



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Fenomenología de Simetrías Abelianas en Modelos
Supersimétricos de Cuerdas**

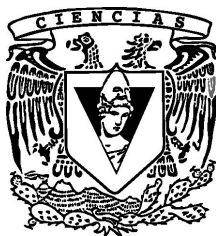
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

RAFAEL ALAPISCO ARÁMBULA



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez
2014**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Alapisco
Arámbula
Rafael
59142580
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Física
303770929
2. Datos del tutor
Dr.
Saúl Noé
Ramos
Sánchez
3. Datos del sinodal 1
Dr
Gabriel
Germán
Velarde
4. Datos del sinodal 2
Dr
Mariano
Chernicoff
Minsberg
5. Datos del sinodal 3
Dr
Erick Leonardo
Patiño
Jaidar
6. Datos del sinodal 4
Dr
José Antonio
García
Zenteno
7. Datos del trabajo escrito
Fenomenología de Simetrías Abelianas en Modelos
Supersimétricos de Cuerdas
117 p.
2014

¡Dedicado a todos los hombres y mujeres que resistieron en el Alcázar de Toledo!

Esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IB101012 “Fenomenología de Cuerdas: física de partículas y cosmología”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por los proyectos CONACyT 151234 y DGAPA-UNAM IACOD IA101811.

Índice general

Introducción	1
1. Teoría Cuántica de Campos	9
1.1. Campos Clásicos	11
1.2. Campos Cuánticos	12
1.3. Interacciones	15
1.4. Diagramas	19
2. Renormalización y las Ecuaciones del Grupo de Renormalización	29
2.1. Renormalizabilidad	30
2.2. Regularización	31
2.3. Renormalización	33
2.4. Ecuaciones del Grupo de Renormalización y la constante de acoplamiento	36
2.5. Corrimiento de la constante de acoplamiento	38
3. Simetrías	43
3.1. Simetrías globales	44
3.2. Simetrías internas	46
3.3. El Teorema NO-GO de Coleman-Mandula	47
3.4. SUSY	48
3.5. MSSM	52
3.6. Corrimiento de las constantes de acoplamiento supersimétricas	56
4. Teorías de Gran Unificación (GUT)	61
4.1. GUT	62
4.2. Modelo SU(5)	65
4.3. SO(10)	67
4.4. E_6	68
4.5. Simetrías abelianas adicionales	69

5. Cuerdas y compactificación	73
5.1. El problema con la gravedad	73
5.2. Teoría de cuerdas	75
5.3. Tipos de teorías de cuerdas	77
5.4. Cuerda heterótica ($E_8 \times E_8, SO(32)$)	78
5.5. Compactificación	79
6. Orbifolds y resultados	81
6.1. Orbifolds	81
6.2. Obifolder	84
6.3. Resultados	85
6.3.1. La escala de unificación (M_{GUT})	86
6.3.2. Modelos con una clara unificación	89
6.3.3. Modelos simétricos izquierda-derecha	91
6.3.4. Escala de unificación ($M_{GUT} = \mu_{st} \sim 10^{18} GeV$).	92
6.3.5. Interacciones fuertes en el sector oculto y rompimiento de SUSY: Λ_{Oculto}	95
7. Conclusiones	101
A. Teoría de Grupos	105
Bibliografía	109

Introducción

La meta más ambiciosa de la física es poder formular una teoría que describa todas las interacciones fundamentales de la naturaleza, es decir una teoría del todo. Experimentalmente, se sabe que existen cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza. Dos de estas nos son muy evidentes: la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional. Aunque tienen un gran impacto en nuestra vida, las otras dos son poco visibles ya que son fuerzas que actúan dentro del núcleo atómico. Estas son llamadas “fuerzas nucleares” y son de dos tipos: “débil” y “fuerte”. La fuerza nuclear débil es responsable del decaimiento radiactivo, el motor de la reacción que da vida a las estrellas, mientras que la fuerza fuerte es la que mantiene unido a los protones y neutrones dentro del núcleo.

La teoría más fundamental que está sustancialmente confirmada experimentalmente es el Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés). Este describe tres interacciones: la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil. En el SM, las partículas como los electrones, muones, neutrinos y quarks que conforman la materia se les llaman *fermiones* debido a su spin $\frac{1}{2}$. Interactúan mediante las fuerzas mencionadas por medio de partículas llamadas *bosones de norma* de spin 1, portadoras de las fuerzas: fotones, gluones y bosones W^\pm y Z . Además de los fermiones y los bosones de norma, en el SM se introduce el campo escalar de Higgs, que, mediante el llamado *mecanismo de Higgs* dota de masa a los W^\pm y al Z , mientras que el bosón de Higgs dota de masa a las partículas fundamentales de la materia.

El SM es una teoría basada en el formalismo teórico de la Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés). De hecho, el SM se compone de 3 QFTs: Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés), Teoría Electro-débil y Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés). La QFT nace de la necesidad de conciliar a la relatividad especial con la mecánica cuántica. Estas dos teorías son fundamentales al describir la naturaleza, ya que todos los procesos de la naturaleza deben ser coherentes con los principios que imponen tanto la relatividad especial como la mecánica cuántica. El formalismo de QFT hace que teóricamente aparezcan aspectos de la naturaleza que en un principio no se conocían, pero que han sido comprobados experimentalmente, como la naturaleza del spin o la antimateria.

SM describe la dinámica de todas las partículas fundamentales conocidas. Estas son excitaciones localizadas de campos cuánticos sujetos a dos tipos de simetrías continuas. Una de ellas es la simetría del espacio-tiempo, el grupo de Poincaré $SO(1,3)$, la cual asocia a cada campo cuántico (partícula) un spin específico. El spin indica el número de componentes espacio-temporales del

campo y cómo estas componentes se relacionan entre sí. Por otra lado, se tiene a las simetrías locales o de norma, que se asocian a las interacciones entre partículas. En el SM estas simetrías corresponden al producto de los siguientes grupos: $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. La invariancia de los campos ante transformaciones locales de estas simetrías de norma conduce, a bajas energías, a las interacciones fuerte, débil y electromagnética. Aunque los fermiones conocidos forman la materia los bosones de norma median sus interacciones, nada prohíbe que existan nuevos fermiones y/o nuevas simetrías de norma aún no descubiertos. Si se descubren en el LHC del CERN se podrían incorporar en una extensión del SM.

Desafortunadamente, el SM no incluye la gravedad, por lo que, a pesar de ser un modelo muy exitoso, está incompleta. Esta “incompletez” es evidente incluso a energías tan bajas como la escala débil (cerca de 100 GeV). Una razón clave es el llamado problema de jerarquía que viene del hecho de que la masa del Higgs recibe grandes correcciones provenientes de los diagramas de lazos. Estas correcciones, en principio, pueden ser canceladas haciendo un ajuste de algunos parámetros del SM, pero esta solución da la impresión de no ser muy natural para muchos científicos. Por esta razón, el problema de jerarquía también es a menudo llamado el problema de naturalidad o ajuste fino. Y existe un fuerte motivo para construir nuevas teorías que vayan más allá del SM, siempre y cuando reproduzcan todos sus éxitos.

Para construir una extensión del SM que resuelva las tareas pendientes de éste, siempre es útil tener algún principio de simetría que guíe el diseño de las nuevas teorías. La supersimetría (SUSY, por sus siglas en inglés) es una propuesta de ese tipo de principios. La idea básica es bastante simple: la SUSY es una simetría que implica transformaciones de campos fermiónicos a bosónicos, y viceversa. La primera consecuencia de esta hipotética simetría es, por lo tanto, que el número de campos (y partículas) que describen la naturaleza debe ser duplicado: por cada fermión (bosón) existe un bosón (fermión) llamado *supercompañero* con las mismas cualidades (masa y otros números cuánticos), salvo spin, el cual difiere por $\pm 1/2$ unidades. Como segunda consecuencia, el problema de jerarquía se resuelve de una manera muy ingeniosa: las correcciones de lazo de fermiones y bosones a las masas de las partículas se cancelan el uno con el otro de manera exacta. En realidad, casi todas las divergencias ultravioletas (a muy altas energías) de una QFT desaparecerán en teorías de campos supersimétricas, es decir, teorías invariantes bajo transformaciones supersimétricas. Una tercera consecuencia alentadora es que, al realizar dos transformaciones supersimétricas sobre un mismo campo resulta en el campo original, pero evaluado en otro punto del espacio-tiempo, lo cual indica que la SUSY podría estar íntimamente ligada a las transformaciones del espacio-tiempo, o sea, a la gravedad.

Por desgracia, la invariancia exacta bajo SUSY tiene también consecuencias negativas. Por ejemplo, es claro que los supercompañeros de las partículas observables no existen en la naturaleza con las mismas masas que la materia que nos rodea. Sin embargo, un problema similar se presenta en el SM, en el que la invariancia *exacta* bajo la simetría $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ implica particularmente que las interacciones débiles son de largo alcance debido a que los bosones de norma W^\pm y Z no tienen masa, lo cual no corresponde a la realidad. La solución en el SM es proporcionada por la ruptura espontánea de la simetría mediante el mecanismo de Higgs. Por lo

tanto, uno podría esperar un resultado favorable al romper espontáneamente la SUSY. El problema con esta propuesta es que, hasta ahora, se desconocen casi todos los aspectos del mecanismo de ruptura espontánea de esta simetría y sus consecuencias en la física *observable*.

Por otra parte, la probabilidad de que las partículas interactúen por medio de cada una de las interacciones fundamentales del SM está regida por las llamadas “constantes” de acoplamiento α_i de las simetrías asociadas a las teorías de campo cuántico del SM. Una observación crucial para esta tesis es que estas α_i no son constantes. El valor de los acoplamientos depende de la escala energética a la que son medidos. En QFT, esto es un resultado de las contribuciones de partículas virtuales mediante un efecto de anti-apantallamiento ó revestimiento sobre los acoplamientos reales o *desnudos*. Si se evalúan los diagramas de Feynman necesarios para calcular este efecto, resulta que los acoplamientos “corren” logarítmicamente con la escala energética y su comportamiento depende del contenido de partículas de cada QFT.

Este comportamiento de las constantes de acoplamiento ha sido confirmado experimentalmente a bajas energías ($\sim 10^3 GeV$). Una observación sumamente interesante es que, si se extrapola el corrimiento de los tres coplamientos α_i (para el caso SUSY) a muy altas energías ($\sim 10^{14-16} GeV$), se observa que las tres tienden a juntarse (aunque las tres curvas no se reúnen en un punto, sino que sólo consiguen formar un triángulo), alimentando el espíritu de simplificación o *gran unificación* de todas las teorías físicas, lo cual condujo finalmente a la invención de las teorías de gran unificación (GUT, por sus siglas en inglés).

El efecto que SUSY tiene en la unificación de las interacciones fundamentales es notable. Como se mencionó antes, en la extensión supersimétrica más simple del SM (MSSM, por sus siglas en inglés), el contenido de partículas cambia debido a la adición de los supercompañeros. Considerando que SUSY es rota espontáneamente a una escala cercana a $1 TeV$, las curvas que describen la evolución de los tres acoplamientos de las fuerzas contempladas en el SM se unifican en el margen de error experimental a la escala $M_{GUT} \approx 10^{16} GeV$, comúnmente llamada escala de gran unificación y, a partir de la cual, teóricamente, una QFT nueva y unificadora reemplaza las tres QFTs del MSSM, a este tipo de teorías se les llama *Teorías de Gran Unificación* (GUT por sus siglas en inglés). Es decir, en esta visión, el SM emerge del MSSM que, a su vez, emerge de una teoría fundamental unificada a altas energías.

De ser correcta esta serie de suposiciones, lo cual podría confirmarse o descartarse en los próximos años en el LHC, una de las preguntas abiertas sería la incompatibilidad del SM (y del MSSM) con la gravedad. Una teoría en la que una expresión cuántica de la gravedad surge simultáneamente con la predicción de la existencia de supersimetría y otras simetrías de norma adicionales es la teoría de supercuerdas, en la que las partículas elementales son el resultado de vibraciones de cuerdas.

Supercuerdas es una generalización de las cuerdas bosónica (la cual vive en 26 dimensiones) que extiende la teoría para incluir fermiones, debido a la inclusión de la supersimetría, en este tipo de teorías existen 10 dimensiones. Hay cinco teorías de supercuerdas diferentes, de las cuales la teoría de cuerdas Heterótica ($E_8 \times E_8$) será la de principal interés en esta tesis. La existencia de la supersimetría sería una prueba indirecta de la existencia de la teoría de cuerdas. Para que la teoría de las cuerdas sea verdad, supersimetría debe existir en la naturaleza. Cabe señalar que todas las

teorías de supercuerdas eliminan los taquiones del espectro e incluyen un gravitón, así que la teoría de supercuerdas naturalmente describe la gravedad.

Por esta razón, la teoría de supercuerdas es considerada un buen candidato para proporcionar una descripción unificada de las interacciones de norma del SM y la interacción gravitacional, de forma consistente a nivel cuántico. El mayor de los inconvenientes de esta teoría es que sólo es consistente en 10 dimensiones espacio-temporales. El camino habitual para obtener teorías que se asemejen a nuestro universo 4-dimensional es la *compactificación*, que consiste en enrollar 6 de las 10 dimensiones en un espacio compacto tan pequeño que escape a toda observación experimental.

Una clase particular de variedades 6-dimensionales con propiedades interesantes son las variedades de Calabi-Yau, así bautizadas en honor a quienes las descubrieron y caracterizaron. Las variedades de Calabi-Yau, cuando se usan como variedades de compactificación, conducen a teorías que podrían describir la física observable a nivel de partículas fundamentales en 4 dimensiones. En particular, las teorías más cercanas a la realidad se basan en la teoría de cuerdas heterótica $E_8 \times E_8$ en 10 dimensiones compactificada en variedades tipo Calabi-Yau o límites singulares de esta. De esta forma se pueden obtener teorías en 4 dimensiones con grupos de norma que incluyen los grupos de norma del SM, pero que, de forma casi invariable, incluyen nuevos grupos de norma (abelianos y no abelianos), que podrían representar fuerzas adicionales de la naturaleza.

Cabe señalar que resultados recientes en compactificaciones de la teoría de cuerdas heterótica $E_8 \times E_8$ en orbifolds –un límite singular muy simple de Calabi-Yau y uno de los ejemplos más sencillos de compactificaciones– indican que existe un gran número de modelos emergentes de cuerdas que semejan al MSSM, pero en los que el grupo de norma es

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)^n \times G_{oculto},$$

en donde $1 \leq n \leq 12$ es el número de simetrías abelianas adicionales y G_{oculto} corresponde a una simetría de norma no-abeliana, bajo la cual las partículas del MSSM no se transforman, por lo que, sus interacciones y partículas no serían accesibles experimentalmente para nosotros. Las simetrías $U(1)$ podrían existir en la naturaleza, aunque deberían estar rotas espontáneamente para poder explicar que e.g. el LHC no haya detectado hasta ahora bosones de norma adicionales, parecidos a los fotones, ni “quintas fuerzas”. Cabe señalar que las simetrías abelianas como estas surgen también en otro tipo de teorías; de hecho, todas las GUT con un grupo de norma más grande que $SU(5)$ predicen al menos un bosón Z' neutro adicional asociado a una posible $U(1)$ adicional en la naturaleza.

La predicción de un número de simetrías abelianas de norma en estas teorías ha sido considerada seriamente en la física experimental, que, en distintos aceleradores, ha establecido límites precisos sobre la masa de las partículas asociadas a las simetrías $U(1)$, típicamente llamadas Z' . Actualmente, estos límites son cercanos a $m_{Z'} \geq 1 \text{ TeV}$ siempre considerando un acoplamiento α' para estas simetrías de magnitud similar al acoplamiento de $U(1)_Y$. Esta última suposición es muy fuerte, ya que, en principio, no existe razón para que dos simetrías abelianas diferentes compartan la misma magnitud de interacciones. En esta tesis, analizaré con detalle este aspecto y demostraré que, en el caso de la teoría de cuerdas, no es correcta en general.

En esta tesis se hizo un análisis de los modelos creados por medio de un programa llamado *orbifolder* [1]. Los modelos obtenidos son supersimétricos y están basados en compactificaciones de tipo orbifold de la teoría de cuerdas (heterótica). Los orbifolds que utilicé tienen grupos de punto \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} . Este análisis tiene como objetivo encontrar modelos con simetrías abelianas adicionales cuyos acoplamientos se unifiquen de manera contundente a altas energías (similar al caso de MSSM). Para esto utilicé las *Ecuaciones del Grupo de Renormalización* (EGR) de los acoplamientos, las cuales van a depender del contenido de cada uno de los modelos (mediante los coeficientes b supersimétricos). Con la información de las escalas energéticas en donde sucede la unificación determiné la escala de rompimiento del sector oculto y también el valor de la masa del gravitino ($m_{3/2}$). Otro objetivo de esta tesis es obtener información de los valores de α_i^{-1} a bajas energías ($\sim 1 TeV$). Una forma de obtenerlos es suponiendo que todos los modelos están unificados en la escala energética $M_{st} = 10^{18} GeV$ y con la información obtenida del contenido de cada modelo (coeficiente b supersimétrico), con las EGR de todos los acoplamientos se pueden extrapolar desde M_{st} hasta bajas energías. Cabe señalar que esperaba encontrar modelos que presenten unificación en una escala alrededor de $M_{GUT} 10^{16} GeV$ con valores de $\alpha_{GUT}^{-1} \sim 8\pi$, es decir no muy diferentes al caso del MSSM, a pesar de la inclusión de mas simetrías.

ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

§ 1. Teoría Cuántica de Campos

QFT es un formalismo creado para conciliar la mecánica cuántica y la relatividad especial. Este formalismo permite describir procesos en la naturaleza como los decaimientos, la creación o la aniquilación de partículas, etc. Esta es la piedra angular de la física de partículas. En esta parte hago una pequeña introducción de las motivaciones para recurrir a una teoría de campos. Trato primero con el formalismo de campos clásicos, para posteriormente pasar a la versión cuántica. En la parte final hago mención de los diagramas de Feynman, su motivación y la aparición de divergencias en los cálculos.

§ 2. Renormalización y las EGR

El procedimiento matemático de la Renormalización en física, a grandes rasgos sirve para deshacernos de las divergencias que aparecen en QFT. Para aplicar este, primero se tiene que recurrir al procedimiento de regularización. Al final se expresan a los parámetros como la masa o las constantes de acoplamiento en términos de parámetros desnudos y contratérminos, en un límite físico los parámetros son finitos. En esta parte trato primero a las divergencias, el grado superficial de divergencia, la renormalizabilidad de una teoría. Posteriormente trato el procedimiento de la regularización, para después pasar a la renormalización con la finalidad de obtener la ecuación de Callan-Symanzik. Por último obtengo las ecuaciones del grupo de renormalización (EGR), donde en particular la ecuación para la constante de acoplamiento es de principal interés, ya que me sirvió para describir el “corrimiento” de las constantes de acoplamiento del SM.

§ 3. Simetrías

Además de la QFT, una de las revoluciones más importantes en la física fue el descubrimiento de las simetrías en la naturaleza. El teorema de Noether nos dice que la conservación de una cantidad física implica que existe una simetría en la teoría física asociada; por lo tanto, el estudio de las simetrías es de vital importancia para el estudio de toda la física y muy particularmente de la física de partículas elementales. La comprensión de las simetrías se logra mediante la teoría de grupos (razón por la que incluyo un pequeño apéndice acerca de los conceptos más importantes de teoría de grupos al final de este trabajo). El SM tiene el grupo de norma $G_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, el cual codifica toda la información de las simetrías *internas* (independientes de transformaciones del espacio-tiempo) de la naturaleza de las partículas elementales. Sin embargo, podrían existir aún más simetrías fundamentales. Como se indicó antes, SUSY es una simetría que podría existir en la naturaleza y que predice que cada partícula bosónica tiene una supercompañera que es un fermión, y viceversa. Al aplicar SUSY al SM, se obtiene el llamado MSSM, cuyo contenido afecta las EGR y, consecuentemente, la evolución energética de las constantes de acoplamiento de forma tal, que estas exhiben una unificación bastante más clara que en el caso no supersimétrico.

En este capítulo empiezo por definir que es una simetría y como se clasifican. Posteriormente hago mención del teorema “NO-GO” de Coleman-Mandula para llegar de una manera natural a SUSY. Concluyo el capítulo mediante una descripción del MSSM y de la modificación del corrimiento de las constantes de acoplamiento.

§ 4. GUT, Compactificaciones y Cuerdas

A pesar del éxito del SM, esta no es una teoría definitiva que explique absolutamente todo, tiene todavía ciertas falencias. Una de las formas para evitar a esas interrogantes es la de considerar un grupo de norma más grande que el del SM, el cual además de las interacciones del SM, incluiría otras interacciones. Este tipo de teorías se les llama GUT, ya que nos dicen que en algún momento todas las interacciones de la naturaleza estaban unificadas y por ende descritas mediante un solo grupo de norma. También existen las versiones SUSY de estas GUT. En este capítulo hago mención de las motivaciones y de las características generales que deben de tener las GUT y las GUT supersimétricas. Así como también de los modelos con simetrías abelianas adicionales. Por último hago mención del concepto de compactificación y de las supercuerdas, en particular de la teoría de cuerdas heterótica.

§ 5. Resultados

Los orbifolds son el ejemplo más simple de un espacio Calabi-Yau, y es aquí en donde se van a considerar las compactificaciones para obtener modelos realistas. Para esta tesis utilicé los grupos de punto \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} . El programa orbifolder me ayudo a crear varios modelos y poder analizar sus espectros. En esta parte presento los resultados acerca de las escalas energéticas en donde la mayoría de los modelos se unifican, el valor de los acoplamientos a bajas energías, los valores de la escala en donde se rompe el sector oculto del grupo de norma de cada modelo y los valores de la masa del gravitino obtenidos debido al rompimiento dinámico de SUSY, por medio la condensación de gauginos. También presento los modelos que mostraron una mejor unificación y discuto sus características.

§ 6. Conclusiones

En este capítulo presento las conclusiones de esta tesis y los planes a futuro de la investigación.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos

Dentro de la Física de Altas Energías, el Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés) de partículas elementales es una de las teorías más exitosas dentro de la física. Este nos proporciona una descripción de las partículas elementales, de sus interacciones y con esto de varios fenómenos físicos.

Esta teoría nos dice que las componentes fundamentales de la materia son los *fermiones*, que se pueden dividir en dos grupos: los leptones (electrón, muón, tau, neutrino del electrón, neutrino del muón y neutrino del tau) y los quarks (up, down, charm, strange, bottom y top). Por otra parte, las interacciones de las partículas se dan mediante el intercambio de partículas virtuales llamadas *bosones de norma* (fotón, W^+ , W^- , Z y 8 gluones), que son los portadores de las interacciones fundamentales.

En la naturaleza existen 4 interacciones fundamentales (gravedad, electromagnetismo, fuerza nuclear fuerte y fuerza nuclear débil). El SM solo contempla a 3 de estas (no incluye la gravedad) y cada una de estas interacciones está relacionada con un grupo de norma ($U(1)$ para electromagnetismo, $SU(2)$ para interacción débil y $SU(3)$ para interacción fuerte), lo que hace que el grupo de norma del SM sea $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

La teoría del SM está desarrollada con base al formalismo de la *Teoría Cuántica de Campos* (QFT por sus siglas en inglés). Dentro de este se pueden encontrar 3 QFT: el Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en inglés), la Teoría Electro débil, y la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés). Para entender el SM, se requiere una comprensión precisa de los dos elementos fundamentales de toda QFT: la Mecánica Cuántica (QM por sus siglas en inglés) y la Relatividad Especial.

Uno de los resultados más notables de la Relatividad Especial es la relación entre la masa y la energía

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \tag{1.1}$$

Esta relación nos dice que la masa es una forma de energía, y esto debe ser tomado en cuenta al

recurrir al principio de la conservación de la energía en un proceso. Otra forma de escribir 1.1 es:

$$p^\mu p_\mu \quad \text{donde} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad (1.2)$$

lo que indica una relación entre la energía y el momento, entre el tiempo y el espacio, y entre las simetrías del universo. Para un estudio mas profundo de Relatividad especial se recomienda consultar [2, 3]

Por otro lado en QM la evolución de un sistema cuántico se describe mediante la ecuación de Schrödinger (cuando \hat{H} es independiente del tiempo)

$$\hat{H}|\Psi\rangle = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})\right]|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (1.3)$$

de donde se puede identificar la relación Newtoniana $E = \frac{p^2}{2m} + V$, que difiere de $(p^2c^2 + m^2c^4)$. Entonces QM describe el movimiento de una partícula no relativista.

Además, en QM se trata a las partículas como entes inmutables aún después de interactuar. No hay una manera de tratar a las interacciones entre partículas, tales como el caso de una partícula y una anti-partícula que se aniquilan y dan como resultado partículas neutras como los fotones, tampoco se pueden describir procesos en los que una partícula elemental decae, como puede ser el caso del muón decayendo en otras partículas.

La combinación de la mecánica cuántica y la relatividad especial implica que el número de partículas no se conserva, y permite una descripción de partículas relativistas, como las que contienen el SM. Para mayor información acerca de QM se recomienda [4, 5]

A diferencia de QM, en QFT se parte de la ecuación de onda clásica, es decir sin un concepto de partícula. Después del proceso de cuantización, se obtiene una interpretación de partícula, o mas bien de excitaciones de los campos del sistema.

QFT permite describir partículas elementales e interacciones fundamentales entre ellas, como en el SM, pero también se usa en física de materia condensada, astrofísica, cosmología, física atómica y nuclear. Esta teoría contiene las leyes de la mecánica cuántica y la relatividad en un forma consistente lo cual permite un estudio de las simetrías fundamentales, mecanismo para romper esas simetrías y describe de manera correcta la producción y la aniquilación de la materia, así como también cómo una partícula cambia de un tipo a otro.

Las variables dinámicas de la teoría son ahora los valores de campos $\phi_i(x)$ en cada punto del espacio en lugar de un conjunto de coordenadas q_i .

Como QFT busca conciliar a la relatividad con la mecánica cuántica, los campos deben de ser invariantes ante las transformaciones de Lorentz [6]. Los campos pueden clasificarse según como se transforman ante estas en: escalares, spinores (Weyl, Dirac, Majorana) o vectores, para mayor información acerca de las representaciones spinoriales consultar el apéndice B de [7]. En este formalismo el Lagrangiano es un funcional de los campos, ya que depende de ϕ_i y $\partial_\mu\phi_i$.¹

¹Su clasificación se basa en las representaciones del grupo de Lorentz $SO(3,1)$, que incluyen tensores de diversos órdenes.

1.1. Campos Clásicos

Un campo es una cantidad definida en cada punto del espacio y el tiempo. Mientras que la mecánica clásica trata con un número finito de coordenadas generalizadas $q_i(t)$, la teoría de campos trata con la dinámica de los campos

$$\phi_i(x), \quad (1.4)$$

donde el subíndice i enumera a todos los campos disponibles.

Tanto i como x son considerados solo etiquetas, aunque x denote coordenadas en el espacio-tiempo. El concepto de posición se ha relegado de una variable dinámica en la mecánica de partículas a una etiqueta en la teoría de campos. En física, el concepto de campo es usado no solo para describir al electromagnetismo sino en todo lo que está presente en el espacio-tiempo, ya sean partículas masivas, las fuerzas interactuantes entre estas, excitaciones colectivas, aún el vacío.

Matemáticamente un campo es una función del espacio y el tiempo, entonces este es una entidad física que habita en el espacio-tiempo, que puede tener un momento, una energía y también spin.

Similar a lo que pasa en mecánica clásica, el Hamiltoniano es una función de coordenadas y del momento del sistema $H = H[\phi(x), \pi(x)]$. Se puede establecer una analogía entre Mecánica Clásica y Teoría de Campos, de la siguiente manera:

$$q(t) \Leftrightarrow \phi(x) \quad p(t) \Leftrightarrow \pi(x). \quad (1.5)$$

También se puede expresar al Lagrangiano como:

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int dx \pi(x) \partial_0 \phi(x) - H, \quad (1.6)$$

y se puede definir el momento conjugado a cada campo

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 \phi(x)}. \quad (1.7)$$

La dinámica de un campo está gobernada por el Lagrangiano el cual es función de $\phi(x, t)$, $\dot{\phi}(x, t)$ (es igual a $\frac{\partial \phi}{\partial t}$) y $\nabla \phi(x, t)$. En teoría de campos el Lagrangiano se expresa como una integral de una densidad Lagrangiana \mathcal{L} (la cual a partir de ahora se le llamará simplemente Lagrangiano)

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (1.8)$$

y la acción es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (1.9)$$

En teoría de campos a partir de \mathcal{L} se pueden determinar las ecuaciones de movimiento mediante el principio de mínima acción análogo al caso de mecánica clásica. Este conduce a las ecuaciones de

movimiento *Euler-Lagrangia* para los campos ϕ_i :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (1.10)$$

Y también se puede definir al Hamiltoniano en términos del Lagrangiano, como

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (1.11)$$

En física las simetrías son fundamentales ya que estas están relacionadas con cantidades que se conservan. Esta idea fue establecida en el teorema de Noether, el cual dice que la invariación de la acción bajo una transformación de simetría implica que existe una cantidad conservada. Por ejemplo, la conservación del 3-momento p está asociada con la invariación traslacional del Lagrangiano. Mientras que la conservación de la energía surge de la invariancia bajo traslaciones temporales. Si se aplica esto a una teoría de campo relativista y se considera la 4-traslación como $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$. Se puede obtener una expresión para el tensor de energía-momento en teoría de campos,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right]. \quad (1.12)$$

Y se tiene también que

$$\mathcal{T}_{00} = E \quad (1.13)$$

$$\mathcal{T}_{0j} = P^j. \quad (1.14)$$

En analogía con la mecánica clásica, se tiene que las invariaciones del Lagrangiano corresponden a leyes de conservación. Se puede probar también que cantidades como el momento angular y el spin también se conservan. Para más información acerca de teorías basadas en campos clásicos consultar [8].

1.2. Campos Cuánticos

En QM, la cuantización canónica es un procedimiento matemático que conduce del formalismo Hamiltoniano de la dinámica clásica a una teoría cuántica. La cuantización canónica de las coordenadas generalizadas q_i y su momento conjugado p^i se realiza promoviendo a estos a operadores. Además se postulan relaciones de conmutación canónica, en analogía con lo que pasa con los corchetes de Poisson de la mecánica clásica. Para cuantizar canónicamente una Teoría de Campos, se hará algo similar, se van a promover a operadores tanto a los campos como a sus momentos conjugados [9].

$$\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(x), \quad \pi(x) \rightarrow \hat{\pi}(x). \quad (1.15)$$

También se imponen las relaciones canónicas de conmutación siguientes:

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)] = i\delta^3(x - y), \quad [\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(y, t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(y, t)] = 0. \quad (1.16)$$

Como en el caso de QM, las variables canónicas conmutan entre sí pero no las coordenadas canónicas con los momentos. La información que generalmente se quiere obtener acerca de la teoría cuántica es el espectro del Hamiltoniano H . En teorías cuánticas de campo suele ser difícil obtener este espectro ya que se tiene un número infinito de grados de libertad en punto del espacio. Pero en teorías de campo libre (donde no hay interacción entre campos), se puede expresar la dinámica tal que cada grado de libertad evolucione de manera independiente de los otros. Estas teorías generalmente tienen Lagrangianos cuadráticos en los campos, entonces las ecuaciones de movimiento serán lineales.

El Lagrangiano del campo escalar real es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.17)$$

y la ecuación de Euler-Lagrangia es la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (1.18)$$

La solución se escribe como una expansión de Fourier

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3 2\omega(k)} (a(k)e^{-ik^\mu x_\mu} + a^\dagger(k)e^{ik^\mu x_\mu}). \quad (1.19)$$

El complejo conjugado hace que ϕ sea real, $k^\mu x_\mu$ es el producto interno en la métrica de Lorentz, $k^\mu x_\mu = t\omega - x \cdot k$. Donde para evitar confusión, se omite la dependencia de k en $\omega(k) (\sqrt{k^2 + m^2})$. Nótese, el factor $\frac{1}{\omega}$ en el integrando. Es necesario que esta cantidad sea invariante de Lorentz, ya que ϕ es un campo escalar. Los factores numéricos se pueden insertar a conveniencia. La expansión de Fourier de una función se puede invertir para obtener una expresión para los coeficientes.

$$a(k) = i \int dx e^{ik^\mu x_\mu} \partial_0 \phi(x) \quad , \quad a^\dagger(k) = -i \int dx e^{-ik^\mu x_\mu} \partial_0 \phi(x). \quad (1.20)$$

El momento conjugado está dado por ,

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(t, \vec{x})} \quad (1.21)$$

Entonces se tiene que $\pi(t, x) = \dot{\phi}(t, x)$.

Finalmente se cuantizan los campos promoviendo los campos clásicos a operadores, es decir se asocian mapeos de \mathfrak{R}^4 a operadores del espacio de Hilbert H . Entonces para cada punto en el espacio-tiempo (t, x) se tiene un operador $\phi(t, x)$, donde $\phi(t, x)$ es interpretado como el campo cuántico en el punto x^μ del espacio-tiempo, de la misma manera como en el caso del campo clásico en cierto punto dado. Estos operadores obedecen relaciones de conmutación a tiempos iguales (1.15).

Usando estas relaciones de conmutación de los operadores $\phi(x)$ y $\pi(x)$ de la ecuación (1.16), se pueden derivar las relaciones de conmutación de los operadores $a(k)$ y $a^\dagger(k)$ en el espacio de momento.

$$[a(k_i), a^\dagger(k_j)] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(k_i - k_j), \quad (1.22)$$

$$[a(k_i), a(k_j)] = [a^\dagger(k_i), a^\dagger(k_j)] = 0, \quad (1.23)$$

para cada k , que corresponde a las relaciones de conmutación para el oscilador armónico. En estos términos se puede expresar al Hamiltoniano y al 4-vector energía-momento en función de a y a^\dagger ,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k (a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)), \quad (1.24)$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} k (a^\dagger(k)a(k) + a(k)a^\dagger(k)). \quad (1.25)$$

De esta manera se tiene que el Hamiltoniano y el operador de momento no son si no una suma continua de excitaciones de osciladores armónicos de una dimensión. Se expande la solución de la ecuación de Klein-Gordon en una superposición de ondas planas con momento k . Una solución de onda plana con energía $E(k)$ es también la solución para un oscilador armónico en una dimensión con la misma energía. De esta manera, la teoría de campo escalar es simplemente una colección infinita de osciladores armónicos. Con lo que se ha reducido el problema de la teoría de campos a una álgebra del oscilador. Del oscilador armónico se sabe como construir una base completa de eigenestados de energía, que gracias a la analogía anterior es útil en la QFT del campo escalar.

Como se está hablando solo del caso de campos libres, es importante calcular la amplitud de probabilidad de que un partícula se propague de un punto a otro,

$$\langle t, x | t', x' \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle = D(x - x'), \quad (1.26)$$

donde la función D es *el propagador*, $|0\rangle$ denota el vacío y $|t, x\rangle = \hat{\phi}(t, x)|0\rangle$ define el estado en el espacio de Hilbert del campo escalar asociado al punto (t, x) del espacio-tiempo. Como ϕ es un conjunto infinito de oscilaciones de acuerdo con (1.19), $|t, x\rangle$ tiene un número infinito de grados de libertad.

