



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**Vibraciones de un Cilindro Infinito Inducidas por Vórtices**

PROTOCOLO DE INVESTIGACIÓN  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:  
MARCO ANTONIO REYES GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL:

**DR. FRANCISCO JAVIER MANDUJANO SÁNCHEZ**  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

**DR. CARLOS MÁLAGA IGUÍÑIZ**  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

**DR. RAÚL RECHTMAN SCHRENZEL**  
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES, UNAM

MÉXICO, D. F. JUNIO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

1. Introducción	3
2. Cilindro en un flujo uniforme y sujeto a una fuerza de Hooke.	4
3. Método de la Ecuación de Boltzmann en Redes	7
4. Resultados Preliminares	11
5. Conclusiones y Perspectivas	28
Referencias	30

# 1. Introducción

El comportamiento de los fluidos presenta gran interés en la comunidad científica debido a que son de gran utilidad y su presencia en la naturaleza es abundante, algunos permiten la generación de energía (gasolina, metano, butano, etc.), otros forman parte de dispositivos de enfriamiento o como aislantes (térmicos, acústicos, etc.), inclusive son protagonistas de desastres naturales como huracanes, tornados, tsunamis, desborde de ríos, etc. Es por eso que es tan relevante el estudio de los fluidos, pues se deben tener las herramientas para la correcta contención, obtención, transportación, control y, en general, manipulación de los mismos. En específico, la interacción entre un cuerpo y el flujo que lo rodea es un problema ampliamente estudiado pues es muy importante en aplicaciones biológicas y físicas<sup>[1]</sup>, por ejemplo, en la ingeniería oceánica<sup>1</sup>, mecánica, civil y marina<sup>[2,3]</sup>; las vibraciones de cuerpos inducidas por vórtices son encontradas en problemas como el flujo en torno a tubos que intercambian calor, chimeneas, líneas de transmisión y en estructuras marítimas<sup>2</sup><sup>[3,4]</sup>. El flujo en torno a cilindros presenta varios fenómenos físicos importantes como la separación, desprendimiento de vórtices y turbulencia en la estela, a números de Reynolds relativamente bajos<sup>[3]</sup>.

Históricamente, la complejidad matemática de la ecuación de Navier-Stokes ha dificultado la comprensión del comportamiento de los fluidos, impidiendo así la predicción del mismo. Hoy en día el gran desarrollo en el ámbito computacional permite estudiar numéricamente problemas que no tienen solución analítica, por ejemplo, la vorticidad en un flujo debida a un cuerpo inmerso en éste o a corrientes convectivas debidas a un gradiente de temperatura. En 2 dimensiones, el problema de un flujo rotacional en torno a un cilindro se ha abordado en muchos trabajos<sup>[5-11]</sup>; en particular Gabbai y Benaroya (2005)<sup>[9]</sup> realizaron una revisión muy completa de los experimentos y modelos del problema de Vibraciones Inducidas por Vórtices (VIV) en cilindros circulares. Inclusive se ha estudiado el problema análogo en torno a dos cilindros, en distintos arreglos configuracionales, en 2 y 3 dimensiones, mediante simulaciones computacionales y experimentalmente<sup>[3,4,12-16]</sup>.

En 3 dimensiones, el comportamiento dinámico de “estructuras solitarias flexibles” experimentando vibraciones inducidas por vórtices se ha estudiado mediante simulaciones computacionales haciendo uso de simulación numérica directa (DNS)<sup>[1,3,10,17]</sup>, con modelos donde la dinámica del sistema es modelada, no calculada<sup>[18-21]</sup> y experimentalmente<sup>[22-24]</sup>. En conjunto, investigaciones, numéricas y experimentales, recientes muestran la complejidad del problema<sup>[25]</sup>. Una revisión del problema VIV en general (resultados fundamentales y avances) fue realizada por Sarpkaya<sup>[6]</sup> y Williamson & Govadhan<sup>[8]</sup> en 2004.

Se sabe que el número de Reynolds es un parámetro con el cual es posible caracterizar al flujo y por lo tanto, inferir el comportamiento del mismo, por ejemplo, la presencia de vórtices o el desprendimiento de éstos. Así mismo, gracias a trabajos anteriores que abordan el problema VIV en cilindros circulares<sup>[1,8,9,11,26-28]</sup>, es conocido que existen dos parámetros adicionales necesarios para la adimensionalización de las ecuaciones que gobiernan el

---

<sup>1</sup>Estructuras como cables y soportes se encuentran inmersos en el mar sometidos al flujo oceánico.

<sup>2</sup>Las vibraciones inducidas por vórtices son unas de las principales preocupaciones con respecto al desgaste de estructuras como elevadores utilizados en la extracción de petróleo en alta mar.

fenómeno, uno de ellos es el cociente de densidades, el otro de alguna forma debe caracterizar la estructura. En estos trabajos puede observarse, por ejemplo, que las trayectorias del cuerpo inmerso son de tipo oscilatorio, que la vorticidad presenta varias morfologías dependiendo del valor de los parámetros utilizados, que la amplitud de oscilación vertical aumenta exponencialmente con el número de Reynolds ( $R_e$ ), que la distancia entre las capas de vórtices desprendidos aumenta con la velocidad de entrada, que las frecuencias de oscilación del cilindro y la de emisión de vórtices no siempre coinciden.

En el presente trabajo se muestran comportamientos coincidentes con los reportados en la literatura y algunos que difieren de ellos; se relacionan los comportamientos oscilatorios del cilindro con la vorticidad observada, además se encontró que el periodo de los coeficientes hidrodinámicos y  $R_e$  están relacionados mediante una ley de potencias. De igual forma se identificó que dicha potencia es mayor que 1 en regiones donde la amplitud de oscilación vertical del cilindro crece exponencialmente y menor que 1 cuando permanece constante. La identificación, predicción y estudio del fenómeno de resonancia resulta de gran importancia pues, de no ser previsto puede culminar en la ruptura total o parcial del sólido debida al rápido aumento de los esfuerzos sobre éste, poniendo en riesgo el desempeño del mismo, pudiendo repercutir en desastres sociales y naturales si se trata de pilares de instalaciones marítimas, tuberías de extracción de recursos naturales como petróleo y gas natural, etc.

## 2. Cilindro en un flujo uniforme y sujeto a una fuerza de Hooke.

En el problema, se supone un cilindro infinito de radio  $R$ , perfectamente sólido (indeformable), el cual puede trasladarse y moverse con respecto a su centro de masa; se encuentra sujeto a una fuerza restitutiva e inmerso en un fluido infinito de viscosidad  $\nu$ , el cual posee una velocidad constante ( $\bar{U}$ ) con respecto a la posición de equilibrio del cilindro en la frontera donde ingresa el flujo incompresible. Cuando el flujo en torno a un cilindro genera el desprendimiento de una seguidilla de vórtices alternantes, la fuerza hidrodinámica sobre el cuerpo presenta oscilaciones; debido a esto, si el cuerpo inmerso en el fluido no se encuentra fijo, el cilindro se moverá de acuerdo a la acción de dicha fuerza. Sin embargo, si el cuerpo se encuentra sujeto a una fuerza restitutiva dentro del flujo, debido a la oscilación de la fuerza hidrodinámica producida por el desprendimiento de vórtices se producirán las llamadas vibraciones inducidas por vórtices (VIV).

En problemas de un flujo viscoso en torno a un cuerpo fijo inmerso en éste, suelen utilizarse dos parámetros para la adimensionalización de las ecuaciones que describen la dinámica del problema, uno de ellos es el número de Reynolds ( $R_e = \frac{\bar{U}(2R)}{\nu}$ ), y el otro es el cociente de densidades  $\rho_t = \frac{\rho_f}{\rho_c}$ , donde  $\rho_c$  es la densidad del cilindro,  $\rho_f$  es la densidad del fluido. En este caso, la presencia de la fuerza restitutiva a la cual se somete el cuerpo inmerso requiere la inclusión de otro parámetro (inspirado en el número de Strouhal<sup>3</sup>), el

---

<sup>3</sup>En procesos donde un flujo se ve interrumpido por un objeto sólido produciendo un flujo no estacionario suele agregarse un parámetro adimensional extra llamado número de Strouhal ( $S_{t_o} = \frac{2Rf_v}{\bar{U}}$ ) donde se toma en cuenta, por ejemplo, la frecuencia de emisión de vórtices ( $f_v$ ) si existe desprendimiento de éstos.

cual está definido por la expresión

$$S_t \equiv \frac{4R^2}{\nu} \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \frac{4R^2}{\nu} \omega.$$

Donde  $k$  es la constante de proporcionalidad correspondiente a la fuerza restitutiva (de Hooke en este caso),  $m$  es la masa del cilindro y  $\omega$  es la frecuencia natural del resorte. Entonces, este nuevo parámetro ( $S_t$ ) que es independiente del número de Reynolds, que se definió para escalar las ecuaciones de movimiento del cilindro, y que ha sido utilizado en el estudio previo en el dominio bidimensional reportado en la sección 4, caracteriza la fuerza de Hooke, esto es, cuantifica la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo tomando en cuenta las propiedades del flujo y el cilindro. Usando como cantidades características al diámetro del cilindro ( $D = 2R$ , con  $R$  el radio del cilindro), la magnitud de la velocidad del flujo en el infinito ( $U$ ) y la viscosidad cinemática ( $\nu$ ), las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema están dadas por

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + R_e (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\nabla P + \nabla^2 \bar{v}, \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{S_t^2}{R_e} (\bar{r} - \bar{r}_0) + \frac{4}{U\pi\mu} \frac{\rho_f}{\rho_c} \int_{\Omega} \bar{\sigma} \cdot \hat{n} d^2r', \quad (3)$$

$$\bar{I} \cdot \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{4}{U\pi\mu} \frac{\rho_f}{\rho_c} \int_{\Omega} (\bar{r}' - \bar{r}) \times \bar{\sigma} \cdot \hat{n} d^2r'. \quad (4)$$

Donde  $\bar{v}$  representa la velocidad del flujo,  $U$  la magnitud de la velocidad del flujo en el infinito,  $R$  el radio del cilindro,  $t$  el tiempo,  $R_e$  el número de Reynolds ( $= \frac{U(2R)}{\nu}$ ),  $\bar{r}$  es la posición del centro de masa del cilindro,  $\bar{r}_0$  la posición de equilibrio del cuerpo en ausencia de flujo,  $\bar{u}$  es la velocidad del centro de masa del cilindro,  $S_t$  es el parámetro que caracteriza la fuerza restitutiva,  $\bar{I}$  es el tensor de inercia con respecto a los ejes principales del cilindro,  $\bar{r}'$  es la posición donde se aplica el diferencial de la fuerza hidrodinámica correspondiente,  $\Omega$  es la frontera del cilindro,  $\bar{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos,  $\hat{n}$  es la normal a la superficie del cuerpo,  $\mu$  es la viscosidad dinámica (la cual se relaciona con la cinemática mediante la relación  $\mu = \rho_f \nu$ ) y donde se ha definido a la presión adimensional

$$P = \frac{2R\rho_f}{U\rho_c\mu}. \quad (5)$$

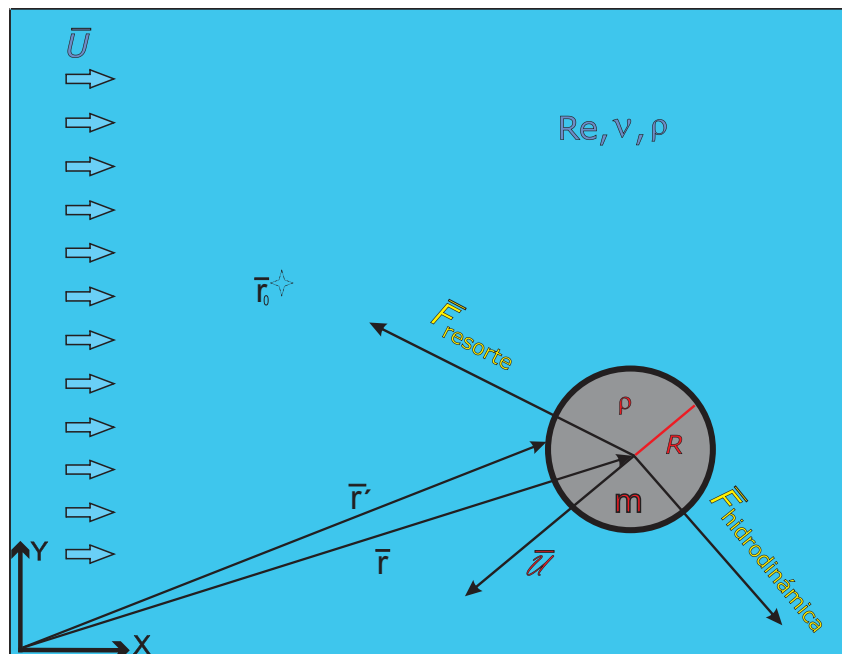


Figura 1: Sistema de un cilindro inmerso en un flujo incompresible y sujeto a una fuerza de Hooke.

Las ecuaciones (1) y (2) describen la dinámica del flujo; las 2 restantes corresponden a la descripción del movimiento del cuerpo inmerso, esencialmente la ecuación (3) corresponde a la segunda ley de Newton para el cuerpo bajo la acción de 2 fuerzas, la restitutiva y la hidrodinámica, finalmente, la ec. (5) describe la dinámica rotacional del cilindro (solo la fuerza hidrodinámica ejerce torca sobre el cuerpo).

Cabe hacer un paréntesis para resaltar que, en general, en los trabajos donde se aborda el problema [1, 8, 9, 11, 26–28], no se calcula la fuerza hidrodinámica, la influencia del flujo sobre el cuerpo inmerso se introduce mediante la inclusión de dos términos en la ecuación que describe la dinámica del cuerpo, uno de ellos, de fricción (proporcional a la velocidad), oponiéndose así en todo momento al movimiento del cilindro, el otro término es un forzamiento dependiente del tiempo (vía los coeficientes  $C_d$  y  $C_l$ ), por medio del cual evitan que la fricción introducida detenga al cilindro; el programa utilizado en este trabajo no modela de ninguna forma la respuesta del cilindro al flujo, realmente se calcula en cada paso la fuerza hidrodinámica que actúa sobre el cuerpo inmerso y ésta se introduce en las ecuaciones de Newton (que contienen la fuerza de Hooke) para resolver la traslación y/o rotación del mismo (adelante se da una descripción más detallada). Por otro lado, la dinámica del fluido es simulada mediante la ecuación de Boltzmann (Sección 3) y no haciendo uso de las ecuaciones 1 y 2.

