UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

La ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa para hamiltonianos periódicos en el espacio y el tiempo.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
EDDALY GUERRA VELASCO[1]

DIRECTOR
Dr. HÉCTOR FIDENCIO SÁNCHEZ MORGADO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

COMITÉ TUTOR
Dr. RENATO GABRIEL ITURRIGA ACEVEDO
CIMAT

Dr. PABLO PADILLA LONGORIA
IIMAS

MÉXICO, D. F., ABRIL DE 2015.

1 Apoyada con beca CONACYT No. 47896

La ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa para hamiltonianos periódicos en el espacio y el tiempo

Eddaly Guerra Velasco

Índice general

Introducción

El propósito de esta tesis es presentar el estudio de algunas propiedades de la ecuaciones de Hamilton-Jacobi y de Hamilton-Jacobi viscosa para Hamiltonianos periódicos en el espacio y el tiempo.

Para $c \in \mathbb{R}$ considere la ecuacion de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du, t) = c, \tag{1}$$

de [**CIS**] existe un único valor $c = c(L)$ tal que (1) tiene una solución de viscosidad periódica en el tiempo. En el Capítulo I se darán los antecedentes necesarios: hipótesis estándar, resultados de la teoría KAM débil, conjunto de Aubry, para que finalmente en la Sección 3 demos una extensión a Hamiltonianos periódicos en el tiempo de la existencia de subsoluciones estrictas suaves de (1) probada por Bernard [**B**] para Hamiltonianos autónomos.

Considerando la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa

$$\phi_t + \Delta\phi(x, t) + H(x, D\phi(x, t), t) = c$$

y suponiendo, además de las hipótesis estándar, una hipótesis de crecimiento, presentamos en el Capítulo II una prueba de la existencia de una única $c \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa tiene una solución suave periódica ϕ, única salvo la adición de constantes; para demostrarlo utilizamos el método de continuación.

Ya con ésto podemos estudiar la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa

$$\phi_t + \varepsilon\Delta\phi(x, t) + H(x, D\phi(x, t), t) = c(\varepsilon) \tag{2}$$

donde denotaremos por ϕ_ε a alguna solución normalizada [1] de la ecuación 2.

En el Capítulo III estudiamos el comportamiento de ϕ_ε cuando ε tiende a cero. Probamos que la familia $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es uniformemente Lipschitz; por lo tanto es posible extraer sucesiones las cuales convergen uniformemente y por el teorema de estabilidad para soluciones de viscosidad, tales sucesiones convergen a soluciones de viscosidad de (1). La hipótesis principal de este apartado es que el conjunto de Aubry es la unión de un número finito de órbitas periódicas hiperbólicas del flujo Hamiltoniano.

Extendiendo resultados previos de [**JKM**], [**AIPS**] y [**Be**], representamos los límites en término de las órbitas en el conjunto Aubry que minimizan la integral

[1] Teorema 38

normalizada a lo largo de la órbita, del laplaciano de la barrera de Peierls correspondiente. En particular demostramos que el límite es único si hay solamente una órbita en el conjunto de Aubry que minimiza la integral normalizada.

Como en el caso autónomo la representación de los límites de viscosidad

$$\phi = \phi_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon$$

están basados en una representación de las soluciones de viscosidad de la ecuación (1) dada en el Corolario 47. Cuando se trabaja con Lagrangianos periódicos, la dificultad es que las sucesión cuyo $\liminf$ es la barrera de Peierls, no converge. El suponer que el conjunto de Aubry es la unión de un número finito de órbitas periódicas hiperbólicas nos permitió pasar a un toro que cubre al original donde la sucesión correspondiente en la definicion de la Peierls si converge. Luego pudimos regresar al toro original la información obtenida sobre límites en el toro cubriente. Una vez demostrado esto se probaron desigualdades usando la formula de Lax estocástica; usando estas desigualdades obtuvimos la representación ϕ_0.

Finalmente utilizando algunos resultados obtenidos en el Capítulo II, extendemos algunos resultados en [**G**] y [**IS**], en el Capítulo IV demostramos la suavidad de las funciones efectivas para el caso que estamos tratando.

Capítulo I

Teoría KAM débil

El objetivo de este capítulo es presentar la Teoría KAM débil para Hamiltonianos periódicos en el tiempo, terminando con una extensión del resultado de Bernard [**B**] sobre la existencia de subsoluciones estrictas suaves, cuando el conjunto de Aubry consiste de un número finito de órbitas periódicas hiperbólicas. En la Sección 1 trataremos algunos resultados de la teoría KAM débil, en la Sección 2 introduciremos el Conjunto de Aubry y daremos algunas relaciones importantes que serán de gran utilidad. En la sección 3 presentaremos la prueba de la extensión del resultado de Bernard.

1. Preliminares

Sea M una variedad compacta y $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un Hamiltoniano C^k, $k \geq 3$ que satisface las hipótesis estándar:

Convexidad: El Hessiano $H_{pp}(x, p, t)$ es positivo definido.
Superlinealidad:

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(x, p, t)}{|p|} = \infty,$$

uniformemente en x, t.
Periodicidad: El Hamitoniano es periódico en el tiempo,

$$H(x, p, t + 1) = H(x, p, t),$$

para toda x, p, t.
Completez: El flujo Hamitoniano ϕ_t^* en $T^*M \times \mathbb{S}^1$ es completo.

Sea $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el Lagrangiano asociado al Hamiltoniano:

$$L(x, v, t) = \max_p pv - H(x, p, t).$$

Una definición importante es la siguiente:

Definición 1. Si $v \in TM$ y $p \in T * M$, diremos que v y p son Legendre conjugados si

$$L(x, v, t) = \max_p pv - H(x, p, t).$$

Para $c \in \mathbb{R}$ considere la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du, t) = c. \tag{3}$$

DEFINICIÓN 2. Una función continua $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una *solución de viscosidad futura* de (3) si ésta satisface las dos propiedades.

1. Si v es una función C^1 y $u - v$ tiene un máximo local en (x, t), entonces
$$v_t + H(x, Dv(x,t), t) \geq c,$$
2. Si v es una función C^1 y $u - v$ tiene un mínimo local en (x, t), entonces
$$v_t + H(x, Dv(x,t), t) \leq c.$$

Las *soluciones de viscosidad pasadas* se definen al cambiar ambas desigualdades.

De [**CIS**] sabemos que existe un único valor $c = c(L)$, llamado valor crítico, tal que (3) tiene una solución de viscosidad periódica en el tiempo. Sean $c = c(L)$ y $\mathcal{S}^-(\mathcal{S}^+)$ el conjunto de soluciones de viscosidad de (3) *pasadas* (*futuras*). Aqui una subsolución de (3) significará una subsolución de viscosidad.

Definamos la acción de una curva absolutamente continua $\gamma : [a, b] \to M$ como

$$A_L(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), \tau) d\tau.$$

Una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $b - a \in \mathbb{Z}$, así el valor crítico se puede definir como

$$c(L) := \min\{k \in \mathbb{R} : \forall \gamma \text{ cerrada } A_{L+k}(\gamma) \geq 0\}.$$

Por otro lado, sea $\mathcal{P}(L)$ el conjunto de probabilidades en la σ-álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ que tiene soporte compacto y son invariantes bajo el flujo de Euler-Lagrange, entonces el valor crítico se puede caracterizar como

$$c(L) = -\min\{\int L d\mu : \mu \in \mathcal{P}(L)\}.$$

y el conjunto de Mather como

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \overline{\bigcup\{\operatorname{supp} \mu : \mu \in \mathcal{P}(L), \int L d\mu = -c(L)\}}.$$

Ahora para $a \leq b$, $x, y \in M$ sea $\mathcal{C}(x, a, y, b)$ el conjunto de curvas absolutamente continuas $\gamma : [a, b] \to M$ con $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, con lo anterior definamos $F_{a,b} : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$F_{a,b}(x, y) := \min\{A_L(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}(x, a, y, b)\}.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, denotemos por $[t]$[1] el punto correspondiente en $\mathbb{S}^1$ y $[\![t]\!]$ la parte entera de t.

El *potencial de acción* $\Phi : M \times \mathbb{S}^1 \times M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ esta definido por

$$\Phi(x, [s], y, [t]) := \min\{F_{a,b}(x, y) + c(L)(b - a) : [a] = [s], [b] = [t]\}$$

[1]Recordemos que $\mathbb{S}^1$ se identifica con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

y la *barrera de Peierls* $h : M \times \mathbb{S}^1 \times M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ por

$$h(x,[s],y,[t]) := \liminf_{[\![b-a]\!]\to\infty} \big(F_{a,b}(x,y) + c(L)(b-a)\big)_{[a]=[s],[b]=[t]} \tag{4}$$

Donde, de las definiciones tenemos que $-\infty < \Phi \le h < \infty$.

En contraste con el caso autónomo, el potencial de acción puede no ser continuo ni satisfacer la desigualdad del triangulo. Sin embargo se tiene lo siguiente:

PROPOSICIÓN 3 (CIS). *Para la* Barrera de Peierls *se tienen las siguientes propiedades:*

1. *h es finito*
2. *$h(x,[s],z,[\tau]) \le h(x,[s],y,[t]) + \Phi(y,[t],z,[\tau])$*
3. *h es Lipschitz*

Ahora se tiene la siguente proposición:

PROPOSICIÓN 4 (CIS). *Para cualquier p las funciones $z \mapsto h(p,z)$ y $z \mapsto -h(z,p)$ son respectivamente soluciones de viscosidad de* (3) pasadas *y* futuras.

Para una curva $\gamma : I \to M$ denotaremos por $\bar\gamma(t) = (\gamma(t),[t])$ y $\Gamma(t) = (\gamma,\dot\gamma(t),[t]))$.

Una curva $\gamma : I \to M$ *calibra* una subsolución $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de (3) si

$$u(\bar\gamma(b)) - u(\bar\gamma(a)) = A_{L+c}(\gamma|[a,b])$$

para cada $[a,b] \subset I$.

Si $u \in \mathcal{S}^-(\mathcal{S}^+)$, para cada $(x,[s]) \in M\times\mathbb{S}^1$ existe $\gamma : (-\infty,s] \to M$ ($\gamma : [s,\infty) \to M$) que calibra u y $\gamma(s) = x$.

Las soluciones de viscosidad tienen varias propiedades incluyendo las de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5 (CIS). *Si $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad de* (3) *y γ calibra a u, entonces:*

(1) u es Lipschitz y satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du, t) = c$$

en cualquier punto de diferenciabilidad. Más aún, Du y $\dot\gamma$ son Legendre conjugadas.

(2) Si $\gamma : [a,b] \to M$ calibra a u, entonces u es diferenciable en $\bar\gamma(t) := (\gamma(t),[t])$, $\forall t \in (a,b)$. Y si u es diferenciable en $\bar\gamma(t)$, entonces $(\gamma(t), d_x u(\bar\gamma(t)), [t])$ está sobre la órbita del flujo Hamiltoniano proyectado sobre $\bar\gamma(t)$.

PROPOSICIÓN 6 (CIS). *El valor crítico esta dado por*

$$c(L) = \min_{f\in C^\infty(M\times\mathbb{S}^1)} \ \max_{(x,t)\in M\times\mathbb{S}^1} f_t + H(x, Df, t).$$

Corolario 7 (CIS). *Si u es una solución global C^{1+Lip} de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$u_t + H(x, Du, t) = k,$$

entonces $k = c$ y u es una solución de viscosidad en $\mathcal{S}^- \cap \mathcal{S}^+$.

Se dice que una curva absolutamente continua $\gamma : [a,b] \to M$ es una minimizante si $A_L(\gamma) \leq A_L(\eta)$ para cualquier curva $\eta : [a,b] \to M$ absolutamente continua con $\eta(a) = \gamma(a)$ y $\eta(b) = \gamma(b)$. Luego, una curva minimizante es una solución de la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{d_t} L_v = L_x$.

Utilizaremos también el siguiente lema debido a Mather [**M**].

Lema 8 (M). *Existe $A > 0$ tal que si $b - a \geq 1$ y $\gamma : [a,b] \to M$ es una minimizante, entonces $|\dot{\gamma}(t)| \leq A$ para $t \in [a,b]$.*

Muy en particular utilizaremos la siguiente proposición.

Proposición 9. *Si sólo existe una única calibradora $\gamma : (-\infty, s] \to M$ de u con $\gamma(s) = x$, entonces la solución u de* (3) *es diferenciable en* $(x, [s])$.

Demostración. Ya que el resultado es local, la demostración será en $\mathbb{R}^d$. Sea $\gamma_h : (-\infty, s] \to M$ una curva calibradora de u con $\gamma_h(s) = x + h$

$$u(x,[s]) - u(\gamma(t)),[t]) = \int_t^s L(\gamma(r), \dot{\gamma}(r), [r]) + c dr, \tag{5}$$

$$u(x+h,[s]) - u(\gamma_h(t),[t]) = \int_t^s L(\gamma_h(r), \dot{\gamma}_h(r), [r]) + c dr. \tag{6}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que γ_h converge a γ pues de no ser así; por el lema de Mather (Lema 8), sabemos que $|\dot{\gamma}_h|$ están acotados uniformemente por una constante A, por lo tanto son $A-$lipschitz. Luego del teorema de Arzela-Ascoli se tiene que existe una subsucesión γ_{h_i} tal que ésta converge uniformemente y por la unicidad de γ se sigue que el límite es γ.

Si hacemos (6)-(5)

$$\begin{aligned}
&[u(x+h,[s]) - u(x,[s])] - [u(\gamma_h(t),[t]) - u(\gamma(t)),[t])] \\
&= \int_t^s [L(\gamma_h(r), \dot{\gamma}_h(r), [r]) - L(\gamma(r), \dot{\gamma}(r), [r])] dr
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Taylor de segundo orden a la ecuación anterior y posteriormente recordando la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos que

$$\begin{aligned}
&[u(x+h,[s]) - u(x,[s])] - [u(\gamma_h(t),[t]) - u(\gamma(t)),[t])] \\
&= \int_t^s \frac{d}{dr}\Big(L_v(\gamma(r), \dot{\gamma}(r), [r])(\gamma_h(r) - \gamma(r))\Big) dr + O(h^2) \\
&= L_v(\gamma(r), \dot{\gamma}(r), [r])(\gamma_h(r) - \gamma(r)) \,|_t^s + O(h^2) \\
&= L_v(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), [s]) \cdot h - L_v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), [t])(\gamma_h(t) - \gamma(t)) + O(h^2).
\end{aligned}$$

Pero u es diferenciable en $(\gamma(t),[t]]$ por la proposición 5, por lo tanto u es diferenciable en la variable espacial y

$$d_x u(\gamma(s),[s]) = L_v(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]). \tag{7}$$

Ahora sea $\gamma_\tau : (-\infty, s+\tau] \to M$ una curva calibradora de u con $\gamma_\tau(s+\tau)=x$,

$$u(x,[s]) - u(\gamma(t),[t]) = \int_t^s L(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r]) + cdr \tag{8}$$

$$u(x,[s+\tau]) - u(\gamma_\tau(t),[t]) = \int_t^{s+\tau} L(\gamma_\tau(r),\dot\gamma_\tau(r),[r]) + cdr. \tag{9}$$

Haciendo (9)-(8)

$$\begin{aligned}
&[u(x,[s+\tau]) - u(x,[s])] - [u(\gamma_\tau(t),[t]) - u(\gamma(t)),[t])]\\
&= \int_t^s [L(\gamma_\tau(r),\dot\gamma_\tau(r),[r]) - L(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r])]dr\\
&+ \int_s^{s+\tau} L(\gamma_\tau(r),\dot\gamma_\tau(r),[r])dr + c\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Taylor de segundo orden a la ecuación anterior y la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
&[u(x,[s+\tau]) - u(x,[s])] - [u(\gamma_\tau(t),[t]) - u(\gamma(t),[t])]\\
&= \int_t^s L_x(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r])(\gamma_\tau(r)-\gamma(r)) + L_v(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r])(\dot\gamma_\tau(r)-\dot\gamma(r))dr\\
&+ \tau(L(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]) + c) + O(\tau^2)\\
&= \int_t^s \frac{d}{dr}[L_v(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r])(\gamma_\tau(r)-\gamma(r))]dr + \tau(L(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r]) + c) + O(\tau^2)\\
&= [L_v(\gamma(r),\dot\gamma(r),[r])(\gamma_\tau(r)-\gamma(r))]\,\big|_t^s + \tau(L(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]) + c) + O(\tau^2)\\
&= (L_v(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s])\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma_\tau(s) + L(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]) + c)\tau\\
&- L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),[t])\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma_\tau(t)\tau + O(\tau^2).
\end{aligned}$$

Pero u es diferenciable en $(\gamma(t),[t])$ por la Proposición 5, por lo tanto

$$\begin{aligned}
u_t(\gamma(s),[s]) &= L_v(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s])\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0}\gamma_\tau(s) + L(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]) + c\\
&= -L_v(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s])\dot\gamma(s) + L(\gamma(s),\dot\gamma(s),[s]) + c
\end{aligned}$$

□

Consideremos las proyecciones naturales

$$Pr : T^*M\times\mathbb{S}^1 \to T^*M,\ \pi^* : T^*M \to M.$$

Lema 10. *Sea* $(x, v, [s]) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ *y* u *una subsolución de viscosidad de* (3), *entonces para cada* $t \leq t'$ *tenemos*

$$u(\pi \circ \phi_\tau)(x, v, [s]) - u(\pi \circ \phi_t)(x, v, [s]) = \int_t^\tau L(\phi_r(x, v, [s])dr + c(\tau - t).$$

Proposición 11 (CIS). *Si* $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}^-$, *sea* $\mathfrak{u}(x, [t]) := \inf_{u \in \mathcal{U}} u(x, [t])$ *entonces o bien* $\mathfrak{u} \equiv -\infty$ *o* $\mathfrak{u} \in \mathcal{S}^-$.

Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}^+$, *sea* $\mathfrak{v}(x, [t]) := \sup_{v \in \mathcal{V}} v(x, [t])$ *entonces o bien* $\mathfrak{v} \equiv +\infty$ *o* $\mathfrak{v} \in \mathcal{S}^+$.

La siguiente definición será muy importante para nuestros propósitos:

Definición 12. El Lagrangiano L se llama regular si el $\liminf$ en (4) es un límite.

Proposición 13 (B1). *Si el Lagrangiano* L *es regular, entonces para cada* $s, t \in \mathbb{R}$ *el límite en* (4) *es uniforme.*

2. El conjunto de Aubry

Definición 14. Una pareja $(u_-, u_+) \in \mathcal{S}^- \times \mathcal{S}^+$ se llama *conjugada* si $u_- = u_+$ en $\mathcal{M} = \pi(\widetilde{\mathcal{M}})$. Para una pareja (u_-, u_+), definimos $I(u_-, u_+)$ como el conjunto donde u_- y u_+ coinciden.

Lema 15. *Si* $(x, [s]) \in I(u_-, u_+)$, *existe* $\gamma : R \to M$ *tal que* $\gamma(s) = x$ *y*

$$u_\pm(\bar{\gamma}(\tau)) - u_\pm(\bar{\gamma}(t)) = A_{L+c}(\gamma|[t, \tau]), \forall t \leq \tau.$$

Entonces se sigue que $u_\pm$ *es diferenciable en* $(x, [s])$ *y* $Du_\pm(x, [s]) = L_v(x, v, [s])$.