El propagador ordenado temporalmente se define como

$$G(x, x') = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle = D_F(x - x'), \quad (1.27)$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal y la función D_F se le conoce como *el propagador de Feynman*. La función de Green, es también conocida como el propagador de Feynman y se define como

$$G^{(2)}(x, t; t', x') = -i \langle T \phi(x, t) \phi^\dagger(x', t') \rangle, \quad (1.28)$$

donde el valor de expectación, es el valor de expectación en el estado del sistema, y el símbolo T representa el operador de ordenamiento temporal; este operador coloca a los operadores de derecha

a izquierda en orden temporalmente creciente. Cuando dos operadores son intercambiados por el operador de ordenamiento temporal, a estos se les añade un signo adicional si son operadores fermiónicos. Cuando $t_1 > t_2$, la función $G(x_1, t_1; t_2, x_2)$ crea una partícula en el tiempo t_1 y posición x_1 , y luego destruye otra vez en el tiempo t_2 y posición x_2 , en otras palabras, mide la probabilidad de que una partícula que se propaga de (x_1, t_1) a (x_2, t_2) . A pesar de que en un sistema de muchas partículas idénticas, la partícula eliminada puede no ser la misma partícula creada. Otra forma de cuantizar a los campos clásicos es por medio de la integral de trayectoria, mas información consultar [10].

1.3. Interacciones

Las partículas pueden chocar, aniquilarse o crearse. Para estos casos el Lagrangiano ahora va a tomar en cuenta las interacciones entre los campos. Pero al tratar de resolver este problema se tiene que tratar con ecuaciones que son muy difíciles de resolver, por eso se recurre a la teoría de perturbaciones [11]. Al utilizar la teoría de perturbaciones, el Lagrangiano del sistema se va a dividir en una parte libre y otra que trata a las interacciones, esta última parte se trata como una perturbación. Entonces los Lagrangianos se van a componer de una parte asociada a los campos libres y otra que contiene la interacción entre ellos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{Int}. \quad (1.29)$$

De manera similar, el Hamiltoniano del sistema se divide en una parte libre H_0 y otra de interacción H_{Int} ,

$$H = H_0 + H_{Int}. \quad (1.30)$$

Para simplificar los cálculos se usa un nuevo marco, *el marco de interacción*. En el marco de Schrödinger, la evolución temporal es el cambio en el tiempo de una función de onda de un sistema descrito mediante la ecuación de Schrödinger, aquí los estados son dependientes del tiempo, mientras que los operadores son independientes del tiempo. En el marco de Heisenberg los estados $|\psi\rangle_H$ están limitados temporalmente y la evolución temporal del sistema se transfiere a los operadores $\mathcal{O}_H(t)$, los cuales satisfacen la ecuación de Heisenberg. Los estados y operadores en estos dos marcos se pueden relacionar mediante una transformación unitaria $\mathcal{U}(t) = e^{iHt}$ ($U^{-1} = U^\dagger$). De esta manera si se asume que los dos conjuntos de operadores y estados coinciden en algún tiempo $t = t_0$, estos están relacionados en todo tiempo por

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle_S \quad (1.31)$$

$$\mathcal{O}_H(t) = \mathcal{U}^\dagger(t - t_0)\mathcal{O}_S\mathcal{U}(t - t_0) \quad (1.32)$$

$$|\psi\rangle_H = \mathcal{U}^\dagger(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle_S. \quad (1.33)$$

Esto garantiza que los elementos de la matriz en los dos marcos sean el mismo:

$${}_H\langle\psi|\mathcal{O}_H(t)|\psi\rangle = {}_S\langle\psi|\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger\mathcal{O}_S\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger|\psi\rangle_S = {}_S\langle\psi|\mathcal{O}_S|\psi\rangle_S. \quad (1.34)$$

Esto significa que no hay diferencia en las predicciones físicas que se hacen en cualquiera de estos dos marcos.

Al cuantizar los campos libres se usa el marco de Heisenberg, en el cual los operadores son dependientes del tiempo y satisfacen la ecuación de Heisenberg, mientras que los estados son independientes del tiempo. Para los campos interactuantes es más conveniente usar *el marco de interacción*, el cual es más adecuado para situaciones en las que no se puede resolver la ecuación de Heisenberg de manera exacta para el Hamiltoniano total, que como se mencionó antes se puede dividir en dos partes.

En el marco de interacción la dependencia temporal se divide entre los operadores y los estados. Los operadores $\mathcal{O}_I(t)$ evolucionan de acuerdo con las ecuaciones de Heisenberg para el Hamiltoniano libre H_0 :

$$i\partial_t \mathcal{O}_I(t) = [\mathcal{O}_I(t), H_0], \quad (1.35)$$

donde

$$\mathcal{O}_I(t) = e^{iH_0 t} \mathcal{O}_S e^{-iH_0 t}, \quad (1.36)$$

es la relación entre el $\mathcal{O}_I(t)$ dependiente del tiempo en el marco de interacción y el \mathcal{O}_S dependiente del tiempo en el marco de Schrödinger. Esto significa que los estados en el marco de interacción debe estar relacionados a los estados en el marco de Schrödinger mediante la siguiente relación

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle_S \quad (1.37)$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo y usar la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_S = H |\psi(t)\rangle_S, \quad (1.38)$$

se obtiene la ecuación de movimiento de los estados $|\psi(t)\rangle_I$ en el marco de interacción:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_{Int} = H_{Int}^I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad (1.39)$$

donde $H_{Int}^I(t) = e^{iH_0 t} H_{Int}^S e^{-iH_0 t}$. La ecuación de movimiento de los estados en el marco de interacción tiene la solución siguiente

$$|\psi(t)\rangle_I = \mathcal{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (1.40)$$

donde $\mathcal{U}(t, t_0)$ es el operador de evolución.

Utilizando el operador de ordenamiento temporal T , se puede expresar al operador de evolución temporal como:

$$\mathcal{U}(t, t_0) = T \left[\exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_{int}^I(t') \right] \right]. \quad (1.41)$$

A esta se le conoce como la fórmula de Dyson.

En principio, la matriz del operador $\mathcal{U}(t, t_0)$ dada en (1.41) determina completamente la evolución temporal del sistema. Sin embargo, en el proceso de dispersión no importan los tiempos intermedios, es decir, cuando las partículas están interactuando, lo importante es cuando los estados en el pasado distante cambian a los estado en el futuro distante. Se asume que las interacciones están en el espacio-tiempo o sea

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} H_{Int}^I(t) = 0. \quad (1.42)$$

Entonces los estados

$$|\psi(\pm\infty)\rangle_I, \quad (1.43)$$

en el pasado y futuro muy distantes, son eigenestados del Hamiltoniano libre H_0 , y describen a las partículas libres. Si se tiene un sistema en un cierto estado inicial $|i\rangle$, al tiempo $t = -\infty$,

$$|i\rangle = |\psi(-\infty)\rangle, \quad (1.44)$$

el vector $|i\rangle$ define el estado inicial, especificando un número de partículas, con propiedades definidas y separadas de manera que estas no pueden interactuar por ejemplo, en QED $|i\rangle$ especifica un número de electrones, positrones y fotones, con sus respectivos momentos, polarizaciones y spin dados. En el proceso de dispersión, las partículas se acercan, interactúan, y se obtiene partículas resultantes.

En QM se hacen predicciones experimentales calculando la amplitud de probabilidad de que un proceso ocurra. Mientras que en TCC, se calculan amplitudes para las interacciones de partículas, como decaimientos ó dispersiones. La herramienta que se utiliza para realizar dichos cálculos se conocen como *la matriz S*. Cualquier proceso físico se puede considerar como una transición de un estado inicial $|i\rangle = \psi(t_0)$ a un estado final $|f\rangle = \psi(t)$, es decir

$$|i\rangle \rightarrow |f\rangle \quad (1.45)$$

Estas transición ocurre por medio de la acción de un operador unitario, *la matriz-S*.

La matriz-S, relaciona $|\psi(\infty)\rangle$ con $|\psi(-\infty)\rangle$ mediante la relación

$$|\psi(\infty)\rangle = S|\psi(-\infty)\rangle = S|i\rangle, \quad (1.46)$$

de donde

$$S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} \mathcal{U}(t, t_0). \quad (1.47)$$

Una dispersión puede derivar en muchos estados finales $|f\rangle$, y todas estas posibilidades están contenidas en $|\psi(\infty)\rangle$ (por ejemplo, en QED una dispersión electrón-positrón puede resultar en una dispersión elástica, emisión de fotones, aniquilación de pares). Cada uno de estos estados finales están especificados de una forma análoga a $|i\rangle$. La transición de probabilidad de que después de la dispersión el sistema esté en un estado $|f\rangle$ es

$$|\langle f|\psi(\infty)\rangle|^2. \quad (1.48)$$

La correspondiente amplitud de probabilidad es

$$\langle f|\psi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle = S_{fi}. \quad (1.49)$$

Una propiedad muy importante de la matriz S es que es unitaria. Si se tiene un sistema con un estado inicial $|i\rangle$ con una probabilidad de uno

$$\langle i|i\rangle = 1, \quad (1.50)$$

la suma de las probabilidades de todos los estados finales debe ser también 1,

$$\langle \psi(\infty)|\psi(\infty)\rangle = 1. \quad (1.51)$$

Se puede expandir a $|\psi(\infty)\rangle$ en términos de un conjunto ortonormal completo de los estados finales $|f\rangle$:

$$|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|\psi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle. \quad (1.52)$$

Con lo que:

$$1 = \langle \psi(\infty)|\psi(\infty)\rangle = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle \quad (1.53)$$

$$\sum_f S_{fi}^* S_{fi} = 1, \quad (1.54)$$

de esta manera la conservación de probabilidad implica la unitariedad de la matriz-S

$$S^\dagger S = 1. \quad (1.55)$$

Los estados iniciales $|i\rangle$ son llamados *estados entrantes* y los estados finales $|f\rangle$ son llamados *estados salientes*.

La matriz-S se puede expresar en términos de la densidad Hamiltoniana de interacción

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T[\mathcal{H}_{Int}^I(x_1) \dots \mathcal{H}_{Int}^I(x_n)]. \quad (1.56)$$

Cuando se hacen cálculos para observables físicos, como la sección eficaz en los procesos de dispersión, los elementos de la matriz-S $\langle f|S|i\rangle$ van a entrar como amplitudes de probabilidades de transición para una transición $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, a un orden dado de la teoría de perturbación.

La densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}_{Int}^I(x)$ en la expansión (1.56) involucran a los campos interactuantes que describen numerosos procesos diferentes. Para encontrar la probabilidad de una cierta transición $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, se tiene que retomar de la expansión anterior solo los términos que contribuyen a las transiciones, es decir a los términos que contengan a los operadores de aniquilación correctos para

destruir a las partículas presentes en el estado inicial $|i\rangle$, y a los operadores de creación para emitir las partículas presentes en el estado final $|f\rangle$.

Los términos que satisfacen estos requisitos pueden contener otros operadores de creación y aniquilación, los cuales pueden crear partículas que son reabsorbidas (y no aparecen en el estado final). Tales partículas están presentes solo en estados intermediarios y son llamadas *partículas virtuales*.

Se puede escribir a la matriz-S como

$$S = 1 + iT \quad (1.57)$$

donde la matriz T contiene la parte de interacción de S . Entonces la amplitud de probabilidad para una transición de $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ se puede expresar como $\langle f|iT|i\rangle$.

La función de Green se puede escribir como:

$$G((x_1, t_1) \dots (x_n, t_n)) = -i \frac{\langle 0|T\{\phi(x_1, t_1) \dots \phi(x_n, t_n)\}S(\infty, -\infty)|0\rangle}{\langle 0|\hat{S}(\infty, -\infty)|0\rangle}, \quad (1.58)$$

donde

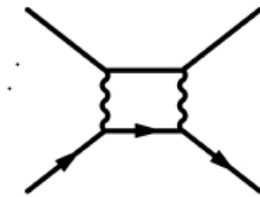
$$S(\infty, -\infty) = T \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_{Int}(t') dt'\right\}, \quad (1.59)$$

de esta manera, se obtiene una función de Green de n-puntos expresada solo en términos de los campos entrantes y, se pone de manifiesto la relación entre la definición general de la amplitud de dispersión S_f y el valor de expectación en el vacío (VEV, por sus siglas en inglés) de los campos entrantes ordenados temporalmente. Se puede decir que el vínculo entre la amplitud de dispersión y la teoría del campo subyacente es proporcionado por la función de Green de n-puntos. Para un análisis mas profundo a las interacciones en QFT se pueden consultar las siguientes fuentes: [6, 11].

1.4. Diagramas

En la formulación de QFT primero se especifica un Lagrangiano \mathcal{L} y, lo que se busca obtener es una sección eficaz $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, esta se obtiene mediante los diagramas de Feynman [12, 11, 13].

Para un proceso determinado (dispersión de la partícula, decaimiento de partículas) hay un conjunto bien definido de gráficas o diagramas. Este conjunto es infinito, pero hay un criterio bien definido, que permite la identificación de un número relativamente pequeño de los diagramas más importantes. Cada diagrama consiste en varios tipos de líneas y de vértices. Las líneas conectan los vértices (líneas internas, propagadores) o salen de los esquemas (patas externas). Por ejemplo:



Cada diagrama tiene un número asociado, la suma de estos números se le llama *amplitud de dispersión*. Una vez que se conoce la amplitud, es sencillo obtener la sección eficaz, solo se expresa la amplitud en una simple fórmula. El número asociado con un diagrama es el producto de factores que corresponden a las líneas internas, las líneas externas y los vértices del diagrama. En las reglas de Feynman se determina que factor corresponde a un elemento del diagrama.

El esquema es el siguiente: a un Lagrangiano se le aplican las reglas de Feynman para obtener los diagramas de Feynman y de ahí obtener la amplitud de dispersión, por último se obtiene la sección eficaz.

El Lagrangiano es un conjunto de términos que contiene la información sobre las reglas de Feynman. Para interpretar esta información se tiene que saber, que los términos representan campos. Por ejemplo, en el modelo ϕ^3 , el Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3, \quad (1.60)$$

el campo está representado por la letra ϕ , los otros símbolos corresponden a derivadas del espacio-tiempo, masa y la constante de acoplamiento. Otro ejemplo es el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED),

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, A_\mu) = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (1.61)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y los campos son $\bar{\psi}, \psi$ y A_μ , γ^μ son las matrices de Dirac y ξ es el parámetro de norma.

Los diferentes campos se representan por distintos tipos de líneas:

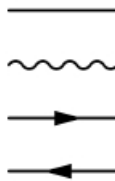


Figura 1.1: La elección usual es una línea para el campo escalar, una la línea ondulada para A_μ el campo del fotón y una línea con una flecha para $\bar{\psi}$ y ψ , es decir para el campo spinorial, en QED es el campo electrón-positrón.

Las flechas son usadas comúnmente para campos complejos conjugados, como $\bar{\psi}$ y ψ (o ϕ^* y ϕ , si ϕ es complejo). La orientación de la flecha es muy importante para las patas externas, ya que las diferentes orientaciones corresponden a las partículas y las antipartículas respectivamente. Para mayor información con respecto a las reglas de Feynman para QED, consultar [13]

Cada línea está etiquetada por un momento, las flechas mencionadas anteriormente y su orientación no tienen nada que ver con el momento asociado con la línea.

Las reglas de Feynman asocian un factor específico con cada línea interna (propagador), la conjunción de líneas (vértice) y cada línea externa. Los propagadores son definidos por la parte cuadrática del Lagrangiano, mientras que los vértices están dados por el resto del Lagrangiano. El factor de la línea externa depende del Lagrangiano entero y generalmente es de la forma de un producto de dos términos.

Para una teoría de un solo campo ϕ , el factor correspondiente al vértice de n -patas es:

$$\text{vértice de } n\text{-patas} = i \left. \frac{\partial^n \mathcal{L}}{\partial \phi^n} \right|_{\phi=0} \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_n), \quad (1.62)$$

donde p_i es el momento correspondiente a la i -ésima pata (todos los momentos están apuntando hacia el vértice). Para una teoría con más campos, como QED , la definición es análoga. Por ejemplo, el vértice con a, b y c patas de los campos $\phi, \bar{\phi}$ y A_μ , respectivamente, está dado por

$$\text{vértices de } (a, b, c)\text{-patas} = i \left. \frac{\partial^{a+b+c} \mathcal{L}}{\partial^a A_\mu \partial \phi^b \partial \bar{\phi}^c} \right|_{\text{campos}=0} \delta^4(p_1 + p_2 + \dots + p_{a+b+c}). \quad (1.63)$$

Cada derivada produce la correspondiente pata que entra en el vértice.

Para los términos que contienen $\partial_\mu \phi$, la derivada con respecto a ϕ se define como:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \partial_\mu \phi \times algo = -ip_\mu \times algo + \partial_\mu \phi \times \frac{\partial}{\partial \phi} algo, \quad (1.64)$$

donde el p_μ es el momento de la pata producido por esta derivada. En el modelo ϕ^3 la parte no-cuadrática del Lagrangiano contiene el campo a la tercera potencia, por lo que habrá sólo un vértice de tres patas:

$$i \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \left(-\frac{g}{3!} \phi^3 \right) \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) = -ig \delta^4(p_1 + p_2 + p_3). \quad (1.65)$$

En QED , la parte no-cuadrática del Lagrangiano es $-\bar{\phi} q \gamma^\mu A_\mu \phi$, lleva a un único vértice:

$$i \frac{\partial^3 (-q \bar{\phi} \gamma^\mu A_\mu \phi)}{\partial \bar{\phi} \partial \phi \partial A_\mu} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3) = -iq \gamma^\mu \delta^4(p_1 + p_2 + p_3), \quad (1.66)$$

y si se calcula el vértice de la teoría con el Lagrangiano no cuadrático, $-g\phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$,

$$i \frac{\partial^4 (-g\phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)}{\partial \phi^4} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 4ig(p_1 p_2 + \dots + p_3 p_4) \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (1.67)$$

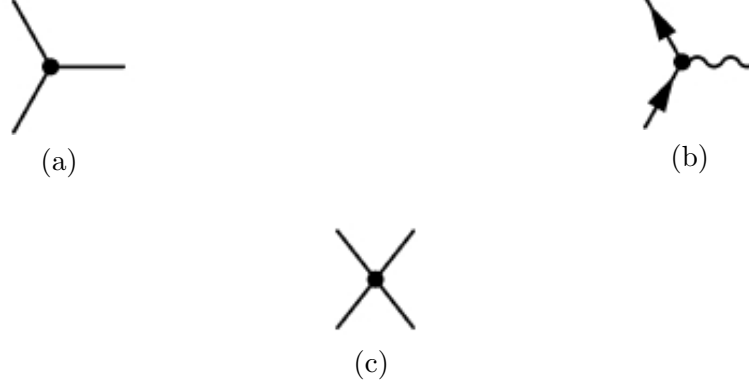


Figura 1.2: (a) En la teoría ϕ^3 , la parte no-cuadrática del Lagrangiano contiene el campo a la tercer potencia, por lo que habrá sólo un vértice de tres patas. (b) En QED, la parte no-cuadrática del Lagrangiano es $-\bar{\phi}q\gamma^\mu A_\mu\phi$, lleva a un único vértice. (c) Vértice de la teoría con el Lagrangiano no cuadrático- $g\phi^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$.

Los propagadores están definidos en la parte cuadrática del Lagrangiano, y tienen la siguiente forma:

$$\text{Propagador} = - \left(i \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0, p'=-p} \right)^{-1}. \quad (1.68)$$

La parte cuadrática del Lagrangiano para campos escalares es $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$, lo que conduce a $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \phi^2 |_{\phi=0, p'=-p} = -p \cdot p' - m^2 |_{p'=-p} = p^2 - m^2$, es decir el propagador es:

$$\frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (1.69)$$

Para la parte cuadrática del Lagrangiano de los campos spinoriales es $\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$, conduce a $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \bar{\psi} i \partial \psi |_{campos=0, p'=-p} = \gamma^\mu p_\mu - m$, y el propagador es:

$$\frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2}, \quad (1.70)$$

Por último, para el campo vectorial no masivo el Lagrangiano cuadrático es $-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\alpha A^\alpha)^2$ que conduce a $\partial^2 \mathcal{L} / \partial A_\mu \partial A_\nu |_{campos=0, p'=-p} = (1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}$, el propagador es:

$$\frac{i}{(1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}} = -i \frac{(g_{\mu\nu} - (1 - \xi)p_\mu p_\nu / p^2)}{p^2}. \quad (1.71)$$

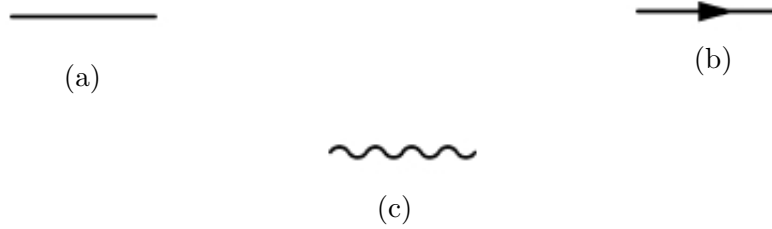


Figura 1.3: (a) Propagador escalar. (b) Propagador spinorial. (c) Propagador vectorial.

En el MS, el propagador spinorial describe los quarks y leptones, el propagador vectorial sin masa describe fotones y gluones, el propagador escalar describe al bosón de Higgs. Cabe señalar que, el propagador vectorial masivo describe los bosones W^\pm y Z , este se obtiene del Lagrangiano $-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2 A_\alpha A^\alpha$.

El factor correspondiente a una pata externa es, como regla general, el producto de dos factores. Para el campo escalar ϕ (representando una partícula con spin-0) este factor es 1. Para otros campos (representando a las partículas con spin mayor) estos factores no son triviales para cada, este difiere para las partículas y las antipartículas, así como para las partículas entrantes y salientes. Este factor depende del momento de la partícula y del spin. Para el campo vectorial no masivo A_μ , por ejemplo, para el fotón, donde antipartícula = partícula este factor es,

$$\epsilon_\mu \text{partícula entrante.} \quad \epsilon_\mu^* \text{partícula saliente.} \quad (1.72)$$

Para el campo spinorial es decir, para el electrón y el positrón, que se distinguen en los diagramas por la orientación de la flecha, el factor es,

partícula entrante	flechas hacia dentro del diagrama	u	(1.73)
anti-partícula entrante	flechas hacia fuera del diagrama	\bar{v}	
partícula entrante	flechas hacia fuera del diagrama	\bar{u}	
anti-partícula entrante	flechas hacia dentro del diagrama	v	

Estas reglas son universales, independientemente de la forma del Lagrangiano.

Los diagramas se pueden dibujar de izquierda a derecha, es decir, las partículas entrantes (estado inicial) están en la izquierda y partículas salientes (estado final) en la derecha,



Figura 1.4: (a) El diagrama superior representa el proceso $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$, con las patas externas simbolizadas por $u, \epsilon_\mu, \bar{u}, \epsilon_\nu^*$. El diagrama inferior representa el proceso $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$, con las externas simbolizadas por $\bar{v}, \epsilon_\mu, v, \epsilon_\nu^*$.

(b) El diagrama superior representa $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$, con las patas externas: \bar{v}, u, v, \bar{u} . El diagrama inferior representa $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$, con las patas externas: u, u, \bar{u}, \bar{u}

Ahora al segundo factor correspondiente a una pata externa, tiene la siguiente forma es \sqrt{Z} , donde Z es una constante (la constante de la renormalización de la función de la onda) dependiente en el campo correspondiente a una pata dada. La definición y el cálculo de Z no es simple, pero la parte dominante de la mayoría de las secciones eficaces y las tasas de decaimiento calculadas mediante diagramas de Feynman están dadas por *los diagramas de árbol* (diagramas que no tienen lazos), y a nivel árbol la constante Z siempre es igual a 1. Así que a nivel árbol, se puede ignorar a Z .

A diferencia de todas las otras reglas de Feynman, la constante Z no se define directamente a través del Lagrangiano, sino mediante una suma infinita de diagramas de Feynman. La suma mencionada, es llamada *el propagador completo*, contiene todos los diagramas con dos patas externas correspondientes al campo en consideración.

Un proceso lo definen las patas externas, tanto entrante como saliente. Un diagrama de Feynman correspondiente a este proceso es cualquier diagrama conectado con este conjunto de patas externas conectadas entre sí por las líneas internas (propagadores) permitidas por la teoría, por medio de los vértices permitidos por la teoría. Generalmente hay un número infinito de dichos diagramas, aún así, sólo un número finito contribuyen a un orden determinado. El orden puede ser definido en por lo menos de tres formas diferentes: como el número de vértices, la potencia de la constante de acoplamiento o el número de lazos. Si solo hay un único tipo de vértice en la teoría, estos tres definiciones son equivalentes. Si se tienen más tipos de vértices, pero todos están caracterizados por la misma constante de acoplamiento, entonces la primera definición no se utiliza y los otros dos son equivalentes.

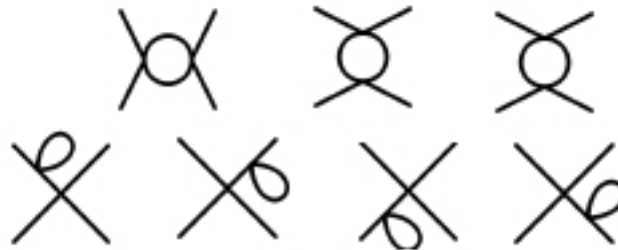
Si se considera una dispersión $A - B \rightarrow 1 - 2$, descrita por cualquiera de las teorías ϕ^4 o ϕ^3 . En

el orden mas bajo (que no sea cero, nivel del árbol) se tiene:



Figura 1.5: El primer diagrama representa a ϕ^4 , los demás a ϕ^3

Nótese que en el segundo y el tercer diagrama para la teoría ϕ^3 no son equivalentes, ya que contienen diferentes vértices. En el siguiente orden (nivel 1-lazo), en la teoría ϕ^4 se tienen:



El factor correspondiente a un diagrama es la producto de los factores correspondientes a todas las líneas externas, líneas internas y vértices del diagrama, multiplicado por: un factor $(2\pi)^4$ para cada vértice, un factor $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ para cada propagador (con k el cuatro-momento), un factor llamado combinatorio y algunos factores de (-1) relacionadas con las líneas fermiónicas. Un ejemplo de esto es:



Figura 1.6: $\frac{1}{2}g^2 \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(p_A + p_B - k)^2 - m^2} \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)$

Más allá del nivel de árbol, un diagrama puede requerir del factor combinatorio, que suele ser el factor más difícil de evaluar, para esto se necesitan tomar en cuenta ciertas reglas.

Si dos vértices están conectados por n diferentes líneas internas, el correspondiente factor de combinatorio es $1/n!$.

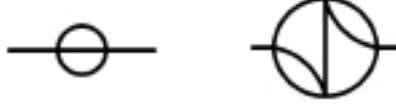


Figura 1.7: El diagrama de la izquierda tiene un factor igual $\frac{1}{3!}$ y el otro $\frac{1}{2!2!}$

Si una línea empieza y termina en el mismo vértice, contribuye por $1/2$ al factor combinatorio.

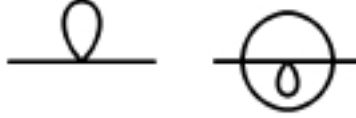


Figura 1.8: El diagrama de la izquierda tiene un factor igual $\frac{1}{2}$ y el otro $\frac{1}{2!2!}$

Si las N permutaciones de n vértices no cambia el esquema, el correspondiente factor combinatorio es $1/N$.

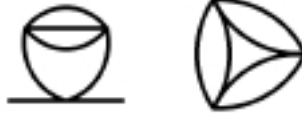


Figura 1.9: El diagrama de la izquierda tiene un factor igual $\frac{1}{23!}$ y el otro $\frac{1}{83!}$

Los diagramas de Feynman son una herramienta que facilita el cálculo amplitudes de dispersión, la sección eficaz de algún proceso y las tasas de decaimiento.

La evaluación de las integrales involucradas en los diagramas de Feynman pueden ser bastante difíciles, pero en general pueden evaluarse analíticamente solamente los diagramas de un lazo y algunos de 2-lazos. Si se considera a la integral de 1-lazo para la función de 2-puntos:

$$I_2 = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (1.74)$$

Hay muchas maneras de evaluar I_2 , una es escribir

$$(p^2 + m^2)^{-1} = \int_0^\infty e^{-u(p^2+m^2)} du, \quad (1.75)$$

y luego integrar,

$$\int e^{-u \sum_{i=1}^d p_i^2} \prod_{i=1}^d dp_i = \left(\frac{\pi}{u}\right)^{d/2}, \quad (1.76)$$

así

$$I_2 = \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty u^{-d/2} e^{-um^2} du. \quad (1.77)$$

Usando $u \rightarrow um^{-1/2}$, se obtiene

$$I_2 = \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) m^{d-2}. \quad (1.78)$$

Este ejemplo muestra que, el resultado tiene sentido para los valores no enteros de d , aunque en aplicaciones físicas este siempre es un número entero.

Sin embargo, la función γ es infinita en sus polos, siendo el primero $d = 2$. Este infinito refleja el hecho de que para grandes p la integral original se comporta como $d^d p/p^2$ y por lo tanto converge sólo para $d < 2$.

Este es un ejemplo de una divergencia ultravioleta (UV), que abundan en las expansiones perturbativas en QFT.

De hecho la mayoría de las integrales de Feynman son divergentes (UV) cuando d es lo suficientemente grande, lo que hace que estas no tengan sentido físico.

Capítulo 2

Renormalización y las Ecuaciones del Grupo de Renormalización

En QFT es muy común encontrar divergencias (infinitos). Estas aparecen en los diagramas de Feynman a órdenes mayores en teoría de perturbaciones y se clasifican en dos tipos: las divergencias ultravioletas (UV) y las divergencias infrarrojas (IR). Las divergencias IR aparecen cuando una integral (integral de Feynman) diverge debido a las contribuciones de términos con energía muy pequeña (cerca a cero), es decir debido a fenómenos físicos a distancias muy grandes. Mientras que las divergencias UV aparecen cuando una integral diverge debido a la contribución de términos con energías muy grandes, es decir fenómenos físicos a distancias muy pequeñas. Las integrales de Feynman para lazos, usualmente tienen divergencias UV, y estas al parecer no tienen un sentido físico en primera instancia. Las divergencias aparecen cuando se calculan cantidades físicas (medibles), la medida de una cantidad física (como la masa del electrón), resulta de añadir correcciones cuánticas a valores “desnudos” que no son observables (no se pueden medir). En QED, a un lazo, hay tres tipos de correcciones las cuales llevan a resultados divergentes: la auto-energía del electrón, la auto-energía del fotón (polarización en el vacío), y la corrección del vértice. Cuando se toman en cuenta los órdenes mayores en la expansión perturbativa de la matriz-S, se pueden esperar correcciones para los resultados de órdenes menores, del orden α^n , donde α es la constante de acoplamiento de la teoría y n es el orden de perturbación. Sin embargo, cuando se hacen cálculos a órdenes mayores en teoría de perturbaciones, las integrales divergen, y las correcciones a órdenes mayores aparentemente divergen también. Las integrales divergentes son de hecho integrales de lazos y sus divergencias se deben al hecho de que se tiene que integrar sobre todos los momentos posibles del lazo, de $-\infty$ a ∞ .

Para lidiar con estas divergencias se recurre a un procedimiento llamado *renormalización*, el cual es un mecanismo matemático que consiste en localizar y remover todas las divergencias que surgen al calcular cantidades físicas [14]. En este procedimiento, se mezclan todas las divergencias dentro de unas cantidades llamadas “*desnudas*”. Es decir, se redefinen las cantidades que no se pueden medir, para que absorban las divergencias y de esta manera las cantidades físicamente

medibles permanecerán finitas. Esta cantidad renormalizada (la cual es ahora finita) ahora puede ser determinada por el experimento. Aunque el concepto de renormalización pudiera parecer simple, en la práctica es algo complicado. Por esta razón, antes de manipular matemáticamente estas divergencias, se debe utilizar un procedimiento llamado *regularización* que será discutido en la sec. 2.2.

2.1. Renormalizabilidad

No todas las QFT tienen la propiedad de que todas las divergencias pueden ser absorbidas por algunos parámetros físicos redefinidos (renormalizados). Las teorías que tienen esta propiedad son llamadas *renormalizables* y las que no se llaman teorías *no renormalizables* [11].

En presencia de momentos muy grandes en los lazos, las integrales de Feynman se comportan como

$$\int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_L}{k_1^2 \dots k_P^2}, \quad (2.1)$$

donde L es el número de lazos y P el número de propagadores. Esta integral diverge si el número de potencia de k en el numerador es mayor o igual al número de potencia de k en el denominador. Entonces, se puede definir “*el grado de divergencia superficial*” S [11, 15] de un diagrama como:

$$S = (\text{potencias de } k \text{ en el numerador}) - (\text{potencias de } k \text{ en el denominador}) = 4L - 2P. \quad (2.2)$$

Donde, si $S \geq 0$ se dice que el diagrama es superficialmente divergente, y cuando $S \leq 0$ se dice que el diagrama es superficialmente convergente.

El adjetivo “superficial” indica que S no siempre refleja la divergencia o las propiedades finitas de un diagrama, ya que por ejemplo, se pudieran dar una de las siguientes situaciones: si $S < 0$, un diagrama puede divergir si la divergencia se debe a un subdiagrama divergente o si el caso de los diagramas a nivel árbol que tienen $S = 0$, pero son finitos. Para una teoría ϕ^n en d dimensiones se tiene que S se expresa como:

$$S = d + [n(\frac{d-2}{2}) - d]V - (\frac{d-2}{2})N. \quad (2.3)$$

Se puede determinar la renormalizabilidad de las teorías ϕ^n tomando en cuenta las dimensiones de la constante de acoplamiento α . La acción \mathcal{S} es adimensional ($[\mathcal{S}] = 0$), como las coordenadas tienen dimensión -1 , $[d^4 x] = -4$ y el Lagrangiano tiene una dimensión $[\mathcal{L}] = 4$, $[\partial_\mu] = 1$, y $[\phi] = 1$. Esto implica que $[\alpha] = 4 - n$ en una teoría ϕ^n . Se puede hacer una clasificación en términos de las dimensiones de la constante de acoplamiento [16], de la siguiente manera: Si una teoría es renormalizable si la constante de acoplamiento es adimensional, es super-renormalizable si la constante de acoplamiento tiene una dimensión positiva. Si la dimensión de la constante de acoplamiento es negativa, es no renormalizable, es decir,

$[\alpha] > 0$, es super-renormalizable.

$[\alpha] = 0$, es renormalizable.

$[\alpha] < 0$, es no renormalizable.

Un ejemplo de una teoría no renormalizable es la teoría de la relatividad General. Una teoría es renormalizable si el número de las amplitudes con divergencia superficial es finita, es super-renormalizable si el número de divergencia superficial de los diagramas de Feynman es finita y es no renormalizable si el número de amplitudes divergentes superficialmente es infinito.

Ahora, en 4 dimensiones ($d = 4$), se tiene:

$$S = 4L - 2P = (n - 4)V + 4 - N, \quad (2.4)$$

donde N son el número de líneas bosónicas externas, V el número de vértices y n el número de líneas que se interceptan en cada vértice (teoría $\phi^{(n)}$).

