



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**LA TOPOLOGÍA DEL GRUPO DE
TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

FRANCISCO MANUEL NICOLÁS CARDONA



DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Introducción

Las acciones de grupos en el espacio hiperbólico n -dimensional son de gran importancia en las matemáticas, en parte por sus múltiples relaciones con otras áreas. En particular, el grupo de Lorentz actuando como isometrías en el modelo del hiperboloide es de gran importancia en la teoría de la relatividad (cf. [8]). Así mismo, los grupos Kleinianos de $PSL(2, \mathbb{C})$ actuando en \mathbb{H}^3 proporcionan una extensa y rica descripción de la mayor parte de las variedades de dimensión 3 (cf. [7] y [9]), es decir *las posibles formas del universo*.

Una manera muy conveniente de estudiar estas isometrías en cualquier dimensión, es mediante los grupos generales de transformaciones de Möbius actuando en el espacio euclidiano n -dimensional extendido $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, es decir, mediante composiciones finitas de reflexiones en esferas y planos de codimensión 1 en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Existen varios modelos del espacio hiperbólico n -dimensional y también varias maneras de proporcionar al grupo de isometrías una estructura de grupo topológico. En esta tesis se describen tres maneras de exhibir esta estructura, y se prueba que son equivalentes. La primera es la topología de la convergencia uniforme, analizando la acción en \mathbb{S}^n , la segunda se obtiene tomando $O(n) \times \mathbb{B}^n$ y la tercera con el hiperboloide.

En primera instancia, en esta tesis se realiza un estudio detallado de las “ k -esferas” y “ k -planos hiperbólicos”, obteniendo que el grupo de transformaciones de Möbius actúa transitivamente en las “ k -esferas”. Así mismo, se obtiene un resultado análogo para sus extensiones de Poincaré y los “ k -planos hiperbólicos”. Este resultado aparece en [6], sin embargo no incluye los detalles. De esta manera, se da una descripción formal de las geodésicas para los modelos del semiplano y de la bola.

También se demuestran algunos teoremas de distorsión para transformaciones de Möbius. En el primero de ellos se obtiene una relación entre la métrica hiperbólica y la métrica cordal, la cual prueba que estas funciones satisfacen una condición de Lipschitz (Teorema 4.0.1). Se prueban un par de resultados que muestran propiedades de normalidad en familias de transformaciones de Möbius sobre regiones de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. En particular, si una familia de transformaciones de Möbius omite dos puntos para cada una de las transformaciones en una región de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y el ínfimo de la distancia cordal entre los puntos omitidos es positivo, entonces la familia resulta normal (Teorema

4.0.4). Usando estos hechos, se obtiene un resultado fascinante que concluye convergencia uniforme a partir del comportamiento de tan sólo tres puntos en el espacio $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (Teorema 4.0.5). Utilizando este último, se prueba que si una sucesión de transformaciones de Möbius converge, entonces lo hace a una transformación de Möbius (Corolario 4.0.6).

Un resultado crucial para probar los teoremas centrales de la tesis, exhibe una transformación que manda continuamente $GM(\mathbb{B}^n)$ en la bola unitaria, donde $GM(\mathbb{B}^n)$ esta formado por las transformaciones de Möbius que preservan la bola unitaria. Esta transformación está dada por $\phi \rightarrow \phi(0)$, donde $\phi \in GM(\mathbb{B}^n)$. Más aún, se da un homeomorfismo entre la bola unitaria y el conjunto de traslaciones puras (Lema 5.0.2). Una traslación pura esencialmente es la composición de dos reflexiones en $GM(\mathbb{B}^n)$, una es en la esfera isométrica y otra en un plano por el origen ortogonal a la dirección del centro de la esfera isométrica. La prueba de este resultado es larga y se prueba de manera formal y detallada. Este resultado se vuelve importante no sólo por su aportación en la descripción de la segunda y tercera estructura de grupo topológico, sino también al facilitar la prueba de otro resultado que da condiciones necesarias y suficientes para que una familia de transformaciones de Möbius sea normal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (Teorema 5.0.4), dichas condiciones establecen que el supremo de las distancias hiperbólicas entre e_{n+1} y la imagen de éste bajo las extensiones de las transformaciones de la familia debe ser finito

Para dar la última estructura de grupo topológico, se prueba otro resultado importante que concluye convergencia uniforme en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ a partir de convergencia uniforme en un abierto de \mathbb{R}^n (Teorema 5.0.5).

El primer teorema central de la tesis establece que $GM(\mathbb{B}^n)$ es homeomorfo a $O(n) \times \mathbb{B}^n$ (Teorema 5.0.3), lo cual nos permite dar una construcción para la topología en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, la cual coincide con la inducida por la métrica del supremo.

La última parte de la tesis se enfoca en dar otra construcción para la estructura de grupo topológico, para ello, se considera el modelo del hiperboloide y el grupo de isometrías de este modelo, es decir $O^+(1, n)$, que consiste en las matrices cuya primera entrada del primer renglón es positiva, las cuales preservan la forma cuadrática

$$q(x, x) = x_0^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

y los mantos del hiperboloide $q(x, x) = 1$. Este grupo es precisamente el grupo

de Lorentz, el cual resulta ser un grupo topológico con la métrica natural

$$|A - B| = \left[\sum_{i,j} (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \right]^{1/2}.$$

Se prueba entonces que la topología inducida por el grupo de Lorentz en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es la misma que la topología de la convergencia uniforme (Teorema 5.0.10). Esto se logra gracias a la isometría $F : Q \rightarrow \mathbb{B}^n$ entre el hiperboloide Q y la bola \mathbb{B}^n dada por

$$F(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right).$$

Finalmente, la tesis concluye con una descripción de las geodésicas en el modelo del hiperboloide para el caso bidimensional.

Índice general

1. Preliminares	1
2. “k-esferas”	9
3. Modelos del espacio hiperbólico	17
3.1. Modelo del semiespacio superior	17
3.2. “k-planos hiperbólicos” y geodésicas	19
3.3. Modelo de la bola	23
3.4. Forma general de las transformaciones de Möbius	25
4. Teoremas de distorsión	27
5. Estructura de Grupo Topológico	45

CAPÍTULO 1

Preliminares

Definición 1 *Un grupo topológico G es un grupo y también un espacio topológico, donde las funciones $x \mapsto x^{-1}$ (de G en G) y $(x, y) \mapsto xy$ (de $G \times G$ en G) son continuas. Para la última función se considera el producto topológico $G \times G$.*

Definición 2 *Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.*

Dada una densidad λ en una región A y γ un curva de clase C^1 en A , se define la λ -longitud de γ como

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Esta definición se extiende de manera natural a curvas de clase C^1 por tramos.

Definición 3 *Sea λ una densidad en una región A y $z_1, z_2 \in A$, se define la λ -distancia de z_1 a z_2 como*

$$\inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 . A esta distancia se le denota por $\rho_\lambda(z_1, z_2)$.

Teorema 1.0.1 *Sea λ una densidad definida en una región A de \mathbb{R}^n , entonces la distancia ρ_λ define una métrica en A .*

Una prueba de este teorema se puede consultar en [5] p. 44 y [2] p. 7.

Definición 4 Sea A un abierto en \mathbb{R}^n y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en A , se dice que f es conforme en $x \in A$, si $Df(x)$ es un múltiplo escalar de una transformación ortogonal, es decir, $Df(x) = (\mu(x)I)B$, donde $\mu(x) \in \mathbb{R}^+$, $I \in O(n)$ es la matriz identidad y $B \in O(n)$. A $\mu(x)$ se le llama el factor de conformalidad de f en x .

Sean A y B dos regiones en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow B$, una biyección conforme, entonces el factor de conformalidad de f en x está dado por

$$\mu(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|},$$

(cf. [2] p.7).

Además, si la región A está provista de una métrica definida por una densidad λ , se puede proveer a la región B con una densidad σ , de tal manera que f sea una isometría, para esto se define

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}. \quad (1.1)$$

Una demostración de este hecho se puede consultar en [5] p. 45.

En el sentido inverso, si A y B son dos regiones con métricas definidas por λ y σ respectivamente, y se tiene una biyección conforme que cumple (1.1), entonces A y B son regiones isométricas.

En particular si $f : A \rightarrow A$ es una biyección conforme, donde A es una región en \mathbb{R}^n provista con una métrica definida por una densidad λ y se tiene que

$$\lambda(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)},$$

entonces f es una isometría.

La prueba de los resultados que se enuncian a continuación se omiten. Éstas se pueden consultar en [2] pp. 20-32

Definición 5 Se define \mathbb{R}^n extendido como $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, y se denota por $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Denotaremos por u^* a $u/|u|^2$, donde $u \in \mathbb{R}^n$, por $S(a, r)$ la esfera con centro en $a \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$, es decir

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$$

y por $P(a, t)$ el plano en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ de codimensión 1

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = t\} \cup \{\infty\},$$

donde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición 6 Se define la reflexión en $S(a, r)$ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ como

$$\phi(x) = \begin{cases} a + r^2(x - a)^* & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, x \neq a, \\ \infty & \text{si } x = a, \\ a & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

Definición 7 Se define la reflexión en $P(a, t)$ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ como

$$\phi(x) = \begin{cases} x - 2(x \cdot a - t)a^* & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \\ \infty & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

Para cualquier reflexión ϕ (en una esfera o un plano) se cumple que $\phi^2(x) = x \quad \forall x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, por lo que ϕ es una biyección de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Además $\phi(x) = x$ si y sólo si x está en el plano o la esfera sobre la cual estamos reflejando.

Es claro que las reflexiones son continuas en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, salvo por los puntos ∞ y la preimagen de infinito, donde la continuidad no está definida. Para hablar de la continuidad de las reflexiones en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, se define la proyección estereográfica Π de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en la esfera unitaria \mathbb{S}^n , donde

$$\mathbb{S}^n = \{y \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} : |y| = 1\},$$

la cual depende de la inclusión de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ dada por $x \mapsto \tilde{x}$, donde

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

y por supuesto $\tilde{\infty} = \infty$. Dicha inclusión es una biyección de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con el plano $x_{n+1} = 0$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Definición 8 La proyección estereográfica de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en \mathbb{S}^n está dada por

$$\Pi(\tilde{x}) = \begin{cases} \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \\ e_{n+1} & \text{si } x = \infty. \end{cases}$$

Se puede calcular la inversa que está dada por

$$\Pi^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - y_{n+1})} (y_1, \dots, y_n, 0) & \text{si } y \in \mathbb{S}^n, y \neq e_{n+1}, \\ \infty & \text{si } y = e_{n+1}. \end{cases}$$

Ya que la proyección estereográfica es una biyección entre $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y \mathbb{S}^n , podemos transferir la métrica euclidiana de \mathbb{S}^n a la métrica cordal d_C en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, definida por

$$d_C(x, y) = |\Pi(\tilde{x}) - \Pi(\tilde{y})|, \quad x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n. \quad (1.2)$$

Calculando, se obtiene que

$$d_C(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{1/2}(1 + |y|^2)^{1/2}} & \text{si } x, y \neq \infty, \\ \frac{2}{(1 + |x|^2)^{1/2}} & \text{si } y = \infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Resulta que la métrica cordal restringida a \mathbb{R}^n induce la misma topología que la métrica euclidiana. Además se puede probar que

$$d_C(x_n, \infty) \mapsto 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |x_n| \mapsto \infty.$$

Resulta entonces que las reflexiones son homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Definición 9 Una transformación de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es una composición finita de reflexiones en esferas y planos.

Definición 10 El grupo de las transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es llamado el grupo general de Möbius, y es denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Ejemplos de transformaciones de Möbius son las traslaciones y homotecias, así como $x \mapsto x^*$. Además si ϕ y ϕ^* son las reflexiones en $S(a, r)$ y $S(0, 1)$ respectivamente y $\psi(x) = rx + a$, entonces

$$\phi = \psi\phi^*\psi^{-1},$$

lo cual muestra que cualesquiera dos reflexiones en esferas son conjugadas en el grupo $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$.

Teorema 1.0.2 *Toda isometría euclidiana de \mathbb{R}^n es una composición de a lo más $n + 1$ reflexiones en planos. En particular las isometrías euclidianas son transformaciones de Möbius.*

Una prueba se puede consultar en [2] p. 23. El siguiente resultado se sigue directamente del Teorema 1.0.2.

Teorema 1.0.3 *Una función ϕ es una isometría euclidiana si y sólo si es de la forma*

$$\phi(x) = Ax + x_0,$$

donde $A \in O(n)$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.0.4 *Toda reflexión es conforme e invierte orientación.*

La prueba de este resultado se puede consultar en [2] p. 25. Si σ es la reflexión en la esfera $S(a, r)$, entonces un cálculo sencillo muestra que

$$|\sigma(y) - \sigma(x)| = \frac{r^2|y - x|}{|x - a||y - a|}, \quad (1.4)$$

por lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sigma(x + h) - \sigma(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x - a|^2},$$

el cual es el factor de conformalidad de σ . Denotaremos por “esferas” a esferas o planos de codimensión 1.

Dado que cualquier transformación de Möbius es composición de homotecias, isometrías euclidianas y $x \mapsto x^*$, no es difícil probar el siguiente hecho.

Teorema 1.0.5 *Sea ϕ una transformación de Möbius y Σ una “esfera”, entonces $\phi(\Sigma)$ es una “esfera”.*

La ecuación que define una “esfera” Σ , ya sea $S(a, r)$ o $P(a, t)$, es

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0,$$

o

$$-2(x \cdot a) + 2t = 0$$

respectivamente, la cual se puede expresar de forma general como

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1},$$

donde $a = (a_1, \dots, a_n)$. A cada “esfera” se le asocia un vector en \mathbb{R}^{n+2} , llamado vector coeficiente, dado por $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$.

Definición 11 Sean Σ y Σ' dos “esferas” en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con vectores coeficientes $(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ y $(b_0, b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ respectivamente. El producto inversivo de Σ y Σ' denotado por (Σ, Σ') está dado por

$$\frac{|2(a \cdot b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{1/2}(|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{1/2}}.$$

No es difícil probar que:

Si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = S(b, t)$ entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{|2rt|}.$$

Si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = P(b, t)$ entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b) - t|}{r|b|}.$$

Si $\Sigma = P(a, r)$ y $\Sigma' = P(b, t)$ entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b)|}{|a||b|}.$$

En todos los casos, si Σ y Σ' se intersectan $(\Sigma, \Sigma') = \cos \theta$, donde θ es uno de los ángulos de intersección. (Nótese que este ángulo no varía al cambiar los puntos de una intersección dada). En particular $(\Sigma, \Sigma') = 0$ si y sólo si Σ y Σ' son ortogonales.

Teorema 1.0.6 Sean Σ y Σ' 2 esferas y ϕ una transformación de Möbius, entonces

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma').$$

Una prueba se puede consultar en [2] p. 30 o con mayor detalle en [1]. El siguiente resultado se prueba primero para el caso en que Σ es el plano $x_n = 0$ y después se obtiene el resultado general por conjugación. (Véase [2] p. 31).

Teorema 1.0.7 Sea Σ una “esfera”, σ la reflexión en Σ e I la función identidad. Si ϕ es una transformación de Möbius que fija cada x en Σ . Entonces $\phi = I$ o $\phi = \sigma$.

Este resultado tiene consecuencias importantes

Corolario 1.0.8 Cualesquiera 2 reflexiones son conjugadas en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Corolario 1.0.9 Sean u y v puntos inversos con respecto a la “esfera” Σ y sea ϕ una transformación de Möbius. Entonces $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son puntos inversos con respecto a la “esfera” $\phi(\Sigma)$.

Corolario 1.0.10 Los puntos u y v son puntos inversos con respecto a la “esfera” Σ si y sólo si cada “esfera” que pasa por u y v es ortogonal a Σ .

CAPÍTULO 2

“k-esferas”

Definición 12 Una “ k -esfera” en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $1 \leq k \leq n-1$ es la intersección de $n-k$ “esferas” que son ortogonales 2 a 2, bajo la hipótesis que la intersección es no vacía.

Para motivar la definición, sea

$$\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k} \quad (2.1)$$

una “ k -esfera” y sea $x \in \Sigma^k$. Consideremos $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, de modo que $\phi(x) = \infty$, entonces $\infty \in \phi(\Sigma_i)$, $\forall i \quad 1 \leq i \leq n-k$, es decir $\phi(\Sigma_i)$ es un plano, y como el producto inversivo es invariante bajo transformaciones de Möbius se sigue que $\phi(\Sigma^k)$ es la intersección de $n-k$ planos ortogonales 2 a 2 de codimensión 1, por lo tanto $\phi(\Sigma^k)$ es un plano afín: si w_1, w_2, \dots, w_{n-k} son los vectores normales a los planos $\phi(\Sigma_1), \phi(\Sigma_2), \dots, \phi(\Sigma_{n-k})$ respectivamente, por el proceso de Gram-Schmidt podemos completar a una base normal de \mathbb{R}^n $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}, w_{n-k+1}, \dots, w_n\}$. Se sigue entonces que

$$\dim(\phi(\Sigma^k)) = \dim\langle w_{n-k+1}, \dots, w_n \rangle = k,$$

pues si $x_0 \in \phi(\Sigma^k)$ entonces $x - x_0 \in \langle w_{n-k+1}, \dots, w_n \rangle \quad \forall x \in \phi(\Sigma^k)$. Posteriormente se mostrará que esta “dimensión” también es k en el caso general, es decir si para alguna i , Σ_i en (2.1) es una esfera.

Proposición 2.0.11 Sea $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k}$ una “ k -esfera” en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, donde Σ_{n-k} es una esfera euclidiana, entonces existen $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{n-k-1}$ planos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, tales que

$$\Sigma^k = \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1} \cap \Sigma_{n-k}.$$

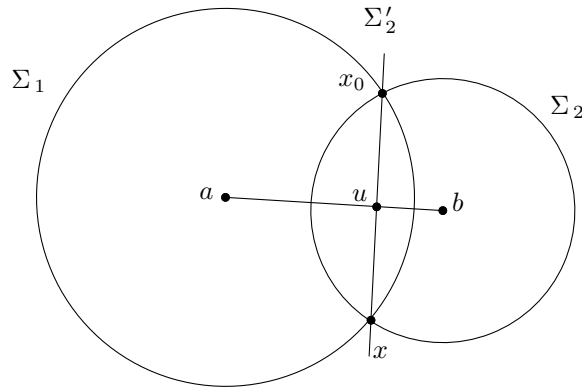


Figura 2.1: La intersección de 2 esferas es la intersección de una esfera con un plano.

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar el caso de una $(n - 2)$ - esfera. Sea $\Sigma_1 = S(a, r)$ y $\Sigma_2 = S(b, s)$. Veamos que $\forall x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, la proyección de x en el segmento \overline{ab} siempre es un punto constante. Sea $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ y sea u su proyección en \overline{ab} , entonces por el teorema de Pitágoras

$$|x - u|^2 + |u - a|^2 = r^2$$

y

$$|x - u|^2 + |u - b|^2 = s^2.$$

Se sigue entonces que

$$r^2 - |u - a|^2 = s^2 - |u - b|^2,$$

si $u = a + k(b - a)$, $k \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$r^2 - |k(b - a)|^2 = s^2 - |a - b + k(b - a)|^2,$$

despejando tenemos que

$$\begin{aligned} r^2 - s^2 &= (k^2 - (k - 1)^2)|b - a|^2 \\ &= (2k - 1)|b - a|^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$2k - 1 = \frac{r^2 - s^2}{|b - a|^2},$$

y por lo tanto

$$k = \frac{r^2 - s^2}{2|b - a|^2} + \frac{1}{2}.$$

Entonces u está determinado unívocamente $\forall x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Sea Σ'_2 el plano ortogonal a \overline{ab} que pasa por u , se sigue entonces que si $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, su proyección en \overline{ab} es u y por lo tanto $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma'_2$.

