



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**VÓRTICES ARMÓNICOS  
BIDIMENSIONALES**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**F Í S I C O**

**P R E S E N T A:**

**CHRISTIAN ESPARZA LOPEZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. EUGENIO LEY KOO**

**Cd. Universitaria, D.F. 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno

Esparza

López

Christian

55 2245 0564

Universidad Nacional Autónoma de  
México

Facultad de Ciencias

Física

30356961-9

2. Datos del tutor

Dr.

Eugenio

Ley

Koo

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Jorge Daniel Carlos

Cantó

Illa

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Eduardo

Nahmad

Achar

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Carlos

Málaga

Iguiñiz

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Pablo

Padilla

Longoria

7. Datos del trabajo escrito

Vórtices Armónicos Bidimensionales

73 p

2015



# Vórtices Armónicos Bidimensionales

Christian Esparza López

Agosto de 2015



*Dedico este trabajo a mis padres por su apoyo incondicional, y a Ana Vasquez quién me ha acompañado durante los últimos cinco años.*





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Ecuaciones fundamentales</b>	<b>5</b>
2.1. Ecuación de continuidad . . . . .	5
2.2. Ecuaciones de Navier–Stokes . . . . .	6
2.3. Flujo incompresible . . . . .	7
2.4. Circulación y Vorticidad . . . . .	8
2.5. Ecuación de Vorticidad . . . . .	8
<b>3. Campos armónicos bidimensionales</b>	<b>11</b>
3.1. Ecuación de Laplace . . . . .	11
3.1.1. Separación de Variables . . . . .	12
3.2. Ecuación de Poisson . . . . .	17
3.3. Operador de Laplace-Beltrami $\Delta_B$ . . . . .	18
3.4. Invariancia de soluciones armónicas bajo transformaciones conformes . . . .	19
3.4.1. Inversión Geométrica . . . . .	21
3.4.2. Proyección Estereográfica . . . . .	22
<b>4. Vórtices armónicos</b>	<b>25</b>
4.1. Potencial de velocidad . . . . .	25
4.1.1. Función de corriente . . . . .	26
4.2. Vórtices armónicos . . . . .	26
4.3. Vórtices armónicos sobre un plano . . . . .	29
4.3.1. Función de Green . . . . .	32
4.3.2. Vórtice de Rankine . . . . .	35
4.4. Vórtices armónicos sobre una superficie esférica . . . . .	36
4.4.1. Función de Green para $\Delta_B$ . . . . .	39
4.4.2. Ondas de Rosby . . . . .	40

---

<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Apéndice A. Teorema de transporte</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice B. Coordenadas curvilíneas ortogonales</b>	<b>51</b>
B.1. Coordenadas polares . . . . .	52
B.2. Coordenadas elípticas . . . . .	53
B.3. Coordenadas bipolares . . . . .	53
B.4. Coordenadas esféricas . . . . .	54
<b>Apéndice C. Transformaciones conformes</b>	<b>55</b>
<b>Apéndice D. Ecuaciones de Sturm–Liouville</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice E. Líneas de corriente, graficación</b>	<b>61</b>

# Resumen

En este texto tratamos algunos temas básicos de la teoría de flujo incompresible, específicamente tratamos el concepto de vorticidad, *hojas de vorticidad* y desarrollamos un método para obtener el campo de velocidades producido por una distribución de vorticidad.

En el primer capítulo presentamos las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos, nos concentramos en las *ecuaciones de continuidad y Navier–Stokes*, las cuales simplificamos enormemente al considerar que el *flujo es incompresible*. También introducimos el concepto de *vorticidad*, que es un análogo de la corriente eléctrica que da lugar a un campo magnetostático. En el caso de un flujo, la vorticidad da lugar a un *campo de velocidades*. El concepto de vorticidad nos permite, desarrollar un método para determinar el campo de velocidades del flujo sin necesidad de conocer la presión, la temperatura o la energía interna. Estas propiedades del flujo pueden obtenerse una vez que se conocen el campo de velocidades y el de vorticidad.

En el segundo capítulo estudiamos las *ecuaciones de Poisson y Laplace* que se presentan de manera natural al considerar un flujo inviscido e incompresible. Estudiamos el *método de separación de variables* para resolver la ecuación de Laplace y el *método de Green* para resolver la ecuación de Poisson. Introducimos el *operador de Laplace–Beltrami* que no es más que la parte angular del operador de Laplace en coordenadas esféricas. Al final del capítulo demostramos que las *funciones armónicas* son invariantes bajo *transformaciones conformes* e introducimos la *proyección estereográfica* que mapea el plano euclidiano en la superficie de la esfera unitaria y viceversa.

Por último, en el tercer capítulo utilizamos las herramientas presentadas en los capítulos anteriores, para desarrollar una manera sistemática de determinar el campo de velocidades producido por una distribución dada de vorticidad. Discutimos los conceptos de *función de corriente* y *hojas de vorticidad*, nos referimos a estas últimas como *vórtices armónicos* debido a que la función de corriente correspondiente a estos flujos satisface la ecuación de Laplace. Construimos la función de Green para el operador de Laplace en coordenadas cilíndricas y obtenemos su *desarrollo multipolar*, finalmente utilizando proyección estereográfica, obtenemos la función de Green para el operador de Laplace–Beltrami y su desarrollo multipolar.



# Capítulo 1

## Introducción

Cuando cursaba los últimos semestres de la carrera de arquitectura, tuve la oportunidad de asistir a ciclos de conferencias impartidas por arquitectos de otros países. Muchos de ellos incluían en su proceso técnico y creativo la dinámica de fluidos de manera intuitiva. Algunos de ellos realizaban simulaciones complejas de los flujos de viento (asistidos seguramente por un equipo de físicos, ingenieros y matemáticos) para moldear la forma de los edificios, de tal manera que los esfuerzos ejercidos por el viento fuesen mínimos; algunos otros realizaban simulaciones para encontrar la mejor manera de ventilar los espacios habitables. Desde entonces sentí fascinación por los fluidos y esa fue una de las razones que me impulsaron a estudiar Física.

Desafortunadamente, a lo largo de la carrera de Física en la Facultad de Ciencias de la UNAM no existe un curso formal sobre mecánica de fluidos. Algunos temas se tratan en el curso de Fenómenos Colectivos de tercer semestre y en el curso de Mecánica de Medios Deformables de octavo semestre, pero el material presentado a penas alcanza para vislumbrar la complejidad y belleza del tema. Es por esta razón que decidí realizar mi tesis sobre mecánica de fluidos y en el proceso he logrado aprender un poco más acerca del tema. Además de esto, dos ideas principalmente, motivaron el desarrollo de este trabajo:

La primera de ellas, *ecuaciones similares tienen soluciones similares*. Richard P. Feynman en el segundo volumen de su famosa serie de libros *The Feynman Lectures on Physics*, presenta una introducción a la teoría electromagnética clásica y en los dos últimos capítulos discute brevemente acerca de la teoría de flujo incompresible, haciendo énfasis en que las ecuaciones que describen al campo de velocidades de un fluido incompresible, son análogas a las ecuaciones que describen a un campo magnetostático.

En específico, la analogía es como sigue: El campo magnético es solenoidal, es decir sus líneas de campo son cerradas y por tanto el flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada es nulo. Análogamente, en el caso de un flujo incompresible (de densidad constante), la cantidad de fluido que entra en una región es la misma que sale de ella, es decir el flujo a través de la superficie que delimita esa región, es nulo. Matemáticamente,

esta propiedad de los campos está dada por:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{El campo magnético es solenoidal.} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{El flujo es incompresible.} \end{array}$$

Por otra parte, las corrientes eléctricas son fuentes de circulación del campo magnético, mientras que las líneas de vorticidad son fuente de circulación del campo de velocidades. Matemáticamente hablando, tenemos:

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} & \text{Las corrientes generan circulación del campo magnético.} \\ \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} & \text{La vorticidad genera circulación del flujo.} \end{array}$$

En los textos clásicos sobre mecánica de fluidos como [2], [22] y [28], se demuestra que es posible expresar el campo de velocidades como el rotacional de un campo  $\mathbf{A}$ , el cual llamamos campo de potencial, siguiendo la analogía con el campo magnético. Además, se demuestra que el campo  $\mathbf{A}$  satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega},$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace. En las regiones en que la vorticidad se anula, el potencial satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

y decimos que es *armónico*. La teoría sobre funciones armónicas puede encontrarse en [5], [7].

Dada esta analogía, podemos aplicar todo lo que sabemos sobre magnetostática al estudio de un flujo incompresible. En este trabajo en particular, nos interesa tratar el concepto de *desarrollo multipolar* para una distribución dada de vorticidad. Éste se obtiene expresando el campo de velocidades en términos de la función de Green, para el operador de Laplace, por medio de una *integral de Biot-Savart* y expresando a su vez la función de Green como una suma infinita de funciones armónicas. El desarrollo multipolar se encuentra bien descrito en los textos clásicos de teoría electromagnética como [12], [24] y [41]; las funciones de Green se tratan en [19].

Es de utilidad construir los desarrollos multipolares, porque nos permiten realizar aproximaciones de los campos de velocidades generados por distribuciones complejas de vorticidad. Por otra parte, a partir del desarrollo multipolar, es fácil demostrar un análogo de la *ley de Ampère*, que se utiliza cuando la distribución de vorticidad tiene un eje de simetría rotacional.

La segunda idea que motivó este trabajo proviene de Crowdy, en [8] él utiliza la proyección estereográfica para construir flujos sobre superficies esféricas a partir de soluciones a las ecuaciones de Euler en el plano. La proyección estereográfica es un mapeo conforme, que transforma el plano euclidiano en la esfera unitaria, una buena discusión acerca de

dicho mapeo puede encontrarse en [39] y en general, para la teoría de transformaciones conformes uno puede revisar [6].

Las transformaciones conformes son importantes porque dejan invariantes a las funciones armónicas, es decir, la imagen de una función armónica bajo una transformación conforme es una función armónica. Arriba mencionamos una aplicación de las transformaciones conformes, pero también pueden utilizarse, por ejemplo, en el método de imágenes (en electrostática) para construir funciones de Green [24].

En este trabajo nos concentramos en flujos bidimensionales, incompresibles e invíscidos, ya que algunos fenómenos atmosféricos y oceánicos, pueden modelarse como flujos de este tipo y podemos aprovecharnos de la proyección estereográfica para construir las soluciones de las ecuaciones en la esfera, a partir de las soluciones conocidas en el plano [9], [10], [15]. Particularmente, construimos la función de Green para el operador de Laplace en una superficie esférica y su desarrollo multipolar, proyectando estereográficamente la función de Green en coordenadas polares.

Finalmente, mencionamos que la teoría de flujo incompresible es un campo activo de investigación, sobre todo en las ciencias atmosféricas. De particular interés es el estudio de la vorticidad, algunos de los fenómenos más interesantes en la mecánica de fluidos se deben a la evolución e interacción de los vórtices, estos generan mezclado, esfuerzos cortantes, transporte de materia y energía, y constituyen uno de los ingredientes principales del flujo turbulento. Además, el estudio de la vorticidad ha llevado al desarrollo de poderosos métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en situaciones complejas. Estos temas están fuera del alcance de esta tesis, pero algunas referencias generales con extensas bibliografías son [1], [3], [25] y [37].





## Capítulo 2

# Ecuaciones fundamentales

En este capítulo derivamos las ecuaciones necesarias para encontrar el campo de velocidades de un flujo. Para ello utilizamos el método del continuo en la descripción euleriana<sup>1</sup> del flujo y suponemos que éste satisface tanto el principio de conservación de masa como la segunda ley de Newton.

En la última sección introducimos el concepto de vorticidad y señalamos las ventajas de describir el flujo a partir de su distribución de vorticidad.

### 2.1. Ecuación de continuidad

Consideremos una porción de fluido dentro de una región arbitraria  $\Omega$ , con masa

$$M = \int_{\Omega} \rho dV,$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa y  $dV$  el elemento de volumen. Si observamos la evolución de esta porción de fluido vemos que el tamaño y forma de  $\Omega$  cambian, pero  $M$  permanece constante (figura 2.1). Éste es el principio de conservación de masa, que simbólicamente se expresa de la siguiente manera

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho dV = 0,$$

siendo  $D/Dt$  la derivada total. Transformamos esta ecuación integrodiferencial en una ecuación diferencial parcial utilizando el teorema de transporte (Apéndice A)

$$\frac{DM}{Dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0,$$

---

<sup>1</sup>La descripción inicial es la lagrangiana y utilizamos el teorema de transporte para relacionar las derivadas en ambas descripciones y obtener finalmente una ecuación diferencial en la descripción euleriana.

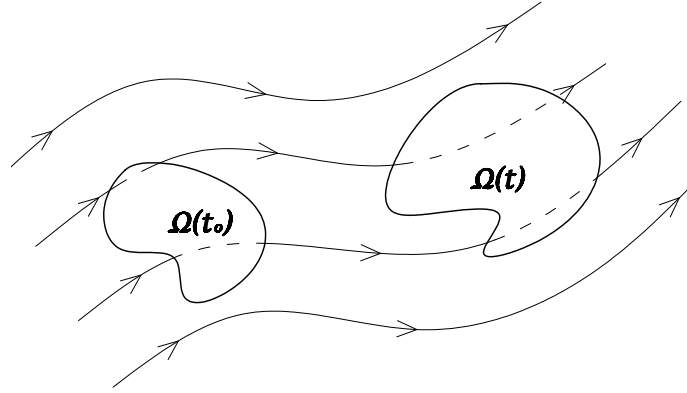


Figura 2.1: La región  $\Omega(t)$  puede cambiar de forma y volumen, pero la masa  $M$  permanece constante.

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad en cada punto del flujo. Tomando en cuenta que  $\Omega$  es arbitraria, concluimos que el integrando debe anularse, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

que es la ecuación de continuidad. Ahora calculamos explícitamente el segundo término y obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

reconociendo que el primer y segundo término pueden expresarse como la derivada total de  $\rho$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.1a)$$

## 2.2. Ecuaciones de Navier–Stokes

Consideremos, como antes, una porción de flujo en una región arbitraria  $\Omega$ . El momento que lleva el fluido dentro de esta región es

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV$$

y de acuerdo a la segunda ley de Newton, la razón de cambio del momento es igual a la fuerza externa total  $\mathbf{F}$  que actúa sobre el fluido, de manera simbólica

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F}.$$

Las fuerzas que actúan sobre el fluido en  $\Omega$  se clasifican en dos tipos, *i) fuerzas de cuerpo*, tales como la gravedad, y *ii) fuerzas superficiales*, como las debidas a gradientes de presión y esfuerzos viscosos [22]. Así la segunda ley de Newton toma la siguiente forma

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \right] dV = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV,$$

donde  $\partial\Omega$  denota la frontera de  $\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a  $\partial\Omega$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  es la matriz de esfuerzos que al proyectarse en la dirección  $\mathbf{n}$  nos da la fuerza debida a la presión (esfuerzos normales) y la viscosidad (esfuerzos tangenciales) sobre  $\partial\Omega$ ,  $dS$  es el elemento de superficie y  $\mathbf{f}$  representa a las fuerzas de cuerpo. El tensor de esfuerzos tiene la forma [22]

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y manipulando los términos con ayuda de la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia obtenemos

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones (3 componentes) se conocen como *ecuaciones de Navier–Stokes*,  $p$  es la presión,  $\mu$  y  $\lambda$  son el primer y segundo coeficientes de viscosidad (considerados constantes por simplicidad), y  $\Delta$  es el operador de Laplace.

### 2.3. Flujo incompresible

En la práctica, la variación de la densidad puede ignorarse en la mayoría de los flujos a tratar. En estos casos se dice que el flujo es incompresible y se considera que la densidad permanece constante. Para un flujo incompresible la ecuación (2.1a) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

entonces el campo de velocidad es solenoidal y por tanto puede escribirse como el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{A}$ , al que llamamos potencial de velocidad. En los capítulos 3 y 4 vemos cómo se relaciona este campo con la función de corriente que también definimos más adelante. Por otra parte las ecuaciones (2.2) se reducen a

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.2a)$$

Si además consideramos un fluido invíscido, es decir no viscoso, el segundo término del lado derecho se anula y obtenemos finalmente

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}, \quad (2.4)$$

que son las llamadas *ecuaciones de Euler* para flujo ideal.