Se tienen 3 casos $n < 4$, $n > 4$ y $n = 4$, y con esto se puede también determinar la renormalizabilidad de una teoría ϕ^n en 4 dimensiones de la siguiente manera: Si $n > 4$, se agregan vértices a un diagrama y se incrementa S ; esto significa que a órdenes mayores en teoría de perturbaciones (diagramas con mas vértices) se puede siempre seguir obteniendo nuevos diagramas superficialmente divergentes para cualquier valor de n . De esta manera en algún orden en teoría de perturbaciones se necesita un contra-término, con lo que un número infinito de contra-términos son requeridos, ya que hay un número infinito de amplitudes superficialmente divergentes, y con esto la teoría es *no renormalizable*.

Si $n = 4$, solo un número finito de funciones de Green va divergir superficialmente, con $n < 4$, sólo un número finito de contra-términos se requerirá para hacer a todas las amplitudes finitas. Esta clase de teorías se llaman *renormalizables*.

Si $n < 4$, no sólo es una teoría renormalizable, sino que cada que se añade un vértice se hace a un diagrama mas convergente. En este caso, no solo es finito el número de funciones de Green superficialmente divergentes, sino que el número de diagramas superficialmente divergentes también lo es. Las divergencias son restringidas en órdenes menores en teoría de perturbaciones, en contraste con las teorías renormalizables, donde las divergencias se dan en todos los órdenes, esta clase de teorías se llaman *super-renormalizables*.

2.2. Regularización

Para lidiar con estas divergencias es necesario recurrir a un procedimiento matemático llamado *regularización*, este modifica la teoría de tal manera que esta permanece finita en todos los órdenes de perturbación. El objetivo de la regularización es calcular una integral divergente y a ese resultado dividirlo en una parte divergente y otra finita. Para extraer información precisa de una QFT en órdenes menores, se tiene que introducir un esquema de regularización consistente, este debe de hacer a todas las cantidades físicas relevantes finitas [14].

Ejemplos de esquemas (también llamados métodos) de regularización son: Regularización de "corte" de momento, regularización por el método Pauli-Villars, regularización analítica, regularización dimensional, entre otros [17, 18]. El objetivo de la regularización es calcular explícitamente

una integral divergente,

$$\Gamma = \int_0^\infty d^4k F(k). \quad (2.5)$$

Esto se puede hacer de muchas maneras, mas aún, el resultado final no debe de depender de la elección del esquema de regularización. La idea es reparametrizar la integral en términos de un parámetro llamado *regulador*. Después de haber expresado la integral de esta manera (regularizada), se toma un límite físico en donde el resultado volverá a ser la integral original. Al final se tendrá que algunos términos se van a hacer cero, otros se van al infinito (estos son los que se van a eliminar posteriormente), y otros permanecerán finitos.

Utilizando el esquema de regularización de “corte” de momento en la integral (2.5), se tiene que esta diverge en un límite muy grande, entonces no se va a integrar hasta el infinito si no hasta una escala de momento muy grande, el parámetro será llamado *el parámetro de corte* Λ , entonces:

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_\Lambda = \int_0^\Lambda d^4k F(k). \quad (2.6)$$

Γ_Λ converge, y se convierte a Γ en límite donde $\Lambda \rightarrow \infty$ y se obtiene lo siguiente:

$$\Gamma_\Lambda = A(\Lambda) + B + C\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \quad (2.7)$$

donde el límite físico se alcanza cuando $\Lambda \rightarrow \infty$, A es divergente, C se va a cero, B no depende de Λ , por lo tanto permanece finito. Al descartar a C, se tiene una parte divergente y otra finita, donde la parte divergente es la que va a desaparecer cuando entre en acción el proceso de Renormalización.

Otro esquema de regularización muy utilizado es el llamado, *Esquema de Regularización Dimensional*. Este esquema es bastante usado debido a que preserva la invariancia de norma y deja a todas las simetrías de la teoría de manera manifiesta. En este esquema, se reemplaza a la integral (2.5) con:

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_d = \int_0^\infty d^d k F(K), \quad (2.8)$$

donde d es la dimensión de lo que se quiera medir, es de esperarse que el resultado físico se obtenga cuando $d = 4$. Para esto se tiene que integrar en un espacio-tiempo de 4 dimensiones, es decir $d \rightarrow 4 - \epsilon$, donde el límite físico se alcanza cuando $\epsilon \rightarrow 0$, y se obtiene:

$$\Gamma_\epsilon = A(\epsilon) + B + C\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (2.9)$$

en donde el término A desaparece en el límite físico ($\epsilon \rightarrow 0$), C va a divergir y B quedará finito; esta divergencia en C desaparecerá en el proceso de Renormalización. Para mas información acerca de los distintos esquemas de regularización consultar [17, 18, 11, 16].

2.3. Renormalización

En renormalización se relacionan las propiedades de las partículas físicas (partículas interactuantes) con las partículas desnudas (no interactuantes) y se expresan las predicciones teóricas en términos de las constantes de acoplamiento, masas y las cargas de las partículas físicas [19, 14].

Mientras que la regularización parametriza a los infinitos, renormalización es un procedimiento que busca deshacerse de estos. Si se considera a una integral regularizada como

$$\Gamma = \Gamma(\alpha, \Lambda, m), \quad (2.10)$$

donde Λ es el regulador, esta cantidad se va a infinito en el límite físico. Sin embargo, se puede capturar (o absorber) a la divergencia si se hace una reparametrización de los parámetros físicos:

$$m \rightarrow m(\Lambda) = m + \Delta m(\Lambda) \quad (2.11)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha(\Lambda) = \alpha + \Delta \alpha(\Lambda), \quad (2.12)$$

como consecuencia se tiene:

$$\Gamma(m\alpha, \Lambda) \rightarrow \Gamma(m(\Lambda), \alpha(\Lambda)), \quad (2.13)$$

con esto se ha eliminado el comportamiento divergente en los parámetros físicos, entonces la integral Γ ya no es explícitamente divergente, sino que va a depender de las cantidades físicas. Los términos que aparecen junto con Δ son los llamados contra-términos, entonces desde el punto de vista del Lagrangiano se tiene:

$$\mathcal{L}_{Desnudo} = \mathcal{L}_{Renormalizado} + \mathcal{L}_{contra-termino}. \quad (2.14)$$

Posteriormente se tienen que elegir las condiciones de renormalización, una de estas es, que en el límite físico,

$$m(\Lambda) \rightarrow m_R \quad y \quad \alpha(\Lambda) \rightarrow \alpha_R, \quad (2.15)$$

de donde se obtienen valores finitos de $\Gamma(m_R, \alpha_R)$, m_R y α_R (el subíndice R se refiere a renormalizado) ahora serán las cantidades que se miden; por ejemplo la masa del electrón o la carga eléctrica en el caso de la interacción electromagnética. En QED se utiliza la renormalización frecuentemente, y sus resultados son muy cercanos al experimento, prueba de que el proceso de renormalización funciona [20].

Cabe señalar que los resultados no pueden depender de regulador (del esquema de regularización), sin embargo de cada uno de estos se obtiene una parte finita diferente, entonces los términos que se van a descartar o conservar, van a depender del esquema de renormalización (también llamado esquema de substracción).

Es decir, las divergencias UV son absorbidas cuando se hace una redefinición de los parámetros, por ejemplo:

$$\alpha_{des} = Z_\alpha \alpha_R, \quad (2.16)$$

donde Z_α (constante de renormalización) absorbe la parte divergente. Sin embargo Z_α no es única, ya que siempre se puede intercambiar una parte finita de α_R a Z_α o viceversa. Las diferentes

elecciones de Z_α corresponden a diferentes esquemas de renormalización, por lo tanto siempre se tiene que especificar que esquema de renormalización se va a utilizar.

Algunos de los esquemas de renormalización mas populares son [21]:

Substracción “On-Shell”: En este esquema se definen las constante de renormalización debido a las condiciones en una escala donde las partículas que están “on-shell” , es decir cuando $p^2 = m^2$.

Substracción Off-shell: Para partículas no masivas las constantes de renormalización en el esquema “on-shell” va a contener una singularidad infrarroja. Entonces, en un esquema “off-shell” se puede definir a una constante de renormalización debido a las condiciones en una escala no física (tipo-espacio) donde $p^2 = -\lambda^2$. Este esquema es llamado también *esquema de substracción de momento-espacio*.

Substracción mínima (por sus siglas en inglés, MS) [22]: Este esquema absorben los polos en $\frac{1}{\epsilon}$ en las constantes de renormalización.

Substracción mínima modificada (\overline{MS}): En este esquema se absorben ciertas combinaciones con los polos $\frac{1}{\epsilon}$.

En teoría de perturbaciones el Lagrangiano desnudo se divide en dos: Un Lagrangiano renormalizado mas un conjunto de contra-términos [21]. Estos se fijan en cada orden de teoría de perturbaciones mediante la imposición de algunas condiciones de renormalización en las funciones irreducibles de correlación de una partícula (*1PI*) correspondientes a las cantidades divergentes. Se imponen estas condiciones en una escala de renormalización arbitraria μ , asignando un valor en particular a estos acoplamientos de *1PI* en algún punto en donde todos los momentos p_i , son tipo espacio y de orden μ . Los contra-términos consistirán de una parte divergente, la cual compensa las divergencias que surgen en las integrales de lazo (en este caso de 1-lazo) de los otros diagramas, y una parte finita dependiente de μ . Con esto se puede analizar la dependencia de las cantidades físicas en esta escala μ . En la aproximación a 1-lazo el ejemplo mas simple es el de una teoría escalar [19, 20]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\alpha}{4!}\phi^4. \quad (2.17)$$

Esta teoría pertenece al tipo renormalizable y tiene un número finito de términos que divergen (UV). Entonces para eliminar las divergencias al Lagrangiano se añaden términos extra (contra-términos). Se obtienen expresiones que no tienen infinitos pero contienen dependencia en los parámetros de regularización(el regulador). El Lagrangiano de ϕ^4 junto con los contra-términos equivale al Lagrangiano “desnudo”,

$$\mathcal{L}_{Ren} + \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{des}, \quad (2.18)$$

con

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta_Z\partial_\mu\phi_{Ren}\partial^\mu\phi_{Ren} - \frac{1}{2}\Delta_m\phi_{Ren}^2 - \frac{1}{4!}\Delta_\alpha\phi_{Ren}^4, \quad (2.19)$$

donde los contra-términos son:

$$\Delta_Z = Z - 1, \quad \Delta_m = m_{des}^2 - m^2, \quad \Delta_\alpha = \alpha_{des}Z^2 - \alpha. \quad (2.20)$$

La estructura de los contra-términos como funciones de los campos dependen del tipo de la teoría. De acuerdo con la clasificación discutida anteriormente, las teorías se dividen en 3 clases: superrenormalizable, renormalizables y las no renormalizables, donde en el primer caso se tiene un número finito de contra-términos; en el segundo caso se tiene un número infinito de contra-términos pero estos repiten la estructura del Lagrangiano inicial, y en el último caso, se tiene un número infinito de estructuras con un número de campos y derivadas que se incrementan. En el caso de las teorías renormalizables y superrenormalizable, como los contra-términos repiten la estructura inicial de Lagrangiano, el resultado de la introducción de contra-términos se puede representar como:

$$\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_{des} = \mathcal{L}(\phi_{des}, \alpha_{des}, m_{des}), \quad (2.21)$$

\mathcal{L}_{des} tiene la misma forma que el Lagrangiano \mathcal{L} pero con los campos, masas, y constantes de acoplamiento “desnudos”, con lo que se tienen las siguientes relaciones:

$$\phi_{i,des} = Z_i^{1/2}(\alpha, \frac{1}{\epsilon})\phi, \quad \alpha_{des} = Z_\alpha(\alpha, \frac{1}{\epsilon})\alpha, \quad m_{des} = Z_m(\alpha, \frac{1}{\epsilon})m, \quad (2.22)$$

donde las constantes de renormalización Z_i , depende de los parámetros renormalizados y del parámetro de regularización. Las constantes de renormalización no son únicas y dependen del esquema de renormalización. Sin embargo esto no influye en los observables expresados mediante las cantidades renormalizadas. En las teorías de norma, las constantes Z_i , dependerán de la elección de la norma, sin embargo en el esquema de mínima substracción la renormalización de las masas y las constantes de acoplamiento son invariantes de norma, las constantes de renormalización de las masas y de las constantes de acoplamiento no dependen de los parámetros de dimensión como las masas, ni de modificaciones de momento externo en los diagramas. Esta propiedad permite simplificar el cálculo de los contra-términos poniendo las masas y algún momento externo iguales a cero. En una teoría renormalizable la función de Green finita se obtiene de los parámetros “desnudos”, se calculan de los Lagrangianos “desnudos”, multiplicando por las correspondientes constantes de renormalización.

$$\Gamma(k^2, \Lambda^2, \alpha_\Lambda) = Z_\Gamma(\frac{1}{\epsilon}, \alpha_\Lambda)\Gamma_{des}(k^2, \frac{1}{\epsilon}, \alpha_{des}), \quad (2.23)$$

donde en teoría de perturbaciones en orden n , los parámetros “desnudos” en la expresión anterior tienen que expresarse en términos de los renormalizados con ayuda de las relaciones (2.22) tomadas en el orden $(n-1)$ -ésimo. La constante remanente Z_Γ crea el contra-término de orden n -ésimo de la forma $\Delta\mathcal{L} = (Z_\Gamma - 1)O_\Gamma$, donde el operador O_Γ refleja la correspondiente función de Green. Ahora como el propagador es el inverso del operador cuadrático en los campos en el Lagrangiano, la renormalización del propagador es también el inverso de la renormalización de la función de Green para una $1PI$ de dos puntos.

$$G(k^2, \Lambda^2, \alpha_\Lambda)Z_2^{-1}(\frac{1}{\epsilon}, \alpha_\Lambda)G_{des}(k^2, \frac{1}{\epsilon}, \alpha_{des}). \quad (2.24)$$

La constante de renormalización del propagador es también la constante de renormalización del campo correspondiente, pero los campos al contrario de las masas y las constantes de acoplamiento, no entran en las expresiones para los observables.

2.4. Ecuaciones del Grupo de Renormalización y la constante de acoplamiento

La constante de acoplamiento $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$ determina la fuerza de una interacción y es adimensional. Esta cantidad no es constante (a pesar de que se le llame constante), ya que varía dependiendo de la escala energética en donde se la mida, la evolución de esta se puede describir dentro del marco de la renormalización mediante una ecuación que pertenece al grupo de renormalización. El grupo de renormalización (GR), es un formalismo matemático que busca reexpresar los parámetros que están definidos en un sistema físico en términos de otros, que podrían ser un conjunto de parámetros más fáciles de manejar, todo esto mientras se mantienen los aspectos físicos del sistema sin cambio. Este método sirve para describir los cambios de un sistema físico en diferentes escalas, es decir bajo transformaciones de escalas o escalamientos, este método puede ser usado para conocer el comportamiento (la evolución de este sistema) de las constantes de acoplamiento en diferentes escalas energéticas [23, 24].

Las funciones renormalizadas de Green están definidas mediante los campos renormalizados y dependen de la escala energética μ y el acoplamiento α :

$$G_R(p_1, \dots, p_n, \mu, \alpha) = \langle \phi_R(p_1) \dots \phi_R(p_n) \rangle. \quad (2.25)$$

Las funciones desnudas de Green, están definidas con los campos desnudos y dependen de los acoplamientos desnudos α_{des} :

$$G_{des}(p_1, \dots, p_n, \alpha_{des}) = \langle \phi(p_1) \dots \phi(p_n) \rangle. \quad (2.26)$$

La relación entre los campos desnudos y los renormalizados es $\phi(x) = Z^{1/2} \phi_R(x)$, donde Z depende de la escala μ . Se tiene entonces que:

$$G_R(p_1, \dots, p_n; \mu, \alpha) = Z^{-n/2} G_{des}(p_1, \dots, p_n, \alpha_{des}), \quad (2.27)$$

el lado izquierdo de la relación anterior depende de la escala renormalizada μ , el acoplamiento α y la normalización del campo ϕ , mientras que el lado derecho depende de los acoplamientos desnudos α_{des} y la normalización Z , la cual depende del “corte”, y también de la escala μ , debido a su dependencia de Z . Esta igualdad establece la estructura de la dependencia en los parámetros μ, α, ϕ que surgen de la renormalización que hace que la dependencia en el “corte” se cambie a la dependencia en los parámetros desnudos. Las trayectorias (el comportamiento a diferentes escalas energéticas) de los parámetros μ, α y ϕ , que definen la misma teoría mediante condiciones de renormalización diferentes están determinadas debido a que la función de Green desnuda debe

2.4. ECUACIONES DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN Y LA CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO 37

ser invariante bajo transformaciones infinitesimales $\mu \rightarrow \mu + \delta\mu, \alpha \rightarrow \alpha + \delta\alpha$ y $Z \rightarrow Z + \delta Z$, hechas en valores determinados para la constante de acoplamiento desnuda (α_{des}), se puede establecer la siguiente equivalencia:

$$G_{des}(p_1, \dots, p_n; \alpha_0) = Z^{n/2} G_R(p_1, \dots, p_n; \mu, \alpha), \quad (2.28)$$

con lo que se tiene,

$$(\delta\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + \delta Z \frac{\partial}{\partial Z})(Z^{n/2} G_R(p_1, \dots, p_n; \mu, \alpha)) = 0, \quad (2.29)$$

lo que lleva a

$$(\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \delta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{n}{2} \frac{\delta Z}{Z}) G_R(p_1, \dots, p_n, \mu, \alpha) = 0. \quad (2.30)$$

Multiplicando la expresión anterior por el factor $\mu/\delta\mu$, reescribiendo la ecuación (2.30) en términos de derivadas, y tomando los valores del acoplamiento desnudo como constantes, se obtiene la *ecuación de Callan-Symanzik*:

$$(\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial\alpha} + n\gamma(\alpha)) G_R(p_1, \dots, p_n, \mu, \alpha) = 0 \quad (2.31)$$

donde

$$\beta = \mu \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = \frac{\partial\alpha}{\partial \ln\mu}, \quad (2.32)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z} \frac{\partial Z}{\partial\mu} = \frac{\partial \ln\sqrt{Z}}{\partial \ln\mu}. \quad (2.33)$$

Estas ecuaciones β y γ son llamadas *ecuaciones del grupo de renormalización* (EGR), donde la función β describe la evolución (a veces le llaman el flujo) de la “constante” de acoplamiento al variar la escala energética μ . Para entender el comportamiento de α_i a altas energías (en el *límite ultra-violeta*) o en bajas energía (en el *límite infra-rojo*), se puede simplemente graficar α_i en términos de μ , una vez conocida la forma de β .

Para el caso de n campos, las cantidades β y γ son iguales para cualquier valor de n y deben ser independientes de los puntos p_i ; también deben ser finitas e independientes del “corte”, ya que la ecuación se aplica a las funciones renormalizadas de Green las cuales son finitas. Estas funciones se pueden interpretar como las razones de cambio en α y $\ln\sqrt{Z}$ las cuales son necesarias para compensar el efecto de una variación de la escala μ . La ecuación anterior puede ser generalizada de un forma directa a cualquier teoría renormalizable que involucre varios campos ϕ_i y solo acoplamientos adimensionales α_i . Con lo que, para funciones de correlación que involucran n campos diferentes se tiene:

$$(\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial\alpha_i} + \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}) G_R^{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n, \mu, \alpha_i) = 0, \quad (2.34)$$

donde la función β de cada constante de acoplamiento y la función γ de cada campo están definidas como

$$\beta_i = \mu \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mu} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \ln \mu}, \quad (2.35)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{Z_i}}{\partial \ln \mu}. \quad (2.36)$$

2.5. Corrimiento de la constante de acoplamiento

En el SM, se tienen 3 funciones β (una para cada interacción), las cuales se denotan como β_1 para la hipercarga regida por la simetría $U(1)_Y$, β_2 para la interacción débil con simetría $SU(2)_L$, y β_3 para la interacción fuerte con grupo de norma $SU(3)_C$. Se puede resolver la ecuación de renormalización (2.35) para encontrar a las 3 parámetros de las constantes de acoplamiento que “corren” $\alpha_i(\mu)$. Para encontrar a las funciones β se tiene que resolver la ecuación de Callan-Symanzik, se expresa a la función de n-puntos, incluyendo los contra-términos, y se aplican las derivadas con respecto a α y μ , para obtener:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i^2}{2\pi} b_i, \quad (2.37)$$

y utilizando $\alpha_i(\mu) = \frac{g_i^2(\mu)}{4\pi}$, se tiene que la siguiente expresión:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \ln \mu} = \frac{g_i^3}{16\pi^2} b_i, \quad (2.38)$$

donde los coeficientes b_i dependen de los contra-términos y del contenido del SM, es decir de como están cargadas las distintas partículas con respecto a los grupos de norma del SM [25, 21].

Nombres	Multiplete	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
Quarks	$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	u_R^i	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	d_R^i	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Leptones	$L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	e_R^i	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs	$H = \begin{pmatrix} H^0 \\ H^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
Bosones de norma	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
	W	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabla 2.1: El contenido del SM. El índice $i = 1, 2, 3$ representa a las tres familias de los quarks quirales y los leptones quirales. Todos estos son spinores (fermiones) de Weyl y se transforman como $(\frac{1}{2}, 0)$ en la representación del grupo de Lorentz. Y los subíndices L y R representan la quiralidad izquierda y derecha respectivamente.

Para las teoría de norma no-abelianas del SM ($SU(2)$ y $SU(3)$) la evolución energética de los acoplamientos $g_{2,3}$ se determina a un lazo mediante

$$\frac{\partial g_{2,3}}{\partial \ln \mu} = \frac{g_{2,3}^3}{16\pi^2} b_{(2,3)}, \quad (2.39)$$

en donde los coeficientes de la función β están dados por

$$b_{(2,3)} = -\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{2}{3}\sum_f C(R_f) + \frac{1}{3}\sum_b C(R_b). \quad (2.40)$$

Aquí, la suma corre sobre todos los fermiones (f) y bosones (b) cargados bajo $SU(2)$ y $SU(3)$; $C_2(G)$ es el Casimir cuadrático de la representación adjunta del grupo ¹, que para $SU(N)$ tiene el valor $C_2(G) = N$. $C(R)$ denota el invariante de Casimir o índice cuadrático de la representación R de $SU(N)$ bajo la cual fermiones y bosones se transforman; para la representación fundamental de los grupos $SU(N)$ (i.e. \mathbf{N} de $SU(N)$), adoptamos la convención $C(R) = \frac{1}{2}$ [25].

En la simetría abeliana $U(1)_Y$ del SM, a un lazo se tiene [25]:

$$b_1 = \frac{2}{3}\sum_f C(R_f) + \frac{1}{3}\sum_b C(R_b), \quad (2.41)$$

¹Los operadores de Casimir se construyen a partir de los generadores y conmutan con todos los generadores del álgebra. Las álgebras de Lie siempre tienen un elemento cuadrático de Casimir.

porque $C_2(G = U(1)) = 0$. El invariante cuadrático de Casimir toma la forma $C(R) = \frac{1}{2}Y^2 \frac{1}{|t|^2}$, donde Y es la hipercarga de los campos y $|t|^2 = \frac{5}{6}$ es la normalización del generador de la simetría (a veces llamado nivel de Kač-Moody). Con estas expresiones, (2.41) se reexpresa como

$$b_1 = \frac{2}{3} \sum_f \frac{3}{5} Y_f^2 + \frac{1}{3} \sum_b \frac{3}{5} Y_b^2. \quad (2.42)$$

En resumen se obtiene:

$$b_1 = \frac{4}{3} n_f + \frac{1}{10} n_d = \frac{41}{10}, \quad (2.43)$$

$$b_2 = -\frac{22}{3} + \frac{4}{3} n_f - \frac{1}{6} n_d = -\frac{19}{6}, \quad (2.44)$$

$$b_3 = -11 + \frac{4}{3} n_f = -7. \quad (2.45)$$

Aquí, n_F es el número de familias que en el SM es 3, y n_d es el número de dobletes de Higgs, que tiene el valor de 1 en el SM.

Combinando (2.37) con (2.35), se tiene:

$$\beta_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \ln \mu} = b_i \frac{\alpha_i^2}{2\pi}, \quad (2.46)$$

que al resolverla conduce a

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(\Lambda) - \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{\mu}{\Lambda}, \quad (2.47)$$

donde Λ es el parámetro de “corte”. Al analizar la ecuación (2.47), si $b_i > 0$ los valores de α_i aumentarán cuando $\mu \rightarrow \infty$; pero se tiene también que hay una singularidad cuando $\mu = \Lambda e^{[1/b_i \alpha_i(\Lambda)]}$. Esta singularidad es llamada el polo de Landau o también “Moscow Zero” [21].

Cuando $b_i < 0$, el acoplamiento $\alpha_i(\mu)$ decrece para $\mu \rightarrow \infty$, conduciendo al llamado fenómeno de libertad asintótica. De la ecuación (2.35), se define complemente el comportamiento del acoplamiento a medida que μ cambia de acuerdo al signo de β .

Experimentalmente, se conocen los valores para $\alpha_{em}^{-1}(M_Z) \approx 128$, $\alpha_3(M_Z) \approx 0.1184$ y $\sin^2 \theta_w \approx 0.231$ (donde M_Z es la masa del bosón Z). Con estos datos, se pueden deducir los valores de todos los acoplamientos del SM:

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = 59.008, \quad \alpha_2^{-1}(M_Z) = 29.569, \quad \alpha_3^{-1}(M_Z) = 8.446. \quad (2.48)$$

Se puede reemplazar Λ por $M_Z = 91.18 \text{ GeV}$ en la ecuación (2.47) y con los valores mostrados en las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45), se pueden describir la evolución energética de los 3 acoplamientos del SM a diferentes escalas energéticas:

$$\alpha_1^{-1}(\mu) = 59.008 - \frac{(41)}{(10)(2\pi)} \ln \frac{\mu}{M_Z}, \quad (2.49)$$

$$\alpha_2^{-1}(\mu) = 29.569 - \frac{(-19)}{(6)(2\pi)} \ln \frac{\mu}{M_z}, \quad (2.50)$$

$$\alpha_3^{-1}(\mu) = 8.445 - \frac{(-7)}{2\pi} \ln \frac{\mu}{M_z}. \quad (2.51)$$

Para apreciar la evolución de los acoplamientos del SM basta con graficar el comportamiento de las ecuaciones previas, (2.49)-(2.51). El resultado se muestra en la figura 2.1. En esta gráfica se observan tres puntos donde aparentemente se juntan las α_i^{-1} , formando un triángulo que va de $10^{13} GeV$ hasta $10^{17} GeV$. Esta tendencia de los acoplamientos a unirse a altas escalas de energía sugirió en algún momento la existencia de una escala energética de unificación de las 3 fuerzas [26] que condujo a la conjetura de las teorías de gran unificación o GUTs. Sin embargo, el enorme tamaño del triángulo que se obtiene es un tanto desalentador en el SM.

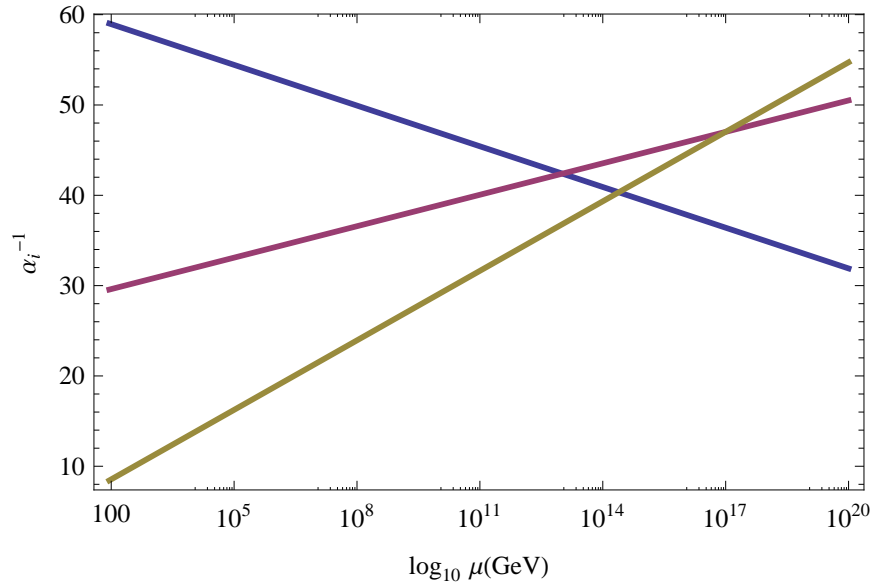


Figura 2.1: Corrimiento de los de acoplamientos del SM. En orden descendente, la primera línea representa a α_1^{-1} , la segunda a α_2^{-1} y la tercera a α_3^{-1} . Las tres líneas se cruzan en una región energética limitada a altas energías.

Capítulo 3

Simetrías

Además de la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica, probablemente la más importante innovación en la física moderna es la incorporación de *las simetrías* en la descripción de la naturaleza. La palabra simetría viene del griego *sun* que significa “con” y *metron* que significa “medida”; es decir algo que posee una simetría, en esta noción es algo que “tiene medida”. Coloquialmente, se dice que un objeto en el espacio es simétrico si, al trazar una línea imaginaria que pasa por la mitad de este, se tiene la misma forma del lado derecho que del lado izquierdo, lo cual, desde la antigüedad, ha sido vinculado a cuestiones estéticas.

Otra manera de percibir el concepto de simetría es el siguiente: se dice que un objeto es simétrico si después de aplicarle una modificación o transformación (e.g. tras rotarlo), este luce exactamente igual que antes. Es decir, una transformación simétrica al aplicarla a un objeto geométrico es imposible de detectarla. Una esfera perfecta claramente tiene una simetría bajo rotaciones; y dos gemelos idénticos tienen una simetría bajo el intercambio entre ellos. El conjunto de todas las transformaciones de un objeto puede representarse mediante un grupo, el cual es llamado el grupo de simetría de un objeto.

Una transformación de simetría de una ley física es un cambio de variables o coordenadas del espacio tiempo y de variables internas, tales que las ecuaciones que describen esa ley tienen la misma forma en las nuevas variables que en términos de las variables viejas. Se dice entonces que las ecuaciones preservan su forma o que son covariantes con respecto de la transformación simétrica.

Las simetrías se pueden clasificar en aquellas que operan en las coordenadas del espacio-tiempo, a las que se les llama *simetrías del espacio-tiempo* o externas, y las que no afectan a las coordenadas del espacio-tiempo, llamadas *simetrías internas* [27].

Para estudiar a las simetrías se utiliza la estructura matemática de *la Teoría de Grupos* (ver apéndice A para una breve introducción a algunos aspectos de esta teoría). Como un compendio completo sobre teoría de grupos, sugerimos consultar [28].

3.1. Simetrías globales

Las simetrías de espacio tiempo corresponden a las transformaciones (en una teoría de campo) que actúan de manera explícita en las coordenadas del espacio tiempo. Ejemplos de estas son las rotaciones [27]

$$\vec{r}' = R\vec{r}, \quad (3.1)$$

y las translaciones temporales

$$t' = t + x^0 \quad (3.2)$$

y espaciales

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{x}^i, \quad (3.3)$$

donde $x^0 \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y R es una matriz de rotación 3×3 . Estas transformaciones de simetría son continuas, ya que están parametrizadas de una manera suave por números reales, tales como los ángulos o los desplazamientos.

Por otro lado, la implicación más importante de la presencia de simetrías en física es la existencia de leyes de conservación asociadas a estas. Para cada simetría *global*, i.e. transformación de un sistema físico que actúa de la misma manera en cualquier punto del espacio-tiempo, existe una cantidad asociada que no cambia en el tiempo: *una carga conservada*.

Este hecho no cobró relevancia hasta que E. Noether probó que existe una relación entre simetrías y leyes de conservación. El Teorema de Noether dice que cuando se tiene una simetría continua en el Lagrangiano, existe una ley de conservación asociada a este. En otras palabras, la covariancia de las ecuaciones de movimiento con respecto a una transformación continua con n parámetros implica la existencia de n cantidades conservadas y, por lo tanto, n leyes de conservación. De esta manera, debido a la invariancia de un sistema físico aislado al desplazarlo en el espacio-tiempo, la energía y el momento lineal se conservan; y debido a la invariancia bajo rotaciones, el momento angular también se preserva. En teoría de campos, debido a la invariancia bajo cambios de fase de los campos que describen partículas cargadas, la carga eléctrica se conserva.

En teorías no relativistas como la mecánica clásica o la mecánica cuántica, las ecuaciones que evolucionan en el tiempo son covariantes con respecto a la transformación de Galileo:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (3.4)$$

En teorías relativistas como el electromagnetismo esta transformación se sustituye por las transformaciones de Lorentz que actúan en las coordenadas del espacio-tiempo.

El grupo de Lorentz L es un grupo de transformaciones lineales $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, (donde Λ representa a las matrices de las transformaciones de Lorentz) tales que

$$x^2 = x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu, \quad (3.5)$$

permanecen invariante, es decir que la métrica de Minkowski permanece invariante ($(dx')^2 = (dx)^2$). Entre las transformaciones que forman a este grupo se encuentran las rotaciones y los “boost” de

Lorentz, además de las operaciones de paridad ($\vec{r}' = -\vec{r}$) y la reversión temporal ($t' = -t$), a estas transformaciones se les llama *simetrías discretas*.

Dentro del grupo de Lorentz las transformaciones se pueden clasificar en propias ($\det\Lambda=1$) e impropias ($\det\Lambda=-1$) que se simbolizan L_{\pm} respectivamente, y también se pueden clasificar en ortocronas ($\Lambda_0^0 > 0$) y anticronas ($\Lambda_0^0 < 0$) que se simboliza como L^{\uparrow} o L^{\downarrow} . Por ejemplo la inversión temporal es una transformación impropia y anticrona (L_{-}^{\downarrow}). El único grupo que está conectado de modo continuo con la identidad es el grupo de Lorentz propio ortocrono L_{+} , en este subgrupo de L $\det\Lambda = 1$ y $\Lambda_0^0 \geq 1$.

Estas transformaciones $\Lambda \in L_{+}$ se pueden expresar como

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = [\exp(-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma})]_{\nu}^{\mu}, \quad (3.6)$$

donde $\omega_{\omega\rho} = -\omega_{\sigma\rho}$ son parámetros de la transformación y $M_{\rho\sigma}$ son generadores de L , y la base del álgebra de Lie para L , y están dados por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

donde J_i y K_i son los generadores de las rotaciones y de los “boostres” respectivamente, estos satisfacen las siguiente álgebra:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (3.8)$$

Además los generadores M obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$[M_{\mu,\nu}, M_{\rho,\sigma}] = -i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu,\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (3.9)$$

El grupo de Lorentz se puede extender, al añadirle traslaciones espacio-temporales donde $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$, donde a^{μ} es un 4-vector constante, y se obtiene *el grupo de Poincaré*. El grupo de Poincaré (P) es el grupo de todas las transformaciones de la forma

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu}x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (3.10)$$

Entonces las transformaciones quedan como,

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = M_{\nu}^{\mu}x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (3.11)$$

Los generadores de Poincaré satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad (3.12)$$

$$[P_{\mu}, M_{\nu\rho}] = i(\eta_{\mu\nu}P_{\rho} - \eta_{\mu\rho}P_{\nu}), \quad (3.13)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}), \quad (3.14)$$

donde $M_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, y contiene tres parámetros para las rotaciones, y tres para los “boost”, y P_{μ} son los generadores de las traslaciones.

