



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

GPR GRÁFICAS DE POLIEDROS DE CLASE 2_{0,2}

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
ALEJANDRA RAMOS RIVERA

DIRECTORA DE TESINA:
DRA. ISABEL ALICIA HUBARD ESCALERA

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Definiciones básicas y resultados preliminares	3
1.1. Poliedros regulares y de dos órbitas	5
1.2. <i>CPR</i> gráficas	7
1.3. Poliedros de clase $2_{0,2}$	9
2. <i>GPR</i> gráfica de poliedros de clase $2_{0,2}$	13
3. Poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupos de automorfismos A_n	19

Introducción

El estudio de las propiedades geométricas de los poliedros comenzó desde la época de los griegos. Euclides en sus Elementos, tomando en cuenta las propiedades de convexidad y finitud, demuestra que solo existen cinco sólidos regulares (poliedros regulares). A través de los años la definición de poliedro se ha modificado dejando a un lado la convexidad y finitud.

Los polígonos y poliedros son a menudo vistos como objetos geométricos. Así mismo sucede con sus generalizaciones a cualquier dimensión, los politopos. Sin embargo, uno de los enfoques más fructíferos para entender la estructura de los politopos ha provenido de olvidar dicha geometría. Esto es, considerar las propiedades puramente combinatorias de los mismos. Así es como surgen los politopos abstractos.

El presente trabajo está enfocado al estudio de algunos poliedros abstractos (politopos abstractos de rango 3) usando como herramienta la teoría de gráficas. Las *CPR* gráficas o gráficas de representación de permutaciones fueron introducidas por D. Pellicer en [1]; estas gráficas están asociadas a politopos regulares y son de gran utilidad para encontrar poliedros que tengan como grupo de automorfismos al grupo simétrico S_n o al grupo alternante A_n de orden n .

Es posible generalizar las *CPR* gráficas a poliedros con menor simetría, por ejemplo a poliedros con dos órbitas en su conjunto de banderas bajo la acción de su grupo de automorfismos (*poliedros de dos órbitas*) [2]. Lo anterior se explica en el Capítulo 1, al igual que las principales propiedades de las *CPR* gráficas y las definiciones básicas usadas en este trabajo.

Existen siete clases de poliedros de dos órbitas. La más estudiada es la de los *poliedros quirales*, para la cual se tienen resultados análogos a los presentados en este trabajo (ver [3]).

En el Capítulo 2 se analiza el concepto de *GPR* gráfica para poliedros de dos órbitas de la clase $2_{0,2}$ y con ello se darán condiciones para que una digráfica coloreada por aristas sea una *GPR* gráfica asociada a un poliedro de esta clase.

Por último, en el Capítulo 3 se da una construcción de poliedros de la clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n . Los ejemplos que se dan en el presente

trabajo conforman la primera familia de poliedros no toroidales de clase $2_{0,2}$. Obteniendo como consecuencia el resultado principal de esta tesina:

Teorema *Para cada $n \leq 9$, A_n es el grupo de automorfismos de un poliedro (abstracto) en la clase $2_{0,2}$.*

Este método puede aplicarse a las cinco clases de poliedros de dos órbitas restantes y observar cuáles son las propiedades requeridas para las *GPR* gráficas en cada caso y con ello obtener ejemplos de poliedros en dichas clases.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, IB101412, Grupos y gráficas asociados a politopos abstractos y IN112511, Poliedros altamente simétricos en espacios de dimensión pequeña.

Capítulo 1

Definiciones básicas y resultados preliminares

Un *politopo abstracto* de rango n o un n -*politopo*, con $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{P}, \leq) con una función de rango estrictamente monótona con imagen $\{-1, 0, 1, \dots, n\}$. Para $0 \leq j < n$, los elementos de \mathcal{P} de rango j son llamados j -caras, en general a los elementos de \mathcal{P} les llamamos *caras*. Denotaremos por F_j a una j -cara. Además \mathcal{P} debe cumplir las siguientes propiedades:

- (i) Existen un único elemento mínimo F_{-1} y un único elemento máximo F_n en \mathcal{P} .
- (ii) Toda cadena maximal posee $n + 2$ elementos. A una cadena maximal la llamaremos *bandera* y al conjunto de banderas de \mathcal{P} lo denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.
- (iii) \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas; es decir, si Φ y Ψ son elementos de $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, entonces existe una sucesión finita de banderas de \mathcal{P} , digamos $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$, tal que Φ_i, Φ_{i+1} difieren en exactamente un elemento y además $\Phi \cap \Psi \subset \Phi_i$ para toda $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.
- (iv) Para cualesquiera dos caras F_{i-1} y F_{i+1} de \mathcal{P} tales que $F_{i-1} \leq F_{i+1}$, hay exactamente dos caras de rango i , F y G , tales que $F_{i-1} < F, G < F_{i+1}$.

Sean \mathcal{P} un n -politopo y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. La propiedad (iv) nos indica que para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ existe una única bandera que difiere de Φ en la i -cara. A dicha bandera la llamaremos la bandera *i -adyacente* de Φ y la denotaremos por Φ^i . Definimos $\Phi^{i_1, i_2} = (\Phi^{i_1})^{i_2}$, esta definición se extiende naturalmente para cualquier sucesión i_1, i_2, \dots, i_k de elementos de $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Observemos que para $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tal que $|i - j| > 1$ se tiene $\Phi^{i,j} = \Phi^{j,i}$, ya que Φ y Φ^i comparten las l -caras donde $l \in \{-1, 0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, en particular, las caras de rango $j + 1$ y $j - 1$, por lo que Φ^j y $\Phi^{i,j}$ también comparten todas las caras, excepto la i -cara. Por lo tanto $\Phi^{j,i} = \Phi^{i,j}$.

A un politopo abstracto de rango 2 se le llama *polígono* (abstracto), mientras que a uno de rango 3 se le conoce como *poliedro* (abstracto).

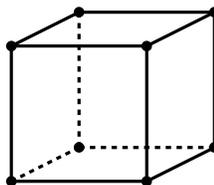


Figura 1.1: El cubo \mathcal{Q} es un poliedro abstracto si lo tomamos como conjunto de vértices, aristas, caras, el vacío y el total y como relación de orden la incidencia.