## 2.4. Circulación y Vorticidad

Definimos la circulación  $\Gamma$  de un flujo en torno a un circuito cerrado  $C$  como sigue

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l},$$

donde  $d\mathbf{l}$  es el elemento de línea en la dirección tangente a  $C$  en cada punto. Utilizando el teorema de Stokes podemos convertir la integral de línea en una integral de superficie

$$\Gamma = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS,$$

siendo  $S$  una superficie con frontera  $C$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  es la vorticidad y representa la circulación por unidad de área en cada punto del fluido. Notamos que si  $\boldsymbol{\omega} = 0$  entonces  $\Gamma = 0$ , a este tipo de flujos se les llama irrotacionales.

Normalmente un flujo se describe resolviendo las ecuaciones (2.2), encontrando el campo de velocidades y a partir de éste se determina la vorticidad, pero el problema se puede atacar de manera inversa, encontrando el campo de velocidades a partir de una distribución de vorticidad conocida. Esta manera de atacar el problema es conveniente pues, en muchos casos, la vorticidad está concentrada en ciertas regiones del flujo. La situación es análoga a cuando se tienen corrientes eléctricas que generan un campo magnético.

En la siguiente sección derivamos la ecuación de evolución de la vorticidad para diferentes tipos de flujos.

## 2.5. Ecuación de Vorticidad

Lo primero que notamos es que la vorticidad es un campo solenoidal por ser el rotacional del campo de velocidades, es decir

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0.$$

A continuación determinamos la ecuación que debe satisfacer la vorticidad en un flujo incompresible de viscosidad constante.

Ya vimos que para este tipo de flujo el campo de velocidades satisface la ecuación (2.2a). Desarrollamos la derivada total en el lado izquierdo:  $D\mathbf{u}/Dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  y reescribimos el segundo término utilizando la siguiente identidad

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a},$$

donde hacemos uso de la expansión del triple producto vectorial. Sustituyendo  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$  obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (2.5)$$

Después tomamos el rotacional de esta ecuación

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

Aquí hemos supuesto que las fuerzas de cuerpo son conservativas, es decir son derivables de un potencial  $\phi$ , además usamos el hecho de que el rotacional de un gradiente se anula y que el rotacional conmuta con el operador de Laplace. Ahora usamos la identidad

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b};$$

sustituyendo  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$  y considerando que tanto  $\mathbf{u}$  como  $\boldsymbol{\omega}$  son solenoidales, obtenemos la ecuación de vorticidad

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (2.6)$$

En el caso de un fluido invíscido tenemos

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.6a)$$

Finalmente, si el flujo es bidimensional,  $\boldsymbol{\omega}$  apunta en la dirección perpendicular al plano de movimiento y por tanto el lado derecho se anula y el lado izquierdo se puede expresar como la derivada total de la vorticidad. Entonces en un flujo bidimensional, incompresible, invíscido y sujeto a fuerzas de cuerpo conservativas, la vorticidad se conserva, es decir

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 0, \quad (2.6b)$$

o en términos de la circulación

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (2.7)$$

Éste es el *teorema de circulación de Kelvin*<sup>2</sup>. La ventaja de la ecuación (2.6) sobre las ecuaciones de Navier–Stokes es que la presión no aparece de manera explícita; para determinar la presión en términos de la vorticidad tomamos la divergencia de (2.5) y usamos el hecho de que el operador de divergencia y el Laplaciano conmutan

---

<sup>2</sup>La circulación se conserva bajo condiciones menos restrictivas; específicamente, no es necesario que el flujo sea bidimensional y sólo se requiere que el flujo sea invíscido y barotrópico, es decir, que la densidad sea una función solamente de la presión.

$$\nabla \cdot \left[ \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right] = -\Delta \left( \frac{p}{\rho} + \phi \right) = -\Delta \left( \frac{P}{\rho} \right),$$

donde  $P = p + \rho\phi$  se denomina presión modificada. Ahora usamos la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

y reemplazando  $\mathbf{a} = \mathbf{u}$  y  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}$  obtenemos

$$\Delta \left( \frac{P}{\rho} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot (\Delta \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \Delta (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}). \quad (2.8)$$

En los capítulos subsecuentes nos restringimos a flujos bidimensionales, específicamente sobre un plano y sobre superficies esféricas, desarrollamos una manera sistemática de encontrar el campo de velocidades a partir de la distribución de vorticidad, y damos algunos ejemplos.

## Capítulo 3

# Campos armónicos bidimensionales

En el capítulo anterior derivamos las ecuaciones necesarias para describir un flujo. En éste estudiamos las ecuaciones de Laplace y Poisson así como algunas de las propiedades de sus soluciones; específicamente, en la sección 3.4 estudiamos la invariancia de las funciones armónicas bajo transformaciones conformes, lo cual nos permite construir nuevas soluciones a la ecuación de Laplace a partir de una ya conocida. Con esto completamos los elementos necesarios para describir los vórtices armónicos bidimensionales que trataremos en el siguiente capítulo.

### 3.1. Ecuación de Laplace

Supongamos que se tiene un flujo invíscido, incompresible e irrotacional (flujo potencial), es decir  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ . En una región libre de fuentes o sumideros es posible encontrar una función escalar  $\varphi$  (potencial escalar de velocidad), tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi,$$

sustituyendo en la ecuación de continuidad para un flujo incompresible y utilizando la identidad  $\nabla \cdot \nabla = \Delta$  obtenemos

$$\Delta \varphi = 0. \tag{3.1}$$

Ésta es la *ecuación de Laplace*, que en coordenadas curvilíneas ortogonales se expresa de la siguiente forma

$$\frac{1}{H} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{H}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \varphi = 0, \tag{3.2}$$

con  $H = h_1 h_2 \cdots h_n$  y  $h_i = h_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . En la siguiente sección estudiaremos el método más comúnmente utilizado entre los físicos para resolver esta ecuación, el método de separación de variables.



### 3.1.1. Separación de Variables

El método de separación de variables es el más común y socorrido para resolver ecuaciones diferenciales parciales en  $n$  variables independientes. La estrategia es convertir la ecuación diferencial parcial en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, suponiendo que la función solución se puede expresar como un producto de funciones que dependen solamente de una de las variables. El método es aplicable cuando se desea resolver una ecuación diferencial parcial lineal, en una región delimitada por una frontera en la que se especifica el valor de la solución o su derivada normal. Formalmente, sea  $\mathcal{L}$  un operador diferencial lineal y consideremos el problema de valores a la frontera en la región  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \mathcal{R} \\ \alpha\varphi(\mathbf{x}) + \beta\partial\varphi/\partial n(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \partial\mathcal{R} \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $\alpha, \beta$  constantes. Ahora supongamos que la solución se puede expresar de la siguiente manera  $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(q_1)\varphi_2(q_2) \cdots \varphi_n(q_n)$  donde  $q_i$  son coordenadas curvilíneas ortogonales, además supongamos que al sustituir en (3.3) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i\varphi_i(q_i) &= \lambda_i w_i(q_i)\varphi_i & i = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= 0 \end{aligned}, \quad (3.4)$$

donde  $\lambda_i$  y  $w_i$  son el valor propio y la función de peso asociados al operador  $\mathcal{L}_i$ , definidos en el apéndice D. Si es posible realizar esta reducción, diremos que la ecuación (3.3) es separable en el sistema de coordenadas  $q_i$  y habremos logrado reducir la complejidad del problema. Existe sin embargo un posible inconveniente: la clase de funciones que se pueden expresar como producto de otras, es un conjunto muy pequeño y podría ser que ninguna de las funciones de este tipo satisfaga las condiciones de frontera. Para rescatar el método recordemos que  $\mathcal{L}$  es un operador lineal, entonces podemos construir una función más general

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda_i} A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n} \varphi_1(q_1; \lambda_1)\varphi_2(q_2; \lambda_2) \cdots \varphi_n(q_n; \lambda_n), \quad (3.5)$$

donde la suma corre sobre todos los valores posibles de  $\lambda_i$  que satisfagan la condición (3.4). La pregunta ahora es ¿Podemos escoger los coeficientes  $A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$  de tal manera que  $\varphi(\mathbf{x})$  satisfaga las condiciones de frontera en (3.3) y que la serie sea convergente? Afortunadamente en el caso  $\mathcal{L} = \Delta$  la respuesta a esta pregunta es sí. Si  $\mathcal{L} = \Delta$ , los operadores  $\mathcal{L}_i$  que se obtienen son operadores autoadjuntos de segundo orden y de acuerdo a la teoría de Sturm-Liouville, los conjuntos de soluciones  $\{\varphi_i(q_i; \lambda_i)\}$  a cada una de las ecuaciones (3.4) son ortogonales (o se pueden ortogonalizar) y completos. Por lo tanto si  $\varphi(\mathbf{x})$  es la solución al problema de valores a la frontera (3.3), ésta puede expresarse como en (3.5) con los coeficientes  $A_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$  calculados tomando el producto interior sucesivo

$$\left\langle \left\langle \cdots \left\langle \langle \varphi, \varphi_1 \rangle_1, \varphi_2 \right\rangle_2, \cdots \right\rangle_{n-1}, \varphi_n \right\rangle_n, \quad (3.6)$$

con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$  el producto interior definido en (D.5) del apéndice D, asociado al problema de valores propios (3.4) y que asegura la ortogonalidad de las funciones  $\{\varphi_i(q_i; \lambda_i)\}$  [16].

Separar la ecuación de Laplace no siempre es posible, depende del sistema de coordenadas que se utilice, el cual se escoge de acuerdo a la simetría del problema. Afortunadamente, la ecuación de Laplace es separable en los sistemas de coordenadas que se utilizan con más frecuencia en física. A continuación damos ejemplos concretos y al final de esta sección señalamos condiciones necesarias y suficientes sobre un sistema coordenado para que la ecuación de Laplace sea separable.

### 3.1.1.1. Coordenadas polares

En coordenadas polares  $(\rho, \phi)$  tenemos  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = \rho^1$  por lo que la ecuación de Laplace toma la forma

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \varphi = 0. \quad (3.7)$$

Proponiendo una solución separable  $\varphi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  y dividiendo (3.7) por  $\varphi$  obtenemos

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0, \quad (3.8)$$

ahora multiplicamos por  $\rho^2$

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (3.9)$$

y notamos que el lado izquierdo sólo depende de  $\rho$  mientras que el derecho sólo depende de  $\phi$ . La única manera de satisfacer la igualdad en todo punto es que ambas expresiones sean iguales a una constante  $C$ , entonces hemos logrado separar la ecuación de Laplace en el sistema de ecuaciones

$$\rho \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} - CR = 0, \quad (3.10a)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + C\Phi = 0. \quad (3.10b)$$

---

<sup>1</sup>De aquí en adelante  $\rho$  denota la magnitud del radio vector, no confundir con la densidad del flujo.

En general requerimos funciones univaluadas en  $\phi$  es decir  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ , lo que impone la restricción  $C = m^2$  con  $m \in \mathbb{Z}$  y las soluciones a la ecuación de Laplace son de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_m(\rho, \phi) &= (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} & m \neq 0, \\ \varphi_0(\rho, \phi) &= A_0 + B_0 \ln \rho & m = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

o una combinación lineal de éstas.

### 3.1.1.2. Coordenadas elípticas

En coordenadas elípticas  $(u, v)$  los factores de escala son  $h_1 = h_2 = f\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$ , entonces la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{1}{f^2 (\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \varphi = 0. \quad (3.12)$$

En estas coordenadas la ecuación de Laplace es más sencilla pues los factores de escala en  $u$  y en  $v$  son iguales. Proponiendo una solución separable  $\varphi(u, v) = U(u)V(v)$ , sustituyendo en (3.12) y dividiendo por  $\varphi$  obtenemos

$$\frac{d^2 U}{du^2} - m^2 U = 0, \quad (3.13a)$$

$$\frac{d^2 V}{dv^2} + m^2 V = 0; \quad (3.13b)$$

donde hemos supuesto  $V(v + 2\pi) = V(v)$  y por tanto  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces las soluciones a la ecuación (3.12) son de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_m(u, v) &= (A_m e^{mu} + B_m e^{-mu}) \begin{pmatrix} \cos mv \\ \sin mv \end{pmatrix} & m \neq 0 \\ \varphi_0(u, v) &= A_0 + B_0 u & m = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.1.1.3. Coordenadas bipolares

En coordenadas bipolares  $(\sigma, \tau)$  los factores de escala son  $h_1 = h_2 = a/(\cosh \tau - \cos \sigma)$ ; por lo tanto, la ecuación de Laplace toma la misma forma que en coordenadas elípticas, sólo es necesario remplazar el factor de escala correspondiente

$$\frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \varphi = 0. \quad (3.15)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, ahora con  $\varphi(\sigma, \tau) = \Sigma(\sigma)T(\tau)$ , obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2\Sigma}{d\sigma^2} + m^2\Sigma = 0, \quad (3.16a)$$

$$\frac{d^2T}{d^2\tau} - m^2T = 0; \quad (3.16b)$$

donde nuevamente hemos supuesto  $\Sigma(\sigma + 2\pi) = \Sigma(\sigma)$ . Entonces la ecuación (3.12) tiene soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_m(\sigma, \tau) &= (A_m e^{m\tau} + B_m e^{-m\tau}) \begin{pmatrix} \cos m\sigma \\ \sin m\sigma \end{pmatrix} & m \neq 0 \\ \varphi_0(\sigma, \tau) &= A_0 + B_0\tau & m = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.1.1.4. Condiciones suficientes y necesarias de separabilidad

Dado un sistema de coordenadas curvilineas ortogonales (en un espacio euclidiano)  $\{q_i\}_{i=1}^n$  la ecuación de Laplace en dichas coordenadas es separable si y sólo si es posible encontrar una matriz

$$S = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(q_1) & \Phi_{12}(q_1) & \cdots & \Phi_{1n}(q_1) \\ \Phi_{21}(q_2) & \Phi_{22}(q_2) & \cdots & \Phi_{2n}(q_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(q_n) & \Phi_{n2}(q_n) & \cdots & \Phi_{nn}(q_n) \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

donde  $\Phi_{ij}$  es una función que depende solamente de la coordenada  $q_i$  y  $S$  satisface

$$|S| \neq 0, \quad (3.19a)$$

$$\frac{h_i^2}{h_j^2} = \frac{M_{j1}}{M_{i1}}, \quad (3.19b)$$

$$\frac{H}{h_i^2} = \left( \prod_{k=1}^n f_k(q_k) \right) M_{i1}, \quad (3.19c)$$

donde  $M_{ij}$  es el cofactor de  $\Phi_{ij}$  y  $f_i$  son funciones que dependen solamente de la coordenada  $q_i$ . A la matriz  $S$  se le llama *matriz de Stäckel* y, si existe, entonces es posible encontrar una solución separable  $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_n$  para la ecuación de Laplace resolviendo el sistema de ecuaciones [33]

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{dq_i} f_i \frac{d\varphi_i}{dq_i} + \varphi_i \sum_{j=2}^n \lambda_j \Phi_{ij} = 0, \quad (3.20)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\lambda_j$  constante. En la práctica, las funciones  $\Phi_{ij}$  se determinan a partir de las ecuaciones (3.19b) y (3.19c). Como ejemplo encontremos la matriz de Stäckel en coordenadas polares cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ .

En estas coordenadas los factores de escala son  $h_\rho = h_z = 1$ ,  $h_\phi = \rho$ , sustituyendo en (3.19b) tenemos

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{M_{\phi\rho}}{M_{\rho\rho}}, \quad \rho^2 = \frac{M_{z\rho}}{M_{\phi\rho}}, \quad M_{\rho\rho} = M_{z\rho}. \quad (3.21)$$

Dado que los factores de escala no contienen las variables  $\phi$  y  $z$ , la segunda y tercer fila de  $S$  contienen sólo constantes con la restricción  $M_{\rho\rho} \neq 0$ , para satisfacer las condiciones anteriores. Escojamos por simplicidad  $\Phi_{\phi\phi} = \Phi_{zz} = 1$ ,  $\Phi_{\phi z} = \Phi_{z\phi} = 0$ , sustituyendo en  $S$  y usando las condiciones anteriores obtenemos

$$S = \begin{pmatrix} \Phi_{\rho\rho} & -\rho^{-2} & -1 \\ \Phi_{\phi\rho} & 1 & 0 \\ \Phi_{z\rho} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Ahora aplicamos la condición  $|S| = \Phi_{\rho\rho} + \Phi_{\phi\rho}/\rho^2 + \Phi_{z\rho} \neq 0$ . Una posible solución es  $\Phi_{\rho\rho} = \Phi_{\phi\rho} = 0$  y  $\Phi_{z\rho} = 1$  y la matriz de Stäckel es

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\rho^{-2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

A continuación determinamos las funciones  $f_i$  aplicando las condiciones (3.19c)

$$\rho = f_\rho f_\phi f_z, \quad \frac{1}{\rho} = f_\rho f_\phi f_z \left( \frac{1}{\rho^2} \right), \quad (3.24)$$

de donde  $f_\rho = \rho$  y  $f_\phi = f_z = 1$ . Finalmente sustituyendo en (3.20) obtenemos las ecuaciones

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dR}{d\rho} - \left( \lambda_z + \frac{\lambda_\phi}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (3.25a)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda_\phi \Phi = 0, \quad (3.25b)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \lambda_z Z = 0; \quad (3.25c)$$

en el caso  $z = \text{cte}$  éstas se reducen a las ecuaciones (3.10) con  $C = \lambda_\phi$ . Cabe señalar que la matriz de Stäckel para un sistema de coordenadas dado no es única. Matrices equivalentes se pueden construir por medio de operaciones elementales sobre las columnas de  $S$  sin alterar la primer columna, debido a su posición privilegiada.

En la siguiente sección estudiamos la ecuación de Poisson que es una generalización de la ecuación de Laplace. Para resolverla utilizamos el método de Green.

### 3.2. Ecuación de Poisson

Supongamos que se tiene un flujo invíscido e incompresible y, a diferencia del flujo considerado en la sección 2.1, con vorticidad no nula, es decir  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ . En este caso ya no es posible obtener el campo de velocidades a partir de un potencial escalar, pero debido al carácter solenoidal del campo de velocidades es posible encontrar un potencial vectorial  $\mathbf{A}$  tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Sustituyendo en la definición de vorticidad

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

y sabemos que siempre es posible añadir un vector irrotacional al potencial  $\mathbf{A}$  de manera que su divergencia se anule y el campo de velocidades permanezca inalterado. Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que el potencial es solenoidal<sup>2</sup>. En ese caso la ecuación anterior se reduce a

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (3.26)$$

Ésta es la *ecuación de Poisson* y para resolverla utilizaremos el método de Green. Como motivación recordemos que un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$M\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

y para resolverlo basta encontrar la matriz inversa  $M^{-1}$  (si existe) y multiplicar ambos lados de la ecuación, así la solución queda expresada como

$$\mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{b}.$$

La ecuación (3.26) tiene la forma de un sistema de ecuaciones lineales, entonces nos gustaría poder encontrar el operador inverso al Laplaciano, es decir un operador  $\mathcal{G}$  tal que

$$\mathbf{A} = \mathcal{G}(-\boldsymbol{\omega}), \quad (3.27)$$

o equivalentemente

$$\Delta \mathcal{G}(-\boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega}. \quad (3.28)$$

---

<sup>2</sup>A este proceso de redefinir el potencial vectorial se le llama escoger una norma, en este caso escogemos la norma transversal, es decir, el potencial vectorial se puede escribir como el rotacional de otro campo vectorial.

Tomando en cuenta que el Laplaciano es un operador diferencial,  $\mathcal{G}$  debe ser un operador integral, es decir,

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{x}') dV'.$$

Considerando esto y la linealidad de  $\Delta$ , tenemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}(-\boldsymbol{\omega}) &= -\Delta \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' \\ &= -\int_{\mathcal{R}} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' = -\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde la segunda igualdad se da porque  $\Delta$  opera sobre  $\mathbf{x}$ . La última integral sugiere la definición

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.30)$$

con  $\delta$  la delta de Dirac. A  $G$  se le llama función de Green y satisface las mismas condiciones de frontera que la solución a la ecuación (3.26) que, en términos de  $G$  es

$$\mathbf{A} = -\int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV'. \quad (3.31)$$

Finalmente, el campo de velocidades se obtiene tomando el rotacional de la ecuación anterior

$$\mathbf{u} = -\int_{\mathcal{R}} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV', \quad (3.32)$$

que es la *integral de Biot-Savart*. En el siguiente capítulo daremos ejemplos concretos de cómo determinar la función de Green [19].

### 3.3. Operador de Laplace-Beltrami $\Delta_B$

De aquí en adelante consideraremos sistemas bidimensionales. El primer problema a considerar es el de encontrar las funciones propias del Laplaciano en 2D, es decir las soluciones a la ecuación

$$\Delta \varphi = \lambda \varphi. \quad (3.33)$$

Para resolver la ecuación expresamos  $\Delta$  en coordenadas esféricas  $(\theta, \phi)$ . Usando la ecuación (3.2) y los factores de escala del apéndice B

$$\Delta_B = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.34)$$

Escribimos el subíndice  $B$  pues este operador recibe el nombre de *operador esférico de Laplace-Beltrami*. En estas coordenadas la ecuación de valores propios admite una solución separable  $\varphi(\theta, \phi) = P(\theta)\Phi(\phi)$ , y sustituyendo en (3.34) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} &= -m^2\Phi, \\ \sin\theta \frac{d}{d\theta} \sin\theta \frac{dP}{d\theta} + (-\lambda - m^2)P &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos supuesto  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ . Las soluciones a la primera ecuación son de la forma  $\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi}$ . La segunda ecuación la transformamos mediante el cambio de variable  $x = \cos\theta$  para obtener

$$(1-x^2) \frac{d^2P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left(-\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P = 0, \quad (3.36)$$

que es la ecuación asociada de Legendre. Si tomamos  $\lambda = -\ell(\ell + 1)$ ,  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , las soluciones son los polinomios asociados de Legendre

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell. \quad (3.37)$$

Las funciones propias del operador de Laplace-Beltrami son entonces los armónicos esféricos

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = N_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (3.38)$$

donde  $N_{\ell m}$  es un coeficiente de normalización [23].

### 3.4. Invariancia de soluciones armónicas bajo transformaciones conformes

Por último discutiremos una propiedad de las funciones armónicas que nos permite construir nuevas soluciones a la ecuación de Laplace. Supongamos que se tienen dos regiones  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$  y deseamos resolver la ecuación de Laplace bajo las mismas condiciones de frontera en ambas regiones, además supongamos que la geometría de  $\mathcal{R}$  nos permite encontrar fácilmente la solución  $\varphi$ , mientras que la geometría de  $\mathcal{R}'$  no, pero que podemos mapear  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ .

Ahora, ¿cuál es la utilidad de poder mapear una región en otra? Bien, si pudiéramos encontrar una función  $f$  que no sólo mapeara  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{R}'$ , sino que también preserve las propiedades de  $\varphi$ , entonces  $f(\varphi)$  sería la solución en  $\mathcal{R}'$  y nos ahorraríamos la tarea de resolver la ecuación en  $\mathcal{R}'$ . Por fortuna, las funciones armónicas tienen la propiedad de ser invariantes bajo transformaciones conformes y, en dos dimensiones, siempre es posible



aproximar una región por un polígono y éste a su vez mapearlo al semiplano superior en el plano complejo, utilizando el *mapeo de Schwarz-Christoffel* [28].

A continuación mostraremos que las funciones armónicas son invariantes bajo transformaciones conformes y para ello utilizamos funciones de variable compleja, que constituyen el lenguaje adecuado para hablar de transformaciones conformes. Comenzamos por definir la siguiente representación del operador gradiente

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.39)$$

Con esta definición la expresión para el operador de Laplace es

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \nabla \nabla^* = \nabla^* \nabla. \quad (3.40)$$

Ahora, supongamos que la región  $\mathcal{R}$  en el plano complejo  $z = x + iy$  se puede mapear a la región  $\mathcal{R}'$  en el plano  $w = u + iv$  mediante la transformación

$$w = f(z),$$

con  $f$  analítica y por tanto conforme (apéndice C). Bajo esta transformación la expresión para  $\nabla$  en el  $w$ -plano es

$$\begin{aligned} \nabla_z &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + i \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} - i \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) = f'^* \nabla_w \end{aligned} \quad (3.41)$$

y sustituyendo en la expresión para el Laplaciano tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \nabla_z \nabla_z^* = \nabla_z (f' \nabla_w^*) = (\nabla_z f') \nabla_w^* + f' \nabla_z \nabla_w^* \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \nabla_w^* + f' f'^* \nabla_w \nabla_w^* \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \nabla_w^* + |f'|^2 \Delta_w, \end{aligned} \quad (3.42)$$

finalmente dado que  $f$  es conforme se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

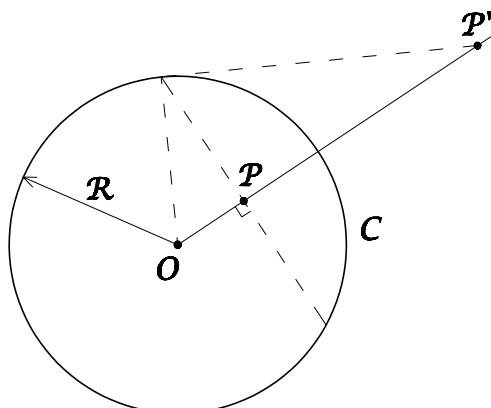


Figura 3.1: Construcción geométrica del punto  $P'$  inverso a  $P$  sobre la circunferencia  $C$ .

Entonces si  $\varphi(z)$  se mapea en  $\varphi'(w)$  bajo  $f$  tenemos

$$\Delta_z \varphi(z) = |f'|^2 \Delta_w \varphi'(w) \quad (3.43)$$

y por tanto si  $\varphi(z)$  es armónica,  $\varphi'(w)$  también lo es. Para finalizar esta sección daremos dos ejemplos de transformaciones conformes que nos serán útiles en el capítulo siguiente.

### 3.4.1. Inversión Geométrica

Es bien sabido que si reflejamos una función armónica sobre un plano, la función que obtenemos es armónica, en esto se basa el método de imágenes [24]. Este método se puede generalizar en el caso de dos dimensiones a *reflexiones* sobre curvas más generales, el caso más sencillo y que se estudia en los cursos básicos de electromagnetismo es la reflexión sobre circunferencias.

La reflexión sobre una circunferencia  $C$  recibe el nombre especial de inversión sobre  $C$  y se define de la siguiente manera: dado un punto  $P$  y una circunferencia  $C$  con centro  $O$  y radio  $R$ , el punto  $P'$  inverso a  $P$ , es aquél que se encuentra sobre la recta  $OP$  y a una distancia  $|OP'| = R^2/|OP|$  3.1. En forma vectorial, un punto  $\mathbf{x}$  y su punto inverso  $\mathbf{x}'$  satisfacen

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = R^2,$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es la posición del centro de la circunferencia. El lado derecho lo podemos reescribir de la siguiente forma

$$R^2 = R^2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2},$$

sustituyendo en la ecuación anterior y despejando  $\mathbf{x}'$  obtenemos

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \frac{R^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}. \quad (3.44)$$

Por diferenciación podemos comprobar fácilmente que este mapeo es conforme<sup>3</sup>. Puede demostrarse también que la inversión mapea círculos en círculos (considerando a las rectas como círculos de radio infinito), mapeando el interior de  $\mathcal{C}$  al exterior de la misma y viceversa. Para terminar demostraremos que una reflexión en un plano es un caso límite de una inversión. Basta demostrarlo para un caso particular pues el caso general se sigue de componer con una traslación y una rotación, por lo que, sin pérdida de generalidad, consideremos la reflexión en el eje vertical y sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia con centro en  $\hat{\mathbf{x}}R$  y radio  $R$ . En este caso la ecuación (3.44) se reduce a

$$(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}}{R}$$

y en el límite cuando  $R$  tiende a infinito obtenemos

$$\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.45a)$$

Por otra parte, tomando el producto punto de (3.44) con  $\hat{\mathbf{y}}$  y usando el hecho de que  $R^2/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow 1$  si  $R \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (3.45b)$$

por tanto  $\mathbf{x}'$  es la reflexión de  $\mathbf{x}$  en el eje vertical.

### 3.4.2. Proyección Estereográfica

De la misma manera que una reflexión sobre una recta en dos dimensiones se puede generalizar a la reflexión sobre un plano en tres dimensiones, la inversión en una circunferencia se puede generalizar a la inversión en una esfera y la relación entre un punto  $\mathbf{x}$  y su inverso  $\mathbf{x}'$  está dada por la ecuación (3.44), donde ahora  $\mathbf{x}_0$  es el centro de la esfera y  $R$  su radio. De manera análoga a la inversión en un círculo, la inversión en una esfera mapea esferas en esferas y, en particular, mapea planos en esferas que tocan el centro de la esfera de inversión. Esta propiedad de la inversión sugiere una manera de identificar un plano con una esfera, lo cual nos será útil en el siguiente capítulo para construir soluciones a la ecuación de Laplace sobre la esfera, a partir de soluciones en el plano.

Ahora describimos la inversión específica que utilizaremos. Denotemos por  $\mathcal{P}$  al plano  $\mathbb{R}^2$  y por  $\mathcal{K}$  a la esfera de inversión con radio  $R = \sqrt{2}$ ; si centramos  $\mathcal{K}$  en  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{z}}$  entonces  $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \mathcal{S}^1$  y la restricción de la inversión a  $\mathcal{P}$  es un mapeo  $\Pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}^2$ , donde  $\mathcal{S}^1$  y

<sup>3</sup>En realidad es un mapeo anticonforme, es decir preserva la magnitud de los ángulos pero invierte su orientación.

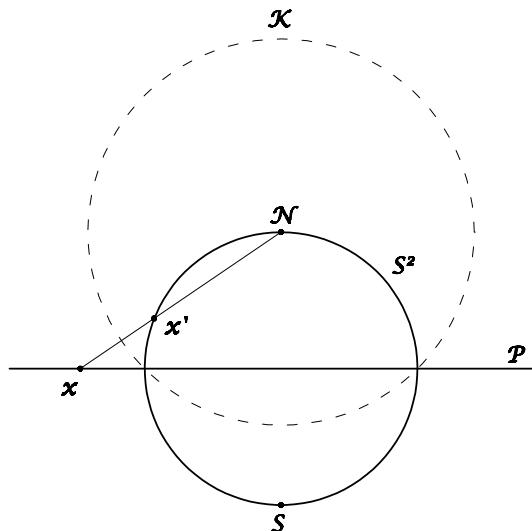


Figura 3.2: Construcción geométrica de la proyección estereográfica. La proyección se puede ver como la inversión del plano  $\mathcal{P}$  sobre la esfera  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{S}^2$  son el círculo unitario y la esfera unitaria respectivamente (figura 3.2). A  $\Pi$  se le llama proyección estereográfica y utilizando la ecuación (3.44) encontramos que las coordenadas cartesianas de un punto  $\mathbf{x}'$  inverso a  $\mathbf{x} = x\hat{x} + y\hat{y}$  son

$$x' = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (3.46a)$$

$$y' = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (3.46b)$$

$$z' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (3.46c)$$

Puede verificarse directamente que  $|\mathbf{x}'| = 1$  lo cual demuestra la afirmación  $\Pi(\mathcal{P}) = \mathcal{S}^2$ . Una expresión más conveniente para la proyección estereográfica se obtiene escribiendo a  $\mathbf{x}$  en coordenadas polares  $(\rho, \phi)$  y a  $\mathbf{x}'$  en coordenadas esféricas  $(\theta', \phi')$ . Notemos primero que  $\phi = \phi'$  por definición de la inversión en  $\mathcal{K}$ , entonces sólo hace falta encontrar cómo se transforma la coordenada radial; para ello expresemos (3.46a)-(3.46c) de la siguiente forma

$$\sin \theta' \cos \phi' = \frac{2\rho \cos \phi}{\rho^2 + 1},$$

$$\sin \theta' \sin \phi' = \frac{2\rho \sin \phi}{\rho^2 + 1},$$

$$\cos \theta' = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1};$$

y usando  $\phi = \phi'$  obtenemos las expresiones

$$\sin \theta' = \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}, \quad (3.47a)$$

$$\cos \theta' = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (3.47b)$$

Ahora usamos las identidades trigonométricas

$$\sin \theta' = 2 \sin^2 (\theta'/2) \cot (\theta'/2) = (1 - \cos \theta') \cot (\theta'/2)$$

y sustituyendo las expresiones para  $\sin \theta'$  y  $\cos \theta'$  obtenemos

$$\rho = \cot (\theta'/2) \quad (3.48)$$

que es la expresión deseada. Finalmente, usando las expresiones  $\theta'(\rho, \phi) = 2 \cot^{-1} \rho$  y  $\phi' = \phi$ , podemos comprobar fácilmente que la proyección estereográfica es conforme.