Si $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma'_2$, tomemos $x_0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ fijo, ya que $x, x_0 \in \Sigma_1$, por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} |x - u|^2 &= |x - a|^2 - |a - u|^2 \\ &= r^2 - |a - u|^2 \\ &= |x_0 - u|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que $x \in \Sigma'_2$, por el teorema de Pitágoras

$$|x - b|^2 = |x - u|^2 + |u - b|^2.$$

Por lo que al sustituir la primer igualdad en la segunda, tenemos que

$$|x - b|^2 = |x_0 - u|^2 + |u - b|^2 = s^2,$$

y por lo tanto $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Concluimos entonces que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap \Sigma'_2$. El caso general se sigue por inducción. \square

Proposición 2.0.12 *Sea $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k}$ una “ k - esfera” en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, donde Σ_{n-k} es una esfera euclidiana, entonces existen $\Sigma''_1, \dots, \Sigma''_t$ planos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, ortogonales 2 a 2 tales que*

$$\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_t \cap \Sigma'_{t+1},$$

donde $\Sigma_{n-k} = \Sigma'_{t+1}$.

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior tenemos que existen $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_{n-k-1}$ planos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, tales que

$$\Sigma^k = \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1} \cap \Sigma_{n-k},$$

donde $\Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1}$ es un espacio afín, por lo tanto, si tomamos

$$x_0 \in \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1},$$

tenemos que

$$\Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1} - x_0$$

es un espacio vectorial, llamemos V a dicho espacio vectorial, y sea W el espacio vectorial tal que $W \oplus V = \mathbb{R}^n$. Por el proceso de Gram-Schmidt existe $\{w_1, \dots, w_t\} \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ base ortonormal de \mathbb{R}^n , donde $\{w_1, \dots, w_t\}$ es una base de W y $\{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ es una base de V .

Sean Π_1, \dots, Π_t los planos por el origen en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con vectores normales w_1, \dots, w_t respectivamente. Afirmamos que

$$V = \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_t.$$

Para probar esto, nótese que v_i es ortogonal a $w_j \forall i \ 1 \leq i \leq n-t$ y $\forall j \ 1 \leq j \leq t$, por lo que $\{v_1, \dots, v_{n-t}\} \subset \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_t$, de donde se sigue que $V \subset \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_t$. Finalmente, ya que $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_t$ es un espacio vectorial de dimensión $n-t$ y $\dim V = n-t$, se tiene que $V = \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_t$.

Ahora sean $\Sigma''_1 = \Pi_1 + x_0$, $\Sigma''_2 = \Pi_2 + x_0 \dots$, $\Sigma''_t = \Pi_t + x_0$, entonces $\Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_t = \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-k-1}$, y por lo tanto $\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_t \cap \Sigma'_{t+1}$, donde $\Sigma_{n-k} = \Sigma'_{t+1}$. \square

Observación 2.0.13 *Sea V un espacio afín y sea $a \in \mathbb{R}^n - V$, entonces la proyección de a en V existe y es única, es decir, existe $a' \in V$ tal que $a - a'$ es ortogonal a V .*

DEMOSTRACIÓN. Probemos primero el caso cuando V es un espacio vectorial. Sea W espacio vectorial tal que $W \oplus V = \mathbb{R}^n$ y sea $\{w_1, \dots, w_t\} \cup \{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ base ortonormal de \mathbb{R}^n donde $\{w_1, \dots, w_t\}$ es una base de W y $\{v_1, \dots, v_{n-t}\}$ es una base de V , entonces

$$a = x_1 v_1 + \dots + x_{n-t} v_{n-t} + y_1 w_1 + \dots + y_t w_t.$$

Afirmamos que

$$a' = x_1 v_1 + \dots + x_{n-t} v_{n-t}$$

es la proyección de a en V : evidentemente $a' \in V$, y por otro lado

$$a - a' = y_1 w_1 + \dots + y_t w_t \in W,$$

por lo tanto $a - a' \perp v \quad \forall v \in V$, es decir $a - a'$ es ortogonal a V . La unicidad se sigue del teorema de Pitágoras, ya que si $v \in V$ y $v \neq a'$ entonces $|v - a| > |a - a'|$.

Para el caso en general en que V es espacio afín, sabemos que existen V' espacio vectorial y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $V = V' + x_0$, entonces $a - x_0$ tiene una única proyección en V' y ya que la función $x \mapsto x + x_0$ es una isometría euclidiana, preserva el producto punto y por lo tanto se tiene que a tiene una única proyección en V . \square

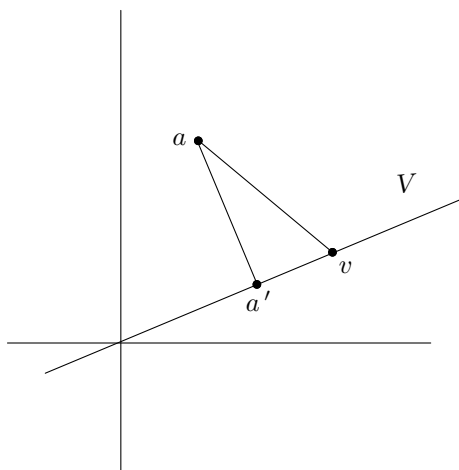


Figura 2.2: La proyección de un punto a a un espacio vectorial V es única.

Proposición 2.0.14 Sea $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k}$ una " k -esfera" en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, donde Σ_{n-k} es una esfera euclidiana. Entonces existen $\Sigma''_1, \dots, \Sigma''_{n-k-1}$ planos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, ortogonales 2 a 2, tales que

$$\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_{n-k-1} \cap \Sigma''_{n-k},$$

donde Σ''_{n-k} es la esfera $S(b, s)$ y $b \in \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_{n-k-1}$.

DEMOSTRACIÓN. De la proposición anterior tenemos que existen $\Sigma''_1, \dots, \Sigma''_t$ planos ortogonales 2 a 2, tales que

$$\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_t \cap \Sigma'_{t+1},$$

donde $\Sigma_{n-k} = \Sigma'_{t+1}$.

Sean $M = \Sigma_1'' \cap \dots \cap \Sigma_t''$ y $\Sigma'_{t+1} = S(a, r)$, tomemos p_0 la proyección de a en M y sea $x_0 \in M \cap \Sigma'_{t+1}$ fijo, definamos entonces

$$\Sigma''_{t+1} = S(p_0, |x_0 - p_0|).$$

Se afirma que

$$M \cap \Sigma'_{t+1} = M \cap \Sigma''_{t+1}.$$

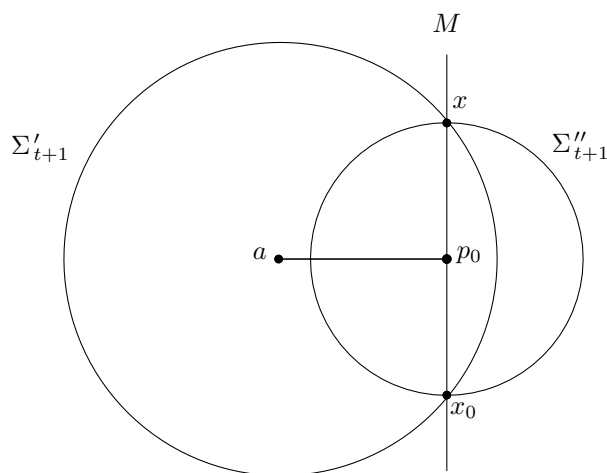


Figura 2.3: La intersección de una esfera y un espacio afín M es la intersección de M con una esfera con centro en M .

Si $x \in M \cap \Sigma'_{t+1}$, se tiene que $x \in M$ y $|x - a| = r$. Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} |x - p_0|^2 &= |x - a|^2 - |a - p_0|^2 = r^2 - |a - p_0|^2 \\ &= |x_0 - a|^2 - |a - p_0|^2 = |x_0 - p_0|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|x - p_0| = |x_0 - p_0|$, es decir, $x \in \Sigma''_{t+1}$ y tenemos entonces que $x \in M \cap \Sigma''_{t+1}$.

Por otro lado si $x \in M \cap \Sigma''_{t+1}$, entonces $|x - p_0| = |x_0 - p_0|$ y $x \in M$. Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned} |x - a|^2 &= |x - p_0|^2 + |a - p_0|^2 \\ &= |x_0 - p_0|^2 + |a - p_0|^2 \\ &= |x_0 - a|^2 = r^2, \end{aligned}$$

esta última igualdad se debe a que $x_0 \in \Sigma'_{t+1}$, por lo que $|x - a| = r$, es decir $x \in \Sigma'_{t+1}$ y por lo tanto $x \in M \cap \Sigma'_{t+1}$.

Con esto concluimos que $M \cap \Sigma'_{t+1} = M \cap \Sigma''_{t+1}$ y por consiguiente

$$\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_t \cap \Sigma''_{t+1}.$$

Recordemos que $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k}$, y al igual que en la motivación de la definición, tomemos $x \in \Sigma^k$ y $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ tal que $\phi(x) = \infty$, entonces $\phi(\Sigma^k)$ es un espacio afín de dimensión k . Por otro lado

$$\phi(\Sigma^k) = \phi(\Sigma''_1) \cap \dots \cap \phi(\Sigma''_t) \cap \phi(\Sigma''_{t+1}),$$

y también $\phi(\Sigma''_1), \dots, \phi(\Sigma''_t), \phi(\Sigma''_{t+1})$ son planos ortogonales 2 a 2, es decir tenemos un espacio afín de dimensión $n - (t + 1)$, se sigue entonces que $t + 1 = n - k$ y por lo tanto

$$\Sigma^k = \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_{n-k-1} \cap \Sigma''_{n-k},$$

donde $\Sigma''_1, \dots, \Sigma''_{n-k-1}$ son planos ortogonales 2 a 2 y Σ''_{n-k} es la esfera $S(b, s)$, donde $b \in \Sigma''_1 \cap \dots \cap \Sigma''_{n-k-1}$. \square

Nótese que este último resultado justifica que cualquier “ k - esfera” tiene “dimension” k .

Proposición 2.0.15 Sean V y W 2 subespacios de \mathbb{R}^n de dimensión k , donde $k \leq n$, entonces existe A una matriz ortogonal tal que $w_i = Av_i$, $i = 1, \dots, k$, donde $\{v_1, \dots, v_k\}$ y $\{w_1, \dots, w_k\}$ son bases ortonormales de V y W respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Por el proceso de Gram-Schmidt se puede completar a bases ortonormales de \mathbb{R}^n $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_k, \dots, w_n\}$, Considérese entonces la única transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(v_i) = w_i \forall i$ $1 \leq i \leq n$ (véase [4] p. 56). Ahora bien, si $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$, se tiene que $|v|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, así mismo $T(v) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$, por lo que $|T(v)|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Se sigue entonces que T es una transformación ortogonal, por lo cual

$$T(x) = Ax$$

(cf. [4] p. 189). \square

Proposición 2.0.16 $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ actúa transitivamente en las “ k - esferas”.

DEMOSTRACIÓN. Sean Σ_1^k y Σ_2^k 2 " k -esferas", si tomamos $x_1 \in \Sigma_1^k$ y $x_2 \in \Sigma_2^k$, sabemos que existen $\phi_1, \phi_2 \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ tales que $\phi_1(x) = \infty$ y $\phi_2(x) = \infty$. Además, como las traslaciones son transformaciones de Möbius, podemos suponer que $0 \in (\phi_1(\Sigma_1^k)) \cap (\phi_2(\Sigma_2^k))$, por lo que se tienen 2 subespacios de dimensión k , se sigue de la proposición anterior, que existe una transformación ortogonal ϕ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n (la cual es una isometría euclidiana) tal que $\phi(\phi_1(\Sigma_1^k)) = \phi_2(\Sigma_2^k)$. \square

CAPÍTULO 3

Modelos del espacio hiperbólico

3.1. Modelo del semiespacio superior

Poincaré observó que cada transformación de Möbius ϕ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, tiene una extensión natural a una transformación de Möbius $\widehat{\phi}$ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, en este sentido se puede pensar a $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ como un subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$. Estas extensiones dependen de la inclusión

$$x \mapsto \widehat{x} = (x_1, \dots, x_n, 0), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Definición 13 Para cada reflexión ϕ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, se define la reflexión $\widehat{\phi}$ actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ de la siguiente manera:

(i) si ϕ es la reflexión en $S(a, r)$, $a \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces $\widehat{\phi}$ es la reflexión en $S(\widehat{a}, r)$;

(ii) si ϕ es la reflexión en $P(a, t)$, $a \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces $\widehat{\phi}$ es la reflexión en $P(\widehat{a}, t)$.

Nótese que si $y = \phi(x)$, entonces

$$\widehat{\phi}(\widehat{x}) = \widehat{y} = \widehat{\phi(x)}. \quad (3.1)$$

Asimismo $\widehat{\phi}$ deja invariantes el plano $x_{n+1} = 0$ ($\widehat{\mathbb{R}}^n$) y los semiplanos $x_{n+1} > 0$ y $x_{n+1} < 0$.

Definición 14 Dada $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, $\phi = \phi_1 \dots \phi_m$ donde ϕ_j es la reflexión en una “esfera”, $j = 1, \dots, m$, se define su extensión de Poincaré como

$$\widehat{\phi} = \widehat{\phi}_1 \dots \widehat{\phi}_m.$$

Con esta definición $\widehat{\phi}$ resulta ser la única extensión de ϕ a $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ en el sentido de (3.1) y que preserve el semiespacio superior en \mathbb{R}^{n+1}

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}.$$

(Véase [2] p. 34).

Denotaremos por $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ al conjunto de las extensiones de Poincaré de los elementos de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

El modelo del semiespacio superior del espacio hiperbólico, está definido por el semiespacio \mathbb{H}^{n+1} en \mathbb{R}^{n+1} provisto de la métrica inducida por la densidad

$$\lambda(x) = \frac{1}{x_{n+1}}.$$

A esta métrica se le llama hiperbólica, denotaremos por $\rho(x, y)$ la distancia hiperbólica de x a y .

Toda extensión de Poincaré de cualquier $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, resulta ser una isometría hiperbólica de \mathbb{H}^{n+1} y viceversa, toda isometría del espacio hiperbólico es la extensión de algún elemento de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ (cf. [2] p. 36).

No es difícil verificar que la expresión

$$\frac{|y - x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}} \tag{3.2}$$

es invariante bajo las extensiones de Poincaré (cf. [2] p. 34).

Observación 3.1.1 Sean $x = se_{n+1}$, $y = te_{n+1}$, donde $s, t > 0$, entonces hay una única curva de clase C^1 por tramos que minimiza la integral

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{[\gamma(t)]_{n+1}} dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ es cualquier curva de clase C^1 por tramos tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$, de hecho esta curva es el segmento de línea que une x con y y su distancia hiperbólica está dada por

$$\rho(x, y) = |\log(s/t)| \tag{3.3}$$

(véase [2] p. 35).

Nótese que la observación anterior nos dice que el segmento de línea entre x y y es la única curva de clase C^1 por tramos que minimiza la distancia hiperbólica.

3.2. “ k -planos hiperbólicos” y geodésicas

Definición 15 Se dice que una “ k -esfera” $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{(n+1)-k}$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, si $\forall i$ $1 \leq i \leq (n+1) - k$, Σ_i es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Definición 16 Sea Σ^k una “ k -esfera” en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tal que $\Sigma^k \cap \widehat{\mathbb{R}}^n \neq \emptyset$. Se dice entonces que $\Sigma^k \cap \mathbb{H}^{n+1}$ es un “ k -plano hiperbólico”, éste se denota \mathbb{P}^k .

Se mostrará que bajo estas hipótesis $\mathbb{P}^k \neq \emptyset$.

En los siguientes 2 lemas, k -plano y $(k+1)$ -plano hiperbólico aparecen sin comillas para referirnos a espacios afines.

Lema 3.2.1 Un k -plano Σ^k en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ define un único $(k+1)$ -plano hiperbólico en \mathbb{H}^{n+1} , el cual está determinado por un único $(k+1)$ -plano $\widehat{\Sigma}^{k+1}$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, es decir $\widehat{\Sigma}^{k+1}$ es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y $\widehat{\Sigma}^{k+1} \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma^k$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Sigma^k = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-k}$ un k -plano en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces tenemos que $\infty \in \Sigma^k$, es decir, $\infty \in \Sigma_i \forall i$ $1 \leq i \leq n - k$, por lo que $\Sigma_i = P(a_i, t_i)$. Notemos ahora que $\widehat{\Sigma}_i = P(\widehat{a}_i, t_i)$ es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ pues $\widehat{a}_i \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ y $\widehat{\Sigma}^{k+1} = \widehat{\Sigma}_1 \cap \dots \cap \widehat{\Sigma}_{n-k}$ es tal que $\widehat{\Sigma}^{k+1} \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma^k$, por lo que $\widehat{\Sigma}^{k+1} \cap \mathbb{H}^{n+1}$ es un $(k+1)$ -plano hiperbólico definido por Σ^k .

Para la unicidad, considérese $\Sigma^{k+1} = \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{(n+1)-k} \cap \Sigma'_{(n+1)-(k+1)}$ un espacio afín que define un $(k+1)$ -plano hiperbólico en \mathbb{H}^{n+1} , tal que $\Sigma^{k+1} \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma^k$. Obsérvese que si $x \in \Sigma^{k+1}$, donde $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, entonces $x_p = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \Sigma^{k+1} \cap \widehat{\mathbb{R}}^n$. Esto se sigue, ya que el espacio afín Σ^{k+1} define un $(k+1)$ -plano hiperbólico en \mathbb{H}^{n+1} , por lo que $\Sigma'_i = P(a'_i, t'_i)$, donde a'_i está en el plano $x_{n+1} = 0$, $i = 1, \dots, (n+1) - (k+1)$, ya que Σ'_i es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Por lo tanto tenemos que $x \cdot a'_i = t'_i$ y también $x_p \cdot a'_i = t'_i$, $i = 1, \dots, (n+1) - (k+1)$, dado que a'_i vive en \mathbb{R}^n .

Por lo tanto, si $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Sigma^{k+1}$, se sigue de lo anterior que $x_p = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \Sigma^{k+1} \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma^k$, por lo que $(x_1, \dots, x_n) \cdot a_i = t_i \forall i$ $1 \leq i \leq n - k$, se sigue entonces que $x \cdot \widehat{a}_i = t_i$ y por lo tanto se tiene que $x \in P(\widehat{a}_i, t_i) \forall i$ $1 \leq i \leq n - k$. Concluimos entonces que

$$\Sigma^{k+1} = P(\widehat{a}_1, t_1) \cap \dots \cap P(\widehat{a}_{n-k}, t_{n-k}),$$

esta última igualdad es consecuencia de que las dimensiones de Σ^{k+1} y de $P(\widehat{a}_1, t_1) \cap \dots \cap P(\widehat{a}_{n-k}, t_{n-k})$ son iguales. \square

Lema 3.2.2 *Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ define un único 1 – plano hiperbólico en \mathbb{H}^{n+1} , el cual está determinado por un único 1 – plano $\widehat{\Sigma}^1$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, es decir $\widehat{\Sigma}^1$ es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y $\widehat{\Sigma}^1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \{x, \infty\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x = (x_1, \dots, x_n, 0)$ y $\widehat{\Sigma}^1 = P(\widehat{e}_1, x_1) \cap \dots \cap P(\widehat{e}_n, x_n)$, donde los planos $P(\widehat{e}_i, x_i)$, los estamos considerando en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. Evidentemente $\widehat{\Sigma}^1$ es un espacio afín en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ tal que $\widehat{\Sigma}^1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \{x, \infty\}$.