Sea

$$I^*(u_-, u_+) = \{(x, Du_\pm(x, [s]), [s]) : \ (x, [s]) \in I(u_-, u_+)\}.$$

Ahora podemos definir el *conjunto de Aubry* o bien como el conjunto [**B**]

$$\mathcal{A}^* := \bigcap \{I^*(u_-, u_+) : (u_-, u_+) \text{ conjugado}\} \subset T^*M \times \mathbb{S}^1$$

o como su preimagen bajo la transformada de Legendre [**F**]

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{(x, H_p(x, p, t), [t]) : (x, p, [t]) \in \mathcal{A}^*\}.$$

La proyección de ellos en $M \times \mathbb{S}^1$ es

$$\mathcal{A} = \{ (x, [t]) \in M \times \mathbb{S}^1 : h(x, [t], x, [t]) = 0\}.$$

Definamos una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$ por $(x, [s]) \sim (y, [t])$ si y sólo si

$$\Phi(x, [s], y, [t]) + \Phi(y, [t], x, [s]) = 0.$$

Las clases de equivalencia de esta relación son llamadas *Clases Estáticas.*
Sea $\mathfrak{A}$ el conjunto de clases estáticas. Para cada clase estática $\Gamma \in \mathfrak{A}$ escojamos un punto $(z, [\tau]) \in \Gamma$ y sea $\mathbb{A}$ el conjunto de tales puntos.

Siguiendo a Fathi, tenemos la siguiente definición; decimos que
$u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ está $L + c$ dominada si

$$u(y, [t]) - u(x, [s]) \leq \Phi(x, [s], y, [t]).$$

Además, una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es semiestática si y sólo si es calibradora de alguna $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dominada por $L + c$.

Proposición 16 (CIS). *Si $\gamma :]-\infty, s] \to M$ es semiestática y $s_n \to -\infty$ es tal que $\lim_n (\gamma(s_n), [s_n]) = (z, [\tau])$ existe. Entonces $(z, [\tau])$ está en el conjunto de Aubry.*

Proposición 17 (CIS). *La transformación*

$$\{f : \mathbb{A} \to \mathbb{R} | f \text{ está dominada}\} \to \mathcal{S}^-$$
$$f \mapsto u_f(x, [t]) = \min_{(z,[\tau] \in \mathbb{A})} f(z, [\tau]) + h(z, [\tau], x, [t])$$

y la transformación

$$\{f : \mathbb{A} \to \mathbb{R} | f \text{ está dominada}\} \to \mathcal{S}^+$$
$$f \mapsto v_f(x, [t]) = \max_{(z,[\tau] \in \mathbb{A})} f(z, [\tau]) + h(x, [t], z, [\tau])$$

son biyecciones.

Para u una subsolución de (3), definamos

$$I^*(H, u) = \{(x, p, [t]) : \gamma(s) := \pi^* \circ \Pr \circ \phi^*_{s-t}(x, p, [t]). \text{ calibra a } u \text{ in } \mathbb{R}\}$$

Lema 18. *Si $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es una subsolución de* (3)*, existe un par conjugado (u_-, u_+) tal $u_+ \leq u \leq u_-$.*

Demostración. Considere

$$u_-(x, [s]) = \min_{(y,[t]) \in M \times \mathbb{S}^1} \{u(y, [t]) + h((y, [t]), (x, [s]))\}, \tag{10}$$

$$u_+(x, [s]) = \max_{(y,[t]) \in M \times \mathbb{S}^1} \{u(y, [t]) - h((x, [s]), (y, [t]))\}. \tag{11}$$

Como u es una subsolución de viscosidad de (3), tenemos que $u_+ \leq u \leq u_-$. De las proposiciones 4 y 11, $u_\pm \in \mathcal{S}^\pm$. Sólo resta demostrar que $u_- \leq u \leq u_+$ en $\mathcal{M}$.

Sea $(x, v, [s]) \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $\gamma : \mathbb{R} \to M$ la solución a la ecuación de Euler-Lagrange con $\gamma(s) = x$ y $\dot{\gamma}(s) = v$. Por el lema 10, para cada entero $n \geq |s|$ tenemos

$$u(x, [s]) - u(\gamma(-n), [0]) = \Phi(\gamma(-n), [0], x, [s]) \tag{12}$$

$$u(\gamma(n), [0]) - u(x, [s]) = \Phi(x, [s], \gamma(n), [0]). \tag{13}$$

Sea $y \in M$ el límite de una sucesión $\gamma(-n_k)$. De (12)

$$u(x, [s]) - u(\gamma(-n_k), [0]) \geq h(y, [0], x, [s]) - h(y, [0], \gamma(-n_k), [0])$$

tomando límites

$$u(x, [s]) = u(y, [0]) + h(x, [s], y, [0]) \geq u_-(x, [s]).$$

De manera similar, de (13) obtenemos que $u \leq u_+$. $\square$

PROPOSICIÓN 19. *Si* $u : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ *es una subsolución de* (3) *y* (u_-, u_+) *es un par conjugado tal que* $u_+ \leq u \leq u_-$, *entonces* $I^*(u_-, u_+) = I^*(H, u)$.

Así

$$\mathcal{A}^* = \bigcap \{I^*(H, u) : u \text{ es subsolución de } (3)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x, p, [s]) \in I^*(u_-, u_+)$ y $\gamma : \mathbb{R} \to M$ dada por la Proposición 15. Recordando que $u_-(x, [s]) = u_+(x, [s]) = u(x, [s])$ y $u_+ \leq u \leq u_-$ tenemos que $u_+ = u = u_-$ a lo largo de γ y así γ calibra a u. Por lo tanto $\gamma(t) = \pi^* \circ \Pr \circ \phi^*_{s-t}(x, p, [t])$ y entonces $(x, p, [s]) \in I^*(H, u)$.

Ahora sea $(x, p, [s]) \in I^*(H, u)$. Para $t < \tau$

$$u(\gamma(\tau), [\tau]) - u(\gamma(t), [t]) = A_{L+c}(\gamma|[t, \tau]).$$

con $\gamma(t) = \pi^* \circ \Pr \circ \phi^*_{s-t}(x, p, [t])$. Para $t < \tau$

$$u_+(\gamma(\tau), [\tau]) - u_+(\gamma(t), [t]) \leq u(\gamma(\tau), [\tau]) - u(\gamma(t), [t])$$

Sea $t_n \in \mathbb{N}$ una sucesión con $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ tal que $(\gamma(t_n), [t_n])$ converge a $(z, [\tau])$. Entonces

$$u_+(z, [\tau]) - u_+(\gamma(t), [t]) \leq u(z, [\tau]) - u(\gamma(t), [t]).$$

Ya que γ calibra a u, por la proposición 16 tenemos que $(z, \tau) \in \mathcal{A}$. Así $u_-(z, \tau) = u(z, \tau) = u_+(z, \tau)$ y por lo tanto $u(\gamma(t), [t]) \leq u_+(\gamma(t), [t])$.
Similarmente $u_-(\gamma(t), [t]) \leq u(\gamma(t), [t])$.

Consecuentemente $u_- = u_+ = u$ a lo largo de γ y $d_x u_- = d_x u_+ = d_x u = p$. □

Usando el Lema 18 y siguiendo la demostración de Fathi [**F**] para el caso autónomo se puede demostrar el siguiente Teorema.

TEOREMA 20. *Existe una pareja conjugada* (u_-, u_+) *tal que* $\mathcal{A} = I(u_-, u_+)$ *y* $\mathcal{A}^* = I^*(u_-, u_+)$.

Se sigue de la Proposición 19, que para una pareja conjugada (u_-, u_+) dada por el Teorema 20, que $\mathcal{A}^* = I^*(H, u_-) = I^*(H, u_+)$.

3. Subsoluciones Críticas

El siguiente Teorema extiende a Hamiltonianos periódicos en el tiempo el resultado de Bernard [**B**] para Hamiltonianos autónomos.

TEOREMA 21. *Sea* $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un Hamiltoniano* C^k *que satisface las hipótesis estándar. Suponga que el conjunto de Aubry* $\tilde{\mathcal{A}}$ *es la unión de un número finito de órbitas periódicas hiperbólicas* Γ_i^* *del flujo Hamiltoniano, entonces existe una subsolución* C^k u *de* (3) *tal que*

$$u_t + H(x, Du(x, [t]), t) < c$$

para cada $(x, [t]) \notin \mathcal{A}$.

PROPOSICIÓN 22. *La variedad (in)estable* W_i^- (W_i^+) *de* Γ_i^* *es localmente la gráfica de una transformación* C^{k-1}.

Demostración. Para $\theta \in T^*M$, definamos el subespacio vertical de $T_\theta T^*M$ como $V(\theta) = \ker(d\pi^*(\theta))$. Si $H(\theta)$ es el subespacio horizontal dado por una conexión riemanniana en M, $T_\theta T^*M = H(\theta) \oplus V(\theta)$. Sea $h_\theta : T_\theta T^*M \to H(\theta)$ la proyección correspondiente. Haciendo $\psi^t_s(\theta) = \Pr \circ \phi^*_{t-s}(\theta, [s])$ decimos que los puntos $(\theta, [s])$, $\phi^*_{t-s}(\theta, [s]), [t] \neq [s]$ son conjugados si $d\psi^t_{s\theta} V(\theta) \cap V(\psi^t_s(\theta)) \neq \{0\}$.

Siendo Γ^*_i minimizante, ésta no tiene puntos conjugados y denotando por $\theta_i = \Pr \circ \Gamma^*_i$, tenemos de [**CI**] que $\forall R > 0$ $\exists T(R, \theta_i(s)) > 0$ tal que $\|h_{\theta_i(t)} d\psi^t_{s\theta_i(s)} w\| > R\|w\|$ $\forall |t| > T(R, \theta_i(s))$ y $w \in V(\theta_i(s)) \backslash \{0\}$. Denotando $E^\pm_i(t) = d\Pr_{\Gamma^*_i(t)}(T_{\Gamma^*_i(t)} W^\pm_i)$, tenemos $V(\theta_i(s)) \cap E^\pm_i(s) = \{0\}$ y por lo tanto $V(\theta_i(s)) \times \{0\} \cap T_{\Gamma_i(s)} W^\pm_i = \{0\}$. Esto implica la Proposición. $\square$

El siguiente resultado nos será de gran utilidad:

Proposición 23. *Las funciones $u_\pm \in S^\pm$ dadas por el Teorema 20 son C^k en una vecindad de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Recordemos de la Proposición 9 que $u_\pm$ es diferenciable en $(x, [s])$ si y sólo si existe solamente una curva $\zeta : (-\infty, s] \to M$ que calibra a $u_\pm$ con $\zeta(s) = x$ y más aún $Du_\pm(x, [s]) = L_v(\dot\zeta(s), s), [s])$.

También tenemos el siguiente Lema para u_- y su análogo para u_+.

Lema 24. *Sea U^* una vecindad compacta de Γ^*_i tal que $U^* \cap \mathcal{A}^* = \Gamma^*_i$. Existe una vecindad U de $\bar\gamma_i$ tal que para cada curva $\zeta \in C^2((-\infty, s], M)$, $s \in [0,1]$ que calibra u_- con $\bar\zeta(s) \in U$, se tiene que $Z^*(t) = (\zeta(t), L_v(Z(t)), [t]) \in U^*$ para toda $t \leq s$. Esto implica que $Z^*(s) \in W^+_i$ y u es diferenciable en $\bar\zeta(s)$.*

Demostración del Lema 24. Si la conclusión del lema no es verdadera, existe una sucesión de curvas calibradoras

$$\zeta_n \in C^2((-\infty, s_n], M)\,, s_n \in [0,1]$$

con $\lim\limits_{n\to\infty} d(\bar\zeta_n(s_n), \bar\gamma_i) = 0$ y una sucesión de tiempos $T_n \leq s_n$ tal que $Z^*_n(T_n) \in \partial U^*$. Definamos $\Upsilon_n : (-\infty, s_n - [\![T_n]\!]) \to T^*M \times \mathbb{S}^1$ por $\Upsilon_n(t) = Z^*_n(t + [\![T_n]\!])$. Podemos suponer al tomar una subsucesión que $Z^*_n(T_n)$ converge a $(y, w, [\tau])$ y Υ_n converge uniformemente en conjuntos compactos a una trayectoria límite $\Upsilon : I \to T^*M \times \mathbb{S}^1$, donde el intervalo I es o bien de la forma $(-\infty, T]$ o bien es $\mathbb{R}$. Tenemos que $\Upsilon_n(\tau) \in \partial U^*$. Como las curvas $\pi^* \circ \Pr \circ \Upsilon_n$ calibran a u_-, también a $\upsilon = \pi^* \circ \Pr \circ \Upsilon$.

Si $I = (-\infty, T]$, entonces $\bar\upsilon(T) \in \bar\gamma_i$ pues $\lim\limits_{n\to\infty} d(\bar\zeta_n(s_n), \bar\gamma_i) = 0$. Ya que u_- es diferenciable en $\bar\gamma_i$, es decir es la única curva que calibra en $\bar\gamma_i(T)$, por lo tanto $\Upsilon(T) = (\upsilon(T), Du_-(\bar\upsilon(T), [T]) = \Gamma^*_i(T)$ de donde $\Upsilon(T) \in \mathcal{A}^*$, que es una contradicción.

Si $I = \mathbb{R}$, entonces $\Upsilon(\tau) \in I^*(H, u) = \mathcal{A}^*$ que de nuevo es una contradicción. $\square$

Del Lema 24 existe una vecindad U de $\bar\gamma_i$ tal que u_- es diferenciable en U y gráf$(Du|U) = (\pi^* \times Id)^{-1}(U) \cap W^+_i$. $\square$

Para obtener el Teorema 21 la principal herramienta es el siguiente lema demostrado por D. Masart

LEMA 25 (Ma). *Existe una función C^2 no-negativa $W : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, positiva fuera de $\mathcal{A}(H)$ y que se anula en $\mathcal{A}(H)$ tal que $c(H+W) = c(H)$ y $\mathcal{A}(H+W) = \mathcal{A}(H)$.*

Se sigue de

$$c(H) = \inf_{u \in C^2} \max_{(x,[t])} u_t + H(x, Du(x,[t]), t)$$

que para cada función $V : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq V \leq W$

$$c(H) \leq c(H+V) \leq c(H+W) = c(H).$$

Afirmamos que si V se anula en $\mathcal{A}(H)$ entonces $\mathcal{A}^*(H) \subset \mathcal{A}^*(H+V)$ y similarmente $\mathcal{A}^*(H+V) \subset \mathcal{A}^*(H+W)$. En efecto, en tal caso se tiene que $dV(z) = 0$ en cada punto $z \in \mathcal{A}(H)$ y así toda órbita $(q(t), p(t), [t])$ del flujo hamiltoniano de H contenida en $\mathcal{A}^*(H)$ es también órbita del flujo hamiltoniano de $H+V$. Para ver que tal órbita está contenida en $\mathcal{A}^*(H+V)$ basta probar (Proposición 19) que la órbita $q(t)$ calibra toda subsolución v de

$$v_t + H(x, dv(x,[t]), t) + V(x,t) = c(H).$$

Pero tal subsolución es también subsolución de (3) y por tanto $q(t)$ la calibra. Así $\mathcal{A}(H) \subset \mathcal{A}(H+V) \subset \mathcal{A}(H+W) = \mathcal{A}(H)$.

La función V puede escogerse suficientemente plana sobre $\mathcal{A}(H)$ de tal manera que el flujo Hamiltoniano linealizado a lo largo de las órbitas Γ_i^* es el mismo para H y $H+V$. Para esto, encajamos $M \times \mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^n$, le damos la métrica inducida y consideremos $N_{\mathcal{A}}$ el haz normal de $\mathcal{A}$ en $M \times \mathbb{S}^1$. Por el teorema de la vecindad tubular, existen $\varepsilon > 0$, una vecindad D de $\mathcal{A}$ en $M \times \mathbb{S}^1$ y un difeomorfismo

$$\psi : D \to B_\varepsilon(\mathcal{A}) = \{(a,r) \in N_{\mathcal{A}} : a \in \mathcal{A}, |r| < \varepsilon\}$$

que escribimos $\psi(z) = (a(z), r(z))$.

Tomemos además $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^∞ con $\varphi(0) = 0$ si $x \leq 0$, $\varphi(x) > 0$ si $x > 0$, $\varphi^{(n)}(0) = 0\, \forall n$ y $\varphi(x) = 1$ si $|x| \geq \frac{1}{2}$.

Ahora definamos

$$V(z) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{|r(z)|}{\varepsilon}\right) W(z) & |r(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ W(z) & |r(z)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Como consecuencia las órbitas Γ_i^* permanecerán hiperbólicas como órbitas de $H+V$. Si aplicamos el teorema 23 al Hamiltoniano $H+V$ obtenemos una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du, t) + V(x,t) = c(H+V) = c(L) \tag{14}$$

la cual es C^k en una vecindad de $\mathcal{A}(H+V) = \mathcal{A}(L)$.

Utilizando molificadores demostraremos que esta función puede ser suavizada a una subsolución C^k de (3). Para esta parte podemos suponer que $M \subseteq \mathbb{R}^n$. En efecto, sea $v_r = u * \eta_r$ la molificación de u. Ya que u es el límite uniforme en todo $M \times \mathcal{S}^1$ de las v_r, entonces Du y u_t son el límite uniforme en $\overline{B_\varepsilon(\mathcal{A})}$ de Dv_r y $(v_r)_t$

respectivamente ([**E**]); entonces, tanto Dv_r como $(v_r)_t$ permanecen a un compacto K.

De la definición de V, se tiene que $V(x,t) > \delta$ fuera de $B_\varepsilon(\mathcal{A})$ y del hecho que u es solución de $u_t + H(x, Du, t) + V(x,t) = c(L)$, entonces $u_t + H(x, Du, t) < c - \delta$ casi en todas partes fuera de $B_\varepsilon(\mathcal{A})$.

Por otro lado, sabemos que

$$v_r = \int \eta_r(x-y)u(y)dy \text{ y } Dv_r = \int D\eta_r(x-y)u(y)dy.$$

Por lo tanto, $H(x, dv_r, t) = H(x, \int \eta_r(x-y)u(y), t)dy$ y aplicando la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned} H(x, \int \eta_r(x-y)u(y), t)dy &\leq \int H(x, du, t)\eta_r(x-y)dy \\ &\leq \int (c-u_t)\eta_r(x-y)dy \\ &= \int c\eta_r(x-y)dy - \int u_t\eta_r(x-y)dy \\ &= c - (v_r)_t. \end{aligned}$$

Consideremos una función $\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to [0,1]$, C^k con $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $\lambda = 1$ en $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathcal{A})}$ y $\lambda = 0$ fuera de $\overline{B_\varepsilon(\mathcal{A})}$. Con esto sea

$$w = \lambda u + (1-\lambda)v_r \tag{15}$$

y veamos que w es la subsolución C^k que buscamos.

Sea r suficientemente pequeño tal que $\lambda_t|u - v_r| < \frac{\delta}{2}$, si tomamos

$$\lambda H(x, Du, t) + (1-\lambda)H(x, Dv_r, t),$$

entonces

$$\begin{aligned} \lambda H(x, Du, t) + (1-\lambda)H(x, Dv_r, t) &\leq \lambda(c - \delta - u_t) + (1-\lambda)(c - (v_r)_t) \\ &\leq c - \lambda\delta - [\lambda u_t + (1-\lambda)(v_r)_t] \\ &\leq c - \delta - [\lambda_t(u-w) - w_t] \\ &\leq c - \delta + \frac{\delta}{2} - w_t = c - \frac{\delta}{2} - w_t. \, (*) \end{aligned}$$

Por la continuidad de H, sabemos que existe ρ tal que si $|p - q| < \rho$, entonces $|H(x,p,t) - H(x,q,t)| < \frac{\delta}{2}$.