## Capítulo 4

# Vórtices armónicos

En este capítulo desarrollamos un método para obtener los campos de velocidad producidos por una distribución de vorticidad restringida a un plano y a una superficie esférica. En el proceso definimos los conceptos de líneas de corriente, función de corriente y hojas de vorticidad o vórtices armónicos. Discutimos acerca de las condiciones de frontera que debe satisfacer un flujo a lo largo de una hoja de vorticidad, construimos un conjunto de vórtices armónicos en el plano y a partir de estos obtenemos el desarrollo multipolar de la función de Green en coordenadas polares. Finalmente, aprovechamos los resultados del capítulo anterior para construir un conjunto de vórtices armónicos sobre la esfera, así como el desarrollo multipolar de la función de Green en coordenadas esféricas, utilizando proyección estereográfica.

### 4.1. Potencial de velocidad

En la sección 3.2 encontramos que para un flujo invíscido e incompresible el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  se puede expresar como el rotacional de un campo vectorial  $\mathbf{A}$ , es decir,

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

En coordenadas curvilíneas ortogonales  $\{q_1, q_2, q_3\}$ , el campo de velocidades de un flujo bidimensional es una función  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(q_1, q_2)$ , entonces el potencial vectorial debe ser una función  $\mathbf{A} = A(q_1, q_2)\hat{\mathbf{q}}_3$ . Por lo tanto la expresión para el campo de velocidades en estas coordenadas es

$$\mathbf{u} = \left( \frac{1}{h_2 h_3} \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{h_1 h_3} \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \right) h_3 A_3. \quad (4.1)$$

Esta expresión es útil cuando tratamos flujos sobre superficies con una geometría que puede ser descrita por un sistema de coordenadas curvilineo, por ejemplo planos, esferas, conos, etc.

### 4.1.1. Función de corriente

En ocasiones es útil describir el campo de velocidades en términos de sus líneas de campo, las cuales llamamos líneas de corriente y están descritas por la ecuación diferencial

$$\frac{h_1 dq_1}{h_2 dq_2} = \frac{u_1}{u_2}, \quad (4.2)$$

siendo  $u_1, u_2$  las componentes del campo de velocidades. Sustituyendo (4.1) en (4.2) tenemos

$$\frac{h_1 dq_1}{h_2 dq_2} = -\frac{h_1 \partial(h_3 A_3) / \partial q_2}{h_2 \partial(h_3 A_3) / \partial q_1}$$

y reescribiendo esta ecuación de la siguiente forma

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_1} h_1 dq_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_2} h_2 dq_2 = d(h_3 A_3) = 0,$$

la solución de (4.2) que pasa por el punto  $(q_1^0, q_2^0)$  es

$$h_3 A_3(q_1, q_2) = h_3 A_3(q_1^0, q_2^0) = Cte. \quad (4.3)$$

A la función  $\psi(q_1, q_2) \equiv h_3 A_3(q_1, q_2)$  se le llama función de corriente, pues de acuerdo a (4.3) sus curvas de nivel coinciden con las líneas de corriente. En los casos particulares en que  $h_3 = 1$  el potencial vectorial es  $\mathbf{A} = \psi \hat{\mathbf{q}}_3$ .

## 4.2. Vórtices armónicos

En el capítulo anterior vimos que el campo de velocidades puede describirse en términos de la distribución de vorticidad por medio de la ecuación (3.32). Esta es la solución general, pero en ocasiones la vorticidad se concentra a lo largo de una curva  $\mathcal{C}$  que divide el espacio en dos regiones de flujo irrotacional, entonces es más conveniente resolver la ecuación de Laplace para el potencial vectorial en ambas regiones y después pegar las soluciones a lo largo de  $\mathcal{C}$ . Este tipo de flujos ocurren por ejemplo, cuando se introduce un remo en el agua, el fluido a ambos lados del remo circula en direcciones opuestas y al retirar el remo, el espacio que éste ocupaba se llena con fluido que presenta un cambio abrupto en su velocidad tangencial. Como veremos adelante, esto genera lo que llamamos una *hoja de vorticidad*, ésta es inestable y colapsa formando un vórtice. Este proceso es el mismo que da lugar a los remolinos que observamos cuando introducimos una cuchara en una taza de café [28]. Debido a que la función de corriente que da lugar a estas estructuras es armónica en ambas regiones, llamaremos a estos flujos *vórtices armónicos*.

La manera en que se pegan las soluciones a lo largo de  $\mathcal{C}$  debe conservar las propiedades del flujo, esto da lugar a condiciones de frontera tanto para el potencial como para el campo de velocidades. En general pueden determinarse las condiciones de frontera en un punto

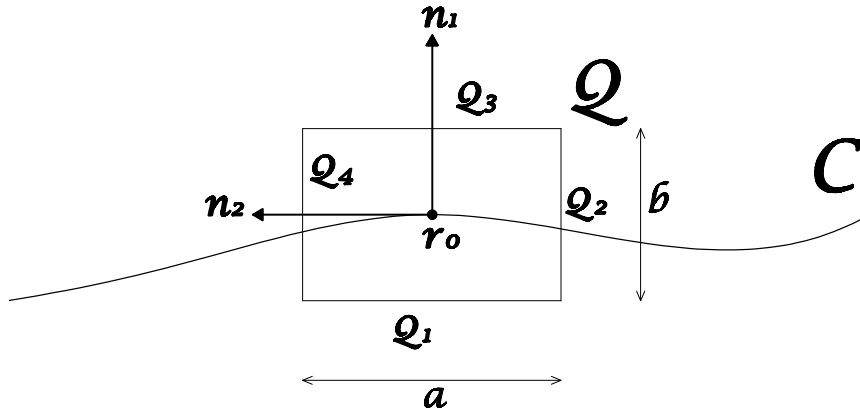


Figura 4.1: El circuito  $\mathcal{Q}$  tiene lados paralelos a las direcciones de los vectores normal y tangente ( $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  respectivamente) a la curva  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{r}_0$ .

$\mathbf{r}_0 \in \mathcal{C}$  para un campo vectorial  $\mathbf{F}$  cualquiera, calculando su flujo y circulación a lo largo de un circuito rectangular  $\mathcal{Q}$ , centrado en el punto  $\mathbf{r}_0$  como se muestra en la figura 4.1, donde los vectores unitarios  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  son los vectores normal y tangente a  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{r}_0$ , y definimos  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ .

Primero calculamos el flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl &= - \int_{\mathcal{Q}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dl - \int_{\mathcal{Q}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dl \\ &+ \int_{\mathcal{Q}_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dl + \int_{\mathcal{Q}_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dl, \end{aligned}$$

utilizando el teorema del valor medio para la integral tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl &= a(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_3) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_1)) \cdot \mathbf{n}_1 \\ &+ b(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_4) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_2)) \cdot \mathbf{n}_2, \end{aligned}$$

con  $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{Q}_i$  y  $a, b$  denotan la longitud de los lados de  $\mathcal{Q}$ . Por otra parte, utilizando el teorema de la divergencia y denotando por  $\mathcal{A}$  a la superficie encerrada por  $\mathcal{Q}$ , tenemos

$$\oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl = \int_{\mathcal{A}} \nabla \cdot \mathbf{F} dS = ab \nabla \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}),$$

con  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}$ . Finalmente multiplicando por  $a^{-1}$  y tomando el límite cuando  $a, b$  tienden a cero de tal manera que  $b/a \rightarrow 0$ , obtenemos



$$(\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-)\Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{n}_1 = \lim_{b \rightarrow 0} (b \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)), \quad (4.4)$$

donde el superíndice  $-$  indica que  $\boldsymbol{\xi}_3 \rightarrow \mathbf{r}_0$  por el lado de  $\mathcal{C}$  hacia donde apunta  $-\mathbf{n}_1$ , mientras que el superíndice  $+$  indica que  $\boldsymbol{\xi}_1 \rightarrow \mathbf{r}_0$  por el lado al que apunta  $\mathbf{n}_1$ . Cuando tratemos con curvas cerradas adoptaremos la convención de llamar exterior de la curva al lado al que apunta  $\mathbf{n}_1$  e interior al lado al que apunta  $-\mathbf{n}_1$ . La ecuación (4.4) es la condición de frontera para las componentes normales de  $\mathbf{F}$  a un lado y otro de  $\mathcal{C}$ , en el punto  $\mathbf{r}_0$ .

Ahora calculamos la circulación de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\mathcal{Q}$ . Denotando por  $\mathbf{t}$  al vector unitario tangente a  $\mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} dl &= a(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_3) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_1)) \cdot \mathbf{n}_2 \\ &+ b(\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_4) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_2)) \cdot \mathbf{n}_1, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado nuevamente el teorema del valor medio para la integral y  $\boldsymbol{\xi}_i$  es un punto en  $\mathcal{Q}_i$ . Por otra parte, utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{\mathcal{A}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = ab \nabla \times \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}_3,$$

con  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}$ . Repitiendo el proceso límite que utilizamos para obtener la condición de frontera para las componentes normales obtenemos

$$(\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-)\Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{n}_2 = \lim_{b \rightarrow 0} (b \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)) \cdot \mathbf{n}_3. \quad (4.5)$$

Para obtener una expresión más conveniente sustituimos  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1$  en (4.5) y utilizamos la identidad  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$  para obtener

$$(\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-)\Big|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{n}_1 = \lim_{b \rightarrow 0} (b \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}_0)); \quad (4.5a)$$

(4.5) y (4.5a) expresan las condiciones de frontera para las componentes tangenciales de  $\mathbf{F}$  a un lado y otro de  $\mathcal{C}$  en el punto  $\mathbf{r}_0$ .

Aplicando (4.4) y (4.5a) a  $\mathbf{u}$ , obtenemos las condiciones de frontera para el campo de velocidades de un flujo invíscido e incompresible

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)\Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.6a)$$

$$(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)\Big|_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.6b)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega}$  es una densidad lineal de circulación y apunta en la misma dirección que  $\boldsymbol{\omega}$ , y  $\mathbf{n}$  denota el vector normal a  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{r}_0$ . Entonces, de acuerdo a (4.6a) y (4.6b), las componentes normales del campo de velocidades son continuas mientras que las componentes

tangenciales son discontinuas y la discontinuidad es una medida de la circulación en la frontera.

Por último, aplicando (4.4) y (4.5) a  $\mathbf{A}$  y considerando que  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  y  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}_3 = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-) \Big|_{r_0} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-) \Big|_{r_0} \times \mathbf{n} &= 0, \end{aligned}$$

o de manera más compacta

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}^-(\mathbf{r}_0), \quad (4.8)$$

es decir, el potencial vectorial es continuo a lo largo de la frontera.

### 4.3. Vórtices armónicos sobre un plano

El primer ejemplo que estudiamos es un flujo en una superficie plana, dividido por una circunferencia de radio  $\rho_0$  centrada en el origen. En este caso utilizamos coordenadas polares  $(\rho, \phi)$ . El campo de potencial es una suma (tal vez infinita) de las funciones (3.11). Exigiendo que el potencial sea regular en todo punto tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m^i &= C_m^i \rho^m \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}} & \rho < \rho_0, \\ \mathbf{A}_m^e &= C_m^e \rho^{-m} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}} & \rho > \rho_0, \end{aligned}$$

para  $m \neq 0$ , y

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^i &= C_0^i & \rho < \rho_0, \\ \mathbf{A}_0^e &= C_0^e \ln \rho & \rho > \rho_0, \end{aligned}$$

cuando  $m = 0$ . Los superíndices  $i, e$  denotan que se trata del campo en el interior y exterior de la frontera respectivamente. Para determinar los coeficientes utilizamos la continuidad del potencial en la frontera  $\rho = \rho_0$

$$\begin{aligned} C_m^e &= C_m^i \rho_0^{2m} & m \neq 0, \\ C_0^e &= \frac{C_0^i}{\ln \rho_0} & m = 0, \end{aligned}$$

de donde el potencial es

$$\mathbf{A}_m(\rho, \phi) = C_m \left( \rho_0 \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.9a)$$

para  $m \neq 0$  y

$$\mathbf{A}_0(\rho) = C_0 \frac{\ln \rho_{>}}{\ln \rho_0} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.9b)$$

para  $m = 0$ , con  $\rho_{<} = \min\{\rho, \rho_0\}$ ,  $\rho_{>} = \max\{\rho, \rho_0\}$  y hemos omitido el superíndice  $i$ . Ahora utilizamos la ecuación (4.1) para obtener el campo de velocidades

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^i &= mC_m \rho^{m-1} \begin{pmatrix} -\hat{\rho} \sin m\phi - \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\rho} \cos m\phi - \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_m^e &= mC_m \frac{\rho_0^{2m}}{\rho^{m+1}} \begin{pmatrix} -\hat{\rho} \sin m\phi + \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\rho} \cos m\phi + \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^i &= 0, \\ \mathbf{u}_0^e &= -\hat{\phi} \frac{C_0}{\rho \ln \rho_0}. \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Nótese la continuidad de las componentes normales a la frontera en  $\rho = \rho_0$ . Por otra parte, la discontinuidad en las componentes tangenciales nos da la densidad lineal de circulación

$$\mathbf{\Omega}_m = 2mC_m \rho_0^{m-1} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}, \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = -\frac{C_0}{\rho_0 \ln \rho_0} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.11b)$$

Finalmente las líneas de corriente para  $m \neq 0$  están dadas por

$$\rho^m \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} = \rho_0^m \begin{pmatrix} \cos m\phi_0 \\ \sin m\phi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.12a)$$

para  $\rho < \rho_0$  y

$$\rho^{-m} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} = \rho_0^{-m} \begin{pmatrix} \cos m\phi_0 \\ \sin m\phi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.12b)$$

para  $\rho > \rho_0$ , con  $\phi_0$  un ángulo arbitrario. Por otra parte, para  $m = 0$ , en el interior no hay líneas de corriente y en el exterior son circunferencias concéntricas.