Retomando el planteamiento del problema, debe mencionarse que debido a que el perfil del flujo al cual se somete al cuerpo inmerso es uniforme y constante, se exige que en la frontera donde éste ingresa al sistema la velocidad sea constante ( $\bar{U}$ ), además se suponen condiciones a la frontera libres de esfuerzos ( $\nabla v_{||} \cdot \hat{n} = 0$ , con  $v_{||}$  la velocidad paralela a la frontera y  $\hat{n}$  es el vector unitario normal a ésta) en los límites del sistema restantes y de adhesión en la superficie del cilindro ( $\bar{v} = \bar{u}$  en la frontera del cilindro).

Claramente el problema es demasiado complejo para resolverlo de forma analítica, inclusive hoy en día, con la gran herramienta computacional que existe, el estudio del fenómeno presenta grandes retos de optimización de tiempo computacional y de convergencia. Existen distintos métodos con los cuales es posible atacar el problema numéricamente como “Immersed boundary” [27], “Immersed boundary modified” [2,10], método de diferencias finitas [29], “Lagrangian moving mesh”, “Chimera Grid”, método “Volume of solid” e incluso “Volume of fluid” [2] en ciertas condiciones<sup>4</sup> o la simulación numérica directa (DNS), clásica y/o con modificaciones [2].

Sin embargo, tal y como se ha realizado en trabajos anteriores [30–45], al igual que en los resultados reportados en “Resultados Preliminares”, el estudio propuesto, se realizará utilizando el método de la Ecuación de Boltzmann en Redes (EBR) pues ofrece grandes ventajas con respecto a los otros métodos mencionados. Por ejemplo, la inmersión de un objeto móvil es un punto que suele complicar de forma importante la codificación de otros métodos, siendo necesaria la deformación de la malla para coincidir con la frontera del cuerpo o, por el contrario, la naturaleza del método EBR permite incluir el objeto dentro del flujo de forma relativamente sencilla, incluso en mallas cartesianas fijas; de igual forma, gracias a que es local, el método EBR es sencillo de paralelizar en las unidades de procesamiento gráfico (GPU’s en inglés), a diferencia de lo ocurrido en otros métodos, donde la no localidad de los mismos dificulta dicha paralelización; asimismo, con la metodología que se pretende utilizar y que se ha puesto a prueba para obtener los resultados reportados más adelante, se elimina por completo el uso de un modelo para la descripción del movimiento del cilindro, ya que la fuerza hidrodinámica es calculada en cada paso temporal, presentando entonces una mejora substancial con respecto a trabajos anteriores.

### 3. Método de la Ecuación de Boltzmann en Redes

El método de la Ecuación de Boltzmann está basado en la teoría cinética de los gases, en esencia supone que un gas puede modelarse como un conjunto de partículas con movimiento aleatorio y el intercambio de momento y energía entre éstas se lleva a cabo a través de colisiones elásticas; aunque esta ecuación fue derivada para gases muy diluidos, la gran generalidad de los conceptos utilizados permite su aplicación a fluidos mucho más densos. En redes, el método de Boltzmann, simplifica el original, pues en él los fluidos se suponen como una colección de partículas confinadas a los nodos de una red. Sin embargo, la forma del llamado término de colisión depende de la naturaleza de las partículas que conforman al fluido dentro del modelo, razón por la cual suele complicar la forma de la ecuación de Boltzmann. No obstante Bhatnagar, Gross y Krook notaron que la acción de dicho término se traduce en un acercamiento de la distribución de probabilidad a la distribución de equilibrio térmico. En ausencia de fuerzas externas y con la aproximación BGK, la

---

<sup>4</sup>Si se asume que el interior del sólido está ocupado por el mismo fluido incompresible que lo rodea, con un campo de velocidades prescrito y libre de divergencias, la interfase fluido-sólido es similar a una interfase fluido-fluido.



ecuación de transporte de Boltzmann tiene la forma <sup>[31, 32, 40, 46–50]</sup>.

$$\frac{\partial f(\bar{r}, \bar{c}, t)}{\partial t} + \bar{c} \cdot \nabla_r f(\bar{r}, \bar{c}, t) = -\lambda(f(\bar{r}, \bar{c}, t) - f_{loc}(\bar{r}, \bar{c}, t)). \quad (6)$$

Donde  $f(\bar{r}, \bar{c}, t)$  es la función de distribución de partículas, la cual representa el número de partículas (por unidad de volumen) cerca de la posición  $\bar{r}$  con velocidad (microscópica) próxima a  $\bar{c}$  al tiempo  $t$ ;  $f_{loc}(\bar{r}, \bar{c}, t)$  representa la función de distribución de equilibrio térmico local y está dada por

$$f_{loc}(\bar{r}, \bar{c}, t) = \rho(\bar{r}, t) \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m}{2k_B T} (\bar{c} - \bar{v}(\bar{r}, t))^2 \right). \quad (7)$$

Las cantidades físicas macroscópicas se obtienen mediante los momentos de la distribución de partículas, los primeros 2 momentos de la distribución se relacionan con la densidad y la velocidad del fluido,

$$\int f(\bar{r}, \bar{c}, t) d\bar{c} = \rho(\bar{r}, t), \quad (8)$$

$$\int \bar{c} f(\bar{r}, \bar{c}, t) d\bar{c} = \rho(\bar{r}, t) \bar{v}(\bar{r}, t). \quad (9)$$

Es sabido que de la ecuación (6), a través del desarrollo de Chapman-Enskog se recuperan las ecuaciones de Navier-Stokes en el límite incompresible <sup>[51]</sup>. Este hecho abre la puerta para una forma alternativa de hacer simulación computacional de fluidos; en lugar de discretizar directamente las ecuaciones de N-S, se discretiza la ecuación de Boltzmann (ec. (6)); con esto se “reducen” todos los cálculos a cálculos sobre la distribución de equilibrio. Este método ha sido utilizado en distintos trabajos <sup>[30–46]</sup>.

La discretización de la ecuación (6) se lleva a cabo usando diferencias finitas de Euler a primer orden, llegando a la expresión

$$f_j(\bar{r} + \bar{c}_j, t + 1) - f_j(\bar{r}, t) = -\lambda(f_j(\bar{r}, t) - f_{loc_j}(\bar{r}, t)). \quad (10)$$

Donde se ha tomado en cuenta que el paso temporal y de distancia son iguales a la unidad.

Para mantener las igualdades de las ecuaciones (8) y (9), el espacio de velocidades colapsa a un número finito de vectores  $\{\bar{c}_j\}$ , en dos dimensiones este conjunto contiene 9 elementos. Este modelo (a segundos vecinos) es conocido como D2Q9 y el conjunto

$\{\bar{c}_j\} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$ . El subíndice  $j$  en la ecuación 10 hace referencia al  $j$ -ésimo elemento del conjunto  $\{\bar{c}_j\}$ . Mientras que la aproximación de la distribución de equilibrio discreta, consistente con el orden del método resulta

$$f_{loc_j}(\bar{r}, t) = \rho(\bar{r}, t)w_j(1 + 3\hat{c}_j \cdot \bar{v} + \frac{9}{2}(\hat{c}_j \cdot \bar{v})^2 - \frac{3}{2}(\bar{v}^2)). \quad (11)$$

En resumen, en dos dimensiones, a cada nodo de la red espacial se le asocian 9 funciones de probabilidad discreta  $f_j$ , cada una de las cuales describen la probabilidad de moverse en la correspondiente dirección  $j$ . Y los momentos de la distribución se calculan mediante las expresiones:

$$\sum_{j=0}^8 f_j(\bar{r}, \bar{c}, t) = \rho(\bar{r}, t) \quad (12)$$

$$\sum_{j=0}^8 \bar{c} f_j(\bar{r}, \bar{c}, t) = \rho(\bar{r}, t)\bar{v}(\bar{r}, t) \quad (13)$$

Por otro lado después de hacer el procedimiento correspondiente en Chapman-Enskog se determina que la relación entre el tiempo de relajación ( $\tau = \frac{1}{\lambda}$ ) y la viscosidad esta dada por la expresión

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6}. \quad (14)$$

Bajo este contexto, las condiciones a la frontera deben traducirse en condiciones sobre la función de distribución. La discretización de la ecuación de Boltzmann (ec. 10) hace evidente que en los “puntos frontera” faltará información que debería provenir del otro lado de ella, dicha información es generada de forma tal que cumpla con las condiciones de frontera asociadas al borde correspondiente. Para los límites del sistema donde no ingresa el flujo, la generación de estas funciones de distribución fue desarrollada por Aidun, Lu y Ding en 1998 <sup>[49]</sup> simplemente aplicando la condición libre de esfuerzos a los “puntos frontera”. Por otro lado, para la frontera del cilindro (condición de adhesión al cuerpo), el algoritmo usado es el que desarrollaron Guo, Sheng y Shi en 2002 <sup>[47]</sup>, en su trabajo, para calcular la información faltante, introducen una función de equilibrio ficticia y la parte de no equilibrio es aproximada usando interpolación con los dos nodos vecinos en la dirección donde se encuentra la frontera, tal y como lo hicieron Mandujano y Rechtman en 2008 <sup>[46]</sup>.

Gracias a que la inmersión de un cuerpo en el flujo es sencilla en este método, a que resulta fácil de paralelizar y a que es local, es posible desarrollar la simulaciones en dominios

“grandes” ( $10000 \times 3000$ ) con solo una fracción del costo que se presenta cuando se utilizan otros métodos.

En el programa utilizado, para reproducir las condiciones del problema se emplea una malla cuadrada fija cuyos vértices representarían el fluido; inmersa en ésta se encuentra el cilindro antes descrito, por supuesto, los puntos de la malla que se encuentran dentro de él (para cualquier tiempo) son descartados (desde el punto de vista del flujo). Debido a que el cilindro se mueve dentro del flujo (y a la condición de adhesión en su frontera), es casi imposible que esta coincida con puntos de la malla, razón por la cual la frontera del cilindro se busca usando un algoritmo con el método de bisección; después usando los puntos de la malla más cercanos a la frontera (por dentro y por fuera), se calcula el valor de la velocidad en dichos puntos para que en la superficie del cuerpo coincida con su velocidad. La fuerza hidrodinámica en cada punto de la frontera del cilindro es calculada en cada paso mediante la diferencia entre dos momentos, el primero corresponde a los puntos de la frontera del cilindro y el segundo a dichos puntos pero obtenido mediante el procedimiento utilizado en zonas donde no se encuentra el sólido, esto es, se realizan ambos cálculos, tomando en cuenta la presencia del cuerpo inmerso y omitiéndola del todo. La densidad del cilindro y del fluido son iguales entre sí; la velocidad en infinito se calcula a partir de la viscosidad (con un valor fijo dentro del código) y, del número de Reynolds y radio dados para la ejecución del programa.

El programa utilizado, fue realizado por el Dr. Mandujano quien lo desarrolló usando CUDA (Compute Unified Device Architecture), mientras que los medidores de las cantidades físicas fueron desarrollados (dentro del código) por mi persona.

Así, en resumen, se tiene un problema con un flujo incompresible en torno a un objeto inmerso en este, con condiciones iniciales y de frontera dadas; dicho problema es simulado mediante un código EBR, a grandes rasgos el algoritmo usa la ecuación (10) para encontrar la función de distribución un paso temporal adelante; inmediatamente después, usando el campo de velocidades encontrado, se calcula la fuerza hidrodinámica ( $\bar{F}_{hid}$ ) sobre el cilindro y entonces se resuelve el paso temporal de la ecuación de movimiento del cuerpo; por último se corrige, “generando” la información correspondiente a los nodos descubiertos por el movimiento del cuerpo, lo que completa la simulación de un paso temporal del fenómeno. Ahora, se repite el proceso una y otra vez para conseguir una gran cantidad de configuraciones, cada una de las cuales pertenece a un tiempo dado. Por último, haciendo uso de los momentos de la distribución se obtienen las propiedades macroscópicas del fluido.

Se validó el programa realizando simulaciones con el cilindro fijo, comparando los coeficientes de arrastre promedio calculados (para  $Re = 100$  y  $Re = 200$ ) con los reportados en trabajos anteriores <sup>[44, 52-58]</sup>, los resultados se muestran en la Tabla 3. Cabe resaltar que el código ya había sido validado anteriormente en el caso estacionario, encontrando diferencias menores al 5% con los reportados previamente.

	Referencias	$C_d$
$R_e = 100$	Clift et al. (1978) <sup>[54]</sup>	1.24
	Gresho et al. (1984) <sup>[52]</sup>	1.76
	Braza et al. (1986) <sup>[55]</sup>	1.364
	Saiki et al. (1996) <sup>[53]</sup>	1.26
	Liu et al. (1998) <sup>[58]</sup>	1.350
	Calhoun et al. (2002) <sup>[57]</sup>	1.330
	Wu et al. (2009) <sup>[44]</sup>	1.364
	$C_d$ en este trabajo	1.32
$R_e = 200$	Clift et al. (1978) <sup>[54]</sup>	1.16
	Gresho et al. (1984) <sup>[52]</sup>	1.76
	Braza et al. (1986) <sup>[55]</sup>	1.40
	Belov et al. (1995) <sup>[56]</sup>	1.19
	Saiki et al. (1996) <sup>[53]</sup>	1.18
	Liu et al. (1998) <sup>[58]</sup>	1.31
	Calhoun et al. (2002) <sup>[57]</sup>	1.172
	Wu et al. (2009) <sup>[44]</sup>	1.349
	$C_d$ en este trabajo	1.42

## 4. Resultados Preliminares

Se realizaron simulaciones computacionales en 2 mallas diferentes,  $4096 \times 2048$  y  $10000 \times 3000$ ; la malla pequeña se considera suficientemente grande para que el cilindro tenga bastantes puntos que definan su frontera de forma que las diferencias entre la silueta descrita por éstos y la real sean despreciables, y por otro lado, el cuerpo se encuentre tan lejos de las fronteras como para despreciar los efectos que pudieran tener éstas en la trayectoria del cilindro, así mismo permite apreciar el desprendimiento de vórtices y su viaje en una zona donde la influencia de las fronteras sea insignificante; la necesidad de observar la estela a distancias mayores, es precisamente la razón por la cual es menester el aumento del tamaño de la malla. Las simulaciones se efectuaron para valores del parámetro  $S_t$  de 200, 300 y 362 barriendo un rango del número de Reynolds de 90 a 315 para la malla de  $4096 \times 2048$ , mientras que se eligieron casos representativos para la realización de simulaciones con la malla de  $10000 \times 3000$ .