Si hacemos $p = Dv_r$ y $q = \lambda Du - (1-\lambda)Dw$, entonces

$$|p - q| = |D\lambda||u - v_r|.$$

Haciendo r más pequeño si es necesario, tal que $|D\lambda||u - v_r| < \rho$. Entonces, tenemos que $H(x, Dw, t) - H(x, \lambda Du + (1-\lambda)Dv_r, t) < \frac{\delta}{2}$. Si ahora usamos (*), entonces obtenemos que

$$H(x, Dw, t) < H(x, \lambda Du + (1-\lambda)Dv_r, t) \leq c - \frac{\delta}{2} - w_t + \frac{\delta}{2}.$$

Por lo tanto,

$$w_t + H(x, Dw, t) < c. \tag{16}$$

Además, de la construcción de w se tiene que w es C^k.

Capítulo II

Soluciones Suaves para la Ecuación Viscosa

El objetivo de este apartado es dar una demostración de la existencia de una única $c \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa tiene una solución suave periódica ϕ, única salvo la adición de constantes, para esto supondremos una hipótesis de crecimiento adicional a las de la Sección 1 del Capítulo I y utilizaremos el método de continuación.

Antes demos algunos preliminares importantes.

1. Operadores Lineales

Introduzcamos la notación

$$d((x,t),(\bar{x},\bar{t}\,)) = (|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|)^{\frac{1}{2}},$$

donde $|x|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^d$.

Definición 26. Para $\phi : \mathbb{T}^d \times (a,b) \to \mathbb{R}$ definimos

$$|\phi|_0 = \sup_{\mathbb{T}^{d+1}} |\phi|,$$

$$\overline{|\phi|}_\alpha = |\phi|_0 + \sup \frac{|\phi(x,t) - \phi(\bar{x},\bar{t})|}{d((x,t),(\bar{x},\bar{t}))^\alpha}.$$

Siguiendo a Friedman [**Fr**], diremos que ϕ es α-Hölder continua en $\mathbb{T}^d \times (a,b)$ si $\sup \dfrac{|\phi(x,t) - \phi(\bar{x},\bar{t})|}{d((x,t),(\bar{x},\bar{t}))^\alpha} < \infty$.

Denotemos por $\bar{C}_\alpha(\mathbb{T}^d \times (a,b))$ al conjunto de funciones $\phi : \mathbb{T}^d \times (a,b) \to \mathbb{R}$ para las cuales $\overline{|\phi|}_\alpha < \infty$. Se denota por D^m a la derivada parcial de orden m con respecto a la variable espacial x y por ϕ_t a la derivada con respecto a t. Si $D\phi, D^2\phi, \phi_t$ existen en $\mathbb{T}^d \times (a,b)$, entonces definimos

$$\overline{|\phi|}_{2+\alpha} = \overline{|\phi|}_\alpha + \sum \overline{|D\phi|}_\alpha + \sum \overline{|D^2\phi|}_\alpha + \overline{|\phi_t|}_\alpha.$$

Denotemos por $\bar{C}_{2+\alpha}(\mathbb{T}^d \times (a,b))$ al conjunto de funciones ϕ para las cuales $\overline{|\phi|}_{2+\alpha} < \infty$.

Definición 27. Los espacios de Sobolev $W^p_{k,l}(\mathbb{T}^{d+1})$ y $H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$.

1. Si $k, l \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, los espacios de Sobolev están definidos como sigue

$$W^p_{k,l}(\mathbb{T}^{d+1}) = \{\phi \in L^p(\mathbb{T}^{d+1}) : \|\phi\|_{W^p_{k,l}} < \infty\},$$

con la norma

$$\|\phi\|_{W^p_{k,l}} = \|[(1+|m|^2)^{\frac{l}{2}}(1+|n|^2)^{\frac{k}{2}}\hat{\phi}(n,m)]\check{}\,\|_{L^p(\mathbb{T}^{d+1})}, \tag{17}$$

donde

$$\hat{\phi}(n,m) = \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi(x,t)e^{-2\pi imt}e^{-2\pi inx}dxdt,$$

y

$$\check{\phi}(x,t) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^{d+1}} \hat{\phi}(n,m)e^{2\pi imt}e^{2\pi inx}.$$

2. Para $r, s \in \mathbb{R}$, $H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$ se definen como como sigue

$$H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1}) = \{\phi \in L^2(\mathbb{T}^{d+1}) : \|\phi\|_{H_{r,s}} < \infty\},$$

donde la norma $H_{r,s}$ se define como

$$\|\phi\|_{H_{r,s}} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^{d+1}} (1+m^2)^s(1+|n|^2)^r|\hat{\phi}(n,m)|^2.$$

Se tiene la *desigualdad de Sobolev*

$$\|\phi\|_{C^{(s-[\![\frac{d+1}{2}]\!],r+1-[\![\frac{d+1}{2}]\!]),\frac{1}{2}}} \leq C(d,r+2,s+1)\|\phi\|_{H_{r+2,s+1}}.$$

Para $U : \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ suave consideremos

$$M(\psi) = \psi_t + \Delta\psi + U \cdot D\psi \tag{18}$$

y

$$M_\delta(\psi) = M(\psi) - \delta\psi = \psi_t + \Delta\psi + U \cdot D\psi - \delta\psi.$$

Lema 28. *Suponga que para toda $u : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ continua y $f \in \bar{C}_\alpha(\mathbb{T}^d \times (-2,0))$ existe una solución ψ continua en $\mathbb{T}^d \times [-2,0]$ y $C^{2,1}$ en $\mathbb{T}^d \times (-2,0)$ del problema*

$$M_\delta(\psi) = f, \quad \psi(x,0) = u(x). \tag{19}$$

Si $\delta > 0$, $f \in \bar{C}_\alpha(\mathbb{T}^{d+1})$, entonces existe una única solución $\psi \in C^{2,1}(\mathbb{T}^{d+1})$ de $M_\delta(\psi) = f$.

Demostración. Como $\delta > 0$, se sigue que $M_\delta(e^{\varepsilon t}) < 0$. Para u continua, sea ψ continua en $\mathbb{T}^d \times [-2,0]$ la solución de (19) con $\psi(x,0) = u(x)$ y definamos $Tu(x) = \psi(x,-1)$. De esta forma, ψ es una solución periódica de $M_\delta(\psi) = f$ si y sólo si u es un punto fijo de T.

Para u_i continua, $i = 1,2$ denotemos por ψ_i continua en $(\mathbb{T}^d \times [-2,0])$ a la solución de (19) con $\psi_i(x,0) = u_i(x)$ y sea

$$V(x,t) = \psi_1(x,t) - \psi_2(x,t) - |u_1 - u_2|_0 e^{\varepsilon t}.$$

Entonces

$$M_\delta(V) = -|u_1 - u_2|_0 M_\delta(e^{\varepsilon t}) \geq 0$$

Por otro lado

$$V(x,0) = \psi_1(x,0) - \psi_2(x,0) - |u_1 - u_2|_0 \tag{20}$$
$$= (u_1(x) - u_2(x)) - |u_1 - u_2|_0 \leq 0. \tag{21}$$

Por lo tanto, podemos aplicar el principio del máximo, entonces $V(x,t) \leq 0$ para $t < 0$. En particular tenemos que

$$Tu_1(x) - Tu_2(x) \leq |u_1 - u_2|_0 e^{-\varepsilon}$$

intercambiando los papeles de u_1 y u_2, se sigue que

$$|Tu_1(x) - Tu_2(x)|_0 \leq |u_1 - u_2|_0 e^{-\varepsilon} \tag{22}$$

Por lo tanto, se sigue que T es contracción y asi es posible utilizar el teorema del punto fijo de Banach [**E**] y la afirmación del lema se sigue. □

Teorema 29 ([**K**]). *Suponga que $\psi : \mathbb{T}^d \times [a,b] \to \mathbb{R}$ es una solucion clásica de*

$$\psi_t + \Delta\psi + U \cdot D\psi - \delta\psi = f.$$

Entonces existe una constante $K > 0$ que depende de α pero no de ψ tal que vale la siguiente desigualdad

$$\overline{|\psi|}_{2+\alpha} \leq K(|\psi|_0 + \overline{|D^2 f|}_\alpha) \tag{23}$$

La estimación del Teorema usualmente se conoce como *Estimación de Schauder*, A. Brandt también dió una demostración de estimaciones tipo Schauder [**Br**] para funciones Hölder continuas en x solamente. En ambos casos [**K**] y [**Br**] las demostraciones están basadas en el principio del máximo.

Lema 30. *Si $\delta > 0$, $f \in \bar{C}_\alpha(\mathbb{T}^{d+1})$, entonces existe una única solución $\psi \in C^{2,1}(\mathbb{T}^{d+1})$ de $M_\delta(\psi) = f$.*

Demostración. Probaremos que se satisface la hipótesis del Lema 28.

Sea $u : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ continua, existe una sucesión u_k en $C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ tal que $u_k \to u$ uniformemente. Se sigue del Teorema 3.3.7 en [**Fr**] que existe una única solución de (19) con $\psi_k(x,0) = u_k(x)$. Como en el Lema 28 definamos

$$V(x,t) = \psi_k(x,t) - \psi_m(x,t) - |u_k - u_m|_0$$

Entonces

$$M_\delta(V) = -|u_k - u_m|_0 M_\delta(1) \geq 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} V(x,0) &= \psi_k(x,0) - \psi_m(x,0) - |u_k - u_m|_0 \\ &= u_k(x) - u_m(x) - |u_k - u_m| \leq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos aplicar el principio del máximo, entonces $V(x,t) \leq 0$ para $t < 0$. O sea

$$\psi_k(x,t) - \psi_m(x,t) \leq |u_k - u_m|_0.$$

Intercambiando los papeles de ψ_k y ψ_m se sigue que

$$|\psi_k(x,t) - \psi_m(x,t)| \leq |u_k - u_m|_0$$

por lo tanto $\{\psi_k\}$ es uniformemente Cauchy. Por el Teorema 29

$$\overline{|\psi_k - \psi_m|}_{2+\alpha} \leq K|\psi_k - \psi_m|_0.$$

Así ψ_k converge a una solución ψ del problema (19). □

Definamos el operador

$$K_0 = (M_\delta)^{-1} : H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}),$$

y $K = i \circ K_0$ donde i es el encaje de $H_{s+1,r+2}(\mathbb{T}^{d+1})$ en $H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$. Como el encaje i es compacto, luego por el Teorema de Rellich ([**Fr, E**]), se sigue que K es compacto.

Definición 31. Un operador compacto F entre dos espacios de Banach es llamado *Fredholm* si su *kernel* y *cokernel* son de dimensión finita y su rango es cerrado. El índice de un operador Fredholm F es

$$\operatorname{ind}(F) = \dim(\ker F) - \dim(\operatorname{coker} F).$$

Lema 32. $M : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$ *es un operador Fredholm de índice cero.*

Demostración. Del Lema 30 y el párrafo previo a la definición se tiene que $\frac{1}{\delta}I + K$ es Fredholm de índice cero.

Sea ψ tal que $(\frac{1}{\delta}I + K)\psi = 0$, por lo tanto $K\psi = -\frac{1}{\delta}\psi$, entonces $K_0(\psi) = -\frac{1}{\delta}\psi$ de donde $-\delta\psi = M_\delta(\psi) = M(\psi) - \delta\psi$, luego $M(\psi) = 0$. Por lo tanto, $\psi \in \ker(\frac{1}{\delta}I + K)$ implica que $M(\psi) = 0$.

Reciprocamente, sea ψ tal que $M(\psi) = 0$, entonces $M_\delta(\psi) = -\delta\psi$; aplicando K a ambos lados de la igualdad se sigue que $\psi = K(M_\delta(\psi)) = -K(\delta\psi)$, por lo tanto $\frac{1}{\delta}\psi = -K(\psi)$ o equivalentemente $\frac{1}{\delta}\psi + K(\psi) = 0$, así $\psi \in \ker(\frac{1}{\delta}I + K)$. Con todo se tiene $\ker(\frac{1}{\delta}I + K) = \ker(M)$.

Para demostrar el Lema sólo falta probar que $\operatorname{Im}(\frac{1}{\delta}I + K) = \operatorname{Im} M$.

En efecto, sea $g \in \operatorname{Im} M$, entonces existe ψ tal que $M(\psi) = g$, entonces $M_\delta(\psi) = g - \delta\psi$. Aplicando K a ambos lados de la igualdad, se sigue que $\psi = K(M_\delta(\psi)) = K(g - \delta\psi)$. Así

$$\frac{g}{\delta} = K(g - \delta\psi) + \frac{1}{\delta}(g - \delta\psi).$$

De donde tenemos que para $g \in \operatorname{Im} M$, $\frac{g}{\delta} \in \operatorname{Im}(\frac{1}{\delta}I + K)$.

Si ahora $g \in \operatorname{Im}(\frac{1}{\delta}I + K)$, entonces existe ψ tal que $\frac{1}{\delta}\psi + K(\psi) = g$ por lo tanto $K_0(\psi) = g - \frac{1}{\delta}\psi$. Si aplicamos M_δ a ambos lados de la igualdad, entonces

$$\psi = M_\delta(g - \frac{1}{\delta}\psi) = M(g - \frac{1}{\delta}\psi) - \delta g + \psi$$

Luego

$$\delta g = M(g - \frac{1}{\delta}\psi).$$

Por lo tanto $g \in \operatorname{Im} M$. Con todo obtuvimos $g \in \operatorname{Im} M$ si y sólo si $g \in \operatorname{Im}(\frac{1}{\delta}I + K)$. De donde $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im}(\frac{1}{\delta}I + K)$. Luego M es Fredholm. Más aún como $\frac{1}{\delta}I + K$ es de índice cero entonces M es de índice cero. □

LEMA 33. *El Kernel de M son las funciones constantes.*

DEMOSTRACIÓN. Aquí note que el Kernel de M son las soluciones periódicas ψ de $M\psi = 0$. Sea (x_0, t_0) un punto donde ψ alcanza su máximo. Considere $C(x_0) \times [t_0, t_0 + 2]$ donde $C(x_0)$ es el cubo centrado en x_0 de lado 2 en $\mathbb{R}^d$. Como $M(\psi) = 0$, entonces por el principio fuerte del máximo [**E**], se obtiene que ψ es constante en $U_{t_0} = C(x_0) \times [t_0, t_0 + 2)$. Ahora por periodicidad, se sigue que ψ es constante en todos lados. Por lo tanto el Kernel de M son las funciones constantes. $\square$

Para el operador de Fokker-Plank

$$N(\theta) = -\theta_t + \Delta\theta - \operatorname{div}(\theta \cdot V)$$

adjunto del operador M tenemos que $\ker N$ es el espacio ortogonal a $\operatorname{Im} M$ y que $\ker M$ es el espacio ortogonal a $\operatorname{Im} N$. Así $\dim \ker N = \operatorname{codim} \operatorname{Im} M = \dim \ker M = 1$.

2. Existencia de Soluciones Suaves

En esta sección presentamos el resultado principal del Capítulo. Supondremos que además de las hipótesis del Capítulo I, el Hamiltoniano satisface la siguiente hipótesis de crecimiento:

Existe $K > 0$ tal que para toda $(x, p) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ con $|p| \geq K$ y toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(H_p \cdot p - H + \inf_{(x,t)} H(x, 0, t))K - |H_x| \geq 0. \tag{24}$$

TEOREMA 34. *Existe una única $c \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa*

$$\phi_t + \Delta\phi(x, t) + H(x, D\phi(x, t), t) = c \tag{25}$$

tiene una solución suave $\phi : \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}$, única hasta la adición de constantes.

En [**BS**] se demuestra la existencia y unicidad de $c \in \mathbb{R}$ para la cual (25) tiene una solución de viscosidad la cual es única hasta la adición de constantes. Resta probar la existencia de soluciones suaves, para lo cual utilizaremos el método de continuación.

Consideremos la curva de Hamiltonianos

$$H^\lambda(x, p, t) = \lambda H(x, p, t) + (1 - \lambda)\frac{|p|^2}{2}. \tag{26}$$

Introduzcamos la siguiente ecuación

$$\phi_t + \Delta\phi(x, t) + H^\lambda(x, D\phi(x, t), t) = c(\lambda) \tag{27}$$

y definamos el conjunto

$$\Lambda := \{\lambda \in [0, 1] : \exists\, c(\lambda) \in \mathbb{R} \text{ tal que (27) tiene una solución suave}\}.$$

Cuando $\lambda = 0$, $H^0 = \frac{1}{2}|p|^2$, y así para $c(0) = 0$, (27) tiene la solución $\phi = 0$. Por lo tanto Λ no es vacío.

Note que H^λ satisface (24) con la misma constante K pues

$$\begin{aligned}&(H_p^\lambda \cdot p - H^\lambda + \inf_{(x,t)} H^\lambda(x,0,t))K - |H_x|\\ &= \lambda\big[(H_p \cdot p - H + \inf_{(x,t)} H(x,0,t))K - |H_x|\big] + \frac{1}{2}K(1-\lambda)|p|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Lo que ahora se afirma es que Λ es cerrado. Para demostrarlo utilizaremos los siguientes 2 lemas.

LEMA 35. *Las soluciones periódicas de* (27) *tienen primeras derivadas acotadas uniformemente en* λ.

DEMOSTRACIÓN. Por brevedad omitiremos el superíndice λ en H.

Primero notemos que

$$\lambda \min H(x,0,t) \leq c(\lambda) \leq \lambda \max H(x,0,t) \tag{28}$$

En efecto, si ϕ_λ tiene un mínimo en $(\bar{x},\bar{t})$,

$$D\phi_\lambda(\bar{x},\bar{t}) = 0, d_t\phi_\lambda(\bar{x},\bar{t}) = 0, \Delta\phi_\lambda(\bar{x},\bar{t}) \geq 0,$$

así

$$c(\lambda) = \Delta\phi_\lambda(\bar{x},\bar{t}) + H(\bar{x},0,\bar{t}) \geq \inf_{(x,t)} H(x,0,t).$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene la otra desigualdad.

Lo siguiente que demostraremos es que $D\phi_\lambda$ está uniformemente acotado. Siguiendo a [**BS**] definamos w_λ y ψ_λ por

$$\exp(w_\lambda) = \psi_\lambda = \max \phi_\lambda - \phi_\lambda + 1,$$

y probaremos que para K dada en la hipótesis de crecimiento,

$$|Dw_\lambda| \leq K.$$

Como $D\phi_\lambda = -\psi_\lambda Dw_\lambda$, teniendo esta cota, sólo resta demostrar que ψ_λ está uniformemente acotada. Sea (x_λ, t_λ) un punto donde ϕ_λ alcance su máximo. Entonces $w_\lambda(x,t_\lambda) \leq Kd(x,x_\lambda) \leq K$ y así $\psi_\lambda(x,t_\lambda) \leq e^K$ para cualquier $x \in M$. Del principio del máximo se sigue que ψ_λ está uniformemente acotada. En efecto, sea

$$\begin{aligned}a &= \max_{(x,t)} H(x,0,t) - \min_{(x,t)} H(x,0,t),\\ v(x,t) &= \psi_\lambda(x,t+t_\lambda) - e^K + (a+\delta)t.\end{aligned}$$

Ya que $v(x,0) \leq 0$, si $v(x_0,t_0) > 0$ para algún $x_0, t_0 < 0$, existe un tiempo $\bar{t} \in [t_0, 0]$ y un punto $\bar{x} \in M$ donde $v(\bar{x},\bar{t}) = 0$ y

$$v_t(\bar{x},\bar{t}) \leq 0,\ D\phi_\lambda(\bar{x},\bar{t}+t_\lambda) = Dv(\bar{x},\bar{t}) = 0,\ \Delta v(\bar{x},\bar{t}) \leq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}0 \geq v_t(\bar{x},\bar{t}) &= -c(\lambda) - \Delta v_\lambda(\bar{x},\bar{t}+t_\lambda) + H(\bar{x},0,\bar{t}+t_\lambda) + a + \delta\\ &\geq -\max_{(x,t)} H(x,0,t) + \min_{(x,t)} H(x,0,t) + a + \delta\\ &= \delta.\end{aligned}$$

Esta contradicción demuestra que $v(x,t) \leq 0$. Como δ es arbitrario y ψ_λ es periódica

$$\psi_\lambda(x,t) \leq \max_{(x,t)} H(x,0,t) - \min_{(x,t)} H(x,0,t) + e^K.$$

Las funciones w_λ satisfacen

$$-d_t w_\lambda - |Dw_\lambda|^2 - \Delta w_\lambda + b(x, w_\lambda, Dw_\lambda, t) = 0, \tag{29}$$

donde $b(x,t,u,p) = \exp(-u)[H(x, -\exp u \cdot p, t) - c(\lambda)]$.