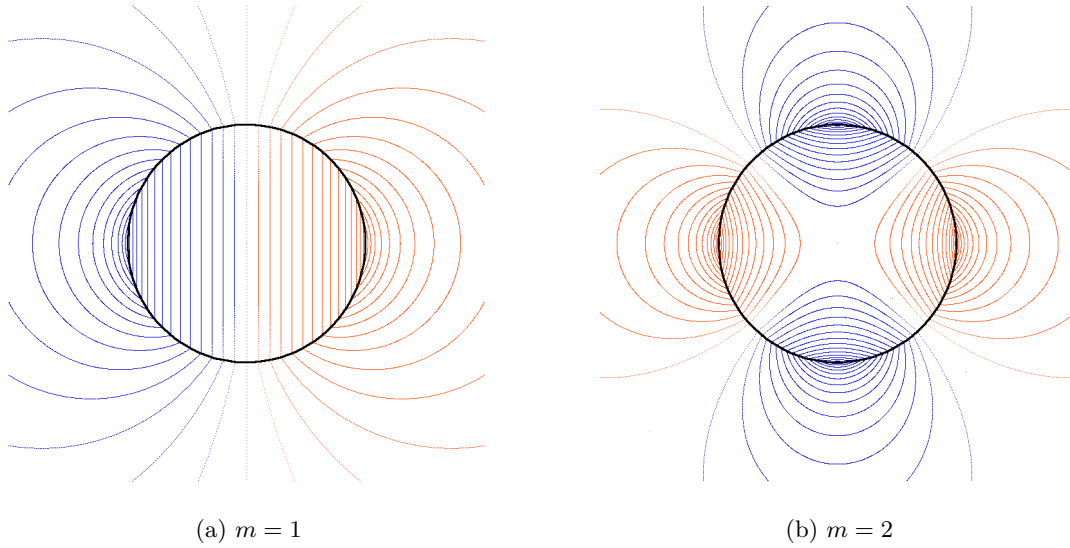


Figura 4.2: Las líneas de corriente de color azul corren en sentido antihorario mientras que las de color rojo corren en sentido horario.

En la figura 4.2 ilustramos los campos bipolar y cuadrupolar que corresponden a  $m = 1$  y  $m = 2$  respectivamente. En el caso dipolar las líneas de corriente en el interior son de la forma  $\rho \cos \phi = x = cte$ , es decir, son líneas paralelas al eje coordenado vertical; por otra parte, las líneas de corriente en el exterior son de la forma  $\rho^{-1} \cos \phi = cte$ , multiplicando por  $\rho^2$  y denotando la constante por  $1/2a$  tenemos

$$\rho \cos \phi = x = a\rho^2 = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2),$$

reordenando los términos y completando el cuadrado en  $x$  obtenemos

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Por lo tanto tanto las líneas de corriente en el exterior son circunferencias de radio  $a$ , centradas en  $a\hat{x}$ . De acuerdo a (4.12b),  $2a = \rho_0 \sec \phi_0$ , tomando  $\rho_0 = 1$  por simplicidad, tenemos que la línea de corriente que pasa por el punto  $\cos \phi_0 \hat{x} \pm \sin \phi_0 \hat{y}$  está dada por

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi_0 & \rho &< 1, \\ \left(x - \frac{\sec \phi_0}{2}\right)^2 &= \frac{\sec^2 \phi_0}{4} & 1 &< \rho. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para el caso cuadrupolar, las líneas de corriente en el interior son de la forma  $\rho^2 \cos 2\phi = \rho^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = x^2 - y^2 = cte$ , es decir, son hipérbolas cuadradas con los ejes coor-

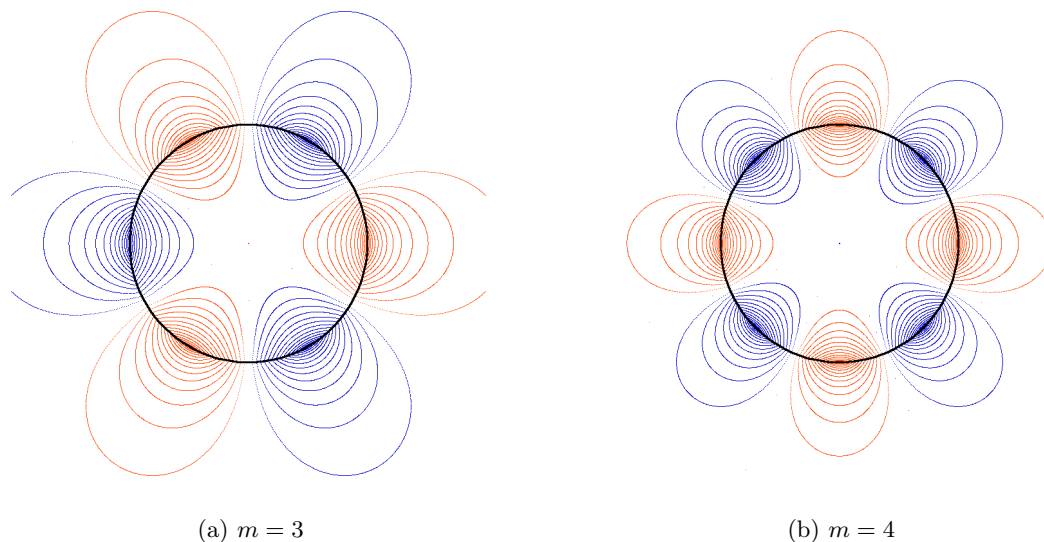


Figura 4.3: Al igual que antes, las líneas de color azul corren en sentido antihorario mientras que las rojas corren en sentido horario.

denados como asíntotas. De acuerdo a (4.12a) la constante es  $\cos 2\phi_0$  donde nuevamente hemos tomado  $\rho_0 = 1$ . Para el exterior es más complicado decir cual es la forma de las líneas de corriente, pero sabemos que son curvas de grado 4 dadas por

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \cos 2\phi_0.$$

Para  $m$ 's más grandes obtenemos curvas de grado superior y es complicado identificarlas, lo más conveniente es utilizar una computadora para graficarlas. Por ejemplo, las líneas de corriente en la figura 4.3 se graficaron con *GNU-plot*, utilizando el código del apéndice E.

### 4.3.1. Función de Green

En esta sección determinamos la función de Green para el operador de Laplace en coordenadas polares. Es importante mencionar que la forma final de la función de Green depende de las condiciones de frontera del problema que se desea resolver. Por definición, la función de Green satisface la ecuación

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

y en coordenadas polares, el lado derecho toma la forma

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi').$$

El último factor  $\delta$  en el lado derecho de esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')},$$

ya que las funciones  $\{\exp(im\phi)\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  constituyen un conjunto completo [16]. Aprovechando esto, podemos expresar a la función de Green en términos de estas funciones, como una serie

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\rho, \rho') e^{im(\phi - \phi')}, \quad (4.14)$$

aplicando el operador de Laplace encontramos

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_m(\rho, \rho') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho'), \quad (4.15a)$$

y para cualquier punto con  $\rho \neq \rho'$  tenemos

$$\left( \rho \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - m^2 \right) f_m(\rho, \rho') = 0, \quad (4.15b)$$

por lo tanto  $f_m$  es de la forma

$$f_m(\rho, \rho') = \begin{cases} A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} & \rho < \rho' \\ A'_m \rho^m + B'_m \rho^{-m} & \rho > \rho' \end{cases}, \quad (4.16a)$$

para  $m \neq 0$ , y

$$f_0(\rho, \rho') = \begin{cases} A_0 \ln \rho + B_0 & \rho < \rho' \\ A'_0 \ln \rho + B'_0 & \rho > \rho' \end{cases}, \quad (4.16b)$$

cuando  $m = 0$ . Para determinar los coeficientes aplicamos condiciones de frontera: exijamos por ejemplo que  $G$  sea regular en todo punto y continua en  $\rho = \rho'$ , entonces

$$f_m(\rho, \rho') = C_m \begin{pmatrix} \rho_{<} \\ \rho_{>} \end{pmatrix}^m, \quad (4.17a)$$

$$f_0(\rho, \rho') = C_0 \frac{\ln \rho_{>}}{\ln \rho'}, \quad (4.17b)$$

donde ahora  $\rho_{<} = \min\{\rho, \rho'\}$ ,  $\rho_{>} = \max\{\rho, \rho'\}$ . Sólo hace falta determinar los coeficientes  $C_m$ , para ello multiplicamos (4.15a) por  $\rho$  e integramos de  $\rho' + \varepsilon$  a  $\rho' - \varepsilon$

$$\int_{\rho' - \varepsilon}^{\rho' + \varepsilon} \left( \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho} \right) f_m d\rho = \left[ \rho \frac{df_m}{d\rho} \right]_{\rho' - \varepsilon}^{\rho' + \varepsilon} - m^2 \left[ \frac{f_m}{\rho} \right]_{\rho' - \varepsilon}^{\rho' + \varepsilon} = 1. \quad (4.18)$$

Ahora tomamos el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  y usamos la continuidad de  $G$  en  $\rho = \rho'$ , con lo que obtenemos

$$\left. \frac{df_m}{d\rho} \right|_+ - \left. \frac{df_m}{d\rho} \right|_- = \frac{1}{\rho'}, \quad (4.19)$$

donde los signos  $+$ ,  $-$  denotan que los límites tienden por la derecha y por la izquierda de  $\rho'$ , por lo tanto para el primer término se tiene  $\rho_{<} = \rho'$ ,  $\rho_{>} = \rho$  y para el segundo  $\rho_{<} = \rho$ ,  $\rho_{>} = \rho'$ . Sustituyendo en (4.17a) y (4.17b) encontramos

$$C_m = -\frac{1}{2m}, \quad (4.20a)$$

$$C_0 = \ln \rho', \quad (4.20b)$$

así, encontramos finalmente

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \rho_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right). \quad (4.21)$$

Podemos encontrar otra expresión para la función de Green si trasladamos el origen a  $\mathbf{x}'$ ; bajo dicha transformación tenemos

$$\Delta G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r), \quad (4.22)$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  y el factor de  $2\pi$  aparece pues la coordenada angular está indefinida [19]. Notemos que el lado derecho de (4.22) sólo depende de la distancia radial  $r = |\mathbf{r}|$ , entonces  $G$  debe ser una función de  $r$  solamente. Sustituyendo en (4.22) tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} G(r) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (4.23)$$

y para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$  tenemos

$$G(r) = C \ln r, \quad (4.24)$$

donde hemos omitido el término constante. Para determinar el coeficiente  $C$  integramos (4.22) sobre un disco de radio  $R$  centrado en  $\mathbf{x}'$ , con lo que obtenemos

$$\int_{r \leq R} \Delta G(r) dV' = \int_0^{2\pi} \left. \frac{dG}{dr} \right|_R R d\phi = 2\pi C = 1, \quad (4.25)$$

por lo que  $C = 1/2\pi$ . Entonces la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.26)$$

y sustituyendo en (4.21) obtenemos la expansión multipolar

$$\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \rho_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right). \quad (4.27)$$

A continuación damos un ejemplo de como utilizar la expansión multipolar de la función de Green (4.21), para determinar el potencial de velocidad de una distribución de vorticidad invariante bajo rotaciones.

### 4.3.2. Vórtice de Rankine

Supongamos que se tienen un flujo con distribución de vorticidad  $\omega(\rho)$ , que sólo depende de la distancia radial al origen del sistema de coordenadas. En este caso el potencial de velocidad es invariante bajo rotaciones en torno al origen, entonces  $A(\rho, \phi) = A(\rho, 0)$  y por lo tanto, usando (4.21) tenemos

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi) &= - \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(\rho')}{2\pi} \left( \ln \rho_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right) d\phi' \rho' d\rho' \\ &= - \int_0^{\infty} \omega(\rho') \ln \rho_{>} \rho' d\rho' \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(\rho')}{2\pi m^2} \sin(m(\phi - \phi')) \Big|_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \rho' d\rho', \end{aligned}$$

evaluando en  $\phi = 0$  el segundo término en la última expresión se anula y obtenemos

$$\begin{aligned} A(\rho, \phi) &= A(\rho) = - \int_0^{\infty} \omega(\rho') \ln \rho_{>} \rho' d\rho' \\ &= - \int_0^{\rho} \omega(\rho') \ln \rho \rho' d\rho' - \int_{\rho}^{\infty} \omega(\rho') \ln \rho' \rho' d\rho'. \end{aligned} \quad (4.28)$$

El ejemplo más sencillo en el que se encuentra una distribución de vorticidad invariante bajo rotaciones es el *vórtice de Rankine* que es un modelo inocente de un huracán. El vórtice de Rankine tiene la siguiente distribución de vorticidad

$$\omega(\rho) = \begin{cases} \omega_0 & \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \rho_0 < \rho \end{cases}, \quad (4.29)$$

donde  $\rho_0$  es una constante. Sustituyendo (4.29) en (4.28) tenemos



$$\begin{aligned}
A(\rho) &= -\omega_0 \left[ \ln \rho \frac{\rho^2}{2} + \left( \frac{\rho'^2}{2} \ln \rho' - \frac{\rho'^2}{4} \right) \Big|_{\rho}^{\rho_0} \right] \\
&= -\omega_0 \left( \frac{\rho_0^2}{2} \ln \rho_0 + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{4} \right),
\end{aligned} \tag{4.30a}$$

para  $\rho \leq \rho_0$  y para  $\rho_0 < \rho$  tenemos

$$A(\rho) = -\omega_0 \frac{\rho_0^2}{2} \ln \rho. \tag{4.30b}$$

Nótese que el potencial es continuo en  $\rho = \rho_0$ , por otra parte el campo de velocidades de acuerdo a (4.1) es

$$\mathbf{u}(\rho) = \frac{\omega_0}{2} \rho \hat{\phi}, \tag{4.31a}$$

para  $\rho \leq \rho_0$ , y para  $\rho_0 < \rho$

$$\mathbf{u}(\rho) = \frac{\omega_0}{2} \frac{\rho_0^2}{\rho} \hat{\phi}. \tag{4.31b}$$

#### 4.4. Vórtices armónicos sobre una superficie esférica

Ahora consideremos flujos restringidos a una superficie esférica y divididos por una circunferencia de latitud constante  $\theta_0$ . Para encontrar el campo de potencial tendríamos que resolver la ecuación

$$\Delta_B \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \tag{4.32}$$

En lugar de ello, utilicemos el resultado de la sección 3.4 y proyectemos las soluciones dentro y fuera de circunferencias en el plano. Supongamos por simplicidad que la esfera es de radio unitario, así las circunferencias  $\theta_0$  en  $\mathcal{S}^2$  corresponden a circunferencias  $\rho_0 = \cot(\theta_0/2)$  en el plano, entonces el potencial de velocidad en  $\mathcal{S}^2$  está dado por

$$\mathbf{A}_m(\rho, \phi) = C_m \left( \frac{\cot(\theta_>/2) \cot(\theta_0/2)}{\cot(\theta_</2)} \right)^m \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}, \tag{4.33a}$$

$$\mathbf{A}_0(\rho) = C_0 \frac{\ln[\cot(\theta_</2)]}{\ln[\cot(\theta_0/2)]} \hat{\mathbf{r}}. \tag{4.33b}$$

Usamos (4.1) para obtener el campo de velocidades

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^S &= mC_m \frac{\cot^{m-1}(\theta/2)}{1 - \cos \theta} \begin{pmatrix} -\hat{\theta} \sin m\phi + \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\theta} \cos m\phi + \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_m^N &= mC_m \frac{\cot^{2m}(\theta_0/2)}{1 - \cos \theta} \tan^{m+1} \theta/2 \begin{pmatrix} -\hat{\theta} \sin m\phi - \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\theta} \cos m\phi - \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^S &= 0, \\ \mathbf{u}_0^N &= \hat{\phi} \frac{C_0}{\sin \theta \ln [\cot(\theta_0/2)]}, \end{aligned} \quad (4.34b)$$

donde ahora los superíndices  $N$ ,  $S$  denotan que se trata del campo de velocidades al sur y al norte de la frontera. Nótese la similitud con el campo de velocidades en el plano, nuevamente las componentes normales a la frontera son continuas mientras que las componentes tangenciales nos dan la densidad lineal de circulación

$$\boldsymbol{\Omega}_m = -mC_m \frac{\cot^{m-1}(\theta_0/2)}{\sin^2 \theta_0} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.35a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{C_0}{\sin \theta_0 \ln [\cot(\theta_0/2)]} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.35b)$$

Por último, para  $m = 0$  no hay líneas de corriente al sur de la frontera y al norte son circunferencias de latitud constante, al igual que en el plano. Por otra parte, para  $m \neq 0$  las líneas de corriente son

$$\cot^m(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} = \cot^m(\theta_0/2) \begin{pmatrix} \cos m\phi_0 \\ \sin m\phi_0 \end{pmatrix} \quad (4.36a)$$

para  $\theta > \theta_0$ , y

$$\tan^m \theta/2 \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} = \tan^m \theta_0/2 \begin{pmatrix} \cos m\phi_0 \\ \sin m\phi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.36b)$$

para  $\theta < \theta_0$  y  $\phi_0$  un ángulo arbitrario.