3.2. Simetrías internas

Las partículas en mecánica cuántica, a diferencia de las clásicas, tienen estados internos los cuales se mueven con las partículas. Los grupos de simetrías internas se encargan de caracterizar a las estructuras internas: spin, isospin, etc. Los grupos internos son generalmente compactos, $U(n)$ o $SU(n)$ [27].

Ahora, las simetrías internas pueden clasificarse en 2 tipos globales y locales; un ejemplo de las transformaciones globales es la transformación de fase global donde $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi$, con α una constante real, y el elemento $e^{i\alpha}$ perteneciente al grupo de Lie abeliano $U(1)$ de los números complejos de módulo 1, la ecuación de Schrödinger es invariante ante transformaciones globales $U(1)$.

La transformación solo actúa en el espacio de los campos ϕ y no en la variedad espacio tiempo (Minkowski). De acuerdo con el teorema de Noether, la invariación de la ecuación de movimiento bajo simetría continua, la transformación anterior implica la existencia de una carga conservada. Por otro lado una transformación de fase local o de norma, es decir donde la fase depende del espacio tiempo:

$$\psi'(x, t) = e^{i\alpha(x, t)}\psi(x, t), \quad (3.15)$$

claramente la ecuación de Schrödinger no es invariante bajo este tipo de transformaciones, para que la transformación de norma sea una simetría de la teoría (que deje invariante a la ecuación de movimiento), se tiene que modificar la ecuación de movimiento (E. de Schrödinger) de tal manera que sus derivadas serán sustituidas por las llamadas *derivadas covariantes*, además de la adición de un campo auxiliar (un potencial vectorial) $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$, donde $\phi(x, t)$ es un potencial escalar y $\vec{A}(x, t)$ un potencial vectorial, entonces se hace la siguiente sustitución:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar}A_\mu, \quad (3.16)$$

además el campo vectorial de norma A_μ requiere la siguiente transformación:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\hbar}{q}\partial_\mu\alpha. \quad (3.17)$$

Con esto se soluciona el problema de la invariación ante una transformación de fase local, y la ecuación de Schrödinger ahora será invariante ante las transformaciones locales $U(1)$, con lo ue se tiene la siguiente expresión:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar}\vec{A})^2\psi = i\hbar(\partial_t + \frac{iq}{\hbar}\phi)\psi \quad (3.18)$$

Esta ecuación describe como se acopla la partícula de masa m y carga q con el campo electromagnético asociado al potencial A_μ , ya que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}, \quad (3.19)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.20)$$

Esto quiere decir que las simetrías determinan la forma de las interacciones, este procedimiento de utilizar un campo de norma auxiliar, dio origen a varias de las teorías más exitosas dentro de la física teórica, que son las teorías de norma no-abelianas, también llamadas teorías de Yang-Mills, este tipo de teorías llevaron al desarrollo del SM [21].

Considerando el grupo de matrices especiales (determinante igual a 1) y unitarias $SU(N)$, se tiene que este grupo contiene a las matrices C , $n \times n$, con coeficientes complejos donde,

$$C^\dagger C = 1_n, \quad \det C = 1. \quad (3.21)$$

Para el caso de las teorías Yang-Mills el procedimiento para preservar la invariación local será muy parecido al caso abeliano, las transformaciones locales de fase estarán dadas por:

$$B = e^{i\alpha}, \quad (3.22)$$

donde α será

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\dim G} \alpha^i t_i, \quad (3.23)$$

donde G es un grupo de simetría continua y t_i son las bases del álgebra de Lie de G y $\alpha^i \in \mathbb{R}$, y como en el caso abeliano también se añaden campos auxiliares (campos de norma) que tiene valores en el álgebra de Lie de G , y son de la siguiente forma:

$$A_\mu = \sum_{i=1}^{\dim G} A_\mu^i(x) t_i, \quad (3.24)$$

que se transforma de la siguiente manera:

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu g + \frac{i}{\alpha} g^{-1} \partial_\mu g \quad (3.25)$$

con α una constante de acoplamiento.

Como se mencionó antes las teorías de norma basadas en $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ describen al electromagnetismo, a la interacción débil y fuerte (el SM), con cargas conservadas las cuales son: la carga eléctrica, el isospín débil y la carga de color respectivamente.

3.3. El Teorema NO-GO de Coleman-Mandula

La naturaleza de una partícula elemental no cambia cuando a esta se le somete a una traslación en el espacio o el tiempo, a una rotación o cuando es vista por un observador moviéndose de manera uniforme relativa a este. Los estados de la mecánica cuántica de tales partículas deben pertenecer a un espacio de Hilbert que tenga cierta representación del grupo de Poincaré, la definición de una

partícula elemental se basa en simetrías geométricas, de hecho la clasificación de las partículas se hace de acuerdo con su masa y su spin.

Como se mencionó en el capítulo 1, una partícula puede ser vista como una subdivisión fundamental en una teoría de campo relativista, una colección de funciones $\phi_i(x)$ en el espacio-tiempo, esta tiene propiedades específicas cuando se someten a las transformaciones de Poincaré. Entonces es natural preguntarse si es posible extender el álgebra de Poincaré de manera no trivial.

Sin embargo, dentro de la física teórica existen teoremas que dicen que ciertas situaciones particulares son físicamente imposibles, estos son los *teoremas “NO-GO”*; probablemente el mas famoso de estos teoremas es el de *Coleman-Mandula* [29], el cual dice que:

En las $3 + 1$ dimensiones, no se puede extender el álgebra de Poincaré de manera no trivial y tener amplitudes de dispersión diferentes de cero. Es decir, no hay una mezcla de simetrías de Poincaré no triviales y simetrías internas con una dispersión diferente cero excepto por el producto directo de Poincaré y simetrías internas.

En otras palabras la simetría bosónica más general de amplitudes de dispersión (es decir, de la matriz-S) es un producto directo de Poincaré y simetrías internas

$$G = G_{\text{Poincaré}} \times G_{\text{interna}}. \quad (3.26)$$

No existe una forma no trivial para combinar simetrías de espacio-tiempo y simetrías internas

Sin embargo, este teorema de Coleman-Mandula tiene una “laguna”, ya que Coleman y Mandula sólo consideraron generadores de simetría bosónica. Pero en 1975 Haag, Lopuszansky y Sohnius extendieron el teorema de Coleman-Mandula para incluir generadores fermiónicos de simetría, que están relacionados con partículas con diferente spin (fermiones).

Y llegaron a la conclusión de que la simetría más general de la matriz-S es un producto directo de las simetrías internas y *simetrías de super-Poincaré*.

$$G = G_{\text{SuperPoincare}} \times G_{\text{interna}}. \quad (3.27)$$

La llamada álgebra de super-Poincaré es la extensión del grupo de Poincaré que incluye transformaciones que convierten los bosones en fermiones y viceversa, estas son las transformaciones de *supersimetría*. A esta nueva simetría se le dio el nombre de *Supersimetría* (SUSY, por sus siglas en inglés).

3.4. SUSY

Una de los fenómenos que aún no se entienden dentro de la física fundamental es: ¿por qué las partículas elementales tienen las masas que tienen? A este problema se le conoce como *el problema de la jerarquía* [26].

Actualmente, consideramos que las constantes fundamentales de la naturaleza son la constante gravitacional de Newton (G_N), la constante de Planck (h o \hbar) y la velocidad de la luz (c). Se pueden

hacer combinaciones de estas constantes para obtener valores de tiempo, longitud y masa; estas son conocidos *las unidades de Planck*.

Entonces, si buscáramos predecir las masas de las partículas en el SM directamente a partir de primeros principios, estas deberían ser del orden de la masa de Planck (reducida), la cual tiene un valor de $\sim 10^{18}$ GeV. Particularmente, el bosón de Higgs, en teoría, podría tener una masa similar a la de Planck. Como el campo de Higgs se acopla a las otras partículas para dotarlas de masa, las otras también podrían adquirir una masa de esa magnitud. El principal problema es que esta masa es 16 órdenes de magnitud más grande que la partícula más pesada observada en el universo (quark top). Una solución que se propone para esto es que existe una simetría “nueva” que cancela a todas las contribuciones de la escala de Planck, y que asegura que las masas de las partículas permanezcan con una energía mas baja (menos masiva).

Como se vio anteriormente, SUSY predice que cada una de las partículas del SM tiene una partícula asociada a esta (una supercompañera) con propiedades idénticas, salvo porque tiene un valor para el spin que difiere por $\pm\frac{1}{2}$ unidades con respecto al de su compañero del SM. Estas supercompañeras de alguna manera se aseguran de que sus compañeras tengan la masa que predice el SM, pero esta solo se manifiesta por debajo de una escala energética (la de rompimiento de SUSY), en la cual se destruyen los efectos supersimétricos de altas energías, invisibles en la física de bajas energías, y las supercompañeras adquieren una masa más pesada que sus compañeras.

En términos de las simetrías del espacio-tiempo, SUSY se entiende como una extensión supersimétrica del álgebra de Poincaré. Obtener esta extensión requiere del concepto de *álgebra gradada* [29, 30], es decir, de una generalización del álgebra de Lie que permita operadores *bosónicos* (como el Hamiltoniano, el momento, etc.) y otros que podemos llamar *fermiónicos*. Si A_a es un operador de un álgebra de Lie, entonces

$$A_a A_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} A_b A_a = i C_{ab}^c A_c, \quad (3.28)$$

donde los gradados toman los siguientes significados: $\eta_a = 0$ si A_a es un generador bosónico, y $\eta_a = 1$ si A_a es un generador fermiónico.

Una transformación supersimétrica corresponde a un operador Q que transforma un estado bosónico en un estado fermiónico y viceversa:

$$Q|\text{bosón}\rangle \propto |\text{fermión}\rangle \quad y \quad Q|\text{fermión}\rangle \propto |\text{bosón}\rangle, \quad (3.29)$$

donde Q y Q^\dagger son los *operadores fermiónicos* supersimétricos o supercargas. La forma de Q^\dagger y Q está restringida por consideraciones matemáticas específicas de donde se puede derivar la llamada álgebra gradada o super-álgebra para Q y Q^\dagger .

En SUSY, los generadores bosónicos son los generadores de Poincaré $P^\mu, M^{\mu\nu}$ y hay varios generadores fermiónicos $Q_\alpha^A, Q_{\dot{\alpha}}^{\bar{A}}$ ¹ (donde $A = 1, \dots, N$ es un índice espinorial) que se transforman espinores. En esta caso $N = 1$, se refiere a la SUSY mas simple, en caso de $N > 1$ se estará hablando

¹El punto sobre el subíndice es propio de la notación de van der Waerden popularmente utilizada en SUSY [29].

de una SUSY extendida. En el álgebra gradada se tendrán las siguientes relaciones de conmutación y anticonmutación [31]:

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \quad (3.30)$$

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, M^{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\beta}}, \quad (3.31)$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, P^\mu] = 0, \quad (3.32)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (3.33)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \quad (3.34)$$

Para el caso de $[Q_\alpha, T_i]$, donde T_i es un generador de simetría interna, usualmente este conmutador es cero debido al teorema Coleman-Mandula.

Ahora si A es un generador de una simetría $U(1)$ global, ya que $Q_\alpha \rightarrow e^{-iA\lambda} Q_\alpha e^{iA\lambda}$,

$$[Q_\alpha, A] = Q_\alpha, \quad [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, A] = -\bar{Q}^{\dot{\alpha}}. \quad (3.35)$$

Cabe señalar que los operadores de Casimir del grupo de Poincaré están dados por

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad C_2 = W^\mu W_\mu, \quad (3.36)$$

con W_μ el vector Pauli-Ljubanski.

En el caso de supersimetría $N = 1$, para obtener un nuevo Casimir \bar{C}_2 (correspondiente al superspin), se define:

$$B_\mu = W_\mu - \frac{1}{4} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} Q_\beta, \quad C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu, \quad (3.37)$$

$$\bar{C}_2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

donde

$$B_\mu \equiv W^\mu + \frac{1}{4} X_\mu, \quad (3.39)$$

con

$$X_\mu = \frac{1}{2} \bar{Q} \gamma_\mu \gamma^5 Q, \quad (3.40)$$

y se cumple la relación:

$$[C_{\mu\nu}, Q_\alpha] = 0. \quad (3.41)$$

Finalmente C^2 , es un operador Casimir para la superálgebra ya que,

$$[C^2, Q_\alpha] = 0 \quad [C^2, P_\mu] = 0 \quad [C^2, M_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.42)$$

En una teoría supersimétrica se introduce el concepto de *el superespacio* [32, 26], este es un sistema coordinado en donde las transformaciones supersimétricas se manifiestan, la acción de los elementos en el grupo de super Poincaré basado en el super-álgebra son tratados como las transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski.

Este superespacio es una variedad en 8 dimensiones que puede ser construido de un conjunto del grupo de super Poincaré y el grupo de Lorentz, por medio de las coordenadas $S = (x^\mu, \theta^A, \bar{\theta}^{\dot{A}})$, donde x^μ son coordenadas del espacio de Minkowski, y donde θ_A y $\dot{\theta}^{\dot{A}}$ son los cuatros números de de Grassman, y son los parámetros de los operadores Q del álgebra.

Los números de Grassman son unas variables que tiene la propiedad de que anticonmutan entre sí y además tiene sus propias reglas a la hora de integrar y derivar, es decir tiene su propio cálculo.

El elemento mas general del grupo de super Poincaré se puede expresar como:

$$g = \exp[-ix^\mu P_\mu + i\theta^A Q_A + i\bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{Q}^{\dot{A}} - \frac{i}{2} \omega_{\rho\nu} M^{\rho\nu}], \quad (3.43)$$

donde $x^\mu, \theta^A, \bar{\theta}_{\dot{A}}$ y $\omega_{\rho\nu}$ constituyen la parametrización del grupo, y $P_\mu, Q_A, \bar{Q}^{\dot{A}}$ y $M_{\rho\nu}$ son los generadores.

Otro concepto único de SUSY es el de *supercampo*. Un supercampo Φ es una función definida en el superespacio de la siguiente manera: $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$. Este supercampo se puede expandir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta^A \phi_A(x) + \bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{\chi}^{\dot{A}}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) \\ &+ \theta\sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu(x) + \theta\theta \bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{\lambda}^{\dot{A}}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} \theta^A \psi_A(x) + \theta\theta \bar{\theta}\bar{\theta} d(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Donde los componentes de este supercampo Φ (que es un escalar de Lorentz) son los siguientes: $f(x), m(x), n(x)$ son escalares complejos, $\psi_A(x), \phi_A(x)$ son spinores de Weyl izquierdos, $\bar{\chi}^{\dot{A}}(x), \bar{\lambda}^{\dot{A}}(x)$ son spinores de Weyl derechos, $V_\mu(x)$ es un 4-vector de Lorentz y $d(x)$ un escalar complejo.

Los supercampos pueden clasificarse en supercampos escalares (quirales) y vectoriales, dependiendo de las siguientes restricciones:

$$\bar{D}_{\dot{A}} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad \text{Supercampo quiral izquierdo.} \quad (3.45)$$

$$D_A \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad \text{Supercampo quiral derecho.} \quad (3.46)$$

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad \text{Supercampo vectorial.} \quad (3.47)$$

Donde $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ son las derivadas supercovariantes:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (3.48)$$

$$\bar{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.49)$$

Entonces existe una manera no trivial para extender las simetrías de espacio-tiempo, y para esto se tiene que incorporar el concepto de supersimetría. Lo interesante de este resultado es que la supersimetría aparece de una manera especial, ya que es la única extensión del grupo de Lorentz como una simetría de las amplitudes de dispersión.

Esta es una de las razones para tomar la supersimetría como una posible nueva simetría de la naturaleza.

En la naturaleza hay una variedad de mecanismos en donde las simetrías se pueden esconder o romper. Uno de estos es el rompimiento explícito donde las ecuaciones de movimiento no son manifestamente invariantes bajo un grupo de simetría en particular. Esto significa, que en la formulación de Lagrangiana, el Lagrangiano del sistema contiene uno o más términos que explícitamente rompen la simetría.

Otra forma de esconder una simetría es mediante el fenómeno del rompimiento espontáneo de simetría. Acá las leyes de la física son simétricas pero el estado del sistema no lo es. Se trata de un fenómeno donde el Lagrangiano tiene una simetría y por lo tanto existe una cantidad conservada debido al teorema de Noether, sin embargo el estado del sistema no respeta la simetría. Se puede tener un sistema que guarda una simetría en el Lagrangiano, puede tener un estado base (estado en el vacío) que no satisface esta simetría.

Este fenómeno se puede ver en varios sistemas como en un condensado de Bose-Einstein, superfluidos, superconductores, cristales y según el SM en todo el universo. Este proceso conlleva a la aparición de términos masivos en el Lagrangiano, y es fundamental en el mecanismo de Higgs, que es el que dota de masa a las partículas.

Se piensa que SUSY es una simetría rota en una cierta escala energética que está alrededor de 10 TeV , entonces las partículas supersimétricas mas ligeras deberían de detectarse en el *LHC* en el año 2015-2016, el que no aparezcan podría significar que o bien la escala de rompimiento es mas grande y todavía no se ha alcanzado o bien SUSY no existe.

Otro de las razones por las cuales SUSY resulta atractiva es por como afecta a la evolución de las constantes de acoplamiento en escalas energéticas altas, cuando se toman en cuenta a las supercompañeras del SM, este pasa a ser *el Modelo Estándar Mínimo SuperSimétrico* (MSSM por sus siglas en inglés) [33, 34, 25]. Para verificar los cálculos a detalle de Supersimetría consultar [29, 31]

3.5. MSSM

Los estados de las partículas en una teoría supersimétrica, se pueden expresar mediante representaciones irreducibles del super-álgebra mediante supermultipletes. Estos objetos contiene estados fermiónicos y bosónica, conocidos como supercompañeros. Los supercompañeros son bastante similares y difieren sólo en el número cuántico de spin por $\pm \frac{1}{2}$ [26, 32].

De (3.32) se obtiene que $-P^2 = -P^\mu P_\mu$ conmuta con Q y \bar{Q} , lo que implica que las supercompañeras que habitan en el mismo supermultiplete deben tener los mismos eigenvalores de $-P^2$ y

por lo tanto deben tener la misma masa. Experimentalmente, esto todavía no ha sido observado y por lo tanto se puede pensar que la simetría tiene que estar rota.

Además que \bar{Q} y Q también conmuta con los generadores de las transformaciones de norma. Esto implica que las partículas en el mismo supermultiplete deben estar en la misma representación del grupo de norma y por lo tanto deben tener los mismos valores para la carga, isospin débil y color. Cada supermultiplete contiene igual número de grados de libertad fermiónicos y bosónicos, $n_F = n_B$.

Tomando en cuenta estas consideraciones se puede mostrar que existen sólo dos tipos de supermultipletes para una extensión del SM que sea realista. Cualquier otra posibilidad renormalizable para un supermultiplete que satisfaga $n_F = n_B$ se reduce a una de las siguientes combinaciones:

El supermultiplete quirral, este es la posibilidad más simple para un supermultiplete que cumple con $n_F = n_B$ en 4 dimensiones. Se toma un solo fermión (spinor) de Weyl derecho o izquierdo y dos escalares reales, que se pueden combinar en un complejo escalar, como supercompañeros. Esta combinación proporciona formulaciones convenientes del super-álgebra.

Otra alternativa para un supermultiplete simple, es considerar un bosón vectorial con spin 1, que es un bosón de norma sin masa en una teoría renormalizable. Para encontrar una supercompañera adecuada se considera un fermión de Weyl de spin $\frac{1}{2}$ y sin masa para que la teoría de nuevo sea renormalizable. A este se le llama *supermultiplete de norma*, ya que los bosones de norma y sus supercompañeras fermiónicas, llamadas *gauginos*, se transforman en la representación adjunta del grupo de norma.

Las consideraciones anteriores llevan a la conclusión de que en una extensión supersimétrica del SM cada partícula elemental conocida está en un supermultiplete quirral o de norma y tienen una supercompañera con un spin diferente por $\pm\frac{1}{2}$.

Además solamente los supermultiplets quirales pueden contener los fermiones del SM, porque de lo contrario sus partes derecha e izquierda transformarían de igual manera bajo transformaciones de Lorentz, cosa que no es verdad.

Ahora considerando un fermión en el SM, su supercompañera es una partícula con spin 0 (un bosón); a esta partícula se le llamará *sfermión*, y así con todas las demás partículas se seguirá esta lógica, por ejemplo: la supercompañera de un quark será llamada *squark* o la supercompañera del leptón será el *sleptón*.

Pero como las partes izquierda y derecha de los quarks y leptones son dos fermiones Weyl separados, cada uno, la parte izquierda, así como la parte derecha tendrán su propio compañero escalar complejo.

Para indicar este supercompañero complejo se simboliza añadiendo una tilde encima, por ejemplo si “ x ” es una partícula del modelo estándar, se simbolizará al supercompañero como “ \tilde{x} ” es decir, si se considera a un electrón izquierdo e_L y uno derecho e_R , sus supercompañeras serán denotados como \tilde{e}_L, \tilde{e}_R respectivamente.

En el SM, los neutrinos son siempre izquierdos, si se desprecian sus masas que son muy pequeñas. En el MSSM las partícula supersimétrica que corresponde a los diferentes neutrinos son: $\tilde{\nu}_e, \tilde{\nu}_\tau$ y $\tilde{\nu}_\mu$.

Los leptones son descritos por supermultipletes quirales, como cada multiplete quiral sólo describe un estado helicidad, se necesitan dos multipletes quirales para cada leptón cargado. Los supermultipletes de los leptones son los siguientes:

Supermultipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
$\hat{L}_i \equiv (\tilde{L}, L)_i$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\frac{1}{2})$
$\hat{e}_i \equiv (\bar{e}_R, \bar{e}_R)_i$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$

Tabla 3.1: Supermultipletes de leptones

Donde la hipercarga $U_Y(1)$ es $Q = T_3 + Y$. Ahora cada estado de helicidad corresponde a un escalar complejo, entonces L_i es un doblete de $SU(2)_L$, y son:

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_i \\ \tilde{e}_i \end{pmatrix}_L \quad L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ e_i \end{pmatrix}_L. \quad (3.50)$$

Los supermultipletes para los quarks son los siguientes:

Supermultipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
$\hat{Q}_i \equiv (\tilde{Q}, Q)_i$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
$\hat{d}_i \equiv (\tilde{d}_R, \bar{d}_R)_i$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
$\hat{u}_i \equiv (\tilde{u}_R, \bar{u}_R)_i$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$

Tabla 3.2: Supermultipletes de quarks

El supermultiplete \hat{Q}_i es también un doblete de $SU_L(2)$, y son:

$$\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{d}_i \end{pmatrix}_L \quad Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L. \quad (3.51)$$

La partícula de Higgs del SM tiene spin 0, este debe estar ubicado en un supermultiplete quiral. Pero un solo supermultiplete quiral no es suficiente, sino que se necesitan dos supermultipletes de Higgs separados para poder introducir al SM satisfactoriamente en la supersimetría.

Se denotan las dos partículas de Higgs como H_u y H_d , ya que los valores de expectación en el vacío (VEV) de estos Higgs dotan de masas a los quark up y down respectivamente. A las supercompañeras de spin $\frac{1}{2}$, se añade el sufijo “-ino”, por ejemplo la supercompañera para un Higgs se le llamará *Higgsino* que es un fermión.

En el MSSM se necesitan por lo menos dos dobletes de Higgs, esto en contraste con el SM donde sólo un doblete de Higgs es suficiente para dotar de masa a todas las partículas. Y esto se da por la necesidad de cancelar las anomalías, son necesarios dos dobletes de Higgs de hipercargas opuestas para dotar de masa a los quarks up y down. Los dos supermultipletes, con sus números cuánticos son las siguientes:

Supermultipletes	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
$\hat{H}_d \equiv (\tilde{H}_d, H_d)_i$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
$\hat{H}_u \equiv (\tilde{H}_u, H_u)_i$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$

Tabla 3.3: Supermultipletes de Higgs

Ahora considerando a todos los supermultipletes quirales de una extensión mínima supersimétrica viable del SM, se pueden resumir en la siguiente tabla:

Nombres	Supermultiplete	Bosón	Fermión	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
Quarks, Squarks	$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}$	$(\tilde{u}_L^i, \tilde{d}_L^i)$	(u_L^i, d_L^i)	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	u_R^i	\tilde{u}_R^i	u_R^i	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	d_R^i	\tilde{d}_R^i	d_R^i	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Leptones, Sleptones	$L_L^i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}$	$(\tilde{\nu}_L^i, \tilde{e}_L^i)$	(ν_L^i, e_L^i)	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	e_R^i	\tilde{e}_R^i	e_R^i	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, Higgsinos	$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	(H_d^0, H_d^-)	$(\tilde{H}^0, \tilde{H}^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	(H_u^+, H_u^0)	$(\tilde{H}^+, \tilde{H}^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabla 3.4: Supermultipletes en el MSSM. Los campos de spin 0 (Bosones) son escalares complejos, y los campos de spin $\frac{1}{2}$ (Fermiones) son spinores de Weyl de dos componentes una izquierda y otra derecha.

En la tabla (3.4), se muestra sólo la primera familia para los quarks y leptones. Por lo tanto, para tener en cuenta todas las partículas, se tiene que colocar un índice para indicar la familia, este se añade a los símbolos de supermultipletes quirales, con lo que se tiene por ejemplo: Q_i, u_i, d_i (para $i = 1, 2, 3$). La segunda columna de tabla (3.4) denota el símbolo para todos los supermultipletes quirales, por ejemplo: Q es el supermultiplete de $SU(2)_L$ que contiene \tilde{u}_L , así como \tilde{d}_L, u_L y d_L . Además, se utiliza la convención de que todos supermultipletes quirales están definidos en términos de spinores de Weyl izquierdos.

De la tabla (3.4) se tiene que el supermultiplete H_d tiene los mismos números cuánticos del grupo de norma del SM que los sleptones y leptones izquierdos L_i . Sin embargo no se puede tomar a un neutrino y un escalar de Higgs para que sean supercompañeras, ya que implicaría que el sneutrino y el bosón de Higgs son la misma partícula.

Por lo tanto, todas las supercompañeras de las partículas del SM son de hecho nuevas partículas con lo que no pueden ser descritas o identificadas con algún otro estado ya existente en el SM.

Para describir una versión supersimétrica del SM, se tiene que considera al grupo de norma de

este,

$$G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (3.52)$$

En consecuencia se necesitan tres supercampos vectoriales (o multipletes vectoriales) \hat{V}_i con los siguientes componentes:

$$\hat{V}_1 \equiv (G_1, W_1^\mu) \rightarrow U(1)_Y \quad (3.53)$$

$$\hat{V}_2 \equiv (G_2^a, W_2^{\mu a}) \rightarrow SU(2)_L \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

$$\hat{V}_3 \equiv (G_3^b, W_3^{\mu b}) \rightarrow SU_C(3) \quad b = 1, 2, \dots, 8, \quad (3.55)$$

donde W_i^μ son los campos de norma, G_1, G_2 y G_3 son los gauginos correspondientes a $U(1)_Y$, $SU(2)_L$ y los gluinos (gauginos) para el caso de $SU(3)_C$.

Los bosones vectoriales del SM, junto con sus supercompañeras, los gauginos, se ubicarán en los supermultipletes de norma. Así que se tiene un octete de color supersimétrico de spin $\frac{1}{2}$, que es la supercompañera del gluón, el gluino. El grupo de norma para el caso electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se asocia con los bosones de norma de spin 1: W^\pm, W^0 y B^0 .

Las supercompañeras de estos serán los Winos y el Bino, denotados por $\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$ y \tilde{B}^0 respectivamente. Después del rompimiento de la simetría electrodébil, los eigenestados de norma W^0 y B^0 se mezclan para obtener los eigenestados de masa para Z^0 (bosón Z) y γ (fotón). Las correspondientes mezclas \tilde{W}^0, \tilde{B}^0 se denominan Zino, Fotino, y se denota por $\tilde{Z}^0, \tilde{\gamma}$ respectivamente. Todos los supermultipletes de norma de una extensión mínima de supersimétrica del modelo estándar se resumen en la tabla (3.5):

Nombres	Fermiones	Bosones	$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
gluino, gluón	\tilde{g}	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, Bosones W	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	W^\pm, W^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, Bosones B	\tilde{B}^0	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabla 3.5: Supermultipletes de norma en MSSM

Ninguna de las supercompañeras de las partículas del SM han sido descubiertas hasta ahora.

Esto conduce a la conclusión de que la supersimetría debe estar rota ya que, por ejemplo \tilde{e}_L y \tilde{e}_R tendrían masas iguales al electrón, y estas partículas habrían sido fáciles de detectar, lo que hace pensar que la supersimetría es una simetría rota. Para mas información referente al MSSM consultar [33, 34, 25].

3.6. Corrimiento de las constantes de acoplamiento supersimétricas

En el mínimo modelo estándar supersimétrico (MSSM por sus siglas en inglés), el número de partículas cambia, y esto afecta al cálculo del corrimiento de la constante de acoplamiento de la

siguiente manera [26, 25].

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(M_Z) - \left(\frac{b_i}{2\pi}\right) \ln \frac{\Lambda_{SUSY}}{M_Z} - \left(\frac{b_i^{MSSM}}{2\pi}\right) \ln \frac{\mu}{\Lambda_{SUSY}}. \quad (3.56)$$

El factor Λ_{SUSY} representa la escala en donde los efectos supersimétricos van a empezar a afectar la evolución de las constantes de acoplamiento; para esta tesis se considera $\Lambda_{SUSY} = 1 \text{ TeV} = 1000 \text{ GeV}$ y M_Z es la masa del bosón Z .

La expectativa de encontrar nueva física a la escala de 1 TeV se basa principalmente en tres argumentos teóricos. Primero, una explicación natural de la jerarquía de norma exige una nueva física en escala de 1 TeV. Segundo, la unificación de los tres acoplamientos del SM en altas energías cercanas a la escala de Planck es posible si hay nueva física mas allá del SM. La extensión supersimétrica mínima del SM, donde las masas de sus supercompañeras son cercanas a unos TeV, provee un ejemplo de una buena unificación de los acoplamientos. Tercero, la existencia de materia oscura no puede ser explicada por el SM. Sin embargo un hipotética partícula masiva que interactúa débilmente (WIMP, por sus siglas en inglés) cuya masa e interacción estén regidas por una nueva física asociada con la escala de 1 TeV puede ser consistente con la densidad de materia oscura observada.

Como en el caso de anterior (no supersimétrico) los valores de las constantes de acoplamiento en la escala energética $\mu = M_Z$ van a ser los mismos, pero las coeficientes b_i van a cambiar debido al contenido de partículas del MSSM; estos van a ser modificados debido a las partículas supercompañeras, entonces la expresión para todas las b_i supersimétrica (b_i^{MSSM}) se pueden resumir en una simple expresión:

$$b_i^{MSSM} = -3C_2(G) + nC(R), \quad (3.57)$$

donde $C_2(G)$ es el Casimir cuadrático de la representación adjunta del grupo, $C(R)$ es el Casimir invariante de la representación R del grupo y n es la multiplicidad de las partículas.

Para el caso de $U(1)_Y$:

$$\begin{aligned} b_1^{MSSM} &= nC(R) = \frac{2}{5} \left(\frac{120}{36} n_f + \frac{2}{4} n_h \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{4} n_h + \frac{120}{36} n_f \right) \\ &= 2n_f + \frac{3}{10} n_h = \frac{3}{5} + 6 = \frac{33}{5}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde n_f es el número de familias y n_h es el número de los dobletes de Higgs.

En la expresión anterior mas precisamente en en la segunda igualdad de la primera línea, el término $\frac{120}{36} n_f$ es la suma del cuadrado de las hipercargas de todos los campos fermiónicos del SM, que es lo mismo que se tenía en el caso no SUSY. Pero el segundo término surge del hecho de que para cada doblete de Higgs, ahora se tendrán dos Higgsino con hipercargas $\pm \frac{1}{2}$. La compañeras bosónicas, presentes en el SM aparecen también en el tercer término. El último término contiene a todos los sfermiones, todos con la misma hipercarga que sus supercompañeras.

Mientras que la versión supersimétrica para el caso del coeficiente b_2 para $SU(2)$ es:

$$\begin{aligned} b_2^{MSSM} &= -6 + nC(R) = -\frac{22}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{2} n_f + \frac{1}{2} n_h + 2 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2} n_f + \frac{1}{2} n_h \right) \\ &= -6 + 2n_f + \frac{1}{2} n_h = -5 + 2n_f = 1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Acá en la parte fermiónica se tienen nuevas contribuciones de Higgsinos y de los gauginos $SU_L(2)$ que están en la representación adjunta. La parte bosónica recibe una contribución de los sfermiones. Por último para el caso de $SU_C(3)$:

$$\begin{aligned} b_3^{MSSM} &= -9 + nC(R) = -11 + \frac{2}{3}(\frac{4}{2}n_f + 3) + \frac{1}{3}(\frac{4}{2}n_f) \\ &= -9 + 2n_f = -3. \end{aligned} \quad (3.60)$$

En este caso lo que se tiene de nuevo es la contribución de los gluinos y de los sfermiones.

En resumen:

$$b_1^{MSSM} = \frac{3}{5} + 2n_f = \frac{33}{5}, \quad b_2^{MSSM} = -5 + 2n_f = 1, \quad b_3^{MSSM} = -9 + 2n_f = -3. \quad (3.61)$$

En consecuencia las expresiones para las ecuaciones del grupo de renormalización para el MSSM en el caso donde la supersimetría se rompe a los $10^3 GeV$ serán ahora:

$$\alpha_1^{-1}(\mu) = 59.008 - \frac{41}{20\pi} \ln \frac{1000 GeV}{M_z} - \frac{33}{10\pi} \ln \frac{\mu}{1000 GeV} \quad (3.62)$$

$$\alpha_2^{-1}(\mu) = 29.569 + \frac{19}{12\pi} \ln \frac{1000 GeV}{M_z} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu}{1000 GeV} \quad (3.63)$$

$$\alpha_3^{-1}(\mu) = 8.445 + \frac{7}{2\pi} \ln \frac{1000 GeV}{M_z} + \frac{3}{2\pi} \ln \frac{\mu}{1000 GeV}. \quad (3.64)$$

Y al igual que en el caso no supersimétrico, se grafica para apreciar la evolución de los acoplamientos (ahora supersimétricos) a diferentes escalas.

El resultado es bastante satisfactorio ya que la evolución de las constantes de acoplamiento con la introducción de SUSY en una escala energética de $1 TeV$, se acercan bastante a un punto de unificación en $\mu = M_{GUT} \sim 1.6 \times 10^{16} GeV$ para un valor de $\alpha^{-1} \sim 24$, lo que en realidad se tiene es que los 3 puntos de unificación que se tenía en el caso no supersimétrico que formaban un triángulo, ahora forman un triángulo muy pequeño que se asemeja a un punto.

Aunque se pudiera pensar como una coincidencia, la unificación de las constantes de acoplamiento es considerada por muchos físicos teóricos como una de las motivaciones mas fuertes para un MSSM, esta unificación no es otra cosa que la idea de que en alguna escala energética muy alta, que debió de aparecer unos instantes después del “Big Bang”, todas la interacciones fundamentales estaban unificadas, es decir que tenían la misma intensidad y por tanto eran indistinguibles, sin embargo el MSSM al igual que el SM no incluye a la gravedad.