Demostraremos que $|Dw_\lambda| \leq K$ usando el método de Bernstein, así sea $f = |Dw_\lambda|^2$ y calculemos

$$f_t = 2d_t Dw_\lambda Dw_\lambda \tag{30}$$

$$Df = 2D^2 w_\lambda Dw_\lambda \tag{31}$$

$$\Delta f = 2|D^2 w_\lambda|^2 + 2D(\Delta w_\lambda) Dw_\lambda. \tag{32}$$

Derivando (29) respecto a x, multiplicando por Dw_λ y usando (30) (31) (32)

$$d_t Dw_\lambda Dw_\lambda + Df Dw_\lambda + D(\Delta w_\lambda) Dw_\lambda - b_x Dw_\lambda - b_u f - b_p D^2 w_\lambda Dw_\lambda = 0$$
$$\frac{1}{2} f_t + Df Dw_\lambda + \frac{1}{2}\Delta f - |D^2 w_\lambda|^2 - b_x Dw_\lambda - b_u f - \frac{1}{2} b_p Df = 0.$$

Si f alcanza su máximo en $z_0 = (x_0, t_0)$, entonces

$$f_t(z_0) = 0, Df(z_0) = 0, \Delta f(z_0) \leq 0$$

y por lo tanto

$$|D^2 w_\lambda(z_0)|^2 + b_x Dw_\lambda(z_0) + b_u f(z_0) \leq 0. \tag{33}$$

Tenemos

$$b_x(x,t,u,p) = \exp(-u) H_x(x, -\exp u \cdot p, t)$$
$$b_u(x,t,u,p) = \exp(-u)[(H_p \cdot p - H)(x, -\exp u \cdot p, t) + c(\lambda)].$$

De (28) obtenemos

$$b_u \geq \exp(-u)[(H_p \cdot p - H)(x, -\exp u \cdot p, t) + \inf H(x,0,t)].$$

Suponga que $|Dw_\lambda(z_0)| > K$, entonces $\exp w_\lambda(z_0) |Dw_\lambda(z_0)| \geq K$ pues $w_\lambda \geq 0$.

De la hipótesis (24), $b_u(z_0, w_\lambda(z_0), Dw_\lambda(z_0)) \geq 0$ y

$$\begin{aligned} b_x Dw_\lambda(z_0) + b_u f(z_0) &> |Dw_\lambda(z_0)|(b_u K - |b_x|) \\ &\geq \exp(-w_\lambda(z_0))|Dw_\lambda(z_0)| \\ \cdot[K(H_p \cdot p - H + \inf H(x,0,t)) - |H_x|]&(x_0, -\exp w_\lambda(z_0) Dw_\lambda(z_0), t_0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

que contradice (33).

Nuevamente usaremos el método de Bernstein para demostrar que $d_t\phi_\lambda$, está uniformemente acotada, así sea $g = d_t\phi_\lambda^2 + |D\phi_\lambda|^2$ y calculemos

$$g_t = 2d_t\phi_\lambda d_{tt}\phi_\lambda + 2d_t D\phi_\lambda D\phi_\lambda \tag{34}$$

$$Dg = 2d_t D\phi_\lambda d_t\phi_\lambda + 2D^2\phi_\lambda D\phi_\lambda \tag{35}$$

$$\Delta g = 2|d_t D\phi_\lambda|^2 + 2d_t(\Delta\phi_\lambda) + 2|D^2\phi_\lambda|^2 + 2D(\Delta\phi_\lambda)D\phi_\lambda. \tag{36}$$

Primero derivemos (27) respecto a t y multipliquemos por $d_t\phi_\lambda$ luego respecto a x y multiplicando por $D\phi_\lambda$, sumando lo que resulta y usando (34) (35) (36)

$$\begin{aligned}
d_t\phi_\lambda d_{tt}\phi_\lambda + d_t D\phi_\lambda D\phi_\lambda + d_t(\Delta\phi_\lambda)d_t\phi_\lambda + D(\Delta\phi_\lambda)D\phi_\lambda \\
+H_t d_t\phi_\lambda + H_x D\phi_\lambda + H_p(d_t D\phi_\lambda d_t\phi_\lambda + D^2\phi_\lambda D\phi_\lambda) = 0 \\
\frac{1}{2}g_t + \frac{1}{2}\Delta g + H_t d_t\phi_\lambda + H_x D\phi_\lambda + \frac{1}{2}H_p Dg - |D^2\phi_\lambda|^2 - |d_t D\phi_\lambda|^2 = 0
\end{aligned}$$

Si g alcanza su máximo en $z_0 \in M \times \mathbb{S}^1$, entonces

$$g_t(z_0) = 0, Dg(z_0) = 0, \Delta g(z_0) \leq 0.$$

Si C es una cota para $H_t(x, D\phi_\lambda, t)$, $H_x(x, D\phi_\lambda, t)D\phi_\lambda$ y $H(x, D\phi_\lambda, t) - c(\lambda)$, entonces en el punto z_0 se tiene

$$\begin{aligned}
(\Delta\phi_\lambda)^2 &\leq d|D^2\phi_\lambda|^2 \leq d(H_t d_t\phi_\lambda + H_x D\phi_\lambda) \\
&\leq dC(|d_t\phi_\lambda| + 1) \leq dC(|c(\lambda) - \Delta\phi_\lambda - H(x, D\phi_\lambda, t)| + 1) \\
&\leq dC|\Delta\phi_\lambda| + dC^2 + dC
\end{aligned}$$

Así, los valores $\Delta\phi_\lambda(z_0)$, $d_t\phi_\lambda(z_0)$ y $g(z_0)$ están acotados. □

Lema 36. *Sea ϕ^λ la solucion periódica de* (27) *con* $\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi^\lambda = 0$. *Entonces, para toda $m \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$, sus normas de Sobolev $W^p_{k,l}$ están acotadas a-priori uniformemente en λ.*

Demostración. Por brevedad omitiremos el índice λ. Consideremos la ecuación

$$\phi_t + \Delta\phi = c - H(x, D\phi, t), \tag{37}$$

1. Como $|D\phi|$ y c están uniformemente acotadas tenemos que $c - H(x, D\phi, t)$ tiene norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$. Por el Teorema 9.1 en [**LSU**] ϕ tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.
2. Derivando (37) con respecto a x_i.

$$\phi_{x_i t} + \Delta\phi_{x_i} = -H_{x_i}(x, D\phi, t) - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_i}. \tag{38}$$

Utilizando nuevamente el lema 35,

$$-H_{x_i}(x, D\phi, t) - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_i},$$

tiene norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$. Luego del teorema 9.1 en [**LSU**] ϕ_{x_i} tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

3. Derivemos ahora (37) con respecto a t

$$\phi_{tt} + \Delta\phi_t = -H_p(x, D\phi, t)D\phi_t - H_t(x, D\phi, t). \tag{39}$$

Por el paso 1, $-H_p(x, D\phi, t)D\phi_t - H_t(x, D\phi, t)$ tiene norma L_p uniformemente acotada, ahora del teorema 9.1 en [**LSU**] ϕ_t tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

4. Derivemos (38) con respecto a x_j.

$$\begin{aligned} \phi_{x_i x_j t} + \Delta\phi_{x_i x_j} &= -H_{x_i x_j}(x, D\phi, t) \\ &- H_{x_i p}(x, D\phi, t)D\phi_{x_j} - H_{p x_j}(x, D\phi, t)D\phi_{x_i} \\ &- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j}) - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_i x_j}. \end{aligned} \tag{40}$$

Por el lema 35 y el paso 1 se sigue que $D\phi_{x_i}$y $D\phi_{x_j}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$. De la desigualdad de Hölder,

$$\|(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j})\|_r \leq \|D\phi_{x_i}\|_p \|D\phi_{x_j}\|_q,$$

para $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Luego $(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j})$ tiene norma L_r acotada. Así, de esto y los pasos 1, 2 y 3 se sigue que la parte derecha de la igualdad tiene norma uniformemente acotada. Y nuevamente del lema 9.1 en [**LSU**], $\phi_{x_i x_j}$ tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

5. Ahora derivemos (38) con respecto a t

$$\begin{aligned} \phi_{x_i tt} + \Delta\phi_{x_i t} &= -H_{x_i p}(x, D\phi, t)D\phi_t - H_{x_i t}(x, D\phi, t) \\ &- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_{x_i}) - H_{pt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_i} \\ &- H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_i t}. \end{aligned} \tag{41}$$

De lo hecho anteriormente y procediendo análogamente a la demostración del lema 35, $D\phi_t$ y $D\phi_{x_i}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$. Por la desigualdad de Hölder,

$$\|(D\phi_t, D\phi_{x_i})\|_r \leq \|D\phi_t\|_p \|D\phi_{x_i}\|_q,$$

con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, de lo que $(D\phi_t, D\phi_{x_i})$ tiene norma L_r acotada para cualquier $r > 1$, tomando en cuenta esto y los pasos 1, 2, 3 y 4, la parte derecha de (41) tiene norma uniformemente acotada. Y por el lema 9.1 en [**LSU**], $\phi_{x_i t}$ tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

6. Derivando (39) con respecto a t,

$$\begin{aligned} \phi_{ttt} + \Delta\phi_{tt} &= -H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_t) - 2H_{pt}(x, D\phi, t)D\phi_t \\ &- H_p(x, D\phi, t)D\phi_{tt} - H_{tt}(x, D\phi, t). \end{aligned} \tag{42}$$

Como $D\phi_t$ tiene norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$. Por la desigualdad de Hölder

$$\|(D\phi_t, D\phi_t)\|_r \leq \|D\phi_t\|_p \|D\phi_t\|_q,$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, por lo tanto $(D\phi_t, D\phi_t)$ tiene norma L_p acotada para cualquier $p > 1$, de esto y los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 el miembro derecho de (42) tiene norma uniformemente acotada. De nuevo por el lema 9.1 en [**LSU**], ϕ_{tt} tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

7. Derivemos (40) con respecto a x_k

$$\begin{aligned}
(43)\qquad &\phi_{x_ix_jx_kt} + \Delta\phi_{x_ix_jx_k} = \\
&- H_{x_ix_jx_k}(x, D\phi, t) - H_{x_ix_jp}(x, D\phi, t)D\phi_{x_k} - H_{x_ix_kp}(x, D\phi, t)D\phi_{x_j} \\
&- H_{x_ipp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_j}, D\phi_{x_k}) - H_{x_ip}(x, D\phi, t)D\phi_{x_jx_k} \\
&- H_{px_jx_k}(x, D\phi, t)D\phi_{x_i} - H_{ppx_j}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_k}) \\
&- H_{px_j}(x, D\phi, t)D\phi_{x_ix_k} - H_{ppx_k}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j}) \\
&- H_{ppp}(x, D\phi, t)D\phi_{x_k}(D\phi_{x_j}, D\phi_{x_j}) - H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_ix_k}, D\phi_{x_j}) \\
&- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jx_k}) - H_{px_k}(x, D\phi, t)D\phi_{x_ix_j} \\
&- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_ix_j}, D\phi_{x_k}) - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_ix_jx_k}.
\end{aligned}$$

Por lo pasos anteriores y haciendo una demostración análoga a la del lema 35 se sigue que $D\phi_{x_i}$, $D\phi_{x_j}$, $D\phi_{x_ix_k}$, $D\phi_{x_jx_k}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para cada $p > 1$. Si utilizamos la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(D\phi_{x_ix_k}, D\phi_{x_j})\|_r &\leq \|D\phi_{x_ix_k}\|_p \|D\phi_{x_j}\|_q, \\
\|(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jx_k})\|_r &\leq \|D\phi_{x_i}\|_p \|D\phi_{x_jx_k}\|_q \\
\|(D\phi_{x_ix_j}, D\phi_{x_k})\|_r &\leq \|D\phi_{x_ix_j}\|_p \|D\phi_{x_k}\|_q.
\end{aligned}$$

con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ por lo tanto $(D\phi_{x_ix_k}, D\phi_{x_j})$, $(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jx_k})$ y $(D\phi_{x_ix_j}, D\phi_{x_k})$ tienen norma L_p uniformemente acotada. De esto y los pasos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, la parte derecha de (43) tiene norma L_p uniformemente acotada y del lema 9.1 en [**LSU**] se sigue que $\phi_{x_ix_jx_k}$ tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

8. Derivando (40) con respecto a t.

$$\begin{aligned}
(44)\qquad &\phi_{x_ix_jtt} + \Delta\phi_{x_ix_j} = \\
&- H_{x_ix_jp}(x, D\phi, t)D\phi_t - H_{x_ix_jt}(x, D\phi, t) - H_{x_ipp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_{x_j}) \\
&- H_{x_ipt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_j} - H_{x_ip}(x, D\phi, t)D\phi_{x_jt} \\
&- H_{ppx_j}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_t) - H_{px_jt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_i} \\
&- H_{px_j}(x, D\phi, t)D\phi_{x_it} - H_{ppp}(x, D\phi, t)D\phi_t(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j}) \\
&- H_{ppt}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_j}) - H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_it}, D\phi_{x_j}) \\
&- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jt}) - H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_{x_ix_j}) \\
&- H_{pt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_ix_j} - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_ix_jt}.
\end{aligned}$$

Nuevamente de los pasos anteriores y una demostración similar a la del lema 35, se tiene que $D\phi_{x_it}$, $D\phi_{x_j}$, $D\phi_{x_i}$, $D\phi_{x_jt}$, $D\phi_t$ y $D\phi_{x_ix_j}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$, si utilizamos la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\|(D\phi_{x_it}, D\phi_{x_j})\|_r &\leq \|D\phi_{x_it}\|_p \|D\phi_{x_j}\|_q,\\
\|(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jt})\|_r &\leq \|D\phi_{x_i}\|_p \|D\phi_{x_jt}\|_q,\\
\|(D\phi_t, D\phi_{x_ix_j})\|_r &\leq \|D\phi_t\|_p \|D\phi_{x_ix_j}\|_q.
\end{aligned}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Así $(D\phi_{x_it}, D\phi_{x_j})$, $(D\phi_{x_i}, D\phi_{x_jt})$ y $(D\phi_t, D\phi_{x_ix_j})$ tienen norma L_p uniformemente acotada, de esto y los pasos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7; la parte derecha de (44) tiene norma L_p uniformemente acotada y del lema 9.1 de [**LSU**] se sigue que $\phi_{x_ix_jt}$ tiene norma $W^p_{2,1}$.

9. Derivando (41) con respecto a t

$$\begin{aligned}
&\phi_{x_ittt} + \Delta\phi_{x_itt} =\\
&- H_{x_ipp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_t) - 2H_{x_ipt}(x, D\phi, t)D\phi_t\\
&- H_{x_ip}(x, D\phi, t)D\phi_{tt} - H_{x_itt}(x, D\phi, t)\\
&- H_{ppp}(x, D\phi, t)D\phi_t(D\phi_t, D\phi_{x_i}) - 2H_{ppt}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_{x_i})\\
&- H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_{tt}, D\phi_{x_i}) - 2H_{pp}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_{x_it})\\
&- H_{ptt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_i} - 2H_{pt}(x, D\phi, t)D\phi_{x_it} - H_p(x, D\phi, t)D\phi_{x_itt}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Nuevamente utilizando una demostración similar a la del lema 35 y lo hecho anteriormente, se tiene que $D\phi_{tt}$, $D\phi_{x_i}$, $D\phi_t$ y $D\phi_{x_it}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para cualquier $p > 1$, si utilizamos la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\|(D\phi_{tt}, D\phi_{x_i})\|_r &\leq \|D\phi_{tt}\|_p \|D\phi_{x_i}\|_q,\\
\|(D\phi_t, D\phi_{x_it})\|_r &\leq \|D\phi_t\|_p \|D\phi_{x_it}\|_q,\\
\|(D\phi_{x_it}, D\phi_t)\|_r &\leq \|D\phi_{x_it}\|_p \|D\phi_t\|_q.
\end{aligned}$$

Con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, de donde $(D\phi_{tt}, D\phi_{x_i})$, $(D\phi_t, D\phi_{x_it})$ y $(D\phi_{x_it}, D\phi_t)$ tienen norma L_p uniformemente acotada de esto y los pasos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se sigue que la parte derecha de la igualdad tiene norma L_p uniformemente acotada. Considerando esto y el lema 9.1 en [**LSU**] se obtiene que ϕ_{x_itt} tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

10. Ahora, derivando (42) con respecto a t.

$$\begin{aligned}
&\phi_{tttt} + \Delta\phi_{ttt} =\\
&- H_{ppp}(x, D\phi, t)D\phi_t(D\phi_t, D\phi_t) - 6H_{ppt}(x, D\phi, t)(D\phi_t, D\phi_t)\\
&- 3H_{ptt}(x, D\phi, t)D\phi_t - 3H_{pt}(x, D\phi, t)D\phi_{tt}\\
&- H_p(x, D\phi, t)D\phi_{ttt} - H_{ttt}(x, D\phi, t).
\end{aligned} \tag{46}$$

Procediendo análogamente al lema 35 y los pasos anteriores, se puede demostrar que tanto $D\phi_t$ como $D\phi_{tt}$ tienen norma L_p uniformemente acotada para $p > 1$, luego de la desigualdad de Hölder

$$\|(D\phi_t, D\phi_{tt})\|_r \leq \|D\phi_t\|_p \|D\phi_{tt}\|_q$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, luego de esto y considerando 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, el lado derecho de la igualdad tiene norma L_p uniformemente acotada, considerando el lema 9.1 en [**LSU**] se sigue que ϕ_{ttt} tiene norma $W^p_{2,1}$ uniformemente acotada.

11. Continuando de esta manera, por iteración se tiene que todas las normas $W^p_{k,l}$ están acotadas uniformemente.

$\square$

Del lema 36 cualquier subsucesión convergente de elementos de Λ contiene otra subsucesión cuyas soluciones correspondientes de la ecuación (27) convergen uniformemente con todas sus derivadas a una solución de (25).

Para demostrar que Λ es abierto, definamos

$$F_\lambda : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$$

mediante

$$F_\lambda(\phi) = \phi_t + \Delta\phi + \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi \, dxdt + H^\lambda(x, D\phi, t). \tag{47}$$

Así $L_\lambda := DF_\lambda(\phi) : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$ esta dada por

$$L_\lambda(\psi) = M(\psi) + \int \psi$$

donde

$$M(\psi) = \psi_t + \Delta\psi + U \cdot D\psi, \quad U(x,t) = (H^\lambda)_p(x, D\phi(x,t), t). \tag{48}$$

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y sea φ^{λ_0} solución suave de (27). Tomando $\phi^{\lambda_0} = \varphi^{\lambda_0} - \int \varphi^{\lambda_0} - c(\lambda_0)$ tenemos $F_{\lambda_0}(\phi^{\lambda_0}) = 0$.

