



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

FLUJO PULSÁTIL DE UN LÍQUIDO BIOLÓGICO NO  
NEWTONIANO:

SANGRE HUMANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERA QUÍMICA

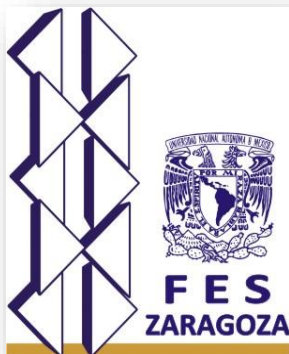
P R E S E N T A :

LEONILA RUIZ SÁNCHEZ

**DIRECTOR DE TESIS:**

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

2014





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN  
ESCOLAR  
P R E S E N T E.

Comunico a usted que al alumno(a) Ruiz Sánchez Leonila con número de cuenta 410072035 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 26 del mes de septiembre de 2014 a las 12:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	I.Q. RAUL RAMÓN MORA HERNÁNDEZ
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	M. en I. MARIANO PÉREZ CAMACHO
SUPLENTE	I.Q. ALEJANDRO JUVENAL GUZMÁN GÓMEZ
SUPLENTE	DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

Edtson Emilio Herrera Valencia  
  
MARIANO PÉREZ CAMACHO.

El título de la tesis que se presenta es: Flujo pulsátil de un líquido biológico no newtoniano: Sangre humana.

Opción de Titulación: Tesis profesional

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
México, D. F. ~~En 10 de~~ septiembre de 2014.

DR. VÍCTOR MANUEL MENDOZA NUÑEZ  
DIRECTOR  
ZARAGOZA  
DIRECCIÓN

RECIBÍ:  
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES  
Y DE GRADO

Vo.Bo.

DR. ROBERTO MENDOZA BERNAL  
JEFE DE LA CARRERA DE I.Q.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## DEDICATORIAS



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## AGRADECIMIENTO

El presente trabajo de tesis primeramente me gustaría agradecerle a ti Dios por bendecirme para llegar hasta donde he llegado, porque hiciste realidad este sueño anhelado.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y en particular a la Facultad de Estudios superiores Zaragoza por darme la oportunidad de estudiar y ser un profesional.

A mi director de tesis, Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito. Y por ser una inspiración para seguir preparándome para ser una mujer de éxito y siga siendo parte esencial de mi preparación.

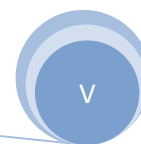
También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación y por sus consejos, su enseñanza y más que todo por su amistad.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

Para ellos: Muchas gracias y que Dios los bendiga

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>CAPITULO I</b> .....	2
<b>ANTECEDENTES</b> .....	2
1.1 Flujo pulsátil .....	3
1.2 Fluidos Bio-reológicos .....	4
1.2.1 Bombas peristálticas biológicas .....	4
1.2.2 Fibras naturales .....	4
1.2.3 Anatomía del oído.....	4
1.3 Ciencia de polímeros.....	4
1.3.1 Boquillas oscilantes .....	4
1.3.2. Recuperación terciaria de petróleo .....	5
1.4 Aproximaciones matemáticas.....	5
1.5 Resultados experimentales y computacionales .....	5
1.6    Objetivos.....	8
1.6.1 Objetivo general.....	8
1.6.2 Objetivos particulares.....	8
1.7 Hipótesis del trabajo.....	8
<b>CAPITULO II</b> .....	9
<b>INTRODUCCION</b> .....	9
2.1 Fluidos complejos.....	10
2.1.1 Cristales líquidos.....	10
2.1.2 Cristales líquidos biológicos .....	10
2.2 Tipos de fase en los cristales líquidos .....	11
2.2.1 Fase nemática .....	11
2.2.3 Micelas gigantes .....	13



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

2.2.4	Polímeros asociativos .....	14
2.2.5	Nano compuestos poliméricos .....	14
2.3	Hemorreología: Sangre Humana.....	14
2.3.1.	Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no newtoniano ....	15
2.3.2	Como se estudia la sangre en un reómetro .....	15
2.4	Ecuaciones constitutivas .....	18
2.4.1	Fluido newtoniano .....	18
2.4.2	Fluidos no newtonianos .....	19
2.4.3	Fluido de Bingham .....	20
2.4.4	Modelos viscoelásticos .....	21
<b>CAPITULO III</b>	.....	<b>23</b>
PLANTEAMIENTO FISICO DEL PROBLEMA.....		23
3.1	Planteamiento del problema de flujo pulsátil sanguíneo .....	24
3.1.1	Campo vectorial de velocidades .....	25
3.1.2	Tensores gradiente de velocidad, rapidez de deformación y de esfuerzos viscosos.....	25
3.1.3	Conservación de masa y momento.....	26
3.1.4	Ecuación constitutiva modelo de ELLIS .....	26
3.1.5	Condiciones de frontera .....	27
3.1.6	Gradiente de presión pulsátil y función estocástica.....	27
3.1.7	Eficiencia y Potencia .....	28
3.2	Ecuaciones escalares desacopladas.....	28
<b>CAPITULO IV</b>	.....	<b>30</b>
MODELADO TEORICO .....		30
4.1	Calculo de la velocidad axial pulsátil, para el modelo reológico de Ellis. ....	31
4.2.	Calculo del flujo volumétrico.....	31
4.3.	Calculo del flujo volumétrico pulsátil de Ellis. ....	32

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

4.4. Aumento en el flujo volumétrico.....	33
4.5. Consumo energético adimensional .....	34
<b>CAPITULO V</b> .....	36
ANALISIS DE RESULTADOS .....	36
<u>5.1</u> Variables adimensionales .....	37
5.2 Campo de velocidades .....	38
5.4 Aumento en el flujo y requerimientos energéticos en función de la frecuencia..	44
5.5 Aplicación biológica: Sangre Humana .....	45
<b>CAPITULO VI</b> .....	49
CONCLUSIONES.....	49
6. 1 Trabajo Futuro.....	51
<b>APENDICE A</b> .....	53
Calculo del aumento en el flujo volumétrico y la energía consumida para un fluido newtoniano.....	53
<b>APENDICE B</b> .....	57
Calculo del aumento en el flujo volumétrico y la energía consumida para un fluido No-newtoniano (Modelo de ley de potencia). .....	57
<b>REFERENCIAS</b> .....	63

## ÍNDICE DE TABLAS

*Tabla 1. Parámetros material utilizados del modelo de Ellis para describir las curvas reológicas asociadas con la función viscosidad.*

*Tabla 2. Variables y números adimensionales empleados en las simulaciones del fluido Bio reológico (Sangre Humana)*



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Ordenamiento de las moléculas en la fase esméctica A (derecha), las cuales están organizadas en capas; en la fase esméctica C (derecha), las moléculas están inclinadas dentro de cada capa. ....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 2. Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura. ....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 3. Fase columnar hexagonal. ....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 4. Surfactante y sistemas micelares en función de la concentración micelar crítica. En el lado izquierdo un molécula de tensoactivo que contiene una parte hidrofóbica y una hidrofílica. El lado derecho muestra una micela compuesta de varios moléculas de agente tensoactivo. Abajo en el centro, una micela en forma de cilindro debido al aumento en la concentración micelar crítica. ....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 5. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosas constantes y una zona intermedia tipo ley de potencia. ....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 6. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosas constantes y una zona intermedia tipo ley de potencia. ....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 7. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia. ....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 8. Ilustra un capilar de radio <math>r = a</math> y longitud <math>z = L</math> en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas. ....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 9. Ilustra la función asociada al gradiente de presión pulsátil. (a) Efecto de la amplitud de la perturbación, y (b) Efecto de la frecuencia en el gradiente de presión pulsátil. ....</i>	<i>25</i>

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

<i>Figura 10. Velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función del esfuerzo en la pared.....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 11. Velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función de las propiedades adelgazantes al corte. ....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 12. Aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared adimensional como función del parámetro<math>\lambda</math>, asociado a las propiedades adelgazantes al corte del fluido. ....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 13. Aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la fuerza macroscópica. ....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 14. Consumo energético vs esfuerzo en la pared adimensional en función de las propiedades adelgazantes al corte.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 15. Ilustra el consumo de energía vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la función estocástica.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 16. Ilustra el consumo de energía vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la función estocástica.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 17. Ilustra el efecto del flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared, como función del tiempo de relajación de Maxwell, a través del número adimensional Deborah. ....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 18. Ilustra el efecto del consumo energético vs esfuerzo en la pared adimensional, como función del tiempo de relajación de Maxwell, a través del número adimensional Deborah.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 19. Se ilustra un resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en este trabajo. Se observa claramente, tres zona en nuestro sistema, a bajos esfuerzos en la pared, moderados esfuerzos y altos esfuerzos en la pared. ....</i>	<i>47</i>

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

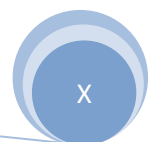
## NOMENCLATURA

### Vectores y tensores

$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
$\mathbf{D}$	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla\mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla\mathbf{V}^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
$\mathbf{V}$	Vector de velocidad [m/s]
$\mathbf{g}$	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]

### Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada $x^i$ [1/m]
$\mathbf{D}/\mathbf{D}t = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]
$\langle \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt$	Operador promedio [1]
$\pi$	Constante Pi [1]



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## Variables dimensionales

$a$	Radio del capilar [m]
$E$ (%)	Fracción de energía consumida [1]
$I$ (%)	Aumento en el flujo volumétrico [1]
$L$	Longitud del capilar [m]
$V_z$	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
$T$	Periodo [s]
$r$	Coordenada radial adimensional [m]
$t$	Tiempo [s]
$t_{car}$	Tiempo característico [s]
$Q$	Flujo volumétrico [m <sup>3</sup> /s]
$n(t)$	Función estocástica [1]

## Variables adimensionales

$Q^*$	Flujo volumétrico adimensional en estado no estacionario [1]
$Q_0^*$	Flujo volumétrico adimensional en estado estacionario [1]
$V_z^*$	Velocidad axial adimensional [1]
$t^*$	Tiempo adimensional [1]
$\tau$	Esfuerzo cortante adimensional [1]
$\omega^*$	Frecuencia angular adimensional [1]

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## Letras Griegas

$\alpha$	Exponente del modelo de Ley de potencia [1]
$\square$	
$\gamma_{rz}$	Rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz}$ [1/s]
$\phi_0$	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
$\phi_1$	Fluidez a moderada rapidez de deformación [1/Pas <sup>n</sup> ]
$\lambda_0$	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
$\omega$	Frecuencia [rad/s]
$\rho$	Densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{rz}$	Componente $\dot{\gamma}_{rz}$ del esfuerzo cortante [Pa]
$\sigma_w$	Esfuerzo en la pared [Pa]

## Números adimensionales

Re	Numero de Reynolds [1]
De	Numero de Deborah [1]

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## GLOSARIO

<b>Aumento en el flujo:</b>	Porcentaje de aumento del flujo pulsátil con respecto a un gradiente de presión constante
<b>Cristal líquido:</b>	Sistema complejo que presenta propiedades entre sólido y líquido que es altamente anisótropico.
<b>Ecuación constitutiva:</b>	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
<b>Ecuación de continuidad:</b>	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico
<b>Ecuación de movimiento:</b>	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
<b>Estado estacionario:</b>	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
<b>Fluido incompresible:</b>	Fluido que tiene una densidad constante.
<b>Fluido newtoniano:</b>	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
<b>Fluido no-newtoniano:</b>	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
<b>Fluido adelgazante al corte:</b>	Fluido que decrece su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.
<b>Fluido engrozante al corte:</b>	Fluido que aumenta su viscosidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

<b>Flujo pulsátil:</b>	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
<b>Flujo volumétrico:</b>	Volumen por unidad de tiempo.
<b>Fracción de potencia:</b>	Consumo de energía asociado a la perturbación pulsátil.
<b>Función estocástica:</b>	Función probabilística que evoluciona en el tiempo
<b>Modelo de Cross:</b>	Modelo reológico de cuatro parámetros materiales que describe la viscosidad en función de la rapidez de deformación y que describe las dos zona a baja y alta rapidez deformación y la zona intermedia asociada a la ley de potencia.
<b>Modelo de Ellis:</b>	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
<b>Rapidez de deformación: Sangre:</b>	Rapidez con la que se deforma un fluido. Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## RESUMEN

En este trabajo se analiza un líquido no newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio  $R = a$  y longitud  $z = L$ . El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. A partir de éste, se calcula el flujo volumétrico perturbado y se compara con el correspondiente sin perturbación. Para caracterizar el líquido complejo con estructura transitoria se utiliza el modelo de Ellis, el cual consiste en una combinación del modelo newtoniano con el modelo de Ostwald de Waelle. Suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, flujo homogéneo y líquido incompresible, se obtiene una expresión analítica para el aumento del flujo volumétrico eficiencia  $I(\%) = (\langle Q_p(t) \rangle - Q_0(t)) / Q_0(t)$ , y para el consumo de energía asociado a la fracción de potencia consumida debido al flujo volumétrico:  $E(\%) = (\langle P(t) \rangle - P_0(t)) / P_0(t)$ . Se demuestra que el cambio del flujo volumétrico es enorme en la región donde el líquido es adelgazante al corte. La predicción de estos aumentos depende de las propiedades no-newtonianas y de la amplitud del ruido introducido en el gradiente de presión pulsátil. Finalmente, se utilizan datos reométricos de sangre con el fin de cuantificar las predicciones del modelo inelástico de Ellis, en el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil.

**Palabras claves:** Flujo pulsátil, Modelo de Ellis, Eficiencia del flujo volumétrico, Consumo Energético.



**CAPITULO I**  
**ANTECEDENTES**

## 1.1 Flujo pulsátil

Actualmente, existen en la literatura dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante [1-6]. Una de los cálculos más interesantes en los dos sistemas, es la eficiencia en el flujo volumétrico (el aumento de gasto volumétrico) que se define como:

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100; \quad (1)$$
$$E(\%) = \frac{\langle P(t) \rangle - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{\langle Q(t) \nabla p(t) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} \times 100$$

En la Ec. (1)  $\langle X(t) \rangle$ ;  $X = \{Q, P\}$  representa el promedio temporal del flujo volumétrico y de la potencia transitoria respectivamente [1-6]. El subíndice (0) en la Ec. (1) está relacionado al flujo volumétrico y la potencia en estado no-estacionario [1-6]. La Ec. (1) es una forma de cuantificar los efectos que produce la perturbación pulsátil u oscilante en el flujo volumétrico [1,6]. Sobre estos sistemas se han publicado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales con el fin de analizar estos interesantes problemas [1-22]. Las principales conclusiones de estos trabajos, son mencionadas a continuación:

1. La eficiencia depende de la amplitud de las perturbaciones, frecuencia angular y de las propiedades materiales de los líquidos (viscosidades a corte bajo, alto y tiempos de relajación) [1-4].
2. Para que existan aumentos en los dos sistemas (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared) el líquido analizado debe ser adelgazante al corte, i.e., la función viscosidad debe cambiar por efecto de la rapidez de deformación [1-4].
3. El máximo en las curvas resonantes (eficiencia vs gradiente de presión) está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticas del material. Experimentalmente se demostró que para algunos valores de frecuencia la eficiencia aumenta mientras que para otros decrece [1-4].

La investigación de flujos pulsátiles y oscilantes ha tenido gran relevancia en muchas ramas de la ciencia [1-9, 16-24]. El flujo pulsátil es uno de los sistemas más estudiados en la literatura concerniente a las áreas de fenómenos de transporte, reología y en ciencia de polímeros. A continuación, se menciona algunas aplicaciones de este tipo de sistemas:

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## 1.2 Fluidos Bio-reológicos

### 1.2.1 Bombas peristálticas biológicas

En Bio-reología un ejemplo clase es el sistema cardiaco que puede ser visualizado como un válvula pulsátil biológica. Por ejemplo, en bio-reología, el estudio de la sangre en las venas es importante en la creación de anticoagulantes que permitan evitar ataques cardiacos. En este caso, el corazón, actúa como bomba peristáltica mandando pulsos al sistema lo que permite que el flujo volumétrico aumente y se consuma menos energía. Por otra parte, el uso de flujos pulsátiles y oscilantes ha sido de gran ayuda en los procesos industriales con líquidos poliméricos (extrusión, inyección, moldeo, etc) [17-24].

### 1.2.2 Fibras naturales

Otra impactante manifestación biológica del flujo pulsátil es la que se presenta en la seda producida por las arañas [25-28]. El proceso de la formación de la seda de la araña consiste en un líquido visco elástico que está conformado por 9 proteínas, después de esto, el líquido se transforma en un cristal líquido neumático, es decir una sustancia que presenta fases entre el sólido y el líquido y que bajo fuerzas externas se orientan las partículas materiales [25-28]. El tercer paso es un gel y por último se deshidrata la sustancia y se obtiene una hilo biológico capaz de superar al polímero sintético más resistente creado por el hombre (Kevlar) [25-28]. Una de las desventajas del Kevlar es que su síntesis se lleva a cabo a temperaturas cercanas a los 450 °C y como solvente ácido sulfúrico, por lo tanto es altamente contaminante [25-28]. Este hecho por si solo, motiva el estudio de sistemas oscilantes mediante modelos matemáticos.