La unicidad se prueba de forma análoga a la del lema anterior, considérese $\Sigma^1 = \Sigma'_1 \cap \dots \cap \Sigma'_{n-1} \cap \Sigma'_n$ un espacio afín que define un 1 – plano hiperbólico en \mathbb{H}^{n+1} , tal que $\Sigma^1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \{x, \infty\}$. Se sabe del lema anterior que si $y \in \Sigma^1$, donde $y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$, entonces $y_p = (y_1, \dots, y_n, 0) \in \Sigma^1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n$, es decir $y_p \in \{x, \infty\}$, por lo que $y_p = x$. Por lo tanto si $y \in \Sigma^1$, entonces $y \cdot \widehat{e}_i = x_i$, por lo que $y \in P(\widehat{e}_i, x_i) \forall i \ 1 \leq i \leq n$. Se concluye de manera análoga que

$$\Sigma^1 = P(\widehat{e}_1, x_1) \cap \dots \cap P(\widehat{e}_n, x_n).$$

□

Obsérvese que los lemas anteriores dicen que la proyección de $\widehat{\Sigma}^{k+1}$ en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ se obtiene al eliminar la última coordenada.

Proposición 3.2.3 $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ *actúa transitivamente en los “k – planos hiperbólicos”.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tenemos planos afines de dimensión k en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ intersecados con \mathbb{H}^{n+1} , esto se debe a que todo “k – plano hiperbólico” está determinado por una “k – esfera” en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, que interseca a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, la cual es ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, y podemos tomar un punto x en dicha intersección y una transformación de Möbius $\phi \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ (actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ únicamente) tal que $\phi(x) = \infty$, por lo que al considerar $\widehat{\phi}$ tenemos que la imagen de la “k – esfera” bajo esta transformación es un plano afín.

Sean entonces $\widehat{\Sigma}_1, \widehat{\Sigma}_2$ 2 planos afines en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ de dimensión k ortogonales a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y sean Σ_1, Σ_2 sus proyecciones a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, es decir $\widehat{\Sigma}_1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma_1$ y $\widehat{\Sigma}_2 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n = \Sigma_2$. Usando argumentos de álgebra lineal tenemos que existe una transformación ortogonal ϕ (la cual es una isometría euclidiana) tal que $\phi(\Sigma_1) = \Sigma_2$, por lo que al tomar la extensión de Poincaré de ϕ , tenemos que $\widehat{\phi}(\widehat{\Sigma}_1)$ es un k – plano ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, lo cual es consecuencia de que

$\widehat{\phi}$ preserva ∞ , $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y el producto inversivo. Notemos entonces que $\widehat{\phi}(\widehat{\Sigma}_1)$ se proyecta en Σ_2 pues justamente $\phi(\Sigma_1) = \Sigma_2$, más aún se sigue de la unicidad de los 2 lemas anteriores que $\widehat{\phi}(\widehat{\Sigma}_1) = \widehat{\Sigma}_2$. \square

Nótese que las extensiones de Poincaré mandan “ k -planos hiperbólicos” en “ k -planos hiperbólicos”, esto es consecuencia de que las extensiones de Poincaré preservan $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y el producto inversivo, por lo que mandan “esferas” ortogonales a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en “esferas” ortogonales a $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Proposición 3.2.4 *Dados $u, v \in \mathbb{H}^{n+1}$, existe un “1 – plano hiperbólico” que contiene a u y v . Además, éste es único.*

DEMOSTRACIÓN. Dados $u, v \in \mathbb{H}^{n+1}$, tomamos $u', v' \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ sus proyecciones respectivas en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Si $u' = v'$, entonces u y v están en una recta paralela al eje e_{n+1} y ésta define el “1 – plano hiperbólico”. De otra manera sean w_1, \dots, w_{n-1} los vectores en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tales que

$$\left\{ w_1, \dots, w_{n-1}, \frac{v' - u'}{|v' - u'|} \right\}$$

es una base ortonormal de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Ahora consideremos Π_1, \dots, Π_{n-1} los planos en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ con vectores normales $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_{n-1}$. Se sigue entonces que $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_{n-1}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ y $v' - u' \in \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_{n-1}$.

Entonces $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_{n-1} + u'$ es un plano afín de dimensión 2 en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ que contiene a u', v' . Más aún, como es un plano afín ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, necesariamente contiene a u y v . Finalmente al tomar la mediatriz de u y v en el 2 – plano, y a , la intersección de ésta con $\widehat{\mathbb{R}}^n$, se puede construir $S(a, r)$ donde $r = |a - u| = |a - v|$.

En consecuencia, tenemos que $(\Pi_1 + u') \cap \dots \cap (\Pi_{n-1} + u') \cap S(a, r)$ es una “1 – esfera” ortogonal a $\widehat{\mathbb{R}}^n$, por lo que su intersección con \mathbb{H}^{n+1} es un “1 – plano hiperbólico” que contiene a u y v . Véase la Figura 3.1.

Para la unicidad, notamos que para cualquier “1 – plano hiperbólico” que contenga a u y v , tomamos Σ^1 la “1 – esfera” que lo define y $x \in \Sigma^1 \cap \widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces al tomar $\widehat{\phi} \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ tal que $\widehat{\phi}(x) = \infty$, obtenemos un espacio afín de dimensión 1 que define un 1 – plano hiperbólico, se sigue del Lema 3.2.2 que dicho plano afín es único y por lo tanto Σ^1 también. Concluimos con esto que el “1 – plano hiperbólico” que contiene a u y v es único. \square

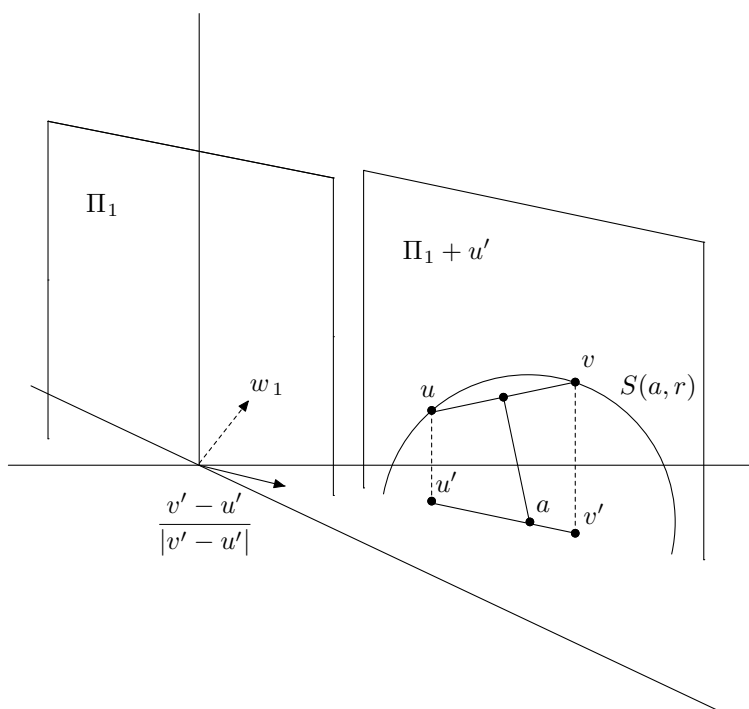


Figura 3.1: El “1 – plano hiperbólico” que pasa por 2 puntos en \mathbb{H}^3 .

Definición 17 Dados $x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$, la geodésica en \mathbb{H}^{n+1} que une x con y es el segmento que une x con y del único “1 – plano hiperbólico” que contiene a ambos puntos.

Cabe mencionar que también se usa el término *geodésica* para referirse al “1 – plano hiperbólico” completo que contiene a x y y , y no sólo al segmento entre dichos puntos.

Resulta que las geodésicas son las únicas curvas que minimizan la distancia, pues para cualesquiera 2 puntos u y v , podemos enviar mediante una extensión de Poincaré $\hat{\phi} \in \widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ la geodésica que une u con v en la geodésica que une $x = se_{n+1}$ con $y = te_{n+1}$, donde $s, t > 0$. Se sigue de la Observación 3.1.1 que la geodésica que une x con y es el segmento de línea que une x con y , y ya que $\hat{\phi}$ es una isometría hiperbólica, tenemos que la geodésica que une u con v es la curva que minimiza la distancia entre u y v .

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la Proposición 3.2.3

Corolario 3.2.5 $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es transitivo en geodésicas.

Con este resultado, (3.2) y (3.3) se obtiene una fórmula de la distancia en \mathbb{H}^{n+1} .

$$\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{|y - x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}} \quad x, y \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

En particular, tenemos que la esfera hiperbólica

$$\{x \in \mathbb{H}^{n+1} | \rho(x, y) = r\}$$

con centro hiperbólico $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ y radio hiperbólico r , es precisamente la esfera euclidiana

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 = (y_{n+1} \sinh r)^2,$$

(cf. [2] p. 35)

3.3. Modelo de la bola

Para esta sección, consideremos $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ tal que

$$f = \phi_0 \sigma, \tag{3.4}$$

donde ϕ_0 es la reflexión en la esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ y σ es la reflexión en el plano $x_{n+1} = 0$, tenemos entonces que f manda el plano $x_{n+1} = 0$ en \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^{n+1} en \mathbb{B}^{n+1} , donde

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \quad \mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1\}.$$

No es difícil probar que ϕ_0 restringido a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ (o a \mathbb{S}^n) es la proyección estereográfica. Se puede verificar calculando que el factor de conformalidad de f es

$$\mu(x) = \frac{1 - |f(x)|^2}{2x_{n+1}}$$

(cf. [2] p. 37), por lo que

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}$$

es la densidad que define la métrica hiperbólica en el modelo de la bola, esto es consecuencia de que

$$\sigma(w) = \frac{\lambda(f^{-1}(w))}{\mu(f^{-1}(w))}. \tag{3.5}$$

Se sigue entonces que toda isometría ψ de \mathbb{H}^{n+1} se transforma mediante $\psi \mapsto f\psi f^{-1}$ en una isometría de \mathbb{B}^{n+1} , por lo que $\widehat{GM}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es conjugado en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ al subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ formado por aquellos elementos que dejan \mathbb{B}^{n+1} invariante, a este subgrupo lo denotamos por $GM(\mathbb{B}^{n+1})$.

Habiendo mostrado esta relación, se puede trabajar con las transformaciones en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ que dejan invariante \mathbb{B}^n (y no en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$). Usaremos los siguientes hechos cuyas pruebas se pueden consultar en [2] p. 38.

Teorema 3.3.1 *Sea ϕ una transformación de Möbius tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$. Entonces $\phi(x) = Ax$ para alguna matriz ortogonal A .*

Teorema 3.3.2 *Sea ϕ la reflexión en la esfera $S(a, r)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) $S(a, r)$ y \mathbb{S}^{n-1} son ortogonales,
- (ii) $\phi(a^*) = 0$ (equivalentemente $\phi(0) = a^*$),
- (iii) $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$.

Observación 3.3.3 *Una reflexión en una “esfera” deja invariante \mathbb{B}^n si y sólo si dicha “esfera” es ortogonal a \mathbb{S}^{n-1}*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema anterior, basta demostrarlo para ψ la reflexión en un plano $P(a, t)$. Nótese que $P(a, t)$ es ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} si y sólo si $t = 0$. Por un lado si ψ preserva \mathbb{B}^n , ψ preserva \mathbb{S}^{n-1} , y como $\psi(\infty) = \infty$, se tiene que $\psi(0) = 0$, es decir, $0 \in P(a, t)$.

Por otro lado si $0 \in P(a, t)$, ψ es una transformación lineal ortogonal y por lo tanto $\psi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$. \square

Para estudiar las geodésicas en el modelo de la bola, tomemos f como en (3.4) y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$ una curva de clase C^1 por tramos. En virtud de (3.5), se sigue fácilmente que

$$l_\sigma(f(\gamma)) = l_\lambda(\gamma), \quad (3.6)$$

donde λ y σ son las densidades para el modelo del semiplano y el modelo de la bola respectivamente.

Se sigue entonces de (3.6) que f manda geodésicas en geodésicas, ya que preserva las longitudes de las curvas.

Por otro lado, al ser f una transformación de Möbius, f preserva el producto inversivo, por lo tanto la imagen de una geodésica L bajo la transformación f es una “1-esfera” ortogonal a la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} intersecada

con \mathbb{B}^n , es decir, si L está determinada por la “1 – esfera”

$$\Sigma^1 = \Sigma_1 \cap \dots \cap \Sigma_{n-1},$$

donde Σ_i son “esferas” ortogonales a $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ entonces $f(\Sigma_i)$ es ortogonal a $\mathbb{S}^{n-1} \forall i \ 1 \leq i \leq n-1$, esto se sigue al considerar el producto inversivo

$$0 = (\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}, \Sigma_i) = (f(\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}), f(\Sigma_i)) = (\mathbb{S}^{n-1}, f(\Sigma_i)).$$

Concluimos entonces que las geodésicas en el modelo de la bola son las “1 – esferas” ortogonales a \mathbb{S}^{n-1} , las cuales son diámetros de \mathbb{B}^n o semicírculos ortogonales a \mathbb{S}^{n-1} intersecados con \mathbb{B}^n .

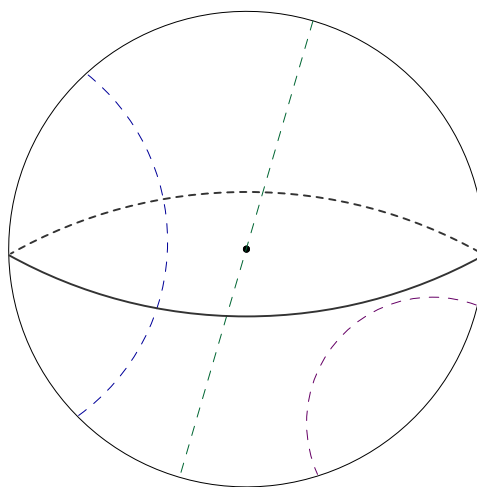


Figura 3.2: Geodésicas en \mathbb{B}^3

3.4. Forma general de las transformaciones de Möbius

Los siguientes resultados describen la estructura general de las transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, una prueba puede consultarse en [2] pp. 40-42.

Teorema 3.4.1 *Sea ϕ una transformación de Möbius.*

(i) *Si $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$ entonces*

$$\phi(x) = A\sigma(x),$$

donde σ es una reflexión en alguna esfera ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} (o σ es la identidad) y A es una matriz ortogonal.

(ii) *Si $\phi(\infty) = \infty$ entonces*

$$\phi(x) = r(Ax) + x_0,$$

donde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz ortogonal.

(iii) *Si $\phi(\infty) \neq \infty$ entonces*

$$\phi(x) = r(A\sigma(x)) + x_0,$$

donde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz ortogonal y σ es una reflexión en una esfera.

Si $\phi(\infty) \neq \infty$, en virtud del Teorema 3.4.1 $\phi(x) = r(A\sigma(x)) + x_0$. Si σ es la reflexión en la esfera $S(a, t)$, donde $\phi^{-1}(\infty) = a$, entonces es fácil mostrar que ϕ actúa como isometría euclidiana en la esfera $S(a, t\sqrt{r})$ la cual llamaremos la *esfera isométrica* de ϕ .

Resulta de (ii) del Teorema 3.4.1 que

$$\phi\sigma(x) = Ax + x_0,$$

donde σ es la reflexión en la esfera isométrica, por lo que en general

$$\phi = \psi\sigma,$$

donde ψ es una isometría euclidiana y σ es la reflexión en la esfera isométrica. En el caso especial en que ϕ preserva \mathbb{B}^n , la reflexión σ en (ii) del Teorema 3.4.1 es la reflexión en la esfera isométrica de ϕ , ya que σ y A actúan como isometrías euclidianas en dicha esfera, en este caso se deduce que la esfera isométrica de ϕ es ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} .

CAPÍTULO 4

Teoremas de distorsión

En este capítulo se probarán dos teoremas de distorsión para transformaciones de Möbius. El primer resultado relaciona la métrica hiperbólica con la métrica cordal, probando que estas funciones satisfacen una condición de Lipschitz.

Se define la distorsión euclidiana de ψ en $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ como

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|}$$

que es el factor de conformalidad de ψ en x . Escribimos ϕx por $\phi(x)$.

Teorema 4.0.1 *Sea ϕ una transformación de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y ρ la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^{n+1} . Entonces*

$$\sup_{x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n} \frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} = \exp \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}),$$

donde $\widehat{\phi}$ es la extensión de Poincaré de ϕ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ tal que

$$f = \phi_0 \sigma,$$

donde ϕ_0 es la reflexión en la esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ y σ es la reflexión en el plano $x_{n+1} = 0$. Se tiene entonces que

$$d_C(\phi x, \phi y) = |f(\widehat{\phi x}) - f(\widehat{\phi y})|$$

y

$$d_C(x, y) = |f(\hat{x}) - f(\hat{y})|,$$

sea $t = f(\hat{x})$, $s = f(\hat{y})$ y $\psi = f \hat{\phi} f^{-1}$, por lo cual

$$\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} = \frac{|\psi(t) - \psi(s)|}{|t - s|},$$

donde $t, s \in \mathbb{S}^n$ y ψ preserva \mathbb{B}^{n+1} . Por lo tanto basta demostrar que si ψ preserva \mathbb{B}^{n+1} entonces

$$\sup_{x, y \in \mathbb{S}^n} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} = \exp \rho(0, \psi 0).$$

Ya que $\psi(\mathbb{B}^{n+1}) = \mathbb{B}^{n+1}$ se sigue del Teorema 3.4.1 que $\psi(x) = A\sigma(x)$, donde $A \in O(n+1)$ y σ es la reflexión en la esfera isométrica o es la identidad. Si σ es la identidad no hay nada que probar ya que

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} &= \frac{|Ax - Ay|}{|x - y|} = \frac{|x - y|}{|x - y|} = 1 \\ &= \exp \rho(0, 0) = \exp \rho(0, \psi 0). \end{aligned}$$

Si σ es la reflexión en la esfera isométrica de $\psi S(a, r)$, como A es ortogonal, usando (1.4)

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} &= \frac{|\sigma(x) - \sigma(y)|}{|x - y|} \\ &= \frac{r^2}{|x - a||y - a|}. \end{aligned}$$

Al ser $S(a, r)$ y \mathbb{S}^n esferas ortogonales, tenemos que $|a|^2 = 1 + r^2$, por lo cual

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} = \frac{|a|^2 - 1}{|x - a||y - a|}.$$

Nótese que $\forall x \in \mathbb{S}^n$ se sigue de la desigualdad del triángulo que

$$|x| + |a - x| \geq |a|.$$

En particular $x = a/|a|$ es el punto en \mathbb{S}^n más cercano a a ya que para este punto se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{|a|} \right| + \left| a - \frac{a}{|a|} \right| &= 1 + |a| \left(1 - \frac{1}{|a|} \right) \\ &= 1 + (|a| - 1) \\ &= |a|. \end{aligned}$$

Véase la Figura 4.1.