Corolario 37. *L_{λ_0} es invertible.*

Demostración. Sea θ la solución de la ecuación de Fokker-Planck $N(\theta) = 0$ con $\int \theta = 1$. Supongamos $M(\psi) + \int \psi = 0$, entonces $\int \psi = -\int M(\psi)\theta = 0$ y así $M(\psi) = 0$. Pero del lema 33 tenemos $\psi = c$ constante; luego $c = \int \psi = 0$. Sea $f \in H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$. Como $\operatorname{Im} M$ es el subespacio ortogonal a θ, existe $\eta \in H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1})$ tal que $M\eta = f - \int f\theta$. Sea $\psi = \eta - \int \eta + \int f\theta$, entonces

$$M(\psi) + \int \psi = M(\eta) + \int f\theta = f.$$

Se sigue que L_{λ_0} es invertible. $\square$

Por el Teorema de la Función Implícita, exite $\delta > 0$ y una transformación suave $\lambda \mapsto \phi_\lambda \in H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1})$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, tal que $F_\lambda(\phi^\lambda) = 0$ y así

$$\phi^\lambda_t + \Delta\phi^\lambda(x,t) + H^\lambda(x, D\phi^\lambda(x,t), t) = -\int \phi^\lambda := c(\lambda)$$

Ya que Λ no es vacío y se tiene que Λ es abierto y cerrado, entonces tenemos que $\Lambda = [0, 1]$; en particular, $1 \in \Lambda$. Luego, la ecuación (25) tiene una solución suave ϕ.

Capítulo III

Soluciones físicas

Estudiaremos la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa en el toro $\mathbb{T}^{d+1}$

$$\phi_t + \varepsilon\Delta\phi(x,t) + H(x, D\phi(x,t), t) = c(\varepsilon) \tag{49}$$

Como demostramos en el Capítulo II, hay una única constante $c(\varepsilon)$ tal que la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa admite solución, siendo única salvo la adición de constantes y la denotaremos por ϕ_ε.

Estudiaremos el comportamiento de ϕ_ε cuando ε tiende a cero, demostrando que la familia $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es uniformemente Lipschitz y por lo tanto podemos extraer subsucesiones que convergen uniformemente (Lema 39). Por el teorema de estabilidad para soluciones de viscosidad ([**CEL**], [**Ba**], [**BCD**]), el límite cuando $\varepsilon \to 0$ de tales subsucesiones tienen que ser soluciones de viscosidad de la ecuación (3).

Además de las hipótesis estándar, supondremos que

(I) Existe $K > 0$ tal que para toda $(x,p) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ con $|p| \geq K$ y para toda $t \in \mathbb{R}$ se satisface (24).

(II) El conjunto de Aubry $\mathcal{A}^*$ es la unión de un número finito de órbitas periódicas hiperbólicas $\Gamma_i^*(t)$, $i \in [i, m]$ del flujo Hamiltoniano con periodos $N_i, i \in [1, m]$.

Ejemplo 1. Tomemos

$$H(x,p,t) = \frac{1}{2}|p+P|^2 + V(x,t)$$

con $V \in C^k(\mathbb{T}^{d+1})$. En este caso el flujo es completo y la hipótesis (I) equivale a

$$(\frac{1}{2}|p|^2 - V(x,t) + \inf_{(x,t)} V(x,t))K - |V_x(x,t)| \geq 0$$

con $|p| \geq K$.

De la Proposición 17, se tiene que las soluciones de viscosidad están completamente determinadas por un valor tomado en cada órbita proyectada $\bar{\gamma}_i(t) = (\gamma_i(t), [t])$. Fijemos por ejemplo $\bar{x}_i = (x_i, [0]) = \bar{\gamma}_i(0)$, por la Proposición 17, si ϕ es una solución de viscosidad de tal manera que $\phi(\bar{x}_i) = \phi_i$ para toda $i \in [1, m]$, tenemos que $\phi_j - \phi_i \leq h(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ para cada i, j. Recíprocamente, si esta condición necesariamente se satisface, entonces existe una única $\phi \in \mathcal{S}^+$ teniendo estos valores prescritos.

De hecho está dada por

$$\phi(z) = \max_i \phi_i - h(z, \bar{x}_i).$$

Como la órbita Γ_i es hiperbólica, tenemos que $h_i(z) = h(z, \bar{x}_i)$ es C^2 en una vecindad de la órbita proyectada. Una prueba de este hecho es similar a la de la Proposición 23 y así podemos definir

$$\lambda_i := \frac{1}{N_i} \int_0^{N_i} \Delta h_i(\gamma_i(t), t) dt \tag{50}$$

$$\bar{\lambda} := \min_{i \in [1,m]} \lambda_i. \tag{51}$$

Extendiendo resultados previos ([**AIPS**],[**Be**]) presentamos el resultado principal del Capítulo:

TEOREMA 38. *Suponga que H satisface (I) y (II) y que para una sucesión $\varepsilon_n \to 0$ tenemos que ϕ_{ε_n} converge a ϕ_0 , entonces*

$$\phi_0(z) = \max\{\phi_0(\bar{x}_i) - h_i(z) : \lambda_i = \bar{\lambda}\}.$$

En particular, si sólo hay una órbita γ_I tal que $\lambda_I = \bar{\lambda}$, entonces la solución ϕ_ε de (49)*, normalizada por $\phi_\varepsilon(x_I, 0) = 0$, converge uniformemente a $-h_I$ cuando $\varepsilon \to 0$.*

EJEMPLO 2. Para $k \in \mathbb{N}$ sea $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\frac{1}{k}$-periódica con máximos no-degenerados $0 \leq x_1, \ldots, x_n < \frac{1}{k}$, $\max V = 0$. Considere el Hamiltoniano y Lagrangiano

$$H_a(x,p) = \frac{p^2}{2} + V(x), \;\; L_a(x,v) = \frac{v^2}{2} + V(x)$$

cuyo conjunto proyectado de Aubry consiste de los puntos fijos hiperbólicos

$$y_{ij} = x_i - \frac{j}{k}, \; i = 1, \ldots, N; \; j = 0, \ldots, k-1.$$

Sea h_a la barrera de Peierls para H_a, entonces $\phi(x) = -h_a(x, x_i)$ es una solución de viscosidad de

$$\frac{\phi'^2}{2} + V(x) = 0 \tag{52}$$

que es C^k en una vecindad de x_i. Derivando (52) dos veces

$$\phi''(x_i)^2 + V''(x_i) = 0.$$

Considere ahora el Hamiltoniano periódico dependiente del tiempo

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2} - \frac{p}{k} + V(x + \frac{t}{k})$$

con su Lagrangiano correspondiente

$$L(x,v,t) = L_a(x + \frac{t}{k}, v + \frac{1}{k}).$$

El conjunto proyectado de Aubry consiste de las órbitas hiperbólicas k-periódicas $\bar{\gamma}_i(t) = (x_i - \frac{t}{k}, t)$, $i = 1, \ldots, N$.

La función $u(x,t) = \phi(x + \frac{t}{k})$ es una solución de viscosidad de

$$u_t + \frac{u_x^2}{2} - \frac{u_x}{k} + V(x + \frac{t}{k}) = 0$$

el cual tiene un máximo en $\bar{\gamma}_i(t)$. Del Lema 45 que viene más adelante, existe una vecindad de $\bar{\gamma}_i$ donde $u(x,t) = -h(x,t,\bar{x}_i)$ y tenemos

$$u_{xx}(\gamma_i(t)) = \phi''(x_i) = -\sqrt{-V''(x_i)}.$$

1. Lipschitz y Semiconvexidad uniformes

LEMA 39. *Las soluciones periódicas ϕ_ε de* (49) *tienen primeras derivadas acotadas uniformemente en ε.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es la misma que para el Lema 35, notando que

$$\min_{(x,t)} H(x,0,t) \leq c(\varepsilon) \leq \max_{(x,t)} H(x,0,t). \tag{53}$$

□

La solución a la ecuación viscosa (49) puede ser caracterizada por una formula variacional. Para esto, necesitamos introducir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ dotado con un movimiento browniano

$$W(t) : \Omega \to \mathbb{T}^d$$

en el d-toro plano. Denotemos por $\mathbb{E}$ a la esperanza definida por la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

La solución a la ecuación (49) satisface la formula de Lax.

$$\phi_\varepsilon(x,t) = \sup_v \mathbb{E}\Big(\phi_\varepsilon(X_\varepsilon(\tau),\tau) - \int_t^\tau L(X_\varepsilon(s), v(s), s)ds + c(\varepsilon)(t-\tau)\Big), \tag{54}$$

donde v es un proceso de control admisible progresivamente medible, τ es un tiempo de paro acotado y X_ε es la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(s) & = v(s)ds + \sqrt{2\varepsilon}\, dW(s) \\ X_\varepsilon(t) & = x. \end{cases} \tag{55}$$

Vea [**Fl**] Lema IV 3.1.

LEMA 40. *Las soluciones periódicas ϕ_ε de* (49) *son uniformemente semiconvexas en la variable espacial.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos la siguiente descripción del control óptimo v, vea por ejemplo [**Fl**] Teorema IV 11.1.: Introduciremos el campo vectorial dependiente del tiempo $U_\varepsilon(x,t) = H_p(x, D\phi_\varepsilon(x,t), t)$ y consideremos la solución $X_\varepsilon(s)$ de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(s) & = U_\varepsilon(X_\varepsilon(s), s)ds + \sqrt{2\varepsilon}\, dW(s) \\ X_\varepsilon(t) & = x, \end{cases} \tag{56}$$

entonces un control óptimo en (54) está dado por la fórmula $v(s) = U_\varepsilon(X_\varepsilon(s), s)$. Sea $x \in \mathbb{T}^d$, $t \in [-2, -1]$ y tomemos el control óptimo, entonces

$$\phi_\varepsilon(x,t) = \mathbb{E}\big(\phi(X_\varepsilon(0) + \int_t^0 L(X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(X_\varepsilon(s), s), s)ds\big) + c(\varepsilon)t$$

Sea $|y| < 1$ un incremento, los controles $U_\varepsilon(X_\varepsilon(s), s) \pm \dfrac{y}{t}$ son admisibles y entonces

$$\phi_\varepsilon(x \pm y, t) \geq \mathbb{E}\big(\phi(X_\varepsilon(0) - \int_t^0 L(X_\varepsilon(s) \pm \frac{sy}{t}, U_\varepsilon(X_\varepsilon(s)) \pm \frac{y}{t}, s)ds\big) + c(\varepsilon)t$$

Sea

$$M = 1 + \sup_{\varepsilon \in (0,1]} |U_\varepsilon(x,s)|,$$

Este es finito por el Lema 39. Ahora definamos

$$A = \sup_{|v| \leq M} \|D_{xx}L(x,v,s)\|, B = \sup_{|v| \leq M} \|D_{xv}L(x,v,s)\|, C = \sup_{|v| \leq M} \|D_{vv}L(x,v,s)\|.$$

Una aplicación del teorema de Taylor nos da

$$L(x + \frac{sy}{t}, v + \frac{y}{t}, s) - 2L(x,v,s) + L(x - \frac{sy}{t}, v - \frac{y}{t}, s) \leq A|\frac{sy}{t}|^2 + 2Bs|\frac{y}{t}|^2 + C|\frac{y}{t}|^2$$

para $|v| \leq M - 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x+y,t) - 2\phi_\varepsilon(x,t) + \phi_\varepsilon(x-y,t) &\geq -\int_t^0 (As^2 + 2Bs + C)|\frac{y}{t}|^2 ds \\ &\geq \big(\frac{At}{3} - B + \frac{C}{t}\big)|y|^2. \end{aligned}$$

□

Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 41. *Suponga que la sucesión ϕ_{ε_n} de soluciones de* (49) *converge uniformemente a ϕ_0. Suponga que ϕ_0 es diferenciable en una vecindad abierta V de una órbita periódica. Entonces $D\phi_{\varepsilon_n}$ converge a $D\phi_0$ uniformemente en cada subconjunto compacto de V.*

Éste es una consecuencia del Lema 40 y el siguiente Teorema, el cual es una pequeña extensión del Teorema 25.7 en [**R**] que tiene casi la misma demostración.

Teorema 42. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo abierto, $B \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f_n : A \times B \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones diferenciables, convexas en la primera variable, que convergen uniformemente a una función diferenciable f. Entonces $D_1 f_n$ converge puntualmente a $D_1 f$ y de hecho uniformenente sobre subconjuntos compactos.*

2. Prueba del Teorema Principal

2.1. Reducción a un Lagrangiano regular. En esta sección demostraremos como deducir el Teorema 38 del caso cuando el Lagrangiano es regular (Definición 12, sección 1).

Sea N el mínimo común múltiplo de los periodos de las órbitas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ del conjunto de Aubry. Definamos

$$P_N : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^1 \tag{57}$$
$$(x, v, [t]) \mapsto (x, \frac{v}{N}, [Nt]),$$

y el Lagrangiano $L_N = L \circ P_N$. El Hamiltoniano correspondiente está dado por

$$H_N(x, p, t) = H(x, Np, Nt).$$

Para una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{T}^d$ definamos $\gamma^N : [a/N, b/N] \to \mathbb{T}^d$, $t \mapsto \gamma(Nt)$, entonces

$$NA_{L_N}(\gamma^N) = A_L(\gamma).$$

Proposición 43. *Una curva γ es extremal (minimizante) de L si y sólo si la curva γ^N es una extremal (minimizante) de L_N.*

Sea $\gamma^N_{i,j}(t) = \gamma_i(Nt - j), j \in [1, N_i], i \in [1, m]$. De acuerdo a las secciones 3, 5 de [**B1**], el conjunto de Aubry de L_N es la unión finita de orbitas 1-periódicas hiperbólicas. $\Gamma^N_{i,j}(t) = (\gamma^N_{i,j}(t), \dot{\gamma}^N_{i,j}(t), [t])$ y L_N es regular.

Para $\varepsilon \geq 0$, una función $u : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad (49) si y sólo si $w(x,t) = \dfrac{1}{N} u(x, Nt)$ es una solución de viscosidad

$$w_t + N\varepsilon \Delta w + H_N(x, Dw, t) = c(\varepsilon). \tag{58}$$

Lema 44. $h(x, [t], \bar{x}_i) = N \min_{j \in [1, N_i]} h_N(x, [\frac{t}{N}]), (x_i, [\frac{j}{N}])$

Demostración. Ya que L_N es regular

$$h_N(x, [t], y, [s]) = \lim_{n \to \infty} F^N_{t, s+n}(x, y) + c(0)(s + n - t)$$

Como

$$F_{t, j+nN}(x, x_i) + c(j + nN - t) = NF^N_{\frac{t}{N}, \frac{j}{N}+n}(x, x_i) + c(j + nN - t),$$

la sucesión $(F_{t,n}(x, x_i) + c(0)(n - t))_{n \in \mathbb{N}}$ solamente se acumula en los valores

$$Nh_N(x, [\frac{t}{N}], x_i, [\frac{j}{N}]), j \in [1, N].$$

Debido a que

$$h_N(x_i, [\frac{j}{N}], x_i, [\frac{j + kN_i}{N}]) = A_{L_N + c(0)}(\gamma^N_{ij}|_{[\frac{j}{N}, \frac{j+kN_i}{N}]}) = \frac{k}{N} A_{L + c(0)}(\gamma_i) = 0$$

para $k \in \mathbb{N}$, existen solamente N_i puntos de acumulación y por lo tanto

$$h(x, [t], \bar{x}_i) = \liminf_{n \to \infty} F_{t,n}(x, x_i) = \min_{i \in [1, N_i]} Nh_N(x, [\frac{t}{N}], x_i, [\frac{j}{N}]), i \in [1, N].$$

□

Del Lema 44, en una vecindad de $(\gamma_i(Nt-j),[t])$ tenemos

$$Nh_N(x,[t],x_i,[\frac{j}{N}]) = h(x,[Nt],\bar{x}_i).$$

Entonces

$$\lambda_{ij}^N = \int_0^1 \Delta h_N(\gamma_i(Nt-j),[t],x_i,[\frac{j}{N}])dt = \frac{1}{N_i}\int_0^{N_i} \Delta h(\bar{\gamma}_i(t),\bar{x}_i)dt = \lambda_i. \tag{59}$$

2.1.1. Demostración del Teorema 38 para L suponiendo que se cumple para L_N.

Demostración. Sea ϕ_ε una solución periódica de (49) y suponga que ϕ_{ε_n} converge a ϕ_0 para una sucesión $\varepsilon_n \to 0$. Las soluciones $\psi_{\varepsilon_n}(x,t) = \frac{1}{N}\phi_{\varepsilon_n}(x,Nt)$ de (58) convergen a $\psi_0(x,t) = \frac{1}{N}\phi_0(x,Nt)$. Para $j \in [1,N], \psi_0(x,\frac{j}{N}) = \frac{1}{N}\phi_0(x,0)$ y así

$$\psi_0(\bar{\gamma}_i^N(0)) = \frac{1}{N}\phi_0(\bar{x}_i) - h_N(\bar{\gamma}_i^N(0),x_i,[\frac{j}{N}]).$$

De (59), el Teorema 38 para L_N y el Lema 44,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\phi_0(x,Nt) &= \max_{\lambda_i=\bar{\lambda}}\max_{j\in[1,N_i]} \psi_0(\bar{\gamma}_i^N(0)) - h_N(x,[t],\bar{\gamma}_i^N(0))\\ &= \max_{\lambda_i=\bar{\lambda}}\max_{j\in[1,N_i]} \frac{1}{N}\phi_0(\bar{x}_i) - h_N(x,[t],x_i,[\frac{j}{N}])\\ &= \frac{1}{N}\max_{\lambda_i=\bar{\lambda}}\phi_0(\bar{x}_i) - h(x,[Nt],\bar{x}_i).\end{aligned}$$

□

2.2. Lagrangianos Regulares. Aquí supondremos que el Lagrangiano es regular.

Sea $f : \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}$ subsolución estricta C^k de (3) dada por el Teorema 21 y considere el Lagrangiano

$$\mathbb{L}(x,v,t) = L(x,v,t) - d_xf(x,[t])v - f_t(x,[t]) + c$$

con Hamiltoniano $\mathbb{H}(x,p,t) = H(x,p+d_xf,[t]) + f_t(x,[t]) - c$. Si $\alpha \in \mathcal{C}(x,s,y,t)$, $A_{\mathbb{L}}(\alpha) = A_{L+c}(\alpha) + f(x,[s]) - f(y,[t])$. Así L y $\mathbb{L}$ tienen el mismo flujo de Euler-Lagrange y conjunto proyectado de Aubry. La Barrera de Peierls de $\mathbb{L}$ es $h(z,w) - f(w) + f(z)$.