### 1.2.3 Anatomía del oído

Por otra parte, mucho de los mecanismos utilizados en la naturaleza presentan fenómenos de tipo pulsátil u oscilatorio [5]. Las células ciliadas externas, las cuales son las causantes de amplificar la información en el oído interno, trabajan transformando la energía eléctrica a energía mecánica por medio de un complejo dispositivo, el cual tiene que ver con la naturaleza elástica de la membrana y los líquidos viscoelásticos que entran en contacto con ellas [25-28].

## 1.3 Ciencia de polímeros

### 1.3.1 Boquillas oscilantes

La modificación de boquillas por boquillas oscilantes incrementa la temperatura de bulto del sistema y puede ser utilizada en las propiedades mecánicas y de procesamiento de materiales poliméricos [1,2].

## 1.3 2. Recuperación terciaria de petróleo

Debido a la creciente crisis de petróleo en México, la extracción de crudo en los yacimientos petroleros es de suma importancia en nuestro presente y futuro. En este campo, los líquidos complejos (sistemas micelares) han sido utilizados en la recuperación de petróleo. La extracción de cantidades adicionales de petróleo puede ser inducida (al ser inyectados) mediante fracturas hidráulicas en la formación de rocas. Recientemente, líquidos complejos basados en agentes tensoactivos catiónicos han sido escogidos para los procesos de fractura de rocas en yacimientos de petróleo porque, pueden mejorar las extracciones de cantidades adicionales de petróleo en comparación con los líquidos poliméricos [1,2]. Para caracterizar los fluidos, se han utilizado diferentes ecuaciones constitutivas. Las investigaciones realizadas en este campo, se han basado en el estudio de líquidos newtonianos y no newtonianos. Los flujos oscilantes en sus dos versiones, han sido caracterizados con diferentes ecuaciones constitutivas para líquidos débilmente elásticos y Viscoelásticos. La mayoría de estos trabajos, han empleado diferentes ecuaciones reológicas [1,25].

## 1.4 Aproximaciones matemáticas

En las últimas décadas, el estudio del flujo oscilante se ha centrado básicamente en métodos analíticos y numéricos avanzadas, con el fin de obtener resultados que describan con mayor precisión la parte fenomenológica de estos sistemas físicos utilizando diferentes ecuaciones constitutivas [1-7]. Por otra parte, existen trabajos en la literatura donde las técnicas perturbativas antes descritas no son aplicables, por lo que se debe recurrir a métodos variacionales y computacionales tipo Galerkin [14,15].

## 1.5 Resultados experimentales y computacionales

Los trabajos mencionados antes demostraron que la eficiencia depende de la amplitud de las perturbaciones, de la frecuencia, de las propiedades adelgazantes al corte del líquido y de la ecuación constitutiva que se utiliza para describir el flujo [1-7]. El estudio de flujos oscilantes tiene una amplia historia, y muchos de ellos están basados en líquidos poliméricos de alto peso molecular [1-7]. Barnes et al. (1969) [9] presentaron una disertación teórica y experimental acerca del flujo pulsátil en una tubería de radio constante. Como líquido de estudio utilizaron una solución de poliacrilamida y sus cálculos teóricos estuvieron basados en consideraciones inelásticas (es decir, en donde los mecanismos viscosos son dominantes sobre los elásticos) y los parámetros de la ecuación constitutiva fueron extraídos directamente de datos reométricos. Para su trabajo experimental utilizaron los siguientes valores de amplitud, radio del cilindro y frecuencia: (i)  $\varepsilon = 0.2$ , (ii)  $\omega = 0.88 \text{ rad s}^{-1}$  y (iii)  $R = 0.16 \text{ cm}$ . Sin embargo, en la parte experimental de su trabajo, para una solución de poliacrilamida de 1.5 y 8 % en peso se obtuvo un aumento del 20 y 8 % respectivamente [9]. Sus predicciones teóricas demostraron la misma tendencia que la parte experimental pero cuantitativamente hubo una

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

diferencia por un factor de 2 con los experimentos. La discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales fue asociada a los efectos elásticos del flujo sobre la poliacrilamida [9]. Por esta razón, Walters et al. (1970) estudiaron el flujo pulsátil de un líquido viscoelástico caracterizado con un modelo corrotacional de cuatro constantes tipo Oldroyd-B[12]

Ellos demostraron que la eficiencia depende de la amplitud de la perturbación y que para un cierto valor crítico del gradiente de presión, se aprecian aumentos considerables en el flujo volumétrico [9]. Además, sus cálculos teóricos demostraron que la eficiencia es una función creciente o decreciente de la frecuencia para un gradiente constante de presión. Por otra parte y en la misma línea, Barnes et al. (1971) [9] estudiaron el mismo problema, utilizando datos viscométricos para alimentar su modelo. Las conclusiones principales de su trabajo basado en el modelo Newtoniano Generalizado son: (i) a bajas frecuencias, los resultados experimentales con una solución de poliacrilamida demostraron que el flujo volumétrico perturbado decrece conforme aumenta la frecuencia de las pulsaciones y (ii) a frecuencias altas la eficiencia aumenta conforme la frecuencia de las pulsaciones lo hace [1-7].

Por estos motivos, los métodos computacionales empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido de gran interés con el fin de obtener resultados más precisos en la obtención de la eficiencia. Alguno autores han estudiado el flujo pulsátil desde el punto de vista de un problema de valor inicial, mediante un algoritmo computacional basado en un esquema perturbativo y utilizando un método numérico tipo Runge-Kutta clásico de cuarto orden [9,12]. Una de las ventajas de éste es su gran estabilidad computacional y versatilidad en las cantidades físicas importantes (amplitud de la perturbación, frecuencia, propiedades materiales de la ecuación constitutiva etc) [9,12].

Para el intervalo de frecuencias que utilizaron, Barnes et al. (1971) [9], Sundstrom y Kaufman et al. (1977) [8] estudiaron la eficiencia y la potencia requerida para el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil. Para caracterizar su líquido, utilizaron dos modelos viscosos (ley de potencia y Ellis) y resolvieron el problema de valor inicial empleando un método de diferencias finitas [8]. Sus principales conclusiones incluyeron, que el aumento en el flujo volumétrico no depende de la frecuencia de las pulsaciones, solamente de su amplitud y del índice del modelo de ley de potencia, asociado con las propiedades adelgazantes del líquido [8]. Sin embargo, la potencia requerida para mantener el flujo pulsátil es siempre positiva, lo que implica que no existe ninguna ventaja de tipo energética en bombear un líquido viscoso mediante un gradiente de presión pulsátil [9,12]. Por último, ellos concluyeron que la diferencia entre sus resultados y los de Barnes et al. (1971) [9] están asociados a las ecuaciones constitutivas que fueron empleadas en los experimentos [8, 9,12].

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

Por otra parte, en la mayoría de los trabajos, los efectos inerciales y elásticos son despreciados en el cálculo de la eficiencia. Por esta razón, Davies et al. (1978) analizaron el flujo a gradiente de presión pulsátil incorporando los mecanismos mencionados anteriormente. Para caracterizar su líquido viscoelástico, utilizaron un modelo de Goddard-Miller, el cual demostró las mismas discrepancias entre la teoría y la parte experimental mencionadas por Barnes et al. (1971). Sus conclusiones principales son enlistadas a continuación: (i) los mecanismos inerciales y elásticos no son los responsables de aumento en el flujo volumétrico, (ii) la discrepancia entre la teoría y los datos experimentales han sido asociados a flujos secundarios. (iii) El aumento en el flujo volumétrico depende fuertemente de la curva de viscosidad que se empleé.

Conclusiones similares a las de Davies et al. (1978) [10], han sido obtenidas por diferentes investigadores, utilizando diferentes ecuaciones constitutivas Phan-Thien resolvió los dos sistemas de flujo (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared). Mediante desarrollos perturbativos-estocásticos y numéricos, con un número considerable de ecuaciones constitutivas (Tanner, newtoniano generalizado, redes no afines, Wagner, fluidos débilmente elásticos etc) [3-7]. Las conclusiones principales de sus trabajos fueron: (i) Para que exista aumento en el flujo, la función viscosidad debe disminuir con el segundo invariante del tensor rapidez de deformación es decir, el líquido debe ser adelgazante al corte [3-7]. (ii) La eficiencia es muy sensible al tipo de ecuación constitutiva que se utilice. (iii) El valor del gradiente de presión al cual se obtiene el máximo en las curvas eficiencia-gradiente de presión, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas de los líquidos [3-7]. (iv) De acuerdo con su esquema perturbativo, la eficiencia es un fenómeno de segundo orden en el parámetro de expansión (amplitud de las perturbaciones) [3-7].

En resumen, de acuerdo con la revisión bibliográfica hecha [1-30] existen pocos resultados analíticos de líquidos no newtonianos que presenten estructura transitoria (Sistemas micelares), sometidos a flujos pulsátiles (En la mayoría de los trabajos, son utilizados líquidos polimérico con alto peso molecular como la poliacrilamida que es viscoelástica) [9, 10, 12]. Por esta razón, la originalidad de esta propuesta de licenciatura radica en la aplicación de la ecuación constitutiva no newtoniana (Modelo de Ellis) en el flujo a gradiente de presión pulsátil. A continuación se presenta el objetivo general y los objetivos particulares de este trabajo.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## 1.6 Objetivos

Por otro lado y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples en flujo pulsátil y oscilante que permitan contrastar las predicciones analíticas y numéricas con las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura. A continuación, se presentan los objetivos generales y particulares del presente proyecto de licenciatura.

### 1.6.1 Objetivo general

- Analizar el comportamiento reológico de un fluido no-newtoniano en un sistema de flujo pulsátil

### 1.6.2 Objetivos particulares

- Utilizar una ecuación constitutiva (Modelo inelástico de Ellis) que describa el comportamiento no-newtoniano de la estructura. Aquí se propone un modelo inelástico tipo Ellis, que acopla el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia. Una de las mayores ventajas del modelo inelástico de Ellis es su sencillez y que permite obtener expresiones analíticas. Además todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos en estado estacionario y transitorio.
- Obtener expresiones del aumento en el flujo y la potencia consumida en función de los parámetros adimensionales
- Utilizar las predicciones teóricas para describir un fluido bio-reológico con datos provenientes de la literatura.

## 1.7 Hipótesis del trabajo

El efecto de la incorporación de un ruido en el gradiente de presión pulsátil produce un aumento en el flujo volumétrico y que este aumento, es varias veces más grande que aquel a gradiente de presión pulsátil.

**CAPITULO II**  
**INTRODUCCION**



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## 2.1 Fluidos complejos

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que apliquen en ellos [14,15]. Algunos ejemplos de fluidos complejos son los sistemas poliméricos, micelares, fluidos biológicos, cristales líquidos, etc [1,2, 14-16, 19-22]. Los polímeros por ejemplo, son sistemas en donde una unidad llamada monómero se repite y que presentan propiedades físicas complejas debido a las interacciones entre sus cadenas y peso molecular [4]. Los sistemas micelares contienen miles o decenas de miles de agentes tenso activos (un tensoactivo es un sistema que abate la tensión superficial de los líquidos) y que contienen una parte hidrofobia y una hidrofilia [1,2]. Los sistemas micelares dependen de la concentración y dependiendo de esta, pueden pasar de sistema esféricos a cilíndricos por efecto de un agente estos sistemas micelares dependen de la concentración y por agente externo entiéndase una fuerza que se aplica en una área paralela a la fuerza [1,2].

Los cristales líquidos son fluidos anisotrópicos, es decir dependen de la posición y pueden ser orientados a través de campos externos eléctricos y magnéticos [14-16].

### 2.1.1 Cristales líquidos

El cristal líquido es un tipo especial de estado de agregación de la materia que tiene propiedades de las fases líquida y sólida. Dependiendo del tipo de cristal líquido, es posible, por ejemplo, que las moléculas tengan libertad de movimiento en un plano, pero no entre planos, o que tengan libertad de rotación, pero no de traslación cada molécula consta de un papel que a su vez o sirve y no se llega a una conclusión exacta solo por eso se le llaman líquidos [14,15, 23, 25,27, 28].

### 2.1.2 Cristales líquidos biológicos

Los cristales líquidos biológicos son abundantes en los seres vivos. Por consiguiente, los cristales líquidos liotrópicos atraen la atención particular en el campo de la química biomimética. En particular, las membranas biológicas y las membranas de las células son una forma de cristal líquido. Sus moléculas dispuestas en forma de barra (por ejemplo, los fosfolípidos o las lecitinas) son organizadas perpendicularmente a la superficie de la membrana, más la membrana es líquida y elástica [14,15, 23, 25,27, 28]. Las moléculas del componente pueden fluir fácilmente, pero tienden a no salir de la membrana, y pueden desplazarse de un lado a otro de la membrana con alguna dificultad. Estas fases del cristal líquido en la membrana pueden recibir e introducir las proteínas importantes como si fuesen libremente receptores "flotantes", o por fuera de la membrana. Muchas otras estructuras biológicas exhiben la conducta de cristal líquido [14,15, 23, 25,27, 28]. Por ejemplo la solución concentrada de la proteína que es arrojada por una araña para generar seda de araña es, de hecho, una fase del cristal líquido [14,15, 23, 25,27, 28]. El orden

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

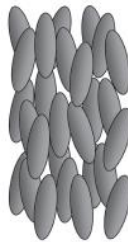
---

preciso de las moléculas en la seda es crítico para darle su conocida fuerza. El ADN y muchos polipéptidos conforman fases de cristal líquido [14,15, 23, 25,27, 28].

## 2.2 Tipos de fase en los cristales líquidos

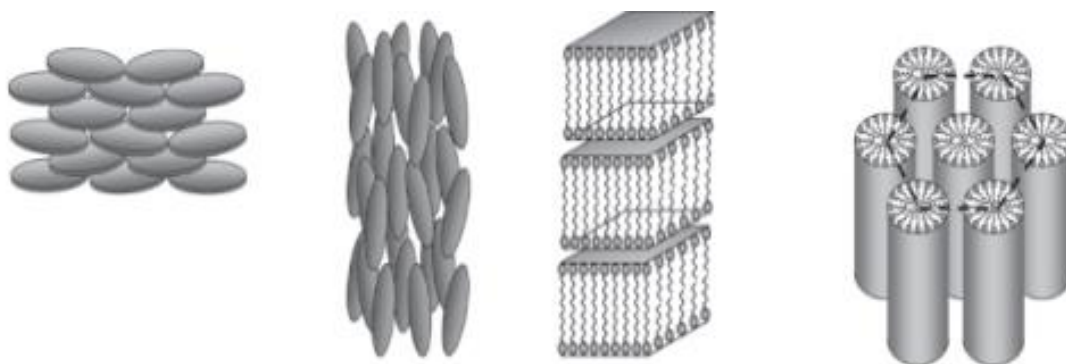
### 2.2.1 Fase nemática

Una de las fases de cristales líquidos más comunes es la nemática. La palabra nemática viene del griego  $\eta\mu\alpha$  (nema), que significa “hilo”. Este término se origina de los defectos topológicos que se observan en los cristales líquidos nemáticos, los cuales se denominan formalmente como “disclinaciones” [14,15, 23, 25,27, 28]. Los Nemáticos también exhiben defectos topológicos llamados “erizos”. En una fase nemática, las moléculas orgánicas calamíticas o con forma de vara no tienen un orden posicional, pero se alinean automáticamente para tener un orden direccional de largo alcance con sus ejes longitudinales más o menos paralelos; por lo tanto, las moléculas son libres de fluir y el centro de las posiciones de sus masas se distribuyen al azar como en un líquido, pero mantienen su orden direccional de largo alcance [14,15, 23, 25,27, 28]. La mayoría son cristales líquidos nemáticos monoaxiales: tienen un eje que es más largo y preferido, con los otros dos siendo equivalentes (pueden aproximarse como cilindros o varillas) [14,15, 23, 25,27, 28].



**Figura 1. Ordenamiento de las moléculas en la fase esméctica A (derecha), las cuales están organizadas en capas; en la fase esméctica C (izquierda), las moléculas están inclinadas dentro de cada capa.**

Sin embargo, algunos cristales líquidos son nemáticos biaxiales, lo que significa que, además de la orientación de su eje largo, también se orientan a lo largo de un eje secundario [14,15, 23, 25,27, 28]. Los nemáticos tienen una fluidez similar a la de los líquidos comunes (isotrópicos) pero pueden ser fácilmente alineados por un campo eléctrico o magnético externo. Los cristales líquidos nemáticos alineados tienen las propiedades ópticas de los cristales mono axiales y esto los hace muy útiles en pantallas de cristal líquido LCD) [14,15, 23, 25,27, 28].