En la figura 4.4 se muestran las líneas de corriente para  $m = 1, 2, 3, 4$ . Para los vórtices en el plano fuimos capaces de identificar las líneas de corriente, al menos para las  $m$ 's más pequeñas. Hacer lo mismo para los vórtices en la esfera es mucho más complicado, excepto para  $m = 1$  pues sabemos que la inversión sobre la esfera transforma circunferencias en circunferencias, entonces para  $m = 1$  y tomando  $\theta_0 = \pi/2$ , las líneas de corriente

$$(\tan \theta/2)^{\pm 1} \cos \phi = \cos \phi_0,$$

son arcos de circunferencia que pasan por los puntos con coordenadas esféricas  $(1, \pi/2, \pm\phi_0)$  y  $(1, 2 \cot^{-1}(\cos \phi_0), \pi/2)$  al sur y  $(1, \pi - 2 \cot^{-1}(\cos \phi_0), \pi/2)$  al norte del del ecuador.

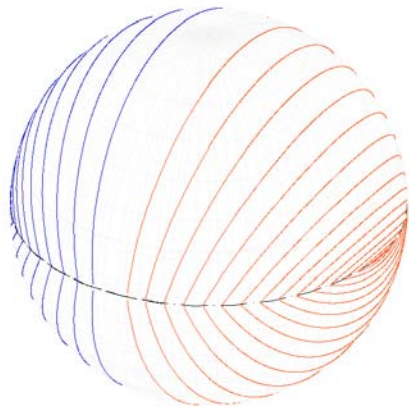
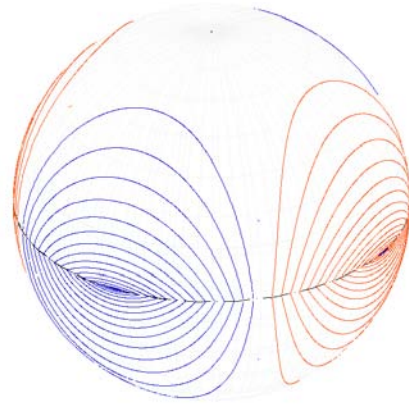
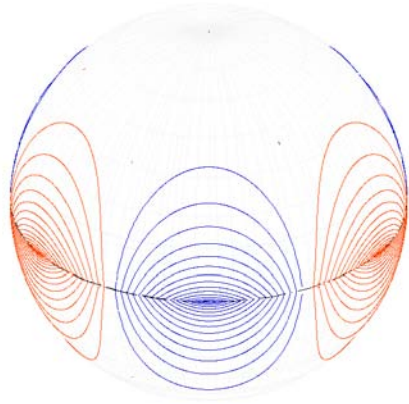
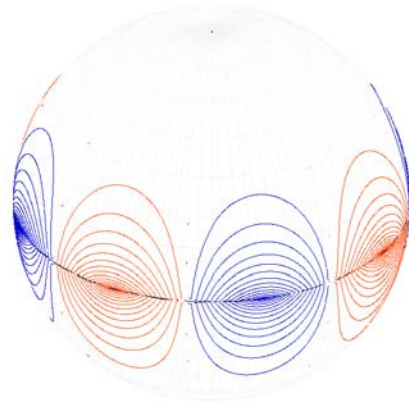
(a)  $m = 1$ (b)  $m = 2$ (c)  $m = 3$ (d)  $m = 4$ 

Figura 4.4: Se muestran las proyecciones estereográficas de los campos de velocidades en el plano con  $m = 1, 2, 3, 4$ . Nuevamente las líneas rojas y azules circulan en direcciones opuestas.

#### 4.4.1. Función de Green para $\Delta_B$

En esta sección derivamos la función de Green para el operador de Laplace–Beltrami a partir de la función de Green en el plano, aprovechando que ésta es una función armónica en todo punto salvo en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$  y por tanto su proyección estereográfica también lo es, y satisface las mismas condiciones de frontera. Empezamos por reescribir la función de Green de la siguiente manera

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{4\pi} \ln \left( \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') \right), \quad (4.37)$$

ahora proyectamos estereográficamente

$$\begin{aligned} \bar{G}(\theta, \phi; \theta', \phi') &= \frac{1}{4\pi} \ln \left( \cot^2 \frac{\theta}{2} + \cot^2 \frac{\theta'}{2} - 2 \cot \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta'}{2} \cos(\phi - \phi') \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln (1 - \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \ln \left( 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta'}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Podemos reescribir esta expresión en términos del ángulo  $\gamma$  entre los puntos  $(1, \theta, \phi)$  y  $(1, \theta', \phi')$  de la siguiente manera

$$\bar{G}(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{1}{4\pi} \left[ \ln(1 - \cos \gamma) - \ln \left( (1 - \cos \theta) \sin^2 \frac{\theta'}{2} \right) \right]. \quad (4.39)$$

Ésta es la función de Green para el operador de Laplace–Beltrami. Para encontrar la expansión multipolar de  $\bar{G}$  proyectamos la ecuación (4.27) con lo que obtenemos

$$\bar{G}(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{1}{2\pi} \left( \ln [\cot(\theta_</2)] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\cot(\theta_>/2)}{\cot(\theta_</2)} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right). \quad (4.40)$$

Sólo hay un detalle: por el teorema de la divergencia la integral de la vorticidad sobre toda la superficie de la esfera debe anularse, ya que es un campo solenoidal. La función de Green  $\bar{G}$  representa al potencial de velocidad de un vórtice puntual y por lo tanto

$$\oint_{S^2} \omega d\Omega = \oint_{S^2} \Delta \bar{G} d\Omega = 1,$$

lo cual viola la condición antes mencionada. A pesar de esto la expresión (4.40) sigue siendo válida para regiones acotadas sobre la esfera [9], y para ilustrar el uso de la expansión multipolar nuevamente determinamos el potencial de velocidad para una distribución de vorticidad invariante bajo rotaciones.

#### 4.4.2. Ondas de Rosby

Supongamos que se tiene una distribución de vorticidad  $\omega(\theta)$  en  $\mathcal{S}^2$ , invariante bajo rotaciones en torno al eje polar, entonces  $A(\theta, \phi) = A(\theta, 0)$  y usando (4.40) tenemos

$$A(\theta, \phi) = - \int_0^\pi \omega(\theta') \ln [\cot (\theta_</2)] \sin \theta' d\theta' \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin (m(\phi - \phi')) \Big|_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\omega(\theta')}{2\pi} \left( \frac{\cot (\theta_>/2)}{\cot (\theta_</2)} \right)^m \sin \theta' d\theta',$$

evaluando en  $\phi = 0$ , el segundo término se anula y obtenemos

$$A(\theta) = - \int_0^\pi \omega(\theta') \ln [\cot (\theta_</2)] \sin \theta' d\theta' \\ = - \int_0^\theta \omega(\theta') \ln [\cot (\theta'/2)] \sin \theta' d\theta' - \int_\theta^\pi \omega(\theta') \ln [\cot (\theta/2)] \sin \theta' d\theta'. \quad (4.41)$$

Consideremos ahora la siguiente distribución de vorticidad

$$\omega(\rho) = \begin{cases} \omega_N & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \omega_S & \theta_0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}, \quad (4.42)$$

primero determinamos el potencial  $A_S$  en la región de vorticidad  $\omega_S$  y después aprovechamos la simetría de la esfera para determinar el potencial  $A_N$  en la región de vorticidad  $\omega_N$  a partir de  $A_S$ . En la región de vorticidad  $\omega_S$  tenemos

$$A_S(\theta) = - \int_{\theta_0}^\theta \omega_S \ln [\cot (\theta'/2)] \sin \theta' d\theta' - \int_\theta^\pi \omega_S \ln [\cot (\theta/2)] \sin \theta' d\theta' \\ = \frac{\omega_S}{2} \left( x \ln x - x \Big|_{1+\cos\theta_0}^{1+\cos\theta} + x \ln x - x \Big|_{1-\cos\theta_0}^{1-\cos\theta} \right) \\ - \omega_S \ln [\cot (\theta/2)] (1 + \cos \theta) \\ = \omega_S \left( \ln \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right) - \ln [\cot (\theta/2)] - \cos \theta_0 \ln [\cot (\theta_0/2)] \right) \\ = 2\omega_S \ln [\sin (\theta/2)] - (\ln [\sin (\theta_0)/2] + \cos \theta_0 \ln [\cot (\theta_0/2)]), \quad (4.43a)$$

ahora el potencial  $A_N$  lo obtenemos sustituyendo  $\omega_S$  por  $\omega_N$  y  $\theta$  por  $\pi - \theta$ , entonces

$$A_N(\theta) = 2\omega_N \ln [\cos (\theta/2)] - (\ln [\sin (\theta_0)/2] + \cos \theta_0 \ln [\cot (\theta_0/2)]). \quad (4.43b)$$

Finalmente pegamos las soluciones exigiendo que el potencial sea continuo a lo largo de  $\theta = \theta_0$ , lo que impone la condición

$$(1 - \cos \theta_0)\omega_N + (1 + \cos \theta_0)\omega_S = 0, \quad (4.44)$$

es decir,  $\omega_N$ ,  $\omega_S$  y  $\theta_0$  no son independientes. Notemos además que el lado izquierdo de (4.44) es la integral de la vorticidad sobre toda la superficie de la esfera, por lo tanto es consistente con el teorema de la divergencia. Aplicando (4.1) obtenemos el campo de velocidades

$$\mathbf{u}(\theta) = \omega_N \tan \theta/2 \hat{\phi}, \quad (4.45a)$$

para  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  y

$$\mathbf{u}(\theta) = -\omega_S \cot (\theta/2) \hat{\phi}, \quad (4.45b)$$

para  $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$ . Se puede demostrar que este campo de velocidades es estable bajo perturbaciones lineales y da lugar a *ondas interfaciales de Rossby* con una relación de dispersión inversamente proporcional al número de onda [29].



## Capítulo 5

# Conclusiones

Hemos visto que es posible describir un flujo incompresible en términos de la vorticidad a través de las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}. \quad (5.1b)$$

La primera de estas ecuaciones nos permite definir un campo de potencial  $\mathbf{A}$  que satisface:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.2a)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (5.2b)$$

El campo de potencial se expresa en términos de la función de Green de la siguiente manera

$$\mathbf{A} = - \int_{\mathcal{R}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV', \quad (5.3)$$

mientras que el campo de velocidades se obtiene de la integral de Biot–Savart

$$\mathbf{u} = - \int_{\mathcal{R}} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV', \quad (5.4)$$

donde la función de Green para el operador de Laplace es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (5.5)$$

Por otra parte, desarrollamos el concepto de hojas de vorticidad, en particular construimos hojas de vorticidad circulares de multipolaridad definida. Encontramos que la función de corriente que genera estos flujos es armónica, por lo que nos referimos a ellos como vórtices armónicos. El campo de velocidades de los vórtices armónicos circulares es



$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^i &= mC_m\rho^{m-1} \begin{pmatrix} -\hat{\rho} \sin m\phi - \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\rho} \cos m\phi - \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_m^e &= mC_m \frac{\rho_0^{2m}}{\rho^{m+1}} \begin{pmatrix} -\hat{\rho} \sin m\phi + \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\rho} \cos m\phi + \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.6a)$$

para  $m \neq 0$ , y

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^i &= 0, \\ \mathbf{u}_0^e &= -\hat{\phi} \frac{C_0}{\rho \ln \rho_0}, \end{aligned} \quad (5.6b)$$

para  $m = 0$ . Notamos que las componentes normales a la frontera  $\rho = \rho_0$  son continuas, lo cual es consistente con el carácter incompresible del flujo. En cambio, las componentes tangenciales son discontinuas y la discontinuidad nos da la densidad de circulación en la hoja de vorticidad

$$\mathbf{\Omega}_m = 2mC_m\rho_0^{m-1} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}, \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = -\frac{C_0}{\rho_0 \ln \rho_0} \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.7b)$$

Aprovechando estos campos, fuimos capaces de obtener el desarrollo multipolar de la función de Green en coordenadas polares  $(\rho, \phi)$

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \rho_{>} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\rho_{\leq}}{\rho_{>}} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right). \quad (5.8)$$

A continuación mostramos la utilidad del desarrollo multipolar cuando se tienen distribuciones de vorticidad invariantes bajo rotaciones. En ese caso el potencial de velocidad está dado por

$$A(\rho) = - \int_0^{\infty} \omega(\rho') \ln \rho_{>} \rho' d\rho' \quad (5.9)$$

y aplicando el rotacional obtenemos

$$u_\phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \int \omega(\rho') \rho' d\rho' = \frac{1}{2\pi\rho} \int \omega(\rho') dS', \quad (5.10)$$

que es el equivalente a la *ley de Ampère* para flujo incompresible.

Finalmente, aprovechamos la invariancia de las funciones armónicas bajo transformaciones conformes para construir hojas de vorticidad circulares sobre la esfera, cuyos campos de velocidades y densidades de circulación están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^S &= mC_m \frac{\cot^{m-1}(\theta/2)}{1 - \cos \theta} \begin{pmatrix} -\hat{\theta} \sin m\phi + \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\theta} \cos m\phi + \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_m^N &= mC_m \frac{\cot^{2m}(\theta_0/2)}{1 - \cos \theta} \tan^{m+1} \theta/2 \begin{pmatrix} -\hat{\theta} \sin m\phi - \hat{\phi} \cos m\phi \\ \hat{\theta} \cos m\phi - \hat{\phi} \sin m\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0^S &= 0, \\ \mathbf{u}_0^N &= \hat{\phi} \frac{C_0}{\sin \theta \ln [\cot(\theta_0/2)]}, \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\mathbf{\Omega}_m = -mC_m \frac{\cot^{m-1}(\theta_0/2)}{\sin^2 \theta_0} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}, \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{\Omega}_0 = \frac{C_0}{\sin \theta_0 \ln [\cot(\theta_0/2)]} \hat{\mathbf{r}}; \quad (5.12b)$$

además, construimos el desarrollo multipolar de la función de Green para el operador de Laplace–Beltrami proyectando estereográficamente (5.8) y obtuvimos

$$\bar{G}(\theta, \phi; \theta', \phi') = \frac{1}{2\pi} \left( \ln [\cot(\theta_</2)] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{\cot(\theta_>/2)}{\cot(\theta_</2)} \right)^m \cos(m(\phi - \phi')) \right). \quad (5.13)$$

Debemos enfatizar la utilidad de las transformaciones conformes. El procedimiento para construir (5.8) no fue complicado, pero si largo y de no haber utilizado la proyección estereográfica hubiesemos tenido que repetir el procedimiento para encontrar la función de Green del operador de Laplace–Beltrami y su desarrollo multipolar. De manera similar, utilizando transformaciones conformes, es posible encontrar hojas de vorticidad con diferentes geometrías, tanto en el plano como en la esfera. Por ejemplo, podemos construir hojas de vorticidad elípticas en el plano y proyectarlas estereográficamente a la esfera usando la transformación

$$x = \cosh u \cos v ; \quad y = \sinh u \sin v. \quad (5.14)$$

Las líneas de corriente correspondientes a estos vórtices son de la forma

$$\begin{pmatrix} \cosh mu \\ \sinh mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos mv \\ \sin mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh mu_0 \\ \sinh mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos mv_0 \\ \sin mv_0 \end{pmatrix}, \quad (5.15a)$$