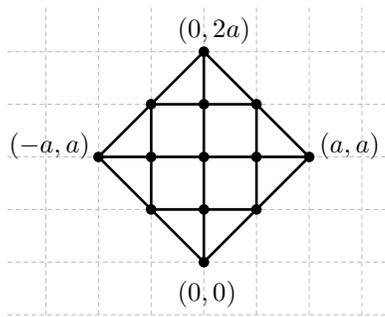


Figura 1.2: Poliedro regular en el toro.

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos n -politopos. Un *isomorfismo* $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es una función biyectiva de \mathcal{P} a \mathcal{Q} que preserva incidencias, es decir, si $F, G \in \mathcal{P}$ tal que $F \leq G$, entonces $F\Psi \leq G\Psi$ y además cumple que Ψ^{-1} también preserva incidencias. A un isomorfismo $\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ de \mathcal{P} en él mismo se le llama *automorfismo* de \mathcal{P} . Al conjunto de automorfismos de \mathcal{P} lo denotamos por $\Gamma(\mathcal{P})$. Es inmediato ver que $\Gamma(\mathcal{P})$ es un grupo que actúa de manera natural en las caras de \mathcal{P} . Más aún, la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en las caras de \mathcal{P} induce una acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, donde si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ es tal que $\Phi = \{F_{-1}, F_0, \dots, F_n\}$, entonces $\Phi\gamma = \{F_{-1}\gamma, F_0\gamma, \dots, F_n\gamma\} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Es fácil ver que la conexidad de \mathcal{P} implica que la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ es libre (o semi-regular).

Sean F y G dos caras de un n -politopo \mathcal{P} . Si $F \leq G$ ó $G \leq F$ diremos que F y G son caras *incidentes*. En caso de tener la incidencia $F \leq G$, al conjunto de caras $\{H | F \leq H \leq G\}$ le llamamos la *sección* G/F de \mathcal{P} (si $G \leq F$ se define análogamente la sección F/G de \mathcal{P}).

Un p -*ágono* \mathcal{P} es un polígono finito tal que el número de 0-caras, y por lo tanto el número de 1-caras, es p . Notemos que en un p -ágono $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera transitiva sobre $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Por lo tanto diremos que \mathcal{P} es un polígono (combinatoriamente) regular.

Un n -politopo es llamado *equivelar* si para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, existe $p_i \in \{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$ tal que las secciones determinadas por cualesquiera dos caras incidentes de rangos $i-2$ e $i+1$ son isomorfas a un p_i -ágono. En ese caso diremos que \mathcal{P} tiene *símbolo de Schläfli* $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$.

1.1. Poliedros regulares y de dos órbitas

Consideremos un poliedro \mathcal{P} . Diremos que \mathcal{P} es *regular* si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa de manera transitiva sobre $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Los poliedros regulares han sido ampliamente estudiados (ver, por ejemplo [4]).

Sea \mathcal{P} un poliedro regular y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ una bandera, a la cual llamaremos *bandera base*, entonces

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \rangle$$

donde ρ_0, ρ_1, ρ_2 son involuciones tales que para cada $i \in \{0, 1, 2\}$, ρ_i es el único automorfismo que mapea Φ a Φ^i . A dichos automorfismos los llamaremos *generadores distinguidos* de $\Gamma(\mathcal{P})$ con respecto a Φ y deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\rho_i^2 = \epsilon$ para cada $i \in \{0, 1, 2\}$.
- $(\rho_0 \rho_2)^2 = \epsilon$.
- $(\rho_i \rho_{i+1})^{p_{i+1}} = \epsilon$, para $i \in \{0, 1\}$ y para algún $p_{i+1} \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Además los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ con respecto a Φ también satisfacen la *propiedad de intersección*:

$$\langle \rho_0, \rho_1 \rangle \cap \langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \langle \rho_1 \rangle.$$

Notemos que los poliedros regulares son equivelares y su símbolo de Schläfli es $\{p_1, p_2\}$.

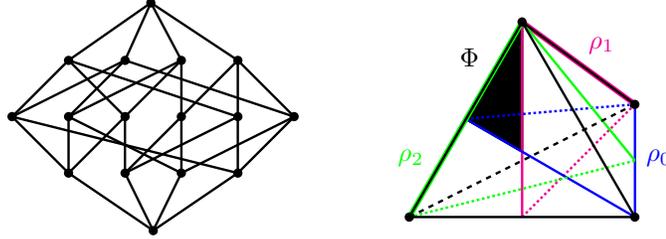


Figura 1.3: Poliedro regular con símbolo de Schläfli $\{3, 3\}$ (tetraedro), visto tanto como orden parcial como geoméricamente con sus generadores distinguidos (en la representación geométrica) con respecto a una bandera base Φ .

Un poliedro \mathcal{P} es llamado de *dos órbitas* si $\Gamma(\mathcal{P})$ tiene exactamente dos órbitas sobre el conjunto de banderas $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Aunque de estos poliedros no se sabe tanto como de los regulares, sus propiedades básicas, junto con sus grupos de automorfismos fueron estudiados en [2].

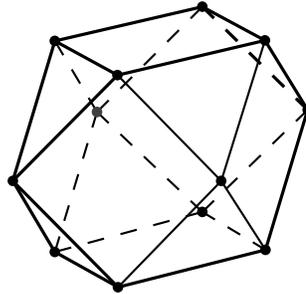


Figura 1.4: El cuboctaedro es un ejemplo de un poliedro de dos órbitas.

Existen siete clases de poliedros de dos órbitas, a cada una de ellas las denotaremos por 2_I con $I \subsetneq \{0, 1, 2\}$. Para cada clase se tiene que si \mathcal{P} es un poliedro en la clase 2_I y Φ es una bandera de \mathcal{P} , entonces Φ^i está en la misma órbita de Φ , bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$, si y solo si $i \in I$.

Con lo anterior se tiene que si \mathcal{P} es un poliedro de dos órbitas con Φ una bandera base. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{P} está en la clase 2_I ,
2. existe $\rho_i \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\rho_i = \Phi^i$ si y solo si $i \in I$.

