 \quad \text{A.4 b}$$

obteniendo así las ecuaciones que las ψ^α deben de satisfacer.

Es importante recordar que la densidad hamiltoniana para la mecánica de medios continuos está dada por

$$H(x) = \pi^\alpha(x) \dot{\psi}^\alpha(x) - \mathcal{L}(x) \quad \text{A.5}$$

donde π^α es la densidad de momento definida a través de

$$\pi^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \quad A.6$$

El hamiltoniano se define como

$$\mathcal{H} = \int d^3 \vec{r} H(\vec{r}, t) \quad A.7$$

Ejemplos:

a) Consideremos la siguiente densidad lagrangiana con un campo ϕ real

$$L(\phi, \partial_{\nu} \phi) = -\frac{1}{2} (\partial_{\nu} \phi \partial_{\nu} \phi + m^2 \phi^2)$$

debido a la ecuación (A.4 b) las ϕ satisfacen

$$(\partial_{\nu} \partial_{\nu} - m^2) \phi = 0 \quad A.8$$

Al operador $\partial_{\nu} \partial_{\nu} \equiv \square$ se le conoce como D'Alambertiano y a la ecuación (A.8) se le conoce como ecuación de Klein Gordon.

b) Consideremos ahora un campo escalar complejo

$$L = -(\partial_{\mu} \psi^* \partial_{\mu} \psi + m^2 \psi^* \psi) \quad A.9$$

con $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$; ϕ_1, ϕ_2 campos reales.

Debido a (A.4) obtenemos

$$(\square - m^2) \psi = 0$$

$$(\square - m^2) \psi^* = 0$$

c) Es pertinente mostrar ahora que la densidad lagrangiana de la cual se obtienen las ecuaciones de campo no es única. De hecho, si agregamos una cuatridivergencia de la forma $\partial_{\mu} F_{\mu}(\chi, \psi^{\alpha})$ a la densidad lagrangiana, obtendremos

las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange (A.4) ya que si

$$L' = L + \partial_\mu F_\mu(\varphi, x)$$

entonces

$$I' = \int_{\Omega} L d^4x + \int_{\Omega} \partial_\mu F_\mu d^4x = \int_{\Omega} L d^4x + \int_{\partial\Omega} F_\mu(x) dS_\mu$$

$$\delta I' = \delta \int_{\Omega} L d^4x$$

(En el último paso se usó el hecho que $\delta\varphi^\alpha$ se anula en la superficie). Las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben satisfacer los campos quedan entonces invariantes. Es importante hacer notar que el contenido físico de las ecuaciones es el mismo, aunque la forma del hamiltoniano y en general, del formalismo canónico, será diferente.

Como un ejemplo podríamos considerar la densidad lagrangiana de un campo real vectorial. Pensando en términos de los ejemplos a) y b) y tomando $m=0$ podríamos trabajar con una densidad lagrangiana de la forma

$$L = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu$$

Sin embargo, es conveniente añadir la cuadrivergencia $-\partial_\mu (A_\nu \partial_\nu A_\mu)$. Si imponemos además la restricción $\partial_\mu A_\mu = 0$ obtenemos

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad A.12$$

Definiendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad A.13a$$

entonces

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

A.2 CUANTIZACION

En la mecánica cuántica puntual, la cuantización se hace asignando operadores a las variables canónicas (x, p en el espacio de configuración). En nuestro caso las variables canónicas son $\psi^x(x)$ y $\psi^x(x)$ lo que nos puede llevar a considerar a $\psi^x(x)$ (y por supuesto a $\psi^x(x)$) como operadores actuando en un espacio de Hilbert apropiado. A esta idea se le acostumbra llamar segunda cuantización.

Si desarrollamos el campo $\psi^x(x)$ en términos de un conjunto completo y ortonormal $u_{\vec{k}}$, tendremos

$$\psi^x(x) = \sum_{\vec{k}} \{ a_{\vec{k}}^x(t) u_{\vec{k}}(\vec{r}) + a_{\vec{k}}^{x\dagger}(t) u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \} \quad A.14$$

Clásicamente ψ^x definido así sería un número real, pero como ψ^x es un operador esto significa que $a_{\vec{k}}^x(t)$ será ahora un operador actuando sobre el mismo espacio de Hilbert en que actúa $\psi^x(\vec{r}, t)$.

Trataremos por el momento la cuantización de los bosones, considerando como axiomas las siguientes reglas de cuantización propuestas por Jordan y Klein

$$[a_{\vec{k}}^x(t), a_{\vec{l}}^{x\dagger}(t)] = \delta_{\vec{k}\vec{l}} \delta_{x,y} \quad A.15$$

$$[a_{\vec{k}}^x(t), a_{\vec{l}}^y(t)] = [a_{\vec{k}}^{x\dagger}(t), a_{\vec{l}}^{y\dagger}(t)] = 0$$

donde $a_{\vec{k}}^{x\dagger}$ es el conjugado hermitiano del operador $a_{\vec{k}}^x(t)$

Definiremos el siguiente operador (como las

relaciones (A.15) son para el mismo tiempo τ , por comodidad se omitirá la dependencia en el tiempo cuando no se preste a confusión. El mismo criterio se aplicará para el índice x)

$$N_k^\dagger = a_k^\dagger \tau a_k \tag{A.16}$$

el cual, como es fácil de comprobar, es hermitiano. Encontramos ahora los eigenvalores del operador N_k , esto es, resolveremos la ecuación

$$N_k \psi = \lambda \psi$$

Debido a que las eigenfunciones de un operador hermitiano son normalizables tenemos

$$\int \psi^\dagger (N_k \psi) = N_k \int \psi^\dagger \psi = \lambda \int \psi^\dagger \psi$$

y además

$$\int \psi^\dagger (N_k \psi) = \int (a_k^\dagger a_k \psi) = \int (a_k \psi)^\dagger (a_k \psi) = \|a_k \psi\|^2 \geq 0$$

por lo tanto

$$\lambda \geq 0 \tag{A.17}$$

Aplicando a_k^\dagger a N_k y usando las reglas de conmutación obtenemos

$$a_k^\dagger N_k \psi = a_k^\dagger a_k a_k \psi = (a_k^\dagger a_k + 1) a_k \psi = (N_k + 1) a_k \psi = a_k (N_k + 1) \psi = a_k N_k \psi + a_k \psi$$

de aquí

$$\lambda (N_k + 1) \psi = (N_k + 1) a_k \psi \tag{A.18}$$

Análogamente se obtiene

$$N_k(a_k \psi) = (N_k' - 1) a_k \psi \quad \text{A.19}$$

O sea, a partir de un eigenvector ψ hemos construido dos eigenvectores $a_k \psi$ y $a_k^\dagger \psi$ con eigenvalores $N_k' - 1$ y $N_k' + 1$ respectivamente. No podemos pensar en disminuir indefinidamente a N_k' a través de a_k ya que $N_k' \geq 0$. Por consiguiente debe existir un estado (al cual denotaremos por ψ_0) con la propiedad $a_k \psi_0 = 0$. Esta propiedad implica que el eigenvalor de N_k para este estado es cero. Ahora, si definimos

$$\begin{aligned} \psi_1 &\equiv a_k^\dagger \psi_0 \\ \psi_2 &\equiv a_k^\dagger a_k^\dagger \psi_0 \\ &\vdots \\ \psi_n &\equiv \underbrace{a_k^\dagger a_k^\dagger \cdots a_k^\dagger}_{n \text{ veces}} \psi_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \text{A.20}$$

entonces por (A.18) tenemos que ψ_n es un eigenvector de N_k con eigenvalor n . Si postulamos la unicidad de ψ_0 tendremos que el espectro completo de eigenvalores es

$$N_k' = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

También tenemos que

$$[N_k, N_l] = 0 \quad \text{A.21}$$

lo que indica que los operadores son mesurables (esto es, podemos realizar una medición simultánea) siendo conveniente expresar al espacio de Hilbert en términos de los eigenvectores simultáneos del conjunto completo N_k . Deno-

haremos a un vector por

$$\Phi_{N_1' N_2' \dots N_k'} \equiv |N_1', N_2', \dots, N_k', \dots\rangle \quad A.22$$

donde estamos especificando los distintos eigenvalores - del eigenvector $(N_k |N_1', N_2', \dots, N_k', \dots\rangle = N_k |N_1', N_2', \dots, N_k', \dots\rangle)$. El estado vacio lo definiremos como el eigenvector con la propiedad de que $N_k' = 0$ para toda k . Denotaremos al estado vacio por

$$\Phi^0 = |0, 0, 0, \dots, 0\rangle \quad A.23$$

postulando además su normalización

$$\langle \Phi^0 | \Phi^0 \rangle \quad A.24$$

Por definición

$$N_k \Phi^0 = 0 \quad \text{para toda } k \quad A.25$$

o equivalentemente

$$a_k \Phi_0 = 0 \quad \text{para toda } k \quad A.26$$

Haciendo una aplicación iterada de los operadores a_k^T obtenemos

$$\Phi_{N_1' N_2' \dots N_k'} = C (a_1^T)^{N_1'} (a_2^T)^{N_2'} \dots (a_k^T)^{N_k'} \Phi_0 \quad A.27$$