En el LHC, las partículas supersimétricas todavía no han sido detectadas. Muchos físicos teóricos y experimentales aún siguen siendo optimista con respecto a la existencia de SUSY, ya que entre otras cosas no existen otras soluciones para el problema de la jerarquía que sean tan satisfactorias como SUSY. Sin embargo, una de las consecuencias mas importantes sería que los trabajos en la teoría de *super cuerdas* que conducen a modelos con supersimetría a bajas energías deberían replantearse, considerando posiblemente que, de existir, SUSY es rota a extremadamente altas energías. Es aún cuestionable hasta qué punto esto impactaría la validez de la teoría de cuerdas.

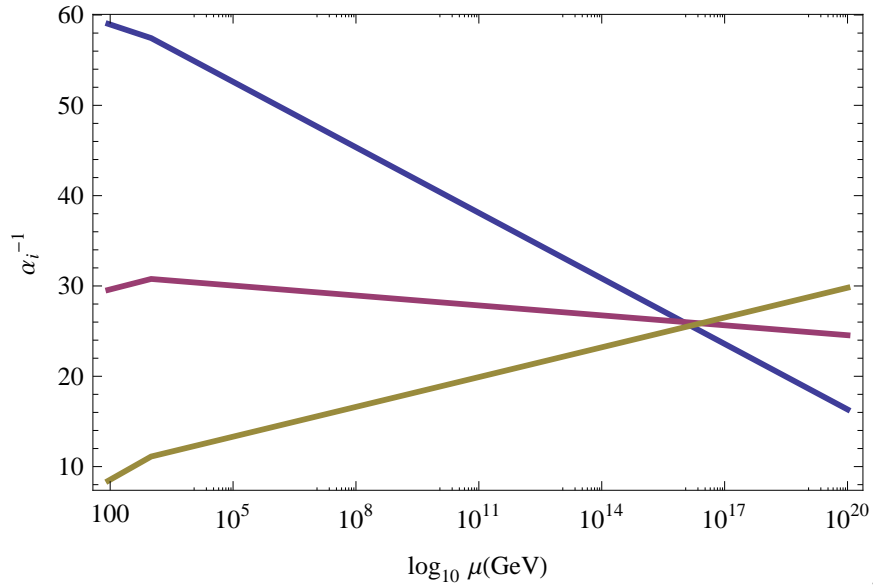


Figura 3.1: Gráfica $\log_{10}(\mu)$ vs α_i^{-1} . Con $\Lambda_{SUSY} = 1000 \text{ GeV}$. Donde la línea que evoluciona desde $\alpha^{-1} \sim 59$ representa el acoplamiento para $U(1)_Y$, la que evoluciona desde $\alpha^{-1} \sim 29$ corresponde a $SU(2)_L$ y la línea que evoluciona desde $\alpha^{-1} \sim 8.5$ corresponde a $SU(3)_C$

Capítulo 4

Teorías de Gran Unificación (GUT)

A pesar de ser una teoría muy exitosa SM, tiene muchos problemas para explicar algunas (pocas) cuestiones experimentales y el gran número de parámetros libres presentes en ella. Esto hace pensar que es necesario una (o varias) teoría(s) que vaya(n) más allá del SM. En este contexto, no se puede decir que esta teoría sea fundamental, sino que probablemente es una teoría efectiva que emerge a las energías que hemos podido explorar experimentalmente.

Entre los varios problemas sin resolver que el SM tiene [35, 36], uno de ellos es la comprensión total de las interacciones fuertes, el proceso de hadronización y la derivación de los factores de forma a partir de primeros principios en QCD. Otro problema lo representan las masas de los neutrinos, que según en el SM no deberían poseer, pero que se ha demostrado a través de diferentes experimentos que son no nulas, aunque sean extremadamente pequeñas (lo cual también es difícil de explicar). Adicionalmente, aún no se consigue entender del todo la discrepancia entre el valor teórico del momento dipolar magnético del muón y el medido experimentalmente, aunque muchos sospechen que la respuesta se encuentra en nuestra incapacidad formal de trabajar en el régimen de interacciones fuertes de QCD.

Hay también varias preguntas (que algunos consideran cuasi-filosóficas y) que abren espacio para nueva física más allá del SM, tales como:

- En el SM hay 26 parámetros libres (que se determinan experimentalmente). ¿Cómo se puede reducir el número de parámetros libres?
- ¿Por qué existen tres generaciones de quarks y leptones?
- ¿Por qué existen tres grupos de simetría independientes?
- ¿Por qué los protones y los electrones tienen cargas eléctricas exactamente opuestas?
- El problema de jerarquía: ¿por qué la escala débil es tan pequeña comparada con la escala de gran unificación? Es decir, ¿por qué $M_w \equiv 246\text{GeV} \ll M_{Planck} \equiv 10^{-18} \text{ GeV}$? (o ¿por qué las

correcciones radiativas de la masa del Higgs y de los bosones de norma tienen divergencias cuadráticas?)

- ¿Por qué el acoplamiento fuerte se distingue tan radicalmente de los acoplamientos electrodébiles?
- ¿Están las partículas compuestas de objetos más fundamentales?

Algunos de estos problemas pueden resolverse en parte, suponiendo que los grupos de simetría del SM, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, forman parte de un grupo G más grande, es decir:

$$G \supset G_{SM} \equiv SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (4.1)$$

A este tipo de teorías se les conoce como Teorías de Gran Unificación (GUT, por sus siglas en inglés).

4.1. GUT

Una GUT es una teoría que se presume completa y única de todas las fuerzas fundamentales (excepto la gravedad). Se puede describir por un grupo de simetrías de norma G , que contiene probablemente algún subgrupo de simetrías discretas. Así, que este tipo de teorías solo pueden tener un acoplamiento de norma, llamado *el acoplamiento unificado*.

Ahora si se quiere construir una teoría GUT (la cual puede ser supersimétrica) se necesita un grupo de simetría G que contenga el grupo de norma del SM, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, como un subgrupo [37]. Este podría ser un grupo, como por ejemplo $SU(5)$, $SO(10)$ o E_6 [38, 39] o un producto de varios grupos, como $SU(3) \times SU(3)$ o $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$, donde este último es llamado *grupo de Pati-Salam*.

Las GUT suponen que a una escala energética muy grande, M_{GUT} , los acoplamientos de norma del SM $\alpha_i(\mu)$ se unifican. En el acoplamiento unificado α_{GUT} , todos los fermiones están contenidos en los multipletes del grupo de norma G de la GUT. Por lo tanto, todos los quarks, anti-quarks, leptones y anti-leptones se pueden acomodar en una representación de G y sus cargas ya no serán arbitrarias, sino que ahora estarán relacionadas.

Como el grupo de norma de GUT tiene una simetría más grande que la del SM, este tiene que contener bosones de norma extra, los cuales deben obtener masas cuando la simetría de GUT se rompe probablemente de forma espontánea a una escala energética muy alta. Hay varios candidatos que pueden servir como grupo de norma para GUT, entre estos sobresalen: $SU(5)$, $SO(10)$, y E_6 .¹

El grupo G tiene que ser simple ($SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(2N)$, E_6 , E_8 , etc) o compuesto donde $G = G_1 \times \dots \times G_n \times S$, donde los G_n son grupos simples y S una simetría discreta que intercambia los

¹A veces, se les llama grupos de GUT a otros grupos en donde la unificación no es aparente y resulta injustificada, tales como $SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ (simétrico izquierda-derecha) o $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ (Pati-Salam).

factores de manera que los fermiones, las representaciones de los Higgs y los acoplamientos de norma son los mismos.

Las GUT deben de tener ciertas características generales [35] como:

Las interacciones fuerte, débil y electromagnética están combinadas en una teoría unificada subyacente, estas sólo se manifiestan como interacciones separadas a bajas energías debido a una ruptura espontánea de simetría.

Los acoplamientos α_i a bajas energías están todos relacionados con α_{GUT} .

Los quarks, antiquarks, leptones y anti-leptones son fundamentalmente similares, estos se colocan juntos en las representaciones, lo que implica la cuantización de la carga.

Aparecen nuevas interacciones que relacionan a los quarks, leptones, anti-quarks y anti-leptones, las cuales generalmente conducen al decaimiento del protón y pudiera explicar la asimetría bariónica en cosmología (el aparente exceso de bariones sobre antibariones en el universo actual).

Sin embargo, no todas las simetrías del grupo de norma del SM, se pueden percibir a simple vista en la naturaleza, ya que algunas de las simetrías están rotas (espontáneamente), esto significa que mientras son simetrías de las leyes de la física, no son simetrías del vacío. Para ver estas simetrías se necesitan hacer experimentos a muy altas energías, donde la asimetría del vacío tiene un efecto menor. Así, el comportamiento de las partículas a energías más bajas es como una sombra de las leyes fundamentales de la física. Es natural preguntarse si las simetrías del SM podrían ser sólo un subconjunto de todas las simetrías en la naturaleza, o si podrían ser los indicios de leyes a bajas energías aún más simétricas.

En el desarrollo de una GUT, primero se tiene que especificar el contenido de partículas del modelo de la siguiente manera: para los Higgs, fermiones y las supercompañeras de ambos (en el caso de considerar SUSY) se eligen las representaciones irreducibles de los grupos de norma, mientras que para los bosones de norma se elige la representación adjunta. Si las partículas del MSSM no caben en una representación, se tienen que dividir en varias partículas o se añaden nuevas. En muchos casos se añade una nueva partícula, esta puede ser el neutrino derecho, ya que su existencia hace más grande la simetría en el sentido de que todos los fermiones aparecen ahora en una versión izquierda y derecha. En muchos casos, existe la necesidad de añadir más de dos campos de Higgs, con el fin de romper la simetría de GUT y la simetría electrodébil, así como dotar de masa a fermiones y bosones de norma, que sean compatibles con sus valores experimentales. Para asignar fermiones a ciertas representaciones, se tiene que asegurar que el modelo este libre de anomalías de norma.

Posteriormente se establecen los términos cinéticos para fermiones, Higgs, bosones de norma y sus supercompañeras. La derivada covariante (en el caso de un solo grupo norma) $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$, donde g es el parámetro de acoplamiento de norma, A_μ^a son los bosones de norma (vectores) y T^a son los generadores del grupo de norma ($a = 1, \dots, \dim \text{Lie}(G)$).

Para el caso SUSY, se expresa el superpotencial W para los campos escalares y las interacciones de Yukawa, teniendo en cuenta que todos los términos deben ser renormalizables, invariantes de Lorentz y de norma. El superpotencial es el responsable del rompimiento de la simetría de norma del SM, y los términos de Yukawa dotarán de masa a los fermiones después de la ruptura de simetría.

Se determina el mínimo del potencial escalar imponiendo que el término- F es plano, ($F_i = \partial W \partial \phi_i = 0$, donde ϕ_i son los campos escalares que aparecen en W). El término F tiene que desaparecer, si se supone que SUSY todavía está presente en energías por debajo de la escala GUT. SUSY proporciona una simplificación de este cálculo, sin embargo en teorías no-supersimétricas encontrar el valor de expectación en el vacío (VEV) de los campos de Higgs es mucho más complicado.

Las masas y los acoplamientos en una escala débil se pueden calcular usando la EGR de la teoría. Las relaciones entre los parámetros obtenidos de la teoría serán válidas en la escala de GUT. Para obtener las relaciones a escala débil, se tiene que tomar en cuenta el corrimiento de los parámetros (como los acoplamientos). Como se vio en los capítulos anteriores la forma de las EGR está determinada por el contenido de partículas de la teoría.

Las dos características principales de una GUT son: contiene un solo grupo de norma y explican la unificación de los acoplamientos de norma. En versiones supersimétricas del SM, los acoplamientos coinciden en $\sim 10^{16}$ GeV para los valores iniciales en la escala débil (91.18 GeV). Además, los quarks y leptones se unifican formando parte de la misma representación irreducible del grupo de norma. Esto conduce a predicciones para las relaciones entre sus masas.

Aunque se proponen respuestas a la mayoría de las cuestiones mencionadas anteriormente, las GUT dan lugar a nuevas preguntas. Una de ellas es la llamada división doblete-triplete del bosón de Higgs. El campo de Higgs introducido en una representación del grupo GUT contiene tripletes de color y componentes de dobletes electrodébiles. Con el fin de romper la simetría electrodébil del SM en una escala de baja energía, se tienen que desacoplar las componentes del triplete de la teoría a baja energía, dotándolas de una masa grande, mientras que las componentes del doblete deben permanecer ligeras. Esto conduce a un nuevo problema de ajuste. Una forma de salir de este es introducir una dimensión extra, la cual se pudiera *compactificar* [40].

Otro problema es el del decaimiento del protón, debido a la introducción de nuevos bosones de norma [35, 41, 42]. El tiempo de vida del protón proporciona una de las pruebas más confiables usualmente en contra de las GUT. Si la teoría propuesta predice un tiempo de vida del protón inferior a $\sim 10^{35}$ años, queda descartada, ya que nunca se ha observado el decaimiento del protón.

En las teorías no supersimétricas, los operadores efectivos, es decir los operadores que aparecen en el Lagrangiano de una teoría de campo efectiva (inducidos por la existencia de bosones de norma adicional a altas energías) son de al menos de dimensión $d = 6$. El decaimiento dominante es $p \rightarrow e^+ \phi^0$.

En contraste, los modelos supersimétricos que permiten operadores efectivos en $d = 5$, es decir, dos componentes fermiónicos interactuando con dos componentes bosónica de supercampos quirales. Los bosones entonces decaen en sus supercompañeras fermiónicas mediante el intercambio de un wino. En este caso, el modo dominante de decaimiento es $p \rightarrow K + \bar{\nu}_\mu$, que es aún más rápido que el predicho en modelos no supersimétricos.

En teorías supersimétricas, para eliminar acoplamientos indeseables, que llevarían al decaimiento rápido del protón, generalmente se debe introducir una simetría adicional, denominada paridad-R, que asigna cargas diferentes a las partículas del SM y a las supercompañeras [26, 38].

Las GUT son interesantes para los físicos teóricos, porque permiten explorar (y explotar) algunas ideas sobre cómo extender el SM. De mayor interés es que gran cantidad de la información que aportan estas teorías puede obtenerse a través del estudio de los grupos de simetrías que rigen a estas teorías, para lo cual es de enorme valor tener ciertos conocimientos básicos de grupos de Lie.

Hay cuatro clases de grupos de Lie simples: $SU(N)$, $SO(2N)$, $SO(2N + 1)$ y $Sp(2N)$, (donde N es un número entero). Además, hay cinco grupos llamados excepcionales [43], G_2 , F_4 , E_6 , E_7 y E_8 . Esta claro que los grupos de las simetrías del SM se encuentran contenidos en esta clasificación. Se antoja posible, pues, que un grupo de estos con un número suficientemente grande de generadores pueda albergar a los 3 grupos del SM.

Por lo tanto la búsqueda de un grupo de norma GUT satisfactorio se basa en las siguientes características generales: para incluir al SM, este debe tener rango-4² (pues es el rango total de los grupos $SU(3)$, $SU(2)$ y $U(1)$) y, además, debe contener un número de generadores mayor o igual al número de bosones de norma del SM, el cual incluye 8 gluones, 3 bosones débiles y un generador de hipercarga. Otra condición es que las representaciones deben permitir la correcta reproducción del contenido de partículas del espectro fermiónico observado, al menos para una generación de fermiones. Este requisito implica que G_{GUT} debe poseer representaciones complejas. Finalmente, la configuración de representaciones obtenida debe estar libre de anomalías para preservar la renormalizabilidad de la teoría.

El requisito de representaciones complejas del fermión se basa en el hecho de que al incluir los fermiones conocidos en representaciones reales conduce a problemas como la aparición de los fermiones espejo, los cuales son muy pesados, entonces los fermiones convencionales en general obtendrían masas del orden M_{GUT} . Por lo tanto todos fermiones ligeros deberían ser componentes de una representación compleja de G_{GUT} .

Estos requisitos restringen los posibles modelos GUT a los grupos de norma $SU(N)$, $SO(N)$ y E_6 .

4.2. Modelo SU(5)

El modelo de Georgi y Glashow es una GUT que utiliza el grupo de norma de $SU(5)$ [44, 38], como el grupo de norma del SM es $G_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ tiene rango-4, el grupo más pequeño posible que contiene G_{SM} es $SU(5)$, un grupo de rango-4 que tiene $5^2 - 1 = 24$ generadores, y 24 bosones de norma.

Estos generadores son matrices hermitianas, sin traza de 5×5 y actúan sobre cinco objetos que forman la representación fundamental de $SU(5)$, ψ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Los generadores se pueden expresar como matrices 5×5 unitarias complejas con determinante

²El rango es el número máximo de generadores que conmutan, o bien, el número máximo de generadores simultáneamente diagonalizables.

1 y las matrices unitarias complejas pueden expresarse como:

$$U = \exp(-i \sum_{j=1}^{24} \theta^j A^j), \quad (4.2)$$

donde estos A^i son generadores y los parámetros θ^i son números reales. Los generadores están normalizados, es decir: $Tr(A_i A_j) = 2\delta_{ij}$ en la representación fundamental.

De los 24 bosones de norma, 12 pertenecen al SM ($A^{1\dots 12}$) (están bajo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$):

$$24 = (8, 1, 0) + (1, 3, 0) + (1, 1, 0) + (3, 2, -\frac{5}{3}) + (\bar{3}, 2, \frac{5}{3}). \quad (4.3)$$

Los 12 bosones de norma asociadas a $A^{13\dots 24}$ son conocidos como bosones X y Y . Estos bosones de norma son de tipo leptónico-quárcico y pueden causar el decaimiento de los protones. Para satisfacer el límite real del tiempo de vida del protón, la masa de estos bosones de norma ($M_{X,Y}$) debe ser $\geq 10^{15}$ GeV. En el decaimiento del protón, mediado por los bosones X y Y , el tiempo de vida de este, está dado por:

$$\tau_p \sim 10^{30} \left(\frac{M_{X,Y}}{10^{14} \text{GeV}} \right)^4 \text{ años}. \quad (4.4)$$

El ángulo de mezcla débil $\sin^2 \theta_W = g_1^2 / (g_1^2 + g_2^2)$ se puede expresar en términos de los parámetros de acoplamiento de norma del SM, g_1 y g_2 . De éstos, el parámetro de acoplamiento $U(1)_Y$, g_1 , se relaciona con el parámetro acoplamiento g_{GUT} que surge en una teoría unificada por medio de $g_{GUT}^2 = c^2 g_1^2$ donde $c^2 = \frac{5}{3}$.

Como en este modelo los leptones y los quarks están en la misma representación, esto significa que pueden transformarse mutuamente en algunos procesos. $SU(5)$ combina leptones y quarks en una sola representación irreducible, en consecuencia podría haber interacciones que no conserven el número bariónico pero que si conserven la diferencia entre el número bariónico y leptónico (B-L).

El decaimiento del protón está permitido por la conservación de la carga, y un proceso válido donde este se presente podría ser: $p \rightarrow \phi^0 + e^+$, donde la vida media del protón es de 1600×10^{30} años. Pero los protones son conocidos por su larga vida. Gracias a ello, hay muchos átomos de hidrógeno que participa en la fusión nuclear en las estrellas.

En el proceso de decaimiento del protón, uno de los quarks se convierte en positrón debido al acoplamiento con un bosón X muy pesado. Si M_X es la masa de los bosones de norma, entonces la amplitud para el decaimiento del protón es de orden g^2 / M_X^2 y la tasa de decaimiento es proporcional a $(g^2 / M_x)^2$. La búsqueda del decaimiento del protón se ha vuelto crucial para las pruebas de GUT. Se espera que en el futuro las medidas mejoren y estos límites para la vida del protón por un factor de 10, que limitaría a los modelos de unificación más rigurosamente.

Para determinar M_{GUT} , la escala en el cual se espera que ocurra la unificación, como se vio en los capítulos anteriores se pueden aplicar las EGR a los acoplamientos α_1, α_2 y α_3 de G . En energías más altas, $\alpha_3^{-1}(\mu)$ de $SU(3)$ y $\alpha_2^{-1}(\mu)$ de $SU(2)$ decrecen, mientras que $\alpha_1^{-1}(\mu)$ aumenta.

En alguna escala energética, éstas se deben juntar y esa escala sería en donde G está unificada en $SU(5)$.

El SM contiene 15 fermiones para cada generación. En $SU(5)$, estos fermiones pertenecen a representaciones $\bar{5}$ - y 10 - dimensionales:

$$\bar{5} \equiv \begin{pmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$10 \equiv \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Los fermiones 10-dimensional se escriben como una matriz antisimétrica de 5×5 .

El mínimo $SU(5)$ contiene campos de Higgs 24 y 5-dimensionales. El Higgs 24-dimensional rompe $SU(5)$ y da paso al SM una vez que este adquiere valor expectación en el vacío bajo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Este VEV establece la escala de unificación y debido a esta ruptura espontánea de la simetría, los bosones de norma Y y X adquieren masa. Posteriormente el VEV de $\bar{5}$ rompe la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ y genera las masas de fermiones y bosones de norma Z, W^\pm . De hecho este $\bar{5}$ contiene el doblete de Higgs del SM.

En un modelo $SU(5)$ mínimo no se contemplan los neutrinos derechos, ya que en este modelo de GUT la simetría izquierda-derecha no se toma en cuenta, así que el origen de la violación de paridad en escala electrodébil por lo menos en este modelo se mantiene sin explicación.

En QED, el generador de $U(1)$ no está cuantizado, pero en las GUT, los potenciales electromagnéticos se acoplan al generador de norma de GUT y los generadores de los otros grupo, como $SU(N)$ se ven obligados por las relaciones de conmutación no triviales a adquirir valores cuantizados.

El principal objetivo de una GUT viable, es la unificación de los acoplamientos que se logra en una escala que es demasiado baja en comparación con el sugerido por los límites experimentales de la desintegración del protón. Estos problemas motivan a buscar otros grupos de norma viables como $SO(10)$ o $E(6)$.

4.3. SO(10)

Los fermiones izquierdos del SM se pueden colocar en las representaciones $\bar{5}$ y 10 , y no se necesita añadir algún otro mas para llenarlos. Esto sólo es cierto para $SU(5)$, para todos los demás grupos se tiene que agregar algo mas. Otro de los candidatos mas fuertes para GUT, es el grupo

$SO(10)$ [38]. Este es el grupo de todas las matrices ortogonales 10×10 con determinante uno. Para $SO(N)$ en general, existen $N(N - 1)/2$ generadores, para $N = 10$, habrá 45 generadores que son matrices antisimétricas, hermitianas 10×10 . Una diferencia importante entre $SO(10)$ y $SU(5)$ es el rango de sus álgebras de Lie. Mientras que la álgebra de Lie de $SO(10)$ contiene 5 generadores que conmutan, $SU(5)$ tiene sólo 4, es decir, tiene el mismo rango del álgebra de Lie que el grupo de norma del SM. Puesto que el rango de $SO(10)$ es mayor que el de la SM, existen diferentes maneras de romper esta simetría. Hay diferentes simetrías intermedias posibles de rango-5, por ejemplo $SU(5) \times U(1)$, $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ o $SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$. Como al momento de romperse la simetría primero se convertirá en un grupo intermedio, y luego se volverá romper hasta llegar al SM. La forma en la que se rompe la simetría afectará el tiempo de vida de los protones, y en consecuencia las escalas energéticas de los pasos intermedios del rompimiento de simetría van a introducir algunos errores en las predicciones del tiempo de vida del protón.

Los grupos $SO(2N)$ pueden contener subgrupos $SU(N)$, entonces se puede decir que el grupo $SO(10)$ contiene a $SU(5)$. El $SO(10)$ tiene una representación spinorial de 16-dimensiones las cuales transforman bajo $SU(5)$ como $10 \oplus 5 \oplus 1$, por lo tanto, pueden contener 16 estados de materia (SM) y un singulete que se le denomina ν_R (el neutrino derecho). Entonces en $SO(10)$ se predice el neutrino del derecho, a diferencia del $SU(5)$ y del SM donde tiene que ser introducido “a mano”. Así que este grupo permite una unificación completa, con todos los fermiones de la misma familia dentro de una representación.

En $SO(N)$ la representación adjunta tendrá una dimensión de $N(N - 1)/2$ (para $SU(N)$ es $N^2 - 1$). Así que hay 45 bosones de norma en $SO(10)$, de estos 12 son los bosones de norma de SM, 32 son nuevos bosones de norma y por último un bosón de norma neutral, llamado Z' . Donde la masa del Z' es de $\sim 720 GeV < m_{Z'} < 10^9 GeV$, así que sería posible que de existir, en 2015-2016 los aceleradores lo encuentren, si su masa se encuentra en el extremo inferior de este intervalo (bosón de $U(1)$ extra).

4.4. E_6

E_6 es el grupo excepcional de rango-6 [39]; en este los fermiones están en representación de 27 dimensiones, y la dimensionalidad de la representación del adjunto es de 78. E_6 contiene a $SO(10)$ como un subgrupo con lo que todas las características de $SO(10)$ están también incluidas en E_6 . La representación 27 se puede descomponer en términos de las representaciones de $SO(10)$ como: $27 \equiv 1 + 10 + 16$. Así que contiene otros fermiones exóticos que transforman como 1 y 10 de $SO(10)$. Estos son muy pesados y generalmente no se acoplan a los fermiones SM. Puede haber varios patrones intermedios de rompimiento dependiendo de la elección de como se efectúa el rompimiento de simetría de los Higgs. Las posibles opciones para esto, son los Higgs de dimensión 650 o 2430. La simetría izquierda-derecha puede ocurrir debido al grupo de norma intermedio $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$.

E_6 es uno de los modelos más prometedores de GUT ya que las compactificaciones Calabi-Yau de los modelos en supercuerdas heteróticas conducen a un grupo de norma E_6 o a sus subgrupos en

el sector observable (que se puede detectar experimentalmente) y también incluyen las representaciones del SM para los multipletes fermiónicos (materia), así como campos exóticos adicionales.

En el modelo E_6 para GUT, los acoplamientos de Yukawa de los exóticos están vinculados a los acoplamientos de Yukawa de los Higgs, para que los exóticos tengan que ser muy pesado y evitar el rápido decaimiento del protón.

4.5. Simetrías abelianas adicionales

Como se vio anteriormente la extensión SUSY de SM, se enfrenta al problema de la estabilidad del protón. Entre las posibles interacciones permitidas por las simetrías del SM y los métodos de renormalización, las interacciones que violan la conservación del número de bariones o leptones están incluidos, y llevan a un rápido decaimiento del protón. Para evitar estas interacciones, se tiene que incluir una simetría discreta, generalmente en modelos supersimétricos a través de la paridad R , como en el MSSM. Por otro lado, en el SM, los números de bariones y leptones se conservan simplemente como consecuencia de las simetrías de norma.

Las masas del neutrino también plantean un problema potencial para el MSSM, los experimentos sugieren que las masas de los neutrinos son muy pequeñas. Teóricamente, pueden incluir acoplamientos de Yukawa que generan sus masas mediante la incorporación de los supercampos de los neutrinos derechos.

Otro problema es el de la naturalidad, el superpotencial en el MSSM contiene un término μ :

$$\mu H^u H^d, \tag{4.7}$$

donde el parámetro μ se debe ajustar de manera fina (es decir, se ajusta para concordar con las observaciones) a 1 TeV para obtener la escala de rompimiento electrodébil apropiada, pero este ajuste no es natural [26]. Se han propuesto diversos mecanismos para generar el parámetro μ , para ofrecer una solución consistente para los problemas anteriores, se puede proponer un nuevo MSSM basado en un grupo de norma con una simetría abeliana $U(1)'$ adicional [41, 42].

Las GUT basadas en grupos con rango superior a 4 pueden conducir a simetrías $U(1)$ adicionales. Por ejemplo, $SO(10)$ contiene una $U(1)$ adicional que podría sobrevivir a bajas energías (en comparación con la escala GUT) y E_6 contiene dos simetrías $U(1)$ adicionales, en donde ambas o una combinación lineal de ambas podrían sobrevivir. Estos grupos particulares de $U(1)'$ y sus asociados bosones Z' han sido especialmente estudiados y de hecho son los ejemplos mas comunes de los grupos $U(1)$ adicionales.

Entonces es probable que la estabilidad del protón esté garantizada por una simetría $U(1)'$ que conserve el número de bariones pero, que permita la violación del número de leptones suficientes para la estabilidad del protón. El contenido de partículas necesariamente aumenta para que el modelo esté libre de anomalías de norma, y además se incorporan los neutrinos derechos. También se incluye un campo escalar que tiene un VEV que no se va a cero y rompe la simetría de norma $U(1)'$. Este VEV dota de masa (de Majorana) a los neutrinos derechos y a un parámetro efectivo μ

para el acoplamiento lineal de Higgs. La simetría de norma $U(1)'$ predice un nuevo bosón de norma neutro el bosón Z' .

Otro aspecto importante es que Z' puede proporcionar un acoplamiento débil entre el sector de la materia ordinaria y otros sectores relacionados con la materia oscura o con la ruptura de la supersimetría. La existencia de un Z' , especialmente en la escala de 1 TeV , tendría amplias implicaciones para la física de acelerador de partículas y cosmología.

La escala natural del orden 1 TeV , podría explicar lo pequeño de los momentos del dipolo eléctricos del neutrón y el electrón, otro problema en modelos supersimétricos en general.

En el grupo $U(1)'$, las cargas de este están normalizadas como $Tr(Y^2) = Tr(Y'^2)$, Y y Y' siendo respectivamente los generadores de hipercarga y de carga $U(1)'$. Los generadores Y y Y' son ortogonales, $Tr(Y Y') = 0$. Las anomalías en general se cancelan en cada generación. Los supercampos nuevos que no aparecen en el MSSM son tripletes de $SU(3)$ y singletes de $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, además del neutrino derecho. Existen dobletes $SU(2)$ en cada generación, algunos de los cuales participan en el rompimiento de simetría $SU(2) \times U(1)$ como los Higgs. Con respecto a los números cuánticos para los grupos de norma del SM, el contenido de la partícula se asemejan a los del modelo con una $U(1)'$ basada en la representación fundamental del grupo E_6 . La diferencia está en la asignación de la hipercarga para los nuevos supercampos con color, que son necesarios para proteger al protón del decaimiento introduciendo una simetría $U(1)'$. En un modelo E_6 una simetría discreta adicional tiene que imponerse para prohibir el decaimiento del protón.

En el MSSM, el protón es estable debido a las simetrías de norma usuales y no hay necesidad de agregar ninguna simetría más. Los neutrinos derechos se introducen como campos que deben cancelar las anomalías. Después de que se rompe la simetría $U(1)'$ espontáneamente, se inducen masas de Majorana grandes por los neutrinos derechos, lo que conduce naturalmente a los neutrinos ligeros que son coherentes con los experimentos. El parámetro efectivo μ es generado por la ruptura de simetría. La escala de energía natural de este modelo es del orden de 1 TeV , y no requiere un excesivo ajuste de parámetros para lograr la ruptura de la simetría electrodébil.

Una de las principales dificultades para el análisis del rompimiento $U(1)'$ en modelos de cuerdas (teoría de cuerdas se verán en la siguiente sección) es que las compactificaciones que tiene el grupo de norma del SM y el contenido de partículas de SM con tres generaciones y dos dobletes de Higgs suelen tener simetrías de norma adicionales y varias partículas exóticas. Cabe señalar que la física de $U(1)'$ y el rompimiento electrodébil tienen relación con otros temas tales como el desacoplamiento de las partículas pesadas, la preservación la unificación de norma en presencia de partículas exóticas, la comunicación entre los sectores ocultos y observables, la ruptura de simetrías no abelianas adicionales, entre otros, que aún no son bien entendidos. Esto motiva a estudiar con más detalle la fenomenología a bajas energías del rompimiento de $U(1)'$ en un modelo más simple con todos los elementos que son necesarios para tener una teoría realista.

Los modelos supersimétricos E_6 son candidatos prometedores que predicen un bosón Z' en una escala débil. El grupo de norma E_6 puede surgir de la teoría heterótica de cuerdas perturbativa como consecuencia de su compactificación. En los modelos E_6 , los campos de materia del SM en cada generación se pueden colocar en una representación fundamental 27 que también contiene

varios campos de materia exótica, dos singuletes de SM, un par de dobletes débiles y tripletes de color. Como E_6 es un grupo de rango seis, también podría tener dos simetrías $U(1)$ adicionales además de grupo de norma SM. Cabe señalar que una superposición de los dos grupos adicionales $U(1)$ puede sobrevivir como la simetría de norma $U(1)'$ en la escala de GUT. La simetría $U(1)'$ puede romperse espontáneamente en la escala de débil a través de las correcciones radiativas a los términos masa del singulete escalar del SM.

Ahora un modelo con dos simetrías $U(1)$ adicionales se puede dar cuando se rompe E_6 de la siguiente manera:

$$E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1)_A \rightarrow SU(5) \times U(1)_A \times U(1)_B. \quad (4.8)$$

La descomposición fundamental de la representación 27 bajo el subgrupo $SU(5) \times U(1)_A$ es:

$$27_L \rightarrow (10, 1)_L + (\bar{5}, 1)_L + (1, 1)_L + (5, -2)_L + (\bar{5}, -2)_L + (1, 4)_L, \quad (4.9)$$

donde el primer y segundo términos son la representación $SU(5)$ y Q_A , respectivamente y el subíndice significa que en el multiplete se le asignarán campos izquierdos. $(10, 1)_L + (\bar{5}, 1)_L$ corresponden a una familia ordinaria de SM, $(1, 1)_L$ y $(1, 4)_L$ son singuletes de SM y $(5, -2)_L + (\bar{5}, -2)_L$ son multipletes exóticos que forman un par de vectores bajo el grupo de norma del SM. $(5, -2)_L$ consiste en D_L y h_2 , donde D_L es un triplete de color para un quark con carga $-1/3$, y h_2 puede ser un doblete de Higgs o un doblete de leptones exóticos. Del mismo modo, $(\bar{5}, -2)_L$ contiene al antiquark exótico \bar{D}_L y h_1 , los cuales pueden ser un Higgs H_d o un doblete de leptón.

Como se mencionó antes se necesitan 3 27-pletos para formar la estructura de las tres familias del SM. La unificación se puede establecer sin presentar anomalías mediante la adición de un singulete de $27_L + \bar{27}_L$, suponiendo que sólo el doblete de tipo Higgs h_2 y su conjugado h_3 , asociada con $(5, -2)_L$ (de 27_L) y $(\bar{5}, +2)_L$ (de $\bar{27}_L$), permanecen ligeros, mientras que los otros campos del par $27_L + \bar{27}_L$ adquieren masas muy pesadas y desacopladas. Entonces los supermultipletes para la materia ligera son $3 \times 27_L + (27_L + \bar{27}_L^*)$.

En este tipo de modelos, las $U(1)'$ están libre de anomalías como resultado de que están integradas en un grupo de norma más grande. Cualquiera de los 3 h_1 y los 4 h_2 puede ser dobletes de Higgs en SM. El S_L^0 (un singulete que porta la carga de $U(1)'$ del SM) puede ser el singulete S que se acopla a H_1 y H_2 en el superpotencial. Existen los quarks exóticos (antiquarks) D (\bar{D}), que tienen la misma carga $U(1)$ así como de h_2 y h_1 , por lo tanto permite a los acoplamientos de Yukawa $SD\bar{D}$ en el superpotencial. Cabe señalar que los acoplamientos de norma son $g_3, g_2, g_1 \equiv \sqrt{5/3}g_Y$ y g'_1 para $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ y $U(1)'$ respectivamente.

Capítulo 5

Cuerdas y compactificación

En esta capítulo, solo se aportan algunos elementos necesarios para la discusión posterior de los modelos que son parte esencial del presente trabajo. Para conocer mejor las teorías de cuerdas en general, se sugiere consultar [7, 46].