Tal y como se esperaba, y como lo muestran las Figuras 2-5 y 7-11, las trayectorias del cilindro inmerso en el flujo son de tipo oscilatorio (cerradas y abiertas), algunas de ellas, muy similares a las encontradas en la literatura <sup>[6,10,26,28]</sup>; estas oscilaciones son precisamente producidas por el desprendimiento de vórtices en el flujo.

Se encontraron trayectorias en “forma de ocho” (las más reportadas en la literatura), periódicas y cuasiperiódicas, simétricas con respecto a la horizontal, perfectamente simétricas con respecto a la vertical o sesgadas hacia alguno de los lados. En este caso, el comportamiento de la amplitud de oscilación con respecto al número de Reynolds exhibe dos posibilidades, ausencia total en el aumento en la amplitud de la oscilación, esto es, permanece constante (Figura 2 y 3) o un crecimiento exponencial tal y como se muestra en

las Figuras 4 y 5, dicho crecimiento en la amplitud de oscilación vertical fue corroborado mediante un ajuste numérico (Figura 6). El aumento exponencial sugiere la existencia de una resonancia, la cual ocurre por el acoplamiento constructivo entre la fuerza de Hooke y la de sustentación; en contraparte, cuando la amplitud no presenta aumento, la respuesta del resorte aumenta la complejidad de la estructura de la estela, y por ende, la de la fuerza hidrodinámica en el flujo, dificultando así el acoplamiento entre dichas fuerzas eliminando la posibilidad de resonancia.

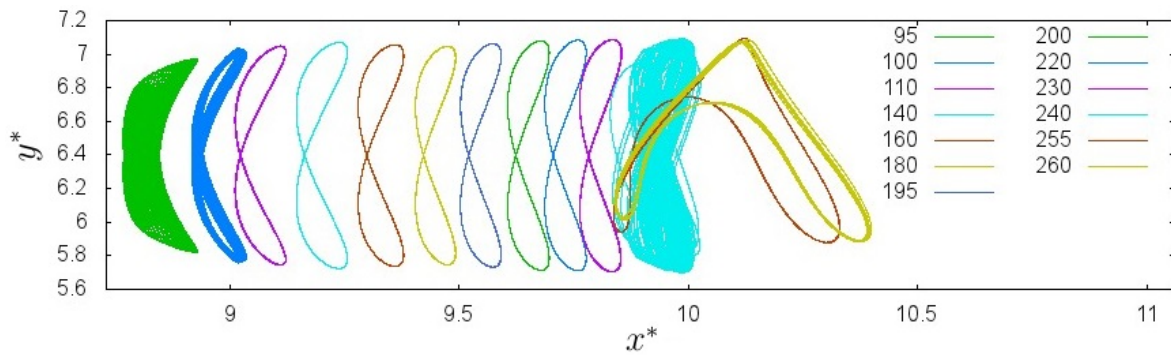


Figura 2: *Traectorias representativas del cilindro para  $S_t = 200$  y un rango del número de Reynolds de 90–260 ( $x^*$  y  $y^*$  son la posición horizontal vertical adimensionales, respectivamente).*

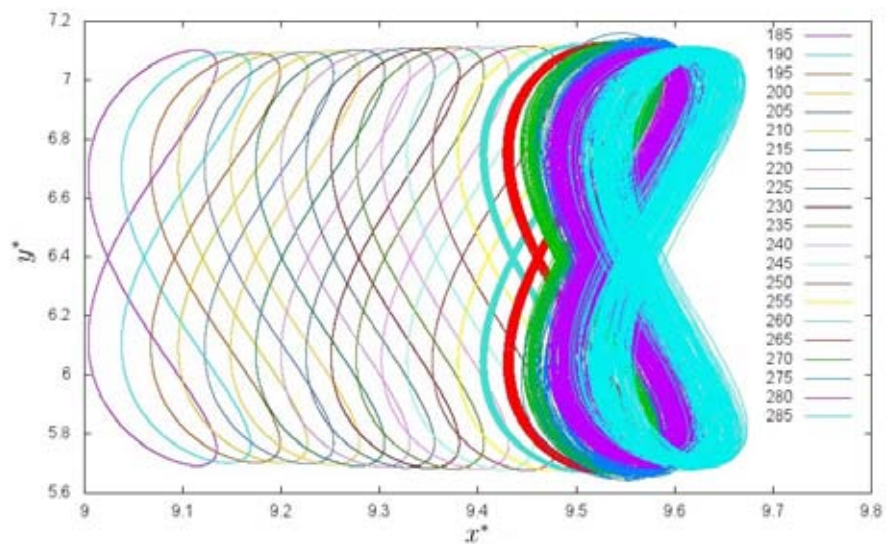


Figura 3: *Traectorias del cilindro para  $S_t = 300$  y un rango del número de Reynolds de 180–285 ( $x^*$  y  $y^*$  son la posición horizontal vertical adimensionales, respectivamente; es notoria la ausencia de aumento en la amplitud de la oscilación en dirección  $y$ ).*

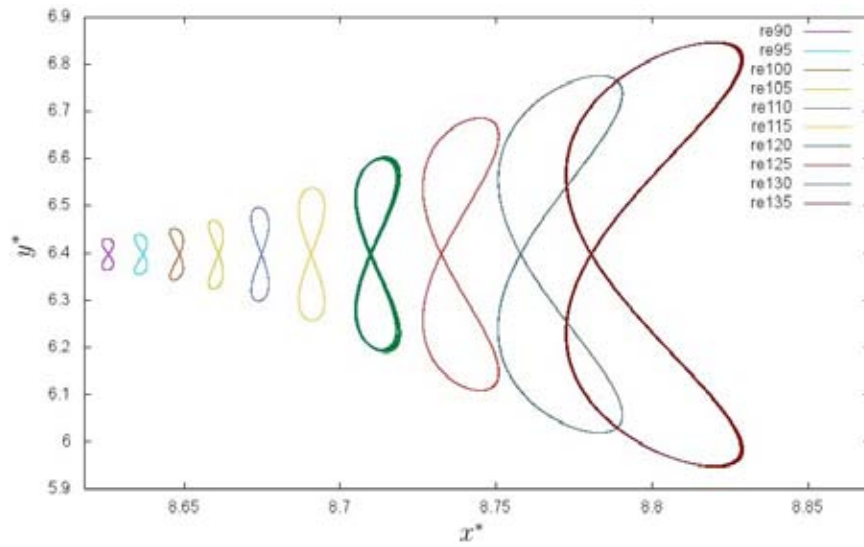


Figura 4: Trayectorias del cilindro para  $S_t = 300$  y un rango del número de Reynolds de 90 – 135 ( $x^*$  y  $y^*$  son la posición horizontal vertical adimensionales, respectivamente).

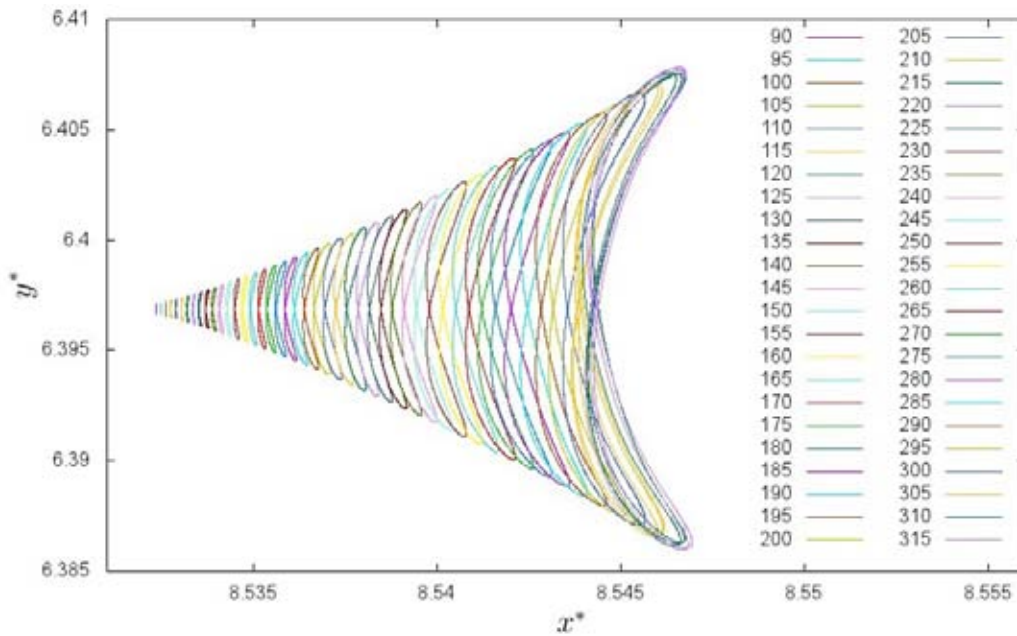


Figura 5: Trayectorias del cilindro para  $S_t = 362$  y un rango del número de Reynolds de 90 – 315 ( $x^*$  y  $y^*$  son la posición horizontal vertical adimensionales, respectivamente).

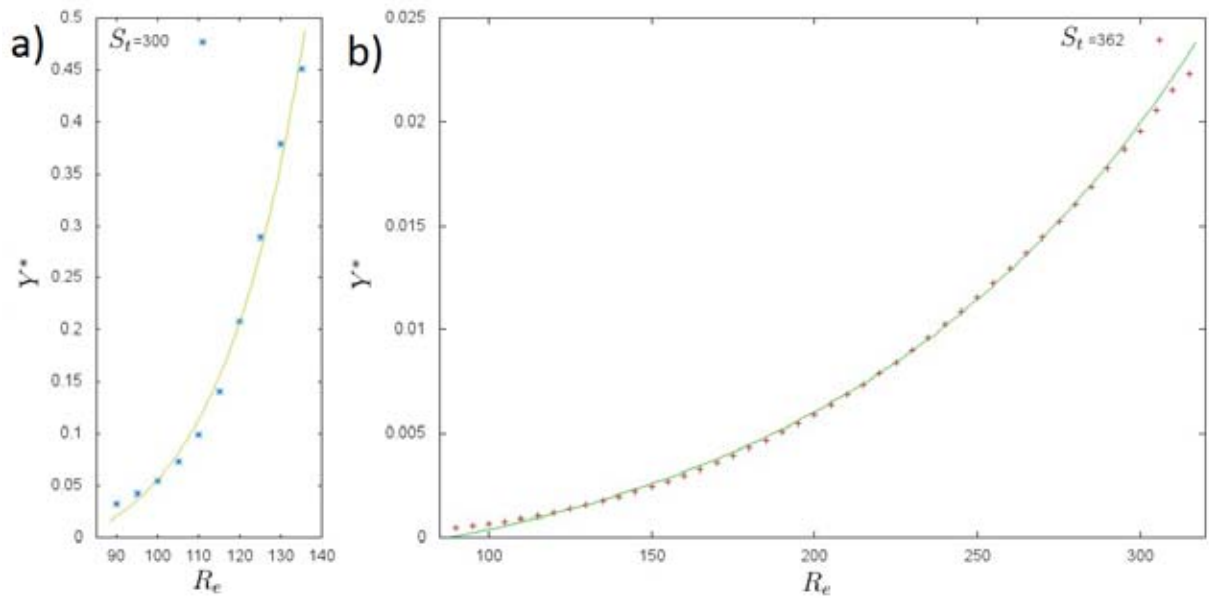


Figura 6: Se muestran las amplitudes de la oscilación con respecto al número de Reynolds para: a)  $S_t = 362$  y b)  $S_t = 300$ ; además de la correspondiente función ajustada  $A = 3.5 \times 10^{-3} + 1.57 \times 10^{-3} \exp(0.009R_e)$  y  $A = 0.04 + 7 \times 10^{-4} \exp(0.048R_e)$  respectivamente ( $Y^*$  es la amplitud adimensional de la oscilación vertical).

También se encontraron trayectorias oscilatorias, cuasiperiódicas, con base en “forma de ocho” pero aparición de inestabilidades conforme avanza el tiempo (Figuras 8), las cuales son responsables de la apariencia complicada en las gráficas del movimiento del cilindro en la Figura 7. En las Figuras 8 b) y c) puede observarse que la periodicidad de la posición en  $x$  y en  $y$  parecen no estar relacionadas entre sí, lo mismo ocurre en los incisos e) y f) de la misma figura, de hecho, las frecuencias de su espectro resultaron inconmensurables entre sí. Las trayectorias se muestran simétricas con respecto a la horizontal a excepción de la correspondiente a  $S_t = 300$  y  $R_e = 160$ , en la cual “el ocho parece torcido” (Figura 8 d)), este hecho se analizará más adelante.

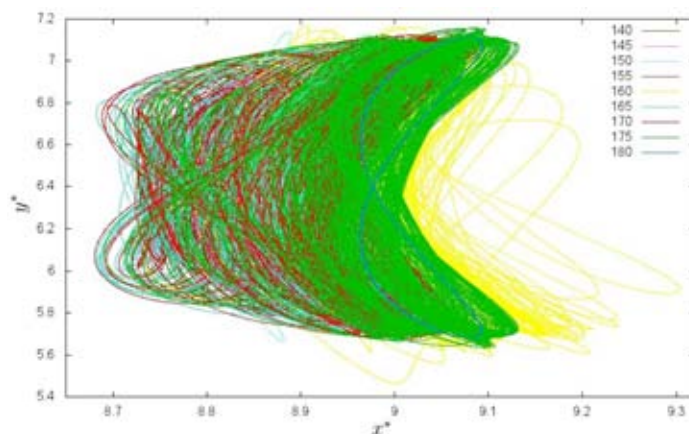


Figura 7: Trayectorias del cilindro para  $S_t = 300$  y un rango del número de Reynolds de 140 - 180 (para  $R_e = 180$  ya no aparecen inestabilidades).