Si se pide normalización, C queda determinada hasta un factor de fase y puede obtenerse recordando

$$\begin{aligned} a_k^T \Phi_{N_1' \dots N_k'} &= \sqrt{N_k + 1} \Phi_{N_1' \dots N_k + 1, \dots} \\ a_k \Phi_{N_1' \dots N_k'} &= \sqrt{N_k} \Phi_{N_1' \dots N_k - 1, \dots} \end{aligned} \quad A.28$$

Concluimos

$$C = (N_1! N_2! \dots N_k! \dots)^{-\frac{1}{2}} \quad A.29$$

De (A.28) y (A.29) se pueden obtener los siguientes elementos de matriz

$$\begin{aligned} \langle M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots | a_k^\dagger | M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots \rangle &= \sqrt{N_k^i + 1} \delta_{N_1^i M_1^i} \delta_{M_2^i M_2^i} \dots \delta_{N_k^i + 1 M_k^i} \dots \\ \langle M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots | a_k | M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots \rangle &= \sqrt{N_k^i} \delta_{N_1^i M_1^i} \delta_{M_2^i M_2^i} \dots \delta_{N_k^i - 1 M_k^i} \dots \\ \langle M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots | N_k | M_1^i, M_2^i, \dots, M_k^i, \dots \rangle &= N_k^i \prod_j \delta_{N_j^i M_j^i} \end{aligned} \quad A.30$$

En la última fórmula hemos encontrado que el operador N_k es diagonal con respecto a la base escogida, resultado ya conocido debido a (A.21) y (A.22).

Es posible interpretar al vector $|M_1^i, M_2^i, \dots\rangle$ como un estado del sistema con M_1^i partículas con momento \vec{r}_1 , M_2^i partículas con momento \vec{r}_2 etc. El operador a_k debido a (A.28) aparece entonces como un operador que elimina una partícula de nuestro sistema, mientras que el operador a_k^\dagger aparece como un operador que introduce una partícula, llamándoles por esta razón operadores de aniquilación y creación respectivamente. Ahora, el operador N_k tiene como eigenvalores a las N_k^i , esto es, nos dice cuántas partículas hay en nuestro sistema con momento \vec{r}_k , y es por esta razón por la que se le denomina "operador número de ocupación".

El estado más general del sistema puede expresarse como combinación lineal de la base, es decir, como combinación lineal de los vectores $\Phi_{N_1^i, N_2^i, \dots, N_k^i}$.

Volviendo ahora con el campo $\psi^x(\vec{r}, t)$, conside-

remos el caso del ejemplo a) o b). El campo satisface entonces la ecuación de Klein Gordon, esto es

$$(\square - m^2) \psi = 0$$

(en el caso a) $s=1$; en el caso b) $s=1, 2$).

Para seguir adelante definiremos un producto escalar de la forma

$$(u_{\vec{k}}(\vec{r}), u_{\vec{k}'}(\vec{r})) \equiv i \int_V d^3\vec{r} u_{\vec{k}}^T(\vec{r}) \overleftrightarrow{\partial}_0 u_{\vec{k}'}(\vec{r}) = i \int_V d^3\vec{r} \{ u_{\vec{k}}^T \partial_0 u_{\vec{k}'} - (\partial_0 u_{\vec{k}}^T) u_{\vec{k}'} \} \quad A.31$$

Resta entonces obtener un conjunto completo ortonormal, y para ello, es necesario especificar condiciones a la frontera. Por conveniencia localizaremos a nuestro sistema en una caja de volumen $V=L^3$ e imponemos condiciones de periodicidad en la superficie de esta. Usando la notación

$$k^0 x \equiv \vec{k} \cdot \vec{x} - i k_0 x_0 \quad A.32$$

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{i k x} \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{-i k_0 x_0} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad A.33$$

donde $k^2 = m^2 + k^2 \quad A.34$

y el vector \vec{k} satisface alguno de los valores

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \quad A.35$$

En vista de (A.14) y (A.33) obtenemos

$$\psi^x(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ \int_{\vec{k}} e^{i k x} + \int_{\vec{k}} e^{-i k x} \right\}$$

donde $\int_{\vec{k}} e^{i k x} \equiv u_{\vec{k}}^x(t)$

En (A.37) vemos que las $u_{\vec{k}}^x(t)$ satisfacen la ecuación de movimiento de los operadores en el esquema -

de Heisenberg. Las reglas de conmutación que satisfacen las S_k^α son exactamente las mismas que satisfacen las $a_k^\alpha(t)$, lo que es fácil de comprobar de (A.37), (A.15) y (A.34).

$$[S_k^\alpha, S_{k'}^{\beta T}] = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\beta} \quad A.38$$

$$[S_k^\alpha, S_{k'}^\beta] = [S_k^{\alpha T}, S_{k'}^{\beta T}] = 0$$

De (A.6)

$$\pi^\alpha(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left(-S_k^\alpha e^{ikx} + S_k^{\alpha T} e^{-ikx} \right) \quad A.39$$

de aquí

$$[\pi^\alpha(x), \pi^\beta(x')]_{x_0=x'_0} = [\phi^\alpha(x), \phi^\beta(x')]_{x_0=x'_0} = 0 \quad A.40$$

$$[\phi^\alpha(x), \pi^\beta(x')] = \frac{i}{2V} \sum_{k, k'} \left\{ e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')} \right\} \quad A.41$$

Si consideramos la caja muy grande, podemos hacer el reem--plazo

$$\frac{1}{V} \sum \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \quad A.42$$

(A.41) se convierte entonces en

$$[\phi^\alpha(x), \pi^\beta(x')]_{x_0=x'_0} = i \delta(x-x')$$

Los resultados encontrados en (A.40) y (A.43) son muy satisfactorios ya que constituyen una generalización a las reglas de conmutación de Heisenberg.

Obtendremos ahora las reglas de conmutación para tiempos diferentes. Haciendo uso de (A.36) tenemos

$$\begin{aligned} [\phi^\alpha(x), \phi^\beta(x')] &= \frac{1}{V} \sum_{k, k'} \frac{1}{2\sqrt{k_0 k'_0}} \left\{ [S_k^\alpha, S_{k'}^{\beta T}] e^{i(kx - k'x')} + [S_k^{\alpha T}, S_{k'}^\beta] e^{-i(kx - k'x')} \right\} \\ &= \frac{1}{V} \delta_{\alpha\beta} \sum_k \frac{1}{2k_0} \left\{ e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} \right\} \end{aligned}$$

tomando el límite $V \rightarrow \infty$ (aplicando entonces (A.42))

$$[\phi^A(x), \phi^B(x')] = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2k_0} \{ e^{i k(x-x')} - e^{-i k(x-x')} \} d^3k$$

definiendo

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_0} \sin kx \quad A.44$$

Obtenemos finalmente

$$[\phi^A(x), \phi^B(x')] = i \Delta(x-x') \delta_{AB} \quad A.45$$

De la definición (A.44) podemos observar que la $\Delta(x)$ satisface las propiedades siguientes

$$\Delta^*(x) = \Delta(x)$$

$$\Delta(-\vec{r}, t) = \Delta(\vec{r}, t) \quad A.46$$

$$\Delta(\vec{r}, -t) = -\Delta(\vec{r}, t)$$

$$\Delta(-x) = -\Delta(x)$$

Consideremos el caso a) (A.36) se reduce a

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{ S_{\vec{k}} e^{i k x} + S_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i k x} \} \quad A.47$$

por otro lado (A.39)

$$\pi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_K \sqrt{\frac{k_0}{2}} \{ -S_{\vec{k}} e^{i k x} + S_{\vec{k}}^{\dagger} e^{-i k x} \}$$