Observemos que para un poliedro \mathcal{P} en la clase 2_I es posible conocer algunos elementos de su grupo de automorfismos a través de la configuración local de las banderas. Sean Φ una bandera base de \mathcal{P} , $i \in I$ y $k \notin I$, entonces Φ^k y $\Phi^{k,i}$ están en la misma órbita por lo que Φ y $\Phi^{k,i,k}$ están en la otra órbita. Notemos que Φ y $\Phi^{k,i,k}$ son banderas distintas si y solo si $|j-i|=1$. Si lo anterior sucede, entonces existe $\alpha_{kik} \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\alpha_{kik} = \Phi^{k,i,k}$. Análogamente si $j,k \notin I$, entonces Φ y $\Phi^{j,k}$ están en la misma órbita por lo que debe existir $\alpha_{jk} \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\alpha_{jk} = \Phi^{j,k}$.

Sean \mathcal{P} un poliedro de la clase 2_I y Φ una bandera base de \mathcal{P} , entonces se sabe que el $\Gamma(\mathcal{P})$ esta generado por el siguiente conjunto ([2]):

$$\mathcal{G}_I = \{\rho_i | i \in I\} \cup \{\alpha_{jk} | j, k \notin I \text{ y } k < j\} \cup \{\alpha_{jij} | i \in I, j \notin I \text{ y } |j-i|=1\}$$

donde ρ_i , $\alpha_{j,k}$ y $\alpha_{j,i,j}$ son los automorfismos antes mencionados.

Una de las siete clases más estudiada son los poliedros de clase 2_\emptyset o *poliedros quirales* (ver, por ejemplo [5]).

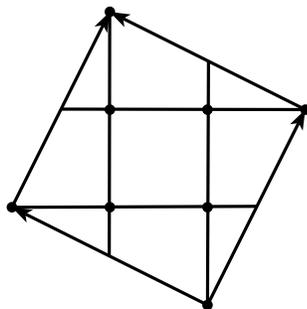


Figura 1.5: El toro quiral es un poliedro de clase 2_\emptyset .

La clase que estudiaremos con más detalle en este trabajo es la clase $2_{\{0,2\}}$, la cual denotaremos, por simplicidad como $2_{0,2}$. En la sección 1.3 daremos más detalle dicha clase, la cual cumple, al igual que en el caso de los poliedros regulares, que el grupo de automorfismos de los poliedros de esta clase está generado por involuciones.

1.2. CPR gráficas

Las CPR gráficas o gráficas de representación de permutaciones fueron introducidas por D. Pellicer en [1]; estas gráficas están asociadas a politopos regulares de la siguiente manera.

Sean \mathcal{P} un poliedro regular y $e : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow S_n$ un encaje, donde $n \in \mathbb{N}$. La *CPR* gráfica G de \mathcal{P} determinada por e es una multigráfica 3-arista coloreada, con conjunto de vértices $V(G) = \{1, \dots, n\}$ tal que ij es una arista en G de color k , si y solo si $(i)\rho_k e = j$.

Podemos observar que en una *CPR* gráfica G las aristas de color i forman un emparejamiento en G dado que ρ_i es una involución para $i \in \{0, 1, 2\}$. Además se tiene que cada componente conexa de la subgráfica generadora de G con conjunto de aristas de color 0 y 2 es un vértice, una arista, una arista doble o un ciclo alternante de longitud cuatro (ya que $(\rho_0\rho_2)^2 = \epsilon$).

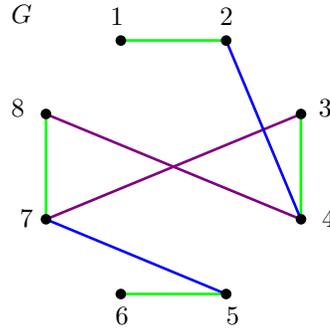


Figura 1.6: *CPR* gráfica de vértices del cubo.

Denotaremos como G_{i_1, \dots, i_m} con $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ a la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas consta exactamente de las aristas de G de color $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$.

El siguiente teorema publicado en [1] nos da un criterio para decir cuándo una gráfica con ciertas características es una *CPR* gráfica.

Teorema 1.2.1 *Sea $G = G_{0,1,2}$ una gráfica conexa, propiamente 3-arista coloreada tal que cada componente conexa de $G_{0,2}$ es un vértice, una arista, una arista doble o un ciclo alternante de longitud cuatro. Si $G_{0,1}$ (o $G_{1,2}$) tiene dos componentes conexas con al menos dos vértices tal que el número de vértices de dichas componentes son primos relativos, entonces G es una *CPR* gráfica.*

El siguiente lema nos indica cuando A_n es subgrupo del grupo de automorfismos de un poliedro regular, ya que se lo podemos aplicar a los vértices de una *CPR* gráfica de dicho poliedro.

Lema 1.2.1 *Sea Γ un subgrupo de S_n . Si Γ contiene al 3-ciclo $(n-2 \ n-1 \ n)$ y a un subgrupo que actúa transitivamente en $\{1, 2, \dots, n-2\}$ manteniendo fijos a $n-1$ y n , entonces $A_n \leq \Gamma$.*

Demostración: Basta probar que Γ contiene todos los 3-ciclos. Sean a, b y c en $X = \{1, 2, \dots, n - 2\}$. Como Γ contiene un subgrupo H que actúa transitivamente en X y deja fijos a $n - 1$ y n , entonces existe un elemento $h_a \in H$ tal que $ah_a = n - 2$. Análogamente para b y c existen h_b y h_c en H , respectivamente. Como además $(n - 2 \ n - 1 \ n) \in \Gamma$, entonces $(a \ n - 1 \ n)$, $(b \ n - 1 \ n)$, $(c \ n - 1 \ n) \in \Gamma$ al igual que sus inversos. Ahora, realizamos las siguientes conjugaciones:

$$\begin{aligned} (n \ n - 1 \ b)(a \ n - 1 \ n)(b \ n - 1 \ n) &= (a \ b \ n - 1), \\ (b \ n - 1 \ n)(a \ n - 1 \ n)(n \ n - 1 \ b) &= (a \ n \ b). \end{aligned}$$

Entonces $(a \ n \ b)$ y $(a \ b \ n - 1)$ son elementos de Γ . Por último tenemos que: $(c \ n - 1 \ n)(a \ b \ n - 1)(n \ n - 1 \ c) = (a \ b \ c) \in \Gamma$. Por lo tanto $A_n \leq \Gamma$. ■

Sea G una gráfica que cumple las hipótesis del teorema 1.2.1, entonces es una CPR gráfica de un poliedro regular \mathcal{P} y si además $(\Gamma(\mathcal{P}))e$ (con e el encaje de $\Gamma(\mathcal{P})$ en S_n) cumple las hipótesis del lema 1.2.1, entonces $A_n \leq (\Gamma(\mathcal{P}))e$. Contando la paridad del número de aristas es fácil saber si el grupo de automorfismos del poliedro regular asociado a G es isomorfo a S_n ó a A_n debido a que cada arista representa una transposición.