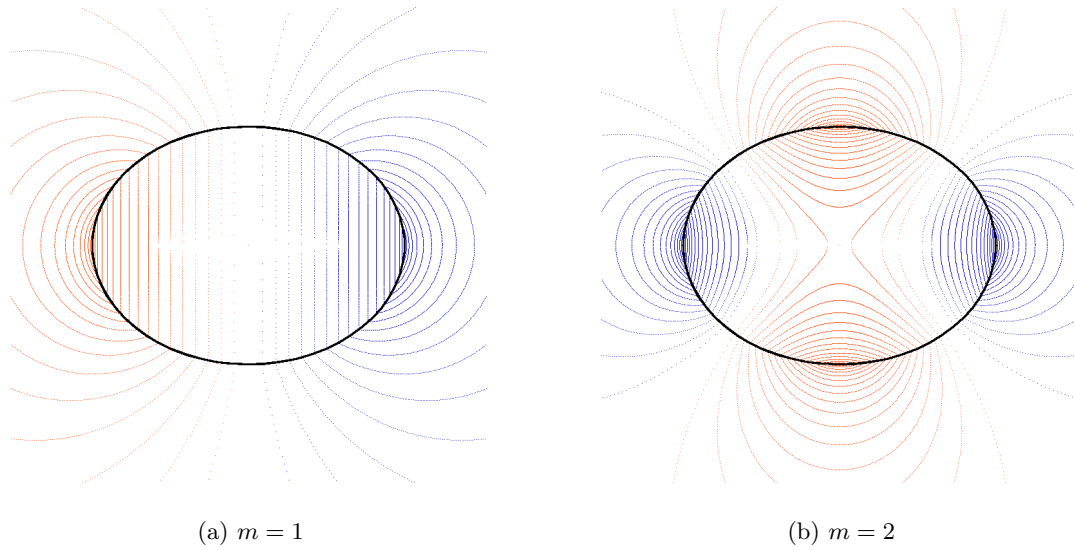


Figura 5.1: Se muestran los vórtices elípticos de orden  $m = 1$  y  $m = 2$  en el plano.

dentro de la elipse  $u = u_0 = Cte$ , con  $v_0$  constante. Fuera de la elipse  $u = u_0$ , las líneas de corriente son

$$e^{-mu} \begin{Bmatrix} \cos mv \\ \sin mv \end{Bmatrix} = e^{-mu_0} \begin{Bmatrix} \cos mv_0 \\ \sin mv_0 \end{Bmatrix}. \quad (5.15b)$$

La proyección estereográfica de las líneas de corriente se realiza por medio de las siguientes identidades

$$\cot(\theta/2) = \sqrt{\cosh^2 u + \cos^2 v - 1}, \quad (5.16a)$$

$$\tan \phi = (\tanh u \tan v)^{-1}, \quad (5.16b)$$

en la figura 5.1 mostramos los vórtices armónicos elípticos con  $m = 1, 2$  en el plano y en la figura 5.2 sus proyecciones estereográficas. En general, es posible encontrar hojas de vorticidad de cualquier geometría tanto en el plano como en la esfera, haciendo uso del mapeo de Schwartz–Christoffel y se pretende que en un futuro éste y los demás resultados aquí obtenidos sean de utilidad en la descripción de fenómenos meteorológicos, tales como las manchas planetarias.

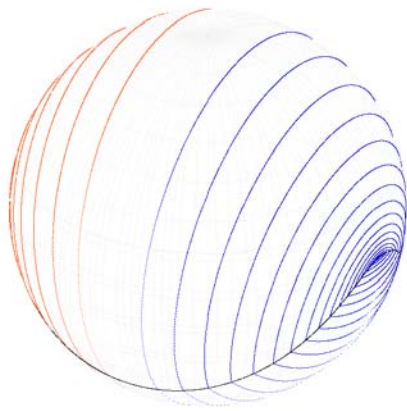
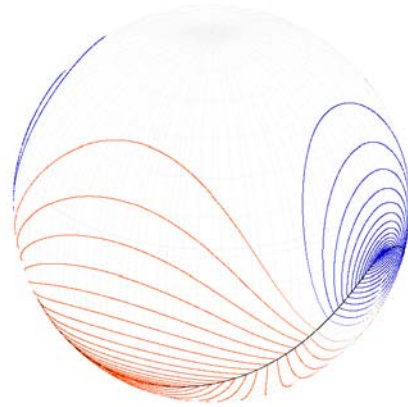
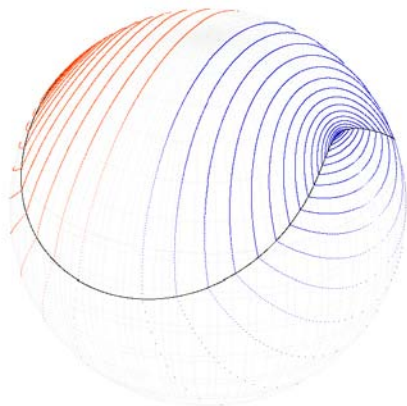
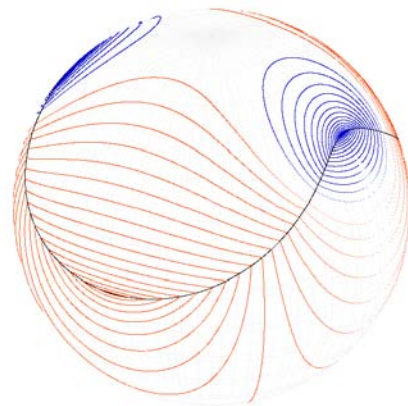
(a)  $m = 1$ (b)  $m = 2$ (c)  $m = 1$ (d)  $m = 2$ 

Figura 5.2: Se muestran las proyecciones estereográficas de los vórtices elípticos de la figura 5.1. Las proyecciones se realizaron haciendo coincidir el ecuador de la esfera unitaria con la circunferencia circunscrita de la elipse  $u = u_0$  (arriba) y con la circunferencia inscrita (abajo).



# Apéndice A

## Teorema de transporte

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , una región acotada con frontera diferenciable y  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t)$  una función suave tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}, t), \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades de un flujo, en otras palabras,  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t)$  representa la trayectoria de una partícula situada inicialmente en la posición  $\boldsymbol{\alpha}$ . Consideremos también una función suave  $f(\mathbf{x}, t)$ , entonces

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{X}(\Omega, t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{X}(\Omega, t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f\mathbf{u})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.2})$$

La demostración del teorema es como sigue, reducimos la integral sobre la región en movimiento  $\mathbf{X}(\Omega, t)$  a una integral sobre la región fija  $\Omega$ , utilizando el cambio de variable  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ , así

$$\int_{\mathbf{X}(\Omega, t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t) d\boldsymbol{\alpha},$$

donde  $J$  es el jacobiano de la transformación. Entonces podemos derivar bajo el signo de la integral

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{X}(\Omega, t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t) + f(\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) \frac{\partial J}{\partial t}(\boldsymbol{\alpha}, t) d\boldsymbol{\alpha}.$$

Ahora  $J = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_i \partial X_i / \partial \alpha_{\sigma(i)}$ , por lo tanto

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_k \frac{\partial^2 X_k}{\partial t \partial \alpha_{\sigma(k)}} \prod_{i \neq k} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_{\sigma(i)}},$$

además  $\partial^2 X_k / \partial t \partial \alpha_{\sigma(k)} = \partial u_k / \partial \alpha_{\sigma(k)}$  y  $u_k$  depende en  $\boldsymbol{\alpha}$  a través de  $\mathbf{X}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \sum_{k,l} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial X_l}{\partial \alpha_{\sigma(k)}} \prod_{i \neq k} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_{\sigma(i)}} \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial u_k}{\partial X_l} J \delta_{lk} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial X_k} J \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{u}) J; \end{aligned}$$

donde utilizamos el hecho de que el determinante de una matriz con dos renglones iguales se anula. Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathbf{X}(\omega,t)} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + f \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{u}) \right] (\mathbf{X}(\boldsymbol{\alpha}, t), t) J(\boldsymbol{\alpha}, t) d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \int_{\mathbf{X}(\Omega,t)} \left[ \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot (\mathbf{u}) \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Finalmente  $Df/Dt + f \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial f / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) f + f \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial f / \partial t + \nabla \cdot (f \mathbf{u})$ , con lo que se obtiene la expresión deseada.

## Apéndice B

# Coordenadas curvilineas ortogonales

La posición de un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se puede describir como la intersección de los planos  $\{x_i = x_i^{(0)} = cte\}_{i=1}^n$ , donde  $x_i$  son las coordenadas cartesianas usuales. De manera similar  $\mathbf{x}$  se puede describir como la intersección de  $n$  superficies (no paralelas entre sí)  $\{q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_i^{(0)} = cte\}_{i=1}^n$ , a las  $q_i$  les llamamos coordenadas curvilineas de  $\mathbf{x}$ .

Los vectores normales a cada superficie estan dados por

$$\mathbf{q}_i = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, \quad (\text{B.1})$$

consideraremos el caso particular en que estos vectores son mutuamente ortogonales, entonces los elementos de línea, superficie y volumen son:

$$dl_i = h_i dq_i, \quad (\text{B.2a})$$

$$dS_{12\dots k-1 k+1\dots n} = \frac{J}{h_k} dq_1 dq_2 \cdots dq_{k-1} dq_{k+1} \cdots dq_n, \quad (\text{B.2b})$$

$$dV = J dq_1 dq_2 \cdots dq_n, \quad (\text{B.2c})$$

donde  $J = h_1 h_2 \cdots h_n$  es el jacobiano de la transformación  $x_i \mapsto x_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ . Con estas expresiones podemos escribir los operadores gradiente, divergencia y Laplaciano en coordenadas curvilineas, comenzamos con el operador gradiente

$$\nabla \varphi = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i (\mathbf{q}_i \cdot \nabla \varphi) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \frac{\partial \varphi}{\partial l_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{q}_i}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (\text{B.3})$$

El operador divergencia lo obtenemos de la definición



$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\int dV},$$

luego expandemos en serie de Taylor el término  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  con lo que obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{J}{h_i} A_i. \quad (\text{B.4})$$

Combinando (B.3) y (B.4) obtenemos el operador Laplaciano

$$\Delta \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{J}{h_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (\text{B.5})$$

Finalmente, el operador rotacional está definido sólo en tres dimensiones y su expresión en coordenadas curvilíneas la obtenemos a partir de la definición

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \lim_{dS_{jk} \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\int dS_{jk}},$$

con  $\{i, j, k\}$  una permutación par de  $\{1, 2, 3\}$ . Ahora expandemos el término  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  en serie de Taylor con lo que obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^3 h_i \mathbf{q}_i \left( \frac{\partial h_k A_k}{\partial q_j} - \frac{\partial h_j A_j}{\partial q_k} \right). \quad (\text{B.6})$$

A continuación damos algunos de los ejemplos más comunes de coordenadas curvilíneas ortogonales.

### B.1. Coordenadas polares

En este caso  $n = 2$ , las familias de curvas son círculos concéntricos

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (\text{B.7})$$

y rayos que pasan por el origen

$$y = x \tan \phi. \quad (\text{B.8})$$

La transformación de coordenadas es:

$$x = \rho \cos \phi, \quad (\text{B.9a})$$

$$y = \rho \sin \phi. \quad (\text{B.9b})$$

con  $0 \leq \rho < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Los factores de escala son:

$$h_\rho = 1 \quad ; \quad h_\phi = \rho. \quad (\text{B.10})$$

## B.2. Coordenadas elípticas

De nuevo  $n = 2$  y las familias de curvas son elipses

$$\frac{x^2}{f^2 \cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1, \quad (\text{B.11})$$

con focos en  $(x = \pm f, y = 0)$ , excentricidad  $1/\cosh u$  y semiejes  $a = f \cosh u$ ,  $b = f \sinh u$ ; las curvas ortogonales son hipérbolas confocales

$$\frac{x^2}{f^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1, \quad (\text{B.12})$$

con excentricidad  $1/f \cos v$  y semiejes  $a = f \cos v$ ,  $b = f \sin v$ . La transformación de coordenadas es:

$$x = f \cosh u \cos v, \quad (\text{B.13a})$$

$$y = \sinh u \sin v, \quad (\text{B.13b})$$

con  $0 \leq u < \infty$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ . Los factores de escala son:

$$h_u = h_v = f \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}. \quad (\text{B.14})$$

## B.3. Coordenadas bipolares

Una vez más  $n = 2$  y las familias de curvas son circunferencias

$$(x - a \coth \tau)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \tau}, \quad (\text{B.15})$$

así como las curvas ortogonales

$$x^2 + (y - a \cot \sigma)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \sigma}. \quad (\text{B.16})$$

La transformación de coordenadas es:

$$x = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad (\text{B.17a})$$

$$y = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad (\text{B.17b})$$

con  $0 \leq \sigma < 2\pi$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ . Los factores de escala son:

$$h_\sigma = h_\tau = \frac{a}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \quad (\text{B.18})$$

#### B.4. Coordenadas esféricas

Ahora  $n = 3$ , las familias de superficies son esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (\text{B.19})$$

conos con eje vertical y vértice en el origen

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \theta \quad (\text{B.20})$$

y planos verticales que pasan por el origen

$$y = x \tan \phi. \quad (\text{B.21})$$

La transformación de coordenadas es:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{B.22a})$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (\text{B.22b})$$

$$z = r \cos \theta, \quad (\text{B.22c})$$

con  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Los factores de escala son:

$$h_r = 1 \quad ; \quad h_\theta = r \quad ; \quad h_\phi = r \sin \theta. \quad (\text{B.23})$$

## Apéndice C

# Transformaciones conformes

Sea  $f : U \rightarrow V$ ,  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  un mapeo invertible, decimos que  $f$  es conforme en  $x \in U$  si preserva ángulos. De manera estricta,  $f$  es conforme si y sólo si para cualesquiera dos vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  se cumple

$$Df\mathbf{u} \cdot Df\mathbf{v} = e^{2\sigma(x)} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{C.1})$$

donde  $Df$  es la matriz jacobiana de  $f$  y  $\sigma(x)$  es una función escalar en  $U$  y se llama función característica del mapeo conforme.

En efecto, si  $f$  es conforme, entonces  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = Df\mathbf{u} \cdot Df\mathbf{v}$  es una forma bilineal simétrica que se anula en cualquier par ortogonal  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  por lo tanto  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  es proporcional a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , más aun tienen el mismo signo ya que  $f$  preserva ángulos. Denotando al factor de proporcionalidad por  $e^{2\sigma(x)}$  obtenemos la relación deseada para  $f$  [6].

Por otra parte, si  $f$  satisface (C.1),  $\theta$  denota el ángulo entre  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  y  $\phi$  el ángulo entre  $Df\mathbf{u}, Df\mathbf{v}$ , entonces

$$\cos \phi = \frac{Df\mathbf{u} \cdot Df\mathbf{v}}{|Df\mathbf{u}||Df\mathbf{v}|} = \frac{e^{2\sigma(x)}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{e^\sigma|\mathbf{u}|e^\sigma|\mathbf{v}|} = \cos \theta,$$

por lo tanto  $f$  es conforme.

Consideremos  $n = 2$ , en ese caso desarrollando el lado izquierdo de (C.1), encontramos que una condición suficiente y necesaria para que el mapeo sea conforme es:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial f_2}{\partial q_2}, \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial f_2}{\partial q_1}, \quad (\text{C.2b})$$

éstas son las llamadas *ecuaciones de Cauchy–Riemann*, de aquí se sigue que toda función analítica en el plano complejo induce un mapeo conforme.