**Figura 2. Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura.**

### 2.2.2 Fase esmética

Las fases esméticas, se presentan a temperaturas más bajas que la nemática, forman capas bien definidas que se pueden deslizar una sobre otra de una forma similar al jabón. La palabra “esmética” se origina de la palabra latina “smecticus”, que significa limpieza o tener propiedades similares al jabón [14,15, 23, 25,27, 28]. Las esméticas son, entonces, posicionalmente ordenadas a lo largo de una dirección. En la fase esmética A, las moléculas se orientan a lo largo de una capa normal, mientras que en la fase esmética C éstas se inclinan lejos de la capa normal [14,15, 23, 25,27, 28]. Estas fases son de tipo líquido dentro de las capas. Hay varias formas diferentes de fases esméticas, todas caracterizadas por tipos diferentes y grados de orden direccional y posicional [14,15, 23, 25,27, 28].



**Figura 3. Fase columnar hexagonal.**

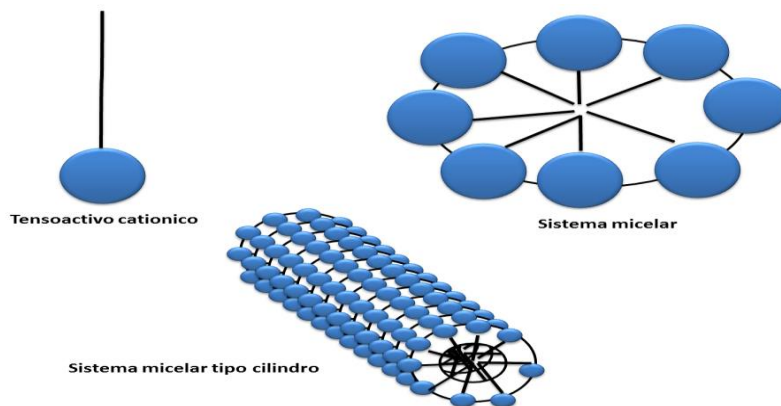
La fase columnar es una clase de mesofase en donde las moléculas se ensamblan en estructuras cilíndricas para actuar como mesógenos [14,15, 23, 25,27, 28]. Originalmente, esta fase de cristal líquido fue llamada “cristal líquido discótico” porque las estructuras columnares son compuestas por moléculas empaquetadas en forma de discos [14,15, 23, 25,27, 28]. Ya que las investigaciones recientes proveen un número de cristales líquidos columnares que consisten en mesógenos no-discóticos, es más común clasificar esta fase y a los compuestos con estas propiedades como cristales líquidos columnares [14,15, 23,

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

25,27, 28]. El otro tipo de CL en cuanto a esta clasificación es el "liotrópico", el cual obtiene distintas colocaciones en función del número de moléculas que lo compongan. Algunas de estas moléculas nemáticas presentan propiedades ópticas según su orientación permitiendo o impidiendo el paso de la luz o actuando sobre su polarización. Su aplicación más directa es para la fabricación de pantalla de cristal líquido [14,15, 23, 25,27, 28]. Otra categoría existente es la de los cristales líquidos liotrópicos, formados por agregados de moléculas anfifílicas (moléculas que poseen en su misma estructura, regiones hidrofóbicas e hidrofílicas) cuando son colocadas en un medio polar (agua) o apolar (solvente orgánico) [14,15, 23, 25,27, 28].

### 2.2.3 Micelas gigantes

Presentan un comportamiento reológico muy interesante y han sido objetos de un gran número de investigaciones, debido a que se presentan inestabilidades bajo diversos tipos de flujo que han sido un reto fuerte en cuanto a su predicción (y de sus propiedades reológicas no lineales) por medio de ecuaciones constitutivas o ecuaciones de estado [1,2]. Además, presentan fenómenos críticos fuera del equilibrio, los cuales requieren en su descripción los conceptos fundamentales de termodinámica irreversible extendida [1,2]. Estos sistemas tienen aplicaciones muy amplias en la recuperación terciaria de petróleo, y han desplazado a los polímeros solubles en la estimulación de pozos petroleros [1,2].



**Figura 4. Surfactante y sistemas micelares en función de la concentración micelar crítica. En el lado izquierdo un molécula de tensoactivo que contiene una parte hidrofóbica y una hidrofílica. El lado derecho muestra una micela compuesta de varios moléculas de agente tensoactivo. Abajo en el centro, una micela en forma de cilindro debido al aumento en la concentración micelar crítica.**

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## 2.2.4 Polímeros asociativos

Presentan un comportamiento reológico mixto, esto es, tienen propiedades en flujos similares a los polímeros o soluciones poliméricas convencionales, pero además presentan asociaciones intra e intermoleculares entre grupos cargados electrostáticamente en la misma macromolécula, lo que les confiere un segundo mecanismo de relajación [1,2]. Estos sistemas también han sido tratados ampliamente en la literatura científica, ya que han motivado el desarrollo de nuevas ecuaciones de estado reológicas que describan convenientemente el comportamiento en flujo de estos sistemas [1,2]. Su uso industrial se incluye en la industria de las pinturas y recubrimientos, en donde se emplean como estabilizadores, por ejemplo, en las pinturas base agua (Consultar las referencias incluidas en [1,2]).

## 2.2.5 Nano compuestos poliméricos

Los nanos compuestos, en particular aquellos que se constituyen por una fase dispersa de nano partículas de arcilla del tipo de las bentonitas o montmorillonitas y una matriz polimérica, constituyen un campo de investigación actual de gran relevancia [29]. La reología de estos sistemas es complicada, y de hecho no existe aún un modelo que pueda representar y predecir sus propiedades bajo flujo, lo que es importante para la formulación y el procesamiento de estos sistemas en aplicaciones industriales, las cuales son muy vastas en este concepto [29].

## 2.3 Hemorreología: Sangre Humana

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en término de dos parámetros principales: el esfuerzo y deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no newtoniano que cuenta con características adelgazantes al corte (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado menor es su viscosidad) [16-22, 31,32]. Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, ente otros factores [16-22, 31, 32]. El estudio de la sangre presenta un reto mundialmente, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de la misma y el segundo al efecto de diferentes patologías, entre las cuales se pueden citar: (i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I, y II, que se han declarado como epidemia nacional, (ii) hipercolesteremia asociada con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan los infartos al miocardio, (iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y (iv) todo tipo de enfermedades de transmisión sexual [16-22,31,32].

La sangre humana es un fluido con gran cantidad de funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno y la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el transporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

actualidad don problemas que atañen a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como la hipercolesterolemia familiar [16-22,31,32]. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, la hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre  $> 200$  mg/ dL) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, como el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continua [16-22]. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas y metabolitos en el plasma [16-22]. El colesterol total junto con los triglicéridos son las sustancias que más afectan la reología de la sangre humana [16-22]. La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes de las de la sangre con concentraciones normales; la diferencia de viscosidad entre ambas es del orden de 10 veces [16-22]. La sangre con alto contenido de colesterol tiende a formar estructuras transitorias más complejas y difíciles de desagregar, además de que el carácter adelgazante al corte de este fluido aumenta [16-22].

### 2.3.1. Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no newtoniano

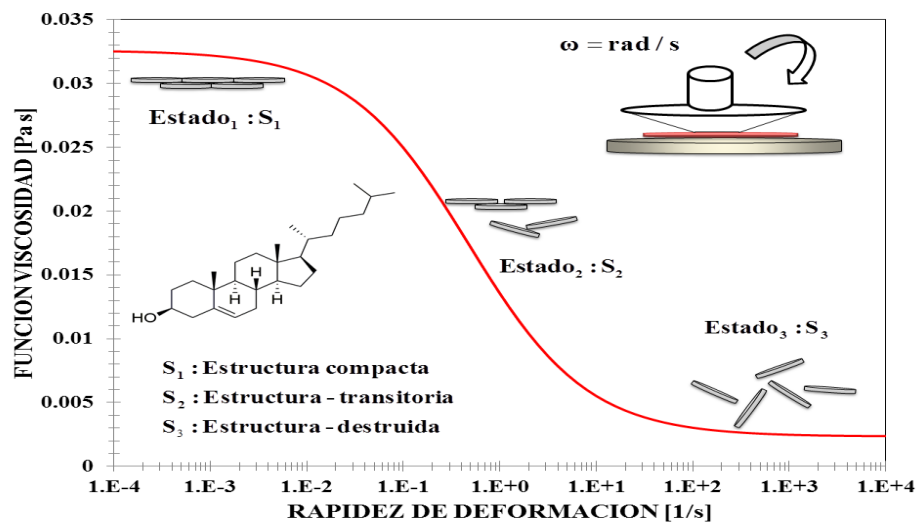
Los fenómenos de transporte y reología aplicado al estudio de la sangre humana ofrecen una interpretación matemática y física del comportamiento de la misma en el cuerpo humano. A pesar de que el tipo de flujo que se maneja es diferente del que se presenta en el cuerpo humano, es un esbozo de los fenómenos que se presentan en una situación real de flujo [31,32]. Además, este tipo de estudios servirán en el futuro para la predicción de concentración de colesterol en una muestra de sangre. Sin lugar a dudas, el colesterol total influye directamente en la viscosidad de la sangre y en el grado de estructuración que tiene esta [31,32]. Podría este fenómeno no se significativo desde el punto de vista clínico, ya que sujetos con niveles elevados de colesterol aun dentro del intervalo de lo considerado normal, no se percaten de ello, pero reológicamente las diferencias son muy marcadas [31,32].

### 2.3.2 Como se estudia la sangre en un reómetro

La sangre, como cualquier otro fluido, puede estudiarse mediante técnicas reométricas. La sangre humana para su estudio se debe de obtener de voluntarios sanos, sin coagulopatisa en curso, mediante la aplicacióne un torniquete a la altura del musculo bíceps que genera turgencia para realzar las venas cefálicas y basilica. Se procede a realizar una punción y extraer sangre (5 mL a aproximadamente) en un tubo adicionado con EDTA para evitar la coagulación de la sangre durante el ensayo [31,32].

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

Los ensayos efectuados se hacen en situaciones de flujo controlado como el denominado flujo de corte simple en estado estacionario, en el que fluido se coloca entre un disco y un cono (con un ángulo pequeño cercano a un grado) del mismo diámetro, el cono gira a una velocidad angular controlada y se determina la viscosidad a diferentes velocidades de giro. La temperatura controlada durante la prueba y se trata de mantenerla en condiciones similares a las de una persona sana (Temperatura cercana a los 37 grados Celsius). El equipo que controla la temperatura, la velocidad de giro del cono y mide el torque generado se denomina reómetro. En este caso se utiliza un equipo de la marca TA Instruments modelo AR-G2, con geometría de cono y platos a una temperatura de 37 C [31,32].

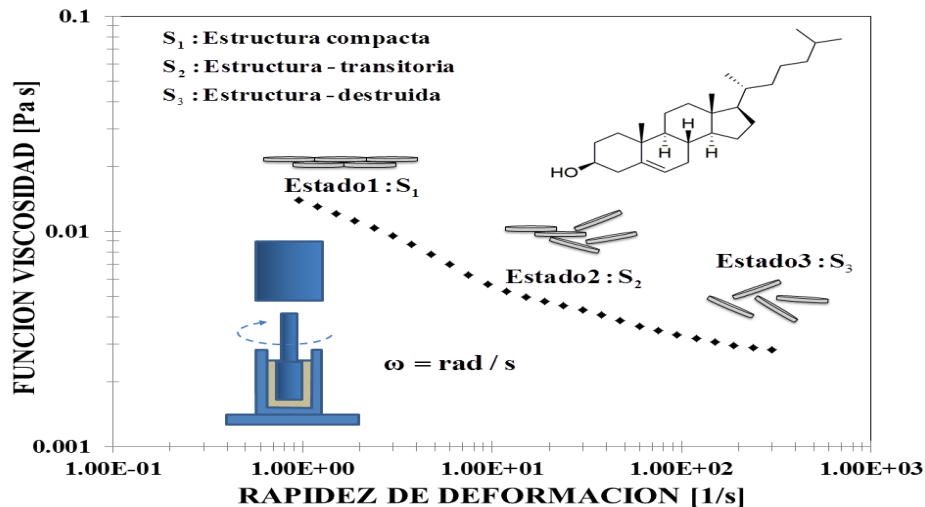


**Figura 5. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosas constantes y una zona intermedia tipo ley de potencia.**

En la Fig. (5) se ilustra una curva teórica de la sangre en un paciente sin contenidos elevados de colesterol en la sangre. En el eje de las ordenadas se grafica la función viscosidad, en función de la rapidez de deformación. A bajos valores de rapidez de deformación, se observa que la viscosidad es constante, en este punto se tienen estructuras compactas representadas por el estado  $S_1$  por otra parte, para una rapidez de deformación crítica, el sistema presenta una disminución en la viscosidad debido a que las estructuras compactas se rompen y por efecto del flujo se orientan. Aquí el sistema es representado por  $S_2$  respectivamente. Por otra parte, a una segunda rapidez de deformación crítica, el sistema presenta una segunda meseta en donde se tiene una estructura de la sangre completamente destruida y el sistema presenta la menor viscosidad en la ventana de observación del experimento  $S_3$ .

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

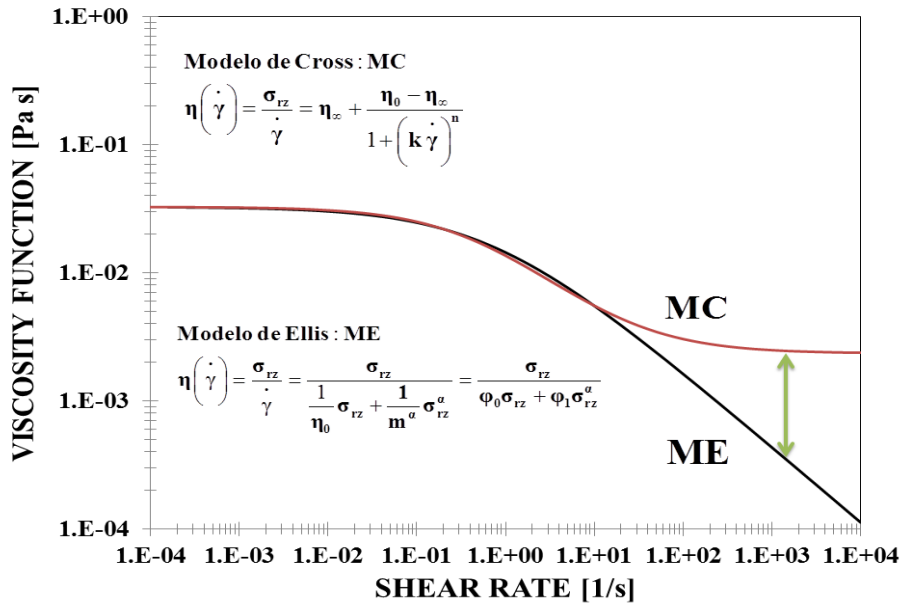
En la Fig. (6) se ilustra el mismo reograma pero para una persona que tiene alto contenido de colesterol en la sangre. Se observa que la viscosidad aumenta por efecto de las estructuras complejas que se forman. Es evidente, que las dos zonas a bajo y alto corte, desaparecen, por lo que solo se tiene una zona tipo ley de potencia, y dependiendo el grado de colesterol en la sangres, esta presenta fenómenos de esfuerzo de cadencia, deslizamiento en la pared, tixotropía y reopexia.



**Figura 6. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosas constantes y una zona intermedia tipo ley de potencia.**

En la Fig. (6) se ilustra la función viscosidad como función de la rapidez de deformación utilizando el modelo de Cross y el modelo de Ellis respectivamente. Los dos modelos pueden caracterizar las curvas reológicas de la sangre, sin embargo el modelo de Ellis es mucha más simple y versátil que el modelo de Cross, debido a que predice soluciones analíticas para la velocidad axial, flujo volumétrico, función viscosidad etc., y puede combinarse con otros modelos para incluir los efectos elásticos. Sin embargo, el modelo de Ellis no predice la segunda meseta del modelo de Cross. Por otra parte, el modelo de Cross reproduce la curva de flujo (viscosidad vs rapidez de deformación) y presenta soluciones numéricas para el perfil de velocidades y flujo volumétrico en diferentes geometrías. Finalmente, como se observa en la Fig. (7), ambos modelos describen muy bien la misma curva de flujo a basas y moderadas rapidezces de deformación respectivamente.





**Figura 7. Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol. La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Cross. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.**

## 2.4 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. Primero se define la ecuación más simple, el modelo newtoniano, seguida de alguno de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema.

### 2.4.1 Fluido newtoniano

En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{dVz}{dr} = \mu \dot{\gamma} \quad (2)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana  $\mu$  y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (2), el esfuerzo cortante,  $\sigma_{rz}$  tiene unidades de Pa y gama  $\dot{\gamma} = dVz/dr$  punto de inverso de segundo respectivamente. Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (1) son no newtonianos.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

## 2.4.2 Fluidos no newtonianos

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, pH y la rapidez con la que se deforma.