Sustituyendo en (A.5) y luego en (A.7) obtenemos el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left\{ \left(\frac{\sqrt{k_0 k_0'}}{2} + \frac{1}{4\sqrt{k_0 k_0'}} (k_{\nu} k_{\nu}' - m^2) \right) (S_{\vec{k}} S_{\vec{k}'}^{\dagger} + S_{\vec{k}}^{\dagger} S_{\vec{k}'}) \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{\sqrt{k_0 k_0'}}{2} - \frac{1}{4\sqrt{k_0 k_0'}} (k_{\nu} k_{\nu}' + m^2) \right) (S_{\vec{k}} S_{\vec{k}'}^{\dagger} + S_{\vec{k}'}^{\dagger} S_{\vec{k}}) \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \right\}$$

pero debido a que $k_0^2 = m^2 + \vec{k}^2 = m^2 + k_x^2 + k_y^2$ y observando que

$$k_y k_y' \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} = -k_x k_x' \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} - k_0^2 \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'},$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{k_0 k_0'} + \frac{1}{4} (k_0 k_0')^{-\frac{1}{2}} (k_y k_y' - m^2) \right\} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} = 0$$

por otro lado

$$\left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{k_0 k_0'} - \frac{1}{4} (k_0 k_0')^{-\frac{1}{2}} (k_y k_y' + m^2) \right\} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = -\frac{k_0}{2} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

esto implica

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{k_0}{2} (S_{\vec{k}} S_{\vec{k}}^\dagger + S_{\vec{k}}^\dagger S_{\vec{k}})$$

de (A.34) podemos ver que k_0 coincide con la energía $\omega_{\vec{k}}$ de una partícula con momento \vec{k} . Usando las reglas de conmutación

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (N_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \quad 4.48$$

Como $N_{\vec{k}}$ es el operador número de ocupación de una partícula con momento \vec{k} , $\omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$ representa la energía de todas las partículas con momento \vec{k} que tiene un cierto estado Φ . Parece ser entonces que en (A.48) tenemos a la energía total del sistema $(\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}})$ más un término que corresponde a la energía del estado vacío. Como este término representa sólo el origen de la escala, se acostumbra escoger el cero de energía como la energía del estado vacío. Esta manera de proceder es poco formal, pues de hecho, la energía del estado vacío $\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$ es infinita.

Pasando ahora al segundo ejemplo

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\psi^{(1)}(x) + i \psi^{(2)}(x))$$

definiremos

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(S_{\vec{k}}^{(1)} - i S_{\vec{k}}^{(2)} \right)$$

A.50

$$b^\dagger(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(S_{\vec{k}}^{\dagger(1)} - i S_{\vec{k}}^{\dagger(2)} \right)$$

Las relaciones de conmutación de estos nuevos operadores, pueden ser obtenidas de las relaciones de conmutación -- (A.38), obteniéndose que los únicos conmutadores distintos de cero son

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}, \vec{k}') \quad A.51$$

Debido a (A.15) se ve que satisfacen relaciones de conmutación de operadores de creación y aniquilación, pudiéndose entonces identificar, como operadores de creación y de aniquilación de diferentes clases de partículas, ambas con momento \vec{k} . El campo $\varphi(x)$ por (A.36), (A.49), (A.50) queda entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left\{ a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$$

De la misma forma que se obtuvo el hamiltoniano en el ejemplo a) podemos calcular

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(S_{\vec{k}}^{(1)\dagger} S_{\vec{k}}^{(1)} + S_{\vec{k}}^{\dagger(2)} S_{\vec{k}}^{(2)} \right);$$

donde se ha eliminado ya el término de energía cero. Definiendo

$$N^+(\vec{k}) \equiv a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad ; \quad N^-(\vec{k}) \equiv b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})$$

Obtenemos

$$T = \sum_{\mathbf{R}} \omega_{\mathbf{R}} [N^+(\mathbf{R}) + N^-(\mathbf{R})] \quad A.54$$

Para seguir con la discusión de este ejemplo estableceremos un teorema sobre campos clásicos, conocido como teorema de Noether.

A.3 TEOREMA DE NOETHER

Consideremos una transformación

$$Y_M \rightarrow Y'_M$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x')$$
A.55

Supongamos ahora que las ecuaciones de campo no cambian bajo este grupo de transformaciones, en este caso, al conjunto de transformaciones (A.55) se le llama, grupo de simetría. Debido a que las ecuaciones de campo son obtenidas de la integral de acción (A.2) es suficiente que el cambio en esta sea cero

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}(\psi'^{\alpha}(x'), \partial_{\mu} \psi'^{\alpha}(x')) d^4x' = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi^{\alpha}(x), \partial_{\mu} \psi^{\alpha}(x)) d^4x \quad A.56$$

El principio de acción es muy útil en el caso de grupos de simetría continuos, pues entonces la invariancia bajo el grupo nos lleva a considerar transformaciones arbitrarias infinitesimales, de las variables independientes, de los campos y de las derivadas de estos.

$$Y_M \longrightarrow Y'_M = Y_M + \delta Y_M \quad A.57$$

$$\psi^{\alpha}(x) \longrightarrow \psi'^{\alpha}(x') = \psi^{\alpha}(x) + \delta \psi^{\alpha}(x) \quad A.58$$

$$\partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x) \rightarrow (\partial_{\mu} \Psi^{\alpha})(x') = \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x) + \delta \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x)$$

A.58

El significado de δx_{μ} , $\delta \Psi^{\alpha}$ como funciones infinitesimales arbitrarias (se les pide diferenciabilidad) puede ser mejor comprendido si se les expresa en la forma

$$\delta x_{\mu} = \lambda \eta_{\mu}(x) \quad ; \quad \delta \Psi^{\alpha}(x) = \lambda \zeta_{\mu}^{\alpha}(x)$$

donde η_{μ} y ζ_{μ}^{α} son funciones arbitrarias y λ es un parámetro adicional que será tratado como un parámetro infinitesimal de primer orden, esto es, despreciaremos términos - en λ^2 , λ^3 , etc.

Es importante notar en la definición (A.58) en términos de qué variables se expresan las funciones, -- sin embargo en el caso de $\delta \Psi^{\alpha}(x)$ se cumple que

$$\delta \Psi^{\alpha}(x) = \delta \Psi^{\alpha}(x')$$

A.59

esto se sigue del desarrollo

$$\delta \Psi^{\alpha}(x') = \delta \Psi^{\alpha}(x) + \left[\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta \Psi^{\alpha} \right] \delta x_{\mu} + \dots$$

Como a partir del segundo término tenemos potencias de mayores de la primera, podemos despreciar esos términos - obteniendo así (A.59)

De (A.57) tenemos

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Omega'} L(\Psi^{\alpha}(x'), \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x')) d^4 x' - \int_{\Omega} L(\Psi^{\alpha}(x), \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x)) d^4 x \\ &= \int_{\Omega'} L(\Psi^{\alpha}(x) + \delta \Psi^{\alpha}(x), \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x) + \delta \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x)) d^4 x - \int_{\Omega} L(\Psi^{\alpha}(x), \partial_{\mu} \Psi^{\alpha}(x)) d^4 x \end{aligned}$$

Como puede observarse en (A.60) es conveniente reducir la integral sobre Ω' en una integral sobre Ω . Un conoci

do teorema de cálculo, nos dice que al hacer un cambio de variable (una transformación) en una integral múltiple, el elemento de volumen cambia de la siguiente manera

$$d^4 x' = |J| d^4 x \quad A.61$$

donde $|J|$ es el determinante del jacobiano de la transformación definido por

$$|J| = \det \left\| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1,2,3,4} = \det \|a_{ij}\|$$