Con los criterios anteriores en [1] se construye para cada entero $n \geq 9$ una CPR gráfica tal que el poliedro regular asociado a dicha gráfica tiene como grupo de automorfismos a A_n .

1.3. Poliedros de clase $2_{0,2}$

Recordemos que si \mathcal{P} es un poliedro de dos órbitas de clase $2_{0,2}$ y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, entonces Φ, Φ^0 y Φ^2 están en la misma órbita, mientras que Φ^1 está en la órbita restante bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$.

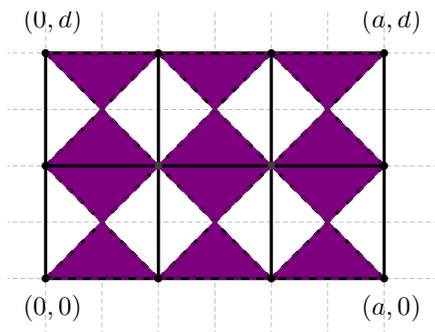


Figura 1.7: Ejemplo de una familia de poliedros de clase $2_{0,2}$ sobre el toro, a saber, la familia $\{4, 4\}_{(a,0),(0,d)}^{2_{0,2}}$ donde $a \neq d$ y $a, d > 0$.

Los poliedros de clase $2_{0,2}$ son transitivos en vértices y caras, por lo que son equivelares. Sin embargo son los únicos poliedros de dos órbitas que no son transitivos en aristas.

Sea \mathcal{P} un poliedro de clase $2_{0,2}$, con grupo de automorfismos

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \rho_2, \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle,$$

donde a $\rho_0, \rho_2, \alpha_{101}$ y α_{121} son los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ respecto de una bandera base Φ descritos en la sección 1.1. Entonces tenemos que $\Phi\rho_0 = \Phi^0$, $\Phi\rho_2 = \Phi^2$, $\Phi\alpha_{101} = \Phi^{1,0,1}$ y $\Phi\alpha_{121} = \Phi^{1,2,1}$.

Además, si $\Phi = \{F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3\}$ y p es el orden del automorfismo $\rho_0\alpha_{101}$, entonces la sección F_2/F_{-1} es un $2p$ -ágono. Esto se debe a que, bajo la acción de $\langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle$, las órbitas de banderas de Φ y Φ^1 contienen $2p$ elementos cada una, p bajo la acción de $\rho_0\alpha_{101}$ y p bajo la acción de $\rho_0\alpha_{101}\rho_0$, además las caras F_{-1}, F_2, F_3 se mantienen fijas, por lo que hay $4p$ banderas en dicha sección. Análogamente se puede realizar el análisis anterior para la sección F_3/F_0 y q el orden de $\rho_0\alpha_{121}$. Por lo tanto el símbolo de Schläfli de \mathcal{P} es $\{2p, 2q\}$.

Con lo anterior se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \rho_2^2 = \alpha_{101}^2 = \alpha_{121}^2 = \epsilon, \\ (\alpha_{101}\alpha_{121})^2 &= (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\alpha_{101})^p = (\rho_2\alpha_{121})^q = \epsilon. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Los poliedros de dos órbitas con símbolo de Schläfli $\{4, 4\}$ sobre el toro fueron clasificados en [6] en cuatro familias. Los poliedros en una de estas familias son de clase $2_{0,2}$. Dichos poliedros se obtienen al realizar el cociente del teselado cuadrado del plano euclidiano con una subretícula generada por dos vectores enteros $(a, 0)$ y (c, d) , donde $c = 0$ ó $a = 2c$. A esta familia se le denota por $\{4, 4\}_{(a,0),(c,d)}^{2_{0,2}}$. En la figura 1.7 se muestra dicha familia con $c = 0$. En este caso si $a = d$ el poliedro resulta regular, pero como se pide $a \neq d$, entonces el poliedro es de clase $2_{0,2}$. Se sabe ([2]) que el grupo de automorfismos de un poliedro \mathcal{P} de la familia $\{4, 4\}_{(a,0),(c,d)}^{2_{0,2}}$ está determinado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \rho_2, \alpha_{101}, \alpha_{121} \mid \rho_0^2 &= \rho_2^2 = \alpha_{101}^2 = \alpha_{121}^2 = (\alpha_{101}\alpha_{121})^2 \\ &= (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\alpha_{101})^2 = (\rho_2\alpha_{121})^2 \\ &= (\alpha_{121}\rho_0)^a = (\alpha_{121}\rho_0)^c(\rho_2\alpha_{101})^d = \epsilon \rangle. \end{aligned}$$

Los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$, donde \mathcal{P} es un poliedro de dos órbitas en la clase $2_{0,2}$, cumplen las siguientes propiedades de intersección:

$$\begin{aligned} \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle &= \{\epsilon\}, \\ \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle &= \langle \rho_0 \rangle, \\ \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle &= \langle \rho_2 \rangle, \\ \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle &= \langle \alpha_{101} \rangle, \\ \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle &= \langle \alpha_{121} \rangle. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Sea $\Gamma = \langle \rho_0, \rho_2, \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle$ un grupo tal que sus generadores cumplen (1.1) y las cinco propiedades de intersección anteriores. En [2], se demostró que Γ es el grupo de automorfismos de un poliedro de clase $2_{0,2}$ o un subgrupo de índice 2 de un poliedro regular. Además Γ es el grupo de automorfismos de un poliedro regular si y solo si existe un automorfismo $\hat{\alpha}$ de Γ tal que:

$$\begin{aligned}\rho_0 \hat{\alpha} &= \alpha_{101} \\ \rho_2 \hat{\alpha} &= \alpha_{121} \\ \alpha_{101} \hat{\alpha} &= \rho_0 \\ \alpha_{121} \hat{\alpha} &= \rho_2.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Capítulo 2

GPR gráfica de poliedros de clase $2_{0,2}$

La siguiente definición generaliza la idea de las *CPR* gráficas para poliedros de dos órbitas o regulares.