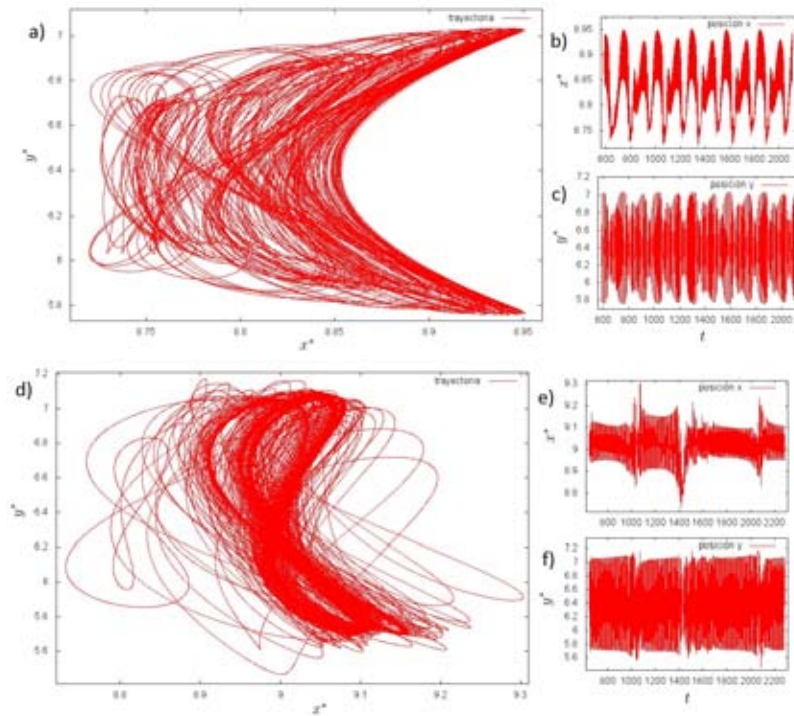


Figura 8: Posición del cilindro para  $S_t = 300$ . a) Trayectoria del cuerpo para  $R_e = 140$ . b) Posición sobre el eje “x”. c) Posición sobre el eje “y”. d) Trayectoria del cuerpo para  $R_e = 160$  (es clara la asimetría con respecto a la horizontal). e) Posición sobre el eje “x”. f) Posición sobre el eje “y” ( $t^*$  representa el tiempo adimensional).

De igual forma, se obtubieron figuras asimétricas con respecto a la horizontal, asemejando la silueta de un “boomerang”, tal y como se exhibe en las Figuras 9 y 10. Sin embargo, las trayectorias periódicas son las menos, pues la mayoría son cuasiperiódicas y no periódicas, tal y como se muestra en la Figura 10; debido al despertar de nuevas frecuencias en el espectro de oscilación vertical (y/u horizontal), las frecuencias de oscilación vertical y horizontal resultan inconmensurables entre sí de  $R_e = 265$  en adelante (Figuras 10 d) y g)).

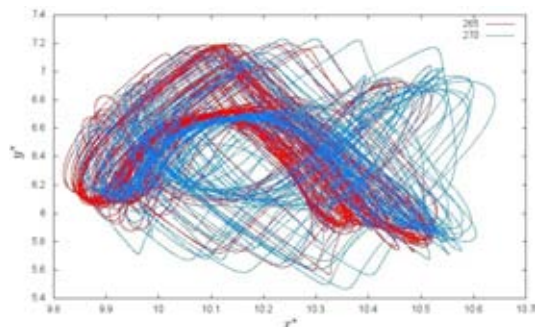


Figura 9: Trayectorias del cilindro para  $S_t = 200$  con  $R_e = 265$  y  $R_e = 270$ .



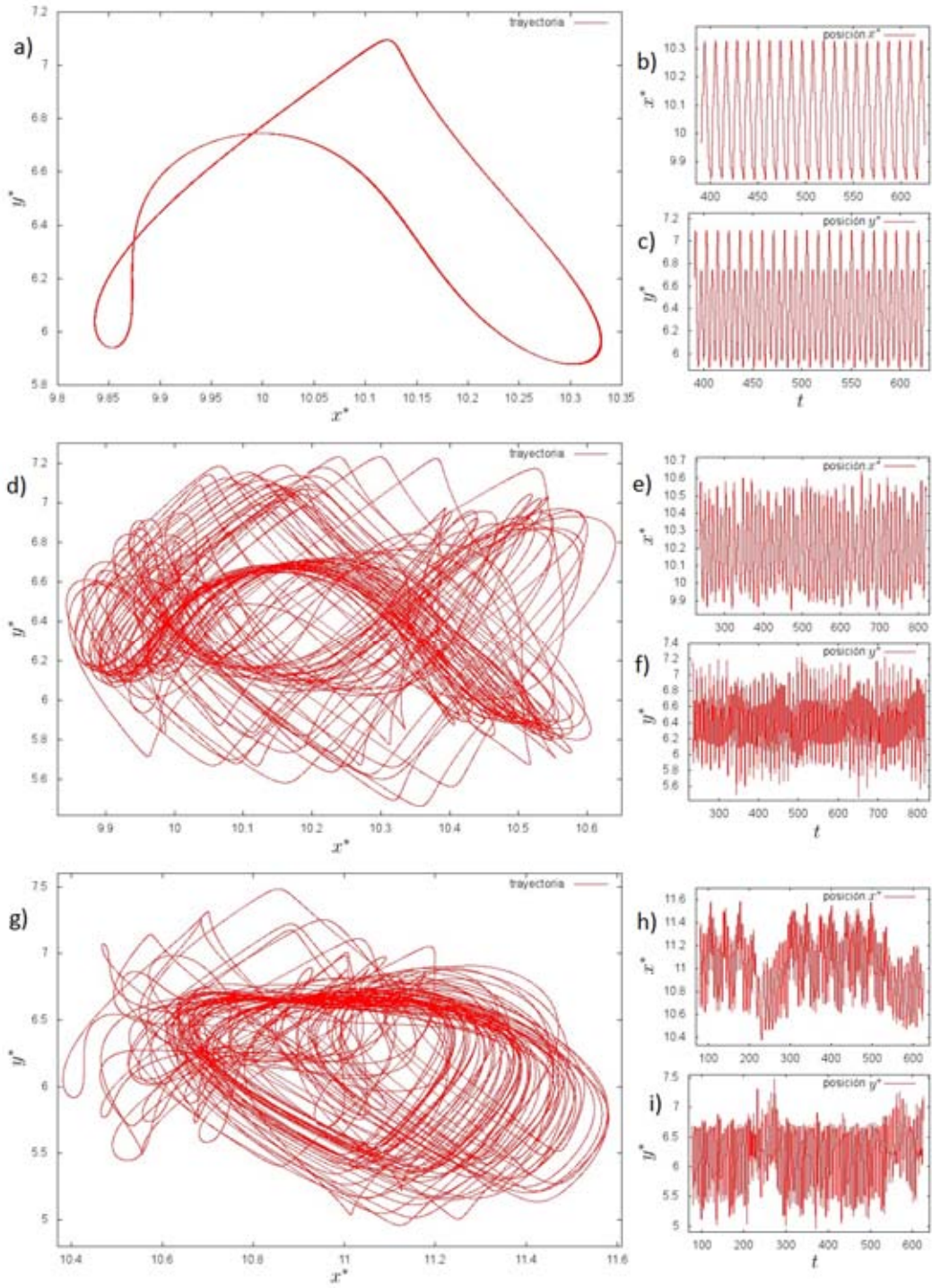


Figura 10: Trayectorias representativas para  $St = 200$  y distintos números de Reynolds. a)  $R_e = 255$ . d)  $R_e = 270$ . g)  $R_e = 310$ .

Para finalizar con el análisis de las trayectorias, debe mencionarse que se encontraron trayectorias complejas, periódicas (Figura 11 a) y d)) y, cuasiperiódicas (Figura 11 g)); parecen simétricas con respecto a la horizontal (a excepción de la correspondiente al inciso a) de la misma figura). Las frecuencias de oscilación vertical y horizontal del cilindro resultan inconmensurables entre sí para la trayectoria del inciso g) de la figura antes mencionada;

de igual forma, para las otras 2 trayectorias de la Figura 11, la conmensurabilidad de las respectivas frecuencias de oscilación permite concluir que dichas trayectorias son periódicas a diferencia de la correspondiente a la Figura 11 g), la cual resulta cuasiperiódica. Es notoria la diferencia en “densidad de líneas” entre los incisos a) y d) con respecto al g) de la Figura 11, comportamiento debido a la periodicidad de la trayectoria.

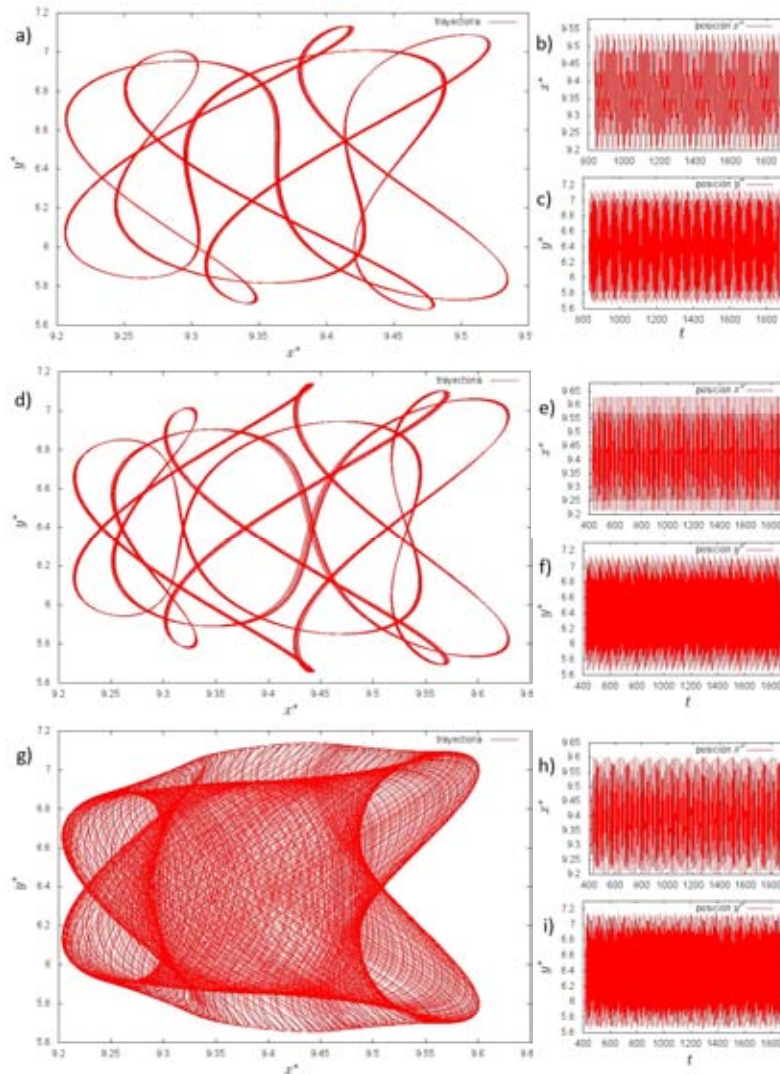


Figura 11: Trayectorias representativas para  $St = 300$  y distintos números de Reynolds. a)  $Re = 290$ . d)  $Re = 305$ . g)  $Re = 300$ .

Como ya se mencionó secciones detrás, además de la traslación, el cilindro posee la libertad de rotar; debido a la oscilación de la fuerza hidrodinámica y a la interacción del fluido con el cilindro, este último gira sobre su eje de simetría axial. En general, dicha rotación es despreciable y simétrica, esto es, no existe “rotación efectiva” (“ $RE$ ”) y/o la amplitud de la oscilación esta por debajo de los 0.5 radianes (para  $S_t = 362$  no existe  $RE$  en todo el intervalo de números de Reynolds tomados en cuenta). No obstante, existen casos donde la posición angular del cilindro no es despreciable, ya sea por la magnitud de su amplitud de oscilación o por la existencia de  $RE$ . El análisis de la influencia de la rotación

en la trayectoria del cilindro y el desprendimiento de vórtices se realiza posteriormente en este trabajo.

Desde el punto de vista del flujo, se identificaron las calles de vórtices encontradas en las simulaciones mediante la clasificación propuesta por Williamson <sup>[5]</sup>, encontrando tipo  $2S^5$ ,  $P+S^6$ ,  $2P^7$  y variaciones de estas, algunas de las cuales son estructuras de vorticidad que no han sido reportadas con anterioridad. Una representación de la clasificación antes mencionada se puede observar en la Figura 12. Ahora se prosigue con el análisis de las estelas encontradas, dejando para más adelante la correlación entre éstas y las trayectorias observadas.

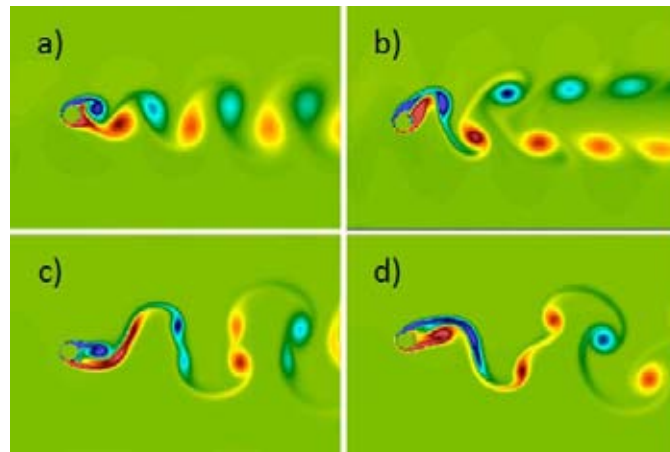


Figura 12: Clasificación de la calle de vórtices según Williamson <sup>[5]</sup>. a) Tipo  $2S$ , b) Tipo  $2S$  con morfología distinta, c)  $2P$ , d)  $P+S$ .

Las estructuras tipo  $P+S$  observadas se presentan en las Figuras 13 f) y g), debe señalarse que se presentan ambos casos dentro de dicho tipo, desprendimiento de 1 vortice “negativo” y 2 consecutivos “positivos” (Figura 13 f)) y viceversa, digamos  $S+P$  (Figura 13 g)); la estructura de la estela cambia en el tiempo, pasando de  $P+S$  a  $2P$  y/o a  $S+P$  etc. Por otro lado, en las estructuras tipo  $2P$  que se encontraron, es evidente que esta configuración no perdura durante el viaje a lo largo de la seguidilla de vórtices, se funden para reproducir la estructura característica  $2S$  (Figura 13 e)).