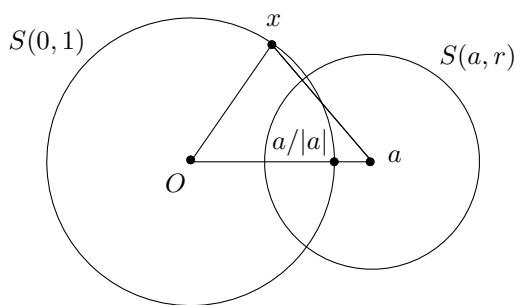


Figura 4.1: $x = a/|a|$ es el punto en \mathbb{S}^n más cercano a a .

En consecuencia

$$\left| \frac{a}{|a|} - a \right| \leq |x - a| \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} &= \frac{|a|^2 - 1}{|x - a||y - a|} \\ &\leq \frac{|a|^2 - 1}{|a/|a| - a|^2} \\ &= \frac{|a|^2 - 1}{(|a| - 1)^2} \\ &= \frac{|a| + 1}{|a| - 1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por lo que $\frac{|a|+1}{|a|-1}$ es una cota superior de $\frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|}$. Más aún usando (4.1) se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow a/|a|} \frac{|\psi(a/|a|) - \psi(y)|}{|a/|a| - y|} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1},$$

por consiguiente se tiene que

$$\sup_{x, y \in \mathbb{S}^n} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} = \frac{|a| + 1}{|a| - 1}.$$

Ahora, dado que a y a^* son inversos respecto a \mathbb{S}^n se sigue del Corolario 1.0.9 que $\psi(a)$ y $\psi(a^*)$ son inversos respecto a $\psi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$, por lo que $\psi(a^*) = 0$ ya que $\psi(a) = \infty$. Por otro lado tenemos $1 = |a||a^*| = |a||\psi^{-1}(0)|$, por lo que

$$|a| = \frac{1}{|\psi^{-1}(0)|}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{|a| + 1}{|a| - 1} &= \frac{1/|\psi^{-1}(0)| + 1}{1/|\psi^{-1}(0)| - 1} \\ &= \frac{1 + |\psi^{-1}(0)|}{1 - |\psi^{-1}(0)|}. \end{aligned}$$

y como $\rho(0, \psi^{-1}(0)) = \log \left(\frac{1 + |\psi^{-1}(0)|}{1 - |\psi^{-1}(0)|} \right)$ (cf. [2] p. 38), se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{x, y \in \mathbb{S}^n} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} &= \exp \rho(0, \psi^{-1}(0)) \\ &= \exp \rho(\psi(0), 0). \end{aligned}$$

□

Para la demostración del siguiente teorema es necesario definir la razón cruzada. Dados cuatro puntos distintos x, y, u, v en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, la razón cruzada de estos puntos está dada por

$$[x, y, u, v] = \frac{d_C(x, u) d_C(y, v)}{d_C(x, y) d_C(u, v)}. \quad (4.2)$$

Resulta que una función $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ es de Möbius si y sólo si preserva la razón cruzada (véase [2] p. 32).

Teorema 4.0.2 *Sea D una región en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y supóngase que u y v son puntos distintos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Si $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ no toma los valores u y v en D , entonces para todo $x, y \in D$*

$$d_C(\phi x, \phi y) \leq \frac{8d_C(x, y)}{d_C(u, v) d_C(x, \partial D)^{1/2} d_C(y, \partial D)^{1/2}},$$

la constante 8 es la mejor posible.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in D$, $x \neq y$ y $a, b \notin D$, $a \neq b$. Como $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ preserva la razón cruzada, se tiene que

$$[x, a, y, b][x, b, y, a] = [\phi x, \phi a, \phi y, \phi b][\phi x, \phi b, \phi y, \phi a].$$

Despejando, se sigue de la definición que

$$\left[\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} \right]^2 = \left[\frac{d_C(a, b)}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \frac{d_C(\phi x, \phi a) d_C(\phi y, \phi b) d_C(\phi x, \phi b) d_C(\phi y, \phi a)}{d_C(x, a) d_C(y, b) d_C(x, b) d_C(y, a)}.$$

Ahora, como la distancia cordal de cualesquiera dos puntos es menor o igual que dos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left[\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} \right]^2 &\leq \left[\frac{d_C(a, b)}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \frac{16}{d_C(x, a) d_C(y, b) d_C(x, b) d_C(y, a)} \\ &= \left[\frac{4}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \left[\frac{d_C(a, b)}{d_C(x, a) d_C(x, b)} \right] \left[\frac{d_C(a, b)}{d_C(y, a) d_C(y, b)} \right] \\ &\leq \left[\frac{4}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \left[\frac{d_C(a, x) + d_C(x, b)}{d_C(x, a) d_C(x, b)} \right] \left[\frac{d_C(a, y) + d_C(y, b)}{d_C(y, a) d_C(y, b)} \right] \\ &= \left[\frac{4}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \left[\frac{1}{d_C(x, a)} + \frac{1}{d_C(x, b)} \right] \left[\frac{1}{d_C(y, a)} + \frac{1}{d_C(y, b)} \right]. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Consideremos S el círculo máximo que pasa por $\Pi(\widehat{x})$ y $\Pi(\widehat{a})$ (donde Π es la proyección estereográfica), ya que $d_C(x, a) = |\Pi(\widehat{x}) - \Pi(\widehat{a})|$, tenemos que $d_C(x, a)$ es la longitud de la cuerda en S que une $\Pi(\widehat{x})$ con $\Pi(\widehat{a})$. Al ser Π

continua, se tiene por conexidad que los dos arcos que unen $\Pi(\hat{x})$ con $\Pi(\hat{a})$ en S intersectan a $\Pi(\partial D)$ en al menos un punto en cada arco y al menos uno de esos puntos está más cerca de $\Pi(\hat{x})$ que $\Pi(\hat{a})$, llamemos a dicho punto $\Pi(\hat{d})$, por lo tanto

$$|\Pi(\hat{d}) - \Pi(\hat{x})| \leq |\Pi(\hat{x}) - \Pi(\hat{a})|.$$

En consecuencia

$$d_C(x, \partial D) \leq d_C(x, a),$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{d_C(x, a)} \leq \frac{1}{d_C(x, \partial D)}.$$

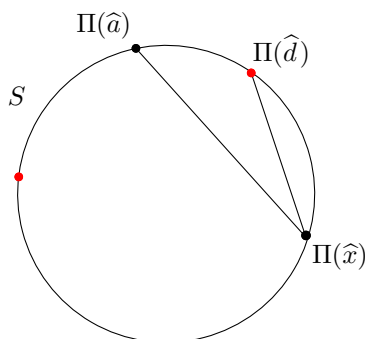


Figura 4.2: Círculo máximo que pasa por $\Pi(\hat{x})$ y $\Pi(\hat{a})$.

Análogamente obtenemos que

$$\frac{1}{d_C(x, b)} \leq \frac{1}{d_C(x, \partial D)} \quad y \quad \frac{1}{d_C(y, a)}, \frac{1}{d_C(y, b)} \leq \frac{1}{d_C(y, \partial D)}.$$

Por lo cual usando (4.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \left[\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} \right]^2 &\leq \left[\frac{4}{d_C(\phi a, \phi b)} \right]^2 \left[\frac{4}{d_C(x, \partial D) d_C(y, \partial D)} \right] \\ &= \frac{64}{d_C(\phi a, \phi b)^2 d_C(x, \partial D) d_C(y, \partial D)}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue al tomar raíz de ambos lados de la desigualdad y escribir $a = \phi^{-1}(u)$ y $b = \phi^{-1}(v)$.

Para mostrar que la constante ocho no se puede mejorar, consideremos $\phi(z) = z + 2m$ actuando en $\widehat{\mathbb{C}}$, y $D = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty, -m\}$, donde $m \in \mathbb{R}^+$. Ya que $\phi(\infty) = \infty$ y $\phi(-m) = m$, tenemos que ϕ omite ∞ y m . Ahora calculamos en $x = -2m$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)}.$$

Usando (1.3) se tiene que

$$\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} = \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}(1 + |y|^2)^{1/2}}{(1 + |x + 2m|^2)^{1/2}(1 + |y + 2m|^2)^{1/2}},$$

puesto que

$$|\phi x - \phi y| = |x + 2m - (y + 2m)| = |x - y|.$$

Por lo que, si $x = -2m$,

$$\lim_{y \rightarrow -2m} \frac{d_C(\phi(-2m), \phi y)}{d_C(-2m, y)} = \lim_{y \rightarrow -2m} \frac{(1 + 4m^2)^{1/2}(1 + |y|^2)^{1/2}}{(1 + |y + 2m|^2)^{1/2}} = 1 + 4m^2.$$

Por otra parte se sigue de (1.3) que

$$d_C(-2m, \partial D) = \min \begin{cases} d_C(-2m, \infty) = \frac{2}{(1 + 4m^2)^{1/2}}, \\ d_C(-2m, -m) = \frac{2m}{(1 + 4m^2)^{1/2}(1 + m^2)^{1/2}}, \end{cases}$$

por lo que

$$d_C(-2m, \partial D) = \frac{2m}{(1 + 4m^2)^{1/2}(1 + m^2)^{1/2}}.$$

Finalmente si

$$\frac{d_C(\phi(-2m), \phi y)}{d_C(-2m, y)} d_C(\infty, m) d_C(-2m, \partial D)^{1/2} d_C(y, \partial D)^{1/2} \leq k,$$

al tomar el límite cuando y tiende a $-2m$ obtenemos de las observaciones anteriores y de (1.3) que

$$(1 + 4m^2) \left(\frac{2}{(1 + m^2)^{1/2}} \right) \left(\frac{2m}{(1 + 4m^2)^{1/2}(1 + m^2)^{1/2}} \right) \leq k,$$

esto es

$$8 \left(\frac{1 + 4m^2}{1 + m^2} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2(1 + m^2)^{1/2}} \right) \leq k,$$

o equivalentemente

$$8 \left(\frac{1/m^2 + 4}{1/m + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2(1/m^2 + 1)^{1/2}} \right) \leq k,$$

y tomando el límite cuando m tiende a ∞ se tiene que $8 \leq k$. \square

Obsérvese que en la prueba de que ocho es la mejor cota posible, se tiene en dicho ejemplo, que si

$$A_m = \lim_{y \rightarrow -2m} \frac{d_C(\phi(-2m), \phi y)}{d_C(-2m, y)} \quad y \quad B_m = \frac{8}{d_C(\infty, m) d_C(-2m, \partial D)},$$

entonces

$$A_m \sim B_m \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty \quad \text{i.e. } A_m \text{ y } B_m \text{ son asintóticos.}$$

Esto se cumple, ya que si $C_m = d_C(\infty, m) d_C(-2m, \partial D)$, se tiene entonces que $B_m = 8/C_m$ y se probó que

$$C_m A_m \rightarrow 8 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_m}{8/C_m} = \frac{A_m C_m}{8} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

Para los siguientes resultados, es necesario introducir los conceptos de familia normal y familia de funciones equicontinuas. Una familia de funciones \mathcal{F} de un espacio métrico en otro, digamos de (X, d) en (X', d') es equicontinua en X si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera x, y en X y para toda función f en \mathcal{F} , $d'(fx, fy) < \epsilon$ si $d(x, y) < \delta$. Una familia de funciones \mathcal{F} como la anterior se dice normal en X si toda sucesión f_1, f_2, \dots en \mathcal{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos de X .

Proposición 4.0.3 *Sea \mathcal{F} una familia de transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tal que es equicontinua en compactos de una región D contenida en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con la métrica cordal, entonces \mathcal{F} es normal en D .*

DEMOSTRACIÓN. Sea f_1, f_2, \dots una sucesión de funciones en \mathcal{F} y x_1, x_2, \dots una sucesión de puntos en D , densos en éste (por ejemplo todos los puntos de la esfera de Riemann con coordenadas racionales contenidos en D). Ya que $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es compacto, la sucesión $f_1(x_1), f_2(x_1), \dots$ tiene una subsucesión que converge a algún $w_1 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, es decir, existe una subsucesión $f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}, \dots$ tal que

$$f_{1,1}(x_1), f_{1,2}(x_1), \dots, f_{1,n}(x_1), \dots \rightarrow w_1.$$

Usando el mismo argumento, tenemos que existe $f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,n}, \dots$ subsucesión de $f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}, \dots$ tal que

$$f_{2,1}(x_2), f_{2,2}(x_2), \dots, f_{2,n}(x_2), \dots \rightarrow w_2 \in \widehat{\mathbb{R}}^n.$$

Inductivamente tenemos que $\forall j > 1$, existe $f_{j,1}, f_{j,2}, \dots, f_{j,n}, \dots$ subsucesión de $f_{j-1,1}, f_{j-1,2}, \dots, f_{j-1,n}, \dots$ tal que

$$f_{j,1}(x_j), f_{j,2}(x_j), \dots, f_{j,n}(x_j), \dots \rightarrow w_j \in \widehat{\mathbb{R}}^n.$$

Consideremos ahora $K \subset D$ un compacto y $\epsilon > 0$, ya que \mathcal{F} es una familia de transformaciones de Möbius equicontinuas en K , existe $\delta > 0$ tal que si $d_C(x, y) < \delta$ y $x, y \in K$ entonces $d_C(fx, fy) < \epsilon/3$ para toda función f en \mathcal{F} . Al ser K compacto, lo podemos cubrir con una cantidad finita de bolas con diámetro δ , digamos B_1, B_2, \dots, B_s , cambiando subíndices si es necesario, podemos suponer que $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, \dots, x_s \in B_s$.

Consideremos g_1, g_2, \dots la subsucesión de f_1, f_2, \dots tal que $g_n = f_{n,n}$, entonces dicha subsucesión converge para cualquier $x_j, j \in \mathbb{N}$, por lo que si $1 \leq j \leq s$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N_j$, $d_C(g_n x_j, g_m x_j) < \epsilon/3$.

Ahora, si $x \in K$, $d_C(x, x_j) < \delta$ para alguna $j = 1, 2, \dots, s$, se sigue de la equicontinuidad de \mathcal{F} en K que

$$d_C(g_n x, g_n x_j) < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad d_C(g_m x, g_m x_j) < \epsilon/3.$$

Finalmente, tomando $N = \max N_j$ y $n, m > N$ se tiene

$$d_C(g_n x, g_m x) \leq d_C(g_n x, g_n x_j) + d_C(g_n x_j, g_m x_j) + d_C(g_m x, g_m x_j) < \epsilon$$

para todo x en K , por lo cual la subsucesión g_1, g_2, \dots converge en compactos de D , de donde se concluye que \mathcal{F} es normal en D . \square

Teorema 4.0.4 *Sea D una región en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y sea \mathcal{F} una familia de transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Supóngase que para toda ϕ en \mathcal{F} , existen dos puntos α_ϕ, β_ϕ en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ que no son tomados como valores de ϕ en D y supóngase también que*

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}} d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi) > 0.$$

Entonces \mathcal{F} es normal en D .

Nótese que la desigualdad en el Teorema 4.0.4 se puede cambiar por

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}} [\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)] > 0,$$

donde

$$[\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)] = \sup_{x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D} d_C(\phi x, \phi y).$$

Esto se cumple, ya que por una parte

$$d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi) \leq \sup_{x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D} d_C(\phi x, \phi y) = [\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)].$$

Viceversa, basta probar que

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}} [\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)] > 0$$

implica

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}} d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi) > 0.$$

Para esto, sean

$$r = \inf_{\phi \in \mathcal{F}} [\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)] \quad \text{y} \quad r_\phi = [\text{diámetro cordal } \phi(\widehat{\mathbb{R}}^n - D)].$$

Se tiene entonces que $0 < r \leq r_\phi$, por lo que $0 < r/2 < r_\phi$. Se sigue de las propiedades de supremo que para toda ϕ en \mathcal{F} existen $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D$ tales que

$$r/2 < d_C(\phi x, \phi y) \leq r_\phi,$$

por lo que al considerar $\alpha_\phi = \phi x$ y $\beta_\phi = \phi y$, se tiene que

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}} d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi) \geq r/2 > 0.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.0.4. Sea

$$a = \inf_{\phi \in \mathcal{F}} d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi),$$

entonces tenemos que $0 < a \leq d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi)$, por lo que

$$\frac{1}{d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi)} \leq \frac{1}{a}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, sea K un compacto contenido en la región D , ya que ∂D es un conjunto cerrado ajeno al compacto K , existen $u \in K$ y $v \in \partial D$ tales que

$$0 < d_C(u, v) \leq d_C(x, d) \quad \forall x \in K, \forall d \in \partial D.$$

Sea $b = d_C(u, v)$, entonces

$$b \leq d_C(x, \partial D) \quad \forall x \in K,$$

por lo que

$$\frac{1}{d_C(x, \partial D)^{1/2} d_C(y, \partial D)^{1/2}} \leq \frac{1}{b} \quad \forall x, y \in K. \quad (4.5)$$

Se sigue entonces de (4.4), (4.5) y el Teorema 4.0.2 que la familia \mathcal{F} cumple una condición de Lipschitz uniforme en compactos de D , ya que para toda $\phi \in \mathcal{F}$, y para todo compacto $K \subset D$, si $x, y \in K$, se tiene

$$\begin{aligned} d_C(\phi x, \phi y) &\leq \frac{8 d_C(x, y)}{d_C(\alpha_\phi, \beta_\phi) d_C(x, \partial D)^{1/2} d_C(y, \partial D)^{1/2}} \\ &\leq \frac{8 d_C(x, y)}{a b} = (\text{constante}) d_C(x, y), \end{aligned}$$

por lo que \mathcal{F} es una familia equicontinua en compactos de D . Finalmente, en virtud de la Proposición 4.0.3, tenemos que \mathcal{F} es normal en D . \square

Estos resultados que hemos probado son bastante técnicos, sin embargo, constituyen las herramientas necesarias para demostrar uno de los principales teoremas de esta tesis, cuyo resultado es verdaderamente sorprendente. Usaremos el hecho de que cualquier función distancia $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$ en un espacio métrico X es continua. Para probar esto notemos que

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y),$$

por lo que $d(x, y) - d(x_0, y_0) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y)$. Análogamente se tiene que $d(x_0, y_0) - d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y_0, y)$ y como consecuencia

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y_0, y).$$

Finalmente, para todo $\epsilon > 0$, si $d(x, x_0), d(y, y_0) < \epsilon/2$ entonces

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| < \epsilon,$$

por lo que la función distancia d es continua en (x_0, y_0) .

Teorema 4.0.5 Sean ϕ_1, ϕ_2, \dots transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y x_1, x_2, x_3 tres puntos distintos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, tales que $\phi_n(x_j) \rightarrow y_j$, $j = 1, 2, 3$, donde y_1, y_2, y_3 son puntos distintos. Entonces ϕ_1, ϕ_2, \dots contiene una subsucesión que converge uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ a una transformación de Möbius.