## Apéndice D

# Ecuaciones de Sturm–Liouville

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \left[ p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x) \right] \varphi(x) = 0, \quad (\text{D.1})$$

definida en el intervalo  $a \leq x \leq b$ ,  $p_i(x)$  son funciones reales y  $p_0(x) \neq 0$ . Definimos el operador adjunto

$$\mathcal{L}^\dagger = p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + (2p_0'(x) - p_1(x)) \frac{d}{dx} + (p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x)) \quad (\text{D.2})$$

y decimos que  $\mathcal{L}$  es autoadjunto si  $p_0'(x) = p_1(x)$ , en ese caso podemos reescribir (D.1) de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right], \quad (\text{D.3})$$

con  $p(x) = p_0(x)$  y  $q(x) = p_2(x)$ . Siempre es posible transformar un operador diferencial  $\mathcal{L}$  en un operador autoadjunto, multiplicando por [16]

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp \left[ \int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right].$$

Consideremos ahora el problema de valores propios

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \lambda w(x)\varphi(x), \quad (\text{D.4a})$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi(a) + \beta_1 \frac{d\varphi}{dx}(a) &= 0, \\ \alpha_2 \varphi(b) + \beta_2 \frac{d\varphi}{dx}(b) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.4b})$$

donde  $\mathcal{L}$  es autoadjunto,  $w(x)$  llamada función de peso, es una función real no negativa, excepto tal vez en puntos aislados donde se anula y llamamos a (D.4a) *ecuación de Sturm–Liouville*. Definimos el producto interior asociado al problema de valores propios como sigue

$$\langle \psi, \varphi \rangle \equiv \int \psi^*(x)\varphi(x)w(x)dx. \quad (\text{D.5})$$

Bajo este producto interior, las funciones propias  $\varphi_i$ , que satisfacen (D.4a) y sus valores propios  $\lambda_i$  tienen las siguientes propiedades:

- i) Los valores propios  $\{\lambda_i\}$  son reales.
- ii) Las funciones propias  $\{\varphi_i\}$  son ortogonales.
- iii) El conjunto de funciones propias  $\{\varphi_i\}$  es completo, *i.e.* toda función  $f \in L_2(a,b)$  que satisfaga las condiciones de frontera (D.4b), se puede expandir en una serie de funciones propias.

Para demostrar las primeras dos propiedades consideremos dos funciones propias  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  (no triviales), con valores propios  $\lambda_i, \lambda_j$ , entonces

$$\langle \varphi_i, \mathcal{L}\varphi_j \rangle - \langle \mathcal{L}\varphi_i, \varphi_j \rangle = w(\lambda_j - \lambda_i^*) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle,$$

pero, como  $\mathcal{L}$  es autoadjunto el lado izquierdo se anula y obtenemos

$$(\lambda_j - \lambda_i^*) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0. \quad (\text{D.6})$$

Si  $i = j$ , el segundo término del lado izquierdo es diferente de cero pues  $w(x)$  es diferente de cero y  $\varphi_i \neq 0$ , por lo tanto  $\lambda_i = \lambda_i^*$ , *i.e.*  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, si  $i \neq j$  y  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , la única manera de que se satisfaga (D.6) es, si  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ , *i.e.* si  $\varphi_i$  y  $\varphi_j$  son ortogonales. Si  $\lambda_i = \lambda_j$  decimos que es un valor propio degenerado y no podemos asegurar que sus funciones propias asociadas sean ortogonales, pero la propiedad *iii*) nos asegura que son linealmente independientes y por lo tanto se pueden ortogonalizar.

Para demostrar la tercer propiedad, basta con demostrar que el error

$$h_n = f - \sum_{i=0}^n \langle \varphi_i, f \rangle \varphi_i = f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i, \quad (\text{D.7})$$

tiende a cero en norma, es decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n, h_n \rangle = 0$ . Para ello utilizamos el *principio de Rayleigh*, que dice que si  $\varphi$  es ortogonal a  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ , entonces

$$\lambda_{n+1} \leq \frac{\langle \varphi, \mathcal{L}\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle}. \quad (\text{D.8})$$

Aplicando este principio a  $h_n$ , tenemos  $\langle h_n, h_n \rangle \leq \langle h_n, \mathcal{L}h_n \rangle \lambda_{n+1}^{-1}$  o desarrollando el primer término del lado derecho, considerando que  $\mathcal{L}$  es autoadjunto y las funciones propias ortogonales, tenemos

$$\langle h_n, h_n \rangle \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left( \langle f, \mathcal{L}f \rangle - \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i \right), \quad (\text{D.9})$$

sin pérdida de generalidad, podemos suponer  $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ , además los valores propios son no acotados, es decir  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \rightarrow \infty$  [38], entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n, h_n \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle f, \mathcal{L}f \rangle}{\lambda_{n+1}} = 0, \quad (\text{D.10})$$

y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n, h_n \rangle = 0$ .





## Apéndice E

# Líneas de corriente, graficación

Aquí presentamos el código que se utilizó para graficar las figuras del capítulo 4, está escrito en lenguaje *C* y se utiliza *GNU-plot*.

```
/******L'ineas de corriente, coordenadas polares*****/
/******C. Esparza*****/
/******Lenguaje C*****/

#include<stdio.h>
#include<math.h>

/*Definimos funciones para calcular \rho(\phi) en el
interior y exterior de \rho_0=1.*/

#define rho_int(phi,phi_0,m)\
    pow(cos(m*phi_0)/cos(m*phi),1.0/(m))
#define rho_ext(phi,phi_0,m)\
    pow(cos(m*phi)/cos(m*phi_0),1.0/(m))

/*Definimos funciones para calcular \theta(\rho) y
X(\theta,\phi), Y(\theta,\phi), Z(\theta,\phi)*/

#define Theta(rho) 2*atan(1/rho)
#define X(theta,phi) sin(theta)*cos(phi)
#define Y(theta,phi) sin(theta)*sin(phi)
#define Z(theta,phi) cos(theta)

main(){
```

```

FILE *ar1=fopen("polares_int.txt","w");
FILE *ar2=fopen("polares_ext.txt","w");
FILE *gr=popen("gnuplot","w");
fprintf(gr,"set size ratio 1\n");
fprintf(gr, "unset key\n");
fprintf(gr,"set polar\n");
fprintf(gr,"set term png size 800,800\n");

/*m define la multipolaridad de las curvas.*/
int m;
printf("multipolaridad m? \n");
scanf("%d",&m);
/*n_phi0 define el n'umero de l'ineas de corriente
que se graficar'an.*/
int n_phi=8*360,n_phi_0=32*m,i,j;
double phi,d_phi=(2.*M_PI)/n_phi;
double phi_0,d_phi_0=(M_PI)/n_phi_0;
double re,ri;
double theta_N,theta_S;
double x_N,y_N,z_N,x_S,y_S,z_S;

/*Calculamos puntos sobre las l'ineas de corriente que
pasan por los puntos (1,\phi_0) y sus proyecciones
estereogr'aficas*/

for(i=0;i<=n_phi_0;i++){
  phi_0=i*d_phi_0;
  for(j=0;j<=n_phi;j++){
    phi=j*d_phi;
    ri=rho_int(phi,phi_0,m);
    re=rho_ext(phi,phi_0,m);
    theta_S=Theta(ri);
    theta_N=Theta(re);
    x_N=X(theta_N,phi);
    y_N=Y(theta_N,phi);
    z_N=Z(theta_N,phi);
    x_S=X(theta_S,phi);
    y_S=Y(theta_S,phi);
    z_S=Z(theta_S,phi);

/*L'ineas de corriente en el interior y

```

```

al sur del ecuador.*/

    if(fabs(ri)<=1){
        fprintf(ar1,"%lf %lf %lf %lf %lf\n",
                phi,ri,x_S,y_S,z_S);
    }

/*L'ineas de corriente en el exterior y
al norte del ecuador.*/

    if(fabs(re)>=1){
        fprintf(ar2,"%lf %lf %lf %lf %lf\n",
                phi,re,x_N,y_N,z_N);
    }
}
fprintf(ar1,"\n\n");
fprintf(ar2,"\n\n");
}

/*Graficamos las l'ineas de corriente en el plano.*/

double xmax=2;
fprintf(gr,"set output \"polares3_%d.png\"\n",m);
fprintf(gr,"set xrange [-%lf:%lf]\n",xmax,xmax);
fprintf(gr,"set yrange [-%lf:%lf]\n",xmax,xmax);
fprintf(gr,"unset border\n");
fprintf(gr,"unset tics\n");
if(m==1){
    fprintf(gr,"set yzeroaxis\n");
}
fprintf(gr,"plot \"polares_int.txt\" index 0"
        "w d lc rgbcolor \"#FF4500\", \\\n");
fprintf(gr,"\"polares_ext.txt\" index 0"
        "w d lc rgbcolor \"#FF4500\", \\\n");
for(i=1;i<n_phi_0-1;i++){
    phi_0=i*d_phi_0;
    if(cos(m*phi_0)>=0){
        fprintf(gr,"\"polares_int.txt\" index %d"
                "w d lc rgbcolor \"#FF4500\", \\\n",i);
        fprintf(gr,"\"polares_ext.txt\" index %d"
                "w d lc rgbcolor \"#FF4500\", \\\n",i);
    }
}

```

```

    }else{
        fprintf(gr, "\"polares_int.txt\" index %d"
               "w d lc rgbcolor \"#0000CD\", \\n",i);
        fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index %d"
               "w d lc rgbcolor \"#0000CD\", \\n",i);
    }
}
fprintf(gr, "\"polares_int.txt\" index %d"
        "w d lc rgbcolor \"#0000CD\", \\n",i);
fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index %d"
        "w d lc rgbcolor \"#0000CD\", \\n",i);
fprintf(gr, "1 lw 3 lc rgbcolor \"black\"\\n");

/*Graficamos las l'ineas de corriente en la esfera.*/

fprintf(gr, "reset\\n");
fprintf(gr, "unset key\\n");
fprintf(gr, "set parametric\\n");
fprintf(gr, "set size 1,1\\n");
fprintf(gr, "set output \"proy_%d.png\"\\n",m);
fprintf(gr, "set xyplane relative 0.0\\n");
fprintf(gr, "unset tics\\n");
fprintf(gr, "unset border\\n");
fprintf(gr, "set xrange [-%lf:%lf]\\n",xmax,xmax);
fprintf(gr, "set yrange [-%lf:%lf]\\n",xmax,xmax);
fprintf(gr, "set zrange [-%lf:%lf]\\n",xmax,xmax);
fprintf(gr, "set view equal xyz\\n");
fprintf(gr, "set view ,,3\\n");
fprintf(gr, "set isosamples 50\\n");
fprintf(gr, "set hidden3d\\n");
fprintf(gr, "splot \"polares_int.txt\" index 0"
        "u 3:4:5 w l lc rgbcolor \"#FF4500\", \\n");
fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index 0"
        "u 3:4:5 w l lc rgbcolor \"#FF4500\", \\n");
for(i=1;i<n_phi_0-1;i++){
    phi_0=i*d_phi_0;
    if(cos(m*phi_0)>=0){
        fprintf(gr, "\"polares_int.txt\" index %d"
               "u 3:4:5 w l lc rgbcolor \"#FF4500\", "
               "\\n",i);
        fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index %d"

```

---

```
        "u 3:4:5 w 1 lc rgbcolor \">#FF4500\","
        "\\n",i);
    }else{
        fprintf(gr, "\"polares_int.txt\" index %d"
               "u 3:4:5 w 1 lc rgbcolor \">#0000CD\","
               "\\n",i);
        fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index %d"
               "u 3:4:5 w 1 lc rgbcolor \">#0000CD\","
               "\\n",i);
    }
}
fprintf(gr, "\"polares_int.txt\" index %d"
        "u 3:4:5 w 1 lc rgbcolor \">#0000CD\","
        "\\n",i);
fprintf(gr, "\"polares_ext.txt\" index %d"
        "u 3:4:5 w 1 lc rgbcolor \">#0000CD\","
        "\\n",i);
fprintf(gr, "cos(v),sin(v),0 lc rgbcolor \">#000000\","
        "\\n");
fprintf(gr, "sin(u)*cos(v),sin(u)*sin(v),cos(u)"
        "lc rgbcolor \">#F5F5F5\\n");
fclose(ar1);
fclose(ar2);
fclose(gr);
}
```



# Bibliografía

- [1] Chorin A. *Vorticity and Turbulence (Applied Mathematical Sciences)*. Springer, 2013.
- [2] Chorin A. and Marsden J. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics (Texts in Applied Mathematics) (v. 4)*. Springer, 2000.
- [3] Majda A. and Bertozzi A. *Vorticity and Incompressible Flow (Cambridge Texts in Applied Mathematics)*. Cambridge University Press, 2001.
- [4] Selvadurai A. *Partial Differential Equations in Mechanics 1: Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation*. Springer, 2010.
- [5] Armitage D. and Gardiner S. *Classical Potential Theory (Springer Monographs in Mathematics)*. Springer, 2012.
- [6] Blair D. *Inversion Theory and Conformal Mapping (Student Mathematical Library, V. 9)*. American Mathematical Society, 2000.
- [7] Bland D. *Solutions of Laplace's Equation (Library of Mathematics)*. Springer, 1961.
- [8] Crowdy D. A class of exact multipolar vortices. *Physics of Fluids*, 11(9):2556–2564, sep 1999.
- [9] Crowdy D. Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries. *Phys. Fluids*, 18(3):036602, 2006.
- [10] Crowdy D. and Cloke M. Analytical solutions for distributed multipolar vortex equilibria on a sphere. *Phys. Fluids*, 15(1):22, 2003.
- [11] Gilbarg D. and Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001.
- [12] Griffiths D. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [13] Spencer D. Separation of variables in electromagnetic theory. *J. Appl. Phys.*, 22(4):386, 1951.



- 
- [14] Pollock F. Uniform motion of vortex system. *Physics of Fluids*, 8:2201, 1965.
- [15] Alobaidi G. and Mallier R. Vortex streets on a sphere. *Journal of Applied Mathematics*, 2011:1–9, 2011.
- [16] Arfken G. and Weber H. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition, Sixth Edition*. Academic Press, 2005.
- [17] Folland G. *Introduction to Partial Differential Equations. Second Edition*. Princeton University Press, 1995.
- [18] Harp G. Unusual solutions of the laplace equation. *American Journal of Physics*, 58(4):366, 1990.
- [19] Roach G. *Green's Functions*. Cambridge University Press, 1982.
- [20] Coxeter H. and Greitzer S. *Geometry Revisited (New Mathematical Library)*. The Mathematical Association of America, 1967.
- [21] Lamb H. *Hydrodynamics (Cambridge Mathematical Library)*. Cambridge University Press, 1991.
- [22] Currie I. *Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition (Mechanical Engineering, Vol. 154)*. CRC Press, 2002.
- [23] Sneddon I. *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry (University Mathematics Texts)*. Oliver & Boyd, 1966.
- [24] Jackson J. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [25] Gustafson K. and Sethian J. *Vortex Methods and Vortex Motion*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [26] Eisenhart L. Separable systems in euclidean 3-space. *Physical Review*, 45(6):427–428, mar 1934.
- [27] Eisenhart L. Separable systems of stackel. *The Annals of Mathematics*, 35(2):284, apr 1934.
- [28] Milne-Thomson L. *Theoretical Hydrodynamics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 2011.
- [29] Polvani L. and Dritschel D. Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 255(-1):35, oct 1993.
- [30] Al-Gwaiz M. *Sturm-Liouville Theory and its Applications (Springer Undergraduate Mathematics Series)*. Springer, 2007.

- 
- [31] Hartman P. Systems of total differential equations and liouville's theorem on conformal mappings. *American Journal of Mathematics*, 69(2):327, apr 1947.
- [32] Moon P. and Spencer D. Cylindrical and rotational coordinate systems. *Journal of the Franklin Institute*, 252(4):327–344, oct 1951.
- [33] Moon P. and Spencer D. Separability conditions for the laplace and helmholtz equations. *Journal of the Franklin Institute*, 253(6):585–600, jun 1952.
- [34] Moon P. and Spencer D. Separability in a class of coordinate systems. *Journal of the Franklin Institute*, 254(3):227–242, sep 1952.
- [35] Moon P. and Spencer D. Recent investigations of the separation of laplace's equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(2):302, apr 1953.
- [36] Moon P. and Spencer D. *Field Theory Handbook*. Springer Science+Business Media, 1971.
- [37] Saffman P. *Vortex Dynamics (Cambridge Monographs on Mechanics)*. Cambridge University Press, 1993.
- [38] Courant R. and Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*. Wiley-VCH, 1989.
- [39] Needham T. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997.
- [40] Bogomolov V. Dynamics of vorticity at a sphere. *Fluid Dyn*, 12(6):863–870, nov 1977.
- [41] Greiner W. *Classical electrodynamics*. Springer, 1998.
- [42] Kimura Y. and Okamoto H. Vortex motion on a sphere. *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(12):4203–4206, dec 1987.