### a) *Modelo de ley de potencia*

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el del ley de Potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\sigma_{rz} = k \left( \dot{\gamma}_{rz} \right)^n = k \left( -\frac{dV_z}{dr} \right)^n = k \left| \frac{dV_z}{dr} \right|^{n-1} \left( -\frac{dV_z}{dr} \right) \quad (3)$$

Este modelo contiene dos parámetros de ajuste  $k$  y  $n$  son parámetros. El parámetro  $k$  es conocido como el índice de consistencia y  $n$  es exponente asociado al comportamiento no newtoniano del fluido. Debido a que  $n$  determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si  $n < 1$  el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando  $n > 1$  la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozante al corte). Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de  $k$  depende del valor numérico de  $n$ , con lo cual valores de  $k$  de distintos fluidos no son comparables.

### b) *Modelo de Ellis*

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia. Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva. La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por:  $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$  los cuales están relacionados con la fluideces a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$\dot{\gamma}_{rz} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (4)$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

### b) Modelo de Carreau

El siguiente modelo, fue propuesto por Carreau para describir toda la curva reológica, es decir a bajas, moderada y altas rapidezces de deformación respectivamente. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) Viscosidad a corte bajo, (ii) Viscosidad a alto corte, (iii) Un tiempo asociado a la fluidez del material y (i) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido  $\{\eta_0, \eta_\infty, \lambda, n\}$  respectivamente. La expresión matemática que describe el modelo de Carreau es la siguiente:

$$\eta\left(\dot{\gamma}_{rz}\right) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left\{1 + \left(\lambda \dot{\gamma}_{rz}\right)^2\right\}^{(n-1)/2}}; \dot{\gamma}_{rz} = -\frac{dV_z}{dr} \quad (5)$$

### c) Modelo de Reiner-Phillipoff

El modelo de Reiner-Phillipoff es un modelo inelástico que contiene tres parámetros de ajuste asociados a las propiedades no-newtonianas del sistema. Esta ecuación constitutiva, contiene cuatro parámetros ajustables: (i) viscosidad a corte bajo, (ii) viscosidad a alto corte, (iii) un tiempo asociado a la fluidez del material y (iv) un índice que caracteriza el engrosamiento o adelgazamiento al corte del fluido respectivamente  $\{\eta_0, \eta_\infty, \sigma_s\}$ . La expresión matemática que describe el modelo de Reiner-Phillipoff es la siguiente:

$$\frac{dV_z(r,t)}{dr} = \frac{1}{\eta(\sigma_{rz})} \sigma_{rz} = \frac{1}{\eta_0 + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}} \sigma_{rz} \quad (6)$$

### 2.4.3 Fluido de Bingham

Estos fluidos presentan un comportamiento solido mientras que el esfuerzo de corte no supere un esfuerzo conocido como de cedencia  $\sigma_0$ . Por otra parte, una vez superado es valor puede adoptar un comportamiento newtoniano (Plástico de Bingham). El modelo matemático que describe el plástico de Bingham, se presenta a continuación:

#### a) Plástico de Bingham

$$\begin{aligned} |\sigma_{rz}| \geq |\sigma_0| &\Rightarrow \sigma_{rz} = \sigma_0 + \eta_0 \left(-\frac{dV_z}{dr}\right) = \sigma_0 + \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \\ |\sigma_{rz}| < |\sigma_0| &\Rightarrow \dot{\gamma}_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En la Ec. (7)  $\sigma_0$  es el esfuerzo de cedencia y  $\eta_0$  es la viscosidad newtoniana en el sistema.

### 2.4.4 Modelos viscoelásticos

#### a) *Maxwell*

El modelo de Maxwell, es el modelo más sencillo que describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal. Este modelo combina al sólido de Hook, con el fluido newtoniano. El modelo de Maxwell contiene dos parámetros materiales  $\{\lambda_0 = \eta_0/G_0, \eta_0\}$ , el tiempo característico  $\lambda_0 = \eta_0/G_0$  se conoce como el tiempo de relajación del sistema, y es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo.

$$\sigma_{rz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \quad (8)$$

cuando el tiempo de relajación  $\lambda_0$  es cero el sistema se reduce al modelo newtoniano, mientras que a velocidades muy bajas  $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$ , el sistema puede ser integrado y puede obtener el modelo de Hook. Las propiedades materiales que intervienen la Ec. (8) pueden ser calculadas mediante pruebas de flujo oscilatorio y de flujo en estado estacionario respectivamente.

#### b) *Jeffrey*

El modelo de Jeffrey, es un modelo viscoelástico que acopla el modelo newtoniano (solvente) con el modelo de Maxwell (polímero). Suponiendo que el esfuerzo total en el sistema es la suma del esfuerzo del solvente, más el esfuerzo del polímero:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{(rz)s} + \sigma_{(rz)p} = \eta_s \dot{\gamma}_{rz} + \sigma_{(rz)p} \quad (9)$$

$$\sigma_{(rz)p} + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{(rz)p} = \eta_p \dot{\gamma}_{rz} \quad (10)$$

Combinando las Ecs. (9-10), se tiene el modelo de Jeffrey

$$\sigma_{rz} + \lambda_p \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta_0 \left( \dot{\gamma}_{rz} + \lambda_{jp} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}_{rz} \right); \lambda_{jp} = \left( \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \right) \lambda_p; \eta_0 = \eta_s + \eta_p \quad (11)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte  $\{\eta_0, \lambda_p, \lambda_{jp}\}$ . La Ec. (11) es frecuentemente utilizado en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffrey tiende a cero, i.e.  $\{\lambda_p = \lambda_{jp} = 0\}$ , al modelo

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

de Maxwell cuando  $\{\lambda_{Jp} = 0\}$ , al modelo de Hook cuando el frente de velocidades es homogéneo, es decir a rapidez de deformación baja, i.e.  $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$ .  $\square$

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura. En general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, Los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos [25, 27, 28]. En este contexto, los fluidos biológicos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniería. Ejemplo de estos fluidos son los secretan los insectos, la formación de la seda de la araña y diferentes gusanos, los fluidos corporales, y la sangre con diferentes patologías que representan una pandemia en la actualidad por el estilo de vida sedentaria en el que se vive actualmente [25, 27, 28].

En el siguiente capítulo, modelaremos el flujo pulsátil en un cilindro de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$ , porque el fluye una líquido no newtoniano, caracterizado por una ecuación tipo Ellis. Este modelo acopla el newtoniano y el modelo de ley de potencia. La elección de este modelo, fue debido a su simplicidad en comparación con otros mucho más complejos, además todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos.

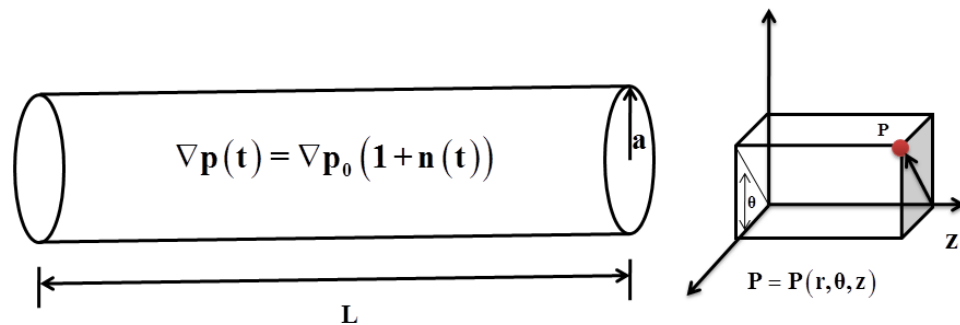
**CAPITULO III**  
**PLANTEAMIENTO FÍSICO DEL**  
**PROBLEMA**

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

En este capítulo se modela el flujo pulsátil en un capilar para un líquido newtoniano (viscosidad constante) y para un líquido no newtoniano (modelo de ley de potencia). En los dos casos, se deducen el perfil de velocidades, flujo volumétrico y el aumento en el flujo y al potencia debido al gradiente de presión pulsátil. Por último, estos resultados nos permitirán comparar con las predicciones del modelo de Ellis.

### 3.1 Planteamiento del problema de flujo pulsátil sanguíneo

El sistema físico que se analiza en esta sección se describe a continuación. Un líquido con estructura transitoria, fluye en la dirección axial en un cilindro de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$  bajo la acción de un gradiente modificado de presión.

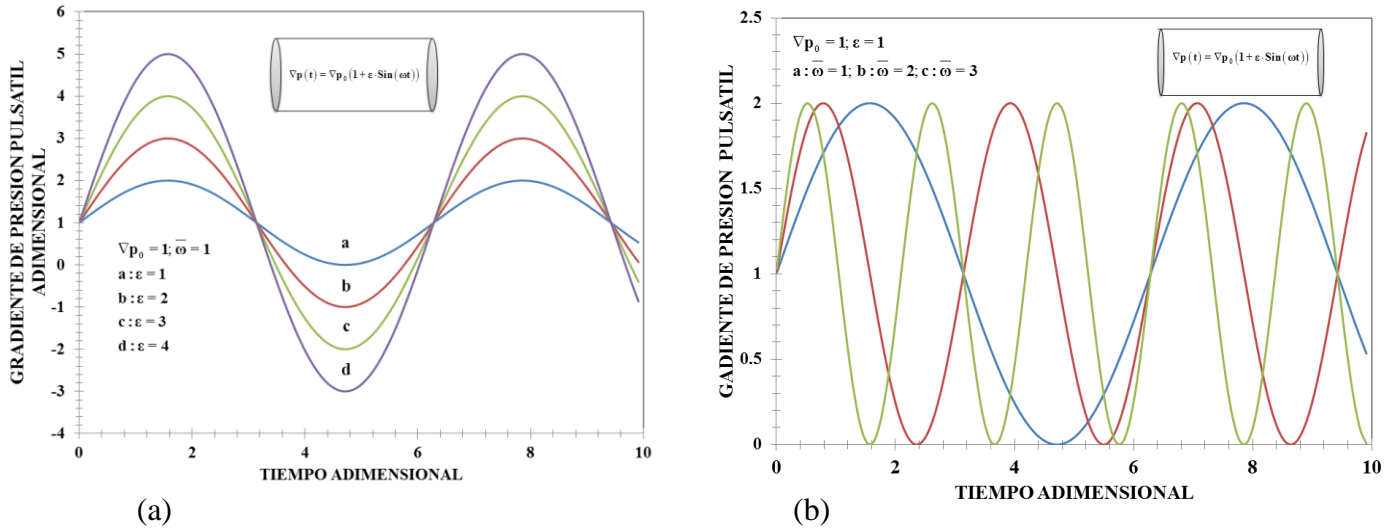


**Figura 8. Ilustra un capilar de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$  en donde el fluido fluye debido a un gradiente de presión pulsátil. Del lado derecho, se observa un punto material en coordenadas cilíndricas.**

Las condiciones de procesos son mencionadas a continuación:

- El proceso es isotérmico (Temperatura constante).
- Estado estacionario (Ninguna característica, atributo o variable dinámica del sistema depende del tiempo).
- Sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \theta, z)$ .
- El origen de coordenadas en el centro del capilar (El eje axial se coloca en la dirección del flujo)
- El gradiente de presión pulsátil es modelado introduciendo una función estocástica que representa las fluctuaciones en el gradiente de presión pulsátil, i.e.:  $\nabla p(t) = \nabla p_0 (1 + n(t))$ .
- La función estocástica estacionaria  $n(t)$  con promedio cero, i.e.  $\langle n(t) \rangle = 0$ .
- Efectos gravitacionales despreciables, i.e. el vector gravedad en cero:  $g = 0$ .
- La reología y el flujo del líquido no newtoniano es caracterizado por la ecuación constitutiva del modelo del Ellis.
- Los efectos inerciales son despreciables, es decir la derivada material del vector velocidad es cero, i.e.  $\rho DV/Dt = 0$ . Físicamente, significa que los mecanismos inerciales son despreciables con respecto a los viscosos.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano



**Figura 9. Ilustra la función asociada al gradiente de presión pulsátil. (a) Efecto de la amplitud de la perturbación, y (b) Efecto de la frecuencia en el gradiente de presión pulsátil.**

### 3.1.1 Campo vectorial de velocidades

El vector de velocidad, tensores de gradiente de velocidad, transpuesta del gradiente de velocidad y de tensor de esfuerzos viscoso. Matemáticamente, se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = [V_r, V_\theta, V_z] = [0, 0, V_z(r, t)] \quad (12)$$

### 3.1.2 Tensores gradiente de velocidad, rapidez de deformación y de esfuerzos viscosos

El tensor gradiente de velocidad, transpuesta de tensor gradiente de velocidad y tensor de esfuerzo viscosos toman la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (\nabla \mathbf{V})^T = \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$



### 3.1.3 Conservación de masa y momento

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible  $D\ln\rho/Dt = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

La ecuación de movimiento en forma vectorial toma la forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (15)$$

### 3.1.4 Ecuación constitutiva modelo de ELLIS

La ecuación constitutiva para escribir nuestro líquido complejo está caracterizado por el modelo de Ellis. La expresión matemática que describe la rapidez de deformación con el esfuerzo cortante

$$-2\mathbf{D} = \varphi_0 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (16)$$

El modelo de Ellis contiene tres parámetros  $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$  los cuales están asociados a la fluidez a rapidez de deformación baja, rapidez de deformación moderada y el exponente alfa que describe la naturaleza adelgazante o engrosante del líquido no-newtoniano. El modelo se puede expresar como una superposición del modelo newtoniano y ley de potencia, es decir:

$$\underbrace{\gamma_{rz}}_{\text{Newtoniano}} = \underbrace{\gamma_{rz}}_{\text{Ley de potencia}} + \underbrace{\gamma_{rz}}_{\text{Ley de potencia}} = \frac{1}{\eta_0} \sigma_{rz} + \left( \frac{1}{m} \right)^{1/n} (\sigma_{rz})^{1/n} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (17)$$

En donde, se han definido las siguientes variables:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\eta_0}; \varphi_1 = \left( \frac{1}{m} \right)^\alpha; \alpha = 1/n \quad (18)$$

En particular, el fluido de Ellis fue seleccionado debido a su simplicidad y sencillez matemática con respecto a otros modelos reológicos (Yasuda-Cross, Reiner-Phillipoff, etc). Además, todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos en estado estacionario y no estacionario respectivamente.

### 3.1.5 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de masa, momento y constitutivas, toman la forma:

$$\text{C.F.:} \begin{cases} \mathbf{V}(r = a) = [0, 0, V_z(r = a, t)] = [0, 0, 0] \\ \left. \frac{\partial V_z(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

La primera de ellas, está relacionada con la condición de no deslizamiento del líquido en el sólido, y la segunda se relaciona a la simetría del flujo.

### 3.1.6 Gradiente de presión pulsátil y función estocástica

Para representar el efecto del flujo pulsátil se utiliza una función estocástica  $n(t)$  con promedio cero, la expresión matemática puede ser expresada como:

$$\nabla p(t) = \nabla p(1 + n(t)) \quad (20)$$

La función estocástica  $n(t)$  representa un ruido en el gradiente de presión pulsátil y matemáticamente puede ser representada por una función estocástica cuyo promedio es cero, i.e.,  $\langle n(t) \rangle = 0$  y matemáticamente se describe por el teorema del valor medio

$$\langle n(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} n(t) dt = 0 \quad (21)$$

$$\langle (n(t))^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (n(t))^2 dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (n(t))^2 dt \neq 0 \quad (22)$$

La segunda Ec. (22) implica que el cuadrado de una función con promedio cero es diferente de cero por lo que este hecho será importante en los cálculos posteriores, en los siguientes capítulos. Para ejemplificar esto supongamos que  $n(t)$  es una función trigonométrica sinusoidal, i.e.

$$n(t) = M \sin(\omega t) \quad (23)$$

En la Ec. (23)  $M$  es la amplitud de las perturbaciones y  $\omega$  es la frecuencia de la función estocástica. El promedio de la Ec. (23) y del cuadrado de la Ec. (23) toma la forma:

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} M \sin(\omega t) dt = M \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(\omega t) dt = M \frac{\Omega}{2\pi} \text{Cos}(\omega t) \Big|_0^{2\pi/\Omega} = 0 \\ \langle (n(t))^2 \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} (M \sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} M^2 \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} (1 + \text{Cos}(2\omega t)) dt = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

### 3.1.7 Eficiencia y Potencia

A partir de la definición integral del flujo volumétrico se puede obtener una expresión equivalente en término de la rapidez de deformación (Bird et al. 1988). Integrando por partes la definición general del flujo volumétrico y utilizando la condición de frontera de adherencia definida en (3),

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \left( \int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r,t) r dr d\theta \right) dt - \int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r) r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r) r dr d\theta} \quad (25)$$

De la misma manera, la fracción de energía consumida por efecto del flujo pulsátil es definida por el producto del flujo volumétrico no estacionario y el gradiente de presión pulsátil respectivamente, i.e.

$$\begin{aligned} E(\%) &= 100 \frac{\langle P(t) \rangle - P_0}{P_0} = 100 \frac{\langle Q(t) \nabla p_0 (1 + n(t)) \rangle - Q_0 \nabla p_0}{Q_0 \nabla p_0} \\ &= 100 \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left( \int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r,t) r dr d\theta \right) (1 + n(t)) \right\} dt - \int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r) r dr d\theta}{\int_0^a \int_0^{2\pi} V_z(r) r dr d\theta} \end{aligned} \quad (26)$$

### 3.2 Ecuaciones escalares desacopladas

Desacoplando las ecuaciones diferenciales se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, que permiten plantear el siguiente problema de valor de frontera:

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$\text{P.F.} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial z}(1 + M \text{Sen}(\omega t)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \sigma_{rz}(r,t)) \\ -\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = \phi_0 \sigma_{rz}(r,t) + \phi_1 (\sigma_{rz}(r,t))^\alpha \\ V_z(r=a,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} V_z(r,t) \right|_{r=0} = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

El problema de frontera dado por la Ec. (27) nos permite calcular el flujo volumétrico y la potencia asociada con el flujo pulsátil:

$$I(\%) = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left( \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) dt - \int_0^a \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} r^2 dr}{\int_0^a \frac{V_z(r)}{dr} r^2 dr} \quad (28)$$

$$E(\%) = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left( \int_0^a \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} r^2 dr \right) (1 + M \text{Sen}(\omega t)) dt - \int_0^a \frac{dV_z(r)}{dr} r^2 dr}{\int_0^a \frac{dV_z(r)}{dr} r^2 dr} \quad (29)$$

En la siguiente sección, se calculara el perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico estacionario, flujo volumétrico promedio, flujo volumétrico en estado no estacionario para el modelo de Ellis que contiene como casos particulares a los modelos: (i) newtoniano y (ii) Ley de potencia respectivamente.