Ahora bien, de (A.57) obtenemos

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \delta x_j$$

queda entonces

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \delta x_1 & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \delta x_2 & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \delta x_1 & 1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \delta x_2 & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} \delta x_1 & \dots & 1 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \delta x_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 + \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \delta x_4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante manteniendo sólo términos de primer orden

$$|J| = 1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial x'_4}{\partial x_4} \delta x_4 = (1 + \delta x_i)$$

el elemento de volumen (A.61) queda entonces

$$d^4 x' = (1 + \delta x_i) d^4 x$$

Desarrollando el integrando del primer término de (A.60) en serie de Taylor, despreciando los términos a segundo orden

$$L(\psi^\alpha(x) + \delta\psi^\alpha(x), \partial_\mu \psi^\alpha(x) + \delta\partial_\mu \psi^\alpha(x)) = L(\psi, \partial_\mu \psi) + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} \delta\psi^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi^\alpha} \delta\partial_\mu \psi^\alpha$$

insertando lo que hemos obtenido, en (A.60)

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[L \partial_\mu \delta X^\mu + \frac{\partial L}{\partial \psi^\alpha} \delta\psi^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi^\alpha} \delta\partial_\mu \psi^\alpha \right] d^4x \quad A.62$$

Antes de proseguir, es necesario hacer notar que en general

$$\delta\partial_\mu \psi^\alpha \neq \partial_\mu \delta\psi^\alpha \quad A.63$$

Esta desigualdad proviene de la definición (A.58) ya -- que las funciones están expresadas en diferentes puntos. Es conveniente entonces definir nuevas cantidades, $\delta^* \psi^\alpha$, para las cuales la relación (A.63) se convierta en una igualdad. Como la dificultad provino de la evaluación en puntos distintos, definimos

$$\psi^{1\alpha}(x) = \psi^\alpha(x') + \delta^* \psi^\alpha(x') \quad A.64$$

$$\partial_\mu \psi^{1\alpha}(x) = \partial_\mu \psi^\alpha(x') + \delta^* \partial_\mu \psi^\alpha(x')$$

Calculando $\partial_\mu \psi^\alpha(x)$ de la primera ecuación vemos que

$$\partial_\mu \delta^* \psi^\alpha = \delta^* \partial_\mu \psi^\alpha \quad A.65$$

Siguiendo el argumento que se usó para obtener (A.54) - establecemos

$$\delta^* \psi^\alpha(x) = \delta^* \psi^\alpha(x')$$

De (A.64) y (A.58) calculamos la relación

$$\delta\psi^\alpha(x) = \psi^{1\alpha}(x) - \psi^\alpha(x) = \psi^\alpha(x') - \psi^\alpha(x) + \delta^* \psi^\alpha(x')$$

desarrollando en serie, reteniendo de nuevo sólo térmi--

nos a primer orden y aplicando (A.66)

$$\delta Y^{\alpha}(x) = \delta^* Y^{\alpha}(x) + \partial_{\mu} Y^{\alpha}(x) \delta x_{\mu}$$

Análogamente

$$\delta \partial_{\mu} Y^{\alpha}(x) = \delta^* \partial_{\mu} Y^{\alpha}(x) + \partial_{\nu} \partial_{\mu} Y^{\alpha}(x) \delta x_{\nu}$$

Haciendo uso de estas relaciones podemos reescribir ---

(A.62) en la forma

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[L_{\mu} \delta x_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial Y^{\alpha}} \delta^* Y^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \partial_{\mu} Y^{\alpha} \delta x_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} Y^{\alpha})} \delta^* \partial_{\mu} Y^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} \partial_{\nu} Y^{\alpha}} \partial_{\mu} \partial_{\nu} Y^{\alpha} \delta x_{\mu} \right] d^4 X$$

Las derivadas parciales que se han utilizado

hasta ahora, han sido considerando a x_{μ} , Y^{α} , $\partial_{\mu} Y^{\alpha}$ como variables independientes, esto es

$$D_{\nu} F(x_{\mu}, Y^{\alpha}(x_{\mu}), \partial_{\mu} Y^{\alpha}(x_{\mu})) = \partial_{\nu} F + \frac{\partial F}{\partial Y^{\alpha}} \partial_{\nu} Y^{\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \partial_{\nu} \partial_{\mu} Y^{\alpha}$$

tendremos por ejemplo

$$D_{\nu} \delta x_{\mu} = \partial_{\nu} \delta x_{\mu}$$

$$D_{\nu} L = \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} \partial_{\nu} x^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \partial_{\nu} \partial_{\mu} Y^{\alpha}$$

(A.63) se reduce entonces

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[D_{\mu} (L \delta x_{\mu}) + \frac{\partial L}{\partial Y^{\alpha}} \delta^* Y^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \delta^* \partial_{\mu} Y^{\alpha} \right] d^4 X$$

Usando (A.63)

$$\delta I = \int_{\Omega} \left[D_{\mu} (L \delta x_{\mu}) + \frac{\partial L}{\partial Y^{\alpha}} \delta^* Y^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \delta^* \partial_{\mu} Y^{\alpha} \right] d^4 X$$

Utilizando la fórmula

$$D_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \delta^* Y^{\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} D_{\mu} \delta^* Y^{\alpha} + \partial_{\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \right) \delta^* Y^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \partial_{\nu} \delta^* Y^{\alpha} + D_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_{\mu} Y^{\alpha}} \right) \delta^* Y^{\alpha}$$

encontramos que

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ D_{\mu} \left(L \delta x_{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \delta \dot{\psi}^{\alpha} \right) + [L]_{\alpha} \delta \psi^{\alpha} \right\} d^4x \quad A.69$$

donde hemos introducido la abreviación

$$[L]_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \psi^{\alpha}} - D_{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \quad A.70$$

Usando (A.67) podemos expresar a (A.70) en términos de $\delta \psi^{\alpha}$ en lugar de $\delta x^{\mu} \delta \dot{\psi}^{\alpha}$ obteniendo

$$\delta I = \int_{\Omega} \left\{ D_{\mu} \left\{ \left(L \delta_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \psi^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \right) \delta x_{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \delta \psi^{\alpha} \right\} + [L]_{\alpha} \left(\delta \psi^{\alpha} - \partial_{\nu} \psi^{\alpha} \delta x_{\nu} \right) \right\} d^4x$$

En vista de (A.4) $[L]_{\alpha} = 0$ y de (A.56) $\delta I = 0$, como el dominio Ω es arbitrario obtenemos

$$D_{\mu} f_{\mu} = 0 \quad A.71$$

donde

$$f_{\mu} = \left(L \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \partial_{\nu} \psi^{\alpha} \right) \delta x_{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \delta \psi^{\alpha} \quad A.72$$

Esta es una ecuación de continuidad para el vector f_{μ} . Integrando (A.72) sobre todo el espacio tridimensional y usando el teorema de la divergencia obtenemos

$$0 = \int_{\mathcal{R}} D_{\mu} f_{\mu} d^3x = \int_{\mathcal{R}} \text{div } f dV + \int_{\mathcal{R}} D_4 f_4 d^3x = \int_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} f_4 d^3x$$

Como los campos y sus derivadas se anulan en el infinito, el primer término se anula, por tanto

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} f_4 d^3x = 0$$

de aquí que

$$\frac{1}{c} F_4 \equiv \frac{1}{c} \int_{\mathcal{R}} f_4 dV = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{R}} \left\{ \left(L \delta_{4\nu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \partial_{\nu} \psi^{\alpha} \right) \delta x_{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{\alpha}} \delta \psi^{\alpha} \right\} dV \quad A.73$$

es una constante de movimiento.

Hemos encontrado que cualquier grupo continuo

de simetría induce una ley de conservación para una cierta cantidad física F_y , la cual puede ser derivada de acuerdo a (A.73) una vez que se conoce la densidad lagrangiana del sistema.