Definición 2.0.1 Sean X un conjunto, \mathcal{P} un poliedro regular o de dos órbitas y e un encaje del grupo de automorfismos de \mathcal{P} , $\Gamma = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_l \rangle$, en S_X . La **gráfica general de representación de permutaciones (*GPR*)** de \mathcal{P} determinada por e es la digráfica G tal que $V(G) = X$ y $u\vec{v} \in F(G)$ con etiqueta i si y solo si $(u)(\gamma_i e) = v$ para alguna $i \in \{0, \dots, l\}$ (si $u\vec{v}, v\vec{u} \in F(G)$ y ambos arcos tienen la etiqueta i diremos que hay una arista uv con etiqueta i).

En nuestro caso, para los poliedros de clase $2_{0,2}$, tomaremos $\gamma_0 = \rho_0, \gamma_1 = \rho_2, \gamma_2 = \alpha_{101}$ y $\gamma_3 = \alpha_{121}$. Observemos que el grupo de automorfismos de un poliedro de esta clase está generado por involuciones por lo que al tomar una *GPR* gráfica de un poliedro de clase $2_{0,2}$ resulta ser una gráfica (no contiene arcos).

Sea G una gráfica 4-arista coloreada en la cual cada conjunto de aristas de color i es un emparejamiento M_i de G y tal que M_i difiere de M_j en al menos una pareja de vértices, cuando $i \neq j$. En este caso diremos que G es una *gráfica propiamente 4-arista coloreada*.

Denotaremos como G_{i_1, \dots, i_m} con $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ a la subgráfica generadora de G cuyo conjunto de aristas consta exactamente de las aristas de G de color $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$.

Notemos que como γ_k es involución para cada $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces las aristas de color k forman un emparejamiento de G y, dado que γ_0, γ_1 conmutan y que γ_2, γ_3 también conmutan, se tiene que las posibles configuraciones de

las componentes conexas de $G_{0,1}$ y $G_{2,3}$ son: un vértice, una arista, un ciclo alternante de longitud dos o un ciclo alternante de longitud cuatro, como se muestra en la figura 2.1.

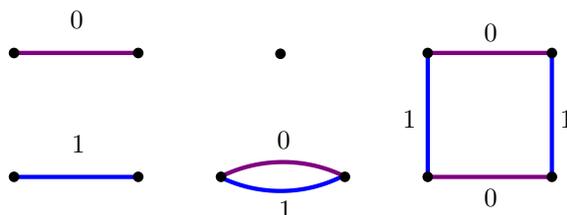


Figura 2.1: Las cinco configuraciones posibles para las componentes $G_{0,1}$ (análogamente se tiene para $G_{2,3}$).

Sea C una componente conexa de $G_{1,3}$ (o de $G_{0,2}$). Si C es una trayectoria representada por las líneas continuas en la figura 2.2, entonces $\langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$ actúa como el grupo simétrico del l -ágono formado por las líneas punteadas como se indica en la siguiente figura.

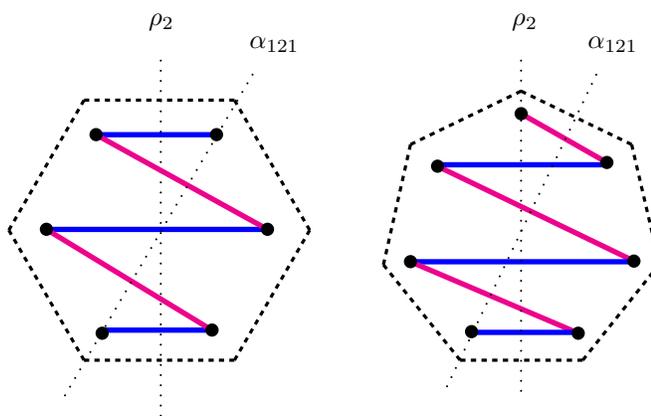


Figura 2.2: C una trayectoria como componente conexa de $G_{1,3}$.

Si C es un ciclo de longitud $2l \geq 4$, entonces los elementos de la forma $(\rho_2 \alpha_{121})^k$ (y $(\alpha_{121} \rho_2)^k$) actúan como una rotación en los dos l -ágonos formados como se muestran en la figura 2.3 (los formados por los vértices negros y los vértices blancos, respectivamente), estas rotaciones son en direcciones opuestas. Los elementos restantes de $\langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$ intercambian los vértices de un l -ágono con los vértices del otro con rotaciones en el $2l$ -ágono, otra vez en direcciones opuestas.

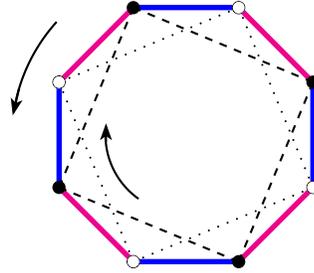


Figura 2.3: C un ciclo como componente conexa de $G_{1,3}$.

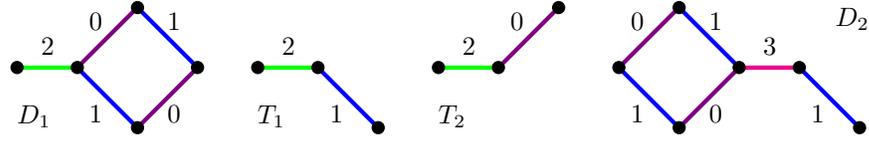
Sea G una GPR gráfica de un poliedro de clase $2_{0,2}$. La acción de un elemento $\Psi \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$ sobre una componente conexa C de $G_{1,3}$ la llamaremos *la acción poligonal de Ψ en C* . Análogamente si $\Psi \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle$, se tiene la acción poligonal de Ψ en O una componente conexa de $G_{0,2}$. Analizando la acción poligonal en cada una de las componentes conexas de $G_{1,3}$ y de $G_{0,2}$ podemos obtener los órdenes de $\rho_0\alpha_{101}$ y $\rho_2\alpha_{121}$.

Los siguientes lemas nos darán criterios para saber cuándo una gráfica conexa con ciertas características es una GPR gráfica de un poliedro de clase $2_{0,2}$ o de un poliedro regular.