DEMOSTRACIÓN. Ya que $\phi_n(x_j) \rightarrow y_j$, $j = 1, 2, 3$, tenemos que para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, existe $N_{i,j}$ tal que

$$d_C(\phi_n x_j, y_j) \leq \frac{d_C(y_i, y_j)}{4} \quad \text{si } n > N_{i,j},$$

por lo que si $N = \max\{N_{i,j} | i, j = 1, 2, 3, i \neq j\}$, entonces

$$d_C(\phi_n x_j, y_j) \leq \frac{d_C(y_i, y_j)}{4} \quad \text{si } n > N \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j.$$

Por lo tanto, si $n > N$

$$\begin{aligned} d_C(y_i, y_j) &\leq d_C(y_i, \phi_n x_i) + d_C(\phi_n x_i, y_j) \\ &\leq d_C(y_i, \phi_n x_i) + d_C(\phi_n x_i, \phi_n x_j) + d_C(\phi_n x_j, y_j) \\ &\leq \frac{d_C(y_i, y_j)}{2} + d_C(\phi_n x_i, \phi_n x_j), \end{aligned}$$

y en consecuencia, si $n > N$

$$0 < \frac{d_C(y_i, y_j)}{2} \leq d_C(\phi_n x_i, \phi_n x_j). \quad (4.6)$$

Eliminando una cantidad finita de transformaciones de la sucesión (lo cual no altera el resultado), podemos suponer que para toda ϕ_n , y para cualesquiera i, j ($i \neq j$), se cumple (4.6).

Ahora, definimos $\mathcal{F} = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$, $D_1 = \widehat{\mathbb{R}}^n - \{x_2, x_3\}$ y análogamente se definen D_2 y D_3 . En virtud de (4.6) tenemos que si $i \neq j$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} d_C(\phi_n x_i, \phi_n x_j) > 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

y por el Teorema 4.0.4 se tiene que $\mathcal{F} = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ es normal en D_i para toda i .

Consideremos ahora E_1, E_2, E_3 vecindades ajenas dos a dos de x_1, x_2, x_3 respectivamente, y sea $B_1 = (E_2 \cup E_3)^C$, análogamente se definen B_2 y B_3 (véase la Figura 4.3). Nótese que

$$\begin{aligned} B_1 \cup B_2 \cup B_3 &= (E_2 \cup E_3)^C \cup (E_1 \cup E_3)^C \cup (E_2 \cup E_3)^C \\ &= ((E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_3) \cap (E_2 \cup E_3))^C \\ &= (E_1 \cap (E_2 \cup E_3))^C \\ &= (\emptyset)^C = \widehat{\mathbb{R}}^n. \end{aligned}$$

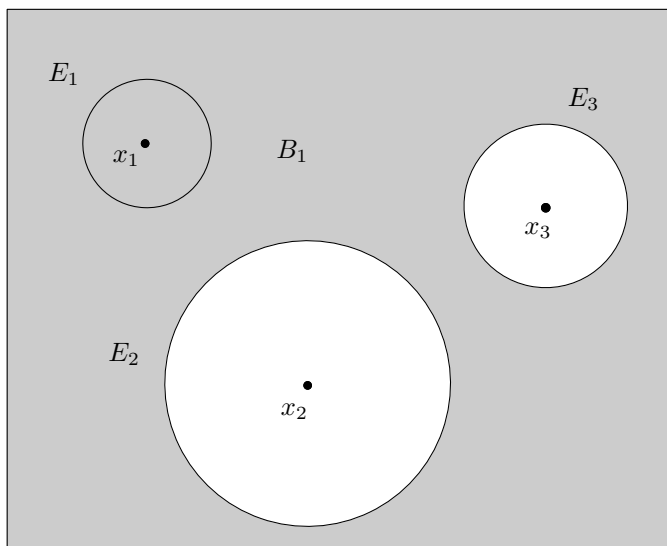


Figura 4.3: Conjuntos usados en la demostración del Teorema 4.0.5.

Evidentemente B_i es cerrado en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y por lo tanto compacto, asimismo B_i está contenido en D_i , por lo que dada una sucesión en \mathcal{F} (ya que B_1 es compacto en D_1), dicha sucesión contiene una subsucesión que converge uniformemente en B_1 , pues \mathcal{F} es normal en D_1 , análogamente dicha subsucesión contiene una subsucesión que converge uniformemente en B_2 (y en B_1) pues \mathcal{F} es normal en D_2 , y aplicando el mismo razonamiento, tendremos una subsucesión que converge uniformemente en B_3 (y en B_1 y B_2). En conclusión, toda sucesión en \mathcal{F} contiene una subsucesión que converge uniformemente en $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \widehat{\mathbb{R}}^n$, en particular ϕ_1, ϕ_2, \dots contiene una subsucesión que converge uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Sean f_1, f_2, \dots subsucesión de ϕ_1, ϕ_2, \dots que converge uniformemente a f en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Afirmamos que f es inyectiva en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Suponiendo la afirmación, consideremos $\psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ tal que $\psi(f(\infty)) = \infty$ y consideremos $\psi_n = \psi f_n$. Nótese que ψ_n es de Möbius, y ya que ψ es continua en $f(x)$ para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, $\psi_n \rightarrow \psi f$.

Recordemos que una transformación actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es de Möbius si y sólo si preserva la razón cruzada, por lo que si x, y, u, v son cuatro puntos distintos en \mathbb{R}^n ,

$$\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]}$$

es invariante bajo ψ_n , es decir, se tiene la igualdad

$$\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]} = \frac{[\psi_n \infty, \psi_n y, \psi_n u, \psi_n v]}{[\psi_n x, \psi_n y, \psi_n \infty, \psi_n v]}. \quad (4.7)$$

Por un lado se sigue de la fórmula de la distancia cordal (1.3) y de la

definición de la razón cruzada (4.2) que

$$\begin{aligned}
\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]} &= \frac{d_C(\infty, u) d_C(y, v) / d_C(\infty, y) d_C(u, v)}{d_C(x, \infty) d_C(y, v) / d_C(x, y) d_C(\infty, v)} \\
&= \frac{d_C(\infty, u) d_C(x, y) d_C(\infty, v)}{d_C(\infty, y) d_C(u, v) d_C(x, \infty)} \\
&= \frac{8|x - y| / [(1 + |u|^2)(1 + |v|^2)(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)]^{1/2}}{8|u - v| / [(1 + |u|^2)(1 + |v|^2)(1 + |x|^2)(1 + |y|^2)]^{1/2}} \\
&= \frac{|x - y|}{|u - v|}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene de (4.2) que para toda n en los naturales

$$\frac{[\psi_n \infty, \psi_n y, \psi_n u, \psi_n v]}{[\psi_n x, \psi_n y, \psi_n \infty, \psi_n v]} = \frac{d_C(\psi_n \infty, \psi_n u) d_C(\psi_n \infty, \psi_n v) d_C(\psi_n x, \psi_n y)}{d_C(\psi_n \infty, \psi_n y) d_C(\psi_n u, \psi_n v) d_C(\psi_n x, \psi_n \infty)},$$

y ya que $\psi(f(\infty)) = \infty$, al tomar el límite de esta sucesión constante (en virtud de (4.7)) cuando n tiende a infinito obtenemos de (1.3) que

$$\begin{aligned}
\frac{[\infty, y, u, v]}{[x, y, \infty, v]} &= \frac{d_C(\infty, \psi f u) d_C(\infty, \psi f v) d_C(\psi f x, \psi f y)}{d_C(\infty, \psi f y) d_C(\psi f u, \psi f v) d_C(\psi f x, \infty)} \\
&= \frac{|\psi f x - \psi f y|}{|\psi f u - \psi f v|}
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\frac{|\psi f x - \psi f y|}{|x - y|} = \frac{|\psi f u - \psi f v|}{|u - v|}, \quad (4.8)$$

por lo tanto ψf es una similitud euclidiana y por ende una transformación de Möbius, se sigue entonces que f también es de Möbius. Nótese que la restricción de que $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ es innecesaria, ya que se puede comparar cada lado de la igualdad (4.8) con una expresión similar para dos puntos a y b distintos de x, y, u, v .

Para demostrar la afirmación, se consideran dos casos. En el primero de ellos se verifica que para puntos distintos de x_1, x_2, x_3 , la función f es inyectiva. En el segundo caso, se verifica que la función es inyectiva cuando tomamos un punto de x_1, x_2, x_3 y otro punto distinto a estos.

Caso 1. Supongamos para llegar a una contradicción que existen dos puntos u y v , distintos de x_1, x_2, x_3 tales que $f(u) = f(v)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $f(u) = f(v)$ es distinto de y_1 y y_2 . Así mismo, componiendo con una transformación de Möbius por la izquierda y con otra por la derecha, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $x_1, x_2, x_3, u, v, y_1, y_2, y_3$ y $f(u) = f(v)$ son todos distintos de ∞ . Se tiene entonces que para todo natural n

$$\frac{[x_1, u, x_2, v]}{[x_1, x_3, u, x_2]} = \frac{[f_n x_1, f_n u, f_n x_2, f_n v]}{[f_n x_1, f_n x_3, f_n u, f_n x_2]}. \quad (4.9)$$

Utilizando la definición de la razón cruzada y que y_1, y_2, y_3 y $f(u) = f(v)$ son distintos de ∞ , se tiene que para n suficientemente grande

$$\frac{[f_n x_1, f_n u, f_n x_2, f_n v]}{[f_n x_1, f_n x_3, f_n u, f_n x_2]} = \frac{|f_n x_1 - f_n x_2| |f_n u - f_n v| |f_n x_1 - f_n x_3| |f_n u - f_n x_2|}{|f_n x_1 - f_n u|^2 |f_n x_2 - f_n v| |f_n x_3 - f_n x_2|},$$

y dado que el denominador converge a $|y_1 - fu|^2 |y_2 - fv| |y_3 - y_2|$, y este límite es distinto de cero, entonces

$$\frac{[f_n x_1, f_n u, f_n x_2, f_n v]}{[f_n x_1, f_n x_3, f_n u, f_n x_2]} \rightarrow \frac{|y_1 - y_2| |fu - fv| |y_1 - y_3| |fu - y_2|}{|y_1 - fu|^2 |y_2 - fv| |y_3 - y_2|},$$

el cual, en virtud de (4.9) también es distinto de cero, pues es el límite de una sucesión constante formada del cociente de estas razones cruzadas. Esto contradice que $f(u) = f(v)$, ya que de ser así, este límite debería ser cero.

Caso 2. Veamos ahora que para todo v distinto de x_1, x_2, x_3 , se tiene que $f(v) \neq y_i$. Sin pérdida de generalidad, supongamos para llegar a una contradicción que $f(v) = y_2$. Del mismo modo al caso anterior, componiendo con una transformación de Möbius por la izquierda y con otra por la derecha, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 = \infty$, y que $x_2, x_3, v, y_1, y_2, y_3$ son todos distintos de ∞ . Se tiene entonces que para todo natural n

$$\frac{[\infty, v, x_3, x_2]}{[x_3, \infty, x_2, v]} = \frac{[f_n \infty, f_n v, f_n x_3, f_n x_2]}{[f_n x_3, f_n \infty, f_n x_2, f_n v]}. \quad (4.10)$$

De manera análoga al caso anterior, para n suficientemente grande, se tiene que

$$\frac{[f_n \infty, f_n v, f_n x_3, f_n x_2]}{[f_n x_3, f_n \infty, f_n x_2, f_n v]} = \frac{|f_n \infty - f_n x_3|^2 |f_n v - f_n x_2|^2}{|f_n \infty - f_n v|^2 |f_n x_3 - f_n x_2|^2}.$$

Ya que el denominador converge a $|y_1 - fv|^2 |y_3 - y_2|^2$, y este límite es distinto de cero, se tiene que

$$\frac{[f_n \infty, f_n v, f_n x_3, f_n x_2]}{[f_n x_3, f_n \infty, f_n x_2, f_n v]} \rightarrow \frac{|y_1 - y_3|^2 |fv - y_2|^2}{|y_1 - fv|^2 |y_3 - y_2|^2},$$

el cual, en virtud de (4.10) también es distinto de cero. Del mismo modo al primer caso, esto nos lleva a una contradicción, por lo cual se concluye que $f(v) \neq y_3$. \square

Nótese que en la prueba de este teorema, se usó que si $g_n \rightarrow g$ en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ entonces $d_C(g_n(a), g_n(b)) \rightarrow d_C(g(a), g(b))$, lo cual es consecuencia de la continuidad de la distancia cordal. Así mismo se utilizó el resultado análogo para la distancia euclidiana.

En la demostración del Teorema 4.0.5 se prueba el siguiente resultado que utilizaremos en el siguiente capítulo.

Corolario 4.0.6 *Sea f_1, f_2, \dots una sucesión de transformaciones de Möbius que converge a f . Si x_1, x_2, x_3 son tres puntos distintos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, tales que $f_n(x_j) \rightarrow y_j$, $j = 1, 2, 3$, donde y_1, y_2, y_3 son puntos distintos. Entonces f es una transformación de Möbius.*

CAPÍTULO 5

Estructura de Grupo Topológico

Hay diferentes maneras de dar una estructura de grupo topológico a $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. Presentamos primero la más sencilla de ellas. Se define

$$D(\phi, \psi) = \sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi x, \psi x),$$

la cual es una métrica en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$:

- (i) $D(\phi, \psi) \geq 0$.
- (ii) $D(\phi, \psi) = 0$ si y sólo si $\phi = \psi$.
- (iii) $D(\phi, \psi) = D(\psi, \phi)$.
- (iv) $D(\phi_1, \phi_2) \leq D(\phi_1, \psi) + D(\psi, \phi_2)$.

Las primeras tres propiedades son directas de la definición. Usando el hecho de que para toda $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$

$$d_C(\phi_1 x, \phi_2 x) \leq d_C(\phi_1 x, \psi x) + d_C(\psi x, \phi_2 x),$$

y que para cualesquiera dos subconjuntos A, B de \mathbb{R} , se tiene

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B),$$

se sigue (iv).

Obsérvese que $\phi_n \rightarrow \phi$ con la métrica D llamada del supremo si y sólo si $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$:

Si $\phi_n \rightarrow \phi$ con la métrica D , entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D(\phi_n, \phi) < \epsilon$ si $n > N$, y por definición de supremo se tiene que $d_C(\phi_n x, \phi x) < \epsilon$ para toda $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ si $n > N$, por lo que $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Viceversa, si $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_C(\phi_n x, \phi x) < \epsilon/2$ para toda $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ si $n > N$, por lo que

$$\sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi_n x, \phi x) \leq \epsilon/2,$$

es decir, $D(\phi_n, \phi) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ si $n > N$, y por lo tanto $\phi_n \rightarrow \phi$ con la métrica del supremo.

Teorema 5.0.1 $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es un grupo topológico con respecto a la topología inducida por la métrica D .

DEMOSTRACIÓN. Si $\phi_1, \phi_2, \psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, se tiene que

$$\sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi_1 x, \phi_2 x) = \sup_{y \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi_1(\psi y), \phi_2(\psi y)),$$

puesto que ψ es biyectiva. En consecuencia

$$D(\phi_1 \psi, \phi_2 \psi) = D(\phi_1, \phi_2). \quad (5.1)$$

Así mismo se sigue del Teorema 4.0.1, que toda transformación de Möbius ϕ cumple una condición de Lipschitz uniforme en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, es decir existe una constante $c(\phi)$ tal que para todo $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$

$$d_C(\phi x, \phi y) \leq c(\phi) d_C(x, y).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} D(\phi \psi, \phi_1 \psi_1) &\leq D(\phi \psi, \phi_1 \psi) + D(\phi_1 \psi, \phi_1 \psi_1) \\ &\leq D(\phi, \phi_1) + D(\phi_1 \psi, \phi_1 \psi_1) \\ &\leq D(\phi, \phi_1) + c(\phi_1) D(\psi, \psi_1). \end{aligned}$$

La última desigualdad es cierta ya que

$$d_C(\phi_1 \psi x, \phi_1 \psi_1 x) \leq c(\phi_1) d_C(\psi x, \psi_1 x) \leq c(\phi_1) D(\psi, \psi_1),$$

y entonces

$$D(\phi_1\psi, \phi_1\psi_1) = \sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi_1\psi, \phi_1\psi_1) \leq c(\phi_1)D(\psi, \psi_1).$$

Esto muestra que la función $(\phi, \psi) \rightarrow \phi\psi$ es continua en (ϕ_1, ψ_1) . Análogamente la función $\psi \rightarrow \psi^{-1}$ es continua en ϕ , ya que

$$\begin{aligned} D(\phi^{-1}, \psi^{-1}) &= D(\phi^{-1}\psi, \psi^{-1}\psi) \\ &= D(\phi^{-1}\psi, I) \\ &= D(\phi^{-1}\psi, \phi^{-1}\phi) \\ &\leq c(\phi^{-1})D(\psi, \phi). \end{aligned}$$

□

Para otra construcción de la misma topología consideremos $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ tal que

$$f = \phi_0\sigma, \quad (5.2)$$

donde ϕ_0 es la reflexión en la esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ y σ es la reflexión en el plano $x_{n+1} = 0$. Se sabe del desarrollo del modelo hiperbólico de la bola, que $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es conjugado bajo f en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ de $GM(\mathbb{B}^{n+1})$, y que $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ si y sólo si $f(x) \in \mathbb{S}^n$. Con esta notación si $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ se corresponde con $\phi_1 \in GM(\mathbb{B}^{n+1})$, es decir $\phi_1 = f\widehat{\phi}f^{-1}$, se puede definir

$$\overline{D}(\phi_1, \psi_1) = \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |\phi_1x - \psi_1x|.$$

Nótese que la asociación $\phi \mapsto \phi_1$ es una isometría ya que

$$\begin{aligned} D(\phi, \psi) &= \sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n} d_C(\phi x, \psi x) \\ &= \sup_{x \in \widehat{\mathbb{R}}^n, y=f(x)} d_C(\widehat{\phi}f^{-1}y, \widehat{\psi}f^{-1}y) \\ &= \sup_{y \in \mathbb{S}^n} |f\widehat{\phi}f^{-1}y - f\widehat{\psi}f^{-1}y| \\ &= \overline{D}(\phi_1, \psi_1). \end{aligned}$$

Unas cuentas similares a las que se hicieron con la métrica D , muestran que la métrica \overline{D} en $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ es la de la convergencia uniforme en términos de las distancias euclidianas en \mathbb{S}^n .

Trabajaremos ahora en $GM(\mathbb{B}^{n+1})$, y denotaremos \overline{D} simplemente por D . Para cada $a \in \mathbb{B}^{n+1}$ distinta de cero, sea σ_a la reflexión en la esfera con centro en a^* que es ortogonal a \mathbb{S}^n . Recordemos que bajo estas condiciones σ_a preserva \mathbb{S}^n y $\sigma_a(a) = 0$. También sea τ_a la reflexión en el plano $P(a, 0)$. Ya que σ_a y τ_a preservan \mathbb{B}^{n+1} y el diámetro euclidiano por a , la transformación

$$T_a = \tau_a \sigma_a$$

también lo hace. Más aún, T_a preserva los extremos de dicho diámetro (σ_a y τ_a intercambian dichos extremos) y $T_a(a) = 0$, a estas transformaciones se les llama traslaciones puras. Si $a = 0$, se define $T_0 = I$.

Estas transformaciones tienen un efecto de traslación a lo largo del diámetro \overline{pq} , donde p y q son los extremos del diámetro euclidiano (o hiperbólico) por a .