La derivación hecha es por supuesto válida en la teoría cuántica de campos. Como en (A.73) $\frac{1}{c} F_y$ es real, entonces será ahora un operador hermitiano.

Habiendo establecido el teorema de Noether, retornemos ahora a nuestro segundo ejemplo cuya densidad lagrangiana (A.9)

$$L = - (\partial_\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^\dagger \varphi)$$

es invariante ante

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi e^{i\lambda}$$

$$\varphi^\dagger \rightarrow \varphi'^\dagger = \varphi^\dagger e^{-i\lambda}$$

Considerando entonces una transformación infinitesimal

$$e^{i\lambda} \approx 1 + i\lambda \quad ; \quad e^{-i\lambda} \approx 1 - i\lambda$$

$$x = x'$$

$$\varphi'(x) = \varphi(1 + i\lambda) = \varphi + i\lambda\varphi$$

$$\varphi'^\dagger(x) = \varphi^\dagger(1 - i\lambda) = \varphi^\dagger - i\lambda\varphi^\dagger$$

Comparando con (A.57) y (A.58) obtenemos $\delta\varphi = i\lambda\varphi$; $\delta\varphi^\dagger = -i\lambda\varphi^\dagger$

Como $\delta x_\mu = 0$ (A.72) queda entonces

$$f_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\mu}} \dot{\psi} - i \dot{\psi}^{\dagger} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{\dagger}}$$

Si definimos

$$e_{\mu} \equiv -ie \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\mu}} \dot{\psi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{\dagger}} \dot{\psi}^{\dagger} \right) \quad A.74$$

en vista de (A.71) obtenemos la ecuación

$$\partial_{\mu} j_{\mu} = 0$$

la que nos permite interpretar a $e_{\mu}(x)$ como un vector de densidad de corriente y la curva componente $\frac{e_{\mu}}{c} = e\rho(x)$ como una densidad de carga. Entonces, en vista de (A.73) tenemos

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int e\rho(x) dV = \int \frac{e_{\mu}(x)}{c} dV = - \frac{e}{c} \int j_4 dV \\ &= -e \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{\dagger}} \dot{\psi}^{\dagger} \right) dV \\ &= -e \int (\dot{\psi}^{\dagger} \dot{\psi} - \dot{\psi} \dot{\psi}^{\dagger}) dV \end{aligned} \quad A.75$$

De la ecuación (A.52) obtenemos

$$Q = e \sum_{\vec{k}} [N^{\dagger}(\vec{k}) \cdot N(\vec{k})]$$

donde N^{\dagger} y N son los operadores definidos en (A.53).

(A.76) y (A.54) confirman nuestra interpretación de los operadores $a(\vec{k})$ y $b(\vec{k})$ señalando además - que $a^{\dagger}(\vec{k})$, $a(\vec{k})$, $N^{\dagger}(\vec{k})$, son operadores de creación, aniquilación, y número de ocupación de un bosón de momento \vec{k} y carga $+e$, mientras que $b^{\dagger}(\vec{k})$, $b(\vec{k})$, $N(\vec{k})$ son los operadores correspondientes para un bosón de carga $-e$.

Tanto el ejemplo a) como el b) nos describen partículas sin espín de masa m , llamadas mesones. La expresión (A.47) describe un campo mesónico de carga cero, --

mientras que (A.52) nos describe mesones con carga.

A.4 CUANTIZACION DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

Clásicamente el campo electromagnético se describe por los campos eléctrico y magnético \vec{E} y \vec{H} que pueden ser derivados de un potencial cuadrivectorial

$$A_\mu(x) = (\vec{A}, cV) \quad \text{A.77}$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad ; \quad H_c = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad \text{A.78}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{A.79}$$

asi, si asignamos al campo electromagnético la densidad lagrangiana (A.13a)

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético, encontramos que la A_μ (debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange (A.40)) satisface

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = \partial_\nu \partial_\mu A_\mu - \square A_\nu \quad \text{A.80}$$

que son precisamente las ecuaciones de Maxwell (en términos de los potenciales) para el vacío.

En la teoría clásica podemos escoger la norma de Lorentz

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad \text{A.81}$$

la cual no es derivable del principio de acción y debe ser tomada en cuenta. Con esta restricción las ecuaciones de -

Maxwell se reducen a

$$\square A_{,M} = 0$$

A.82

Imponiendo de nuevo condiciones periódicas a la frontera en una caja de volumen V y dándonos cuenta -- de que existen cuatro soluciones de onda plana, linealmente independientes, para cada momento \vec{k} de la ecuación (A.82). Tenemos

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 \left\{ a_{\lambda}(\vec{k}) \xi_{\mu}^{\lambda}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \xi_{\mu}^{\lambda\dagger}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \quad A.83$$

donde ($k_0^2 = |\vec{k}|^2$) y las $\xi_{\mu}^{\lambda}(\vec{k})$ ($\lambda=1,2,3,4$) son cuatro vectores linealmente independientes, unitarios, (de polarización) que pueden ser escogidos de manera que formen un sistema ortonormal. (de hecho pueden ser escogidos de forma diferente para cada \vec{k}). Sean $\tilde{u}^l(\vec{k})$ ($l=1,2,3$) tres vectores mutuamente ortogonales formando un sistema derecho, -- con $\tilde{u}^{(3)} = \vec{k}/|\vec{k}|$, entonces es conveniente seleccionar a los cuatro vectores $\xi_{\mu}^{\lambda}(\vec{k})$ como

$$\xi^1(\vec{k}) = (\tilde{u}^1(\vec{k}), 0)$$

A.84

$$\xi^{(4)}(\vec{k}) = (0, 0, 0, i)$$

Haciendo uso de las reglas de conmutación -- propuestas por Jordan y Klein (A.15) encontramos las relaciones

$$[a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{k}')] = [a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k}, \vec{k}')$$

Análogamente a lo que se hizo para obtener la relación de conmutación para tiempos distintos en el caso de los mesones (A.45) obtenemos

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = i \int_{\Sigma_{x'}} D(x-x') \quad A.86$$

donde $D(x)$ en términos de la delta definida en (A.44) es

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \Delta(x, m) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{k_0} \sin kx \quad A.87$$

Existe una seria dificultad proveniente de las ecuaciones (A.85) y (A.83), puesto que si nuestra interpretación de $a_{\lambda}^T(k)$ y $a_{\lambda}(k)$ como operadores de creación y a niquilación respectivamente, es correcta, entonces, $a_{\lambda}^T(k)$ debe ser el adjunto de $a_{\lambda}(k)$, pero esto traería como consecuencia que todas las componentes del potencial vectorial A_{μ} serían operadores hermitianos mientras que $A_{\nu} = iV$ debe ser antihermitiano.

Por otro lado, el conmutador

$$[\partial_{\lambda} A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = i \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} D(x-x')$$

es distinto de cero como puede observarse fácilmente de (A.87) resultado que es inconsistente con la condición de Lorentz.

Para resolver estas dificultades Gupta y Bleuler desarrollaron un método en el cual se propone un producto escalar en el espacio de Hilbert de forma que los valores de expectación de $A_{\lambda}(x)$ son siempre reales, mientras que el de $A_{\nu}(x)$ es imaginario. Redujeron también la ecuación

de operadores (λ) a una condición subsidiaria la cual nos restringe los estados permisibles (Φ) a aquellos que satisfagan

$$\partial_\mu A_\mu^\dagger \Phi = 0$$

donde

$$A_\mu^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda(\mathbf{k}) \xi_\mu^\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Es posible demostrar que esta condición es suficiente para establecer las ecuaciones de Maxwell para los valores de expectación de los campos, relación necesaria para obtener la teoría clásica en el caso límite.