Más aún,

$$\forall (x,v,t) \quad \mathbb{L}(x,v,t) \geq 0,\ \tilde{\mathcal{A}} = \{(x,v,t) : \mathbb{L}(x,v,t) = 0\} \tag{60}$$

y u es una solución de viscosidad de (3) si y sólo si $u-f$ es una solución de viscosidad de

$$v_t + \mathbb{H}(x,d_xv,t) = 0. \tag{61}$$

Lema 45. *Suponga que el Lagrangiano L también satisface* (60). *$\phi \in \mathcal{S}^+$ tiene máximo local en $\bar{\gamma}_i$ si y sólo si*

$$\forall j \neq i \quad \phi(\bar{x}_i) > \phi(\bar{x}_j) - h(\bar{x}_i,\bar{x}_j). \tag{62}$$

De la continuidad de ϕ y h, si la condición (62) ocurre, existe una vecindad de $\bar{\gamma}_i$ donde

$$\phi = \phi(\bar{x}_i) - h(\cdot, \bar{x}_i)$$

Demostración. Sea V una vecindad donde $\bar{\gamma}_i$ es un mínimo de ϕ. Suponga que existe $j \neq i$ tal que

$$\phi(\bar{x}_i) = \phi(\bar{x}_j) - h(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \tag{63}$$

Sea $\gamma_n : [0, n] \to \mathbb{T}^d$ una curva que une x_i con x_j tal que

$$A_L(\gamma_n) = F_{0,n}(x_i, x_j).$$

Sea $t_n \in [0, n]$ el primer tiempo de salida de $\bar{\gamma}_n(t)$ fuera de V y $\bar{\gamma}_n(t_n)$ el primer punto de intersección con ∂U_j. Cuando n tiende a infinito, t_n y $n - t_n$ tienden a infinito. Luego $\dot{\gamma}_n(0)$ tiene que tender a $\dot{\gamma}_i(0)$, y $\dot{\gamma}_n(n)$ tiene que tender a $\dot{\gamma}_j(0)$. Para justificar esto, considere un punto límite v de $\dot{\gamma}_n(0)$ y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^d$ la solución a la ecuación de Euler-Lagrange tal que $\gamma(0) = x_i, \dot{\gamma}(t) = v$. Del hecho que

$$F_{0,n}(x_i, x_j) - F_{1,n}(\gamma_n(1), x_j) = A_L(\gamma_n|_{[0,1]})$$

y la regularidad de L, tomando el límite cuando $n \to \infty$ se sigue

$$h(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - h(\bar{\gamma}(1), \bar{x}_j) = A_L(\gamma|_{[0,1]}).$$

Ya que $\gamma_i(-1) = x_i$ y $L = 0$ en $\tilde{\mathcal{A}}$

$$h(\bar{\gamma}_i(-1), \bar{x}_i) - h(\bar{\gamma}(1), \bar{x}_j) = A_L(\gamma_i|_{[-1,0]}) + A_L(\gamma_{[0,1]})$$

luego, la curva que se obtiene al pegar $\gamma_i|_{[-1,0]}$ con $\gamma|_{[0,1]}$ minimiza la acción entre sus puntos finales. En particular, tiene que ser diferenciable, así $v = \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_i(0)$. Sea (y, w, τ) un punto de acumulación de $(\gamma_n(t_n), \dot{\gamma}_n(t_n), t_n - [\![t_n]\!])$.

Del hecho que

$$F_{0,t_n}(x_i, \gamma_n(t_n)) + A_L(\alpha_n|_{[t_n,n]}) = F_{0,n}(x_i, x_j)$$

y la convergencia uniforme de $F_{a,b}$ cuando $[\![b - a]\!] \to \infty$, obtenemos

$$h(\bar{x}_i, y, \tau) + h(y, \tau, \bar{x}_j) = h(\bar{x}_i, \bar{x}_j).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(\bar{x}_i) &\geq \phi(y, [\tau]) \\
&\geq \phi(\bar{x}_j) - h(y, [\tau], \bar{x}_j) \\
&= \phi(\bar{x}_j) - h(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + h(\bar{x}_i, y) \\
&= \phi(\bar{x}_i) + h(\bar{x}_i, y, [\tau]).
\end{aligned}$$

Esta contradicción demuestra que (63) no ocurre. □

Corolario 46. *Suponga que el Lagrangiano también satisface* (60). *Sean* $\phi \in \mathcal{S}^+$ *y* $B = \{i : \bar{\gamma}_i$ *es un máximo local de* $\phi\}$. *Entonces*

$$\phi = \max_{i \in B} \phi(\bar{x}_i) - h(\cdot, \bar{x}_i).$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{T}^{d+1}$ sea i tal que $\phi(z) = \phi(\bar{x}_i) - h(z, \bar{x}_i)$. Si $i \notin B$ existe $j \neq i$ tal que $\phi(\bar{x}_i) = \phi(\bar{x}_j) - h(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ y así

$$\phi(\bar{x}_j) - h(z, \bar{x}_j) \geq \phi(\bar{x}_j) - h(z, \bar{x}_i) - h(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \phi(\bar{x}_i) - h(z, \bar{x}_i) = \phi(z).$$

Si $j \notin B$ existe $k \neq j$ tal que $\phi(\bar{x}_j) = \phi(\bar{x}_k) - h(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$, entonces

$$\phi(z) = \phi(\bar{x}_k) - h(z, \bar{x}_k), \quad h(\bar{x}_i, \bar{x}_k) = h(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + h(\bar{x}_j, \bar{x}_k).$$

Así $k \neq i$. Si seguimos hasta llegar a $l \in B$ tal que

$$\phi(z) = \phi(\bar{x}_l) - h(z, \bar{x}_l).$$

□

Desechemos ahora la suposición (60). Recordemos que $f : \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}$ es una subsolución estricta C^k de (3).

Corolario 47. *Sean* $\phi \in \mathcal{S}^+$,

$$B = \{i : \bar{\gamma}_i \textit{ es un máximo local de } \phi - f\}.$$

- *Para* $i \in B$ *existe una vecindad de* $\bar{\gamma}_i$ *donde*
$$\phi = \phi(\bar{x}_l) - h(\cdot, \bar{x}_l).$$
- *Para cada* $z \in \mathbb{T}^{d+1}$
$$\phi(z) = \max_{i \in B} \phi(\bar{x}_i) - h(z, \bar{x}_i).$$

Demostración. Sea $i \in B$ y apliquemos el Lema 45 al Lagrangiano $\mathbb{L}$ para obtener una vecindad de $\bar{\gamma}_i$ donde

$$\phi - f = \phi(\bar{x}_l) - f(\bar{x}_i) - h(z, \bar{x}_l) + f(\bar{x}_i) - f.$$

Usando el Corolario 47 se tiene que

$$\phi - f = \max_{i \in B} \phi(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i) - h(\cdot, \bar{x}_i) + f(\bar{x}_i) - f.$$

□

Lema 48.

$$c'_+(0) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{c(\varepsilon) - c(0)}{\varepsilon} \geq -\bar{\lambda}$$

Demostración. Demostraremos que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{c(\varepsilon) - c(0)}{\varepsilon} \geq -\bar{\lambda} - r$$

para $r > 0$ arbitraria. Tomemos I tal que $\lambda_I = \bar{\lambda}$ y sea Φ una función C^3 que coincide con $-h_I = -h(\cdot, \bar{x}_I)$ en una vecindad V de $\bar{\gamma}_I$.

Definiendo $U(x,t) = H_p(x, D\Phi(x,[t]), t)$, se tiene que $\bar{\gamma}_I$ es una órbita periódica atractiva del campo vectorial $(U(x,t), 1)$. Ahora sea X_ε la solucion a

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(t) &= U(X_\varepsilon(t), t)dt + \sqrt{2\varepsilon}\, dW(t) \\ X_\varepsilon(0) &= x_I. \end{cases} \tag{64}$$

Con el objetivo de facilitar la notación, escribiremos $\bar{X}_\varepsilon(t) = (X_\varepsilon(t), t)$. Sea $\delta > 0$ lo suficientemente pequeña para tener $\delta\|\Phi\|_{C^3} \leq r$ y $B_\delta(\bar{\gamma}_I) := \{(x, [t]) : d(x, \gamma_I(t)) \leq \delta\} \subset V$ y definamos el tiempo de paro

$$\tau(\omega) = \text{mín}\{s > 0 : d(X_\varepsilon(s, \omega), \gamma_I(s)) \geq \delta\}. \tag{65}$$

De (54) y las igualdades

$$\begin{aligned} L(x, U(x,t), t) + H(x, D\Phi(x,[t]), t) &= D\Phi(x,[t])U(x,t) \\ \Phi_t + H(x, D\Phi(x,[t]), t) &= c(0)\,\forall\,(x,[t]) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(c(\varepsilon) - c(0))\mathbb{E}(\tau \wedge \kappa) \geq \\ &\qquad \mathbb{E}\Big(\phi_\varepsilon(\bar{X}_\varepsilon(\tau \wedge \kappa)) - \phi_\varepsilon(\bar{x}_I) - \int_0^{\tau\wedge\kappa} \Phi_s + D\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s))U(\bar{X}_\varepsilon(s))ds\Big), \end{aligned}$$

para toda $\kappa > 0$ (donde $\tau \wedge \kappa$ denota el tiempo de paro acotado $\text{mín}(\tau, \kappa)$).

Aplicando la formula de Dynkin's nos da

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\Phi(\bar{X}_\varepsilon(\tau \wedge \kappa)) - \Phi(\bar{x}_I) \\ &\qquad = \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Phi_s + D\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s))U(\bar{X}_\varepsilon(s))ds + \varepsilon\Delta\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s))ds\Big). \end{aligned}$$

Y definiendo $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon - \Phi$

$$(c(\varepsilon) - c(0))\mathbb{E}(\tau \wedge \kappa) \geq \mathbb{E}\Big(\psi_\varepsilon(\bar{X}_\varepsilon(\tau \wedge \kappa)) - \psi_\varepsilon(\bar{x}_I)) + \varepsilon \int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s))ds\Big).$$

Para $s \in [0, \tau(\omega)]$,

$$|\Delta\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s,\omega)) + \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))| \leq \|\Phi\|_{C^3}\delta \leq r$$

de modo que

$$\left|\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta\Phi(\bar{X}_\varepsilon(s))ds\Big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds\Big)\right| \leq \mathbb{E}(\tau \wedge \kappa)r.$$

Sea $M = \sup_{x,\varepsilon} |\psi_\varepsilon(x)|$ (el cual es finito por el Lema 39), entonces

$$\frac{c(\varepsilon) - c(0)}{\varepsilon} \geq -\frac{2M}{\varepsilon\mathbb{E}(\tau \wedge \kappa)} - \frac{1}{\mathbb{E}(\tau \wedge \kappa)}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds\Big) - r.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds\Big) &= \int_0^{\infty} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))\mathbb{P}(\tau\wedge\kappa > s)ds \\ &= \int_0^{N_I} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\tau\wedge\kappa > s+kN_I)\Big)ds \\ &\leq \int_0^{N_I} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))\Big(1+\int_0^{\infty}\mathbb{P}(\tau\wedge\kappa > s+uN_I)du\Big)ds \\ &= \int_0^{N_I} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))\Big(1+\mathbb{E}(\frac{\tau\wedge\kappa - s}{N_I})\Big)ds\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds\Big) \leq \frac{1}{N_I}\int_0^{N_I} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds + \frac{N_I||h_I||_{C^2(V)}}{\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)}$$

y ahora podemos hacer a κ tender a infinito para obtener:

$$\frac{c(\varepsilon)-c(0)}{\varepsilon} \geq -\frac{2M}{\varepsilon\mathbb{E}(\tau)} - \frac{N_I||h_I||_{C^2(V)}}{\mathbb{E}(\tau)} - \frac{1}{N_I}\int_0^{N_I} \Delta h_I(\bar{\gamma}_I(s))ds - r.$$

Freidlin y Wentzel ([**FW**], Capítulo 4.4) dieron un estimado de $\mathbb{E}(\tau)$, para una perturbación estocástica de un campo vectorial que tiene un sumidero. Aunque el campo vectorial tiene una órbita periódica atractiva $\bar{\gamma}_I$, el estimado para [**FW**] sigue siendo válido:

$$m = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}(\tau) > 0.$$

Si ahora tendemos cero a $\varepsilon > 0$ obtenemos $\quad c'_+(0) \geq -\lambda_I - r.$ □

Suponga que una sucesión (ϕ_{ε_n}) de soluciones de (49) que converge a ϕ_0. Sea ψ una función C^3 que coincide con ϕ_0 en una vecindad V_i de cada $\bar{\gamma}_i$ que es un máximo local de $\phi_0 - f$ (la función ψ existe por el Corolario 47). Entonces $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon - \psi$ es una solución a la ecuación

$$d_t\psi_\varepsilon + \varepsilon\Delta\psi_\varepsilon + \tilde{H}_\varepsilon(x, D\psi_\varepsilon, t) = c(\varepsilon), \tag{66}$$

donde

$$\tilde{H}_\varepsilon(x,p,t) = d_t\psi + \varepsilon\Delta\psi + H(x, D\psi_\varepsilon + p, t)$$

con el Lagrangiano correspondiente

$$\tilde{L}_\varepsilon(x,v,t) = L(x,v,t) - D\psi\cdot v - d_t\psi - \varepsilon\Delta\psi.$$

Como en (54), ψ_ε satisface la formulación variacional de la Ecuación (66):

$$\psi_\varepsilon(x,t) = \sup_u \mathbb{E}\Big(\psi_\varepsilon(\bar{X}_\varepsilon(\tau)) - \int_t^\tau \tilde{L}_\varepsilon(X_\varepsilon(s), u(s), s)ds + c(\varepsilon)(t-\tau)\Big). \tag{67}$$

Lema 49. *Si $\bar{\gamma}_i$ es un máximo local de la función $\phi_0 - f$, entonces $\lambda_i = \bar{\lambda}$ y*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c(\varepsilon_n)-c(0)}{\varepsilon_n} = -\bar{\lambda}$$

Demostración. Sea $2r = \text{mín}\{\lambda_j - \bar\lambda : \lambda_j > \bar\lambda\}$ y considere

$$u_\varepsilon(x,t) = D_p\tilde H_\varepsilon(x, D\psi_\varepsilon(x,t),t) = H_p(x, D\phi_\varepsilon(x,t),t).$$

Dada $1 \le i \le m$, sea X_ε la solución a

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(t) & = u_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(t))dt + \sqrt{2\varepsilon}\, dW(t) \\ X_\varepsilon(0) & = x_i. \end{cases} \tag{68}$$

Sabemos que $u_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(t))$ es el control óptimo asociado a la formulación variacional (67), lo cual significa que, para todo tiempo de paro acotado τ,

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(\bar x_i) = \mathbb{E}\Big(\psi_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(\tau)) - \int_0^\tau \big(L(X_\varepsilon(s), u_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(s)), s) \\ - D\psi(\bar X_\varepsilon(s))u_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(s)) - \varepsilon\Delta\psi(\bar X_\varepsilon(s))\big)ds - c(\varepsilon)\tau\Big).\end{aligned}$$

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño para tener $\delta\|\psi\|_{C^3} \le r$ y $B_\delta(\bar\gamma_i) \subset V_i$, definamos

$$\tau(\omega) = \text{mín}\{s > 0 : d(X_\varepsilon(s,\omega), \gamma_i(s)) \ge \delta\}. \tag{69}$$

Como

$$\begin{aligned} L(x, u_\varepsilon(x,t),t) + H(x, D\psi(x,t),t) &\ge D\psi(x,t)u_\varepsilon(x,t) \\ \psi_t + H(x, D\psi(x,t),t) &= c(0) \text{ para } (x,t) \in V_i, \end{aligned}$$

$$((c(\varepsilon) - c(0))\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa) \le \mathbb{E}\Big(\psi_\varepsilon(\bar X_\varepsilon(\tau\wedge\kappa)) - \psi_\varepsilon(\bar x_i) + \varepsilon\int_0^{\tau\wedge\kappa} \Delta\psi(\bar X_\varepsilon(s))ds\Big)$$

para toda $\kappa > 0$.

Para $s \in [0, \tau(\omega)]$,

$$|\Delta\psi(\bar X_\varepsilon(s,\omega)) + \Delta h_i(\bar\gamma_i(s))| \le \|\psi\|_{C^3}\delta \le r$$

asi que

$$\left|\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa}\Delta\psi(\bar X_\varepsilon(s))ds\Big) + \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa}\Delta h_i(\bar\gamma_i(s))ds\Big)\right| \le \mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)r.$$

Sea $M = \sup_{x,\varepsilon}|\psi_\varepsilon(x)|$, entonces

$$\frac{c(\varepsilon) - c(0)}{\varepsilon} \le \frac{2M}{\varepsilon\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)} - \frac{1}{\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa}\Delta h_i(\bar\gamma_i(s))ds\Big) + r.$$

Rasonando como en la demostración del Lemma 48, obtenemos que

$$\frac{1}{\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)}\mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau\wedge\kappa}\Delta h_i(\bar\gamma_i(s))ds\Big) \ge \frac{1}{N_i}\int_0^{N_i}\Delta h_i(\bar\gamma_i(s))ds - \frac{2N_i||h_i||_{C^2(V_i)}}{\mathbb{E}(\tau\wedge\kappa)}$$

y podemos pasar al límite $\kappa \to +\infty$ para obtener

$$\frac{c(\varepsilon) - c(0)}{\varepsilon} \le \frac{2M}{\varepsilon\mathbb{E}(\tau)} - \frac{1}{N_i}\int_0^{N_i}\Delta h_i(\bar\gamma_i(s))ds - \frac{2N_i||h_i||_{C^2(V_i)}}{\mathbb{E}(\tau)} + r.$$

Por el Lema 41, (u_{ε_n}) converge uniformemente a $H_p(x, D\phi_0(x,t), t)$ en la vecindad V_i; el estimado de Freidlin y Wentzell para $\mathbb{E}(\tau)$ también aplica ([**FW**], Capítulo 5.3):

$$m = \liminf_{n\to\infty} \varepsilon_n \log \mathbb{E}(\tau) > 0,$$

y así, dejando crecer a n obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c(\varepsilon_n) - c(0)}{\varepsilon_n} \leq -\lambda_i + r,$$

lo cual, por nuestra elección de r, es posible solamente si $\lambda_i = \bar{\lambda}$. □

El Lemma 49 y el Corolario 47 implican el Teorema 38 para un Lagrangiano regular .

Capítulo IV

Teoría de Aubry-Mather Estocástica

El propósito aquí es exponer un análogo para Hamiltonianos periódicos en el espacio y el tiempo del enfoque propuesto por D. Gomes en [**G**] y que continuan R. Iturriaga y H. Sánchez Morgado en [**IS**]. Es decir lo que aqui demostraremos es la existencia de medidas minimizantes, la diferenciabilidad de las funciones efectivas $\bar{L}$ y $\bar{H}$; ademas de la diferenciabilidad con respecto al parámetro P de las soluciones de la Ec. de Hamilton-Jacobi viscosa. Finalmente se demostrará la suavidad de las funciones efectivas $\bar{L}$ y $\bar{H}$.

1. Medidas de Mather Estocásticas

Sea $\Omega = \mathbb{T}^{d+1} \times \mathbb{R}^d$, donde $(x, v, t) = z$ representa un punto genérico $z \in \Omega$ con $(x, t) \in \mathbb{T}^{d+1}$ y $v \in \mathbb{R}^d$. Escojamos una función $\gamma : \Omega \to [1, +\infty)$ y denotemos por

$$\mathcal{M} = \{\text{Medidas con signo en } \mathbb{T}^{d+1}, \text{ tal que} \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \gamma d|\mu| < \infty\}.$$

Note que $\mathcal{M}$ es el dual del conjunto $C^0_\gamma(\Omega)$ de funciones continuas ϕ con

$$\|\phi\|_\gamma = \sup_\Omega \left|\frac{\phi}{\gamma}\right| < \infty, \quad \lim_{|z|\to\infty} \frac{\phi(z)}{\gamma(v)} \to 0.$$

Consideremos una difusión de Markov controlada

$$dX = v(s)ds + dW(s),$$

donde donde $v(s)$ es un proceso de control, $W(s)$ es el movimiento Browniano (Cap. III, sec. 1). Para $T > 0$, definamos la medida μ_T por

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi \, d\mu_T = \frac{1}{T}\mathbb{E}\Big(\int_0^t \phi(X(t), v(t), t)dt\Big).$$

Como cada μ_T es una medida de probabilidad, se puede extraer una subsucesión débilmente convergente, tal que cuando $T_n \to \infty$, $\mu_{T_n} \rightharpoonup \mu$, es decir para cada $\phi \in C^0_\gamma(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{T}^d+1} \phi d\mu_{T_n} \to \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi d\mu.$$

Usando la fórmula de Dynkin tenemos que μ satisface

$$\int (\phi_t(x,t) + \Delta\phi(x,t) + D\phi(x,t)v)\, d\mu = 0.$$

Denotemos por $\mathcal{N}$ al siguiente conjunto

$$\mathcal{N} = \overline{\{\mu \in \mathcal{M} : \forall \phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1}),\ \int (\phi_t(x,t) + \Delta\phi(x,t) + D\phi(x,t)v)\, d\mu = 0\}}.$$

Una medida $\nu \in \mathcal{N}$ se llama *medida estocástica de Mather* si

$$\int L d\nu = \inf_{\mu \in \mathcal{N}} \int L d\mu.$$

LEMA 50. *La transformación $\rho : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^d$ definida por*

$$\rho(\mu) = \int v d\mu \tag{70}$$

es sobre.