**CAPITULO IV**  
**MODELADO TEORICO**

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

En este capítulo se obtiene las expresiones analíticas para el perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico, flujo volumétrico promediado, aumento en el flujo volumétrico, fracción de energía consumida, a partir de las ecuaciones generales planteadas en el capítulo anterior.

### 4.1 Calculo de la velocidad axial pulsátil, para el modelo reológico de Ellis.

Partiendo del modelo reológico de Ellis se tiene lo siguiente:

$$-\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = \varphi_0 \sigma_{rz} + \varphi_1 (\sigma_{rz})^\alpha \quad (50)$$

Despreciando los efectos inerciales y considerando que el sistema fluye debido al gradiente depresión pulsátil

$$-\frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} = \varphi_0 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \right) + \varphi_1 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \right)^\alpha \quad (51)$$

Integrando la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$V_z(r,t) = \frac{\varphi_0}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r^2 \right) + \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha r^{\alpha+1} + C_1(t) \quad (32)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared:

$$C_1(t) = -\frac{\varphi_0}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) a^2 \right) - \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha a^{\alpha+1} \quad (33)$$

El perfil de velocidades puede ser expresado como:

$$V_z(r,t) = -\frac{\varphi_0 a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) - \frac{\varphi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (34)$$

### 4.2. Calculo del flujo volumétrico.

El flujo volumétrico se calcula de la misma manera que en el modelo Newtoniano y ley de potencia:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{\varphi_0 a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta$$

$$-\frac{\varphi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right] r dr d\theta \quad (35)$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

Integrando la parte angular y haciendo el siguiente cambio de variable:  $z = R/a$ , se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{\Phi_0 a^4}{2} (2\pi) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) \int_0^1 [1-z^2] z dz$$

$$-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^1 [1-(z)^{\alpha+1}] z dz \quad (36)$$

Finalmente, integrando la expresión anterior, se obtiene el flujo volumétrico para el modelo de Ellis:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{\Phi_0 a^4}{2} (2\pi) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) \int_0^1 [1-z^2] z dz$$

$$-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^1 [1-(z)^{\alpha+1}] z dz \quad (37)$$

Integrando la Ec. (37) se tiene el flujo volumétrico transitorio:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{\Phi_0 a^4}{2} (2\pi) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) \int_0^1 [1-z^2] z dz$$

$$-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^1 [1-(z)^{\alpha+1}] z dz \quad (38)$$

### 4.3. Calculo del flujo volumétrico pulsátil de Ellis.

Utilizando el teorema del binomio en la Ec. (63), se puede expandir el esfuerzo en la pared no lineal y se obtiene una expresión matemáticamente, para el flujo volumétrico transitorio.

$$Q(t) = -\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right) -$$

$$\frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \left( 1+\alpha n(t) + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1)n^2(t) + \frac{1}{6} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)n^3(t) \right) \right) \quad (39)$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

Promediando la ecuación anterior se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle Q(t) \rangle = & -\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) (1 + \langle n(t) \rangle) \\ & - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \alpha \langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{6} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \langle n^3(t) \rangle \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Simplificando la anterior expresión, se tiene

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{\pi\phi_0 a^3}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a \right) - \frac{\pi\phi_1 a^3}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a \right)^\alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \langle n^2(t) \rangle \right) \quad (41)$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico promedio, depende de las propiedades materiales y del cuadrado del parámetro de perturbación definido en el gradiente de presión estocástico. Por otra parte, el flujo volumétrico si perturbar se obtiene haciendo tender el parámetro epsilon a cero, es decir:

$$Q_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle Q(t) \rangle = -\frac{\pi\phi_0 a^3}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a \right) - \frac{\pi\phi_1 a^3}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a \right)^\alpha \quad (42)$$

#### 4.4. Aumento en el flujo volumétrico.

El aumento en el flujo está definido como:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \frac{\frac{\phi_1}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^\alpha}{\frac{\phi_0}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right) - \frac{\phi_1}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^\alpha} \langle n^2(t) \rangle \quad (43)$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 100 \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \frac{4 \left( \sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^{\alpha-1}}{\alpha+3 + 4 \left( \sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^{\alpha-1}} \langle n^2(t) \rangle \quad (44)$$

Finalmente, si la función estocástica es de nuevo una función trigonométrica, i.e.,



## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} = 25\varepsilon^2 \alpha (\alpha - 1) \frac{4 \left( \sqrt{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^{\alpha-1}}{\alpha + 3 + 4 \left( \sqrt{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^{\alpha-1}} \quad (45)$$

El aumento de flujo para el modelo de Ellis, generaliza el modelo de ley de potencia previamente establecido. La ecuación tiene dos límites asintóticos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \rightarrow 0 \quad (46)$$

$$\lim_{\partial p / \partial z \rightarrow \infty} I(\%) = 100 \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \rightarrow 25M^2 (\alpha(\alpha - 1)) \quad (47)$$

Es decir, cuando el índice  $\alpha$  tiende a la unidad el aumento decrece drásticamente a cero, lo que implica que el sistema se encuentra en la región newtoniana. Por otra parte, la segunda condición significa que a gradiente de presiones elevadas, el aumento en el flujo es independiente del gradiente de presión y su valor está determinado por las propiedades adelgazantes al corte en el sistema.

### 4.5. Consumo energético adimensional

El porcentaje de potencia requerida para el gradiente de presión pulsátil se define como sigue:

$$E(\%) = 100 \frac{\left\langle Q(t) \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) \right\rangle - Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}}{Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}} = 100 \frac{\langle Q(t)(1+n(t)) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad (48)$$

Calculando el promedio en la Ec.(48) y simplificando se tiene los siguiente:

$$\begin{aligned} \langle Q(t)(1+n(t)) \rangle &= -\frac{\pi \phi_0 a^3}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right) \left( 1 + \langle (n(t))^2 \rangle \right) \\ &\quad - \frac{\pi \phi_1 a^3}{\alpha + 3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} a \right)^\alpha \left( 1 + \frac{1}{2} (\alpha + 1) \alpha \langle (n(t))^2 \rangle \right) \end{aligned} \quad (49)$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

Sustituyendo el gradiente de presión pulsátil, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = 100 \frac{-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) (1 + \langle n^2(t) \rangle) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha+1)\alpha \langle n^2(t) \rangle\right) - \left(-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha\right)}{-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha} \quad (50)$$

Simplificando la energía requerida para el flujo, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = 100 \frac{-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) (1 + \langle n^2(t) \rangle) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha+1)\alpha \langle n^2(t) \rangle\right) - \left(-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha\right)}{-\frac{\pi\phi_0 a^4}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right) - \frac{\pi\phi_1 a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha} \quad (51)$$

Finalmente, se tiene el incremento en la energía toma la forma:

$$E(\%) = 50M^2 \frac{1 + \left(\frac{1}{2} \alpha(\alpha+1)\right) \frac{4}{\alpha+3} \left(\sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a\right)^{\alpha-1}}{1 + \frac{4}{\alpha+3} \left(\sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a\right)^{\alpha-1}} \quad (52)$$

$$\lim_{\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow \infty} E(\%) = 50M^2 \frac{1 + \frac{4}{\alpha+3} \left(\sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{2} \alpha(\alpha+1)\right)}{1 + \frac{4}{\alpha+3} \left(\sqrt[\alpha-1]{\frac{\phi_1}{\phi_0}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} a\right)^{\alpha-1}} \rightarrow 25M^2 \alpha(1+\alpha) \neq 0 \quad (53)$$

La expresión anterior se reduce al resultado obtenido mediante el modelo de ley de potencia. Por otra parte, si el índice del modelo de Ellis tiende al uno, la energía se reduce al modelo Newtoniano:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} E(\%) \rightarrow 50\epsilon^2$$

**CAPITULO V**  
**ANALISIS DE RESULTADOS**

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

## 5.1 Variables adimensionales

En este capítulo se presenta las predicciones teóricas de los resultados principales del capítulo IV. Para facilitar las simulaciones, se introducen las siguientes variables adimensionales, para el esfuerzo, la frecuencia, el tiempo, la coordenada radial, la velocidad axial y el flujo volumétrico respectivamente [1,2].

$$\tau_w = \frac{\sigma_w}{\sigma_c}; \omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}; t^* = \frac{t}{t_c}; r^* = \frac{r}{a}; V_z^* = \frac{V_z}{V_c}; Q^* = \frac{Q}{Q_c} \quad (49)$$

En las variables adimensionales definidas en la Ec. (49)  $\{\sigma_c, V_c, Q_c, t_c, \omega_c\}$  son las variables características del sistema, definidas para el esfuerzo cortante, velocidad axial, flujo volumétrico, tiempo, y frecuencia del sistema, las cuales son definidas a continuación:

$$\sigma_c = \alpha \sqrt{\frac{\phi_0}{\phi_1}}; V_c = a/t_c; Q_c = 2\pi a^2 V_c; t_c = \frac{1}{\phi_0 \sigma_c}; \omega_c = \frac{1}{t_c} = \phi_0 \sigma_c \quad (50)$$

En la Ec. (50)  $\{\phi_0, \phi_1\}$  son las fluideces a rapidez de corte bajo y moderado del modelo de Ellis,  $a$  es el radio del tubo. Una vez que las variables adimensionales definidas en la Ec.50, son introducidas en los resultados generales del capítulo anterior, se obtienen las siguientes ecuaciones adimensionales:

a) Velocidad axial adimensional

$$V_z^*(\tau_w, r^*, t^*, \omega^*, M, \alpha) = \frac{1}{2} \tau_w (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) (1 - r^{*2}) + \frac{1}{\alpha + 1} (\tau_w)^\alpha (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*))^\alpha (1 - |r^*|^{\alpha+1}) \quad (51)$$

b) Velocidad promedio adimensional

$$\langle V_z^*(\tau_w, r^*, t^*, \alpha) \rangle = \frac{1}{2} \tau_w (1 - r^{*2}) + \frac{1}{\alpha + 1} (\tau_w)^\alpha (1 - |r^*|^{\alpha+1}) \quad (52)$$

c) Flujo volumétrico

$$Q^*(\tau_w, r^*, t^*, \omega^*, \alpha, M) = \frac{1}{4} \tau_w (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*)) + \frac{1}{\alpha + 3} (\tau_w)^\alpha (1 + M \text{Sen}(\omega^* t^*))^\alpha \quad (53)$$

d) Flujo volumétrico promedio

$$\langle Q^*(\tau_w, r^*, t^*, M, \alpha) \rangle = \frac{1}{4} \tau_w + \frac{1}{\alpha + 3} (\tau_w)^\alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) \left( \frac{1}{2} M^2 \right) \right) \quad (54)$$

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

Aumento en el flujo volumétrico

$$I(\tau_w, M, \alpha) = 25M^2 \alpha (\alpha - 1) \frac{4\tau_w^{\alpha-1}}{(\alpha+3) + 4\tau_w^{\alpha-1}} \quad (55)$$

e) Energía consumida debido al flujo pulsátil

$$E(\tau_w, M, \alpha) = 50M^2 \frac{1 + \left(\frac{1}{2} \alpha (\alpha + 1)\right) \frac{4}{\alpha + 3} \tau_w^{\alpha-1}}{1 + \frac{4}{\alpha + 3} \tau_w^{\alpha-1}} \quad (56)$$

f) Aumento en el flujo volumétrico en función de la frecuencia

$$I(\tau_w, M, \alpha, De, \omega^*) = 25M^2 \alpha (\alpha - 1) \frac{4\tau_w^{\alpha-1}}{\alpha + 3 + 4\tau_w^{\alpha-1}} (1 + De^2 \omega^{*2}) \quad (57)$$

Las Ecs. (49-57), son las más importantes de la presente investigación de licenciatura y contiene como caso particular los modelos de ley de potencia y newtoniano respectivamente. Nótese que la Ec. (57) corresponde al caso de un fluido viscoelástico no lineal (Modelo de Tanner), en donde el número de Deborah  $De = \lambda_0 / t_c$  se define como el cociente de dos tiempos característicos asociados a la viscoelasticidad del material y a las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis [1,2]. Esta modificación nos permitirá tomar en cuenta el efecto de la frecuencia en el flujo pulsátil.

## 5.2 Campo de velocidades

En las Fig. 10 se ilustra la velocidad axial promedio adimensional vs coordenada radial adimensional en función del esfuerzo en la pared. Los parámetros utilizados en la simulación son:  $\alpha = 2$ ;  $\tau_w = \{1, 2, 3, 4\}$  respectivamente. En esta simulación, el promedio de la función estocástica vale cero, i.e.,  $n(t) = 0$ . En todos los casos (a-d), el sistema presenta un perfil parabólico, con el máximo centrado en  $r^* = 0$ . Nótese, que al aumentar el esfuerzo en la pared, el máximo aumenta, pero la forma de los perfiles de velocidad son las mismas. Por otra parte, aunque la coordenada radial adimensional está acotada de cero uno, el intervalo se extendió de -1 a 1, lo que implica que tenemos un flujo axi-simétrico en el perfil de velocidades.

En la Fig. (11) se ilustra el perfil de velocidades promedio adimensional (Ec. 52) vs coordenada radial adimensional en función de las propiedades adelgazantes del modelo de Ellis. El valor de esfuerzo empleado en la simulación, es  $\tau_w = 3$ . Dos hechos importantes pueden ser destacados en la Fig. (10). El primero de ellos, es que el efecto del exponente  $\alpha$  sobre el perfil de velocidades, es incrementar el perfil de velocidades, por efecto de las

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

propiedades adelgazantes del modelo de Ellis. El segundo punto importante, es que al aumentar el adelgazamiento, el perfil de velocidades, forma un frente homogéneo de velocidades conforme las propiedades adelgazantes aumentan. Este hecho, se hace más notable en la simulación (d) de la Fig. (10).

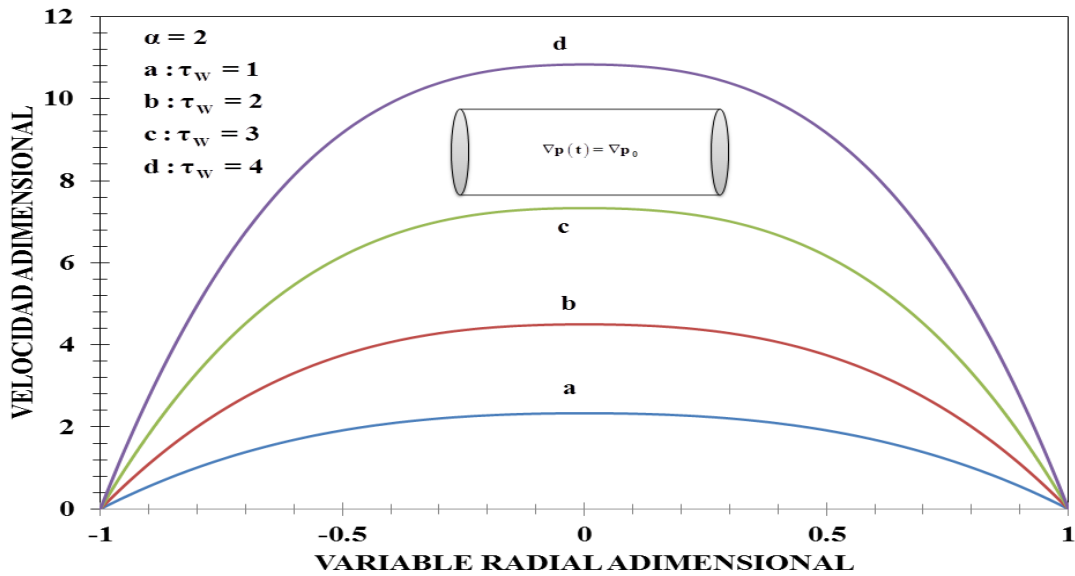


Figura 10. Velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función del esfuerzo en la pared.