APENDICE B

FERMIONES

B.1 ECUACION DE DIRAC

B.1a Derivación

La expresión para la energía de una partícula puntual libre con masa en reposo k y momento \vec{p} en mecánica relativista, está dada por

$$E = (\vec{p}^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} = (p_i p_i + k^2)^{\frac{1}{2}} \quad B.1$$

Dirac propuso expresar la raíz cuadrada en forma lineal, - esto es como

$$p_i \alpha_i + \beta k \quad B.2$$

donde α_i y β son necesariamente operadores como se verá a continuación. Como se ha pedido que (B.2) sea equivalente a la raíz cuadrada que aparece en (B.1), se tiene

$$\vec{p}^2 + k^2 = (p_j \alpha_j + \beta k)(p_i \alpha_i + \beta k) = p_j p_i \alpha_j \alpha_i + k p_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) + k^2 \beta^2$$

debido a la independencia lineal de las p_i tendremos

$$\beta^2 = 1 \quad B.3a$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$$

y además

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_i^2 + p_j^2 + \beta^2 = \vec{p}^2$$

de aquí

$$x_i^2 = x_i'^2 = x_j^2 = 1 \quad ; \quad x_i x_j + x_j x_i = 0$$

(B.3)

B.3b

Estas relaciones obviamente no se cumplen si α_i y β_j son números, pero podemos obtenerlas si son operadores y I es el operador identidad. Ahora bien, en mecánica cuántica no relativista la ecuación de Schrödinger en la representación de coordenadas, puede ser obtenida formalmente de la ecuación clásica de la energía haciendo las substituciones

$$E \longrightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$p_i \longrightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$x_i \longrightarrow x_i$$

Haciendo esta substitución y aplicando la ecuación resultante de operadores a alguna función Φ

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{1}{c} \alpha_k \partial_k + \beta \kappa \right) \Phi$$

B.4

Si definimos al operador hamiltoniano por

$$H = \frac{1}{c} \alpha_k \partial_k + \beta \kappa$$

B.5

entonces (B.4) tendrá la forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \Phi = 0$$

que es la misma que la ecuación dinámica de Schrödinger.

Por comodidad podemos definir al operador de la forma

$$\gamma_k = -i \beta \alpha_k$$

Substituyendo en () obtenemos

$$\delta_4 = \beta$$

$$(\gamma_\mu \gamma_\mu + K) \Phi = 0 \quad B.6$$

Debido a (B.3a) y (B.3b) las γ_μ satisfacen

$$\gamma_\mu^2 = 1$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 \quad \mu \neq \nu$$

o equivalentemente

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad B.7a$$

introduciendo el anticonmutador de dos operadores por

$$\{A, B\} = AB - BA \quad B.7$$

tendremos

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad B.7b$$

B.1b Propiedades

Consideremos ahora las siguientes 16 cantidades

$$1$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$$

$$i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, i\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_4$$

$$i\gamma_1\gamma_3, i\gamma_1\gamma_4, i\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_4$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \equiv \gamma_5$$

Es posible demostrar que estas, forman el álgebra de un anillo (la base de un anillo), llamado anillo de Dirac. Exis

te un teorema concerniente al álgebra de Dirac, llamado - el teorema fundamental de Pauli, el cual nos dice que - dadas cualesquiera dos representaciones irreducibles del - álgebra, estas son equivalentes, mostrando además que la - representación debe ser cuatridimensional. El álgebra de Dirac está completamente determinada por las relaciones de anticonmutación (B.7), por consiguiente, si tenemos - dos sistemas de matrices de 4x4 tales que

$$\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2 \delta_{\mu\nu} \quad ; \quad \{ \gamma'_\mu, \gamma'_\nu \} = 2 \delta_{\mu\nu}$$

estas están relacionadas por una relación de semejanza

$$\gamma'_\mu = S^{-1} \gamma_\mu S$$

B.9

Si las γ_μ son hermitianas, las γ'_μ lo serán si S es unitaria. Como queremos que el hamiltoniano definido en -- (B.6) sea hermitiano, entonces las γ_μ deben de ser hermitianas.

Otro resultado de importancia consiste en que la única matriz que conmuta con todas las γ_μ es, a reserva de un escalar, la identidad. Esto es, si

$$[X, \gamma_\mu] = 0 \quad \text{para } \mu = 1, 2, 3, 4$$

B.10

entonces X es de la forma λI .

Alistaremos ahora algunas representaciones frecuentemente usadas. Definiremos primero las matrices de 4x4

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \tau_1 \end{pmatrix} \quad \hat{T}_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \quad \hat{T}_3 = \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 \\ 0 & \tau_3 \end{pmatrix}$$

donde las submatrices τ_i (2X2) son las matrices de Pauli. Introduciendo ahora las matrices

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde I es la matriz identidad (2X2). Se puede demostrar que los siguientes conjuntos de matrices satisfacen las relaciones (B 7)

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \rho_1 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_2 \\ \gamma_0 &= \rho_1 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_3 \\ \gamma_0 &= \rho_2 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_3 \\ \gamma_0 &= \rho_2 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_1 \\ \gamma_0 &= \rho_3 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_1 \\ \gamma_0 &= \rho_3 \hat{\tau}_i & \gamma_4 &= \rho_2 \end{aligned} \quad \text{B.11}$$

donde quizá la más usada sea la tercera.

El grupo homogéneo de Lorentz es el grupo de transformaciones tales que

$$x'_\mu = \alpha_{\nu\mu} x_\nu \quad \text{B.12}$$

con $\alpha_{\mu\mu}$ reales, α_{i4} , α_{4i} imaginarias y además las relaciones

$$\alpha_{\mu\nu} \alpha_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} = \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\rho\nu}$$

Debido a estas relaciones $\alpha_{\nu\mu} = \alpha_{\mu\nu}^{-1}$ y como bajo una transformación de Lorentz ∂_μ se debe de comportar de la misma manera que las coordenadas, entonces

$$\partial_\mu = \alpha_{\nu\mu} \partial'_\nu$$

de forma que de la ecuación de Dirac (B.6) obtenemos

$$(-\alpha_{\gamma\mu} \gamma_{\mu} \partial_{\gamma} + K) \bar{\Phi}(x) = 0$$

Definiendo $\bar{\gamma}_{\gamma} = \alpha_{\gamma\mu} \gamma_{\mu}$, observaremos a continuación que estas cuatro cantidades obedecen las mismas reglas de conmutación que las matrices de Dirac.

$$\bar{\gamma}_{\mu} \bar{\gamma}_{\nu} + \bar{\gamma}_{\nu} \bar{\gamma}_{\mu} = \alpha_{\mu\sigma} \alpha_{\nu\tau} (\delta_{\sigma\tau} + \delta_{\tau\sigma}) = 2 \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\nu\mu} = 2 \delta_{\mu\nu}$$

Por tanto, por el teorema fundamental de Pauli, existe una matriz tal que

$$\alpha_{\mu\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} = L_{\mu\nu} \tag{B.14}$$

Multiplicando a (B.13) por L y usando la notación

$$\bar{\Phi}'(x') = L \bar{\Phi}(x) \tag{B.15}$$

obtenemos

$$(\gamma_{\mu} \gamma_{\mu} + K) \bar{\Phi}'(x') = 0$$

esto es, la ecuación de Dirac tendrá la misma forma que en el sistema original, siempre que la ley de transformación de la $\bar{\Phi}(x)$ para las transformaciones de Lorentz, sea la expresada en (B.15).