<sup>5</sup>Los vórtices  $2S$  representan el desprendimiento de un solo vórtice en cada medio ciclo de oscilación del cilindro (similar al desprendimiento de vórtices natural de von Kármán). <sup>[5,59]</sup>

<sup>6</sup>Los vórtices  $P+S$  representan el desprendimiento de tres vórtices por cada ciclo de oscilación del cilindro; una sola pareja en medio ciclo y un solo vórtice en el medio ciclo complementario. <sup>[5,59]</sup>

<sup>7</sup>Los vórtices  $2P$  representan el desprendimiento de una sola pareja de vórtices en cada medio ciclo de oscilación del cilindro. <sup>[5,59]</sup>

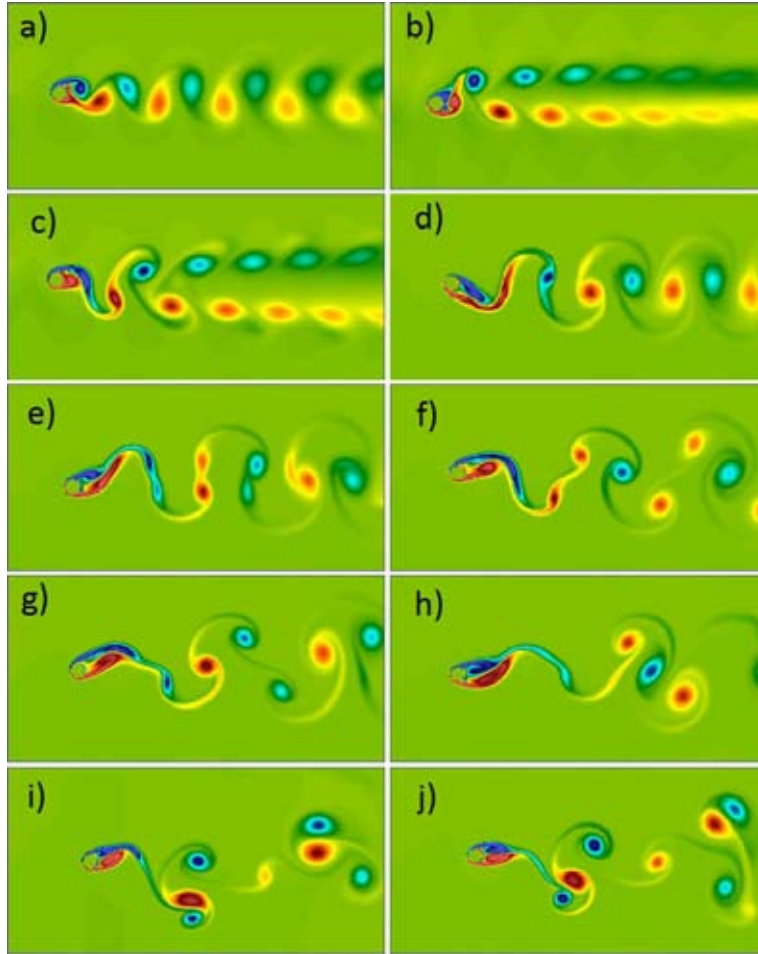


Figura 13: *Vorticidad para  $St = 200$  y varios números de Reynolds: a)  $Re = 90$ , b) 100, c) 130, d) 170, e) 200, f) 225, g) 250, h) 255, i) 300 y j) 315.*

Por otro lado, las estructuras tipo 2S encontradas (Figuras 13 a), b), c) , d), 14 a) hasta f) y 15) coinciden en ciertos comportamientos generales: aparición de un cambio en la configuración de la estela cuya distancia hasta el cilindro varía con el cambio del número de Reynolds; de igual forma se comporta el ángulo de apertura de la calle y la distancia entre las capas de vórtices de la calle, los cuales no son constantes y cambian con  $Re$  (hechos que pretenden ser estudiados a fondo con simulaciones posteriores en la malla de  $10000 \times 3000$ ).

En algunos casos, es notoria la aparición de pequeños vórtices que viajan por fuera de ambos lados de la estela y que viajan a una velocidad mayor a la de los “principales” (Figura 14 g)); algunas configuraciones mantienen su “forma” hasta la aparición del cambio de estructura en la estela, mientras que otras sufren una gran deformación durante su viaje (Figura 14 h) e i)). De igual modo, cabe resaltar la aparición de estructuras donde se desprenden grupos de 3 vórtices tipo 2S, los cuales interactúan entre sí a medida que se alejan del cilindro, dichas estructuras pueden observarse en la Figura 13 h), i) y j).

Un caso interesante corresponde a estructuras donde la seguidilla de vórtices (2S) es interrumpida (en el tiempo) por una inestabilidad que emerge de forma periódica (Figura

14 c), d) y e)) que parece provenir de grandes cambios en la trayectoria del cilindro, como se verá mas adelante.

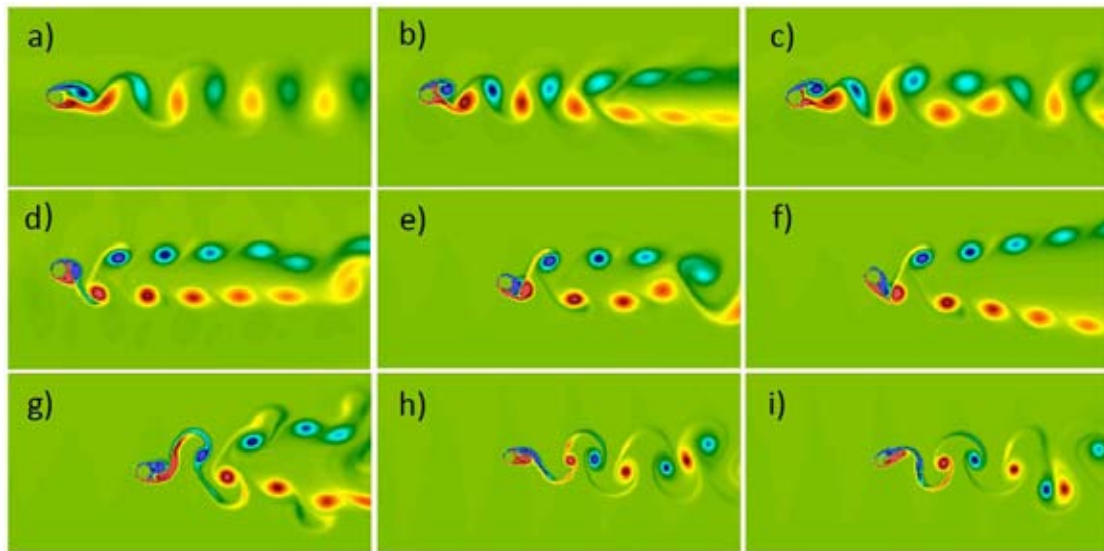


Figura 14: *Vorticidad para  $S_t = 300$  y varios números de Reynolds: a)  $R_e = 90$ , b) 135, c) 140, d) 155, e) 170, f) 180, g) 270, h) 290 e i) 310.*

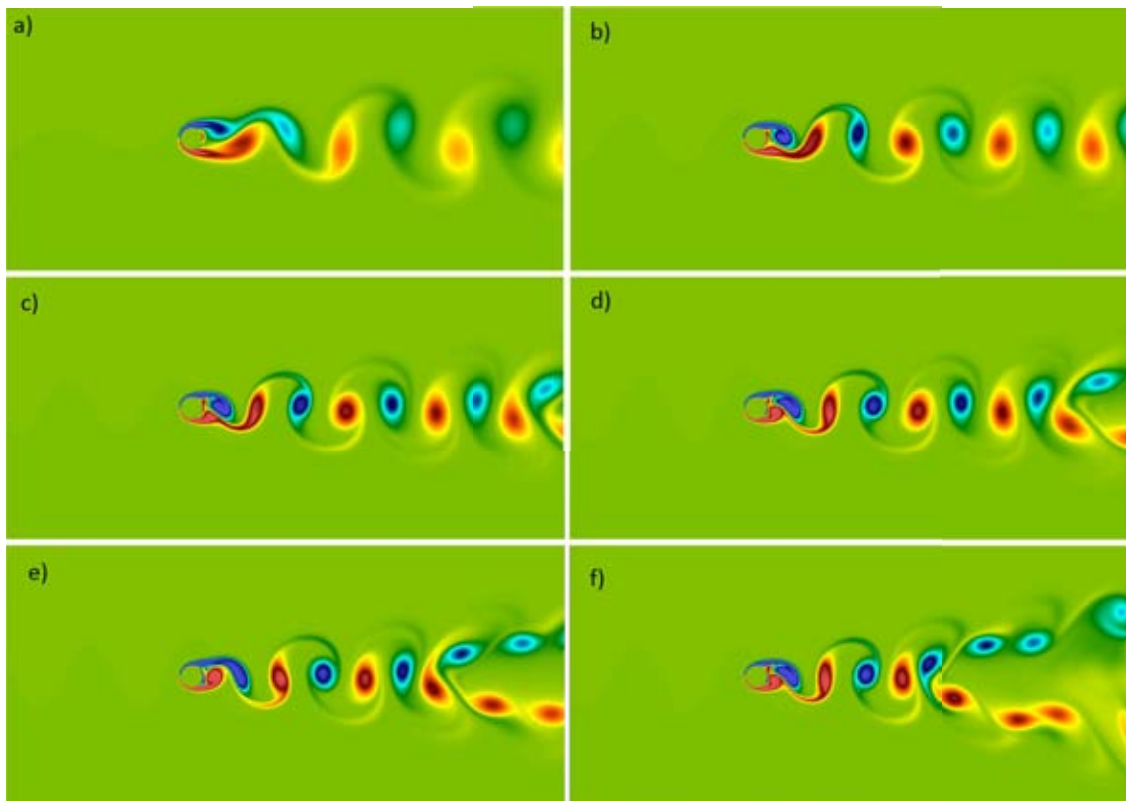


Figura 15: *Vorticidad para  $S_t = 362$  y varios números de Reynolds: a)  $R_e = 100$ , b) 200, c) 250, d) 275, e) 300 y f) 315).*

Con la información descrita hasta ahora, es posible correlacionar el movimiento del cilindro con el comportamiento del flujo; se comenzará con el análisis de la correlación de la rotación del cilindro con las trayectorias y estelas encontradas.

En las Figuras 16 y 17, se muestran trayectorias, vorticidad y variación angular en casos donde esta última es apreciable y despreciable; la primera de ellas, sugiere una relación cercana entre la rotación del cilindro y la trayectoria de este en el flujo, así como independencia de la vorticidad con respecto a la variación angular, mientras que la segunda reitera la relación entre rotación y trayectoria, pero sugiere que la presencia de rotación apreciable coincide con cambios de la estela (Figura 17). Asimismo es posible apuntar la correspondencia en complejidad de trayectoria y estela con casos donde la rotación del cuerpo (sea de magnitud apreciable o despreciable) no presenta un comportamiento senoidal. Cabe resaltar que en la figura 16, para  $S_t = 300$  y  $Re = 160$  (Figura 16 c)) como se mencionó anteriormente, la trayectoria del cuerpo inmerso acusa pérdida de simetría con respecto a la horizontal, posiblemente resultado de la gran  $RE$  (más de dos giros completos).

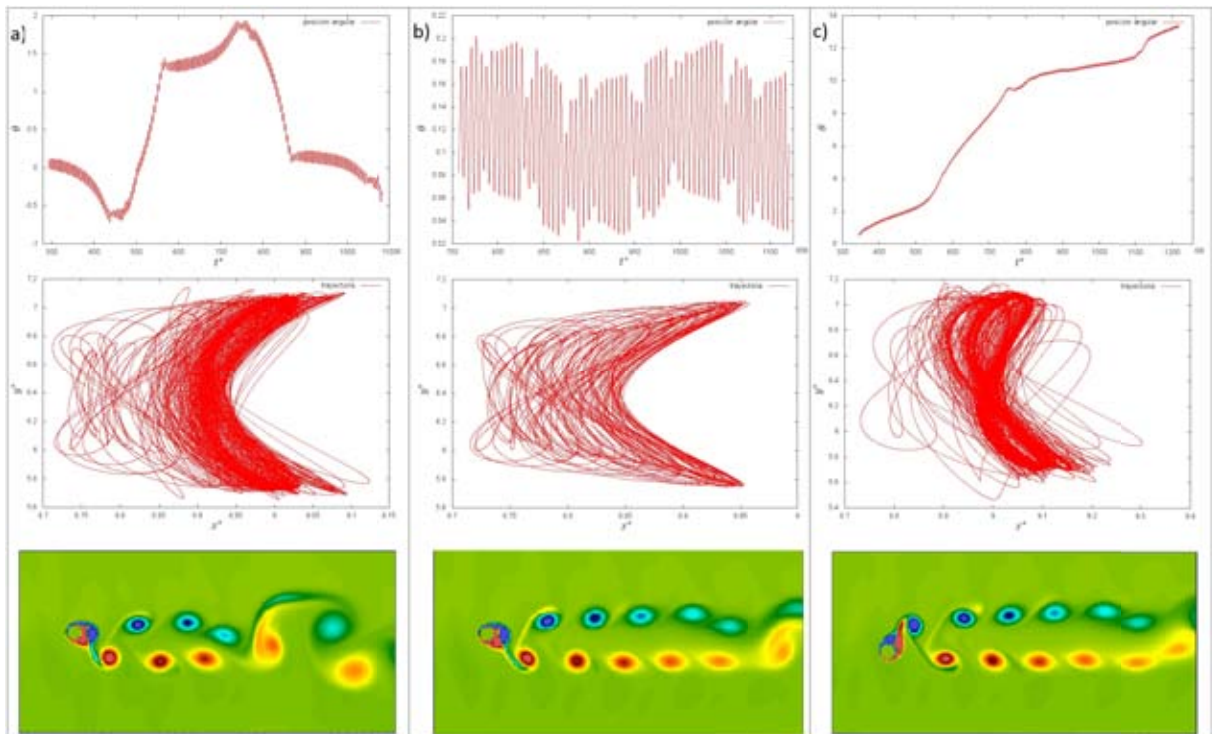


Figura 16: Comparativo de trayectoria y vorticidad con respecto a la existencia de: a) rotación apreciable ( $\sim 2.5$  rad), b) despreciable ( $\sim 0.24$  rad) y c)  $RE$  ( $\sim 14$  rad).

Así mismo, ambas figuras (16 y 17) sugieren una cercanía importante entre el cambio en la pendiente de “crecimiento efectivo angular” y las transiciones entre los comportamientos periódicos correspondientes a las trayectorias en ciertos intervalos temporales, por ejemplo, en la Figura 17 b), la pendiente de crecimiento efectivo angular cambia de signo solo una ocasión, comportamiento que resulta coincidente con la “limpieza” de la trayectoria correspondiente, parece que es justamente en dichos cambios de crecimiento donde el “boomerang” se refleja con respecto a la horizontal (Figura 18); ya que los resultados

no presentan evidencias suficientes para determinar el papel que juega la rotación en el fenómeno, la extensión del estudio en esta dirección se convierte en uno de los objetivos a largo plazo, realizando, por ejemplo, simulaciones con un cilindro que no posee la libertad de rotar.