Teorema 2.0.1 *Sea $G = G_{0,1,2,3}$ una gráfica conexa, propiamente 4-arista coloreada tal que cada componente conexa de $G_{0,1}$ y de $G_{2,3}$ es un vértice, una arista, una arista doble o un ciclo alternante de longitud cuatro. Si G es tal que contiene las siguientes subgráficas:*

1. *una componente conexa D_1 de $G_{0,1,2}$ con 5 vértices tal que es un cuadrado alternante de color 0 y 1 con una arista de color 2, donde la trayectoria T_1 formada por la arista de color 1 y la arista de color 2 sea una componente conexa de $G_{1,2,3}$. A la trayectoria formada por la arista de color 0 y la arista de color 2 la denotaremos por T_2 ,*
2. *una subgráfica inducida conexa D_2 de $G_{0,1,3}$ con 6 vértices tal que es un cuadrado alternante de color 0 y 1 con una trayectoria alternante de longitud dos de color 0 y 3 como se muestra en la figura 2.4, donde la trayectoria de longitud tres formada por las aristas de color 1 y color 3 sea una componentes conexa de $G_{1,3}$,*

entonces G es una GPR gráfica de un poliedro de clase $2_{0,2}$ o de un poliedro regular.

Figura 2.4: Subgráficas D_1 , T_1 , T_2 y D_2 .

Demostración: Se deben comprobar las propiedades de intersección (1.2).

- i) Sea $\gamma \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$. Supongamos por contradicción que $\gamma \notin \langle \rho_0 \rangle$. Podemos suponer que γ es de la forma $(\rho_0 \alpha_{101})^k$ ya que de no serlo, entonces $\gamma \rho_0 \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$, $\gamma \rho_0 \notin \langle \rho_0 \rangle$ y $\gamma \rho_0$ sí sería de dicha forma.

Por hipótesis se tiene que $G_{0,1,2}$ tiene una componente conexa D_1 tal que contiene a T_2 como se muestra en la figura 2.4. Es claro que T_2 es una componente conexa de $G_{0,2}$. Sea $D \subset D_1$ la componente conexa de $G_{0,1}$ en G . Observemos que, por la acción poligonal de γ , la representación cíclica de γ en la T_2 consiste en un ciclo de longitud 3 y, además, γ no deja fijo a ningún vértice. Como $\gamma \in \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$, entonces γ debe ser de la forma ϵ , ρ_0 , ρ_2 ó $\rho_0 \rho_2$. Sabemos que $\gamma \notin \langle \rho_0 \rangle$, entonces γ es ρ_2 ó $\rho_0 \rho_2$ y en ambos casos las órbitas de los vértices de la componente D constan de dos elementos. Observemos que lo anterior es una contradicción, ya que existen vértices que están tanto en la componente D como en T_2 y la órbita de los vértices de T_2 es de tamaño tres bajo la acción de γ . Por lo que $\gamma \in \langle \rho_0 \rangle$ y con ello $\langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle = \langle \rho_0 \rangle$.

- ii) Sea $\gamma \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle$. Supongamos por contradicción que $\gamma \notin \langle \alpha_{101} \rangle$. De manera similar al caso anterior podemos suponer que γ es de la forma $(\rho_0 \alpha_{101})^k$.

Por hipótesis se tiene que $G_{0,2,3}$ tiene una componente conexa T_2 . Observemos que, por la acción poligonal de γ , la representación cíclica de γ en T_2 consiste en un ciclo de longitud 3. Notemos que la componente conexa de $G_{2,3}$ en T_2 es una arista de color 2. Por lo tanto la órbita de los vértices de dicha arista bajo la acción de $\gamma \in \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle$ contienen un elemento o dos. Lo cual es una contradicción, ya que la órbita de los vértices de la componente T_2 son de tamaño 3 bajo la acción de γ .

Por lo que $\gamma \in \langle \alpha_{101} \rangle$ y con ello $\langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle = \langle \alpha_{101} \rangle$.

- iii) Sea $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle$. Por hipótesis se tiene que $G_{1,2,3}$ contiene una componente conexa T_1 . Sea $V(T_1) = \{u, v, w\}$ tal que uv es la arista de color 1 y vw es la arista de color 2. Observemos que la arista de color 1 es una componente conexa de $G_{1,3}$ y la arista de color 2 es

una componente conexa de $G_{2,3}$. Además dichas componentes se intersecan en v . Supongamos que $\gamma \notin \langle \alpha_{121} \rangle$. Entonces γ es α_{101} ó $\alpha_{101}\alpha_{121}$. Lo cual no es posible ya que v tiene como imagen bajo la acción de $\gamma \in \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle$ a w , pero $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$ y es imposible llegar de v a w con un camino de colores 1 y 3 en T_1 . Por lo que $\gamma \in \langle \alpha_{121} \rangle$ y con ello $\langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \alpha_{101}, \alpha_{121} \rangle = \langle \alpha_{121} \rangle$.

- iv) Sea $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$. Supongamos por contradicción que $\gamma \notin \langle \rho_2 \rangle$. Por hipótesis se tiene que $G_{0,1,3}$ tiene una subgráfica inducida conexa D_2 . A la gráfica $D_2 \cap G_{0,1}$ la llamaremos D , mientras que a la gráfica $D_2 \cap G_{1,3}$ llamaremos C . Notemos que $\gamma \in \langle \rho_0, \rho_2 \rangle$, entonces γ debe ser de la forma ϵ , ρ_0 , ρ_2 ó $\rho_0\rho_2$. Sabemos que $\gamma \notin \langle \rho_2 \rangle$, entonces γ es ρ_0 ó $\rho_0\rho_2$. En ambos casos al tomar un vértice de la componente D que también sea parte de la componente C podemos observar que su órbita no se encuentra contenida en C . Lo cual es una contradicción, ya que $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$. Por lo que $\gamma \in \langle \rho_2 \rangle$ y con ello $\langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle \cap \langle \rho_0, \rho_2 \rangle = \langle \rho_2 \rangle$.
- v) Sea $\gamma \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$. Por hipótesis se tiene que $G_{0,1,2}$ contiene una componente conexa D_1 y $G_{1,2,3}$ contiene una componente conexa T_1 tal que $T_1 \subset D_1$. Sea $V(T_1) = \{u, v, w\}$ y $V(T_2) = \{v, w, z\}$ tal que wz es la arista de color 0, uv es la arista de color 1, vw es la arista de color 2. Supongamos por contradicción que $\gamma \neq \epsilon$.