Es interesante exhibir los siguientes covariantes que pueden ser formados por los espinores y las matrices

$$\text{definiendo } \bar{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger} \gamma_4 \tag{B.16}$$

$$J_{\mu\nu} \equiv -i \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \tag{B.17}$$

$$\bar{\Psi} \Psi \quad \text{escalar}$$

$S_{\mu} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$	vector	
$\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\psi$	tensor	B.18
$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	pseudo-vector	
$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	pseudo-escalar	

B.1c Solución de onda plana de la ecuación de Dirac

Consideremos a

$$\psi(x) = u(\vec{p}) e^{i p x} + v(\vec{p}) e^{-i p x}$$

($p = (\vec{p}, i|E|)$) observamos que para que $\psi(x)$ sea solución de la ecuación de Dirac, los espinores "constantes" (independientes de las coordenadas) deben de satisfacer

$$(p - i\kappa) u(\vec{p}) = 0 \tag{B.19}$$

$$(p + i\kappa) v(\vec{p}) = 0$$

donde

$$\not{p} = \gamma_{\mu} p_{\mu} \tag{B.20}$$

En el sistema en reposo ($\vec{p} = 0, p_0 = \kappa$) estas ecuaciones dan

$$\gamma_4 u(0) = u(0) \tag{B.21}$$

$$\gamma_4 v(0) = -v(0)$$

Ahora, debido a las reglas de conmutación

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}$$

como $\gamma_{\mu}^2 = 1$, $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = -\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}$ de ahí que la relación quede como

$$-2Y_4 = Y_4 Y_4 Y_4$$

Tomando la traza de ambos lados

$$-2 \operatorname{tr} Y_4 = \operatorname{tr} Y_4 Y_4 Y_4 \quad \text{B.22}$$

pero la traza de un producto tiene la propiedad

$$\operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(vu) \quad \text{B.23}$$

por consiguiente

$$\operatorname{tr} Y_4 Y_4 Y_4 = \operatorname{tr} Y_4 Y_4 Y_4 = 4 \operatorname{tr} Y_4$$

Llevando esta relación a (B.22) obtenemos

$$\operatorname{tr} Y_4 = 0 \quad \text{B.24}$$

Como Y_4 es hermitiana, se puede diagonalizar, de ahí que la condición (B.24) implique que la suma de sus cuatro eigenvalores sea cero. Tenemos además la propiedad $Y_4^2 = 1$ lo que nos indica que los eigenvalores sólo pueden ser ± 1 , por lo que concluimos que existen dos eigenvectores con eigenvalor ± 1 y dos eigenvectores con -1 . Es claro así que en vista de (B.21) necesitamos un subíndice adicional que pueda tomar los valores ± 1 . Así pues, tenemos cuatro - soluciones en el sistema en reposo, $u_{\pm}(0)$ y $v_{\pm}(0)$

Si definimos ahora

$$u(\vec{p}, s) \equiv A(\vec{p} + c\mathbf{k}) u_s \quad \text{B.25}$$

$$v(\vec{p}, s) \equiv B(\vec{p} - c\mathbf{k}) v_s$$

con constantes de normalización A, B reales arbitrarias, observamos que satisfacen las ecuaciones de Dirac en el espacio momental (B.14) esto es

$$(\hat{p} - c\kappa) u(\vec{p}, s) = 0$$

$$(\hat{p} + c\kappa) v(\vec{p}, s) = 0$$

B.26

donde se ha hecho uso de la propiedad $\hat{p}\hat{p} = \hat{p}_a\hat{p}_a = -\kappa^2$. Las ecuaciones (B.26) muestran que $v(\vec{p}, s)$ tiene momento y energía negativos en relación con $u(\vec{p}, s)$

Si introducimos

$$\hat{T}_k \equiv \hat{T}_{2m} = c\gamma_4\gamma_5\gamma_k$$

B.27

con k, l, m en orden cíclico, el operador $\frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|}$ conmuta con el hamiltoniano (B.5) en el espacio momental, esto es

$$\left[H, \frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|} \right] = \left[\gamma_4 \left(\gamma_k \frac{1}{2} \hat{p}_k + \kappa \right), \frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|} \right] = 0$$

lo que nos indica la posibilidad de interpretar a los eigenvalores de este operador, llamado operador de helicidad, como una observable física que, debido a la definición del operador, interpretamos como la componente del espín en la dirección del momento. Podemos escoger entonces eigenfunciones simultáneas del hamiltoniano y de la helicidad. Como

$$\left(\frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|} \right)^2 = 1$$

sólo existirán los eigenvalores ± 1 , obteniendo así

$$\frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|} u(\vec{p}, s) = s u(\vec{p}, s)$$

B.28

$$\frac{\hat{T}_k \hat{p}_k}{|\vec{p}|} v(\vec{p}, s) = -s v(\vec{p}, s)$$

Hemos encontrado entonces que $u(\vec{p}, +)$ y $u(\vec{p}, -)$ son eigenestados de la helicidad con eigenvalores $+1$ y -1 respectivamente, sucediendo una situación análoga para las dos soluciones de energía negativa $v(\vec{p}, +)$ y $v(\vec{p}, -)$. Así pues, hemos interpretado la cuádruple degeneración que aparece en la solución de onda plana.

Definiremos

$$\bar{u}(\vec{p}, s) = u^\dagger(\vec{p}, s) \gamma_4 \tag{B.29}$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s) = v^\dagger(\vec{p}, s) \gamma_4$$

las cuales en vista de (B.26) satisfacen

$$\bar{u}(\vec{p}, s) (\gamma_\mu p_\mu - c k) = 0 \tag{B.30}$$

$$\bar{v}(\vec{p}, s) (\gamma_\mu p_\mu + c k) = 0$$

Adoptaremos las condiciones de ortonormalidad

$$u^\dagger(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = v^\dagger(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \frac{E_p}{c k} \delta_{ss'} \tag{B.31}$$

$$u^\dagger(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, s') = 0$$

o equivalentemente (la equivalencia es fácilmente demostrable si se establece primero la igualdad $\bar{u} \gamma_\mu u = \frac{p_\mu}{c k} \bar{u} u$

lo cual puede hacerse multiplicando $\bar{u} \gamma_\mu$ por la izquierda en la ecuación (B.30) y $\gamma_\mu u$ por la derecha en la ecuación (B.30))

$$\bar{u}(\vec{p}, s) u(\vec{p}, s') = -\bar{v}^*(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \delta_{ss'}$$

$$\bar{u}(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = \bar{v}^*(\vec{p}, s) v(\vec{p}, s') = 0$$

Con lo que hemos definido podemos reescribir a la ecuación de Dirac en la forma

$$\bar{\Psi} (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} - \kappa) \equiv \gamma_{\mu} \bar{\Psi} \partial_{\mu} - \kappa \bar{\Psi} = 0 \quad \text{B.33}$$

En vista de las ecuaciones (B.19) definiremos los operadores de proyección por

$$\Lambda^{\pm}(\vec{p}) = \frac{\not{p} \pm \kappa}{\pm 2\kappa} \quad \text{B.34}$$

Estos tienen todas las propiedades de los operadores de proyección

$$\Lambda^{+}(\vec{p}) + \Lambda^{-}(\vec{p}) = 1$$

$$(\Lambda^{\pm}(\vec{p}))^2 = \Lambda^{\pm}(\vec{p})$$

$$\Lambda^{+}(\vec{p}) \Lambda^{-}(\vec{p}) = 0$$

Aplicandolos a $u(\vec{p}, s)$, $v(\vec{p}, s)$ obtenemos

$$\Lambda^{-}(\vec{p}) u(\vec{p}, s) = 0$$

$$\Lambda^{+}(\vec{p}) u(\vec{p}, s) = u(\vec{p}, s)$$

B.35

$$\Lambda^{-}(\vec{p}) v(\vec{p}, s) = v(\vec{p}, s)$$

$$\Lambda^{+}(\vec{p}) v(\vec{p}, s) = 0$$

Usando una representación explícita establecemos la relación de completéz en el espacio de espín

$$\sum_{s=1}^2 \{ u_{\alpha}(\vec{p}, s) \bar{u}_{\beta}(\vec{p}, s) - v_{\alpha}(\vec{p}, s) \bar{v}_{\beta}(\vec{p}, s) \} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{B.36}$$

la cual podemos comprobar aplicandola a $u(\vec{p}, s)$ o $v(\vec{p}, s)$ y usando (B.32)

$$\sum_{s=1}^2 \{ u_{\alpha}(\vec{p}, s) \bar{u}_{\beta}(\vec{p}, s) - v_{\alpha}(\vec{p}, s) \bar{v}_{\beta}(\vec{p}, s) \} u_{\beta}(\vec{p}, s) = \sum_{s=1}^2 u_{\alpha}(\vec{p}, s) \delta_{ss} = u_{\alpha}(\vec{p}, s)$$