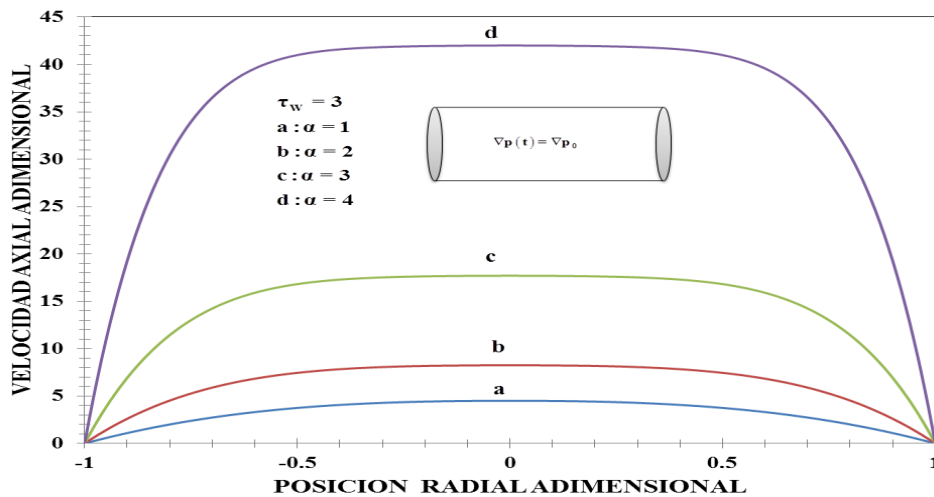
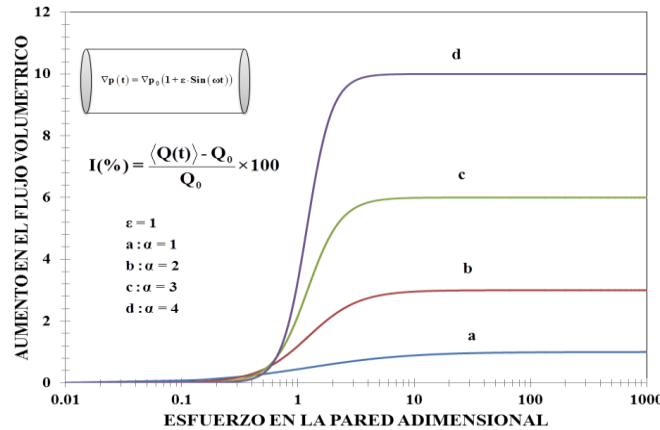


Figura 11. Velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional como función de las propiedades adelgazantes al corte.

## 5.3 Aumento en el flujo y requerimientos energéticos

En esta sección, se presentan las simulaciones para el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared, en función de las propiedades adelgazantes al corte  $\alpha$  y la amplitud  $M$  de la función estocástica  $n(t)$ .



**Figura 12. Aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared adimensional como función del parámetro, asociado a las propiedades adelgazantes al corte del fluido.**

En la Fig. 12 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared adimensional, como función de las propiedades adelgazantes al corte, a través del exponente  $\alpha$ . En todos los casos, el sistema presenta una zona a bajos valores de esfuerzo en la pared en donde el aumento en el flujo volumétrico es casi cero. Por otra parte, para un cierto valor crítico de esfuerzo en la pared adimensional, el aumento en el flujo volumétrico  $I(\%)$  presenta un comportamiento monótono creciente, seguido de un zona casi constante, en donde el sistema es independiente del esfuerzo en la pared adimensional. Dos observaciones son importantes en esta simulación:

- (i) El aumento en el flujo volumétrico, es directamente proporcional, al aumento en las propiedades adelgazantes al corte del modelo de Ellis.
- (ii) A esfuerzos en la pared adimensional elevados, el aumento en el flujo volumétrico está determinado por:  $I_{\infty}(\alpha, \varepsilon) = \lim_{\tau_w \rightarrow \infty} I(\tau_w, \alpha, \varepsilon) = 25\varepsilon^2 \alpha(\alpha - 1)$
- (iii) A esfuerzos adimensionales elevados, el valor de  $\alpha$  está determinado por la siguiente ecuación cuadrática

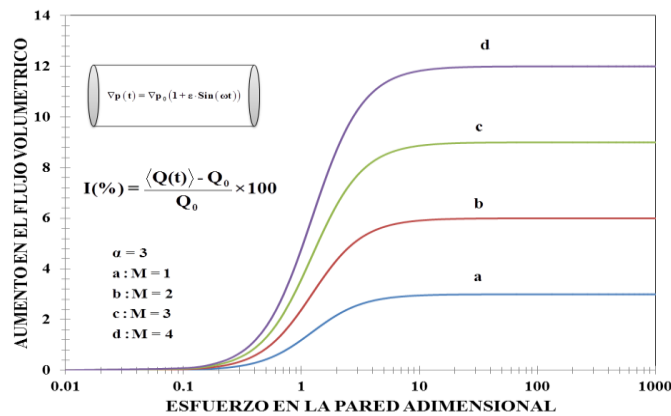
$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4I(\%) / 25\varepsilon^2}}{2} \quad (63)$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

Tomado el valor positivo de la Ec. (63) se puede obtener el índice de adelgazamiento del modelo de Ellis.

$$\alpha_+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 4I(\%) / 25\epsilon^2}}{2} \quad (64)$$

La Ec. (64) indica que bajo ciertas condiciones experimentales, el sistema de flujo pulsátil nos da información de la curva reológica y por lo tanto de la viscosidad aparente en el sistema.



**Figura 13. Aumento en el flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la fuerza macroscópica.**

En la Fig. 13 se ilustra el aumento en el flujo vs el esfuerzo en la pared en función de la amplitud  $M$  de la función estocástica. El otro parámetro utilizado en la simulación es  $\alpha = 3$ . El aumento en el flujo volumétrico muestra tres zonas principales. A bajos valores del esfuerzo en la pared adimensional, el aumento en el flujo volumétrico es menor a la unidad, i.e.,  $I < 1$ . Sin embargo, a un valor crítico  $\tau_{c1} = 0.2$ , el sistema muestra un comportamiento monótono creciente hasta un segundo valor crítico  $\tau_{c2} = 10$ , en donde el aumento en el flujo volumétrico, presenta una meseta en donde el aumento en el flujo  $I_{\infty}(\alpha, M) = 25M^2\alpha(\alpha-1)$  es independiente del esfuerzo en la pared  $\tau_w$ . Nótese, que al igual que en la Fig. 12, la meseta está completamente determinada por las propiedades adelgazantes del modelo de Ellis. Por una parte, las Figs. (11,12) indican que la condición necesaria para que exista aumento en el flujo, es que el sistema presente adelgazamiento al corte, es decir, su viscosidad cambie en función de la rapidez de deformación. Por otra parte, el valor de la amplitud  $M$ , modifica hacia mayores de Aumento en el flujo volumétrico  $I$  ( $M \gg 1$ ) o menores valores de  $I$  ( $M \ll 1$ ), dependiendo de su valor.



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

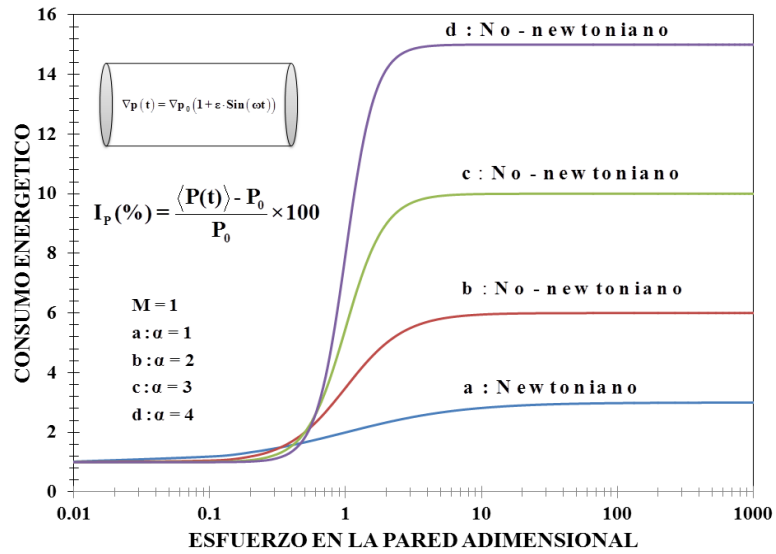


Figura 14. Consumo energético vs esfuerzo en la pared adimensional en función de las propiedades adelgazantes al corte.

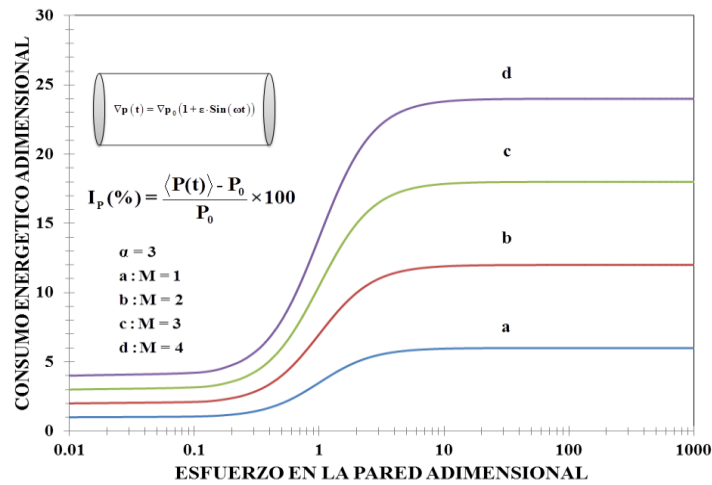


Figura 15. Ilustra el consumo de energía vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la función estocástica.

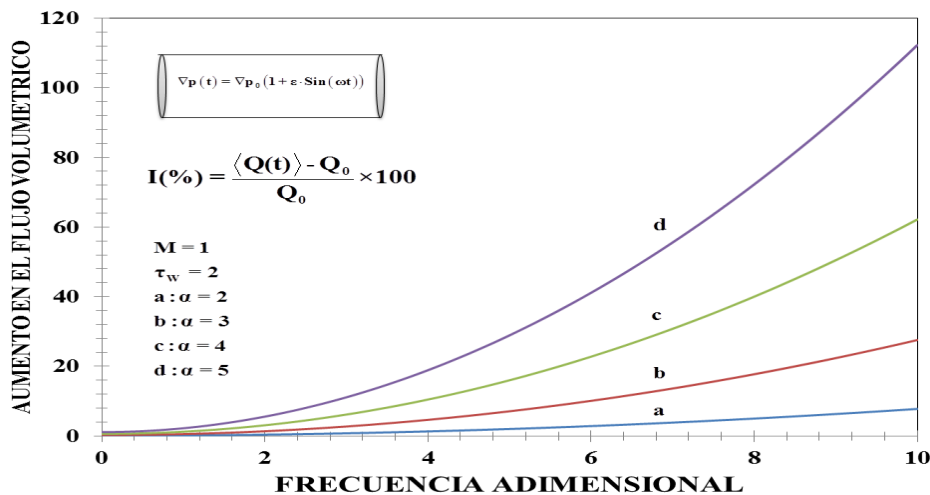
## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

En las Figs. (14, 15) se ilustra el consumo energético vs esfuerzo en la pared adimensional, en función del exponente  $\alpha$  y la amplitud  $M$  del gradiente de presión pulsátil.

En los dos casos, el comportamiento es similar a las Figs. (12-14). A bajos esfuerzos de la pared adimensionales, la energía consumida es constante y su valor está completamente determinado por el siguiente valor asintótico:  $E_0 = \lim_{\tau_w \rightarrow 0} E(M) = 50M^2$ , es decir el valor de

la fracción de potencia consumida es independiente del esfuerzo en la pared, y solo depende del cuadrado de la amplitud en la función estocástica. Por otra parte, a un cierto valor crítico del esfuerzo en la pared, el consumo energético muestra un comportamiento monótono creciente hasta un segundo valor crítico en donde, el consumo de energía es independiente del esfuerzo en la pared adimensional, y satisface la siguiente relación asintótica:  $E_\infty = \lim_{\tau_w \rightarrow \infty} E(M, \alpha) = 25M^2\alpha(\alpha+1)$ . Obsérvese que a pesar de que el aumento en

el flujo volumétrico es cero en el fluido newtoniano  $I(\%)=0$ , la fracción de energías asociado a la potencia pulsátil, es diferente de cero  $E(\%) \neq 0$  para cualquier tipo de fluido newtoniano o no-newtoniano. El efecto de la amplitud de la fuerza sobre el consumo de energía, es el de desfasar las curvas a mayores valores en la potencia debido al flujo pulsátil (Fig. 15). Un hecho importante, es que el consumo de energía mecánica siempre es positiva, por lo que este sistema no representa una ventaja de tipo económico, puesto que para tener aumentos en el flujo volumétrico, se debe de emplear mayor energía. Este hecho está de acuerdo con los resultados teóricos expuestos por diferentes autores en la literatura especializada en el tema [1-7, 9-12].



**Figura 16. Ilustra el consumo de energía vs esfuerzo en la pared adimensional como función de la amplitud de la función estocástica.**

### 5.4 Aumento en el flujo y requerimientos energéticos en función de la frecuencia

En la Fig. 15 se ilustra el aumento en el flujo volumétrico como función de la frecuencia adimensional para varios valores del parámetro  $\alpha$ . Los otros valores utilizados en la simulación son: (i)  $M = 1$  y (ii)  $\tau_w = 2$ . La ecuación básica que se desarrolló para tomar en cuenta las propiedades viscoelásticas del material, es descrita en la Ec. (57):

$$I(\tau_w, M, \alpha, De, \omega^*) = 25M^2\alpha(\alpha-1) \frac{4\tau_w^{\alpha-1}}{\alpha+3+4\tau_w^{\alpha-1}} (1+De^2\omega^{*2})$$

Los resultados se ilustran en la Fig.15. Se observa que en todo el intervalo de frecuencias adimensionales, el aumento en el flujo volumétrico muestra un comportamiento monótono creciente y el desfase a valores mayores de flujo volumétrico, es un efecto de las propiedades adelgazantes al corte a través del exponente del modelo Ellis ( $\alpha$ ).

Finalmente, en esta sección se presenta un resumen de los resultados analíticos principales de este trabajo, los cuales se dan a continuación:

El aumento en el flujo volumétrico  $I(\%)$  es una función exclusiva de las propiedades adelgazantes al corte del fluido, a través del exponente  $\alpha$  del modelo de Ellis.

Un líquido que presenta viscosidad constante (Fluido newtoniano), no puede presentar aumento en el flujo volumétrico, i.e., el flujo volumétrico es cero,  $I(\%) = 0$ .

La meseta que se presenta en el flujo volumétrico a esfuerzos de pared grandes, puede ser modificada a través de las propiedades adelgazantes y por medio de la amplitud asociada a la perturbación estocástica.

El consumo de energía siempre es mayor en los fluido no-newtonianos que en los fluido newtonianos.

El parámetro alpha ( $\alpha$ ) que está asociado al adelgazamiento al corte, puede ser calculado por medio de las ecuaciones (63,64), por lo que este sistema de flujo, puede ser utilizado para obtener información acerca de las propiedades materiales del sistema (viscosímetro).

El aumento en el flujo volumétrico  $I(\%)$ , es una función creciente de la frecuencia adimensional  $\omega^*$ , y las curvas se desfasan por efecto de los efectos adelgazantes al corte del líquido, a través del índice  $\alpha$  del modelo de Ellis.

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

## 5.5 Aplicación biológica: Sangre Humana

En esta sección, se modela el aumento en el flujo volumétrico y los requerimientos energéticos con datos de sangre extraídos de la literatura especializada. Las Tablas 1 y 2 muestran los valores de las propiedades materiales y el valor del número adimensional Deborah. Este número adimensional, relaciona dos tiempos característicos, uno asociado a las propiedades viscoelásticas del sistema y el otro a un tiempo de escala relacionado con las propiedades materiales y geométricas del modelo de Ellis, i.e.  $De = \lambda_0 / t_c$ .

$$I_{\text{SANGRE}}[\tau_w; \alpha, M, De, \omega^*] = 25M^2\alpha(\alpha-1) \frac{4\tau_w^{\alpha-1}}{\alpha+3+4\tau_w^{\alpha-1}} (1+De^2\omega^{*2})$$

Tabla 1. Parámetros material utilizados del modelo de Ellis para describir las curvas reológicas asociadas con la función viscosidad.