Observemos que la órbita de v bajo la acción de γ es de tamaño 1 ya que $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$. Por otra parte se tiene que $\gamma \in \langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle$. Si γ es de la forma $(\rho_0\alpha_{101})^k$, entonces por i), la órbita de v tendría tamaño 3. Lo cual no es posible. Por lo que γ debe ser de la forma $(\rho_0\alpha_{101})^k\rho_0$ o $(\alpha_{101}\rho_0)^k\alpha_{101}$ y con ello el orden de γ tiene que ser dos. En ambos casos si γ no deja fijo a v , entonces la órbita de v bajo la acción de γ tendría tamaño 2, lo cual es una contradicción. Es fácil observar que si γ deja fijo a v , entonces la órbita de w bajo la acción de γ es $\{w, z\}$. Como $\gamma \in \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle$, entonces la órbita de w bajo la acción de γ es $\{w\}$ o $\{w, u\}$ y en ambos casos es una contradicción.

Por lo que $\gamma = \epsilon$ y con ello $\langle \rho_0, \alpha_{101} \rangle \cap \langle \rho_2, \alpha_{121} \rangle = \{\epsilon\}$.

■

El poder identificar si el poliedro asociado a una gráfica con las características del teorema 2.0.1 es regular o de clase $2_{0,2}$ nos lo da la siguiente proposición:

Proposición 2.0.1 Sean \mathcal{P} un poliedro regular o de clase $2_{0,2}$ y G una GPR gráfica de \mathcal{P} con al menos 7 vértices tal que $\Gamma(\mathcal{P})$ induce el grupo simétrico o al alternante sobre los vértices de G .

Entonces \mathcal{P} es regular si y solo si existe un automorfismo α de G tal que intercambia las aristas de colores 0 y 2 al mismo tiempo que las aristas de colores 1 y 3.

Demostración: Todo Ψ automorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ que intercambia ρ_0 con α_{101} y ρ_2 con α_{121} es una involución, es decir, Ψ^2 deja fijos a los generadores de $\Gamma(\mathcal{P})$. Recordemos que \mathcal{P} es regular si y solo si dicho Ψ existe.

Usando el hecho de que todo automorfismo de S_n con $n \geq 7$ es un automorfismo interior se tiene que existe Ψ si y solo si es un automorfismo interior determinado por la conjugación con una involución α en $S_{V(G)}$. Por lo que la proposición se sigue. ■

Capítulo 3

Poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupos de automorfismos A_n

En esta sección vamos a construir para cada $n \leq 9$ una *GPR* gráfica tal que el poliedro asociado a dicha gráfica será de clase $2_{0,2}$, con grupo de automorfismos isomorfo a A_n .

Comenzaremos con la construcción de *GPR* gráficas para $n \equiv 1 \pmod{8}$. En la figura 3.1 se muestra una gráfica con las características requeridas en el teorema 2.0.1, por lo que es una *GPR* gráfica de un poliedro regular o de un poliedro en la clase $2_{0,2}$. Observemos que no existe una permutación como se indica en la proposición 2.0.1, por lo tanto el poliedro asociado a esta gráfica es de clase $2_{0,2}$. Notemos que $(\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^4 = (\alpha_{101}\rho_0\alpha_{121})^4$ es el 3-ciclo (v_7, v_8, v_9) y que el subgrupo generado por $(\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^3 = (\alpha_{101}\rho_0\alpha_{121})^3$ y $(\gamma_2\gamma_1\gamma_3)^3 = (\alpha_{101}\rho_2\alpha_{121})^3$ deja fijos a los vértices v_8 y v_9 , mientras que actúa transitivamente en $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y además tiene un número par de aristas. Entonces por el lema 1.2.1 el grupo de automorfismos del poliedro que representa es A_9 . Podemos observar que el símbolo de Schläfli de dicho poliedro es $\{12, 8\}$ ya que el orden de $\gamma_0\gamma_2$ es 6 y el de $\gamma_1\gamma_3$ es 4.

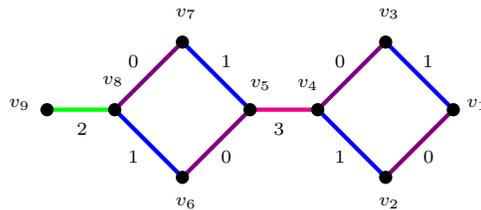


Figura 3.1: *GPR* gráficas asociada a A_9 .

Observemos que si a la gráfica de la figura 3.1 le agregamos cuadrados alternantes de color 0 y 1 unidos por aristas de color 3 (ver figura 3.2) y usamos el 3-ciclo $(\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^4$, $\Psi = (\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^3$ y $\gamma = (\gamma_2\gamma_1\gamma_3)^3$ como en el ejemplo anterior, entonces se obtienen *GPR* gráficas de poliedros de clase $2_{0,2}$. Además si se añade una cantidad par de dichos cuadrados alternantes, debido a que se están agregando un número par de aristas y cada arista representa una transposición en S_n , dichos poliedros tienen grupo de automorfismos isomorfo a A_n con $n \equiv 1 \pmod{8}$. Por otro lado si a la gráfica de la figura 3.1 le agregamos un número impar de cuadrados alternantes, entonces estamos añadiendo un número impar de aristas. Por lo que se obtienen *GPR* gráficas de poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos isomorfo a S_n con $n \equiv 5 \pmod{8}$.

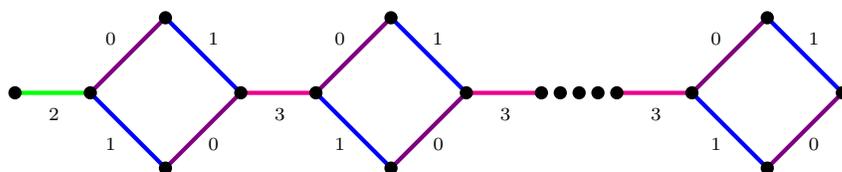


Figura 3.2: *GPR* gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 1 \pmod{8}$ o S_n si $n \equiv 5 \pmod{8}$.