DEMOSTRACIÓN. De la convexidad de $\mathcal{N}$ y ρ, es suficiente demostrar que $me_i \in \rho(\mathcal{N})$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y cualquiera de los vectores e_i de la base canónica $\mathbb{R}^d$. Para esto, tomemos una función $f : \mathbb{T}^{d-1} \to \mathbb{R}$ con un único máximo y sea

$$V = (D_1 f, \ldots, D_{d-1} f, m),\ \ k = \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \exp f.$$

Entonces

$$\theta = \frac{1}{k} \exp(f(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0))$$

es una solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Plank

$$\theta_t = \Delta\theta - \operatorname{div}(\theta V). \tag{71}$$

Considere la medida $\mu \in \mathcal{N}$ definida por

$$\int \psi(x,v,t) d\mu = \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \psi(x, V(x), t)\theta(x) dx dt. \tag{72}$$

El hecho de que $\mu \in \mathcal{N}$ se obtiene integrando por partes y utilizando (71).

De (72), (70) y la definición de θ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\mu) &= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \theta(x) V(x) dx dt = \int_{\mathbb{T}^{d+1}} (D_1\theta, \ldots, D_{d-1}\theta, m\theta) dx dt \\ &= (0, \ldots, 0, m) = me_d\end{aligned}$$

Para las otras $e_{i's}$, se procede de manera similar. $\square$

Ya que la función ρ es sobre, ahora es posible definir el lagrangiano efectivo $\bar{L}$ como

$$\bar{L}(Q) = \inf_{\mu \in \mathcal{N}, \rho(\mu) = Q} \int L(x,v,t) d\mu \tag{73}$$

Note primero que para cada $Q \in \mathbb{R}^d$ se tiene que el ínfimo en (73) se alcanza, como lo dice la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 51. *Para cada $Q \in \mathbb{R}^d$, existe una medida $\mu \in \mathcal{N}$ con $\rho(\mu) = Q$ tal que*

$$\int L(x,v,t)d\mu = \inf_{\mu \in \mathcal{N}, \rho(\mu)=Q} \int L(x,v,t)d\mu \tag{74}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión μ_n en $\mathcal{N}$ minimizante, tal que $\rho(\mu_n) = Q$; como $\int L(x,v,t)d\mu < c$, entonces por la proposicion 1.2 de [**Mn**] se puede soponer sin pérdida de generalidad, extrayendo una subsucesión si es necesario que $\mu_n \rightharpoonup \mu$, además $\rho(\mu) = Q$. Por lo tanto, para cada k fijo,

$$\lim_{n\to\infty} \int \min(L,k)d\mu_n \to \int \min(L,k)d\mu.$$

Luego,

$$\int \min(L,k)d\mu \leq \inf_{\mu \in \mathcal{N}, \rho(\mu)=Q} \int L(x,v,t)d\mu$$

para toda k. Entonces, por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int Ld_\mu \leq \inf_{\mu \in \mathcal{N}, \rho(\mu)=Q} \int L(x,v,t)d\mu.$$

$\square$

Note que de la convexidad de L, $\bar{L}$ es convexa.

Recuerde que [**R**] si E es un espacio vectorial con espacio dual E' y suponemos que $h_1 : E \to (-\infty, +\infty]$ es una función convexa e inferiormente semicontinua, la conjugada de h_1, es la función $h_1^* : E' \to (-\infty, +\infty]$ definida por:

$$h_1^*(y) = \sup_{x \in E} (< x, y > -h_1(x)). \tag{75}$$

Similarmente, para funciones cóncavas y superiormente semicontinuas $h_2 : E \to [-\infty, +\infty)$ definimos $h_2^* : E' \to [-\infty, +\infty)$ por

$$h_2^*(y) = \inf_{x \in E} (< x, y > -h_2(x)). \tag{76}$$

TEOREMA 52 ([**R**]). *Sea E un espacio vectorial topológico, localmente convexo y Hausdorff sobre $\mathbb{R}$ con espacio dual E^*. Suponga que $h_1 : E \to (-\infty, +\infty]$ es convexa e inferiormente semicontinua y $h_2 : E \to [-\infty, +\infty)$ es cóncava y superiormente semicontinua. Entonces*

$$\sup_x h_2(x) - h_1(x) = \inf_y h_1^*(y) - h_2^*(y),$$

siempre que o bien h_1 o bien h_2 es continuas en algún punto donde ambas funciones son finitas.

Para $\phi(x,v,t) \in C_\gamma^0(\Omega)$, definamos

$$h_1(\phi) = \sup_{(x,v,t)\in\Omega} (\phi(x,v,t) - L(x,v,t)),$$

denotemos por

$$\mathcal{C} = \overline{\{\phi(x,v,t) = \varphi_t(x,t) + \Delta\varphi(x,t) + D\varphi(x,t)v : \varphi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})\}}$$

aqui la cerradura es en $C^0_\gamma(\Omega)$.

Definamos

$$h_2(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Proposición 53.

$$h_1^*(\mu) = \begin{cases} \int L d\mu & \textit{si } \mu \in \mathcal{N} \\ +\infty & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

$$h_2^*(\mu) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \mu \in \mathcal{N} \\ -\infty & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Recordemos que $h_1^*(\mu) = \sup\limits_{\phi \in C^0_\gamma} (\int \phi d\mu - h_1(\phi))$.

Lema 54. *Si $\mu \ngeq 0$, entonces $h_1^*(\mu) = \infty$.*

Demostración. Ya que $\mu \ngeq 0$, entonces existe una sucesión de funciones negativas, $\phi_n \in C^0_\gamma(\Omega)$ tal que

$$\int \phi_n d\mu \to \infty.$$

Como $L \geq 0$,

$$\sup_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi_n - L \leq 0.$$

Por lo tanto si $\mu \ngeq 0$, entonces $h_1^*(\mu) = \infty$. □

Lema 55. *Si $\mu \geq 0$, entonces*

$$h_1^*(\mu) \geq \int L d\mu + \sup_{\psi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \psi d\mu - \sup \psi \Big).$$

Demostración. Sea $L_n \in C^0_\gamma(\Omega)$, tal que $L_n \uparrow L$. Cualquier función ϕ en $C^0_\gamma(\Omega)$ puede escribirse como $\phi = L_n + \psi$ para alguna ψ en $C^0_\gamma(\Omega)$. Por lo tanto

$$\sup_{\phi \in C^0_\gamma(\Omega)} (\int \phi d\mu - h_1(\phi)) = \sup_{\psi \in C^0_\gamma(\Omega)} (\int L_n d\mu + \int \psi d\mu - \sup(L_n + \psi - L)).$$

ya que $L_n - L \leq 0$, entonces $\sup\limits_{\Omega} L_n - L \leq 0$, luego

$$\sup_{\Omega}(L_n + \psi - L) \leq \sup_{\Omega} \psi,$$

así

$$\sup_{\phi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \phi d\mu - h_1(\phi) \Big) \geq \sup_{\psi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int L_n d\mu + \int \psi d\mu - \sup\ \psi \Big).$$

Por el Teorema de la Convergencia Monótona, $\int L_n d\mu \to \int L d\mu$, así

$$\sup_{\phi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \phi d\mu - h_1(\phi) \Big) \geq \int L d\mu + \sup_{\psi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \psi d\mu - \sup\ \psi \Big).$$

que es lo queriamos demostrar. □

Si $\int L d\mu = +\infty$, entonces $h_1^*(\mu) = +\infty$. Si $\int d\mu \neq 1$ se sigue que

$$\sup_{\psi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \psi d\mu - \sup \psi \Big) \geq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha (\int d\mu - 1) = +\infty,$$

al tomar $\psi \equiv \alpha$, constante. Por lo tanto $h_1^*(\mu) = +\infty$.

Si $\int d\mu = 1$, del lema anterior se tiene que

$$h_1^*(\mu) \geq \int L d\mu$$

al tomar $\psi \equiv 0$.

También, para cada ϕ,

$$\int (\phi - L) d\mu \leq \sup_\Omega (\phi - L)$$

si $\int d\mu = 1$. Por consiguiente

$$\sup_{\phi \in C^0_\gamma(\Omega)} \Big(\int \phi d\mu - h_1(\phi) \Big) \leq \int L d\mu.$$

Con todo,

$$h_1^*(\mu) = \begin{cases} \int L d\mu & \text{si } \mu \in \mathcal{N} \\ +\infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ahora calculemos h_2^*. Primero note que si $\mu \notin \mathcal{N}$, entonces existe $\hat{\phi} \in \mathcal{C}$ tal que

$$\int \hat{\phi} d\mu \neq 0$$

y así

$$\inf_{\phi \in \mathcal{C}} \int \phi d\mu \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \int \hat{\phi} d\mu = -\infty.$$

Si $\mu \in \mathcal{N}$, entonces $\int \phi d\mu = 0$, para toda $\phi \in \mathcal{C}$. Por lo tanto

$$h_2^*(\mu) = \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \int \phi d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \in \mathcal{N} \\ -\infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

□

El teorema de la dualidad de Fenchel-Rockafellar, establece que

$$\sup_{\phi \in C^0_\gamma(\Omega)} (h_2(\phi) - h_1(\phi)) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} (h_1^*(\mu) - h_2(\mu)) \tag{77}$$

siempre que $h_2 > -\infty$ y h_1 sea continua. En el siguiente teorema demostraremos que h_1 es continua y por lo tanto (77) ocurre.

LEMA 56. h_1 *es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $\phi_n \to \phi$ en C_0^γ. Lo que deseamos demostrar es que $h_1(\phi_n) - h_1(\phi)$.

Note que $\|\phi\|_\gamma$ y $\|\phi\|_\gamma$ están acotadas uniformemente para alguna constante C. La condición de crecimiento en L implica que existe $R > 0$ tal que

$$\sup_\Omega \hat{\phi} - L = \sup_{\mathbb{T}^{d+1} \times B_R} \hat{\phi} - L$$

para toda $\hat{\phi}$ en $C_\gamma^0(\Omega)$ con $\|\hat{\phi}\|_\gamma < C$, donde $B_R = \{v \in \mathbb{R}^{d+1} : |v| \leq R\}$ es la bola de radio R centrada en el origen. En B_R, $\phi_n \to \phi$ uniformemente y así

$$\sup_\Omega \phi_n - L \to \sup_\Omega \phi - L.$$

□

Denotemos por H^* al valor

$$H^* = -\sup_{\phi \in C_\gamma^0} (h_2(\phi) - h_1(\phi))$$

Demostremos el siguiente resultado que caracteriza a H^*.

PROPOSICIÓN 57.

$$H^* = \inf\{\lambda : \exists \phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1}) : \phi_t + \Delta\phi + H(x, D\phi, t) < \lambda\}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} H^* &= \inf_{\phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})} \sup_\Omega \phi_t + \Delta\phi + D\phi \cdot v - L \\ &= \inf_{\phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})} \sup_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi_t + \Delta\phi + H(x, D\phi, t) \end{aligned}$$

□

TEOREMA 58. H^* *es el único número c para el cual la ecuación*

$$\phi_t + \Delta\phi + H(x, D\phi, t) = c \tag{78}$$

tiene una solución periódica.

DEMOSTRACIÓN. Sea ϕ una solución periódica de (78).

$$H^* \leq \sup_{(x,t)} \phi_t + \Delta\phi + H(x, D\phi, t) = c.$$

Ahora, sea $\psi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})$ y escojamos un punto (x_0, t_0) en el cual $\phi - \psi$ tiene un máximo local. Entonces

$$\psi_t(x_0, t_0) = \phi_t(x_0, t_0), D\psi(x_0, t_0) = D\psi(x_0, t_0), \Delta\psi(x_0, t_0) \geq \Delta\phi(x_0, t_0)$$

y así

$$\psi_t(x_0, t_0) + \Delta\psi(x_0, t_0) + H(x_0, D\psi(x_0, t_0), t_0) \geq c.$$

Por lo tanto no existe una $\psi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})$ tal que

$$\psi_t + \Delta\psi + H(x, D\psi, t) < c.$$

Se sigue de la Proposición 57 que $H^* \geq c$. □

El hamiltoniano efectivo $\bar{H}$ es la conjugada convexa de $\bar{L}$, entonces tenemos que:

PROPOSICIÓN 59.

$$\bar{H}(P) = -\inf_{\mu\in\mathcal{N}}\Big(\int L(x,v,t) - P\cdot v d\mu\Big). \tag{79}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}\bar{H}(P) &= \sup_{Q\in\mathbb{R}^d}(P\cdot Q - \bar{L}(Q))\\ &= \sup_{Q\in\mathbb{R}^d}\Big(\sup_{\rho(\mu)=Q}(P\cdot\rho(\mu) - \int Ld\mu)\Big)\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{N}}\Big(\int P\cdot v - L(x,v,t)d\mu\Big)\\ &= -\inf_{\mu\in\mathcal{N}}\Big(\int L(x,v,t) - P\cdot v d\mu\Big)\end{aligned}$$

□

Por el Teorema 52 y la Proposición 53

$$H^* = -\inf_{\mu\in\mathcal{N}}(h_1^*(\mu) - h_2^*(\mu)) = -\inf_{\mu\in\mathcal{N}}\int L(x,v,t)d\mu,$$

que junto con la Proposición 59 nos da

$$\bar{H}(0) = H^*.$$

PROPOSICIÓN 60. *Cualquier medida estocástica de Mather está soportada en la gráfica* $(x,t,H_p(x,D\phi,t))$ *para cada* ϕ *solución de viscosidad de*

$$\phi_t + \Delta\phi(x,t) + H(x,D\phi(x,t),t) = \bar{H}(0) \tag{80}$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que para cada v, se satisface la siguiente desigualdad

$$\phi_t(x,t) + \Delta\phi(x,t) + vD\phi - L(x,v,t) \leq \bar{H}(0)$$

que es estricta a menos que $v = H_p(x,D\phi,t)$. Además, observemos que para cualquier medida estocástica

$$\int(\phi_t + \Delta\phi + vD\phi)d\mu = 0.$$

Por consiguiente, se tiene la desigualdad

$$-\int Ld\mu \leq \bar{H}(0)$$

siendo estricta a menos que μ esté soportada en $(x,t,H_p(x,D\phi,t))$.

Puesto que para una medida estocástica de Mather $\bar{\mu}$ se tiene

$$-\int Ld\bar{\mu} = \bar{H}(0),$$

se concluye que $\bar{\mu}$ está soportada en $(x,t,H_p(x,D\phi,t))$. □

Teorema 61. *Sea μ una medida estocástica de Mather. Denotemos por ν su proyección en $\mathbb{T}^{d+1}$. Entonces $\nu = \theta(x,t)dxdt$ donde la densidad $\theta \in H^1(\mathbb{T}^{d+1})$ es una solución débil de la ecuación de Fokker-Planck*

$$\theta_t = \Delta\theta - \operatorname{div}(\theta \cdot V),$$

$V(x,t) = H_p(x, D\phi, t)$.

Demostración. Sabemos que

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} (\phi_t + \Delta\phi + D\phi \cdot V)\, d\nu = 0$$

para cualquier $\phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})$. Para η el molificador estándar sean $\phi_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \phi$ y $\nu_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \nu$. Nótese que ν_ε es una función acotada, periódica, C^∞ y cuyas cotas pueden depender de ε. Para cualquier $\phi \in C^2(\mathbb{T}^{d+1})$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} (\phi_\varepsilon)_t + \Delta\phi_\varepsilon + D\phi_\varepsilon \cdot V)\, d\nu \\ &= \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi_t \nu_\varepsilon + \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \Delta\phi\nu_\varepsilon + \int_{\mathbb{T}^{d+1}} D\phi\eta_\varepsilon * (V\nu) \\ &= -\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi(\nu_\varepsilon)_t + \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \phi\Delta\nu_\varepsilon - \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \nu_\varepsilon \operatorname{div}(\eta_\varepsilon * (V\nu)) \end{aligned}$$

lo que significa que

$$(\nu_\varepsilon)_t = \Delta\nu_\varepsilon - \operatorname{div}(\eta_\varepsilon * (V\nu)). \tag{81}$$

Integrando en la variable espacial

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\nu_\varepsilon)_t = 0$$

Por lo tanto $\int_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon(x,t)dx$ es constante y como $\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \nu_\varepsilon = 1$, la constante es 1.

Multiplicando (81) por ν_ε e integrando por partes en la variable espacial

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{2}(\nu_\varepsilon^2)_t &= -\int_{\mathbb{T}^d} |D\nu_\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{T}^d} D\nu_\varepsilon \eta_\varepsilon * (V\nu) \\ &\leq -\int_{\mathbb{T}^d} |D\nu_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d} |D\nu_\varepsilon|^2 + |\eta_\varepsilon * (V\nu)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d} |\eta_\varepsilon * (V\nu)|^2 - |D\nu_\varepsilon|^2 \end{aligned} \tag{82}$$

Como

$$|(\eta_\varepsilon * (V\nu))(x,t)| \leq \int_{\mathbb{T}^{d+1}} \eta_\varepsilon(x-y, t-s)|V(y,s)|d\nu(y,s) \leq C\nu_\varepsilon(x,t),$$

de (82) tenemos

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\nu_\varepsilon^2)_t \leq \int_{\mathbb{T}^d} C^2\nu_\varepsilon^2 - |D\nu_\varepsilon|^2, \tag{83}$$

y por lo tanto, para cualesquiera $s, t \in [s, s+1]$

$$\int_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon^2(x,t)dx \leq e^{C^2} \int_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon^2(x,s)dx$$

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \nu_\varepsilon^2 \leq e^{C^2} \int_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon^2(x,s)dx.$$

Como

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} (\nu_\varepsilon^2)_t = 0,$$

existe s_ε tal que

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\nu_\varepsilon^2)_t(x, s_\varepsilon)dx \geq 0,$$

y de (83) tenemos

$$\int_{\mathbb{T}^d} |D\nu_\varepsilon(x,s_\varepsilon)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{T}^d} C^2 \nu_\varepsilon^2(x,s_\varepsilon)dx - \int_{\mathbb{T}^d} (\nu_\varepsilon^2)_t(x,s_\varepsilon)dx.$$

Integrando (82) en la variable temporal tenemos

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} |D\nu_\varepsilon|^2 \leq \int_{\mathbb{T}^{d+1}} |\eta_\varepsilon * (V\nu)|^2 \leq C^2 \int_{\mathbb{T}^{d+1}} |\nu_\varepsilon|^2.$$