5.1. El problema con la gravedad

La teoría general de la relatividad, nos dice que la gravedad no es nada más ni nada menos que una distorsión del tejido del espacio-tiempo. Al modificar el campo gravitacional ejercido por un cuerpo se crea una *onda gravitatoria*, la cual se esparce en el espacio-tiempo, modificándolo, estas tienen un momento angular $J = 2$, por lo que se puede deducir que el cuanta del campo gravitacional, conocido como el gravitón es una partícula de spin-2. La teoría de cuerdas incluye de manera natural un bosón de spin-2, es decir el cuanta de la gravedad. Ahora, las integrales de lazo se puede expresar como:

$$I \sim \int p^{4J-8} d^D p. \quad (5.1)$$

Donde p es el momento, J el momento angular de la partícula y D la dimensión del espacio-tiempo. Para el caso de $J = 2$ y se considera al espacio-tiempo en 4 dimensiones, $D = 4$, se tiene

$$4J - 8 + D = 4(2) - 8 + 4 = 4. \quad (5.2)$$

Entonces en el caso del gravitón

$$p^{4J-8} \rightarrow p^0 = 1 \quad (5.3)$$

y

$$I \sim \int d^4 p \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

cuando se integra sobre todos los momentos. Esto significa que la gravedad no puede ser renormalizada de la misma forma que en el caso de electrodinámica cuántica, porque esta diverge cuando

como p^4 . En contraste, si se considera a la electrodinámica cuántica. El spin del fotón es 1, de modo que

$$4J - 8 + D = 4(1) - 8 + 4 = 0 \quad (5.5)$$

y la integral de lazo va como

$$I \sim \int p^{4J-8} d^D p = \int p^{-4} d^4 p \rightarrow, \quad (5.6)$$

entonces

$$\approx p^0 = 1. \quad (5.7)$$

Esto nos dice que la incorporación de la gravedad en el marco de una teoría cuántica de campos es problemático.

Sin embargo, *la teoría de las cuerdas* evita este problema ya que se deshace de las interacciones de las partículas que se producen en un punto (mi lugar en el espacio-tiempo de dimensión infinitesimal). El principio de la incertidumbre dice que

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \quad (5.8)$$

Si momento se va a infinito, es decir, $\Delta p \rightarrow \infty$, esto implica que $\Delta x \rightarrow 0$. Es decir, momentos grandes (infinitos) significa distancias pequeñas (cero). O, dicho de otra forma, las interacciones un un punto (distancia cero) implica un momento infinito. Esto nos lleva a integrales de lazo divergentes, y la aparición de infinitos en los cálculos. En teoría de cuerdas, se reemplazan a las partículas puntuales por cuerdas en 1 dimensión, extendiendo a las interacciones sobre el espacio-tiempo de manera que ya no aparecen los infinitos. En teoría de cuerdas, las distancias por mas pequeñas que sean, ya no serán de tipo puntual ($\Delta x \rightarrow 0$), sino un valor finito (muy pequeño). Esto significa que habrá un límite superior para el momento y, por tanto, $\Delta p \rightarrow \infty$. Entonces el momento tendrá un valor muy grande pero finito, y las divergencias en las integrales de lazo desaparecerán.

Si se tiene un límite inferior para el valor de las distancias, el cual será la longitud de las cuerdas, entonces la relación de incertidumbre va a cambiar. En la teoría de cuerdas la incertidumbre en la posición Δx está dada por

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha' \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (5.9)$$

El nuevo término que aparece en la relación de incertidumbre, $\alpha'(\Delta p/\hbar)$ el cual sirve para fijar la distancia mínima que existe en la teoría. El parámetro α' está relacionada con la tensión de la cuerda T_S de la siguiente manera

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_S}. \quad (5.10)$$

La escala mínima de la distancia que se puede encontrar, en teoría de cuerdas está dada por

$$x_{min} \sim 2\sqrt{\alpha'}. \quad (5.11)$$

Entonces si $\alpha' \neq 0$, entonces los problemas que resultan de las interacciones puntuales se evitan ya que simplemente no pueden tener lugar. Las interacciones se extienden y se evitan los infinitos.

5.2. Teoría de cuerdas

Teoría de las cuerdas se propone como una teoría unificada de la física. Es decir, que se supone que es la teoría más fundamental que describe todas las interacciones de partículas, los tipos de partículas, y la gravedad. Se puede obtener una idea de la unificación de todas las fuerzas en un marco único mediante la construcción de cantidades a partir de las constantes fundamentales en la teoría.

La constante adimensional llamada la constante de estructura fina puede ser construida a partir de e , \hbar y c , donde e es la carga del electrón, \hbar la constante de Planck y c es la velocidad de la luz. La constante de estructura fina α describe la intensidad del campo electromagnético (a través de la constante de acoplamiento). Es el hecho de que $\alpha_{EM} < 1$ es lo que hace posible la teoría de perturbación, ya que se puede expandir esta cantidad en potencias de α_{EM} para obtener resultados aproximados. Un procedimiento similar se puede aplicar a la fuerza de gravedad. Las constantes importante en las interacciones gravitacionales son: la constante gravitacional de Newton, G , la velocidad de la luz c , y si se habla de una teoría cuántica de la gravedad, se tiene que incluir a la constante de Planck. Se pueden derivar dos cantidades fundamentales de estas constantes, una longitud y una masa. Estas nos indica la distancia y la escala energética en donde la gravedad cuántica empezará a ser relevante. Esta longitud, se denomina *longitud el Planck*. Está dada por

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-35}m. \quad (5.12)$$

Esta es una distancia muy pequeña comparada por ejemplo al tamaño de un núcleo atómico.

Lo que significa que los efectos cuánticos pueden tener lugar en distancias muy pequeñas. Para probar estas escalas de distancia pequeñas, se necesitan energías muy altas. Esto se confirma al expresar *la masa de Planck*, que resulta ser

$$M_p = \sqrt{\frac{\hbar}{Gc}} \sim 10^{-8}kg. \quad (5.13)$$

Esto nos indica que, una vez más, que se necesitan energías altas para probar los efectos de la gravedad cuántica. La masa de Planck resulta ser la masa de un agujero negro donde su radio de Schwarzschild es el mismo que el de su longitud de onda de Compton, lo que indica que se trata de una escala de longitud en la cual los efectos gravitatorios cuánticos son relevantes. También se puede expresar un *tiempo de Planck*, el cual es

$$t_p = \frac{l_p}{c} \sim 10^{-44}s. \quad (5.14)$$

Este es un intervalo de tiempo muy pequeño. Por lo tanto, al pensar en gravedad cuántica, se tienen que considerar distancias pequeñas, intervalos de tiempo pequeños y energías altas. En estas altas energías la gravedad se vuelve intensa. Las cuerdas son útiles al intentar desarrollar una teoría cuántica finita de la gravedad, y esta cobra una relevancia muy importante en escalas

energéticas muy grandes. Las cuerdas pueden ser *abiertas* o *cerradas*, es decir que sus extremos están conectados. De las excitaciones de las cuerdas obtienen diferentes partículas fundamentales. Cuando una partícula se mueve a través del espacio-tiempo, describe una línea de mundo. Para el caso de una cuerda, al moverse a través del espacio-tiempo, esta describe *una hoja de mundo*, que es una superficie en el espacio-tiempo parametrizada por (σ, τ) .

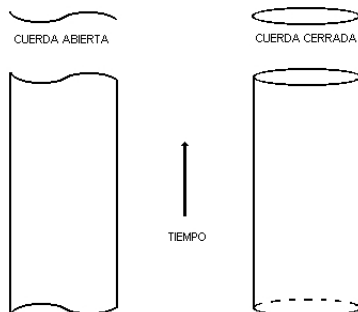


Figura 5.1: Hoja de mundo de una cuerda abierta y cerrada.

Un mapeo $x^\mu(\tau, \sigma)$ asigna una coordenada de la hoja de mundo (σ, τ) a la coordenada x del espacio-tiempo. Por lo tanto, en el mundo de acuerdo a la teoría de las cuerdas, los objetos fundamentales son pequeñas cuerdas con una longitud del orden de la escala de Planck (10^{-33} cm). Como cualquier cuerda, estas cuerdas fundamentales pueden vibrar y las vibraciones a diferentes frecuencias resonantes (excitaciones de la cuerda) dan lugar a partículas con diferentes propiedades. La masa y el spin de las partículas están relacionadas con la tensión de la cuerda α' como:

$$S = \alpha' m^2. \quad (5.15)$$

Una cuerda vibrante tiene diferentes modos de la misma forma en que una cuerda de un instrumento musical puede vibrar en frecuencias diferentes. Entonces en lugar de tener una gran cantidad de partículas fundamentales de origen incierto, ahora sólo habrá un objetivo fundamental: una cuerda, que vibra con diferentes modos da la apariencia de que hay múltiples objetos fundamentales. Cada modo aparece como una partícula, por lo tanto un modo podría ser un electrón, mientras que otro modo podría ser un quark. Estas cuerdas se pueden separar y combinar. Supóngase que una cuerda está vibrando en un modo de partículas correspondientes a una partícula A , esta se puede dividir en dos, y las cuerdas resultantes vibrando en las modalidades correspondientes a partículas B y C , respectivamente. Este proceso de separación corresponde al decaimiento de una partícula:

$$A \rightarrow B + C. \quad (5.16)$$

Las cuerdas también pueden unirse para formar una única cuerda, este proceso corresponde al de la absorción de una partícula. Por lo tanto procesos como el decaimiento de partículas, se pueden explicar con un marco conceptual simple. Cabe señalar que las cuerdas determinan por sí mismas

qué tan intensas son las fuerzas. Una de las formas en las que estas pueden vibrar es haciendo una especie de pulsación hacia dentro y afuera como un pequeño latido. El dinamismo de esta pulsación, es llamada *el dilatón*, este tipo de vibración gobierna la intensidad de las interacciones de las cuerdas y por lo tanto de todas las fuerzas de la naturaleza.

5.3. Tipos de teorías de cuerdas

Existen 5 tipos diferentes de teoría de cuerdas, pero se ha demostrado que son formas diferentes de una misma teoría, ya que los diferentes tipos están relacionados por *dualidades*. Los cinco tipos básicos son:

Teoría de cuerdas bosónica

Esta es una formulación de la teoría de las cuerdas que sólo incluye a los bosones. No incluye supersimetría, y como no incluye fermiones, esta teoría no puede describir a la materia. Así que en realidad esta es solo una teoría de juguete. Esta incluye tanto las cuerdas abiertas y cerradas, además requiere 26 dimensiones del espacio-tiempo (por consistencia). El estado base tiene una término de masa cuadrada negativo, a este estado se le llama *el taquión*. La presencia del taquión indica que el vacío es inestable. Incluye la presencia de un bosón con spin 2, es decir el gravitón, también incluye al dilatón.

Teoría de cuerdas tipo I

Esta versión de la teoría de cuerdas incluye tanto los bosones como a los fermiones, es decir contempla supersimetría a y un grupo de norma $SO(32)$. Esta teoría requieren de 10 dimensiones del espacio-tiempo. Las teorías de cuerdas que contemplan supersimetría ($N = 1$) se les llama *teorías de supercuerdas*. Esta teoría no describe cuerdas orientadas.

Teoría de cuerdas tipo II-A

Esta versión de la teoría de las cuerdas también incluye supersimetría, cuerdas cerradas y abiertas. Las cuerdas abiertas en el tipo II-A de la teoría de las cuerdas, tienen sus extremos conectados a otros objetos llamados *D-branas*. En esta teoría los fermiones en esta teoría no son quirales. Incluye una simetría de norma $U(1)$, como solo tiene una simetría de norma $U(1)$, solo puede describir a la gravedad y el electromagnetismo.

Teoría de cuerdas tipo II-B

Puede describir cuerdas cerradas, y también orientadas. Es una teoría de supercuerdas, sin embargo no tienen un simetría de norma por lo que solo describe a la gravedad.

El quinto tipo de teoría de cuerdas son las llamadas *Teorías de cuerdas Heteróticas*.

5.4. Cuerda heterótica ($E_8 \times E_8$, $SO(32)$)

Una teoría heterótica es una especie de fusión entre la teoría de curadas bosónica y la teoría de supercuerdas. Estas tratan a los sectores que se mueven a la derecha y a la izquierda de manera diferente y además incluyen a la supersimetría. Los modos son tratados como de la siguiente manera: el sector que se mueve a la izquierda es bosónico. El sector que se mueve a la derecha es supersimétrico. Esta idea parece absurda ya que la teoría de cuerdas bosónica vive en 26 dimensiones del espacio-tiempo, mientras que las teorías de supercuerdas viven en 10 dimensiones de espacio-tiempo.

Las teorías de cuerdas bosónica no incorporan fermiones, por otro lado, supercuerdas tipo *II* no incluye a las simetrías de norma no abelianas. Esto significa que el SM no puede ser descrito por la teoría de supercuerdas por sí sola. Así que las teorías de tipo II describen un universo que carece de la teoría electrodébil y de QCD, una situación inaceptable, puesto que el mundo real incluyen estas interacciones.

Al principio se propuso una teoría de supercuerdas cerradas con modos que se mueven izquierda y derecha desacoplados que conserva los mejores aspectos de ambas teorías, produciendo una teoría que es lo suficientemente grande y lo suficientemente sofisticado como para incorporar las características que la teoría debe tener que incluir al SM. Haciendo que los modos que se mueven a la derecha súpersimétricos, se pueden incluir fermiones en la teoría, quitar los taquiones de la teoría, así que se tiene un vacío estable.

Se pueden incorporar teorías de norma no abelianas en los modos que se mueven a izquierda. Esto se hace mediante la adición de los fermiones Majorana-Weyl fermiones al sector que se mueve a la izquierda, sin añadir supersimetría. Se eliminan 16 dimensiones de las 26 dimensión de la teoría bosónica. Si se supone que las 16 dimensiones extra no son dimensiones del espacio-tiempo.

Para la cuerda heterótica que vive en 10 dimensiones, la red apropiada es una 16-dimensional. Considerando una red 16-dimensional auto-dual, matemáticamente, se sabe que hay dos de ellas ($E_8 \times E_8$ y $SO(32)$). Una de ellas es el producto directo de dos copias del E_8 . Sus generadores, en correspondencia uno a uno con los operadores vértice con peso uno, son simplemente generadores de cualquiera de los dos E_8 . La función de partición asociado pero es

$$\mathbb{Z}_{E_8 \times E_8} = \mathbb{Z}_{E_8}^2. \quad (5.17)$$

Pero hay otra red, además de la anterior para cualquier rotación $SO(16)$ pero igualmente simple de describir. Que es generada por

$$\pm w_i \pm w_j, \quad i \neq j, \quad (5.18)$$

donde w_i es ahora un vector R^{16} con las i -ésimas componentes 1 y el resto 0, y

$$\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2}\right), \quad (5.19)$$

con un número par de términos con signos “menos”. Por analogía con la red E_8 , que contiene los vectores raíz de $SO(32)$ y los vectores de peso de su representación spinorial quiral. Esta es la red

del álgebra de Lie $SO(32)$. La diferencia entre éste y el último caso es que los campos spinoriales quirales tienen un peso de $(2, 0)$ para los que no se forman corrientes. Los operadores de peso $(1, 0)$ corresponden a las raíces de $SO(32)$. La red no incluye las representaciones vectoriales y spinoriales anti-quirales. Así que el grupo de norma no es $Spin(32)$, sino su cociente por un subgrupo \mathbb{Z}_2 de su centro $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Normalmente se escribe como $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$ para distinguir a este de $SO(32)$. $SO(32)$ tiene el mismo número de generadores que $E_8 \times E_8$, 496. También se puede calcular la función de partición

$$\mathbb{Z}_{SO(32)/\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Z}_{E_8 \times E_8} = \mathbb{Z}_{E_8}^2. \quad (5.20)$$

5.5. Compactificación

Una observación importante es que la gravedad aún no ha podido ser añadida en ninguna teoría de unificación, ya que es difícil de combinar con la teoría cuántica de campos. Hay algunas propuestas para incluir una partícula de spin 2, que puede ser identificado como un gravitón (partícula mediadora de la interacción gravitacional), en modelos unificadores; por ejemplo, considerando transformaciones de supersimetría locales. Sin embargo, las propuestas siempre concluyen de manera no satisfactoria debido a la aparición de divergencias asociadas a la no-renormalizabilidad de una teoría que incluye gravitones. Una de las teorías más sólidas que podría evitar este problema es la teoría de cuerdas, debido a que las partículas son reemplazadas por objetos unidimensionales extendidos que no interactúan puntualmente. Desafortunadamente, las teorías de cuerdas consistentes predicen la existencia de 6 dimensiones adicionales, al menos, lo cual implica invocar mecanismos para *desaparecer* dimensiones adicionales predichas por la teoría. La técnica esencial que se emplea en estos casos es la de *compactificación*.

La compactificación, a grandes rasgos, es un método para disminuir el número de dimensiones de una teoría [45]. Si se desean eliminar n dimensiones, se considera que estas forman un subespacio n -dimensional compacto, se reduce su tamaño a dimensiones minúsculas, y se determina el efecto de este mecanismo en el modelo original. La teoría emergente, o *teoría efectiva* depende de la geometría de la compactificación y de los campos de la teoría original, los cuales aparecen como campos *efectivos* en la teoría compactificada con nuevas masas e interacciones debidas a la compactificación. La forma más simple de compactificación es la toroidal, en la que se supone que cierto número de dimensiones adoptan la forma de un toro n dimensional tan pequeño como para escapar a toda detección.

La idea de compactificación en la física, se originó cuando T. Kaluza trató de unificar la gravedad con el electromagnetismo suponiendo que existe una dimensión extra [40]. Pocos años después, Klein subrayó que la idea sólo podría funcionar si la nueva dimensión fuera diminuta ya que no puede ser observada. En un lenguaje moderna, discutimos a continuación algunos de los aspectos de la idea de Kaluza y Klein.

Si se considera la gravedad de Einstein en 5 dimensiones con la quinta dimensión compactificada.

La métrica puede ser parametrizada como

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{44}(dx^4 + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (5.21)$$

La métrica anterior es invariante bajo las transformaciones de coordenadas generales en cinco dimensiones $x^M \rightarrow x'^M(x^\nu)$. Si se quiere ver desde un punto de vista en 4 dimensiones para la geometría, es decir, restringir sólo a transformaciones $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$, esto divide a la métrica original en un campo escalar $G_{44} = g_{44} = e^{2\sigma}$, un campo vectorial $G_{\mu 4} = e^{2\sigma} A_\mu$, una métrica $G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + e^{2\sigma} A_\mu A_\nu$. Estos campos son invariantes bajo las transformaciones de coordenadas en cuatro dimensiones. Considerando $x^4 \rightarrow x^4 + \lambda(x^\mu)$, la métrica es invariante si el campo vectorial sufre una transformación de norma $U(1)$

$$A \rightarrow A - d\lambda, \quad (5.22)$$

implicando que el electromagnetismo puede ser incluido en una geometría con más dimensiones.

El campo σ es el llamado *radión* y contribuye con el tamaño de la dimensión extra mediante el factor determinante de la métrica en 5 dimensiones. No tiene ningún potencial (y por lo tanto tiene masa cero), así que su valor no puede determinarse sólo mediante las ecuaciones de movimiento. Tales campos sin masa se denominan módulos y no se observan en la naturaleza.

La constante de acoplamiento de la fuerza gravitacional en 4 dimensiones es G_4^N y está dada por

$$\frac{2\phi R_{fis}}{G_5^N} = \frac{1}{G_4^N}, \quad (5.23)$$

donde $R_{fis} = R\sqrt{G_{44}}$ es el tamaño de la dimensión extra que contiene tanto el radio R de la compactificación y el radión σ .

Vemos entonces que, a partir de la fuerza gravitacional en 5 dimensiones, se generaron dos fuerzas en cuatro dimensiones: gravedad y algo similar al electromagnetismo. Además, el gravitón 5-dimensional se tradujo en más partículas en 4 dimensiones. Sin embargo, una consecuencia adicional de la compactificación es el surgimiento de una *torre* infinita de copias de las partículas citadas, todas ellas diferentes y con masas inversamente proporcionales al tamaño de la dimensión adicional.

Aunque la idea original de Kaluza-Klein no funcionó debido a que no permite la incorporación de partículas cargadas y no admite cuantización de la gravedad, el concepto de compactificación se hizo popular a más de medio siglo después de su creación, gracias a la teoría de cuerdas. Dentro de la teoría de cuerdas, las supercuerdas solo pueden vivir en un espacio-tiempo de 10 dimensiones. El espacio-tiempo de diez dimensiones se divide en un espacio-tiempo no-compacto externo M_{10-d} y un espacio compacto interno M_d , es decir

$$M_{10} = M_{10-d} \times M_d. \quad (5.24)$$

La situación más físicamente relevante es claramente cuando $d = 6$.

Capítulo 6

Orbifolds y resultados

6.1. Orbifolds

Las compactificaciones toroidales no pueden dar lugar a teorías realistas, ya que tienen un número bastante grande de supersimetrías espacio-tiempo que no están rotas, para un espacio-tiempo no compactificado. Al considerar la compactificación sobre T^6 , las teorías de cuerdas heteróticas tienen una supersimetría $N = 1$ en 10 dimensiones, que corresponden a $2^4 = 16$ componentes reales de supercarga que forman un spinor de Majorana-Weyl en $(9 + 1)$ -dimensiones. Y como T^6 es plana, todas estas sobreviven como supersimetrías que no se rompen para M^4 . La supersimetría $N = 1$ en M^4 tiene 4 componentes reales de supercarga. Por lo tanto la cuerda heterótica compactificada en T^6 da lugar a una teoría $N = 4$ en 4 dimensiones. Para obtener modelos realistas se tienen que considerar compactificaciones en variedades más complejas como los espacios de Calabi-Yau, el tipo más simple de estos son los *orbifolds* [46, 47, 48, 45].

Un orbifold es una generalización de una variedad: es un espacio cociente de un espacio euclideo dividido por un grupo Finito. Los orbifolds tienen *puntos fijos*, estos son puntos invariantes bajo la identificación. En la vecindad de estos puntos singulares, una QFT o una teoría de cuerdas definidas en el orbifold se volverán singulares, lo cual va a reducir el número de estados de la teoría. Es decir que al respetar la simetría de grupo del orbifold se establecen constricciones en la teoría definida en este. Simultáneamente, en puntos singulares se pueden añadir nuevos estados a la teoría, a estos se les conoce como *estados torcidos*, y estos proveen una teoría de cuerdas completamente suave cuando se combina con las partes regulares.

Lo que se quiere es considerar compactificaciones de cuerdas en las que el espacio interno pertenecen a una clase de orbifolds toroidales que son análogos a los espacios Calabi-Yau ya que su grupo de holonomía se encuentra en $SU(N)$ y por lo tanto la teoría en las dimensiones más bajas tiene supersimetría intacta (sin romper). Aunque estos orbifolds son singulares, la propagación de la cuerda es consistente e incluye a los sectores torcidos. Por otra parte, puesto que los orbifolds toroidales son planos excepto en ciertos puntos fijos, entonces la teoría puede resolverse de manera exacta. De hecho, los campos en la hoja de mundo satisfacen a las ecuaciones de movimiento (libre)

con condiciones límite apropiadas.

En general, un orbifold \mathcal{O} se obtiene tomando el cociente de una variedad M sobre la acción de un grupo discreto G que preserva la métrica de M [48, 49]. Esto significa:

$$\mathcal{O} = M/G. \quad (6.1)$$

Para $g \in G$ y $x \in M$, los puntos x y gx son equivalentes en el cociente. Cada punto se identifica con su órbita bajo G , de ahí el nombre orbifold. Los puntos fijados de M bajo G son puntos singulares de \mathcal{O} . El ejemplo más simple de un orbifold es el toro T^D , que se define como

$$T^D = \mathbb{R}^D/L, \quad (6.2)$$

donde L es una red D -dimensional. Por lo tanto, en T^D los puntos x y $x + V$, donde $V \in L$, están identificados. La base de la red del toro está dada por e_a , $a = 1, \dots, D$. Como el grupo de traslaciones debidas a los vectores de la red actúan libremente, el toro no tiene puntos singulares. Sin embargo, cuando los grupos discretos dejan puntos fijos, el orbifold tiene puntos singulares.

Puesto que se quieren espacios compactos se tienen que considerar orbifolds toroidales T^D/G_P , donde el grupo de punto $G_P \subset SO(D)$ es un grupo discreto que actúa cristalograficamente sobre la red del toro L . Los elementos de G_P son rotaciones denotadas por θ . Los orbifolds toroidales también se pueden expresar como \mathcal{R}^D/S , donde S es el llamado grupo de espacio que contiene las rotaciones y traslaciones en L . El grupo de punto es *el grupo de holonomía* del orbifold toroidal. Esto se puede ver si se toman dos puntos x y y distintos en el toro pero tales que $y = \theta x + V$. Entonces, x y y están identificadas en el orbifold y mas aún los vectores tangentes en x están identificados con los vectores tangentes en y rotados por θ . Ahora el transporte paralelo de algún vector a lo largo de una trayectoria de x a y la cual está cerrada en el orbifold. Como el toro es plano, este vector permanece constante pero como la base tangente es rotada por θ , el vector final esta rotado por θ con respecto el vector inicial. El lazo de x a y encierra un punto singular ya que de lo contrario no habría ninguna curvatura que pueda causar la holonomía no trivial.

Los grupos de punto que se van a considerar en esta tesis son $G_P = \mathbb{Z}_N$ con $N = 6, 8$. En particular \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} .

Entonces $\theta^N = 1$ y θ tiene eigenvalores $e^{\pm 2i\pi v_i}$, donde $v_i = k_i/N$ para algunos enteros k_i , $i = 1, \dots, D/2$. Y como se mencionó antes G_P debe actuar cristalograficamente en la red del toro, esto significa que para $V \in L$ y $\theta \in G_P$, $\theta V \in L$. Ahora, ya que $V = n_a e_a$, con coeficientes enteros n_a , en la base de la red θ debe ser una matriz de números enteros. Por lo tanto, las cantidades

$$Tr\theta = \sum_{i=1}^{D/2} 2\cos 2\pi v_i, \quad (6.3)$$

y

$$P(\theta) = \det(1 - \theta) = \prod_{i=1}^{D/2} 4\sin^2 \pi v_i, \quad (6.4)$$

deben ser números enteros y $P(\theta)$ es el número de puntos fijados de θ , con lo que el requisito de la acción cristalográfica es muy restrictivo.

Una vez dadas las v_i se tiene que encontrar una red en particular L con θ^n , $n = 1, \dots, N$, como automorfismos. .

El ejemplo más simple de la idea de compactificación en orbifold es S^1/\mathbb{Z}_2 [46].

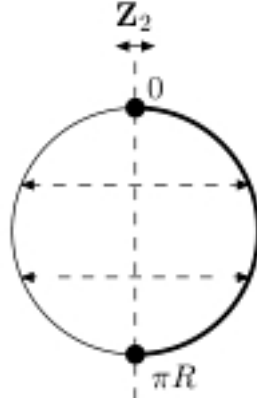


Figura 6.1: La acción \mathbb{Z}_2 definida por una reflexión. Los puntos fijos son $y = 0, \pi R$

Como $T^1 \sim S^1$ puede definirse como el cociente de \mathcal{R}^1 entre $2\pi R\mathbb{Z}$. Ahora considerando una acción \mathbb{Z}_2 como la reflexión respecto al origen:

$$y \sim -y. \quad (6.5)$$

Si se sigue que $\pi R + y$ y $\pi R - y$ están también identificadas ya que

$$\pi R + y \rightarrow -\pi R - y \rightarrow \pi R - y, \quad (6.6)$$

con esta última relación que viene de la definición de S^1 , es decir que hace un orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 identificando los puntos opuestos de S^1 con respecto a los ejes verticales de S^1 que aparecen en la figura 6.1, en donde los dos puntos fijos $y = 0$ y $y = \pi R$, se tienen un intervalo finito $[0, \phi R]$. Este intervalo es una región fundamental, los campos se pueden mover en este intervalo $[0, \phi R]$.

Otra acción simétrica \mathbb{Z}_2 en S^1 , es la rotación por π

$$y \rightarrow y + \pi R. \quad (6.7)$$

En esta relación se puede ver como la traslación de $\frac{1}{2}$ del intervalo original. Esta es de orden 2 ya que dos veces esta acción lleva a la identidad. Este orbifold no tiene puntos fijados, con lo que la acción \mathbb{Z}_2 actúa libremente en el círculo S^1 . La topología de este orbifold no es un intervalo cerrado, sino el círculo con la circunferencia reducida a la mitad πR (R es el radio del círculo). Aunque esta

es unidimensional se pueden introducir dos números reales (x, y) e identificar coordenadas con una escala.

$$(x, y) \sim (Kx, Ky). \quad (6.8)$$

Como las coordenadas son las mismas que las multiplicadas por un factor K , se puede fijar una escala como R . Ya que $K = R$ y $K = -R$, llevan al mismo punto.

6.2. Orbifolder

Con los orbifolds se pueden construir muchos modelos, pero para encontrar modelos que se asemejen al SM se requiere hacer muchos cálculos y tomar en cuenta varias restricciones basadas en la teoría de cuerdas heteróticas. Estos cálculos son muy complejos y por eso se necesita la ayuda de una computadora. Para analizar compactificaciones en orbifolds de la teoría de cuerdas heteróticas, podemos emplear el *orbifolder* [1]. El orbifolder es un programa desarrollado en *C++* que permite construir orbifolds heteróticos arbitrarios y calcular sus espectros a bajas energías. La información que se le proporciona al programa es sólo el grupo de punto \mathbb{Z}_n y el tipo de cuerda heterótica a utilizar ($E_8 \times E_8$ o $SO(32)$).

En lo subsecuente, haremos uso extensivo de este programa con la finalidad de obtener el espectro de cada modelo que se crea y de identificar modelos prometedores, semejantes al MSSM. Con estas herramientas, identificaremos las posibles múltiples simetrías abelianas extra que emergen en estos modelos prometedores y las analizaremos cuidadosamente.

6.3. Resultados

Los grupos de punto que utilizados en esta tesis son \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} . El número de modelos obtenidos mediante orbifold en \mathbb{Z}_{6-I} fueron 30, mientras que el número de modelos obtenidos en \mathbb{Z}_{8-I} fueron 912. Cada modelo tiene un grupo de norma A que se puede describir de la siguiente manera:

$$A = G_{SM} \times G_{oculto} \times U(1)^i, \quad (6.9)$$

donde G_{SM} es el grupo de norma del SM, G_{oculto} es el grupo de norma no abeliano (donde no se incluye ningún subgrupo $U(1)$) que se supone está roto y por lo tanto a bajas energías no es posible detectarlo y $U(1)^i$ son las i simetrías abelianas adicionales. Cabe señalar que para cada modelo, G_{oculto} es diferente.

La siguiente tabla muestra con que frecuencia se repite el número de simetrías $U(1)$ adicionales que tiene cada modelo en cada región.

\mathbb{Z}_{6-I}	
Número de U(1)	Frecuencia
6	12
7	15
8	2
9	1
TOTAL	30
\mathbb{Z}_{8-I}	
Número de U(1)	Frecuencia
2	9
3	185
4	100
5	299
6	211
7	99
8	9
TOTAL	912

Tabla 6.1: Número de simetrías abelianas adicionales por modelo

De la tabla 6.1 se puede ver que los números de $U(1)$ adicionales mas recurrente en ambas regiones son 5, 6 y 7, mientras que solo en \mathbb{Z}_{8-I} se tienen modelos con 2 $U(1)$ adicionales y son muy pocas.

El objetivo es analizar el espectros de todos estos modelos con la finalidad de encontrar candidatos que pudieran describir a la naturaleza. Como se mencionó anteriormente estos modelos

no solo van a contener las partículas del MSSM, sino también partículas exóticas tipo vector con respecto al grupo de norma del SM que están cargadas bajo los grupos de norma del sector oculto y singuletes del SM, los cuales pueden estar cargados bajo los grupos del sector oculto o también bajo las $U(1)$ adicionales de las cuales una de estas es la $U(1)$ anómala. Estos de alguna manera deben estar desacoplados ya que lo que se quiere es describir la naturaleza. Una forma de que esto ocurra es, induciendo VEVs para algunos singuletes no abelianos, estos VEVs de los singuletes van a dotar de masa a los exóticos y los van a desacoplar (se van a desacoplar por pares) y además van a provocar el rompimiento de las simetrías de $U(1)$ adicionales.

Una vez obtenido los espectros de todos los modelos se procede a desacoplar estos exóticos tipo vector mediante una rutina desarrollada en JAVA . Los espectros resultante contienen muchas simetrías abelianas adicionales como se puede ver en la tabla 6.1, para poder reducir el número de simetrías abelianas y con esto el contenido de partículas de cada modelo disminuye con la finalidad de obtener modelos que puedan presentar una clara unificación (similar al caso MSSM). Para esto se desacoplan los exóticos tipo vector con respecto ya no a todo el grupo de norma de los modelos, sino con respecto al grupo de norma que solo incluya unas simetrías abelianas (generalmente 1 o 2) a esto se le llamará *una configuración*, para cada modelo se pueden tomar en cuenta varias configuraciones lo que aumentará el número de espectros a analizar. Habrá modelos cuyo contenido de partículas modifique a las EGR de manera que ocurra el fenómeno llamado *Landau pole* (también llamado “Moscow Zero”), es decir en donde el valor de los acoplamientos α_i obtienen valores infinitos.

En total se obtuvieron 50 modelos en \mathbb{Z}_{6-I} y 86 en \mathbb{Z}_{8-I} , y posteriormente con otra rutina desarrollada en JAVA se calcularon los coeficientes b supersimétricos de las funciones β de las EGR, no solo para las simetrías del SM sino también para las simetrías abelianas adicionales.

Como se vio en los capítulos anteriores el valor de los coeficientes b (SUSY), cambiará dependiendo del contenido de cada modelo (cada configuración en particular).

Con esta información se pudo calcular el comportamiento de los acoplamientos para cada modelo y analizar sus propiedades (escalas de unificación, comportamiento a bajas energías), con la finalidad de identificar algún modelo interesante, es decir un modelo que muestre una tendencia a la unificación similar al caso del MSSM pero con una o más simetrías abelianas adicionales. Cabe señalar que en esta tesis se toma a la escala energética de 1 TeV como la escala en donde se ocurre el rompimiento de SUSY.

6.3.1. La escala de unificación (M_{GUT})

Lo primero que se analizó en los modelos es, su tendencia a la unificación en altas energías, el resultado en el MSSM es que los acoplamientos tienden a la unificación en una escala energética $\mu \sim 10^{16} GeV$ con $\alpha^{-1} \sim 8\pi \sim 25$. Basado en lo anterior, pudiera pensarse que un modelo interesante con una o más simetrías abelianas adicionales debería de tener valores similares en sus tres puntos de unificación a $\sim 10^{16} GeV$.

En las siguientes gráficas α^{-1} vs μ , se puede apreciar qué modelos de \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} pudieran ser interesantes.