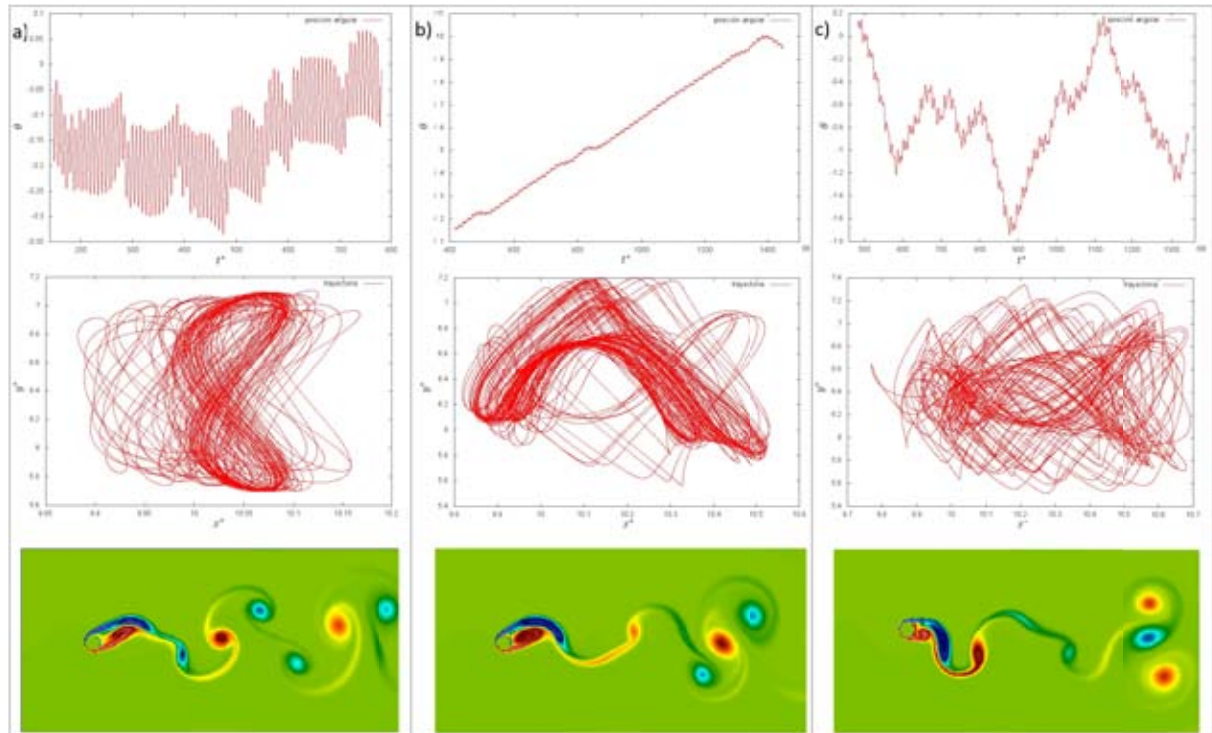


Figura 17: Comparativo de trayectoria y vorticidad con respecto a la existencia de: a) rotación despreciable ( $\sim 0.4$  rad), b) con RE ( $\sim 10$  rad) y c) con magnitud de oscilación apreciable ( $\sim 2.0$  rad).

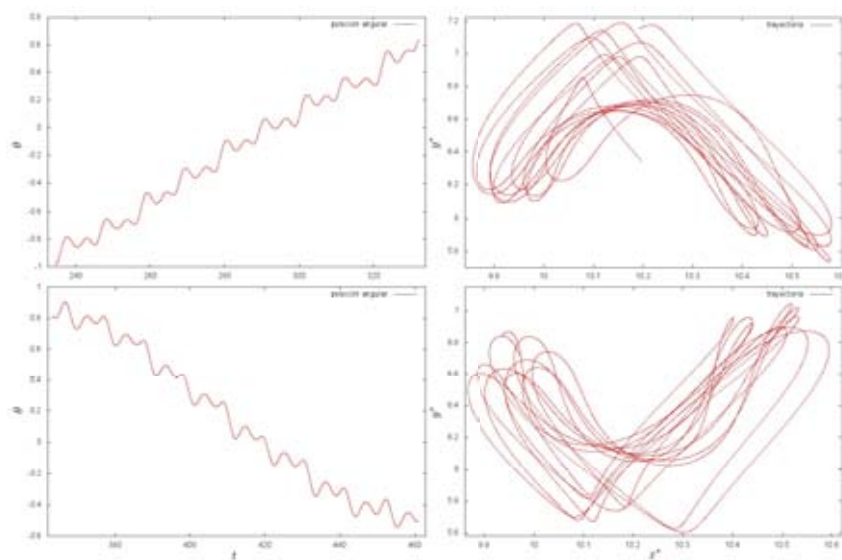


Figura 18: Correlación pendiente de crecimiento-traectoria. Se observa que al cambiar la pendiente de crecimiento efectivo la trayectoria sufre una reflexión con respecto a la horizontal.

Por último, para las simulaciones realizadas en la malla pequeña, se realizó un análisis para identificar la relación entre el número de Reynolds y los periodos de los coeficientes de arrastre y sustentación. Los datos presentan grandes discontinuidades, no obstante, existen intervalos donde la curva parece suave, dentro de estos intervalos es donde se realiza el análisis; se encuentra que los coeficientes son proporcionales (salvo una constante aditiva) a una potencia negativa del número de Reynolds. Además se encontró una relación entre la presencia del fenómeno de resonancia y la magnitud de la potencia con respecto a la unidad, esto es, el análisis arroja una potencia mayor a 1 cuando se encuentra en el intervalo donde la amplitud de oscilación aumenta exponencialmente con  $R_e$ , mientras que la potencia correspondiente al intervalo donde la amplitud de oscilación parece constante es menor que la unidad.

Las discontinuidades presentes son debidas a que en esos intervalos, el espectro de éstos coeficientes posee más de una frecuencia y, en esos casos, la principal no coincide con el comportamiento que exhiben los intervalos cercanos; de esta forma pronostican un cambio importante de comportamiento que refleja la no linealidad del fenómeno.

Así mismo, en ambas figuras (19 y 20) es evidente la posibilidad de que otra ley de potencias describa la relación entre  $T_{C_d}^*$  (o  $T_{C_l}^*$ ) y  $R_e$  en los puntos correspondientes a los números de Reynolds mas altos que se simularon, y que en las gráficas no van acompañados de ajuste numérico, mas aún, para el coeficiente de sustentación y el caso  $S_t = 200$  la Figura 20 sugiere que el periodo aumenta con el incremento de  $R_e$ . Sin embargo, la presencia de discontinuidades en los extremos de dichos puntos y la poca cantidad de éstos no permite emitir conclusiones, razón por la cual es necesario ahondar en el asunto.

Por otro lado, debe mencionarse que en estas zonas el comportamiento de los coeficientes hidrodinámicos difiere entre sí, caso contrario al resto de puntos donde puede observarse que existe gran semejanza en el comportamiento ambos coeficientes ( $C_d$  y  $C_l$ ) con respecto al número de Reynolds. Este último hecho es el que permite teorizar en la posibilidad de conocer el periodo de uno de los coeficientes a partir del periodo correspondiente al restante.

Además, las Figuras 19 y 20 facilitan la correlación trayectoria-vorticidad-comportamiento del periodo de oscilación del coeficiente de arrastre (o sustentación); al observar dichas imágenes, resulta sencillo notar que existe cierta relación entre el comportamiento de los vórtices desprendidos y las trayectorias del cilindro.

El ajuste numérico para  $S_t = 362$  y  $S_t = 300$  ( $R_e \in [90, 135]$ ) corresponde a trayectorias “tipo ocho” en la zona de resonancia, en estos casos, la estela coincide con la perfecta representación del tipo 2S con la aparición del cambio en la estela que varía con  $R_e$ ; una vista rápida a las Figuras 19 y 20 muestra que la cercanía de la frecuencia de oscilación del coeficiente de sustentación a la frecuencia natural del sistema resorte cilindro es independiente de la presencia de resonancia, es por eso que es necesario ahondar en el fenómeno para identificar la frecuencia de resonancia, desarrollar la metodología para poder encontrarla bajo las condiciones que sean y entender el papel del desfase en la aparición o no de la resonancia.

De igual forma, el ajuste numérico para  $S_t = 200$  y  $S_t = 300$  ( $R_e \in [180, 285]$ ) corres-



ponde a zonas donde la trayectoria es en “forma de ocho”, pero sin presencia de aumento en la amplitud, la estela es tipo 2S pero el desprendimiento de los vórtices es en los extremos de dicha trayectoria, para  $S_t = 200$  hacen aparición los pequeños vórtices que viajan por fuera de la estela; gracias a la comparación de ambas imágenes de la Figura 19 (o 20) puede decirse que las estructuras tipo 2P y P+S encontradas también corresponden a estas trayectorias “tipo ocho” para  $S_t = 200$ , de hecho conforme aumenta  $R_e$  se presentan varios tipos de estela, la forma en que lo hacen es:  $2S- > 2P- > P+S- > 2P- > P+S$ . Debe resaltarse que dichas transiciones parecen no reflejarse en variaciones de la trayectoria y/o cambios abruptos en el periodo de ambos coeficientes hidrodinámicos.

Cabe resaltar que para  $S_t = 300$  los ajustes realizados se alejan de los datos conforme estos últimos “se acercan” a la zona de discontinuidad, en ambos casos, los datos se alejan por encima del ajuste, comportamiento que sugiere que dichos puntos comienza el despertar de nuevas frecuencias por lo que, en cierto modo, corresponden a estados de transición.

En las Figuras 19 y 20 aparecen puntos donde no se realizó ajuste numérico. Para  $S_t = 300$  dichos puntos corresponden a las trayectorias más complejas encontradas, la estela es tipo 2S, no obstante sufre una gran deformación en su viaje (extremo derecho de las gráficas en la Figura 20). Por otro lado, para  $S_t=200$ , éstos puntos corresponden a las trayectorias tipo “boomerang” y estelas con la estructura de grupos de vórtices tipo 2S (esquina superior derecha de las gráficas de la Figura 19).

La zona de discontinuidad correspondiente a  $S_t = 200$  ocurre para los valores de  $R_e$  más altos explorados en este trabajo. A éstos puntos corresponden trayectorias tipo “boomerang” con múltiples reflexiones con respecto a la horizontal y/o deformaciones del perfil. Así mismo, comparte el tipo de estela (estructuras de grupos de 3 vórtices que se desprenden y deforman en su viaje) con los puntos que aparecen en la esquina superior derecha de las gráficas de la Figura 19.

Un caso muy interesante corresponde a la sección de discontinuidad correspondiente a  $S_t = 300$  (Figuras 19 y 20), estos intervalos reflejan cambios fuertes de comportamiento, pues los hay más bruscos; lugares donde los cambios son más paulatinos. En esta zona las trayectorias presentan inestabilidades, las cuales se reflejan en la vorticidad de igual forma (parte central de las gráficas de la Figura 19 o 20). En estos casos, la trayectoria se muestra periódica en intervalos de tiempo considerables, los cuales están separados por las inestabilidades que se traducen en deformaciones “puntuales” de la estela (tipo 2S), dicha anomalía viaja a lo largo del dominio. En algunos casos el cambio brusco en la trayectoria genera en la estela algo más que una corta deformación en la misma, no obstante, en cada caso, transcurridas las inestabilidades de la trayectoria y la estela desprendida, ambas recuperan una estructura periódica.

Y los preludios, en donde no hay comportamiento suave, reflejan cambios fuertes, pues los hay más bruscos; lugares donde los cambios son más paulatinos.

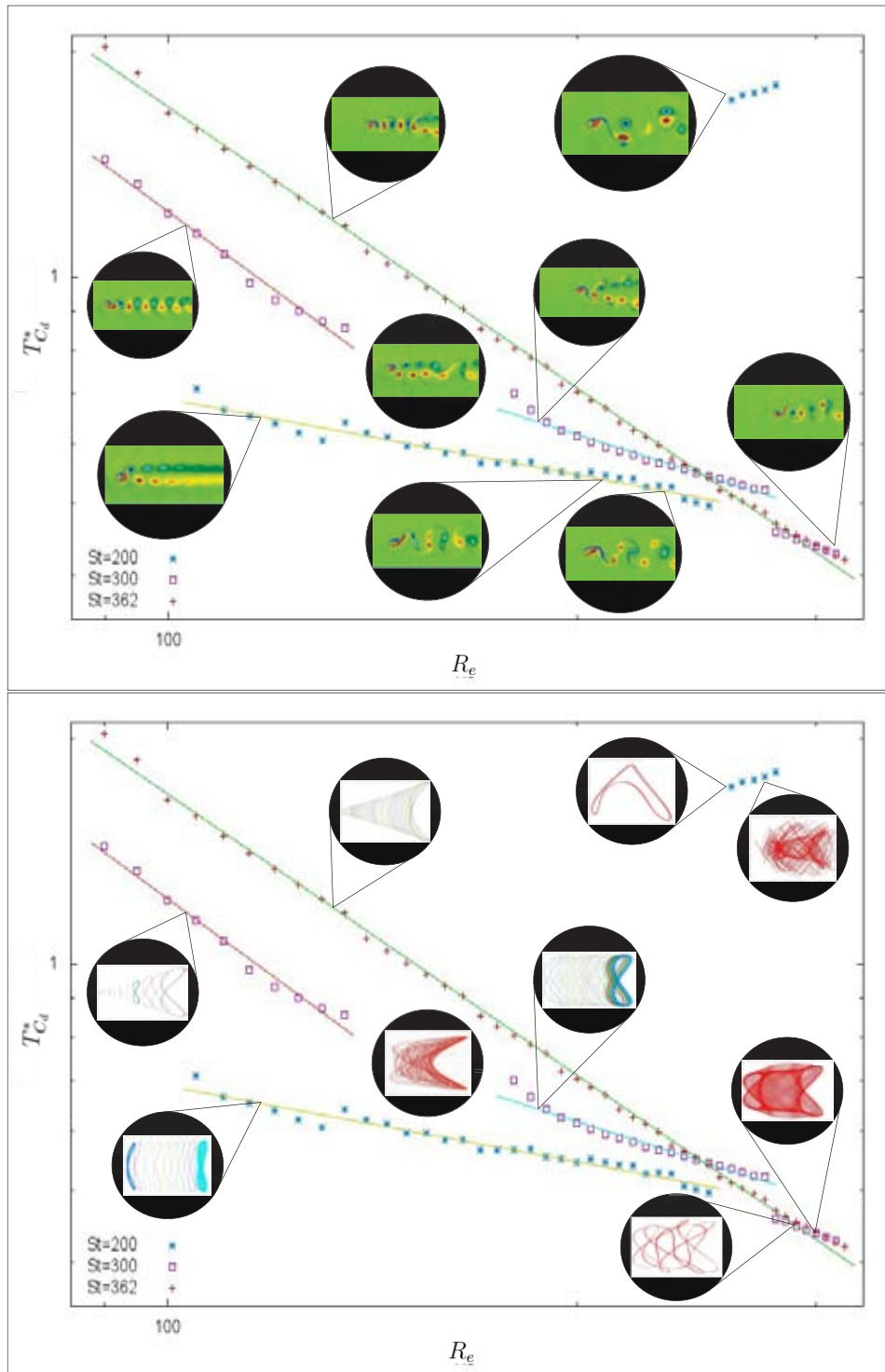


Figura 19: Periodo adimensional del coeficiente de arrastre, contra el número de Reynolds y su respectivo ajuste (La escala es log-log). Las potencias encontradas para las zonas con resonancia son: 1.33 y 1.245, mientras que las potencias encontradas para las zonas donde la amplitud de oscilación vertical permanece constante son: 0.57 y 0.33; las discontinuidades presentes en los datos, se deben a que en la simulación correspondiente, los espectros de los coeficientes poseen frecuencias no conmensurables entre sí ( $T_{C_d}^*$  representa el periodo adimensional, obtenido usando la frecuencia natural del resorte en cada caso).