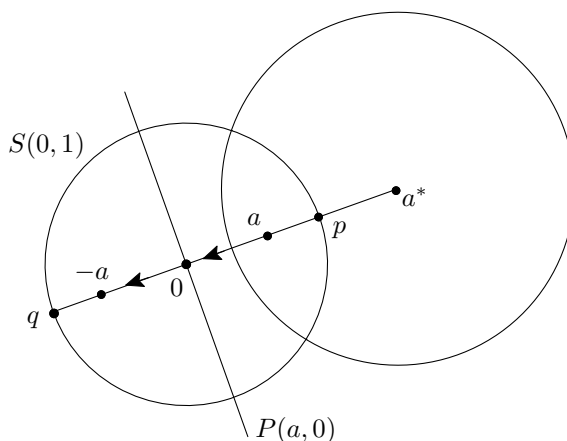


Figura 5.1: Traslaciones puras

Nótese que

$$T_a(p) = \tau_a \sigma_a(p) = \tau_a(q) = p,$$

$$T_a(q) = \tau_a \sigma_a(q) = \tau_a(p) = q,$$

$$T_a(a) = \tau_a \sigma_a(a) = \tau_a(0) = 0,$$

$$T_a(0) = \tau_a \sigma_a(0) = \tau_a(a) = -a.$$

Lema 5.0.2 (i) La transformación $\phi \mapsto \phi(0)$ de $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ sobre \mathbb{B}^{n+1} es continua.

(ii) La transformación $a \mapsto T_a$ es un homeomorfismo de \mathbb{B}^{n+1} sobre el conjunto de traslaciones puras.

DEMOSTRACIÓN. (i) Se probará primero el caso particular de continuidad en la identidad, supóngase entonces que $D(\phi_n, I) < \epsilon$. Obsérvese que todo diámetro euclidiano L de \mathbb{B}^{n+1} es transformado por ϕ_n en una geodésica $\phi_n(L)$ cuyos extremos están a una distancia menor que ϵ de los extremos respectivos de L .

Se afirma que el cilindro euclidiano C_L con eje L y radio de sección transversa ϵ contiene a la geodésica $\phi_n(L)$:

Para probar la afirmación basta checar el caso en que L es un eje canónico L_j , ya que si es válido en este caso, mediante una rotación se prueba el caso general.

En los ejes canónicos L_j , sea C_j el cilindro con radio de sección transversa ϵ . C_j es euclidianamente convexo, ya que si $x, y \in C_j$,

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n+1} y_i e_i,$$

y $p(x), p(y)$ son sus proyecciones respectivas en el plano $P(e_j, 0)$, entonces

$$|p(x)|^2 = \sum_{i \neq j} x_i^2 < \epsilon^2, \quad |p(y)|^2 = \sum_{i \neq j} y_i^2 < \epsilon^2.$$

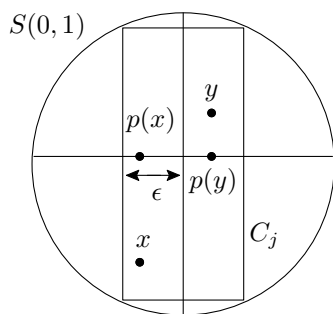


Figura 5.2: Proyecciones en el plano $P(e_j, 0)$ de puntos en C_j .

Si $|p(x)| \leq |p(y)|$ y $0 < t < 1$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} |p(tx + (1-t)y)| &= |p(tx) + p((1-t)y)| \\ &\leq |p(tx)| + |p((1-t)y)| \\ &\leq t|p(y)| + (1-t)|p(y)| \\ &= |p(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que las combinaciones convexas de puntos en C_j están en C_j , pues sus proyecciones al plano $P(e_j, 0)$ tienen norma menor a ϵ , es decir, su distancia al eje L_j es menor a ϵ , lo cual muestra la convexidad euclidiana de C_j .

Finalmente si a_1 y a_2 son los extremos de $\phi_n(L_j)$, esta geodésica está contenida en el triángulo determinado por $0, a_1, a_2$, pues $\phi_n(L_j)$ es el arco de un círculo y $\overline{a_1 a_2}$ es la cuerda que subtiende este arco, se sigue de la convexidad del círculo determinado por $\phi_n(L_j)$, que $\overline{a_1 a_2}$ está contenida en el interior de dicho círculo salvo por los puntos a_1, a_2 . Así mismo las rectas $\overline{0 a_1}, \overline{0 a_2}$ son tangentes a dicho círculo en a_1 y a_2 respectivamente (véase la Figura 5.3).

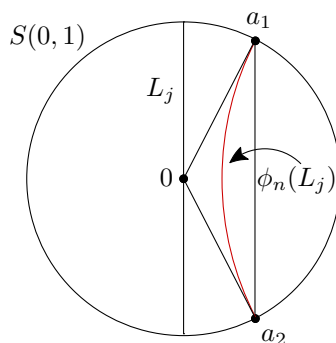


Figura 5.3: $\phi_n(L_j)$ está contenido en el triángulo determinado por $0, a_1, a_2$.

Se afirma que

$$\bigcap_L C_L = \{x \in \mathbb{B}^{n+1} : |x| < \epsilon\},$$

donde L es cualquier diámetro.

Por un lado si $x \in \mathbb{B}^{n+1}$ es tal que $|x| < \epsilon$, se sigue del teorema de Pitágoras que para todo diámetro euclidiano L de \mathbb{B}^{n+1} , $d_E(x, L) < |x| < \epsilon$, por lo que $x \in C_L$ para todo diámetro L (véase la Figura 5.4).

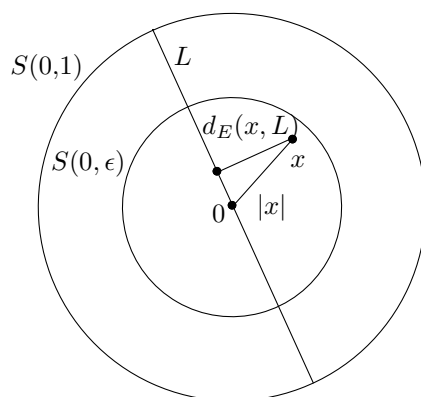


Figura 5.4: Si $|x| < \epsilon$, entonces $x \in C_L$.

Viceversa, si $x \in C_L$ para todo diámetro euclidiano L , sean L_1 el eje por x y 0 y L_2 un eje ortogonal a L_1 , entonces como $x \in C_{L_2}$ y $d_E(x, L_2) = |x|$, se tiene que $|x| < \epsilon$, por lo que $x \in \{x \in \mathbb{B}^{n+1} : |x| < \epsilon\}$ (véase la Figura 5.5).

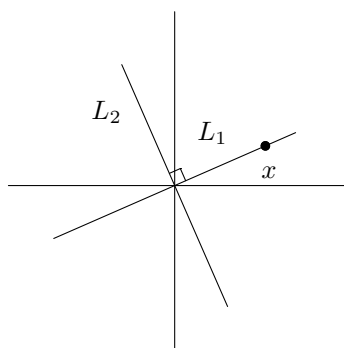


Figura 5.5: Si $x \in C_L$ para todo diámetro euclidiano, entonces $|x| < \epsilon$.

Así

$$\begin{aligned}
 \phi_n(0) &= \phi_n\left(\bigcap L\right) \\
 &\subset \bigcap \phi_n(L) \\
 &\subset \bigcap_L C_L \\
 &= \{x \in \mathbb{B}^{n+1} : |x| < \epsilon\}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\phi_n \rightarrow I$ uniformemente en \mathbb{S}^n (es decir $\phi_n \rightarrow I$ con la métrica D), entonces $\phi_n(0) \rightarrow 0$, de hecho $|\phi_n(0)| < D(\phi_n, I)$.

Para el caso general, si $\phi_n \rightarrow \phi$ uniformemente en \mathbb{S}^n , se sigue del Teorema 5.0.1 que $\phi^{-1}\phi_n \rightarrow \phi^{-1}\phi = I$ y por lo previamente demostrado, $\phi^{-1}\phi_n(0) \rightarrow 0$, por lo que $\phi_n(0) \rightarrow \phi(0)$.

Demostración de (ii) Obsérvese que en virtud del Teorema 5.0.1, la función $T_a \rightarrow T_a^{-1}$ es continua, y usando (i) se tiene que la función $T_a^{-1} \rightarrow T_a^{-1}(0) = a$ es continua, por lo que la composición de estas funciones $T_a \rightarrow a$ es continua.

Para demostrar que $a \rightarrow T_a$ es continua, se demostrará que $a_k \rightarrow a$ implica $T_{a_k} \rightarrow T_a$, y para ello bastará demostrar que $\sigma_{a_k} \rightarrow \sigma_a$ y $\tau_{a_k} \rightarrow \tau_a$ puesto que $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ es un subgrupo del grupo topológico $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$, por lo que la función $(\phi, \psi) \rightarrow \phi\psi$ es continua, en este caso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{a_k} \sigma_{a_k} = \tau_a \sigma_a = T_a.$$

Supongamos entonces que $a_k \rightarrow a$, con $a \neq 0$, y sean $b_k = a_k^*$ y $b = a^*$. Obsérvese que $b_k \rightarrow b$ puesto que $a \neq 0$ y si σ_{a_k} y σ_a son las reflexiones en $S(a_k, r_k)$ y $S(a, r)$ respectivamente, entonces $r_k \rightarrow r$.

Para demostrar que $\sigma_{a_k} \rightarrow \sigma_a$, hay que probar que dada $\epsilon > 0$, existe N en los naturales tal que para todo $x \in \mathbb{S}^n$, si $k > N$

$$|\sigma_{a_k}(x) - \sigma_a(x)| < \epsilon,$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{a_k}(x) &= b_k + r_k^2(x - b_k)^* \quad y \\ \sigma_a(x) &= b + r^2(x - b)^*, \end{aligned}$$

es decir, hay que probar que

$$|b_k + r_k^2(x - b_k)^* - b - r^2(x - b)^*| < \epsilon.$$

Dado que $|b_k - b| \rightarrow 0$, basta probar que $|r_k^2(x - b_k)^* - r^2(x - b)^*| \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{S}^n . Ahora

$$\begin{aligned} |r_k^2(x - b_k)^* - r^2(x - b)^*| &= \left| r_k^2 \frac{(x - b_k)}{|x - b_k|^2} - r^2 \frac{(x - b)}{|x - b|^2} \right| \\ &= \left| \frac{r_k^2(x - b_k)|x - b|^2 - r^2(x - b)|x - b_k|^2}{|x - b_k|^2|x - b|^2} \right|. \end{aligned}$$

Nótese que existe una bola $B(b, \delta)$ de radio δ y centro en b ajena a \mathbb{B}^{n+1} , de modo que a partir de cierto k , $b_k \in \overline{B(b, \delta)}$. Se sigue de la compacidad de dicha bola y la de \mathbb{B}^{n+1} que la expresión $|x - b_k|^2|x - b|^2$ está acotada inferiormente (existen puntos en \mathbb{B}^{n+1} y $\overline{B(b, \delta)}$ que minimizan la distancia entre estos dos conjuntos), por lo que basta probar que

$$|r_k^2(x - b_k)|x - b|^2 - r^2(x - b)|x - b_k|^2|$$

converge uniformemente a 0 en \mathbb{S}^n . Usando la desigualdad del triángulo y que $|x| = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} & |r_k^2(x - b_k)|x - b|^2 - r^2(x - b)|x - b_k|^2| \\ &= |(r_k^2|x - b|^2 - r^2|x - b_k|^2)x - (r_k^2|x - b|^2)b_k + (r^2|x - b_k|^2)b| \\ &\leq |r_k^2|x - b|^2 - r^2|x - b_k|^2| + |r^2|x - b_k|^2b - r_k^2|x - b|^2b_k|. \end{aligned}$$

Se afirma que

$$\begin{aligned} & |r_k^2|x - b|^2 - r^2|x - b_k|^2| \quad y \\ & |r^2|x - b_k|^2b - r_k^2|x - b|^2b_k| \end{aligned} \tag{5.3}$$

convergen uniformemente a cero. Para el primer sumando en (5.3) se tiene que

$$\begin{aligned} & |r_k^2|x - b|^2 - r^2|x - b_k|^2| \\ &= |r_k^2|x - b|^2 - r^2|x - b|^2 + r^2|x - b|^2 - r^2|x - b_k|^2| \\ &\leq |r_k^2 - r^2| |x - b|^2 + r^2 ||x - b|^2 - |x - b_k|^2|. \end{aligned}$$

Por la compacidad de \mathbb{S}^n $|x - b|^2$ está acotado, por lo que $|r_k^2 - r^2| |x - b|^2$ converge uniformemente a cero (la convergencia no depende de x). Basta entonces probar que $||x - b|^2 - |x - b_k|^2|$ converge uniformemente a cero en \mathbb{S}^n y para ello usaremos que $(v + w) \cdot (v - w) = |v|^2 - |w|^2$.

$$\begin{aligned} ||x - b|^2 - |x - b_k|^2| &= |[(x - b) + (x - b_k)] \cdot [(x - b) - (x - b_k)]| \\ &= |(2x - b - b_k) \cdot (b_k - b)| \\ &= |(2x) \cdot (b_k - b) - (b + b_k) \cdot (b_k - b)| \\ &\leq |(2x) \cdot (b_k - b)| + |(b + b_k) \cdot (b_k - b)| \\ &\leq 2|b_k - b| + |b + b_k||b_k - b|. \end{aligned}$$

El último paso es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ya que $|b + b_k|$ está acotado, se tiene que los últimos dos sumandos en la desigualdad anterior convergen uniformemente a cero en \mathbb{S}^n (la convergencia no depende de x), por lo que se tiene el resultado deseado.

Para el segundo sumando en (5.3), basta renombrar $r^2b = c$ y $r_k^2b_k = c_k$ para obtener que

$$|r^2|x - b_k|^2b - r_k^2|x - b|^2b_k| = |c|x - b_k|^2 - c_k|x - b|^2|$$

que es de la forma del primer sumando, por lo cual converge uniformemente a cero en \mathbb{S}^n , con lo cual se concluye que $\sigma_{a_k} \rightarrow \sigma_a$.

Para demostrar que $\tau_{a_k} \rightarrow \tau_a$, hay que probar que dado $\epsilon > 0$, existe N en los naturales tal que para todo $x \in \mathbb{S}^n$, si $k > N$

$$|\tau_{a_k}(x) - \tau_a(x)| < \epsilon,$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_{a_k}(x) &= x - 2(x \cdot a_k)b_k \quad y \\ \tau_a(x) &= x - 2(x \cdot a)b,\end{aligned}$$

es decir, hay que probar que

$$|2(x \cdot a_k)b_k - 2(x \cdot a)b| < \epsilon,$$

por lo que basta demostrar que $|(x \cdot a_k)b_k - (x \cdot a)b| \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{S}^n . Ahora

$$\begin{aligned}|(x \cdot a_k)b_k - (x \cdot a)b| &= |(x \cdot a_k)b_k - (x \cdot a)b_k + (x \cdot a)b_k - (x \cdot a)b| \\ &\leq |(x \cdot a_k)b_k - (x \cdot a)b_k| + |(x \cdot a)b_k - (x \cdot a)b| \\ &= |(x \cdot a_k) - (x \cdot a)||b_k| + |x \cdot a||b_k - b| \\ &\leq |x \cdot (a_k - a)||b_k| + |a||b_k - b| \\ &\leq |a_k - a||b_k| + |a||b_k - b|.\end{aligned}$$

Los últimos pasos son consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ya que la sucesión b_k es acotada y $|a_k - a|$, $|b_k - b|$ convergen uniformemente a cero en \mathbb{S}^n , se tiene el resultado.

Finalmente hay que considerar el caso en que $a_k \rightarrow 0$, en este caso hay que demostrar que $T_{a_k} \rightarrow T_0 = I$. Para cada k denotamos a la rotación

que manda e_1 en $a_k/|a_k|$ por R_k . Usando (5.1) y el hecho de que R_k^{-1} es isometría euclidiana, tenemos que

$$\begin{aligned}
D(R_k^{-1}T_{a_k}R_k, I) &= D(R_k^{-1}T_{a_k}, R_k^{-1}) \\
&= \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |R_k^{-1}T_{a_k}x - R_k^{-1}x| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |T_{a_k}x - x| \\
&= D(T_{a_k}, I).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por otro lado $R_k^{-1}T_{a_k}R_k = R_k^{-1}\tau_{a_k}R_kR_k^{-1}\sigma_{a_k}R_k$. Nótese que σ_{a_k} preserva $S(a_k^*, r_k)$, por lo que $R_k^{-1}\sigma_{a_k}R_k$ preserva $S((|a_k|e_1)^*, r_k)$ y por lo tanto $R_k^{-1}\sigma_{a_k}R_k = \sigma_{|a_k|e_1}$. Análogamente $R_k^{-1}\tau_{a_k}R_k = \tau_{|a_k|e_1}$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
\sigma_{|a_k|e_1}(x) &= (|a_k|e_1)^* + r_k^2(x - (|a_k|e_1)^*)^* \\
&= e_1/|a_k| + (1/|a_k|^2 - 1) \frac{x - e_1/|a_k|}{|x - e_1/|a_k||^2} \\
&= e_1/|a_k| + (1/|a_k|^2 - 1) \frac{x - e_1/|a_k|}{|x|^2 - 2x_1/|a_k| + 1/|a_k|^2} \\
&= e_1/|a_k| + \frac{(1 - |a_k|^2)(x - e_1/|a_k|)}{|a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1 + 1} \\
&= \frac{[|a_k|(1 - |a_k|^2)x] + [(|a_k|^2 - 1) + |a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1 + 1]e_1}{|a_k|(|a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1 + 1)} \\
&= \frac{[|a_k|(1 - |a_k|^2)x] + [|a_k|^2 + |a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1]e_1}{|a_k|(|a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1 + 1)} \\
&= \frac{[1 - |a_k|^2]x + [|a_k| + |a_k||x|^2 - 2x_1]e_1}{|a_k|^2|x|^2 - |a_k|2x_1 + 1},
\end{aligned}$$

y ya que $|a_k| \rightarrow 0$, se tiene que

$$\sigma_{|a_k|e_1}(x) \rightarrow x - 2x_1e_1 = x - 2(x \cdot e_1)e_1,$$

es decir $\sigma_{|a_k|e_1}$ converge a la reflexión en el plano $P(e_1, 0)$. Así mismo

$$\begin{aligned}\tau_{|a_k|e_1} &= x - 2(x \cdot (|a_k|e_1))(|a_k|e_1)^* \\ &= x - 2|a_k|(x \cdot e_1)e_1/|a_k| \\ &= x - 2(x \cdot e_1)e_1,\end{aligned}$$

por lo que $\tau_{|a_k|e_1}$ es la reflexión en el plano $P(e_1, 0)$ para todo k y al ser esta reflexión una involución, se tiene que $\tau_{|a_k|e_1}\sigma_{|a_k|e_1} \rightarrow I$, es decir $R_k^{-1}T_{a_k}R_k \rightarrow I$, por lo cual $D(R_k^{-1}T_{a_k}R_k, I) \rightarrow 0$ y en virtud de (5.4) $D(T_{a_k}, I) \rightarrow 0$ y por lo tanto $T_{a_k} \rightarrow I$. □

Nótese que a lo largo de la demostración de este lema se usó la siguiente propiedad de continuidad en espacios métricos: f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en el dominio de f tal que $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Recordemos de la forma general de las transformaciones de Möbius que cada elemento ϕ de $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ se puede expresar de manera única como

$$\phi(x) = A(\sigma_a x),$$

donde $a = \phi^{-1}(0)$, A es una matriz ortogonal y σ_a es la reflexión en la esfera con centro en a^* que es ortogonal a \mathbb{S}^n , obsérvese que dicha esfera es la esfera isométrica de ϕ . Nótese que esta expresión de ϕ es única, pues a está determinada unívocamente y A determina una isometría euclidiana única. Se afirma que ϕ se puede expresar también unívocamente como

$$\phi(x) = A_\phi(T_a x), \tag{5.5}$$

donde A_ϕ es la matriz ortogonal determinada por τ_a (la reflexión en el plano $P(a, 0)$, la cual es una isometría euclidiana) seguida de A . Esto se cumple ya que

$$A_\phi(T_a x) = (A\tau_a)(\tau_a \sigma_a x) = A(\sigma_a x).$$

Para verificar la unicidad de (5.5), observamos que si $\phi(x) = B(T_b x)$ entonces $b = \phi^{-1}(0) = a$, por lo tanto $\phi(x) = B(T_a x)$, finalmente

$$\begin{aligned}B &= \phi \sigma_a \tau_a \\ &= A \tau_a \\ &= A_\phi.\end{aligned}$$

La descripción (5.5) establece una biyección natural entre $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ y $O(n+1) \times \mathbb{B}^{n+1}$ dada por la función

$$\phi \mapsto (A_\phi, a),$$

la cual está bien definida gracias a la unicidad de dicha descripción. Nótese que la inversa de esta función está dada por

$$(B, b) \mapsto B(T_b),$$

y en virtud de la unicidad de (5.5), si

$$(B, b) \mapsto \phi,$$

$b = a$ y $B = A_\phi$.