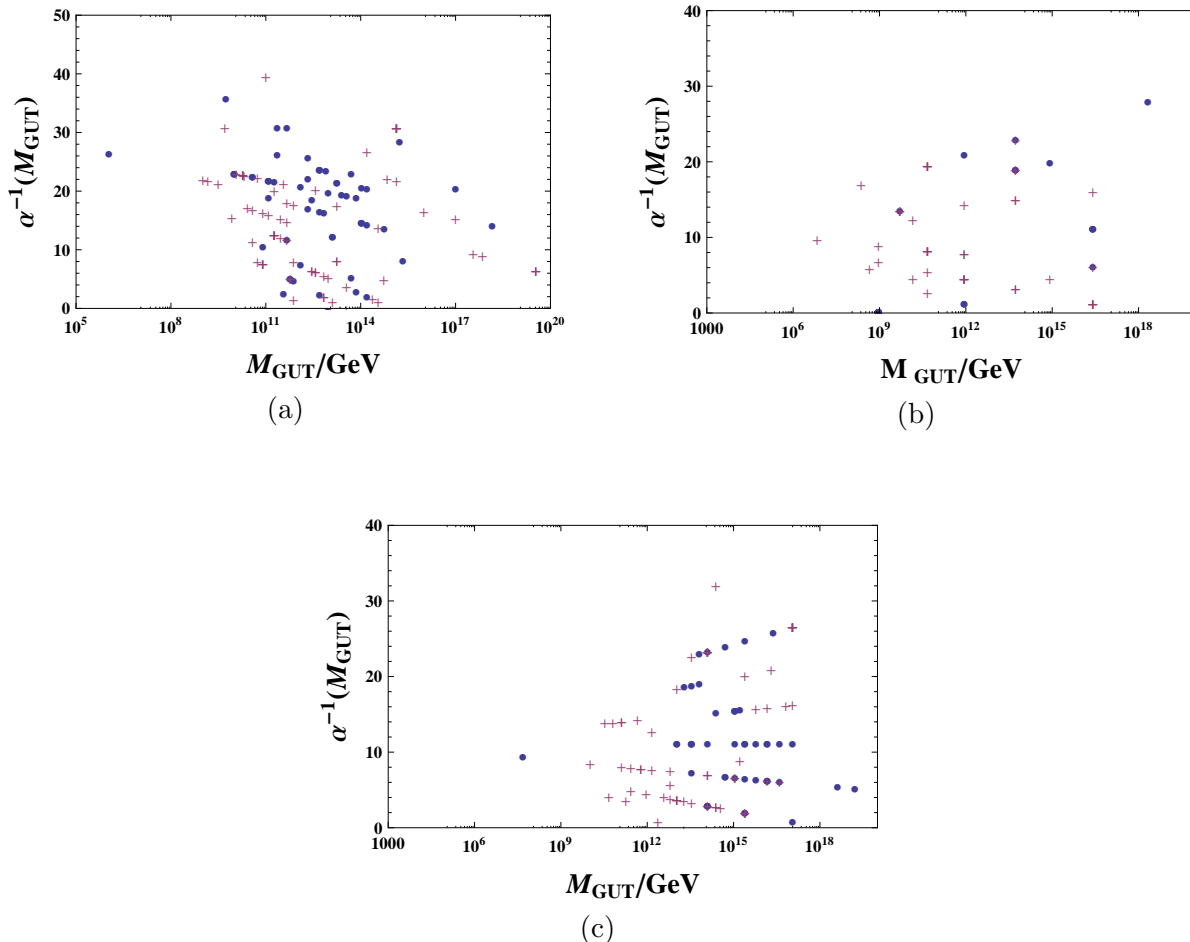


Figura 6.2: Valores de la escala de unificación M_{GUT} de las fuerzas del SM y de la constante de acoplamiento a esa escala α^{-1} . Puntos representan modelos \mathbb{Z}_{6-I} y + representan modelos \mathbb{Z}_{8-I} . (a) Unificación de $U(1)_Y$ con $SU(2)_L$. En la mayoría de los modelos, M_{GUT} es mucho menor que en el MSSM. Sin embargo, hay 5 modelos (3 de \mathbb{Z}_{8-I} y 2 de \mathbb{Z}_{6-I}) en los que $M_{GUT} \sim 10^{16} - 10^{18} GeV$ y α^{-1} varía entre 5 – 25. Los valores predominantes de M_{GUT} son $10^{12-14} GeV$. (b) Unificación de $SU(3)_C$ con $U(1)_Y$. Sólo un modelo de \mathbb{Z}_{6-I} tiene su $M_{GUT} \sim 10^{17} GeV$, aunque $\alpha^{-1} < 20$. (c) Unificación de $SU(2)_L$ con $SU(3)_C$. Alrededor de $M_{GUT} \sim 10^{17} GeV$, hay varios modelos \mathbb{Z}_{6-I} con α^{-1} variando entre 1 – 30. El intervalo de $M_{GUT} \sim 10^{12-14}$ se encuentra una cantidad considerable de modelos similar al caso (a).

De las gráficas anteriores se puede ver que la gran mayoría de modelos no son interesantes al menos en este primer análisis, con excepción de 5 modelos, que tiene valores cercanos a los esperados

para el caso de unificación de $U(1)_Y$ con $SU(2)_L$. En las 3 gráficas la región energética mas poblada se encuentra entre $10^{11-13} GeV$, con valores de α^{-1} muy variados. Este resultado en principio parece desalentador.

Las gráficas de barras mostradas en la figura 6.3 muestran con qué frecuencia las interacciones del SM se unifican en distintas “escalas unificación” M_{GUT} .

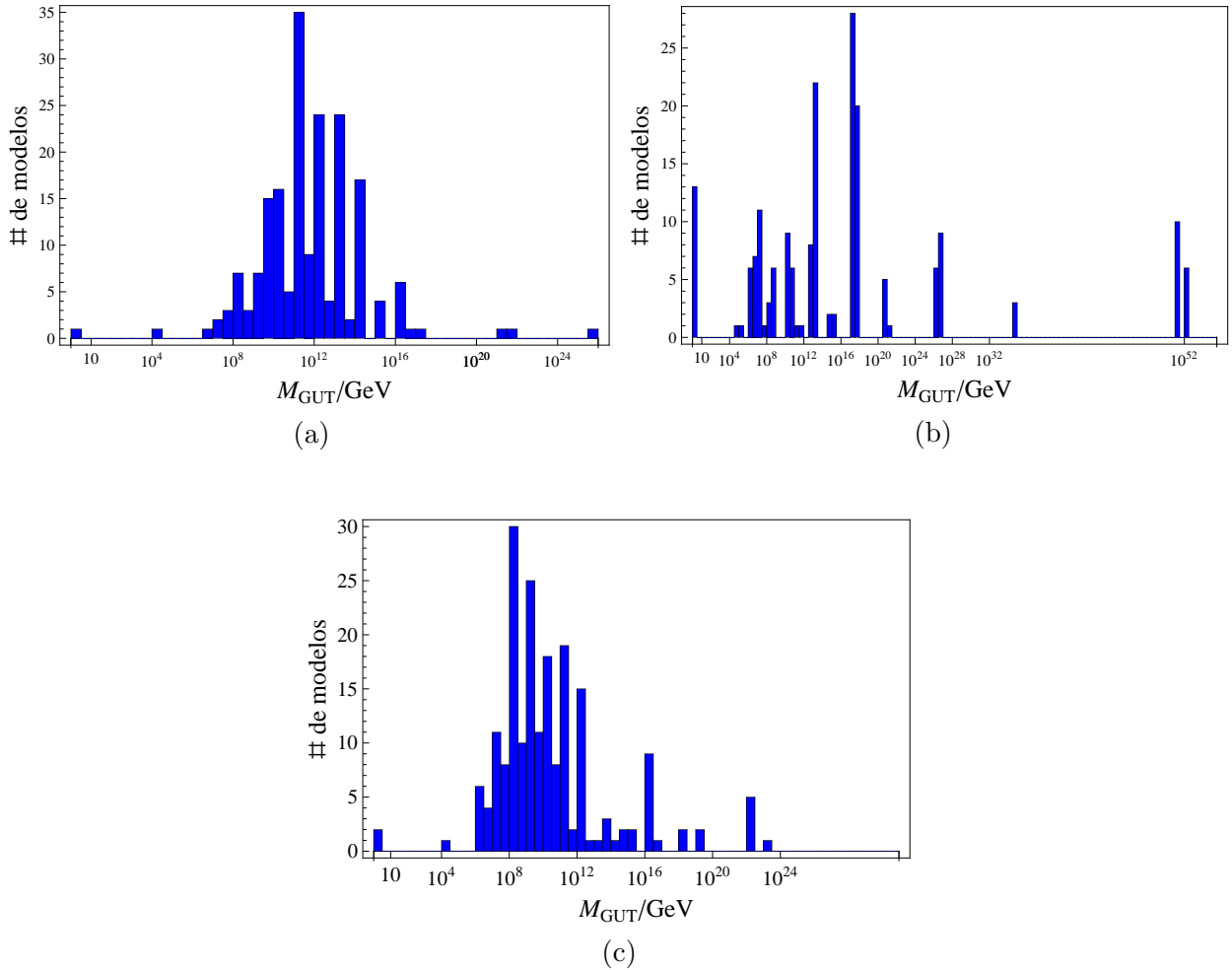


Figura 6.3: Estas gráficas de barras sirven como complemento de la figura 6.2. (a) Unificación entre $U(1) - SU(3)$, el pico está en $10^{11-12} GeV$. (b) Unificación entre $SU(2) - SU(3)$, hay un pico muy claro de mas de 20 modelos en una zona mayor a los $10^{17} GeV$. (c) Unificación entre $U(1)_Y - SU(2)_L$ se observa que hay un pico para los valores de $M_{GUT} = 10^{8-9} GeV$.

Las M_{GUT} predominantes en todos los casos son considerablemente inferiores a $\mu = 10^{17} GeV$.

Con lo que la esperanza de encontrar un modelo semejante al MSSM se reduce, esto quiere decir que el contenido adicional al SM de cada modelo va alterar bastante la escala M_{GUT} .

6.3.2. Modelos con una clara unificación

Con la finalidad de encontrar modelos que muestren una clara unificación, utilizando los datos de los M_{GUT} y de los coeficientes b (supersimétricos), se grafica el corrimiento de los acoplamientos para cada configuración. Una clara unificación en esta tesis significa que los acoplamientos se van a unificar en una pequeña región energética (un triángulo pequeño formado por los tres puntos de unificación) como en el caso del MSSM.

Los dos modelos que presentan una unificación mas clara en \mathbb{Z}_{6-I} , se muestran en las gráficas siguientes, que describen como evolucionan los valores del inverso de los acoplamientos correspondientes a cada una de las interacciones del SM y a las simetrías abelianas adicionales, con respecto a diferentes escalas energéticas, es decir, α^{-1} vs μ , donde μ es la escala energética en GeV .

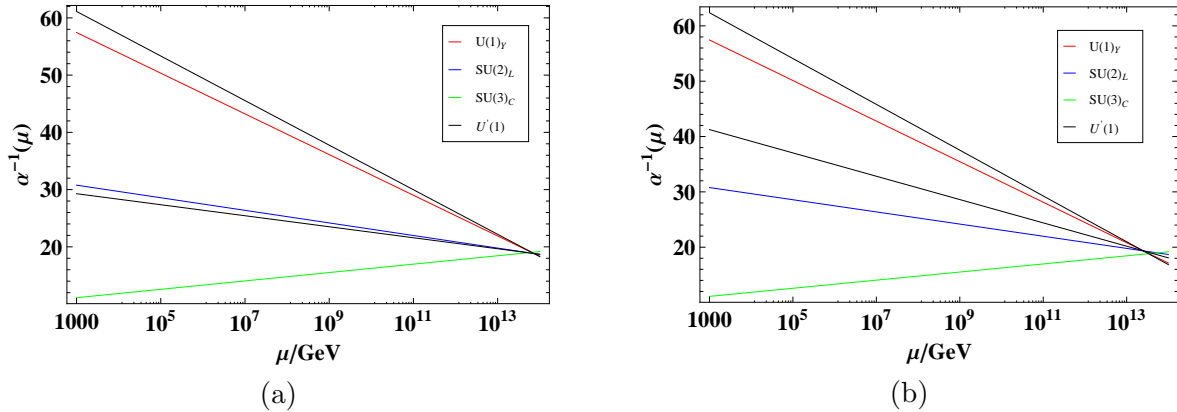
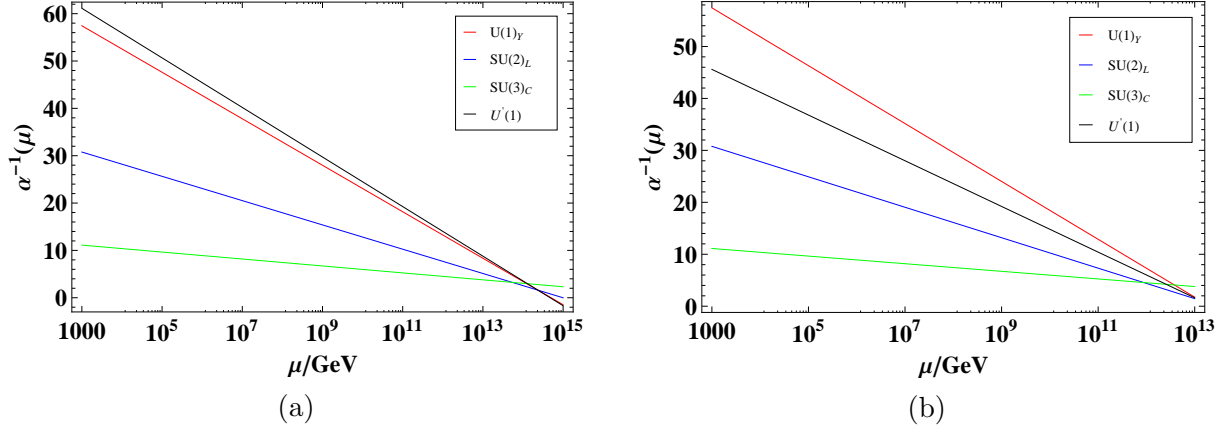


Figura 6.4: α^{-1} vs μ en dos modelos en \mathbb{Z}_{6-I}

Modelo	$b_{1,2,3}$	$b_{1,2}^{extra}$	M_{GUT}/GeV	$\alpha^{-1}(M_{GUT})$	$\alpha_{extra-1,2}^{-1}(1TeV)$
Fig.6.4(a)	(9.7, 3, -2)	(21/8, 85/8)	7.27×10^{13}	18.83	29.28, 61.12
Fig.6.4(b)	(10, 3, -2)	(23/3, 271/24)	2.49×10^{13}	19.34	41.53, 62.66

Se puede ver de la figura 6.4 la clara unificación en ambos modelos, en una escala energética mas baja de lo esperado.

Análogamente, para el caso de \mathbb{Z}_{8-I} los dos modelos que presentaron una unificación mas clara se muestran en las gráficas siguientes.

Figura 6.5: α^{-1} vs μ en dos modelos en Z_{8-I}

Modelo	$b_{1,2,3}$	b^{extra}	M_{GUT}/GeV	$\alpha^{-1}(M_{GUT})$	$\alpha_{extra}^{-1}(1TeV)$
Fig.6.5(a)	(67/5, 7, 2)	(100/7)	2.34×10^{14}	1.6	61.13
Fig.6.5(b)	(76/5, 8, 2)	(12)	1.28×10^{13}	1.14	45.59

En las tablas anteriores M_{GUT} se refiere a la escala energética donde se unifican $U(1)_Y$ con $SU(2)_L$. Tanto en Z_{6-I} y Z_{8-I} (figuras 6.4 y 6.5 respectivamente) los valores de M_{GUT} donde se da una unificación mas clara están por debajo del $M_{GUT} \sim 10^{16-17} GeV$. En particular es en los modelos de Z_{6-I} donde la unificación es mas clara ($M_{GUT} \sim 10^{13} GeV$) y además se da en modelos con 2 $U(1)$ adicionales, donde los valores de $\alpha^{-1}(1 TeV)$ de estos, uno es similar a $\alpha_1^{-1}(1 TeV)$ y el otro a $\alpha_2^{-1}(1 TeV)$. Mientras que para los dos modelos en Z_{8-I} solo poseen una $U(1)$ y sus valores de $\alpha^{-1}(1 TeV)$ son similares a los de α_1^{-1} . Cabe señalar que si la escala de rompimiento de SUSY ($\Lambda_{SUSY} \sim 1 TeV$), se cambia a $10^4 GeV$ por ejemplo, la tendencia a una clara unificación no se altera, lo único que se modifica es el valor de M_{GUT} , el cual se reduce solo un poco.

El modelo donde se presenta una unificación de dos de sus acoplamientos en una escala similar a $10^{17} GeV$, es el siguiente.

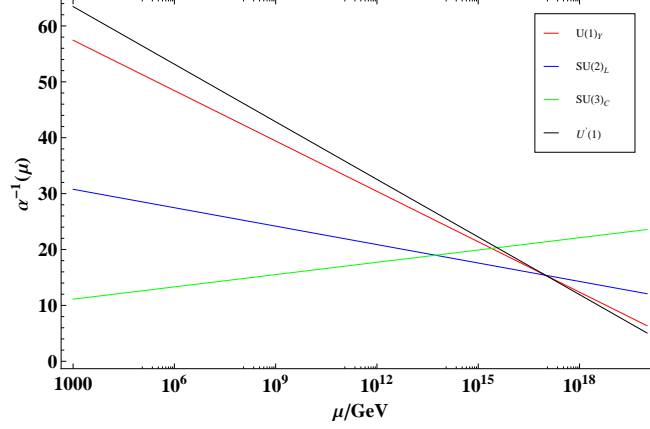


Figura 6.6: α^{-1} vs μ en \mathbb{Z}_{8-I} . Es de todos los modelos obtenidos el mas parecido al caso MSSM.

Modelo	$b_{1,2,3}$	b^{extra}	M_{GUT}/GeV	$\alpha^{-1}(M_{GUT})$	$\alpha_{extra}^{-1}(1TeV)$
Fig.6.6	(41/5, 3, -2)	(75/8)	9.89×10^{16}	15.39	65.03

Este último modelo es el mas parecido al caso MSSM, sin embargo no presenta unificación. Por lo tanto en la escala energética en donde se presenta de manera mas contundente una unificación es en $\mu = M_{GUT} \sim 10^{12-13} GeV$.

6.3.3. Modelos simétricos izquierda-derecha

De la tabla 6.1, se ve que solo en \mathbb{Z}_{8-I} existen modelos con solo 2 simetrías abelianas adicionales, en total son 9 y de estos 6 no presentan “Landau pole”. Cabe señalar que todos estos modelos tienen un grupo de norma de la siguiente manera:

$$G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y \times U(1)_A \times U(1)_B \times G_{oculto}. \quad (6.10)$$

Este tipo de modelos se les conoce como *Modelos simétricos izquierda-derecha*; en estos el comportamiento de la constante de acoplamiento α_2 para $SU(2)_L$ se comporta igual que la constante de acoplamiento de $SU(2)_R$.

A continuación se presentan los dos modelos que presentan una unificación mas clara.

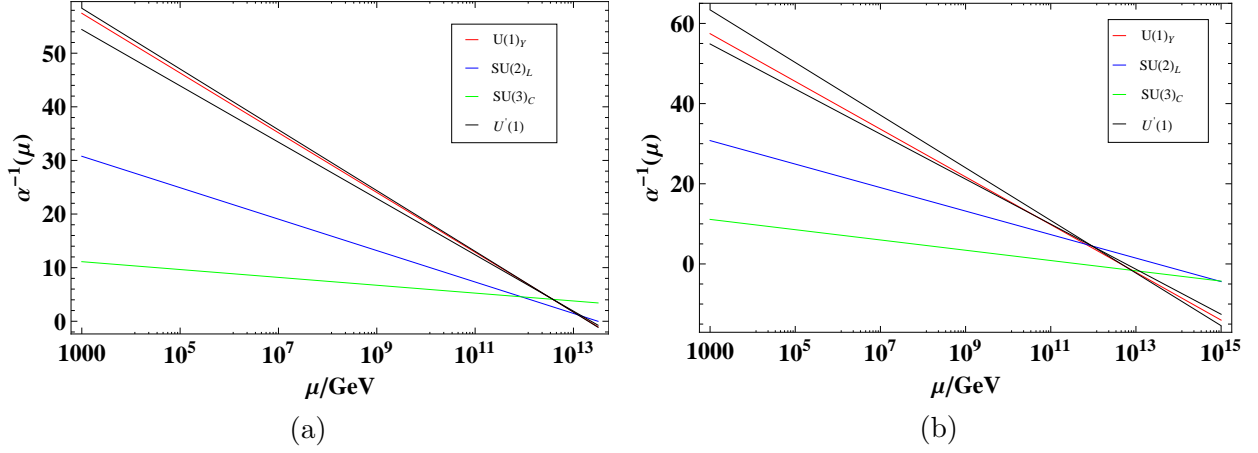


Figura 6.7: α^{-1} vs μ en dos modelos en Z_{8-I}

Modelo	$b_{1,2,3}$	$b_{1,2}^{extra}$	M_{GUT}/GeV	$\alpha^{-1}(M_{GUT})$	$\alpha_{extra-1,2}^{-1}(1TeV)$
Fig.6.7(a)	(76/5, 8, 2)	(43/3, 232/15)	1.28×10^{13}	1.14	55.798, 59.99
Fig.6.7(b)	(65/4, 8, 3.5)	(46/3, 215/12)	6.62×10^{11}	4.91	56.04, 64.39

La unificación no se da en un triángulo muy pequeño, sin embargo la región energética de unificación para 6.7(a) es de $10^{12-13} GeV$. Pero en el caso de la figura 6.7(b) esta es muy grande. Lo interesante de estos modelos es que no se tiene que elegir una configuración en particular, solo se eliminan los campos tipo vector de los espectros, sin embargo los valores de $\alpha_{extra-1,2}^{-1}(1 TeV)$ son muy similares a α_1^{-1} . Similar a los modelos anteriores, la unificación se da en el intervalo $\sim 10^{11-13} GeV$. En todos los casos anteriores los valores para $\alpha_{1,2,3}^{-1}(TeV)$ son similares a los valores para el SM.

6.3.4. Escala de unificación ($M_{GUT} = \mu_{st} \sim 10^{18} GeV$).

Dado que los modelos aquí estudiados provienen de la teoría de cuerdas y que ésta es una teoría que unifica todas las interacciones de la naturaleza, la siguiente pregunta que nos interesa estudiar es hasta qué punto podríamos predecir todos los acoplamientos α_i del SM sin invocar ninguna medición a bajas energías. El reto es, sin embargo, que la constante de acoplamiento en la teoría de cuerdas depende de un campo modular (el llamado dilatón), cuyo valor esperado en el vacío no es predicho por la teoría. Por esta razón, aunque podemos considerar que la escala de unificación predicha por la teoría de cuerdas es la escala de cuerdas $\mu_{st} \sim 10^{18} GeV$, es, sin una discusión más profunda de la teoría de cuerdas, imposible aportar una predicción actual para el acoplamiento. Por simplicidad y como nuestro (primer) caso físico, consideraremos que los modelos emergentes de las compactificaciones de cuerdas son compatibles con el MSSM, en donde la unificación de las fuerzas del SM ocurre para $\alpha_{GUT}^{-1} \sim 8\pi \sim 25$.

Aunque la suposición sobre el valor de α_{GUT} es muy fuerte y (como veremos) es una potencial fuente de error en los cálculos, la adoptaremos con la finalidad de comprender la dinámica de nuestros modelos y visualizar los retos y aspectos positivos de nuestras construcciones. Por tal razón, aunque se llegarán a ciertas predicciones desde esta perspectiva, éstas deberán analizarse desde una perspectiva modesta de un análisis meramente académico.

Adoptando las consideraciones discutidas, a partir de ese μ_{st} , se pueden hacer evolucionar los acoplamientos hasta $\mu = 1TeV$ (dados los valores de los coeficientes supersimétricos b de las funciones β), que es donde (aún) podemos/deseamos suponer que se rompe SUSY. De esta manera, se obtienen valores para $\alpha_i^{-1}(TeV)$ para todas las simetrías, incluyendo las simetrías abelianas adicionales, las cuales se podrían determinar experimentalmente en e.g. el LHC.

Realizando un análisis estadístico basado en la estrategia antes citada para cada grupo del SM de cada uno de los modelos, y para las simetrías abelianas encontradas. En las figuras 6.8 y 6.9, se muestran histogramas del número de modelos que exhiben distintos valores de $\alpha^{-1}(TeV)$ para las simetrías del SM y las $U(1)$ adicionales de los modelos supersimétricos examinados en este trabajo. En circunstancias ideales, esperaríamos que los valores predominantes para las fuerzas del SM coincidieran con los obtenidos en el SM, y que este análisis condujera a una predicción del valor de $\alpha^{-1}(TeV)$ para las hipotéticas fuerzas abelianas adicionales de la naturaleza.

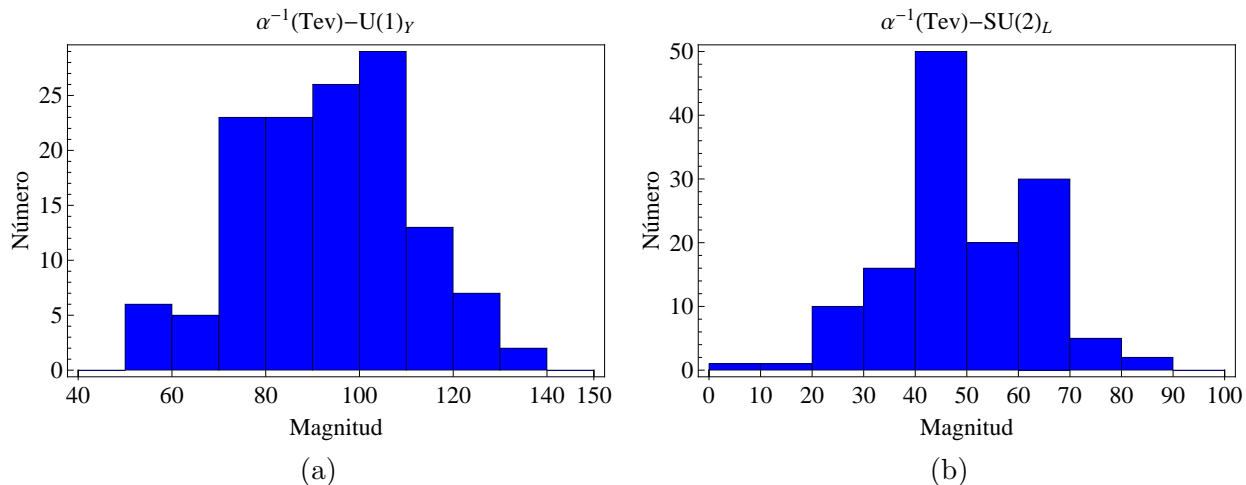


Figura 6.8: (a) Se pueden ver un picos en la zonas de los valores de $\alpha^{-1}(TeV)$ de 100-110. No coincide con los valores del SM. (b) El rango de valores predominante es el que va de 40-50, un poco alejado de los valores del SM.

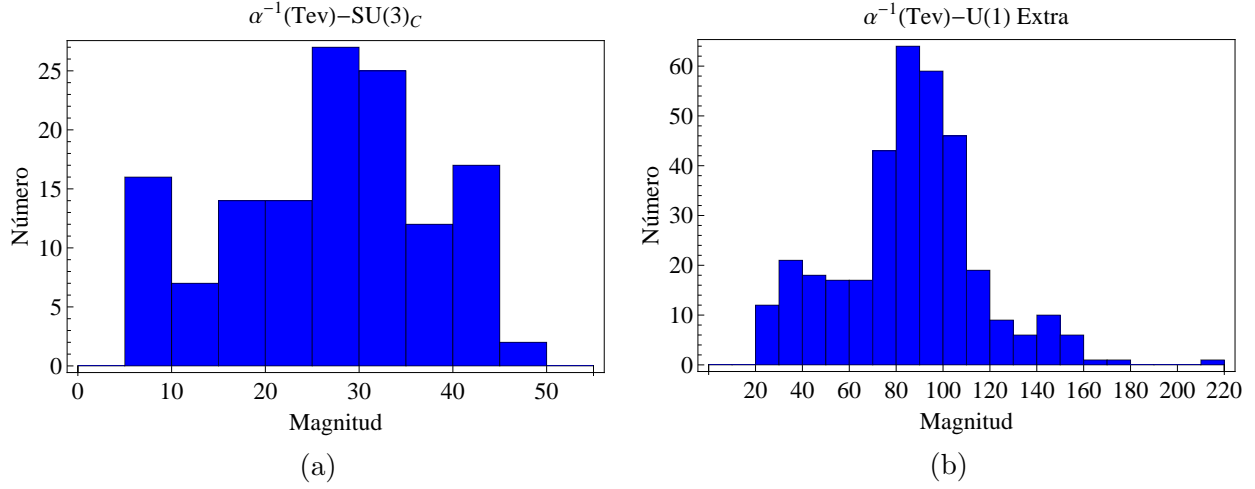


Figura 6.9: (a) Se distinguen un pico en valores de 25-30. No coincide con SM. (b) Hay un pico en el intervalo de 80-90, la mayoría de los valores se ubican de 80-100.

Los resultados del análisis estadístico no son positivos. De los histogramas, encontramos que los valores “predichos” en los modelos de cuerdas obtenidos, bajo la fuerte suposición de que $\alpha^{-1}(\mu_{st}) \sim 25$ para todas las fuerzas emergentes en ellos, son

- $\alpha_{SU(3)}^{-1} = 27.1 \pm 1.1$,
- $\alpha_{SU(2)}^{-1} = 49.1 \pm 1.3$,
- $\alpha_{U(1)_Y}^{-1} = 93.4 \pm 1.7$, y
- $\alpha_{U(1)'}^{-1} = 89.6 \pm 2.1$.

Como el valor dominante, se adopta la media y como el error teórico de la predicción, se considera el error estándar. Los valores obtenidos para las interacciones del SM, difieren considerablemente de los valores extrapolados a partir de las mediciones conocidas. De hecho, la diferencia es para SU(2) y SU(3) es del orden de 20 unidades, mientras que para $U(1)_Y$ alcanza la diferencia el valor de 35. Por esta razón, las mediciones anteriores no son de utilidad, no se puede obtener información a bajas energías que se confiable.

Esto es debido a la suposición para el valor de α_{GUT} , el cual debería ser determinado a partir de primeros principios de la teoría de cuerdas, lo cual está lejos del alcance de este trabajo. Sin embargo, una alternativa efectiva que podemos perseguir es analizar el efecto de elegir diversos valores arbitrarios de α_{GUT} (lo cual estaría relacionado con los distintos valores de estabilización del dilatón en las teorías de cuerdas). Este objetivo será estudiado en un trabajo futuro.

6.3.5. Interacciones fuertes en el sector oculto y rompimiento de SUSY: Λ_{Oculto}

Una deficiencia, desde el punto de vista fenomenológico, del presente trabajo es que nuestros resultados son solamente supersimétricos hasta ahora. El problema evidente es que el LHC no ha detectado vestigio alguno de SUSY a bajas energías. Por lo tanto, es imprescindible tratar de entender los efectos que podría tener el rompimiento de SUSY. Desafortunadamente, en la fenomenología de SUSY, construir un esquema realista y completamente bajo control para el rompimiento de SUSY es una tarea aún inconclusa.

Uno de los mecanismos de ruptura de SUSY es a través de las interacciones en un sector oculto de la teoría. El sector oculto se define como aquel sector de norma en el que habitan partículas que no interactúan con las partículas observables más que mediante las (debilísimas) interacciones gravitacionales. Estos sectores aparecen muy frecuentemente en la teoría de cuerdas y, particularmente, en modelos de orbifolds heteróticos, como los que nos interesan aquí. Típicamente, en estas construcciones se supone que SUSY es rota en el sector oculto mediante la *condensación de gauginos* de este sector [50, 51, 30], y que el rompimiento es transmitido al sector observable, solamente mediante interacciones gravitacionales.

Tomando este criterio como bueno, nosotros estudiamos ahora algunos de los aspectos esenciales de la condensación de gauginos en construcciones como las nuestras y su relación con la escala de rompimiento de SUSY en el sector oculto.

Una característica de la fenomenología de supercuerdas es que todos los parámetros del modelo son en principio determinados dinámicamente por el *VEV* de ciertos campos. Uno de estos campos es *el dilatón* cuyo *VEV* determina los acoplamientos. Cuando este está estabilizado, el dilatón está fuera del alcance de la teoría de la perturbación puesto que el potencial del dilatón es plano en todo orden en teoría de perturbaciones. Por lo tanto, entender cómo se estabiliza, el dilatón (es decir, cómo se determinan los acoplamientos) es tan importante como entender cómo se rompe la supersimetría.

La condensación de gauginos no sólo rompe la supersimetría sino que también genera un potencial para el dilatón no-perturbativo que puede estabilizarlo.

La supergravidad $N = 1$ en $d = 4$ necesita la incorporación del rompimiento de supersimetría en una escala pequeña en comparación con la masa de Planck por razones fenomenológicas.

En el caso de la cuerda heterótica compactificada en un espacio Calabi–Yau, la condensación de gaugino, genera un superpotential en el espacio de módulos.

Ahora se piensa que, al considerar una teoría compactificada $E_6 \times E_8$ en un espacio Calabi–Yau, con conexión de spin igual al potencial de norma, y sin líneas de Wilson (Standard embedding) se tiene una simetría de norma $E_6 \times E_8$. En la representación 27 de E_6 hay varios campos, pero no hay campos quirales que transformen en E_8 . Con esto se tiene una teoría supersimétrica de norma pura E_8 . Los acoplamientos de E_6 y E_8 serán iguales en una escala energética alta, así el acoplamiento de E_8 se intensifica primero y esto conduce, a condensación gauginos.

Con la materia quiral cargada bajo E_6 (que proporciona el sector visible en física de partículas) y desacoplado del sector oculto, E_8 . Este último es un sector Super Yang-Mills puro con $d = 4$ y

supersimetría $N = 1$, desarrolla un superpotencial no-perturbativo para el multiplete del dilatón y un condensado de gauginos:

$$\langle \lambda\lambda \rangle \equiv \Lambda^3 = \mu^3 \exp\left(\frac{3}{2g_{E_8}^2 \beta_{E_8}}\right), \quad (6.11)$$

donde g_{E_8} es la constante de acoplamiento de norma del grupo de condensación E_8 .

Ese parámetro Λ representa la escala energética de rompimiento de SUSY en el sector oculto, y se puede expresar a este parámetro como [52]:

$$\Lambda_{Oculto} \equiv (M_{GUT}) \exp\left[-\frac{1}{2\beta g^2(M_{GUT})}\right], \quad (6.12)$$

donde $\beta = \frac{b_i}{16\pi^2}$, y b_i son los coeficientes β del sector oculto.

Los modelos de supercuerdas analizados en esta tesis contienen un sector oculto, el sector E_8 contiene un super multiplete Yang-Mills puro en $d = 10$, lo que sugiere una posible ruptura de supersimetría por medio de la condensación de gauginos.

La siguiente gráfica *Cantidad vs Valores de Λ_{Oculto}* , sirve para analizar en que modelos Λ_{Oculto} son menores que μ_{st} (la escala de cuerdas), en principio los modelos mas interesantes tendrán que cumplir esta condición.