Se puede comprobar en forma directa que los operadores de

proyección pueden ser escritos en la forma

$$\Lambda_{x_3}^+(\vec{p}) = \sum_{s=1}^2 u_x(\vec{p}, s) \bar{u}_x(\vec{p}, s)$$

$$\Lambda_{x_3}^-(\vec{p}) = - \sum_{s=1}^2 v_x(\vec{p}, s) \bar{v}_x(\vec{p}, s)$$

por ejemplo

$$\sum_{s=1}^2 u_x(\vec{p}, s) \bar{u}_x(\vec{p}, s) = \sum_{s=1}^2 \Lambda_{xT}^+ \{ u_T(\vec{p}, s) \bar{u}_T(\vec{p}, s) - v_T(\vec{p}, s) \bar{v}_T(\vec{p}, s) \}$$

$$= \Lambda_{xT}^+ \delta_{TT} = \Lambda_{x3}^+$$

B.1c Límite no relativista

Escojamos por simplicidad al eje Z paralelo al momento. Usando la representación $\gamma_0 = \hat{1}$, $\gamma_3 = \hat{1}$ (6.26) se convierte en

$$\begin{pmatrix} p_4 - i k & -i p_k T_k \\ i p_k T_k & -p_4 - i k \end{pmatrix} u(\vec{p}, s) = 0 \quad \begin{pmatrix} p_4 + i k & -i p_k T_k \\ i p_k T_k & -p_4 + i k \end{pmatrix} v(\vec{p}, s) = 0$$

En el caso en que $\vec{p} \rightarrow 0$ la $u(\vec{p}, s)$ y la $v(\vec{p}, s)$ deben de satisfacer

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2ik \end{pmatrix} u(0, s) = 0 \quad \begin{pmatrix} 2ik & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v(0, s) = 0$$

de aquí que $u(0, s)$, $v(0, s)$ serán de la forma

$$u(0, s) = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v(0, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\Lambda}{T_k} = \begin{pmatrix} T_k & 0 \\ 0 & T_k \end{pmatrix}$$

por consiguiente (B.33) implica que en el límite no relativista

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B.38$$

B.2 FERMIONES

Consideremos la densidad lagrangiana

$$L(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi(x) \quad B.39$$

aplicando (A.4) obtenemos que los campos satisfacen

$$0 = -\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi(x) \quad B.40a$$

$$0 = -\bar{\psi} \kappa + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \quad B.40b$$

(observese que (B.40b) es el adjunto de la ecuación de Dirac (B.40a)). La densidad hamiltoniana (A.5) queda entonces como

$$H(x) = -\bar{\psi} \gamma_4 \partial_4 \psi - L = \bar{\psi} (\gamma_k \partial_k + \kappa) \psi \quad B.41$$

Procedamos ahora a cuantizar nuestro sistema.

De la ecuación (A.14) y de la discusión de la última sección encontramos análogamente al tratamiento de mesones cargados y con la normalización (B.32) ($p_0 \equiv E_{\vec{p}}$). Las condiciones a la frontera son similares al caso de los bosones)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{\kappa}{p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^2 \left\{ c_s(\vec{p}) u(\vec{p}, s) e^{i p x} + d_s^\dagger(\vec{p}) v(\vec{p}, s) e^{-i p x} \right\} \quad B.42$$

Reste ahora postular las relaciones que satisfacen los operadores $C_s(\vec{p})$ y $d_s(\vec{p})$. Es posible demostrar que si hacemos que estos operadores obedezcan reglas de conmutación similares a (A.15) encontraríamos serias dificultades en el desarrollo de la teoría (el hamiltoniano no quedaría positivo definido). Es por eso que exigiremos las reglas de anticonmutación propuestas por Jordan y Wigner

$$\{ C_s(\vec{p}), C_{s'}^T(\vec{p}') \} = \{ d_s(\vec{p}), d_{s'}^T(\vec{p}') \} = \delta_{ss'} \delta(\vec{p}, \vec{p}') \quad B.43$$

siendo los otros anticonmutadores (como $\{ C_s, C_{s'} \}$, $\{ C_{s'}, d_{s'} \}$ etc.) cero.

Definiendo $N_s^-(\vec{p}) \equiv C_s^T(\vec{p}) C_s(\vec{p})$; $N_s^+(\vec{p}) \equiv d_s^T(\vec{p}) d_s(\vec{p})$ B.44

por cálculo directo obtenemos la propiedad

$$(N_s^\pm(\vec{p}))^2 = N_s^\pm(\vec{p}) \quad B.45$$

lo que nos implica que los eigenvalores sólo pueden ser 0 y 1. A través del desarrollo (B.42) y de la densidad hamiltoniana (B.41) en un cálculo similar al realizado en el caso de los mesones, obtenemos

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \sum_{s=1}^2 \{ C_s^T(\vec{p}) C_s(\vec{p}) - d_s(\vec{p}) d_s^T(\vec{p}) \} = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \sum_{s=1}^2 (N_s^-(\vec{p}) + N_s^+(\vec{p}) - 1) \quad B.46$$

Este resultado sugiere fuertemente la interpretación de los operadores $N_s^\pm(\vec{p})$ como operadores número de ocupación, pues de esa forma (B.46) correspondería a una suma de energías por nivel además de una energía de punto cero.

Por la relación (B.45) nuestras partículas

obedecerán el principio de exclusión de Pauli, ya que para una cierta \vec{p} y s podrá haber a lo más una partícula. Así, postulamos

$$c_s(\vec{p}) \bar{\psi}_c = d_s(\vec{p}) \bar{\psi}_c = 0 \quad B.47$$

lo que nos lleva a interpretar a $c_s(\vec{p})$ y $d_s(\vec{p})$ como operadores de aniquilación y a $c_s^\dagger(\vec{p})$, $d_s^\dagger(\vec{p})$ como operadores de creación. El tener dos operadores de creación y dos de aniquilación nos lleva a considerar dos tipos de fermiones, que debido a la similitud con el ejemplo b) del apéndice anterior nos sugiere que corresponden a fermiones de distinta carga. Para justificar esta última aseveración se procede de igual forma que en el citado ejemplo, observando primero la invariancia de la densidad lagrangiana en una transformación

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$$

encontrando entonces una densidad de corriente de la forma

$$-e j_\mu(x) \equiv ie \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_\mu} \psi - \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_\mu} \bar{\psi} \right\}$$

Calculando el operador de carga

$$Q \equiv \int d^3x (-e j_0) = e \sum_{\vec{p}} \sum_{s=1}^2 (N_s^+(\vec{p}) - N_s^-(\vec{p}))$$

lo cual justifica nuestra interpretación de partículas de distinta carga.

Podemos entonces representar el estado de un

electrón o de un positrón por $C_s^\dagger(\vec{p})\bar{\Phi}_0$ y $A_s^\dagger(\vec{p})\bar{\Phi}_0$ respectivamente; un estado de dos electrones sería entonces $C_s^\dagger(\vec{p})C_s^\dagger(\vec{p}')\bar{\Phi}_0$, etc. Por las reglas de anticonmutación

$$(C_s^\dagger(\vec{p}))^2 = 0 \quad B.48a$$

y

$$C_s^\dagger(\vec{p})C_s(\vec{p}')\bar{\Phi}_0 = -C_s^\dagger(\vec{p}')C_s^\dagger(\vec{p})\bar{\Phi}_0 \quad B.48b$$

lo que nos muestra de nuevo que no podemos tener dos electrones en el mismo estado (B.48a) y que estamos tratando con estados que son antisimétricos bajo el intercambio de partículas. Por supuesto, este tipo de argumento se aplica también a los estados del positrón.

Las reglas de anticonmutación para los campos ψ y $\bar{\psi}$ se obtienen de una manera directa a partir de las relaciones (B.43), del desarrollo de Fourier (B.42) y, para (B.48b), del resultado (B.37). Se encuentra que

$$\begin{aligned} \{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta(x') \} &= 0 \\ \{ \bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \} &= 0 \\ \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \} &= -i S_{\alpha\beta}(x-x') \end{aligned} \quad B.49$$

donde $S_{\alpha\beta}$ son componentes de la matriz

$$S(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{p}}{p_0} \left\{ e^{ipx} \frac{p + iK}{2i} + e^{-ipx} \frac{p - iK}{2i} \right\}$$

En términos de la función $\Delta(x)$ definida en (A.42) encontramos

$$S(x) = (\gamma_\mu \partial_\mu - K) \Delta(x) \quad B.50$$