Ahora, por un lado tenemos que el grupo $O(n+1)$ de matrices ortogonales tiene una métrica natural: si $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, entonces

$$|A - B| = \left[\sum_{i,j} (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \right]^{1/2}.$$

Por otro lado $O(n+1)$ visto como subgrupo de $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ tiene una métrica inducida por la métrica del supremo. Estas dos métricas definen la misma topología, para verificar esto observemos primero que si $M \subset \mathbb{R}^+$ está acotado superiormente, entonces

$$\sup_{m \in M} m^2 = \left[\sup_{m \in M} m \right]^2.$$

Por lo que, si $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ y $C = A - B$

$$\begin{aligned} D(A, B)^2 &= \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |Ax - Bx|^2 \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |Cx|^2 \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}^n} \sum_{i=1}^{n+1} (x_1 c_{i,1} + \dots + x_{n+1} c_{i,n+1})^2 \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{S}^n} \sum_{i=1}^{n+1} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{i,j}^2 \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{i,j}^2 \right) \right] \\ &= |A - B|^2. \end{aligned}$$

Los últimos pasos son consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de que $x \in \mathbb{S}^n$, por lo que

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1.$$

Por otro lado, nótese que

$$|(A - B)e_j|^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |Ax - Bx|^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |A - B|^2 &= \sum_{j=1}^{n+1} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} c_{i,j}^2 \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} |Ce_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} |(A - B)e_j|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{n+1} \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |Ax - Bx|^2 \\ &= (n + 1)D(A, B)^2. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$D(A, B)^2 \leq |A - B|^2 \leq (n + 1)D(A, B)^2,$$

de donde se sigue que ambas métricas definen la misma topología. Entonces $O(n + 1) \times \mathbb{B}^{n+1}$ hereda naturalmente la topología producto y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.0.3 *La biyección entre $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ y $O(n + 1) \times \mathbb{B}^{n+1}$ dada por $\phi \mapsto (A_\phi, a)$ es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, del Lema 5.0.2 se tiene que $a \mapsto T_a$ es continua, por lo que $(A_\phi, a) \mapsto (A_\phi, T_a)$ es continua, y por ser $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ grupo topológico $(A_\phi, T_a) \mapsto A_\phi T_a = \phi$ es continua. En consecuencia $(A_\phi, a) \mapsto \phi$ es continua.

Por otro lado, usando una vez más las propiedades de grupo topológico $\phi \mapsto \phi^{-1}$ es continua y por el Lema 5.0.2 se tiene que $\phi^{-1} \mapsto \phi^{-1}(0) = a$ es continua, por lo que $\phi \mapsto a$ es continua. Por las mismas razones respectivamente $T_a \mapsto T_a^{-1}$ y $a \mapsto T_a$ son continuas, por lo que $\phi \mapsto (\phi, T_a^{-1})$ lo es. Finalmente $(\phi, T_a^{-1}) \mapsto \phi T_a^{-1} = A_\phi$ es continua y por lo tanto la función $\phi \mapsto A_\phi$ también lo es. □

Esto muestra que la topología en $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ inducida por la biyección con $O(n+1) \times \mathbb{B}^{n+1}$ coincide con la topología inducida por la métrica del supremo y dado que $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ se identificó mediante una isometría con $GM(\mathbb{B}^{n+1})$, este resultado nos da una nueva construcción para la topología en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ inducida por la métrica del supremo.

Teorema 5.0.4 *Una familia \mathcal{F} de transformaciones de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, es normal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ si y sólo si*

$$\sup_{\phi \in \mathcal{F}} \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}) < \infty,$$

DEMOSTRACIÓN. Por un lado sea

$$C = \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}),$$

y supongamos que $C < \infty$. Como consecuencia del Teorema 4.0.1, se tiene que para toda ϕ en \mathcal{F} y para todo x, y en $\widehat{\mathbb{R}}^n$

$$\frac{d_C(\phi x, \phi y)}{d_C(x, y)} \leq \exp \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}) \leq e^C,$$

de donde es claro que \mathcal{F} cumple una condición uniforme de Lipschitz en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, por lo que \mathcal{F} es equicontinua en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Finalmente se sigue de la Proposición 4.0.3 que \mathcal{F} es normal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Ahora supongamos para llegar a una contradicción que \mathcal{F} es normal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y

$$\sup_{\phi \in \mathcal{F}} \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}) = \infty.$$

Entonces existe una sucesión ϕ_1, ϕ_2, \dots en \mathcal{F} tal que

$$\rho(e_{n+1}, \widehat{\phi}_k e_{n+1}) \rightarrow \infty,$$

y ya que \mathcal{F} es normal, existe una subsucesión h_1, h_2, \dots de ϕ_1, ϕ_2, \dots tal que $h_k \rightarrow h$ uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Nótese que h no puede ser constante, ya que si $h(x) = \alpha$ para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, existiría un natural N tal que si $k > N$, $d_C(h_k(y), \alpha) < \epsilon$ para todo $y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, y se tendría entonces que $h_k(\widehat{\mathbb{R}}^n) \subset B(\alpha, \epsilon)$, por lo que h_k no sería biyectiva. El mismo argumento prueba que $h(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ no es un conjunto finito. Se sigue entonces del Corolario 4.0.6 que h es de Möbius. Por otro lado, ya que h_1, h_2, \dots es subsucesión de ϕ_1, ϕ_2, \dots , se tiene que

$$\rho(e_{n+1}, \widehat{h}_k e_{n+1}) \rightarrow \infty.$$

Obsérvese que si $g_k = f\widehat{h}_k f^{-1}$, y $g = f\widehat{h} f^{-1}$ donde f es como en (5.2), es decir, f es la transformación que conjuga $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ con $GM(\mathbb{B}^{n+1})$, entonces $g_k \rightarrow g$, donde la convergencia en \mathbb{S}^n es uniforme. Esto se verifica de manera análoga a las observaciones que aparecen después del Teorema 5.0.1. Además se tiene que

$$\rho(e_{n+1}, \widehat{h}_k e_{n+1}) = \rho(0, g_k 0),$$

por lo que

$$\rho(0, g_k 0) \rightarrow \infty.$$

Finalmente, se sigue del Lema 5.0.2 que $g_k(0) \rightarrow g(0)$, y usando que toda función distancia es continua se tiene que $\rho(0, g_k 0) \rightarrow \rho(0, g 0)$, por lo que $\rho(0, g 0) = \infty$, lo cual es imposible, por lo que se concluye que necesariamente

$$\sup_{\phi \in \mathcal{F}} \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi} e_{n+1}) < \infty.$$

□

Obsérvese que si dos transformaciones de Möbius son iguales en un abierto de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces son la misma transformación en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Esto se sigue ya que si $\phi, \psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ coinciden en el abierto D en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, es decir $\phi|_D = \psi|_D$, por lo que $\phi\psi^{-1}|_D = I|_D$. Ya que D es abierto, podemos tomar una esfera $\Sigma = S(a, r)$ contenida en D , por lo cual $\phi\psi^{-1}$ fija los puntos de Σ y en virtud del Teorema 1.0.7 $\phi\psi^{-1}$ es la reflexión en Σ o es la identidad, y dado que $\phi\psi^{-1}(a) = a$ ($a \in D$), se tiene que $\phi\psi^{-1} = I$, y por lo tanto $\phi = \psi$.

Teorema 5.0.5 *Sea ϕ_1, ϕ_2, \dots una sucesión en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ que converge uniformemente a la identidad en un abierto de $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces ϕ_1, ϕ_2, \dots converge uniformemente a la identidad en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos ϕ_1, ϕ_2, \dots una sucesión en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ que converge uniformemente a la identidad en el abierto D en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Probaremos primero que $\mathcal{F} = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ es una familia normal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Para ello, sea f_1, f_2, \dots una sucesión en \mathcal{F} , entonces existe una subsucesión f_{n_1}, f_{n_2}, \dots de f_1, f_2, \dots , que también es subsucesión de ϕ_1, ϕ_2, \dots , por lo que dicha subsucesión converge uniformemente a la identidad en el abierto D . Dado que $f_{n_k}x \rightarrow x$ para todo $x \in D$, se sigue del Teorema 4.0.5 que existe una subsucesión de f_{n_1}, f_{n_2}, \dots que converge uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ a una transformación de Möbius f . Obsérvese que dicha subsucesión tiene que converger a la identidad en D por ser subsucesión de ϕ_1, ϕ_2, \dots , por lo que f es igual a la identidad en D , se concluye de la observación previa al teorema que $f = I$.

Ahora veamos que ϕ_1, ϕ_2, \dots converge puntualmente a la identidad. Supongamos para llegar a contradicción que $\phi_n x \not\rightarrow x$ para algún $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces existe una subsucesión $\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots$ y un $\epsilon > 0$ tal que $d_C(\phi_{n_k}x, x) \geq \epsilon$. Ya que \mathcal{F} es normal, existe una subsucesión de $\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots$ que converge uniformemente en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ a una transformación de Möbius. De manera análoga al párrafo anterior, se concluye que dicha transformación de Möbius es la identidad, lo cual contradice que $d_C(\phi_{n_k}x, x) \geq \epsilon$, por lo que $\phi_n x \rightarrow x$ para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.

Por último, se demuestra que ϕ_1, ϕ_2, \dots converge uniformemente a la identidad en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, y ya que la sucesión converge uniformemente a la identidad en D , basta probar que la convergencia es uniforme en $\widehat{\mathbb{R}}^n - D$. Sea $\epsilon > 0$, hay que demostrar entonces que existe un natural N tal que $d_C(\phi_k x, x) < \epsilon$ si $k > N$ para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D$. En virtud del Teorema 5.0.4, se tiene que

$$C = \sup_{\phi_k \in \mathcal{F}} \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi}_k e_{n+1}) < \infty,$$

y usando el Teorema 4.0.1, tenemos que para todo $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$

$$\begin{aligned} d_C(\phi_k x, \phi_k y) &\leq \exp \rho(e_{n+1}, \widehat{\phi}_k e_{n+1}) d_C(x, y) \\ &\leq \exp(C) d_C(x, y). \end{aligned}$$

Si $M = \max\{\exp(C), 1\}$, se tiene que para todo $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$

$$\begin{aligned} d_C(\phi_k x, \phi_k y) &\leq M d_C(x, y) \quad y \\ d_C(x, y) &\leq M d_C(x, y), \end{aligned}$$

por lo que si $d_C(x, y) < \delta = \epsilon/3M$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_C(\phi_k x, \phi_k y) &< \epsilon/3 \quad \text{y} \\ d_C(x, y) &< \epsilon/3. \end{aligned}$$

Por ser $\widehat{\mathbb{R}}^n - D$ compacto, existen $x_1, \dots, x_p \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D$ tales que

$$\widehat{\mathbb{R}}^n - D \subset \bigcup_{i=1}^p B_C(x_i, \delta),$$

y usando la convergencia puntual de ϕ_1, ϕ_2, \dots , para cada $i = 1, \dots, p$, existe un natural N_i tal que $d_C(\phi_k x_i, x_i) < \epsilon/3$ si $k > N_i$, por lo que tomando $N = \max\{N_1, \dots, N_p\}$, $d_C(\phi_k x_i, x_i) < \epsilon/3$ si $k > N$ para todo $i = 1, \dots, p$. Finalmente si $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D$, $x \in B_C(x_i, \delta)$ para alguna i , donde $1 \leq i \leq p$, y usando 2 veces la desigualdad del triángulo se tiene que

$$d_C(\phi_k x, x) \leq d_C(\phi_k x, \phi_k x_i) + d_C(\phi_k x_i, x_i) + d_C(x, x_i),$$

y dado que $d_C(x, x_i) < \delta$, al tomar $k > N$, se tiene que para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n - D$

$$d_C(\phi_k x, x) < \epsilon.$$

□

Para dar la última estructura topológica, es necesario introducir el modelo del hiperboloide

Definición 18 *El modelo del hiperboloide está definido por*

$$Q = \{x \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} : q(x, x) = 1, x_0 > 0\},$$

donde $q(x, y)$ es la forma cuadrática dada por

$$q(x, y) = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n).$$

Obsérvese que Q es uno de los mantos de un hiperboloide de dos mantos (véase la Figura 5.6), y si $x \in Q$ entonces

$$x_0^2 = 1 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

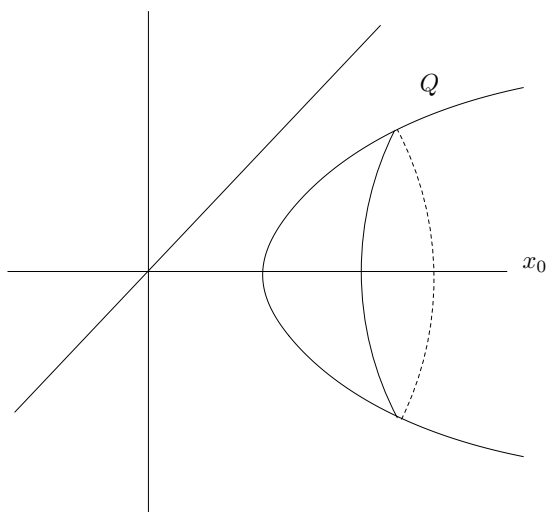


Figura 5.6: Modelo del hiperboloide.

Para definir una métrica en Q , consideremos primero una curva C^∞ en Q dada por $\gamma : [a, b] \rightarrow Q$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$. Entonces para todo $t \in [a, b]$

$$\gamma_0(t)^2 = 1 + \gamma_1(t)^2 + \dots + \gamma_n(t)^2, \quad (5.6)$$

por lo que al derivar se obtiene que

$$\gamma_0(t) \gamma_0'(t) = \gamma_1(t) \gamma_1'(t) + \dots + \gamma_n(t) \gamma_n'(t). \quad (5.7)$$

Utilizando (5.7), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (5.6) respectiva-

mente, se tiene que

$$\begin{aligned}
 q(\gamma', \gamma) &= \left(\frac{\gamma_1 \gamma_1' + \dots + \gamma_n \gamma_n'}{\gamma_0} \right)^2 - (\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2) \\
 &\leq \frac{(\gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2)(\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2)}{\gamma_0^2} - (\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2) \\
 &= \frac{(\gamma_0^2 - 1)(\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2)}{\gamma_0^2} - (\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2) \\
 &= \frac{-(\gamma_1'^2 + \dots + \gamma_n'^2)}{\gamma_0^2} \leq 0.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la igualdad se obtiene solamente cuando $\gamma_1' = \dots = \gamma_n' = 0$, en cuyo caso también $\gamma_0' = 0$. Se sigue entonces que puede definirse una métrica Riemanniana en Q de la siguiente manera: si v, w están en TQ_x , el plano tangente al hiperboloide en x , entonces

$$\langle v, w \rangle = [(v_1 w_1 + \dots + v_n w_n) - v_0 w_0]^{1/2},$$

donde $v = (v_0, \dots, v_n)$ y $w = (w_0, \dots, w_n)$. Esta métrica Riemanniana puede expresarse en términos del elemento de línea

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_0^2, \quad (5.8)$$

la distancia entre 2 puntos en Q es el ínfimo de

$$\int [-q(\gamma', \gamma)]^{1/2} dt \quad (5.9)$$

sobre todas las curvas que unen ambos puntos entre sí.

Teorema 5.0.6 *La función $F : Q \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por*

$$F(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right) \quad (5.10)$$

es un difeomorfismo C^∞ .

La demostración de este teorema se puede consultar en [2] y con más detalle en [3]. La idea es verificar primero que F es inyectiva, luego se calcula la inversa izquierda y se checa que hay una biyección entre Q y \mathbb{B}^n .

Teorema 5.0.7 *La función $F : Q \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por (5.10) es una isometría.*

La demostración de este teorema también se puede consultar en [2], aunque esta prueba no es muy formal. Una prueba rigurosa se puede consultar en [3]. La idea es demostrar primero que F preserva la longitud hiperbólica de curvas de clase C^1 . Posteriormente, se utiliza el método del “pull back” aplicado a la función F , y a la 1-forma

$$ds^2 = \frac{4dx^2}{(1 - |x|^2)^2}.$$

Calculando el jacobiano y analizando los “pull back” de las formas canónicas se obtiene (5.8).

Definición 19 *Sea $O(1, n)$ el conjunto de matrices de $(n + 1) \times (n + 1)$ cuya acción por la derecha en \mathbb{R}^{n+1} es invariante bajo la forma cuadrática*

$$q(x, x) = x_0^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

es decir si $A \in O(1, n)$, entonces $q(xA, xA) = q(x, x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Usando el hecho de que $AJA^t = J$, donde

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & -I_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

se sigue fácilmente que $O(1, n)$ es un grupo (cf. [2] y [3]), pues la inversa de un elemento $A \in O^+(1, n)$ está dada por $A^{-1} = (JAJ)^t$.

Teorema 5.0.8 *El grupo de isometrías del hiperboloide Q consiste de las transformaciones determinadas por el grupo $O(1, n)$ que no intercambian los mantos del hiperboloide $q(x, x) = 1$.*

La demostración de este teorema se encuentra en [2] y con más detalle en [3]. En [3] se puede verificar que el enunciado en [2] no es correcto, sin embargo la demostración funciona para este enunciado (Teorema 5.0.8). La idea es verificar por un lado que para toda curva de clase C^1 , el subgrupo de $O(1, n)$ que no intercambia los mantos del hiperboloide $q(x, x) = 1$ deja invariante la expresión $-q(\gamma', \gamma')$, y en virtud de (5.9), dicho grupo está contenido en el grupo de isometrías. Para la otra contención, se utiliza que los grupos de isometrías del hiperboloide y de la bola son conjugados bajo F . Se muestra que los elementos de $GM(\mathbb{B}^n)$ son de la forma $F\psi F^{-1}$, donde

$$\psi(x) = xA, \quad (5.12)$$

$A \in O(1, n)$ y $\psi(Q) = Q$. Más aún, para este paso de la demostración se prueban dos casos para los elementos $\phi \in GM(\mathbb{B}^n)$: si $\phi(x) = xT$, donde $T \in O(n)$, entonces la matriz A que determina la función ψ como en (5.12) está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

El segundo caso de la demostración es cuando ϕ es la reflexión en la esfera $S(a, r)$ ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} . Para este caso, se conjuga con una transformación ortogonal que manda el centro de la esfera a , a un punto a' sobre el eje canónico e_1 , por lo que la matriz A que determina la función ψ como en (5.12) está dada por $A = R^{-1}PR$, donde

$$P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & 0 & \dots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la reflexión en $S(a', r)$, $t \in (0, \infty)$, $r^2 = 1/\sinh^2 t$ y R es una matriz ortogonal como en el primer caso. Finalmente, el resultado se sigue del hecho de que todo elemento en $GM(\mathbb{B}^n)$ se puede expresar como la composición de la reflexión en la esfera isométrica, seguida de una matriz ortogonal.