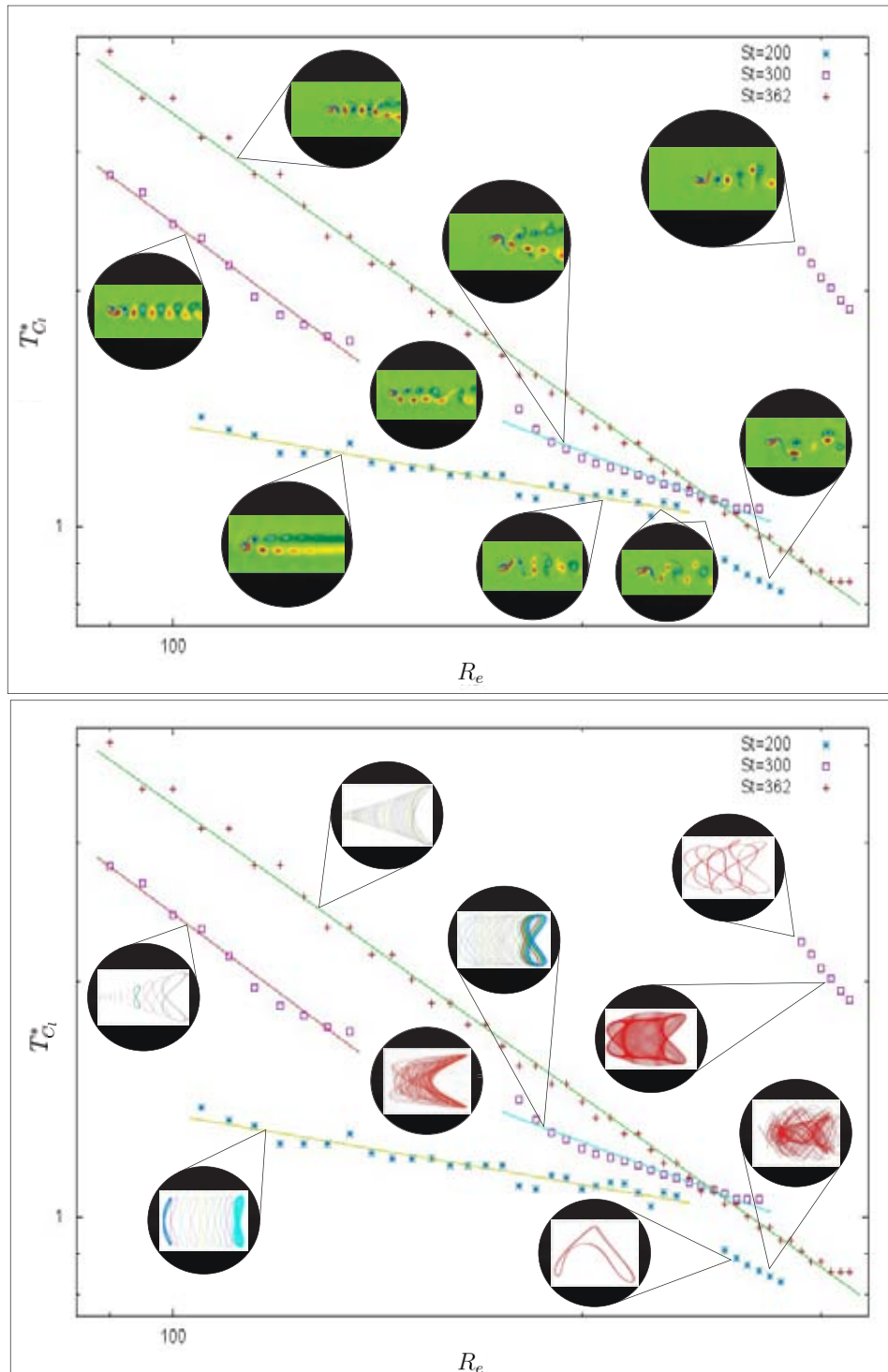


Figura 20: *Periodo adimensional del coeficiente sustentación, contra el número de Reynolds y su respectivo ajuste (La escala es log-log). Las potencias encontradas para las zonas con resonancia son: 1.29 y 1.235, mientras que las potencias encontradas para las zonas donde la amplitud de oscilación vertical permanece constante son: 0.64 y 0.29; las discontinuidades presentes en los datos, se deben a que en la simulación correspondiente, los espectros de los coeficientes poseen frecuencias no conmensurables entre sí ( $T_{C_l}^*$  representa el periodo adimensional, obtenido usando la frecuencia natural del resorte en cada caso).*

Tomando todo esto en cuenta es imperativo apuntar la similaridad de comportamientos correspondientes a distintos valores del parámetro  $S_t$  y distintos intervalos del número de Reynolds (Figuras 19 y 20), razón por la cual es posible especular en la posibilidad de que cualquier comportamiento observado para un cierto intervalo de  $R_e$  y valor de  $S_t$  fijo, encuentre símil para cualquier otro valor de  $S_t$ , solo que en un intervalo de números de Reynolds distinto (exceptuando las zonas con discontinuidades).

Como preámbulo al amplio y exhaustivo estudio propuesto, se realizaron simulaciones con una malla de  $10000 \times 3000$ , para una examinación cualitativa del comportamiento de la calle de vórtices a grandes distancias (225 veces el diámetro del cilindro) para ciertos valores de los parámetros que describen el sistema (Figura 21).

En general el desprendimiento de vórtices generados por un flujo en torno a un cilindro presenta 3 fases. La primera, conocida como la estela cercana, ha sido ampliamente estudiada y consiste en la traslación de vórtices alternantes en dirección del flujo; la segunda fase se caracteriza por la formación de 2 capas de vórtices que viajan paralelamente entre ellas; el final de esta fase se presenta como un acercamiento entre dichas capas hasta la aparición de una inestabilidad, la cual es responsable de la tercera fase, donde se emiten vórtices a una frecuencia distinta a la que son desprendidos por el cilindro en la fase primera. Dicha inestabilidad, reportada con anterioridad <sup>[60]</sup> puede observarse en algunas de las imágenes de vorticidad correspondientes a la malla  $4096 \times 2048$ ; no aparece en todas debido justamente a que la distancia al cilindro varía con el número de Reynolds. Es por esto que es necesario extender la malla para estudiar ciertos aspectos de la segunda y tercera fase de la estela, tales como: distancia del cilindro a la inestabilidad, longitud de la segunda fase, distancia entre las capas de vórtices que la conforman, frecuencia a la que se desprenden los vórtices de la tercera fase, entre otras.

En las simulaciones realizadas para  $S_t = 300$ , las estelas son muy similares, su estructura puede verse en la primer imagen de la Figura 21, la configuración coincide con la generalidad descrita en el parrafo anterior. Por otro lado, en las simulaciones donde  $S_t = 400$ , la segunda fase se ha suprimido, es decir, existe un punto donde la seguidilla de vórtices desprendida por el cilindro presenta una inestabilidad dando paso a un nuevo desprendimiento de éstos; cabe resaltar que las frecuencias a la que se desprenden los remolinos, de la inestabilidad y del cilindro, son diferentes. También, en la primera fase, se observa la emisión de pequeños vórtices que viajan por fuera de la estructura principal (2S) y que se emiten a una menor frecuencia que los vórtices de la misma; estos pequeños “remolinos” contribuyen a la complicada configuración de la tercera fase de la estela (la cual presenta cierta periodicidad), donde algunos de ellos se funden en la segunda inestabilidad y otros permanecen, desapareciendo mas adelante debido a la disipación.

Un objetivo claro del trabajo propuesto es la caracterización de la estela lejos en el problema abordado en este protocolo de investigación; en un estudio anterior para un flujo en torno a un cilindro fijo <sup>[60]</sup> se reporta que la distancia del cilindro a la segunda inestabilidad va como  $R_e^{-1/2}$ , parece claro que dicha relación no se extiende al problema que compete este trabajo y al propuesto, pues en este caso el cilindro no guarda una posición fija, además resulta difícil imaginar que dicha distancia sea independiente de la fuerza restitutiva a la que esta sometido el cuerpo inmerso. Sin embargo, tal distancia parece ser un parámetro

mediante el cual es posible comenzar la caracterización de la estela lejana. De igual forma, se puede especular sobre la posibilidad de obtener la frecuencia de emisión de los vórtices de la segunda estela haciendo uso del “número de Strouhal local”, el cual está definido por la distancia entre vórtices consecutivos del mismo lado del cuerpo ( $l$ ) y el diámetro del cilindro en el flujo ( $S_{t,local} = \frac{2R}{l}$ )<sup>[60]</sup>. Además, para ambos números de Strouhal (local y original), se buscará la relación funcional con  $Re$ .

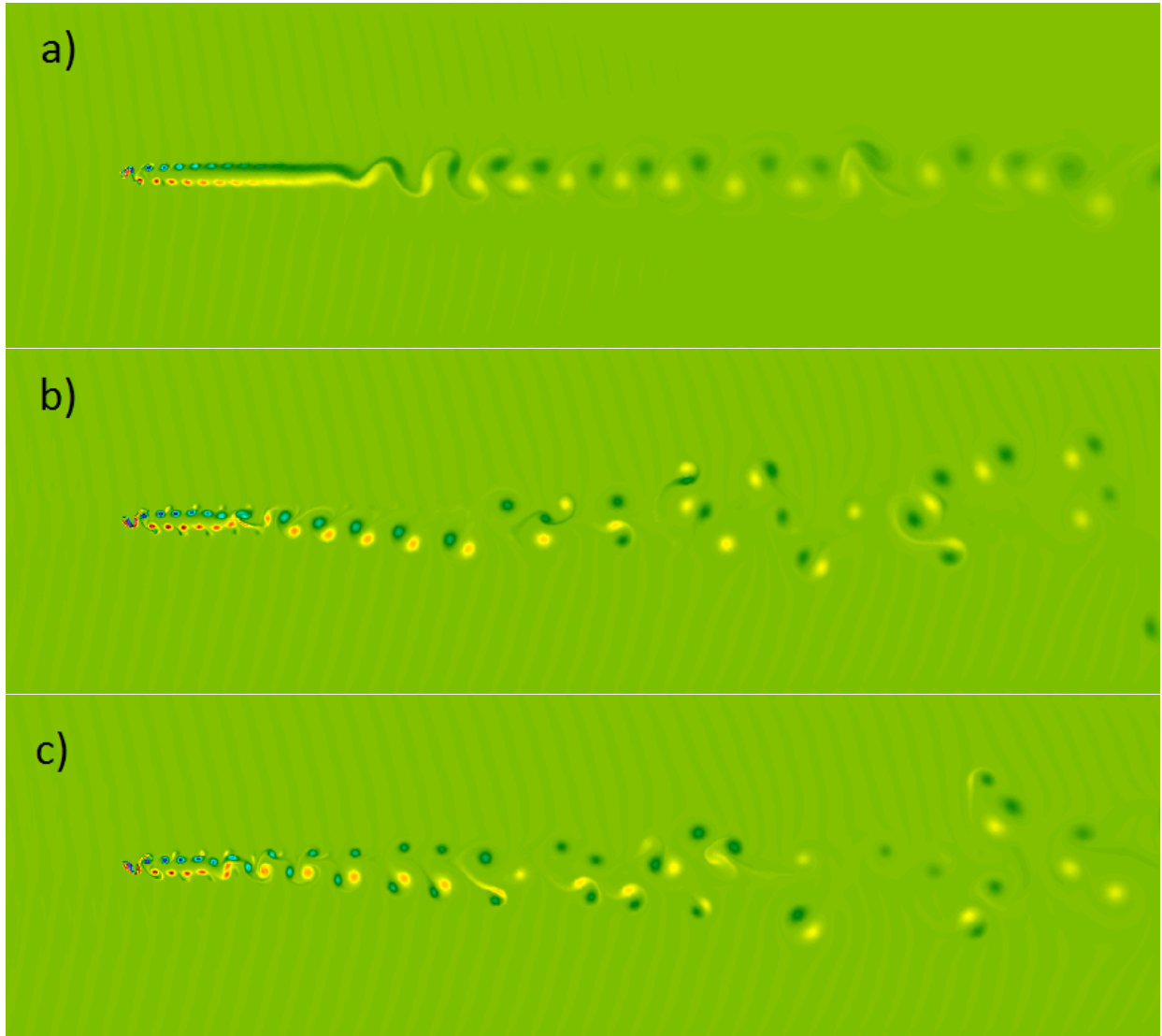


Figura 21: *Vorticidad para: a)  $S_t = 300$  con  $Re = 170$ , b)  $S_t = 400$  con  $Re = 265$  y c)  $S_t = 400$  con  $Re = 275$ . La malla es de  $250 \times 75$  diámetros, el cilindro está ubicado a 25 diámetros de la frontera donde ingresa el flujo, dejando la posibilidad de observar 225 diámetros de la estela.*

## 5. Conclusiones y Perspectivas

En el trabajo realizado se lograron observar variadas morfologías en las trayectorias del cilindro producidas por el desprendimiento de vórtices y en la estela cercana, éstos

comportamientos cambian con la variación de los parámetros  $S_t$  y  $R_e$ . Ya que en todas las simulaciones realizadas el cociente entre densidades es igual a 1, la exploración del fenómeno para otros valores del parámetro  $\rho_s$  se postula como el objetivo más próximo a cumplir.