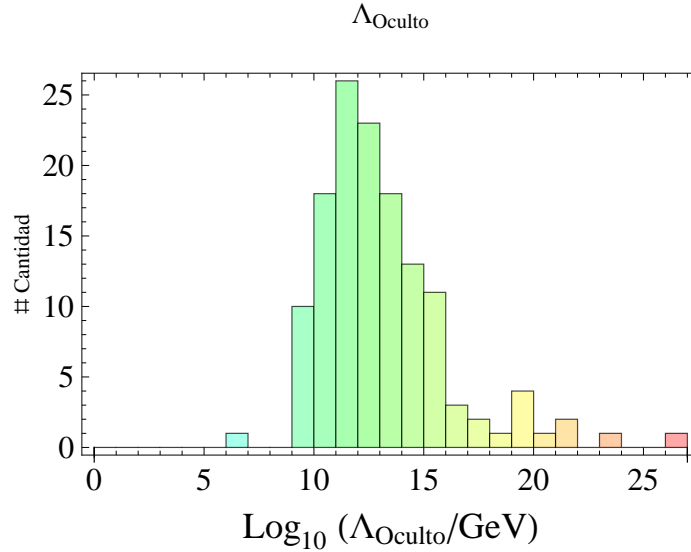


Figura 6.10: Hay un pico en el intervalo de $10^{11-12} GeV$, valores mas bajos que la escala de cuerdas.

Otra cantidad física de interés es la masa del gravitino $m_{3/2}$, el gravitino es la supercompañera (fermiónica) del gravitón (el bosón de norma de la interacción gravitacional). $m_{3/2}$ es el parámetro

de orden natural que mide la ruptura de supersimetría. La expresión para $m_{3/2}$ está dada por:

$$m_{3/2} \equiv \frac{\Lambda_{Oculto}^3}{M_{Planck}^2}, \quad (6.13)$$

donde $M_{Planck}^2 \sim 10^{18} GeV$ es la masa de Planck.

Los valores para la masa del gravitino $m_{3/2}$ son representados en la siguiente gráfica.

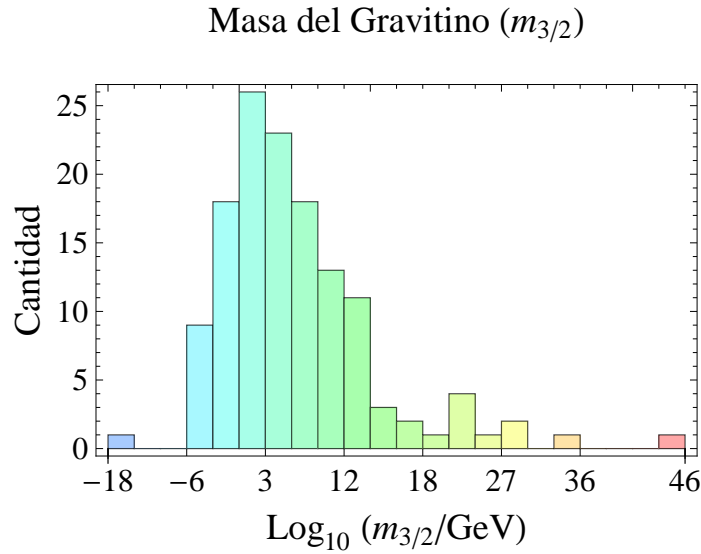


Figura 6.11: Existe un pico bien definido en la escala energética $10^{0-3} GeV$, sin embargo la segunda escala mas recurrente es $10^{3-6} GeV$.

Se sabe que hasta escalas de $\sim 2 TeV$ no aparecen indicios de SUSY, con lo que un resultado para la masa del gravitino de $\sim 10^{3-6} GeV$ considerando correcciones de umbral pequeñas es satisfactorio. Ya que se espera encontrar indicios de SUSY en energías de alrededor de $\sim 10 TeV$.

En particular los valores de $m_{3/2}$ para los modelos que parecen en las figuras 6.4, 6.5 y 6.7 se expresan en la siguiente tabla.

Modelo	Λ_{oculto}/GeV	$m_{3/2}/GeV$
6.4a	7.6×10^{13}	444065.6
6.4b	2.7×10^{13}	21875.6
6.5a	3.2×10^{14}	3.4×10^7
6.5b	1.4×10^{13}	3242.4
6.7a	2×10^{13}	8665.5
6.7b	6.4×10^{11}	0.27

Tabla 6.2: Valores de rompimiento de simetrías en los modelos con más clara unificación.

Todos los valores de $m_{3/2}$ presentados en la tabla 6.2 son susceptibles a alteraciones debido a correcciones de umbral. Estas se refieren a contribuciones a los acoplamientos debido a la presencia de partículas masivas a distintos niveles en las teorías efectivas; por ejemplo, hay estados muy masivos debidos a la compactificación y otros debido al desacoplamiento de las partículas exóticas. Aunque estas correcciones de umbral son genéricamente pequeñas, pueden, en casos específicos, alterar los valores hasta por dos órdenes de magnitud.

No obstante, suponiendo correcciones pequeñas, de los valores para la escala del rompimiento de SUSY ($m_{3/2}$), el modelo 6.5b presenta un valor del orden de $3 TeV$, y pensando en que el LHC está muy cerca de probar completamente esta escala energética, este modelo podría ser el más prometedor. En la figura 6.12 se presenta la evolución de los acoplamientos del modelo de la figura 6.5b considerando que SUSY se rompe en $3.2 TeV$ y que, simultáneamente, todas las partículas exóticas adquieren masas de ese orden por algún mecanismo conjeturado, parecido al de Higgs.

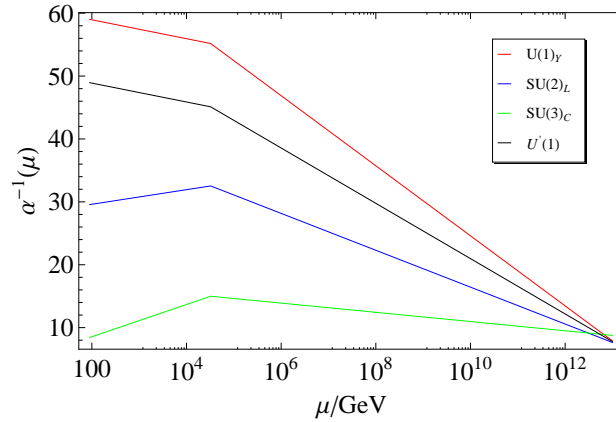


Figura 6.12: α^{-1} vs μ en Z_{8-I} , $m_{3/2} = 3.2 TeV$.

Modelo	$b_{1,2,3}$	b^{extra}	M_{GUT}/GeV	$\alpha^{-1}(M_{GUT})$	$\alpha_{extra}^{-1}(M_Z)$
Fig.6.12	(76/5, 8, 2)	(12)	1.24×10^{13}	7.36	48.94

La tendencia a la unificación no cambia, aunque el valor de M_{GUT} disminuye un poco y α_{GUT}^{-1} aumenta considerablemente. El resultado sobresaliente de esta sección es esa predicción que obtenemos para el valor de α_{extra}^{-1} medible en colisionadores a la escala M_Z : $\alpha_{extra}^{-1} \sim 49$, distante del valor adoptado comunmente. De un análisis superficial (que reportaremos en trabajos futuros), consideramos que este comportamiento debe seguirse en muchos de los modelos prometedores aquí analizados.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis estudié modelos supersimétricos basados en compactificaciones tipo orbifold de la teoría de cuerdas, creados por medio del programa *orbifolder*[1]. La finalidad esencial de este estudio fue encontrar modelos supersimétricos (como el MSSM) dotados de simetrías de norma abelianas adicionales (a veces llamadas Z') y analizar el comportamiento de los respectivos acoplamientos, con la perspectiva de encontrar gran unificación a muy altas energías y producir en estos modelos una estimación del valor de los acoplamiento a bajas energías ($\mu \sim TeV$) de dichas simetrías adicionales. Dado este objetivo primordial, no estudié aspectos estructurales de la teoría de cuerdas y sus compactificaciones, sino que adopté los resultados del *orbifolder* como teorías efectivas de campos provenientes de una teoría consistente más fundamental.

Con el afán de hacer una discusión lo más autocontenida posible, primero presento los formalismos teóricos para poder describir el SM, su versión supersimétrica (MSSM), el grupo de renormalización empleado para estudiar la evolución de los acoplamientos, los aspectos generales de las teorías de gran unificación GUT (y su versión SUSY), la motivación para considerar simetrías abelianas adicionales, compactificaciones y finalmente discuto el concepto de los orbifold.

Posteriormente, presento los resultados de mi clasificación de modelos dotados con *grupo de punto* (simetría discreta intrínseca a los orbifolds) \mathbb{Z}_{6-I} y \mathbb{Z}_{8-I} , en la que enfatizo la identificación de los modelos supersimétricos con $N = 1$ que contienen el grupo de norma del SM (más grupos de norma adicionales) y cuyo espectro de partículas coincide con el del SM (más un conjunto vectorial de partículas “exóticas”¹). Obtuve una clasificación completa de modelos prometedores provenientes de las simetrías mencionadas, i.e. identifiqué todos los modelos existentes con características afines al SM, de donde concluyo que hay 30 modelos prometedores basados en \mathbb{Z}_{6-I} y 912 basados en \mathbb{Z}_{8-I} . En el caso de \mathbb{Z}_{6-I} analicé todos los modelos obtenidos, mientras que en el caso de \mathbb{Z}_{8-I} , debido a la gran cantidad de modelos obtenidos, sólo analicé una muestra representativa de modelos prometedores.

¹Una partícula “exótica” es toda aquella que no aparece en el SM. Se les llama vectoriales si, además, todas ellas forman parejas, tales que sus números cuánticos se cancelan; e.g. $X : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-1/3}, \bar{X} : (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{1/3}$. Partículas de esta naturaleza adquieren masas grandes y, por lo tanto, se desacoplan del espectro de estados a bajas energías.

Dado que el motivo de mi estudio es la posible existencia de simetrías de norma abelianas continuas en la naturaleza, analizo cuántas simetrías $U(1)$ además de la $U(1)_Y$ del SM, están presentes en el grupo de norma en cada uno de los modelos prometedores obtenidos. Los resultados se muestran en la tabla 6.1. De este resultado se desprende que la mayoría de los modelos realísticos obtenidos poseen de 6 a 7 simetrías abelianas adicionales, lo cual se puede considerar una predicción del tipo de construcciones de teoría de cuerdas que estudio. Es necesario apuntar, no obstante, que no todas las simetrías *sobreviven* en la teoría a bajas energías, dado que algunas de las partículas cargadas bajo estas simetrías pueden adquirir valores de expectación no nulos en distintas etapas de la evolución temporal de los modelos; por ejemplo, dado que se trata de modelos supersimétricos, el rompimiento de esta SUSY puede provocar el rompimiento de algunas de estas simetrías. Asimismo, aspectos relacionados con la estabilidad de la geometría de los orbifolds empleados en la construcción de los modelos puede exigir establecer valores de expectación no nulos.

Con la finalidad de evaluar la evolución de los acoplamientos de las fuerzas fundamentales descritas por estos modelos, utilizo rutinas diseñadas en JAVA para considerar el desacoplamiento de las partículas exóticas de los modelos. Este desacoplamiento es un paso crucial, pues es en esta etapa en la que se define la estructura final de la teoría (supersimétrica) a bajas energías. Las partículas que son desacopladas son aquellas de tipo vectorial que permiten configuraciones con una o varias simetrías $U(1)$ adicionales no rotas. El procedimiento puede describirse como sigue: si existen partículas con ciertos números cuánticos bajo el grupo del SM y otras posibles $U(1)$ s y simultáneamente en el mismo modelo aparecen otras partículas con los números cuánticos exactamente opuestos, estas partículas pueden desarrollar masas grandes y no ser apreciadas en la física de bajas energías. Por lo tanto, es posible ignorarlas. Una vez definida la teoría efectiva, otra rutina JAVA permite determinar los coeficientes b supersimétricos de las funciones β , calculadas a un lazo, que son empleados en las EGR para conocer la evolución de todos los acoplamientos de cada modelo.

Algunos de los acoplamientos calculados corresponden al llamado “sector oculto”, que, en teorías supersimétricas con simetrías de norma no-abelianas “ocultas”, puede determinar de manera directa la escala de rompimiento de supersimetría en el sector observable de la teoría, $m_{3/2}$, mediante la escala de confinamiento del sector oculto, Λ_{Oculto} . Esta observación será empleada mas tarde.

En un principio, las observaciones de la mayoría de las teorías GUT, me hizo esperar que la escala de unificación ocurriera a alrededor de $10^{16-18} GeV$, como en el caso del MSSM.

Lo primero que hice es obtener los valores energéticos (μ) y de α^{-1} , en donde se da la unificación para cada modelo. Cabe señalar que la unificación no se da en un valor específico de μ (energía), sino en 3 ya que para cada modelo se forma un triángulo similar al caso MSSM (correspondientes a donde se unifican: $U(1)_Y - SU(2)_L$, $SU(2)_L - SU(3)_C$ y $SU(3)_C - U(1)_Y$). Por lo tanto, elaboré 3 gráficas α^{-1} vs M_{GUT} (donde M_{GUT} es el valor donde se da la unificación) que se muestran en la figura 6.2, con la finalidad de detectar la escala energética en donde la mayoría de los modelos se unifican y los valores de α^{-1} correspondientes a esta.

Sorprendentemente, la mayoría de los modelos mostraron un comportamiento de unificación en escalas energéticas mas bajas que $10^{16-18} GeV$.

Para poder identificar de manera exacta el número de modelos que muestran unificación en determinadas escalas energéticas, hice 3 histogramas del número de modelos vs energía, que se muestran en la figura 6.3.

Uno de mis resultados es que los modelos SUSY provenientes de compactificaciones de cuerdas difiere en el número simetrías abelianas adicionales.

En particular en ninguno de los modelos que analicé se poseen una clara unificación alrededor de $M_{GUT} = 10^{16-17} GeV$.

Lo siguiente que hice es detectar tanto en \mathbb{Z}_{6-I} como en \mathbb{Z}_{8-I} los modelos en donde se presenta una clara unificación i.e modelos donde ese triángulo antes mencionado en el cual se encuentran las rectas que describen la evolución de los acoplamientos es muy pequeño. Estos modelos que se muestran en las figuras 6.4 y 6.5 poseen una $M_{GUT} \sim 10^{11-14} GeV$, con valores de α_{GUT}^{-1} que varían de $\sim 2 - 19$, menores que el valor 8π que esperaba. En particular los modelos mostrados en la figura 6.4, muestran una clara unificación en $M_{GUT} \sim 10^{13} GeV$ con $\alpha^{-1} \sim 19$ y además poseen dos simetrías abelianas adicionales donde los valores a bajas energías de estas aproximadamente coinciden una con α_1^{-1} y la otra con α_2^{-1} , un resultado interesante ya que se pensaba que de haber 2 simetrías abelianas adicionales, ambas tendrían que coincidir aproximadamente con α_1^{-1} .

En la tabla 6.1 se ve que para los modelos en \mathbb{Z}_{8-I} existen 9 modelos que en general tienen solo 2 simetrías adicionales. Al analizarlos obtuve que estos se muestran una tendencia a la unificación en $10^{11-13} GeV$, donde en particular los dos valores de α^{-1} son similares al de $U(1)_Y$. Con la particularidad que estos modelo poseen una grupo de norma que es simétrico izquierda-derecha.

Posteriormente supuse que existe unificación en $\mu = 10^{18} GeV$ y el valor de $\alpha_{GUT}^{-1} \sim 25$, desde esa escala y con los valores de los coeficientes b obtuve la evolución de los acoplamientos hasta bajas energías ($1 TeV$). De la evolución de los acoplamientos pude obtener los valores de α^{-1} para cada interacción a bajas energías y los expresé en histogramas que se muestran en las figuras 6.8 y 6.9, para ver cuales eran los valores favorecidos. Estos valores favorecidos difieren de los valores del SM para el caso de $SU(2)$ y $SU(3)$ por 20, mientras que para $U(1)$ este lo hace por 35. Al aplicar este criterio al caso de $U(1)'$, su valor preferido está muy cerca del $U(1)$. Lo cual coincide con la mayoría de los modelos con más clara unificación, sin embargo este análisis no es confiable y , la suposición del valor de $\alpha_{GUT}^{-1} \sim 25$, es muy fuerte y hasta cierto punto arbitraria, cabe señalar que la motivación para utilizar este valor es que coincide con el caso del MSSM.

Todavía faltan muchos modelos por analizar en \mathbb{Z}_{8-I} (los orbifolds aún tiene mucho que decir), y la aparición de algunos modelos que presentan una clara unificación hace pensar que todavía pueden aparecer varios modelos que pudieran acercarse a los valores del SM a bajas energías o bien pudieran comportarse de manera similar a los modelos que obtuve con más clara unificación, es decir presentar una unificación en valores alrededor de $\mu \sim 10^{11-14} GeV$.

Posteriormente mediante el mecanismo de condensación de gauginos, obtuve los valores para el gravitino los cuales predominante están cerca de $10 TeV = 10^4 GeV$ como se muestra en la figura 6.11, y ya que no se a detectado a la LSP (Partícula supersimétrica mas ligera, LSP por sus siglas en inglés) en el LHC en la escala energética de $2 TeV$, se pudiera pensar que cuando el LHC llegue a energías de alrededor de $14 TeV$ en 2015-2016, se detectaría la LSP y tendría una

masa de alrededor 10 TeV , y uno de los candidatos para ser la LSP es precisamente el gravitino. La escala de rompimiento del sector oculto obtenida en esta tesis se ubica en una escala muy alta, que es imposible de alcanzar en la actualidad. En la tabla 6.2, se muestra los valores tanto del gravitino como de Λ_{oculta} , y si bien los valores para este último son similares en todos los casos $\sim 10^{13-14} \text{ GeV}$ (similar a los valores en donde se presenta con mas frecuencia la unificación), sin embargo, los valores para el gravitino son bastante variados, pero cabe señalar que para los modelos que aparecen en la figura 6.4 los valores del gravitino son $\sim 10^4 \text{ GeV}$.

Además de terminar de analizar los modelos en el sector \mathbb{Z}_{8-I} , para tener un análisis completo de estos modelos hace falta determinar en cada modelo la escala de rompimiento de SUSY para la cual se obtenga una unificación lo mas clara posible (cabe señalar que para los modelos antes mencionados, el cambio en la escala de rompimiento de SUSY, no altera de manera significativa su comportamiento de clara unificación, sin embargo la M_{GUT} disminuye un poco), y registrar el valor de la escala energética en donde esta se da y los valores de α^{-1} para cada interacción en una escala energética baja y compararla con los resultados experimentales. Otros resultados que me faltan obtener son los valores a bajas energías cuando se considera unificación en $\mu_{st} \sim 10^{18} \text{ GeV}$, variar α_{GUT}^{-1} , y buscar para que valores, las α_i^{-1} de los todos modelos a bajas energías coinciden con los valores a bajas energías del SM.

En las gráficas α^{-1} vs M_{GUT} que se muestran en la figura 6.2 se puede apreciar un comportamiento curioso, y es que los puntos que representan distintos modelos dan la impresión de que se agrupan en líneas rectas, este comportamiento aún no lo he podido interpretar. Me falta analizar los modelos restante de \mathbb{Z}_{8-I} y ver si efectivamente tienen este mismo comportamiento y a partir de ese momento hacer la interpretación comparando los modelos que aparecen en cada recta para encontrar alguna relación.

Apéndice A

Teoría de Grupos

El conjunto $A = \{a_i\}$ y la operación \cdot forman un grupo si y sólo si $\forall a_i \in A$

- $a_i \cdot a_j \in A$ (cerradura)
- $(a_i \cdot a_j) \cdot a_k = a_i \cdot (a_j \cdot a_k)$ (asociatividad)
- $\exists e \in A$ tal que $a_i \cdot e = e \cdot a_i = a_i$ (identidad)
- $\exists a_i^{-1} \in A$ tal que $a_i \cdot a_i^{-1} \cdot a_i = e$ (inverso)

Un ejemplo de grupo es $A = \mathbb{Z}$ con la suma como operación, $e = 0$ y $a^{-1} = -a$. Se puede restringir al grupo de \mathbb{Z}_n , donde la operación es la suma con módulo n . En este grupo, $g_i^{-1} = n - g_i$ y el elemento unidad es $e = 0$. \mathbb{Z} es un grupo infinito, mientras que el \mathbb{Z}_n es finito, con orden n . Ambos son grupos abelianos, lo que significa que $a_j \cdot a_i = a_j \cdot a_i$.

En física los grupos que mas interesan son aquellos donde actúan los elementos de A actúan en algunos elementos de un conjunto $b \in B$, $a(b) = b' \in B$, B puede ser por ejemplo el estado de un sistema, es decir una función de onda en mecánica cuántica. La operación $a_i \cdot a_j$ actúa como $(a_i \cdot a_j)(b) = a_i \cdot (a_j(b))$ y la identidad actúa como $e(b) = b$.

Un ejemplo de un grupo más sofisticado puede encontrarse cuando se usa una expansión de Taylor

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{1}{2}a^2 f'' + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = e^{a \frac{d}{dx}} f(x). \quad (\text{A.1})$$

El operador $T_a = e^{a \frac{d}{dx}}$ se llama el operador de traslación. Junto con la operación $T_a \cdot T_b = T_{a+b}$, forman el grupo traslacional $T(1)$, donde $T_a^{-1} = T_{-a}$. En las dimensiones N el Grupo $T(N)$ tiene los elementos $T_a = e^{a \cdot \nabla}$.

Un subconjunto $D \subset A$, es un subgrupo si y sólo si:

- $d_i \cdot d_j \in D$ para $\forall d_i, d_j \in D$
- $d_i^{-1} \in D$ para $\forall d_i \in D$

D es un subgrupo propio si y sólo si $D = A$ y $D = e$. Un subgrupo D es un subgrupo normal (invariable), si y sólo si $\forall a \in A$,

$$ada^{-1} \in D \text{ para } \forall g \in D \quad (\text{A.2})$$

Un grupo simple A no tiene ningún subgrupo normal propio. Un grupo semi simple A no tiene ningún subgrupo normal abeliano.

El Grupo unitario $U(n)$ se define por el conjunto de matrices complejas unitarias $n \times n$, U , es decir, matrices tales que $U^\dagger U = 1$ o $U^{-1} = U^\dagger$. Esto tiene la propiedad de que $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ al multiplicarlos por una matriz unitaria deja sin cambios los productos escalares:

$$x \cdot y \equiv x^\dagger y' = (Ux)^\dagger Uy = x^\dagger U^\dagger Uy = x^\dagger y = x \cdot y. \quad (\text{A.3})$$

Ahora si además se requiere que $\det(U) = 1$ las matrices que forman el grupo unitario especial $SU(n)$. Sea $U_i, U_j \in SU(n)$, entonces

$$\det(U_i U_j^{-1}) = \det(U_i) \det(U_j^{-1}) = 1. \quad (\text{A.4})$$

Entonces $U_i U_j^{-1} \in SU(n)$, es decir, $SU(n)$ es un subconjunto propio de $U(n)$. Sea $V \in U(n)$ y $U \in SU(n)$, entonces $VUV^{-1} \in SU(n)$ porque:

$$\det(VUV^{-1}) = \det(V) \det(U) \det(V^{-1}) = \frac{\det(V)}{\det(V)} \det(U) = 1. \quad (\text{A.5})$$

En otras palabras, $SU(n)$ es también un subgrupo normal de $U(n)$. Un coconjunto (izquierdo) de un subgrupo $D \subset A$ es un conjunto $\{ad : d \in D\}$ donde $a \in A$ y un coconjunto (derecho) de un subgrupo $D \subset A$ es un conjunto $\{da : d \in D\}$ donde $a \in A$. Para los subgrupos normales D los cocojuntos derechos e izquierdos coincide y forman el coconjunto A/D que tiene los elementos del grupo $\{gh : \in hH\} \forall a \in A$ y la operación binaria $*$ con $ad * ad \in \{d(a \cdot a) : d \in D\}$. El producto directo de los grupos A y D , $A \times D$, se define como los pares ordenados (a, d) donde $a \in A$ y $d \in D$, con la operación $(a_i, d_i) \cdot (a_j, d_j) = (a_i \cdot a_j, d_i \cdot d_j)$. $A \times D$ es entonces un grupo, A y D son subgrupos normales de $A \times D$.

El grupo de norma $SU(3)_c SU(2)_L \times U(1)_Y$ es un ejemplo de un producto directo. Los productos directos son estructuras triviales ya que no hay ninguna interacción entre los subgrupos.

Una representación de un grupo A en un espacio vectorial V es un mapeo $z : A \rightarrow AL(V)$, donde $AL(V)$ es el grupo lineal general en V , es decir las matrices invertibles del campo V , tal que para $\forall a_i, a_j \in A$, $z(a_i a_j) = z(a_i) z(a_j)$ (Homeomorfismo).

Para $U(1)$ la transformación $e^{i\chi\alpha}$ es la representación fundamental que puede ser utilizada en las funciones de onda $\psi(x)$ éstas forman un espacio vectorial en una dimensión sobre los números

complejos. Para $SU(2)$ la transformación $e^{i\alpha_i\sigma_i}$, con σ las matrices de Pauli, es la representación fundamental, que puede ser aplicada a dobletes débiles $\psi = (\nu_l, l)$. Dos representaciones z y z' de A en V y V' son equivalente si y sólo si $\exists K : V \rightarrow V'$, que es uno a uno, por ejemplo para $\forall a \in K, Kz(a)K^{-1} = z'(a)$. Una representación irreducible z es una representación donde no hay ningún subespacios propios $R \subset V$ que esté cerrado en el grupo, es decir, no hay ningún $R \subset V$ tal que para $\forall r \in R, \forall a \in A$ se tiene $z(a)r \in R$. Si $z(a)$ donde $a \in A$ en un espacio vectorial V como una matriz. Si $z(a)$ se puede descomponer en $z_1(a)$ y $z_2(a)$ tal que $\forall v \in V$, entonces z es reducible.

$$z(a)v = \begin{pmatrix} z_1(a) & 0 \\ 0 & z_2(a) \end{pmatrix} v \quad (\text{A.6})$$

para $\forall v \in V$, entonces z es irreducible. $T(R)$ es el índice Dynkin de la representación R (regular) en términos de las matrices T_a , dadas por $Tr[T_a, T_b] = T(R)\delta_{ab}$. $C(R)$ es el Casimir invariante dado por $C(R)\delta_{ij} = (T^a T^a)_{ij}$

Un grupo de Lie A es una variedad suave de dimensión finita n, C^∞ , es decir, $\forall a \in A, a$ puede ser mapeada localmente a \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , el grupo de multiplicación y la inversión son funciones suaves, lo que significa que dado $a(x), a'(x) \in A, a(x') \cdot a(x') = a''(y)$ donde $y(x')$ es analítica y $a^{-1}(x) = a'(x')$ donde un $x'(a)$ es analítica. En términos de un grupo de Lie A actuando en un espacio vectorial $V, \dim(V) = m$, esto significa que se puede escribir el mapeo $A \times V \rightarrow V$ para $a \in V$ cuando $a_i \rightarrow a'_i = f_i(a_i, x_j)$ donde f_i es analítica en a_i y x_j . Además f_i debe tener una inverso.

El grupo de traslación $T(1)$ con $a(x) = e^{x\frac{d}{da}}$, es un grupo de Lie ya que $a(x) \cdot a(x) = a(x+x')$ y $x+x'$ es analítica. Se puede escribir $f(a, x) = a+x$. Los $SU(n)$ son grupos de Lie ya que tienen una representación fundamental $e^{i\alpha\lambda}$ donde λ es un conjunto de matrices $n \times n$ y $f_i(a, \alpha) = [e^{i\alpha\lambda}x]_i$. Por la analiticidad siempre se puede construir la parametrización así que $a(0) = e$ o $a_i = f_i(a_i, 0)$. Mediante una transformación infinitesimal dx_i entonces se obtiene la siguiente expansión de Taylor

$$a'_i = a_i + da_i = f_i(a_i, dx_i) = f_i(a_i, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} da_j + \dots = a_i + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{A.7})$$

Esta es la transformación por el elemento del grupo que en la parametrización se deja a dx_j como la identidad. Si se deja que F sea una función que va del espacio del vectorial V a los reales \mathbb{R} o a los números complejos \mathbb{C} , entonces la transformación del grupo definida por da_j cambia F como

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_i} da_i = \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \equiv dx_j X_j F \quad (\text{A.8})$$

donde los operadores definidos como

$$X_j \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial a_i} \quad (\text{A.9})$$

son llamados los generadores n del grupo de Lie. Estos generadores X que definen la acción del grupo de Lie en una determinada representación como las X son solo parámetros.

Teoremas de mentira Lie

- Para un grupo de Lie $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ es analítico
- Los generadores X_i satisfacen $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$, donde C_{ij}^k son las constantes de estructura.
- $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ y $C_{ij}^k C_{kl}^m + C_{jl}^k C_{ki}^m + C_{li}^k C_{kj}^m = 0$

Un álgebra A en un campo es un espacio vectorial lineal con una operación binaria $:A \times A \rightarrow A$. El espacio vectorial \mathbb{R}^3 junto con el producto cruz constituye un álgebra. Un álgebra de Lie L es un álgebra donde el operador binario $[\cdot, \cdot]$, son llamados corchetes de Lie, tiene las propiedades que para $x, y, z \in L$ y $a, b \in \mathbb{R}(\text{o}\mathbb{C})$:

- $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ y $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$ (asociatividad)
- $[x, y] = -[y, x]$ (anti conmutacion)
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identidad de Jacobi)

De los teoremas de Lie los generadores de un grupo de Lie n -dimensional forman un álgebra de Lie n -dimensional. La representación fundamental de un grupo basado en matriz anterior. Estas representaciones tienen la menor dimensión posible. Otra representación importante es la adjunta, esta consiste en las matrices:

$$(M_i)_j^k = -C_{ij}^k \quad (\text{A.10})$$

donde C_{ij}^k son las constantes de la estructura. De la identidad de Jacobi se tiene $[M_i, M_j] = C_{ij}^k M_k$, lo que significa que la representación adjunta cumple la misma álgebra como la representación fundamental. La dimensión de la representación fundamental n para $SO(n)$ y $SU(n)$ siempre es menor que el adjunto, que equivale a los grados de libertad, $\frac{1}{2}n(n-1)$ y $n^2 - 1$ respectivamente [11].

Bibliografía

- [1] H. P. Nilles, S. Ramos-Sanchez, P. K. Vaudrevange, and A. Wingerter, *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012), 1363–1380, [1110.5229].
- [2] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, USA, 2009.
- [3] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, USA, 1984.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics*, Herman and John Wiley & Sons. Inc., France, 1977.
- [5] J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., USA, 1994.
- [6] H. Wittig, *An introduction to quantum field theory*, Deutsches Elektron-Synchrotron, DESY, Hamburg, Germany, 2003.
- [7] J. Polchinski, *String theory vol. ii: Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press, New York, USA, 2005.
- [8] G. Arutyunov, *Classical field theory*, Institute for Theoretical Physics and Spinoza Institute, Utrecht University, Netherlands, 1994.
- [9] B. Ydri, *Quantum field theory and particle physics*, Université d Annaba, Annaba, Algeria, 2013.
- [10] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton University, USA, 2003.
- [11] M. D. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Perseus Books, USA, 1995.
- [12] A. Nelson, *Notes on feynman diagrams*, Alex Nelson Notebook (notebk), USA, 2008.
- [13] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, John Wiley & Sons Inc., USA, 1987.
- [14] A. Lesne, World Scientific Review (2008).

- [15] L. H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, UK, 1986.
- [16] M. Srednicki, *Quantum field theory ii*, Cambridge University Press, UK, 2007.
- [17] G. 't Hooft, *The conceptual basis of quantum field theory*, www.staff.science.uu.nl/~hooft101/lectures/basisqft.pdf, 2010.
- [18] M. Schwartz, *Introduction to quantum field theory*, isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic521209.files/QFT-Schwartz.pdf, 2008.
- [19] D. Bailin and A. Love, *Introduction to gauge field theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, USA, 1993.
- [20] M. Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory*, Oxford University Press, USA, 2005.
- [21] M. D. Schwartz, *Quantum field theory and the standard model*, Cambridge University Press, USA, 2013.
- [22] J. C. Romao, *Advanced quantum field theory*, porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/tca.pdf, 2013.
- [23] G. C. Nayak, *Eur.Phys.J.* **C64** (2009), 73–79, [0812.5054].
- [24] M. Buchler and G. Colangelo, *Eur.Phys.J.* **C32** (2003), 427–442, [hep-ph/0309049].
- [25] M. E. Peskin, (1997), hep-ph/9705479.
- [26] S. P. Martin, (1997), hep-ph/9709356.
- [27] M. A. Morrison, *The joy of quantum physics, chapter 1*, eg.bucknell.edu/~kouts/Ph332/Text/Chap1_JQPMaster.pdf, 2010.
- [28] H. Georgi, *Lie algebras in particle physics*, Westview Press, USA, 1999.
- [29] S. Weinberg, *The quantum theory of fields vol. iii: Supersymmetry*, Cambridge University Press, USA, 2000.
- [30] M. Bertolini, *Lectures on supersymmetry, lecture 11*, SISSA, ITALIA, 2014.
- [31] H. M.-K. . A. Wiedemann, *Supersymmetry: An introduction with conceptual and calculational details*, World Scientific, USA, 1987.
- [32] D. B. . A. Love, *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, USA., 1999.
- [33] S. K. Vempati, (2012), 1201.0334.

- [34] C. Csáki, *Mod.Phys.Lett.* **A11** (1996), 599, [hep-ph/9606414].
- [35] P. Langacker, *Phys.Rept.* **72** (1981), 185.
- [36] J. R. Ellis, (2002), hep-ph/0211168.
- [37] N. Mohapatra, (1997), 601–657, hep-ph/9801235.
- [38] J. Thorén, *Grand unified theories: $Su(5)$, $so(10)$ and supersymmetric $su(5)$* , masters' thesis, Lund University, Sweden, 2012.
- [39] W.-L. Lin, *Bull. National Taiwan Normal University* **35** (1990), 287–310.
- [40] A. Zaloznik, *Seminar 4: Kaluza-klein theory*, 2012.
- [41] M. Isachenkov, *Additional $u(1)$ -boson in string phenomenology*, www.desy.de/f/students/2008/reports/isachenkov.pdf, 2008.
- [42] P. Langacker, *AIP Conf.Proc.* **1200** (2010), 55–63, [0909.3260].
- [43] P. Langacker, eConf **C810824** (1981), 823–865, <http://lss.fnal.gov/conf/C810824>.
- [44] M. von Steinkirch, *The gauge group $su(5)$ as a simple gut*, State University of New York, NY, USA, 2010.
- [45] F. I. Sarabia-Ruiz, *Aspectos geométricos de la teoría de cuerdas*, masters' thesis, UNAM, 2013, <http://stringpheno.fisica.unam.mx/thesis/FrankSarabia.pdf>.
- [46] H. Ooguri and Z. Yin, (1996), 5–81, hep-th/9612254.
- [47] D. Bailin and A. Love, *Phys.Rept.* **315** (1999), 285–408.
- [48] MIT-Open-Courseware, *Introduction to orbifolds*, 2011, Sample Student final paper of the MIT Seminar in Topology.
- [49] A. Adem and M. Klaus, *Lectures on orbifolds and group of cohomology*, www.math.ubc.ca/adem/hangzhou.pdf, 2008.
- [50] Y.-Y. Wu, (1997), hep-th/9706040.
- [51] H. P. Nilles, (2004), 397–433, hep-th/0402022.
- [52] L. E. I. nez and A. M. Uranga, *String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology*, Cambridge University Press, UK, 2012.