Definición 20 Se define $O^+(1, n)$, como el conjunto de matrices $A \in O(1, n)$, tales que $a_{00} > 0$.

Se verifica que $O^+(1, n)$ es un subgrupo de $O(1, n)$ (cf. [2] o con más detalle [3]). Más aún, $O^+(1, n)$ resulta ser un grupo topológico con la métrica natural

$$|A - B| = \left[\sum_{i,j} (a_{i,j} - b_{i,j})^2 \right]^{1/2}.$$

No es difícil verificar que la función producto $(A, B) \rightarrow AB$ es una función continua, y ya que la inversa de un elemento $A \in O^+(1, n)$ está dada por $A^{-1} = (JAJ)^t$, donde J es como en (5.11), resulta que $A \rightarrow A^{-1}$ también es continua.

Teorema 5.0.9 $O^+(1, n)$ es el grupo de isometrías del hiperboloide Q . A este grupo también se le conoce como el grupo de Lorentz.

La demostración de este teorema se encuentra también en [3]. La idea es usar un argumento de conexidad para ver que $O^+(1, n)$ está contenido en el grupo de isometrías del hiperboloide Q . Para la otra contención se usa que el grupo de isometrías del hiperboloide Q está generado por elementos de $O^+(1, n)$.

Finalmente para dar la tercer estructura topológica a $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, usaremos el hecho de que $O^+(1, n)$ es un grupo topológico, lo cual nos permite verificar la continuidad de una función en un único elemento de $O^+(1, n)$. Así mismo es necesario hacer unas observaciones previas. Si (X, d) , (Y, d') y (Z, d'') son espacios métricos, $A \subset X$ y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A , donde $f_n, f : X \rightarrow Y$, se tiene que

- i) Si $g : Z \rightarrow A$, entonces $f_n g \rightarrow fg$ uniformemente en Z .
- ii) Si $h : Y \rightarrow Z$ es uniformemente continua, entonces $hf_n \rightarrow hf$ uniformemente en A .

Verificar estas afirmaciones es sencillo:

- i) Ya que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A , para todo $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que si $n > N$, para todo $x \in A$

$$d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon,$$

en particular para todo $z \in Z$, $g(z) \in A$, por lo que para todo $z \in Z$

$$d'(f_n g(z), fg(z)) < \epsilon.$$

ii) Ya que $h : Y \rightarrow Z$ es uniformemente continua para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d''(h(x), h(y)) < \epsilon$ si $d'(x, y) < \delta$, y dado que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en A , para este δ existe un natural N tal que si $n > N$, para todo $x \in A$

$$d'(f_n(x), f(x)) < \delta,$$

y por lo tanto para todo $x \in A$

$$d''(hf_n(x), hf(x)) < \epsilon.$$

Teorema 5.0.10 *La topología inducida por $O^+(1, n)$ en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ es la misma que la topología de la convergencia uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que la función $A \rightarrow F\psi_A F^{-1}$ de $O^+(1, n)$ en $GM(\mathbb{B}^n)$ es un homeomorfismo, donde $\psi_A(x) = xA$. Ya que dicha función es entre espacios métricos, basta probar convergencia en sucesiones.

Primero, si $A_m \rightarrow A$, donde $A_m, A \in O^+(1, n)$, hay que demostrar que $F\psi_{A_m} F^{-1} \rightarrow F\psi_A F^{-1}$ uniformemente en \mathbb{S}^{n-1} . Para ello, consideremos un disco abierto D en \mathbb{H}^n , F la isometría entre Q y \mathbb{B}^n definida en (5.10) y $f \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ la función que conjuga $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n-1})$ y $GM(\mathbb{B}^n)$ (f manda $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ en \mathbb{S}^{n-1} y \mathbb{H}^n en \mathbb{B}^n). Nótese que \overline{D} es compacto en \mathbb{H}^n , y por lo tanto $K = F^{-1}f(\overline{D})$ es compacto en el hiperboloide Q , por lo que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in K$.

Sean $B_m = A_m - A$ y $b_o^m, b_1^m, \dots, b_n^m$ los vectores columna de estas matrices. Dado que $A_m \rightarrow A$, se tiene que $B_m \rightarrow \overline{0}$, la matriz idénticamente cero. Así mismo para todo $x \in K$, se tiene que

$$\begin{aligned} |xA_m - xA|^2 &= |xB_m|^2 \\ &= |\langle x, b_o^m \rangle, \langle x, b_1^m \rangle, \dots, \langle x, b_n^m \rangle|^2 \\ &= \langle x, b_o^m \rangle^2 + \langle x, b_1^m \rangle^2 + \dots + \langle x, b_n^m \rangle^2 \\ &\leq |x|^2 |b_o^m|^2 + |x|^2 |b_1^m|^2 + \dots + |x|^2 |b_n^m|^2 \\ &\leq M(|b_o^m|^2 + |b_1^m|^2 + \dots + |b_n^m|^2), \end{aligned}$$

y ya que $B_m \rightarrow \bar{0}$, se tiene que $|b_o^m|^2 + |b_1^m|^2 + \dots + |b_n^m|^2 \rightarrow 0$, por lo que $xA_m \rightarrow xA$ uniformemente en K , es decir $\psi_{A_m} \rightarrow \psi_A$ uniformemente en K . Dado que $f^{-1}F$ es uniformemente continua en compactos, se sigue de las observaciones previas a este teorema que $f^{-1}F\psi_{A_m}F^{-1}f \rightarrow f^{-1}F\psi_AF^{-1}f$ uniformemente en \bar{D} , en particular, lo hace en el abierto D . Se sigue del Teorema 5.0.5 que $f^{-1}F\psi_{A_m}F^{-1}f \rightarrow f^{-1}F\psi_AF^{-1}f$ en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, en particular lo hace en $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ y por lo tanto $F\psi_{A_m}F^{-1} \rightarrow F\psi_AF^{-1}$ en \mathbb{S}^{n-1} .

Viceversa, si $\phi_m \rightarrow \phi$ en $GM(\mathbb{B}^n)$ (la convergencia es uniforme en \mathbb{S}^{n-1}), hay que demostrar que $F^{-1}\phi_mF \rightarrow F^{-1}\phi F$ en $O^+(1, n)$. Supóngase que $\phi = A\sigma_a$ y $\phi_m = A_m\sigma_{a_m}$, donde $a = \phi^{-1}(0)$, $a_m = \phi_m^{-1}(0)$, σ_a, σ_{a_m} son las reflexiones en las esferas isométricas de ϕ y ϕ_m respectivamente y A, A_m están en $O(n)$.

Ya que $GM(\mathbb{B}^n)$ y $O^+(1, n)$ son grupos topológicos, basta demostrar el caso en que $\phi(0) \neq 0$ ($a \neq 0$), puesto que si $\phi_m \rightarrow \phi$ y $\phi(0) = 0$, componemos a cada ϕ_m y a ϕ con $\psi \in GM(\mathbb{B}^n)$ de modo que $\psi\phi(0) \neq 0$. Utilizando primero que $GM(\mathbb{B}^n)$ es grupo topológico, se tiene que $\psi\phi_m \rightarrow \psi\phi$, y en virtud de lo que se demostrará, tenemos que $F^{-1}\psi\phi_mF \rightarrow F^{-1}\psi\phi F$. Ahora bien, $F^{-1}\psi\phi_mF = F^{-1}\psi FF^{-1}\phi_mF$ y $F^{-1}\psi\phi F = F^{-1}\psi FF^{-1}\phi F$. Nótese que $F^{-1}\psi F \in O^+(1, n)$, y dado que $O^+(1, n)$ es grupo topológico, multiplicando por la inversa de $F^{-1}\psi F$ obtenemos que $F^{-1}\phi_mF \rightarrow F^{-1}\phi F$.

Supongamos entonces que $a \neq 0$, se sigue del inciso (i) del Lema 5.0.2 que $\phi_m^{-1}(0) \rightarrow \phi^{-1}(0)$, es decir $a_m \rightarrow a$. Así mismo, de la demostración del inciso (ii) del mismo lema, se tiene que $\sigma_{a_m} \rightarrow \sigma_a$ en $GM(\mathbb{B}^n)$, y ya que éste es grupo topológico, tenemos que $A_m \rightarrow A$ en $GM(\mathbb{B}^n)$. En virtud de estas observaciones, usando que $O^+(1, n)$ es grupo topológico, basta demostrar que $F^{-1}A_mF \rightarrow F^{-1}AF$ y $F^{-1}\sigma_{a_m}F \rightarrow F^{-1}\sigma_aF$.

La primera convergencia se sigue de las observaciones posteriores al Teorema 5.0.8, pues

$$F^{-1}A_mF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_m & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

y

$$F^{-1}AF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

y ya que $A_m \rightarrow A$ en $GM(\mathbb{B}^n)$, entonces $F^{-1}A_mF \rightarrow F^{-1}AF$ en $O^+(1, n)$.

Para la segunda convergencia es conveniente mandar continuamente a_m y a a puntos w_m y w en la semirecta te_1 , $t \in \mathbb{R}^+$ mediante transformaciones ortogonales R_m y R respectivamente, de modo que $R_m \rightarrow R$. Si

$$a = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n$$

y

$$a_m = t_1^m e_1 + \dots + t_n^m e_n,$$

dado que $a \neq 0$, $t_j \neq 0$ para algún j , y por continuidad existe un N natural tal que si $m > N$, $t_j^m \neq 0$. Nótese que $\{a, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n\}$ y $\{a_m, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n\}$ son bases de \mathbb{R}^n pues a, a_m no pertenecen al subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n\}$. Utilizando el proceso de Gram-Schmidt se pueden cambiar dichas bases por bases ortonormales $\{a/|a|, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$ y $\{a_m/|a_m|, x_1^m, \dots, x_{j-1}^m, x_{j+1}^m, \dots, x_n^m\}$. Obsérvese que el proceso de Gram-Schmidt nos da explícitamente la forma de calcular los elementos x_i y x_i^m de estas bases ordenadas en términos de los elementos anteriores a éstos en dichas bases y del producto interno, por ejemplo

$$x_1 = \frac{e_1 - \frac{\langle e_1, a \rangle}{|a|^2} a}{\left| e_1 - \frac{\langle e_1, a \rangle}{|a|^2} a \right|}$$

y

$$x_1^m = \frac{e_1 - \frac{\langle e_1, a_m \rangle}{|a_m|^2} a_m}{\left| e_1 - \frac{\langle e_1, a_m \rangle}{|a_m|^2} a_m \right|}.$$

Como consecuencia de estas expresiones y del hecho que $a_m/|a_m| \rightarrow a/|a|$, se tiene que $x_1^m \rightarrow x_1$. Inductivamente, se obtiene que $x_i^m \rightarrow x_i$, por lo que al considerar las matrices $R_m = (a_m/|a_m|, x_1^m, \dots, x_{j-1}^m, x_{j+1}^m, \dots, x_n^m)$ y $R = (a/|a|, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, se tiene que $R_m \rightarrow R$. Más aún, R_m y R mandan a_m y a en la semirecta te_1 , $t \in \mathbb{R}^+$ respectivamente, y dichas matrices están en $O(n)$. Se sigue de las observaciones posteriores al Teorema 5.0.8, que

$$F^{-1}\sigma_{a_m}F = R_m'^{-1}P_mR_m'$$

y

$$F^{-1}\sigma_a F = R'^{-1}PR',$$

donde

$$R'_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & R_m & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad P_m = \begin{pmatrix} \cosh 2t_m & \sinh 2t_m & 0 & \dots & 0 \\ -\sinh 2t_m & -\cosh 2t_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & 0 & \dots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que P_m y P son las matrices asociadas respectivamente a las reflexiones en $S(a_m R_m, r_m)$ y $S(aR, r)$ (r y r_m son los radios de las esferas isométricas de ϕ y ϕ_m respectivamente), $t, t_m \in (0, \infty)$, $r_m^2 = 1/\sinh^2 t_m$ y $r^2 = 1/\sinh^2 t$, por lo que se concluye que $F^{-1}\sigma_{a_m} F \rightarrow F^{-1}\sigma_a F$. \square

Como consecuencia del Teorema 5.0.10, se tiene que $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ con la topología de la convergencia uniforme en la métrica cordal es isomorfo como grupo topológico al grupo $O^+(1, n+1)$. En particular, al identificar \mathbb{R}^2 con el plano complejo extendido, $M(\mathbb{R}^2)$ resulta ser la clase de las transformaciones de Möbius complejas

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

y ésta es isomorfa al grupo de Lorentz, formado por las matrices que preservan la forma cuadrática $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$ y la desigualdad $t > 0$.

Corolario 5.0.11 *Si una sucesión de transformaciones de Möbius ϕ_1, ϕ_2, \dots preserva \mathbb{B}^{n+1} y $\phi_m \rightarrow I$ uniformemente en un abierto de \mathbb{S}^n , entonces $\phi_m \rightarrow I$ uniformemente en \mathbb{B}^{n+1} y \mathbb{S}^n .*

DEMOSTRACIÓN. Ya que $GM(\mathbb{B}^{n+1})$ y $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ son conjugados, se sigue del Teorema 5.0.5 que $\phi_m \rightarrow I$ uniformemente en \mathbb{S}^n . Conjugando con F , la

isometría entre Q y \mathbb{B}^{n+1} , se tiene que $F^{-1}\phi_m F \rightarrow I$ en $O^+(1, n+1)$. Se sigue de la demostración de la primera parte del Teorema 5.0.10 que $f^{-1}\phi_m f \rightarrow I$ uniformemente en \mathbb{R}^{n+1} , donde f conjuga $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ y $GM(\mathbb{B}^{n+1})$, por lo que $\phi_m \rightarrow I$ uniformemente en \mathbb{B}^{n+1} . \square

A manera de conclusión de esta tesis, describimos las geodésicas en el hiperboloide para el caso bidimensional.

Proposición 5.0.12 *Si Q es el hiperboloide en \mathbb{R}^3 , entonces las geodésicas en \mathbb{B}^2 se corresponden vía F y F^{-1} con la intersección de Q y ciertos planos por el origen en \mathbb{R}^3 .*

DEMOSTRACIÓN. Recordamos que una geodésica en \mathbb{B}^2 puede ser un diámetro de \mathbb{B}^2 o la intersección de un círculo ortogonal a \mathbb{B}^2 con éste mismo. Si se tiene un diámetro de \mathbb{B}^2 , entonces los puntos de la geodésica quedan determinados por la intersección de \mathbb{B}^2 con una recta por el origen, digamos $(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) = 0$, por lo que esta intersección se corresponde con la intersección del plano $(x_0, x_1, x_2) \cdot (0, a_1, a_2) = 0$ con Q , mediante F y F^{-1} . Esto se sigue ya que si $(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) = 0$ y $x \in \mathbb{B}^2$, entonces

$$\begin{aligned} F^{-1}(x_1, x_2) \cdot (0, a_1, a_2) &= \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \frac{2x_2}{1 - |x|^2} \right) \cdot (0, a_1, a_2) \\ &= \frac{2x_1 a_1}{1 - |x|^2} + \frac{2x_2 a_2}{1 - |x|^2} \\ &= \frac{2}{1 - |x|^2} (x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $F^{-1}(x_1, x_2)$ está contenido en la intersección de Q con el plano $(x_0, x_1, x_2) \cdot (0, a_1, a_2) = 0$. Viceversa, si $(x_0, x_1, x_2) \cdot (0, a_1, a_2) = 0$ y $x \in Q$,

entonces $(x_0, x_1) \cdot (a_1, a_2) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) &= \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0} \right) \cdot (a_1, a_2) \\ &= \frac{(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2)}{1+x_0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $F(x_0, x_1, x_2)$ está en la intersección de \mathbb{B}^2 con la recta por el origen $(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) = 0$.

Por otro lado si se tiene una geodésica determinada por la intersección de un círculo ortogonal a \mathbb{B}^2 con ésta misma, entonces los puntos del círculo ortogonal a \mathbb{B}^2 satisfacen la ecuación $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 1$, o equivalentemente $1 + |x|^2 = 2(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2)$. Resulta que dicha intersección se corresponde con la intersección del plano $(x_0, x_1, x_2) \cdot (-1, a_1, a_2) = 0$ con Q , mediante F y F^{-1} , pues si $1 + |x|^2 = 2(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2)$ y $x \in \mathbb{B}^2$, entonces

$$\begin{aligned} F^{-1}(x_1, x_2) \cdot (-1, a_1, a_2) &= \left(\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}, \frac{2x_1}{1-|x|^2}, \frac{2x_2}{1-|x|^2} \right) \cdot (-1, a_1, a_2) \\ &= \frac{1}{1-|x|^2} (1+|x|^2, 2x_1, 2x_2) \cdot (-1, a_1, a_2) \\ &= \frac{1}{1-|x|^2} (-1 - |x|^2 + 2(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $F^{-1}(x_1, x_2)$ está contenido en la intersección de Q con el plano $(x_0, x_1, x_2) \cdot (-1, a_1, a_2) = 0$. Viceversa, si $(x_0, x_1, x_2) \cdot (-1, a_1, a_2) = 0$ y $x \in Q$, entonces

$$-x_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0 \quad \text{y} \quad x_0^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2.$$

Ahora

$$F(x_0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0} \right),$$

y

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x_1}{1+x_0} - a_1\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1+x_0} - a_2\right)^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_0)^2} - 2\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{1+x_0} + a_1^2 + a_2^2 \\
 &= \frac{x_0^2 - 1}{(1+x_0)^2} - 2\frac{x_0}{1+x_0} + a_1^2 + a_2^2 \\
 &= \frac{x_0 - 1}{1+x_0} - 2\frac{x_0}{1+x_0} + a_1^2 + a_2^2 \\
 &= a_1^2 + a_2^2 - 1,
 \end{aligned}$$

y por lo tanto $F(x_0, x_1, x_2)$ está en la intersección de \mathbb{B}^2 con el círculo ortogonal a \mathbb{B}^2 cuya ecuación es $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 1$. \square

Bibliografía

- [1] ÁVILA BÁEZ V. M., *Producto inversivo y polígonos hiperbólicos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [2] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [3] JIMÉNEZ SERRANO S., *Tres Modelos del Espacio Hiperbólico n -Dimensional*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002.
- [4] LANG, S., *Linear Algebra*, Addison Wesley, 1972.
- [5] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, UNAM, Facultad de Ciencias, 2005.
- [6] LASCURAIN ORIVE, A. Y MOLINA HERNÁNDEZ, R., *On Fundamental Domains for Subgroups of Isometries Acting in \mathbb{H}^n* ISRN Geometry Volume 2012, Article ID 685103, 2012
- [7] MARDEN A., *Outer Circles, An Introduction to Hyperbolic 3-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.
- [8] RATCLIFFE, J. G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, 1995.
- [9] THURSTON, W. P., *Three Dimensional Geometry and Topology, vol. 1*, edited by Silvio Levy, Princeton Mathematical Series, 35, Princeton University Press, 1997.