Si tenemos una *GPR* gráfica con la estructura que se muestra en la figura 3.2 con $n \equiv 5 \pmod{8}$, entonces al agregar una arista de color 2 como diagonal de los cuadrados de color 0 y 1, excepto a los cuadrados de los extremos, obtenemos *GPR* gráficas con grupos de automorfismos A_n con $n \equiv 5 \pmod{8}$, en este caso $(\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^{16} = (\alpha_{101}\rho_0\alpha_{121})^{16}$ es el 3-ciclo $(n-2, n-1, n)$ mientras que el subgrupo generado por $(\gamma_2\gamma_0\gamma_3)^3 = (\alpha_{101}\rho_0\alpha_{121})^3$ y $(\gamma_2\gamma_1\gamma_3)^3 = (\alpha_{101}\rho_2\alpha_{121})^3$ deja fijos a los vértices n y $n-1$, mientras que actúa transitivamente en $\{1, 2, \dots, n-2\}$, además dicha gráfica tiene un número par de aristas. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 3.3.

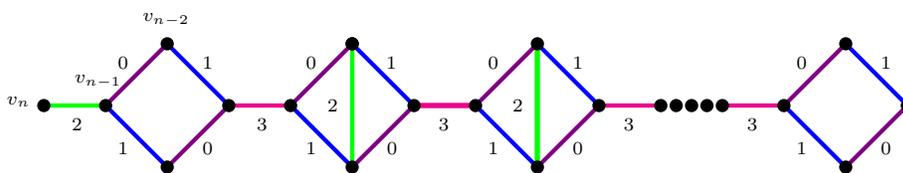


Figura 3.3: *GPR* gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 5 \pmod{8}$.

Estas estructuras se pueden modificar para obtener las gráficas asociadas a A_n con $n \geq 9$.

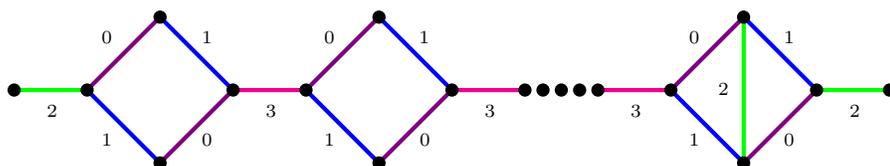


Figura 3.4: GPR gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 2 \pmod{8}$.

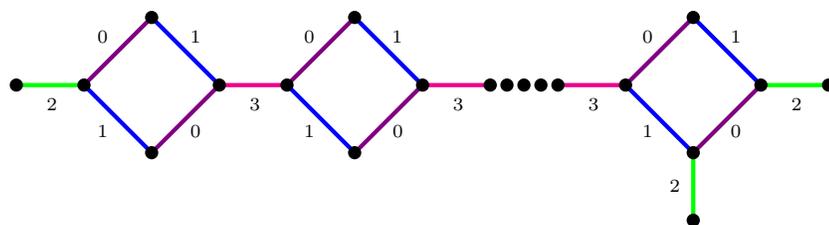


Figura 3.5: GPR gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 3 \pmod{8}$.

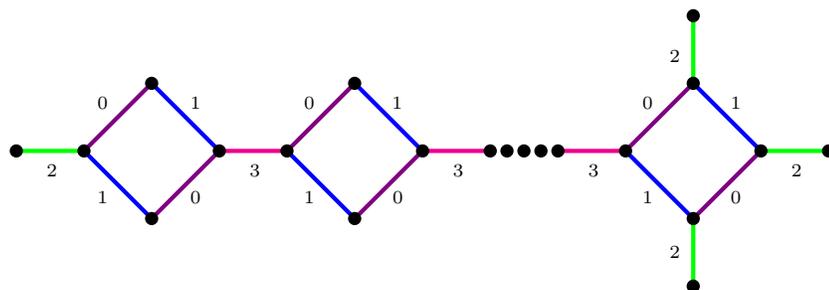


Figura 3.6: GPR gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 0 \pmod{8}$ o $n \equiv 4 \pmod{8}$.

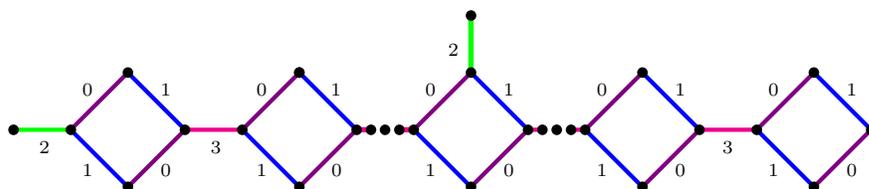


Figura 3.7: GPR gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 6 \pmod{8}$.

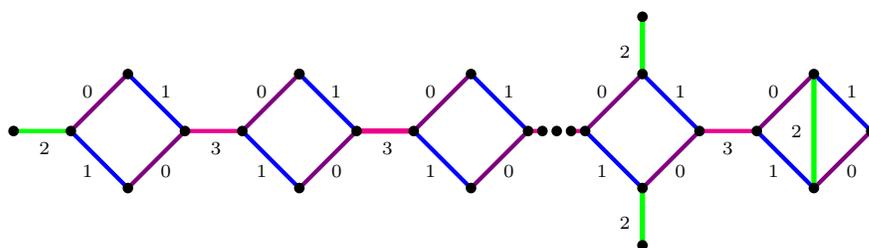


Figura 3.8: GPR gráficas asociadas a poliedros de clase $2_{0,2}$ con grupo de automorfismos A_n si $n \equiv 6 \pmod{8}$.

Bibliografía

- [1] D. Pellicer (2008) CPR graphs and regular polytopes, *European Journal of Combinatorics*, 29, 59-71.
- [2] I. Hubbard (2008) Two-orbit polyhedra from groups, *European Journal of Combinatorics*, 31, 943-960.
- [3] D. Pellicer, A. Ivić Weiss (2009) Generalized CPR graphs and applications, *Contributions to Discrete Mathematics*, 5, 76-105.
- [4] P. McMullen, E. Schulte (2002) *Abstract Regular Polytopes*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press.
- [5] E. Schulte, A. Ivić Weiss (1991) Chiral polytopes, *Applied Geometry and Discrete Mathematics*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 4, Amer. Math. Soc., 493-516.
- [6] R. Duarte (2007), Ph.D. Thesis, University of Aveiro.