Si $\int\limits_{\mathbb{T}^{d+1}} |\nu_\varepsilon|^2$ no estuviera acotado tampoco lo estaría $\int\limits_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon^2(x,s_\varepsilon)dx$, entonces podriamos normalizarla definiendo $\alpha_\varepsilon(x) = \gamma_\varepsilon \nu_\varepsilon(x,s_\varepsilon)$ con $\int\limits_{\mathbb{T}^d} |\alpha_\varepsilon|^2 = 1$ y $\gamma_\varepsilon \to 0$. Ya que $\|\alpha_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{T}^d)}$ esta acotada uniformemente en ε, alguna subsucesión converge en L^2 a una $\alpha \in L^2$ con $\int\limits_{\mathbb{T}^d} |\alpha|^2 = 1$. De la definición de α y el hecho de que $\int\limits_{\mathbb{T}^d} \nu_\varepsilon(x,s_\varepsilon)dx = 1$, tenemos que $\alpha \geq 0$ e $\int\limits_{\mathbb{T}^d} \alpha = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, se tiene que $\|\nu_\varepsilon\|_{H^1}$ esta acotada uniformemente en ε. De las propiedades de los molificadores (Vea [**E**]), tenemos que para alguna subsucesión $\nu_\varepsilon \rightharpoonup \theta$ con $\theta \in H^1$. Por la proposición 60, $\nu = \theta(x,t)dxdt$ siendo θ una solución débil de

$$\theta_t = \Delta\theta - \operatorname{div}(\theta \cdot V)$$

□

PROPOSICIÓN 62. *La medida invariante θ es única.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\theta \geq 0$ y $\int\limits_{\mathbb{T}^{d+1}} \theta = 1$, existe un punto (x_0, t_0) tal que $\theta(x_0,t_0) > 0$. Entonces por la desigualdad de Harnack para ecuaciones parabólicas, tenemos que $\theta > 0$ donde sea. Si ahora definimos

$$u(x,t) = \ln\theta(x,-t),$$

sustituimos en (71) y dividimos por θ tenemos que $u(x,t)$ satisface

$$u_t + \Delta u + |Du|^2 - Du \cdot V - \operatorname{div} V = 0.$$

Haciendo $H = |p|^2 - p \cdot V - \theta \operatorname{div} V$, tenemos que u satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi viscosa cuya solución es única salvo adición de constantes, por lo tanto θ es única salvo un factor de normalización. $\square$

2. Diferenciabilidad de las funciones efectivas

PROPOSICIÓN 63. *La función $\bar{L}$ es estrictamente convexa*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^d$, $Q_1 \neq Q_2$ tales que

$$\bar{L}(tQ_1 + (1-t)Q_2) = t\bar{L}(Q_1) + (1-t)\bar{L}(Q_2),\ t \in [0,1].$$

Consideremos medidas minimizantes μ_1 y μ_2 tales que $\rho(\mu_i) = Q_i$, $i = 1, 2$. Entonces $\mu_1 \neq \mu_2$. Consideremos un hiperplano de soporte de la epigráfica de $\bar{L}$, definido por $P \in \mathbb{R}^d$ y que contiene al segmento S que va de Q_1 a Q_2. Luego por la definición de hiperplano de soporte se sigue que

$$\bar{L}(Q_1) - P \cdot Q_1 \leq \bar{L}(Q) - P \cdot Q,$$

donde la igualdad se satisface para $Q \in S$. Ahora de (75) se sigue que

$$\forall Q \in S_P,\ \bar{H}(P) = P \cdot Q - \bar{L}(Q).$$

De la proposición 60, se obtiene que si $\mu \in \mathcal{N}$ es una medida minimizante con $\rho_\mu \in S$, entonces μ está soportada en la gráfica de $V(x) = H_p(x, D\phi(x,t) + P, t)$ para cualquier solución ϕ de

$$\phi_t + \Delta\phi(x,t) + H(x, D\phi(x,t) + P, t) = \bar{H}(P). \tag{84}$$

además, como la densidad θ que satisface (71) es única y μ está dada por (72), tenemos $\mu_1 = \mu_2$ que es una contradicción. $\square$

DEFINICIÓN 64. Se dice que una función f es una *subsolución crítica* de (80) si

$$f_t + \Delta f(x,t) + H(x, Df(x,t), t) \leq \bar{H}(0). \tag{85}$$

LEMA 65. *Cualquier subsolución crítica f de* (80) *es una solución.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por B al conjunto de puntos donde la igualdad en (85) ocurre. Considere el Hamiltoniano

$$\mathbb{H}(x,p,t) = f_t(x,t) + \Delta f(x,t) + H(x, p + Df(x,t), t)$$

y el Lagrangiano

$$\mathbb{L}(x,p,t) = L(x,v,t) - f_t(x,t) - \Delta f(x,t) - Df(x,t) \cdot v.$$

Si a la solución ϕ de (80) la denotamos por $\phi = \psi + f$, se sigue que ψ es una solución de

$$\psi_t(x,t) + \Delta\psi(x,t) + \mathbb{H}(x, D\psi, t) = \bar{H}(0) \tag{86}$$

Si suponemos $D\psi(z,t) = 0$ y $\psi_t(z,t) = 0$; entonces, por el hecho que es subsolución crítica, se tiene que

$$\Delta\psi(z,t) = \bar{H}(0) - \mathbb{H}(z,0,t) \geq 0.$$

Ahora, si z es un máximo local de ψ, entonces $\Delta\psi(z,t) = 0$ y por lo tanto $\mathbb{H}(z,0,t) = \bar{H}(0)$, con lo que $z \in B$.

Recordemos que estamos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ dotado con un movimiento Browniano W. Para $z \in B$, la fórmula de Lax correspondiente a (80) da

$$\psi(x,t) = \mathbb{E}\Big(\psi(X_\varepsilon(\tau),\tau) - \int_t^\tau \mathbb{L}(X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(X_\varepsilon(s)), s)ds + \bar{H}(0)T\Big), \tag{87}$$

con $U_\varepsilon(x,t) = H_p(x, D\phi(x,t), t)$ y $X_\varepsilon(s)$ es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{cases} dX_\varepsilon(s) & = U_\varepsilon(X_\varepsilon(s), s)ds + \sqrt{2}\, dW(s) \\ X_\varepsilon(t) & = z. \end{cases} \tag{88}$$

Para un máximo global z de ψ,

$$\psi(X_\varepsilon(T,\omega)) \leq \psi(z),$$

entonces integrando

$$\mathbb{E}(\psi(X_\varepsilon(T))) \leq \psi(z)$$

y la igualdad se da si y sólo si

$$\mathbb{P}\{\omega : \psi(X_\varepsilon(T,\omega)) \neq \psi(z)\} = 0. \tag{89}$$

Como

$$\mathbb{L}(x,v,t) + \bar{H}(0) \geq \mathbb{L}(x,v,t) + \mathbb{H}(x,0,t) \geq 0,$$

de (87), se sigue que

$$\mathbb{E}(\psi(X_\varepsilon(T))) = \psi(z).$$

Por lo tanto $\psi(z) = \mathbb{E}(\psi(X_\varepsilon(T)))$ y luego (89). Esto implica que ψ es una constante y por lo tanto la subsolución f es de hecho una solución. □

Ahora podemos demostrar la convexidad estricta de $\bar{H}$, para esto veremos que, la combinación convexa de soluciones correspondientes a dos parámetros distintos es una subsolución crítica de la ecuacion de Hamilton-Jacobi viscosa correspondiente a la combinación convexa de tales parámetros.

Proposición 66. *La función $\bar{H}$ es estrictamente convexa.*

Demostración. Suponga que existen P y Q tales que para cualquier $\lambda \in [0,1]$ tenemos que

$$\bar{H}(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda \bar{H}(P) + (1-\lambda)\bar{H}(Q).$$

Sean f y g soluciones respectivas de

$$f_t + \Delta f + H(x, Df + P, t) = \bar{H}(P),$$

$$g_t + \Delta g + H(x, Dg + Q, t) = \bar{H}(Q).$$

-

Sea $h = \lambda f + (1-\lambda)g$, por lo tanto se tiene que

$$Dh + \lambda P + (1-\lambda)Q = \lambda(Df + P) + (1-\lambda)(Dg + Q)$$

de donde

$$
\begin{aligned}
(90)\qquad & H(x, Dh + \lambda P + (1-\lambda)Q) \\
& \leq \lambda(f_t + \Delta f + H(x, Df + P, t)) + (1-\lambda)(g_t + \Delta g + H(x, Dg + Q, t)) \\
& = \lambda \bar{H}(P) + (1-\lambda)\bar{H}(Q) \\
& = \bar{H}(\lambda P + (1-\lambda)Q).
\end{aligned}
$$

De donde h es una subsolución crítica de

$$\phi_t + \Delta\phi + H(x, D\phi + \lambda P + (1-\lambda)Q) = \bar{H}(\lambda P + (1-\lambda)Q),$$

por el lema 65 se sigue que h es una solución y así la desigualdad en (90) es una igualdad. Como se está suponiendo que H es estrictamente convexo, se sigue que $df + P = dg + Q$ en todos los puntos, por lo tanto $P - Q = D(f-g)$ es una ecuación diferencial exacta y entonces $P = Q$. □

Nos proponemos demostrar que $\bar{H}$ y $\bar{L}$ son C^1. Para esto recordemos algunos resultados de Análisis Convexo.

Proposición 67 ([**R**]). *Una función propiamente convexa y cerrada es esencialmente estrictamente convexa si y sólo si su conjugada es esencialmente suave.*

Proposición 68 ([**R**]). *Sea f una función convexa y finita sobre un conjunto abierto y convexo C, entonces f es continuamente diferenciable en C.*

Con lo anterior, se puede ahora demostrar el siguiente lema.

Lema 69. *Las funciones $\bar{H}$ y $\bar{L}$ son C^1.*

Demostración. Por la proposición 67 sabemos que el dual de una función estrictamente convexa es diferenciable. Ademas, por la proposición 68, una función diferenciable convexa es siempre C^1. □

3. Suavidad de las funciones efectivas

Hemos demostrado que las funciones $\bar{H}$ y $\bar{L}$ son de clase C^1, ahora veremos que estas funciones son suaves. Para esto sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{T}^{d+1}$ fijo y denotemos por $\phi(x, P, t) = 0$ a la solución de

$$\phi_t + \Delta\phi(x,t) + H(x, D\phi(x,t) + P, t) = \bar{H}(P) \tag{91}$$

tal que $\phi(x_0, P, t_0) = 0$. Del Capítulo II, $\phi(x, P, t)$ es C^∞ con respecto a (x, t) y lo que ahora demostraremos es que es C^∞ en P.

Como en el Capítulo II, Sección1; para $U : \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{R}$ suave, consideremos

$$M(\psi) = \psi_t + \Delta\psi + U \cdot D\psi$$

que como se demuestra en los Lemas 32 y 33 $M : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$ es Fredholm de índice cero y su Kernel son las constantes.

En este caso consideraremos

$$U(x, P, t) = H_p(x, D\phi(x, P, t) + P, t),$$

y definamos la transformación

$$F : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \times \mathbb{R}^{d+1} \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$$

con

$$F(\psi(x,t),P) = \psi_t + \Delta\psi + H(x, D\psi(x,P,t) + P, t) + \psi(x_0,t_0)\theta - \bar{H}(P),$$

donde θ es la solución de la ecuación de Fokker-Planck (71) con $\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \theta dxdt = 1$; como $\phi(\cdot,P,\cdot)$ es solución a

$$\phi_t + \Delta\phi(x,t) + H(x, D\phi(x,t),t) = \bar{H}$$

tal que $\phi(x_0,P,t_0) = 0$, se tiene $F(\phi(\cdot,P,\cdot),P) = 0$. Por lo tanto,

$$L = D_\psi F(\psi(x,t),P) : H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1}) \tag{92}$$

está dada por $M(\psi) + \psi(x_0,t_0)\theta$, luego por razonamientos análogos a los hechos en el apéndice, se sigue que L es invertible. Por el teorema de la función implícita, existe una vecindad V tal que la aplicación

$$\begin{aligned} g : V &\to H_{r+2,s+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \\ P &\to \phi(\cdot,P) \end{aligned}$$

es C^1 y $\Psi(x,P,t)h = dg(P)\cdot h(x,t)$ satisface

$$M(\Psi(x,P,t))h + U(x,P,t)h - (\Psi(x_0,P,t_0)h)\theta - d\bar{H}(P)h = 0.$$

Para $P \in V$ fijo, sea

$$\phi(x,P+h,t) = \phi(x,P,t) + \Psi(x,P,t)h + \Phi_h(x,t)|h|$$

de tal manera que $\lim\limits_{h\to 0} \|\Phi_h\|_{H_{r+2,s+1}}$. De la desigualdad de Sobolev

$$\|\Phi_h\|_{C^{(s+1-[\![\frac{d+1}{2}]\!]-1,r+2-[\![\frac{d+1}{2}]\!]-1),\frac{1}{2}}} \le C(d,r+2,s+1)\|\phi_h\|_{H_{r+2,s+1}}$$

se sigue que $\lim\limits_{h\to 0} \|\Phi_h\|_{C^{(s+1-[\![\frac{d+1}{2}]\!]-1,r+2-[\![\frac{d+1}{2}]\!]-1),\frac{1}{2}}} = 0$; por lo que, $\phi \in C^1(\mathbb{T}^{d+1}\times V)$, $\phi_P(x,P,t) = \Psi(x,P,t)$ y $\Psi(x_0,P,t_0) = 0$.

Si hacemos $\psi_j = \phi_{P_j}$, entonces se obtiene que ψ_j satisface

$$M(\psi_j) + U(x,P,t) = d_{P_j}\bar{H}(P) \tag{93}$$

como se demuestra en el apéndice, de que el operador K es compacto, se sigue $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{d+1})$. Si multiplicamos (93) por θ e integramos obtenemos

$$\int_{\mathbb{T}^{d+1}} U(x,P,t)\theta = d\bar{H}(P). \tag{94}$$

Usando inducción, ahora se demostrará que $\bar{H}$ y ϕ son suaves.

Lema 70. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, $\bar{H}(P) \in C^r(\mathbb{R}^{d+1})$, $\phi \in C^r(\mathbb{T}^{d+1}\times\mathbb{R}^{d+1})$ y $\phi_P^r(\cdot,P) \in C^\infty(\mathbb{T}^{d+1})$.*

Demostración. Suponga que la afirmación del lema ocurre para $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $U \in C^r(\mathbb{T}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1})$. Si ahora consideramos el operador de Fokker-Planck dado por

$$N(\theta) = \theta_t + \Delta\theta - \operatorname{div}(\theta \cdot U)$$

adjunto del operador M el cual del Capítulo II Sección 1, satisface las propiedades de M y $\dim \ker N = 1$. Para $Q \in \mathbb{R}^{d+1}$ definamos

$$J : H_{r+2,s+1} \times \mathbb{R}^{d+1}(\mathbb{T}^{d+1}) \to H_{r,s}(\mathbb{T}^{d+1})$$

tal que $J(\psi(x,t), P) = N(\psi) + (\int_{\mathbb{T}^{d+1}} \psi dxdt - 1)$ y donde $J(\theta(\cdot, P), P) = 0$. La transformación J es C^r con

$$J_\psi(\psi(x,t), P) = N(\theta) + \int$$

por construcción; para cualquier Q, $J_\psi(\psi, Q)$ es invertible. Por el teorema de la función implícita $\theta \in C^r(\mathbb{T}^{d+1} \times V)$ para V una vecindad de Q; pero Q es arbitrario, luego por (94) se sigue que $\bar{H} \in C^{r+1}(\mathbb{R}^{d+1})$. Por lo tanto la tranformación F ahora es C^{r+1} y del Teorema de la Función Implícita $\phi \in C^{r+1}(\mathbb{T}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1})$ y $\phi_P^r(\cdot, P) \in C^\infty(\mathbb{T}^{d+1})$. $\square$

Ahora bien, como $\bar{H}$ es estrictamente convexa y suave; la aplicacion $d\bar{H}$ tiene una inversa suave $\bar{K}$. Entonces $\bar{L}(h) = h\bar{K} - \bar{H}(\bar{K}(h))$ es suave que es precisamente el corolario que sigue.

Corolario 71. *La función $\bar{L}$ es suave.*

Bibliografía

[AIPS] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla and H. Sánchez-Morgado. *Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Disc. Cont. Dyn. Sys. Series B, **5** (2005), 513–528.

[BCD] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta, Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Birkhausser, 1997.

[Ba] G. Barles, Solutions de viscosité des équations de Hamilton Jacobi, Mathématiques et Applications **17**, Springer 1994.

[BS] G. Barles y P. E. Souganidis, *Space-time periodic solutions and long-time behavior of solutions to quasi-linear parabolic equations.* SIAM J. Math. Anal., **32**, no. 6 (2001) 1311-1323.

[Be] U. Bessi, *Aubry-Mather theory and Hamilton-Jacobi Equations*, Comm. Math. Phys., **235** (2003), no. 3, 495-511.

[B] P. Bernard, *Smooth critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation*, *Math. Res. Lett.* **14** no. 3, (2007) 503–511.

[B1] P. Bernard, *Connecting orbits of time dependent Lagrangian systems*, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **52** no. 5, (2002) 1533-–1568

[Br] A. Brandt, *Interior Schauder estimates for Parabolic Differential- (difference) equations via the Maximum Principle*, Israel J. Math **7**, (1969), 254-262.

[CEL] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **282** (1984), no. 2, 487–502.

[CI] G.Contreras, R. Iturriaga; *Convex Hamiltonians without conjugate points.*; Ergodic Theory Dynam. Sys., 19 (4): 901–952, 1999.

[CIS] G. Contreras, R. Iturriaga y H. Sánchez-Morgado *Weak solutions of the Hamilton Jacobi equation for Time Periodic Lagrangians.* arXiv:1307.0287.

[E] L. C. Evans *Partial Differential Equations*, AMS, (2000).

[EG1] L. C. Evans; D. Gomes, *Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics.* I. Arch. Ration. Mech. Anal. 157 (2001), no. 1, 1–33.

[EG2] L. C. Evans; D. Gomes,*Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics II.* Arch. Ration. Mech. Anal. 161 (2002), no. 4, 271–305.

[F] A. Fathi, Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics. Versión preliminar.

[F1] A. Fathi, *On existence of smooth critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation.* Pub. Mat. Uruguay **12** (2011) 87–98.

[Fl] W. Fleming, M. Soner, Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer 1993.

[Fr] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Robert E. Krieger Publishing Company 1983.

[FW] M.I. Freidlin, A.D. Wentzell, Random Perturbations of Dynamical Systems, Springer 1998.

[G] D. Gomes, *A stochastic analogue of Aubry-Mather theory*; Nonlinearity 15 (3): 581-603, (2002).

[G1] D. Gomes, ; *Duality principles for fully nonlinear elliptic equations.* Trends in partial differential equations of mathematical physics, 125–136, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 61, Birkhäuser, Basel, 2005.

[G2] D. Gomes; *Generalized Mather problem and selection principles for viscosity solutions and Mather measures.* Adv. Calc. Var. 1 (2008), no. 3, 291–307.

[G3] D. Gomes; *Tran, H. V. Aubry-Mather measures in the nonconvex setting.* SIAM J. Math. Anal. 43 (2011), no. 6, 2601–2629.

[IS] R. Iturriaga, H. Sánchez-Morgado; *On the Stochastic Aubry-Mather Theory*; Bol. Soc. Mat. Mexicana, 11(3): 91-100, (2005)

[JKM] H. R. Jauslin, H. O. Kreiss y J. Moser, *On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions*, Differential Equation, La Pietra; Prc. of Symp. Pure Math., 65 (1996).

[K] B. F. Knerr, *Parabolic Interior Schauder Estimates by the Maximum Principle*; Arch. Rational Mech. Anal., **75** (1980), 51-58.

[LSU] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov y N. N. Ural'ceva; *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*; Translations of Mathematical Monographs, AMS, 23, 1968.

[Li] G. M. Lieberman; *Time-Periodic Solutions on Linear Parabolic Differential Equation*, Commun. In Partial Differential Equations, 24(3 y 4), 631-663, (1999).

[Mn] R. Mañé; *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*; Nonlinearity, 9(2):273–310, 1996.

[Ma] D. Massart; *Subsolution of time-periodic Hamilton-Jacobi equations*, 27 (3): 1253-1265 (2007).

[M] J. Mather, *Action minimizing measure for positive definite Lagrangian systems*; Math. Z. **207**:169-207(1991) .

[R] T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, 1972.