Modelo	$\eta_0$ [Pas]	$\eta_\infty$ [Pas]	k [s]	n [1]	m [1]	$\alpha = 1/n$ [1]	$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]
ELLIS	0.0326	---	---	0.6290	0.1	1.5893	1053

Tabla 2. Variables y números adimensionales empleados en las simulaciones del fluido Bio reológico (Sangre Humana)

Experimento Computational	Frecuencia (rad/s)	Tiempo de Maxwell	Frecuencia Adimensional $\omega^* = \omega t_c$	Deborah $De = \frac{\lambda_0}{t_c}$
A	1	0.05	0.00823	19.68
B	1	0.1	0.00823	38.1361
C	1	0.5	0.00823	190.68
D	1	1	0.00823	381.361

Los valores de las propiedades de los materiales se dan en la Tabla 1. El tiempo característico, tiempo de Maxwell, radio del capilar están dados por las siguientes

expresiones.  $t_c = \frac{1}{\phi_0 \sigma_c}$ ;  $\sigma_c = \alpha^{-1} \sqrt{\frac{\phi_0}{\phi_1}}$   $\rho = 1053.6 \text{ kg/m}^3$ ;  $a = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m}$

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

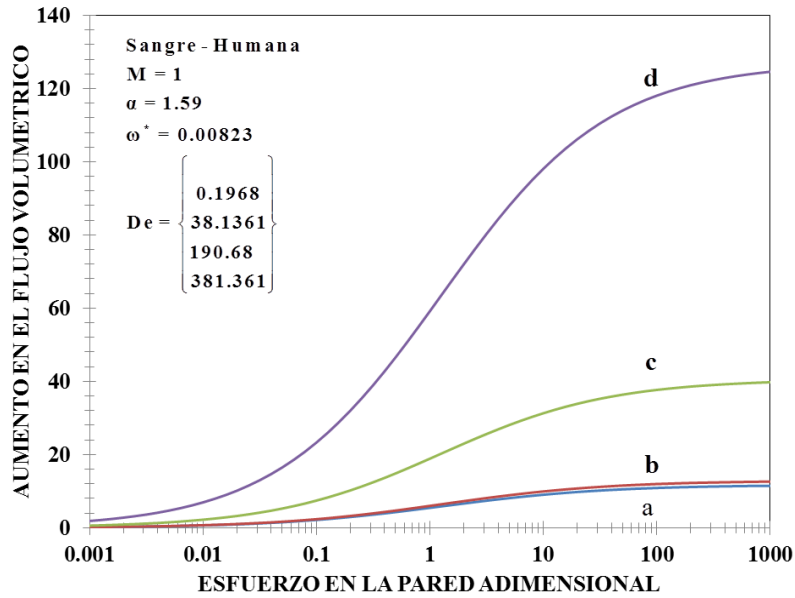


Figura 17. Ilustra el efecto del flujo volumétrico vs esfuerzo en la pared, como función del tiempo de relajación de Maxwell, a través del número adimensional Deborah.

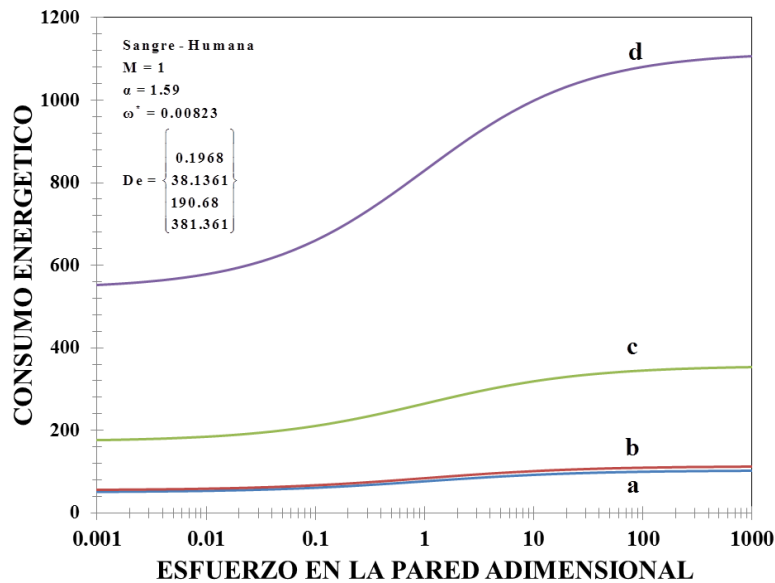
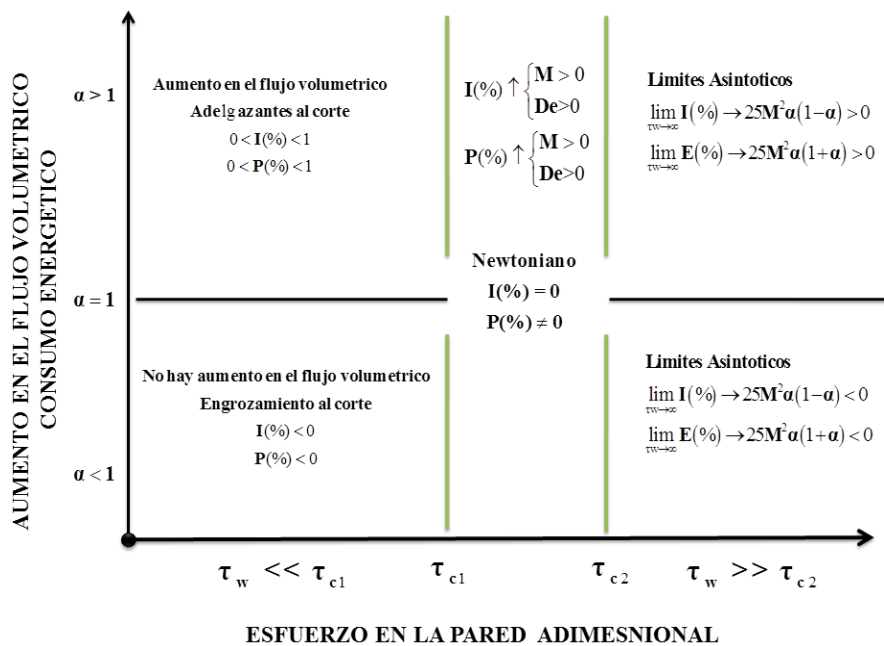


Figura 18. Ilustra el efecto del consumo energético vs esfuerzo en la pared adimensional, como función del tiempo de relajación de Maxwell, a través del número adimensional Deborah.

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

En la Fig.17 se simula el aumento en el flujo volumétrico para un líquido biológico (Sangre Humana) vs esfuerzo en la pared, para diferentes valores del tiempo de relajación viscoelástico de Maxwell a través del número adimensional Deborah. En todos los casos, el sistema presenta un comportamiento monótonamente creciente seguido de una meseta. De acuerdo a nuestro modelo, la viscoelasticidad juega un papel importante en el aumento de flujo, sin embargo, otros autores han encontrado que esto es función de la ecuación constitutiva que se utilice para modelar este fenómeno [16,18-22].

En la Fig. 18, se ilustra el consumo energético [fracción de potencia consumida debido al flujo pulsátil). Como la Fig.18, el comportamiento de la potencia es cualitativamente similar a lo obtenido mediante nuestros argumentos teóricos, es decir a esfuerzos en la pared bajos el consumo de energía es constante, sin embargo, a un cierto valor de esfuerzo crítico en la pared, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente en todo el intervalo de esfuerzos en la pared [16,18-22]. Es claro, que el efecto de incorporar la elasticidad en el sistema contribuye al aumento en la energía consumida (siempre es positiva), por lo que esto implicaría un mayor gasto energético [16,18-22]. Este hecho implica que el corazón gasta energía debido a las propiedades viscoelásticas en el sistema, por lo que el consumo de energía es muy sensible a las propiedades materiales de la ecuación constitutiva que se utiliza en la descripción del flujo pulsátil [16,18-22].



**Figura 19.** Se ilustra un resumen cualitativo de los principales resultados obtenidos en este trabajo. Se observa claramente, tres zona en nuestro sistema, a bajos esfuerzos en la pared, moderados esfuerzos y altos esfuerzos en la pared.

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

La Fig. 19 se presenta un resumen cualitativo de las aportaciones de este trabajo. Se observan tres zonas en nuestro sistema: (i) A bajos valores del esfuerzo en la pared el aumento en el flujo volumétrico y potencia en el caso de un fluido adelgazante al corte  $\alpha > 1$ , el aumento y la potencia son positivos. Por otra parte, en el caso de un fluido engrozante  $\alpha < 1$ , el aumento del flujo y la potencia son negativos. (ii) Sin embargo, para una región de nuestro experimento (Banda:  $\tau_{c2} - \tau_{c1} = \Delta\tau$ ), el aumento en el flujo volumétrico y consumo de energía son positivos. Es importante resaltar que el aumento en el flujo volumétrico y consumo de energía son variables directamente proporcionales de la amplitud del flujo pulsátil, frecuencia adimensional y del exponente alpha ( $\alpha$ ). Nótese, que en el caso de un fluido newtoniano  $\alpha = 1$ , el aumento en el flujo volumétrico es cero, pero la energía consumida es diferente de cero, i.e.  $I \neq 0$  y positiva  $I > 0$ . (iii) La tercera zona importante se presenta a esfuerzos de la pared elevados. La Fig. 19 ilustra que el caso de un fluido adelgazante  $\alpha > 1$ , y esfuerzos en la pared mayores a un segundo esfuerzo crítico, i.e.,  $\tau_w \gg \tau_{c2}$ , el aumento en el flujo volumétrico y el consumo de energía son independientes del esfuerzo en la pared, y solo están determinados por las propiedades adelgazantes y la amplitud de la función estocástica del gradiente de presión respectivamente. Por otra parte, en el caso de un líquido engrozante al corte, el aumento y la potencia son negativos, por lo que este caso se descarta por carecer de sentido físico [1,7]. Por último, es claro que el mecanismo gobernante en el aumento del flujo volumétrico es el adelgazante ( $\alpha > 1$ ) y que el aumento y la meseta (altos esfuerzos en la pared) pueden ser modificados a través de las propiedades materiales y la amplitud de la función estocástica respectivamente [1,7].

**CAPITULO VI**  
**CONCLUSIONES**



# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

En este trabajo se analizó un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una tubería de radio  $r = a$  y longitud  $z = L$ . El sistema, se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión pulsátil. Para simular el flujo pulsátil, se introduce una perturbación (función estocástica) en el gradiente de presión. Esta función describe las variaciones en la presión (máxima y mínima) en función del tiempo, por lo que en una primera aproximación, se puede considerar como una bomba de tipo peristáltico. Para caracterizar el fluido no-newtoniano se utiliza el modelo constitutivo de Ellis, el cual consiste en una combinación del newtoniano con el de ley de potencia.

Asumiendo que los mecanismos inerciales y gravitacionales son despreciables, flujo homogéneo y líquido incompresible, se obtienen expresiones analíticas para el perfil de velocidades pulsátil, velocidad promedio pulsátil, flujo volumétrico, aumento en el flujo volumétrico y consumo de energía (fracción de potencia utilizada debido al gradiente de presión pulsátil). Con el fin de simplificar, las simulaciones un conjunto de variables adimensionales son propuestas, con el fin de acotar las variables dinámicas geométricas e introducir grupos adimensionales característicos los cuales, describan los mecanismos globales del sistema de estudio. Para probar las bondades de nuestro modelo, utilizamos un fluido biológico con estructuras transitorias (sangre humana) con el fin de calcular el aumento de flujo volumétrico y el consumo de energía.

Las principales conclusiones de esta propuesta de licenciatura son enlistadas a continuación:

## (i) Aumento en el flujo volumétrico

- El introducir un gradiente de presión pulsátil en la ecuación de movimiento provoca un aumento en el flujo volumétrico, con respecto a aquel a gradiente de presión constante.
- El aumento en el flujo volumétrico  $I(\%)$  es una función de las propiedades materiales del sistema, esfuerzo en la pared, frecuencia adimensional, esfuerzo en la pared y numero de Deborah, i.e.  $I(\%) = I(M, \alpha, \tau_w, \omega^*)$ .
- El aumento es mucho más grande cuando el líquido presenta adelgazamiento al corte es decir la viscosidad disminuye con la rapidez de deformación.
- El flujo volumétrico es una función de la amplitud de las perturbaciones. Cuando  $M$  es mayor a 1, i.e.  $M \gg 1$ , el aumento en el flujo volumétrico y la potencia incrementan su valor, mientras que cuando  $M \ll 1$ , ambos decrecen.
- El aumento en el flujo volumétrico es cero  $I(\%) = 0$ , cuando el líquido no es función de la rapidez de deformación, i.e.  $\alpha = 1$ , lo que implica que el fluido es Newtoniano.

## (ii) Consumo energético

- La energía consumida debido al gradiente de presión pulsátil es una función de las propiedades del medio (exponente del modelo de Ellis), fuerza motriz (gradiente de presión en la pared), propiedades relacionadas con la perturbación (Amplitud de la perturbación y frecuencia adimensional) y numero de Deborah, i.e.  $E(\%) = I(M, \alpha, \tau_w, \omega^*, De)$ .
- A esfuerzos en la pared bajos  $\tau_w \ll 1$ , se obtiene un consumo de energía constante, el cual está completamente determinado por el cuadrado de la amplitud de la fuerza estocástica.

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

- A esfuerzos en la pared altos  $\tau_w \gg 1$ , se obtiene un consumo de energía constante, el cual está completamente determinado por el cuadrado de la amplitud de la fuerza estocástica y las propiedades adelgazantes al corte del líquido.
- Para un líquido newtoniano la potencia o el aumento en la potencia es diferente de cero lo que implica que siempre va haber un gasto energético en este tipo de no importa la naturaleza del fluido que se emplee para la caracterización del sistema.

### (iii) Bioreología

- De acuerdo con los datos reológicos obtenidos de la literatura, nuestro modelo predice aumentos en el flujo volumétrico y un consumo de energía positivo.
- El efecto de la viscoelasticidad se cuantifico a través del número de Deborah. Este número es el cociente entre dos escalas de tiempo asociadas a la viscoelasticidad del material, y a las propiedades de flujo respectivamente. El efecto de este en el sistema es incrementar el aumento en el flujo pulsátil y la energía consumida en el sistema los cuales dependen del tiempo de relajación que fue propuesto en el modelo matemático.
- El efecto de un trastorno alimenticio que afecte a las propiedades viscoelasticas (viscosidad y elasticidad de los fluidos), puede ser cuantificado indirectamente a través de las propiedades materiales del modelo de Ellis (Fluideces a esfuerzos en la pared bajos y elevados respectivamente y exponente del modelo de Ellis.) [31,32].
- El flujo pulsátil, abre la posibilidad de estudiar la reología y fenómenos de transporte en sangre con diferentes trastornos alimenticios, vía las propiedades materiales, utilizando el flujo volumétrico y la fracción de potencia consumida como herramientas de caracterización de sistemas biológicos [31,32].

### 6.1 Trabajo Futuro

En esta sección, se presentan algunas de las posibles aplicaciones del flujo pulsátil en diferentes ramas de las ciencias.

#### (i) Viscoelasticidad no-lineal

- Una continuación natural de este trabajo seria aplicándolo a un líquido visco elástico es decir, un fluido que presenta componentes viscosas y elásticas en el régimen de viscoelasticidad no lineal. Un ejemplo de este fluido, puede ser descrito por la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{rz} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz} = \eta \left( \dot{\gamma}_{rz} \right) \dot{\gamma}_{rz}$$

La Ec. anterior, se le conoce como modelo de Tanner, el cual es empírico y contiene un tiempo característico de Maxwell  $\lambda_0$  asociado con la viscoelasticidad del material [1-7].

### (ii) Trastornos alimenticios

Este modelo puede ser punto de partida en el estudio de trastornos de tipo alimenticio como son: (i) colesterol, (ii) hiperglucemia, a través de las propiedades materiales. Otra posible extensión de este trabajo, aplicación en el área de hemo-reología sería incorporar la elasticidad de las venas, es decir que el radio de la vena  $r = R$ , sea una función de la coordenada axial, i.e.  $R(z)$ , [1-2].

### (iii) Extracción de Petróleo

Por una parte, este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo [1,2]. La solución micelar consiste en una mezcla de surfactante, alcohol, salmuera y crudo [1,2]. Esto simula el lavado de grasa con detergente ya que se logra desprender del crudo del medio poroso de la formación, para luego ser desplazado con agua [1,2]. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes [1,2,15]. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos [1, 2,15].