De igual forma se observó que el ángulo de apertura de la estela, la aparición del cambio en la misma y la distancia vertical entre los vórtices desprendidos, dependen del número de Reynolds. Sin embargo, es necesario ampliar el estudio para determinar dicha dependencia y poder predecir el comportamiento, es claro que las simulaciones para alcanzar este objetivo deberán realizarse en una malla de mayor tamaño a la utilizada con anterioridad, cuidando además priorizar la porción de estela simulada sin descuidar la influencia de las fronteras en ésta y/o la trayectoria del cuerpo.

Por otro lado se encontró una correlación entre vorticidad, rotación y trayectoria del cuerpo, la cual permite realizar hipótesis acerca de la influencia de la rotación del cuerpo en la estela del flujo, hipótesis que requiere comprobación mediante simulaciones donde el cilindro no posea la libertad de girar o donde se incluya una fuerza restitutiva angular.

También, se observó, que la relación entre  $T_{C_d}^*$  (y  $T_{C_l}^*$ ) y el número de Reynolds para ciertos intervalos coincide con una ley de potencias. Se encontró que el exponente de dicho ajuste es mayor que 1 para las zonas con resonancia y menor que 1 cuando la amplitud de la oscilación vertical permanece constante; así mismo, hizo aparición un segmento donde el periodo del coeficiente de sustentación aumenta con el incremento de  $R_e$ , ambos hechos resultan intrigantes, por lo que ameritan profundizar en los mismos mediante, por ejemplo, una ampliación del dominio del número de Reynolds.

Estos resultados contribuirán con un artículo de investigación, el cual pretende ser terminado en el siguiente semestre.

Gracias a las simulaciones realizadas para la malla de  $10000 \times 3000$ , se observó que la presencia de la segunda fase de la estela no siempre ocurre, esto es, dicha fase colapsa dando como resultado una estela donde la primera y tercera fases se unen. Este comportamiento parece depender del parámetro  $S_t$ , mas aún, resulta factible la suposición de que la longitud de la segunda fase varíe con el número de Reynolds y/o  $S_t$ . Es por esto que se propone realizar simulaciones para ciertos valores de los parámetros utilizados para encontrar el comportamiento de la segunda fase con respecto a los mismos.

De igual forma, se encontraron dos tipos de tercera fase de estela, uno de ellos con estructura bien definida y periódica, la otra, cuasiperiódica con estructura mucho más complicada. La obtención de la frecuencia a la cual se emiten los vórtices que conforman la dicha fase es otro objetivo del proyecto, proponiendo hacerlo mediante el número de Strouhal local o la frecuencia asociada a la circulación, la cual puede coincidir o estar relacionada con la buscada.

También, tomando como punto de partida lo realizado en dos dimensiones, se pretende extender a un dominio tridimensional el código computacional para la simulación del problema de un cilindro en un flujo uniforme infinito, pretendiendo observar en primera instancia efectos de borde e inestabilidades 3D. Dicho código buscará simular la dinámica

de un sistema conformado por un cilindro circular finito, fijo e indeformable inmerso en un fluido Newtoniano que fluye de forma incompresible y uniforme. Una vez realizada la codificación en el caso mas básico, se procederá a validar el código con resultados buscados previamente.

Entre las razones para extender el dominio de los estudios bidimensionales es que al despreciar la profundidad del cilindro se pasan por alto efectos de borde que pudieran ser de importancia; otra razón de gran peso es la presencia de las inestabilidades propias de números de Reynolds grandes en flujos tridimensionales, las cuales provocan grandes diferencias entre los resultados correspondientes a flujos en 2 y 3 dimensiones.

Por último, debe mencionarse que todo el estudio propuesto se desarrollará a números de Reynolds moderados, valores de  $S_t \in [100, 400]$  y  $\rho_t \in [0.1, 1]$ .

## Referencias

- [1] H. Baek and G. E. Karniadakis. A convergence study of a new partitioned fluid-structure interaction algorithm based on fictitious mass and damping. Journal of Computational Physics., pages 629–652. 231(2): p.
- [2] P. j. Ming and W. p. Zhang. Numerical method for multi-body fluid interaction based on immersed boundary method. Journal of Hydrodynamics., pages 476–482. Ser. B. 23(4): p.
- [3] B.S. Carmo et al. Flow-induced vibration of a circular cylinder subjected to wake interference at low reynolds number. Journal of Fluids and Structures. 27(4): p. 503-522.
- [4] T.K. Prasanth and S. Mittal. Flow-induced oscillation of two circular cylinders in tandem arrangement at low Re. Journal of Fluids and Structures., pages 1029–1048, 2009. 2009. 25(6): p.
- [5] C.H.K. Williamson and A. Roshko. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. Journal of Fluids and Structures., pages 355–381, 1988. 1988. 2(4): p.
- [6] T. Sarpkaya. A Critical Review of the Intrinsic Nature of Vortex-Induced Vibrations. Journal of Fluids and Structures, pages 389–447, 2004. 2004. 19(4): p.
- [7] P.W. Bearman. Vortex Shedding from Oscillating Bluff Bodies. Annual Review of Fluid Mechanics, pages 195–222, 1984. 1984. 16(1): p.
- [8] C.H.K. Williamson and R. Govardhan. Vortex-Induced Vibrations. Annual Review of Fluid Mechanics., pages 413–455, 2004. 2004. 36(1): p.
- [9] R. D. Gabbai and H. Benaroya. An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders. Journal of Sound and Vibration., pages 575–616, 2005. 2005. 282(3-5): p.

- [10] J. Yang and F. Stern. A simple and efficient direct forcing immersed boundary framework for fluid-structure interactions. Journal of Computational Physics., pages 5029–5061. 231(15): p.
- [11] S.P. Singh and S. Mittal. Vortex-induced oscillations at low Reynolds numbers: Hysteresis and vortex-shedding modes. Journal of Fluids and Structures., pages 1085–1104, 2005. 2005. 20(8): p.
- [12] M.M. Zdravkovich. Flow Induced Oscillations of Two Interfering Circular Cylinders. Journal of Sound and Vibration, pages 511–521, 1985. 1985. 101(4): p.
- [13] A. Bokaian and F. Geoola. Wake-induced galloping of two interfering circular cylinders. Journal of Fluid Mechanics., pages 383–415, 1984. 1984. 146: p.
- [14] S. Mittal and V. Kumar. Flow-Induced Oscillations of Two Cylinders in Tandem and Staggered Arrangements. Journal of Fluids and Structures., pages 717–736, 2001. 2001. 15(5): p.
- [15] F.J. Huera-Huarte and M. Gharib. Vortex- and wake-induced vibrations of a tandem arrangement of two flexible circular cylinders with far wake interference. Journal of Fluids and Structures., pages 824–828. 27(5-6): p.
- [16] R. King and D. J. Johns. Wake interaction experiments with two flexible circular cylinders in flowing water. Journal of Sound and Vibration., pages 259–283, 1976. 1976. 45(2): p.
- [17] D. J. Newman and G. E. Karniadakis. A direct numerical simulation study of flow past a freely vibrating cable. Journal of Fluid Mechanics., pages 95–136, 1997. 1997. 344: p.
- [18] R.E.D. Bishop and A. Y. Hassan. The Lift and Drag Forces on a Circular Cylinder Oscillating in a Flowing Fluid. Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences., pages 51–75, 1964. 1964. 277(1368): p.
- [19] Ronald T. Hartlen and Iain G. Cirrie. Lift-Oscillator Model of Vortex-induced Vibration. Journal of the Engineering Mechanics Division., pages 577–592, 1970. 1970. 96(5): p. 15.
- [20] L. Mathelin and E. de Langre. Vortex-induced vibrations and waves under shear flow with a wake oscillator model. European Journal of Mechanics - B/Fluids., pages 478–490, 2005. 2005. 24(4): p.
- [21] A. Farshidianfar and H. Zanganeh. A modified wake oscillator model for vortex-induced vibration of circular cylinders for a wide range of mass-damping ratio. Journal of Fluids and Structures., pages 430–441. 26(3): p.
- [22] F. J. Huera-Huarte and P. W. Bearman. Wake structures and vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder-Part 1: Dynamic response. Journal of Fluids and Structures., pages 969–990, 2009. 2009. 25(6): p.
- [23] J. K. Vandiver. Dimensionless Parameters Important to the Prediction of Vortex-Induced Vibration of Long Flexible Cylinders in Ocean Currents. Journal of Fluids and Structures., pages 423–455, 1993. 1993. 7(5): p.



- [24] F. J. Huera-Huarte and P. W. Bearman. Wake structures and vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder-Part 2: Drag coefficients and vortex modes. Journal of Fluids and Structures., pages 991–1006, 2009. 2009. 25(6): p.
- [25] J.R. Chaplin et al. Blind predictions of laboratory measurements of Vortex-Induced Vibrations of a tension riser. Journal of Fluids and Structures., pages 25–40, 2005. 2005. 21(1): p.
- [26] Y. Shen, G. Zha, and X. Chen. High order conservative differencing for viscous terms and the application to vortex-induced vibration flows. Journal of Computational Physics., pages 8283–8300, 2009. 2009. 228(22): p.
- [27] X. Yang et al. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations. Journal of Computational Physics, pages 7821–7836, 2009. 2009. 228(20): p.
- [28] S. Étienne and D. Pelletier. The low Reynolds number limit of vortex-induced vibrations. Journal of Fluids and Structures., pages 18–29. 31(0): p.
- [29] J.B.V. Wanderley and C.A. Levi. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. Ocean Engineering., pages 445–460, 2002. 2002. 29(4): p.
- [30] R. Surmas, Lus O. E. dos Santos, and P.C. Philippi. Lattice Boltzmann simulation of the flow interference in bluff body wakes. Future Generation Computer Systems., pages 951–958, 2004. 2004. 20(6): p.
- [31] J. Wu and C. Shu. An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows. Journal of Computational Physics., pages 5022–5042. 229(13): p.
- [32] R.M.C. So et al. Three-dimensional wake effects on flow-induced forces. Journal of Fluids and Structures, pages 373–402, 2005. 2005. 20(3): p.
- [33] Y. Liu, R. M.C. So, and Z.X. Cui. A finite cantilevered cylinder in a cross-flow. Journal of Fluids and Structures., pages 589–609, 2005. 2005. 20(4): p.
- [34] Y. Liu, R.M.C. So, and Z.X. Cui. Bluff body flow simulation using lattice Boltzmann equation with multiple relaxation time. Computers & Fluids, 2006., pages 951–956, 2006. 35(8-9): p.
- [35] M. Breuer et al. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume. International Journal of Heat and Fluid Flow, pages 186–196, 2000. 2000. 21(2): p.
- [36] F.-B. Tian et al. An efficient immersed boundary-lattice Boltzmann method for the hydrodynamic interaction of elastic filaments. Journal of Computational Physics. 230(19): p. 7266-7283.
- [37] L. Zhu et al. An immersed boundary method based on the lattice Boltzmann approach in three dimensions, with application. Computers & Mathematics with Applications., pages 3506–3518. 61(12): p.

- [38] C. Shu, N. Liu, and Y.T. Chew. A novel immersed boundary velocity correction-lattice Boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. Journal of Computational Physics., pages 1607–1622, 2007. 2007. 226(2): p.
- [39] J. Hao and L. Zhu. A lattice Boltzmann based implicit immersed boundary method for fluid-structure interaction. Computers & Mathematics with Applications., pages 185–193. 59(1): p.
- [40] A. Dupuis, P. Chatelain, and P. Koumoutsakos. An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder. Journal of Computational Physics., pages 4486–4498, 2008. 2008. 227(9): p.
- [41] Z.-G. Feng and E.E. Michaelides. The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems. Journal of Computational Physics., pages 602–628, 2004. 2004. 195(2): p.
- [42] A. Revell J. Favier and A. Pinelli. A Lattice Boltzmann-Immersed Boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects. Journal of Computational Physics., pages 145–161. 261(0): p.
- [43] K. Vahidkhah and V. Abdollahi. Numerical simulation of a flexible fiber deformation in a viscous flow by the immersed boundary-lattice Boltzmann method. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation., pages 1475–1484. 17(3): p.
- [44] J. Wu and C. Shu. Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications. Journal of Computational Physics., pages 1963–1979, 2009. 2009. 228(6): p.
- [45] X. D. Niu et al. A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows. Physics Letters A., pages 173–182, 2006. 2006. 354(3): p.
- [46] F. Mandujano and R. Rechtman. Thermal levitation. Journal of Fluids Mechanics., pages 105–114, 2008. Volume 606.
- [47] Zhaoli Guo, Chuguang Zheng, and Baochang Shi. An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. Physics of Fluids., pages 2007–2010, 2002. Volume 14.
- [48] Anthony J. C. Ladd. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. Journal of Fluid Mechanics, 271:285–309, 7 1994.
- [49] Cyrus K. Aidun, Yannan Lu, and E.-Jiang Ding. Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation. Journal of Fluid Mechanics., pages 287–311, 1998. Volume 373.
- [50] C: Aidun and Y. Lu. Lattice Boltzmann simulation of solid particles suspended in fluid. Journal of Statistical Physics., pages 49–61, 1995. Volume 81.
- [51] R. Zwanzig. Nonequilibrium Statistical Mechanics. New York: Oxford university Press. 222, 2001.

- [52] P. M. Gresho et al. A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part 2: Applications. International Journal for Numerical Methods in Fluids., pages 619–640, 1984. 1984. 4(7): p.
- [53] E. M. Saiki and S. Biringen. Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method. Journal of Computational Physics., pages 450–465, 1996. 1996. 123(2): p.
- [54] R. Clift, J.R. Grace, and M.E. Weber. Bubbles, Drops and Particles. New York: Academic Press, Vol. 154, 1978. Vol. 154. 1978.
- [55] M. Braza, P. Chassaing, and H. Ha Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics., pages 79–130, 1986. Volume 165.
- [56] A. Belov, L. Martinelli, and A. Jameson. 33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, chapter A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1995. doi:10.2514/6.1995-49.
- [57] D. Calhoun. A Cartesian Grid Method for Solving the Two-Dimensional Streamfunction-Vorticity Equations in Irregular Regions. Journal of Computational Physics., pages 231–275, 2002. 2002. 176(2): p. 231-275.
- [58] C. Liu, X. Zheng, and C.H. Sung. Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows. Journal of Computational Physics., pages 35–57, 1998. Volume 139.
- [59] S. Atluri, V.K. Rao, and C. Dalton. A numerical investigation of the near-wake structure in the variable frequency forced oscillation of a circular cylinder. Journal of Fluids and Structures., pages 229–244, 2009. 2009. 25(2): p.
- [60] D. Georgiev P. Vorobieff and M.S. Ingber. Onset of the second wake: Dependence on the Reynolds number. Physics of Fluids., pages 53–56, 2002. Volume 14.