### (iv) Extrusión de polímeros y nano compuestos con boquillas oscilantes

Por otra parte, se puede aplicar esta teoría a procesamiento y ciencia y nano ciencia de polímeros con el fin de calcular la disipación viscosa en la modificación de las boquillas que sirve para los extrusores y aumentar las capacidades mecánicas y de procesabilidad sería otra alternativa útil para el procesamiento de nuevos materiales [1,2].

Finalmente, este tema de tesis motiva el estudio de sistemas biológicos, materiales avanzados y fluidos complejos, etc. La presente tesis de licenciatura representa un paso en la búsqueda de modelos simples que nos ayuden a caracterizar estos materiales complejos, y dan pauta en la búsqueda de mayor conocimiento y por consecuencia, estudios posteriores de posgrado.

## **APÉNDICE A**

**Calculo del aumento en el flujo volumétrico y la energía consumida para un fluido newtoniano**

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

En esta sección, se calcula el aumento de flujo volumétrico y la eficiencia para un fluido Newtoniano, es decir un fluido para el cual la viscosidad es independiente de la rapidez de deformación. Suponiendo que los efectos inerciales son despreciables, y que el sistema se mueve mediante un gradiente de presión externo.

$$-\frac{\partial p}{\partial z}(1+n(t)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}(r,t)) \quad (A-1)$$

Al integrar, la ecuación anterior con respecto a  $r$  se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz}(r,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z}(1+n(t))r + \frac{C_1}{r} \quad (A-2)$$

Como el esfuerzo debe de permanecer acotado, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz}(r,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z}(1+n(t))r \quad (A-3)$$

Para un fluido newtoniano, el esfuerzo es una relación lineal con la rapidez de deformación del sistema, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\eta_0 \frac{dV_z(r,t)}{dr} = \sigma_{rz}(r,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z}(1+n(t))r \quad (A-4)$$

Integrando con respecto a  $R$  y tomando en cuenta los efectos de no deslizamiento en la pared, se tiene el siguiente resultado, en el sistema:

$$V_z(r,t) = \frac{1}{4\eta_0} \frac{\partial p}{\partial z}(1+n(t))r^2 + C(t) \quad (A-5)$$

Al aplicar la condición de no deslizamiento en la pared, se obtiene el siguiente perfil de velocidades:

$$V_z(r,t) = \frac{1}{4\eta_0} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) (1+n(t)) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (A-6)$$

Integrando con respecto al área de sección transversal,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = Q(t) = \frac{1}{4\eta_0} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) (1+n(t)) \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (A-7)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable  $z = R/a$ ;

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$Q(t) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) (1+n(t)) \quad (\text{A-8})$$

El gradiente de presión, puede expresarse en términos de valores discretos, a través de la siguiente expresión:

$$-\frac{\partial P}{\partial Z} = -\frac{\Delta P}{\Delta L} = -\frac{P_L - P_0}{L - 0} = \frac{P_0 - P_L}{L} \geq 0 \quad (\text{A-9})$$

Por lo tanto, combinando las dos expresiones anteriores,

$$Q(t) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{P_0 - P_L}{L} (1+n(t)) \quad (\text{A-10})$$

La ecuación obtenida se conoce en la literatura como la ecuación de Hagen y Poiseuille el cual fue deducido para estudiar el flujo sanguíneo en capilares. Esta ecuación es válida en el régimen laminar, gradiente de presión constante y fluido incompresible. El Promedio de este modelo, puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} (1+n(t)) dt = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} \frac{1}{T=2\pi/\omega} \int_0^{T=2\pi/\omega} (1+n(t)) dt \quad (\text{A-11})$$

Aplicando linealidad de la integral y promediado, llegamos a la siguiente expresión:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} (1 + \langle n(t) \rangle) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} (1 + 0) = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (\text{A-12})$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{P_0 - P_L}{L} \quad (\text{A-13})$$

El último resultado se obtuvo debido a que por definición, el promedio de la ecuación estocástica definida en las hipótesis es cero. El aumento de flujo puede ser calculado de la siguiente manera:

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = \frac{\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} - \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L}}{\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L}} \times 100 = 0 \quad (\text{A-14})$$

Por lo tanto, para un fluido newtoniano, no hay aumento de flujo debido al gradiente de presión pulsátil, en el sistema. La potencia por unidad de longitud, se puede calcular de una forma similar al de la expresión anterior, por lo que:

$$E(\%) = \frac{\left\langle Q(t) \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) \right\rangle - Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}}{Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}} \times 100 \quad (\text{A-15})$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = \frac{\left\langle Q(t) \frac{\partial p}{\partial z} (1+n(t)) \right\rangle - Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}}{Q_0 \frac{\partial p}{\partial z}} \times 100 \quad (\text{A-16})$$

Finalmente sustituyendo el flujo volumétrico pulsátil y promediando, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = \frac{\left\langle \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L} (1+n(t))^2 \right\rangle - \frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L}}{\frac{\pi a^4}{8\eta_0} \frac{p_0 - p_L}{L}} \times 100 = \left( \langle (1+n(t))^2 \rangle - 1 \right) 100 \quad (\text{A-17})$$

Desarrollando el binomio cuadrado y promediando, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = \left( \langle (1+n(t))^2 \rangle - 1 \right) 100 = 1 + 2\langle n(t) \rangle + \langle n^2(t) \rangle - 1 = 1 + 2 \cdot 0 + \langle n^2(t) \rangle - 1 \quad (\text{A-18})$$

Suponiendo, que la función estocástica es representada por una función trigonométrica elemental, como el seno o coseno, el aumento en la energía consumida por efecto del gradiente de presión pulsátil, toma la forma:

$$E(\%) = \left( \langle (1+n(t))^2 \rangle - 1 \right) 100 = 1 + 2\langle n(t) \rangle + \langle n^2(t) \rangle - 1 = \frac{1}{2} M^2 \quad (\text{A-19})$$

Finalmente, el exceso de energía utilizada en la implementación del flujo pulsátil, es diferente de cero y depende del cuadrado del parámetro perturbativo utilizado en el gradiente de presión pulsátil

## **APÉNDICE B**

**Calculo del aumento en el flujo volumétrico y la energía consumida para un fluido No-newtoniano (Modelo de ley de potencia).**



## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

El modelo de ley de potencia es un modelo empírico exponencial que describe los procesos adelgazantes y engrosante al corte debido al corte. Este modelo es una generalización del modelo Newtoniano. La ecuación básica del modelo de Ley de Potencia está dado por:

$$\sigma_{rz}(r,t) = m \left( \frac{dV_z(r,t)}{dr} \right)^n \quad (\text{B-1})$$

El esfuerzo para un fluido, en un tubo sometido a un gradiente de presión pulsátil y suponiendo que los efectos inerciales y las fuerzas externas son despreciables, toma la forma:

$$\sigma_{rz}(r,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \quad (\text{B-2})$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, tenemos lo siguiente:

$$m \left( \frac{dV_z(r,t)}{dr} \right)^n = \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \quad (\text{B-3})$$

La expresión anterior puede ser descrita de la siguiente manera

$$\frac{dV_z(r,t)}{dr} = \left( \frac{1}{m} \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \right)^{1/n} = \left( \frac{1}{m} \right)^{1/n} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \right)^{1/n} = \phi_1 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) r \right)^\alpha \quad (\text{B-4})$$

En donde se han definido la siguiente combinación de parámetros dimensionales:

$$\phi_1 = \left( \frac{1}{m} \right)^{1/n} = \left( \frac{1}{m} \right)^\alpha ; \alpha = 1/n \quad (\text{B-5})$$

Integrando, la expresión anterior con respecto a la coordenada radial r:

$$V_z(r,t) = \frac{\phi_1}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha r^{\alpha+1} + C(t) \quad (\text{B-6})$$

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

Utilizando la condición de no-deslizamiento en la Ec . (B-6)

$$C(t) = -\frac{\phi_1}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha a^{\alpha+1} \quad (\text{B-7})$$

Sustituyendo, se obtiene el perfil de velocidades para el modelo newtoniano:

$$V_z(r,t) = -\frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right) \quad (\text{B-8})$$

El flujo volumétrico se calcula de la misma manera:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^{\alpha+1} \right] r dr d\theta \quad (\text{B-9})$$

Integrando la parte angular y haciendo el siguiente cambio de variable:  $z = r/a$ , se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \int_0^1 \left[ 1 - (z)^{\alpha+1} \right] z dz \quad (\text{B-10})$$

Finalmente, integrando la expresión anterior,

$$Q(t) = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \left( \frac{\alpha+1}{\alpha+3} \right) = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \quad (\text{B-11})$$

Finalmente, el flujo volumétrico para el modelo de Ley de Potencia, puede expresarse como:

$$Q(t) = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right)^\alpha \quad (\text{B-12})$$

Aplicando la expansión binomial en la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$Q(t) = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \alpha n(t) + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) n^2(t) + \frac{1}{6} \alpha(\alpha-1)(\alpha-1) n^3(t) + O(n^3) \right) \quad (\text{B-13})$$

Al aplicar el promedio sobre la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \alpha \langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) \langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{6} \alpha(\alpha-1)(\alpha-1) \langle n^3(t) \rangle + O(n^3(t)) \right) \quad (\text{B-14})$$

Si suponemos de nuevo que la función estocástica  $n(t)$  puede ser representada por medio de una función trigonométrica, se tiene lo siguiente:

$$\text{Funciones-estocasticas: } \begin{cases} \langle n(t) \rangle = \langle M \sin(\omega t) \rangle = 0 \\ \langle n^2(t) \rangle = \langle M^2 \sin^2(\omega t) \rangle = M^2 \left\langle \frac{1}{2} (1 - \sin(2\omega t)) \right\rangle = \frac{1}{2} M^2 \\ \langle n^3(t) \rangle = \langle M^3 \sin(\omega t) \sin^2(\omega t) \rangle = M^3 \left\langle \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} (1 - \sin(2\omega t)) \right\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{B-15})$$

Sustituyendo los promedios en la ecuación promediada del flujo volumétrico

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \alpha \cdot 0 + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1) M^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \alpha(\alpha-1)(\alpha-1) M^3 \cdot 0 \right) \quad (\text{B-16})$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \frac{1}{2^2} \alpha(\alpha-1) M^2 \right) \quad (\text{B-17})$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico promedio, depende de las propiedades materiales y del cuadrado del parámetro de perturbación definido en el gradiente de presión estocástico. Por

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

otra parte, el flujo volumétrico si perturbar se obtiene haciendo tender el parámetro épsilon a cero, es decir:

$$Q_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle Q(t) \rangle = -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \quad (\text{B-18})$$

El aumento en el flujo está definido como:

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \times 100 = \frac{-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \left( 1 + \frac{1}{2^2} \alpha(\alpha-1) M^2 \right) - \left( -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha \right)}{-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right)^\alpha} \times 100 \quad (\text{B-19})$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$I(\%) = \frac{1}{2^2} \alpha(\alpha-1) M^2 \times 100 = 25\alpha(\alpha-1) M^2 \neq 0 \quad (\text{B-20})$$

Por lo tanto, para un fluido no-newtoniano, el efecto del flujo pulsátil es diferente de cero e independiente del esfuerzo en la pared o del gradiente de presión pulsátil, y solo depende del parámetro de perturbación y de las propiedades adelgazantes y engrosante al corte, a través de índice alfa.

Consumo energético

$$E(\%) = \frac{\left\langle Q(t) \frac{\partial p_0}{\partial z} (1+n(t)) \right\rangle - Q_0 \frac{\partial p_0}{\partial z}}{Q_0 \frac{\partial p_0}{\partial z}} \times 100 \quad (\text{B-21})$$

Sustituyendo el gradiente de presión pulsátil, se tiene lo siguiente:

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

$$E(\%) = \frac{\left\langle -\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha (1+n(t))^{\alpha+1} \right\rangle - \frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha}{-\frac{2\pi\phi_1 a^{\alpha+1}}{\alpha+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p_0}{\partial z}\right)^\alpha} \times 100 \quad (\text{B-22})$$

Simplificando la expresión anterior:

$$E(\%) = \left( \left\langle (1+n(t))^{\alpha+1} \right\rangle - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{B-23})$$

Desarrollando por el teorema del binomio y tomando el promedio, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = \left( \left\langle (1+n(t))^{\alpha+1} \right\rangle - 1 \right) \cdot 100 = \left( 1 + (\alpha+1) \langle n(t) \rangle + \frac{1}{2} (\alpha+1) \alpha \langle n^2(t) \rangle + \frac{1}{6} (\alpha+1) (\alpha) (\alpha-1) \langle n^3(t) \rangle - 1 \right) \cdot 100 \quad (\text{B-24})$$

Sustituyendo los valores de las funciones promediadas, se tiene lo siguiente:

$$E(\%) = \frac{1}{2} M^2 \alpha (1+\alpha) \langle n^2(t) \rangle 100 = 25M^2 \alpha (1+\alpha) \neq 0 \quad (\text{B-25})$$

# Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

## REFERENCIAS

1. E.E. Herrera-Valencia, F. Calderas, A.E. Chávez, and O. Manero, *J Non-Newton Fluid Mech.*, **165**, 174 (2010).
2. E.E. Herrera, F. Calderas, A.E. Chávez, O. Manero, and B. Mena, *Rheol Acta* **48**, 779 (2009).
3. N. Phan-Thien and J. Dudek, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **11**, 147 (1982).
4. N. Phan-Thien, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **4**, 167 (1978).
5. N. Phan-Thien and Z. Fang, *J. Rheol.*, **40**, 521 (1996).
6. Yuan Lin, Gerald Wei Han Tan, N. Phan-Thien, Boo Cheong Khoo, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **212**, 13 (2014)
7. N. Phan-Thien and J. Dudek, *Nature* **296**, 843 (1982).
8. D. W. Sundstrom and A. Kaufman, *Ind. Eng. Chem. Process. Des. Develop.* **16**, 13 (1977).
9. H. Barnes, P. Towsend, K. Walters, *Rheol. Acta*, **10**, 517 (1971).
10. J. M. Davies, S. Bhumiratana, R. B. Bird, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **3**, 237 (1978).
11. Z. P. Shulman, B. M. Khusid and Z.A Shabunina, *J. Eng. Phys.* **51**, 1005 (1986).
12. H.A. Barnes, P. Towsend and K. Walters, *Nature* **224**, 585 (1969).
13. E.M. Khabakhasheva, V.I. Popov, A.N. Kelalov and E.S. Mikhailova, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **33**, 289 (1989).

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

14. L.R.P. de Andrade Lima and A.D. Rey, *Chem. Eng. Sci.* **60**, 6622 (2005).
15. L.R.P. de Andrade Lima and A.D. Rey, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **135**, 32 (2006).
16. J.A. Del Rio, M. López de Haro and S. Whitaker, *Phys. Rev. E*, **50**, 6323 (1998).
17. N. Panagiotis, and T. Sokrates, *Int. J. Numer. Meth. Fl.* **51**, 489 (2006).
18. R.G. Owens, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **140**, 57 (2006).
19. M.A. Moyers-Gonzalez, and R.G. Owens, *Biorheology* **47**, 39 (2010).
20. M.A. Moyers-Gonzalez, R.G. Owens, and J. Fang, *J Non-Newton Fluid Mech.*, **613**, 45 (2009).
21. M.A. Moyers-Gonzalez, R.G. Owens, and J. Fang, *J. Fluid Mech.*, **617**, 327 (2008a).
22. M.A. Moyers-Gonzalez, R.G. Owens, and J. Fang, *J Non-Newton Fluid Mech.*, **155**, 146 (2008b).
23. M. Abou-Dakka, E.E. Herrera-Valencia, and A.D. Rey, *J Non-Newton Fluid Mech.*, **185-186**, 1 (2012).
24. M. Anand, and K.R. Rajagopal, *Int. J. Cardiov. Med. Sci.*, **4**, 59 (2004).
25. A.D. Rey, and E.E. Herrera-Valencia, *Biopolymers J.*, **97**, 374 (2012).
26. Marcinkowska-Gapinska, J. Gapinski, W. Elikowski, F. Jaroszyk, and L. Kubisz, *Med. Biol. Eng. Comput.* **45**, 837 (2007).
27. A.D. Rey, M. Golmohammadi, and E.E. Herrera-Valencia, *Soft Matter* **7**, 5002 (2010).

## Flujo Pulsátil de un Líquido Biológico no Newtoniano

---

28. D. Rey, and E. E. Herrera-Valencia, *Langmuir***26**, 13033 (2010).
29. F. Calderas, A. Sánchez-Solís, and O. Manero, *MacromolSymp***283-284**, 354 (2009).
30. M.A. Moyers-Gonzalez, R.G. Owens, and J. Fang, *J. Fluid Mech.*, **155**, 161 (2008c).
31. L. Moreno Morales. Reología de la sangre en pacientes con hipercolesterolemia e hiperglucemia. Tesis de licenciatura. Facultad de química UNAM (2011).
32. R.L. Moreno Morales, F. Calderas García, G. Sánchez Olivares, L. Medina Torres, R. Rosas Macharro, O. Manero Brito, *Materiales Avanzados*. 10 (20), ISSN 1665-7071, (2013).