UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

TRAYECTORIAS HAMILTONIANAS EN GRÁFICAS DE CAYLEY

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
ANAHY SANTIAGO ARGUELLO

DIRECTOR DE LA TESINA
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. 11 DE AGOSTO DE 2014.

Índice general

Introducción.

Encontrar ciclos o trayectorias hamiltonianas en gráficas es un problema complicado que es de interés en Combinatoria, Ciencias de la Computación y diversas aplicaciones. Es uno de los problemas NP clásicos y, por tanto, no se espera que tenga una solución sencilla. En 1969 se puso gran atención en la conjetura de Lovász que nos dice que toda gráfica vértice transitiva contiene una trayectoria hamiltoniana, es ahí donde las gráficas de Cayley de grupos rectangulares toman una importancia significativa ya que, bajo ciertas condiciones sobre el conjunto de conexión se tiene que una gráfica vértice transitiva es isomorfa a una gráfica de Cayley de un grupo rectangular.

En el primer capítulo del trabajo se dan las definiciones básicas de álgebra moderna como de teoría de gráficas para poder entender los resultados posteriores. En el segundo capítulo se muestra con un poco de más detalle la conjetura de Lovász y se dan resultados combinatorios para que una gráfica de Cayley sea hamiltoniana; además se proporcionan dos resultados que son de vital importancia para calcular cotas superiores para la cardinalidad del conjunto generador de tal forma que la gráfica de Cayley relacionada sea hamiltoniana. En el tercer capítulo se definen a detalle los grupos rectangulares así como se enuncian distintas proposiciones que los caracterizan. En el último capítulo se dan diversos resultados que describen, desde distintos puntos de vista a las gráficas de Cayley de grupos rectangulares y es en este punto donde se relacionan las gráficas vértice transitivas con las gráficas de Cayley de grupos rectangulares. En las conclusiones se concatenan de manera general las distintas proposiciones para la clasificación de gráficas de Cayley, dependiendo de las propiedades de los grupos o subgrupos que las generan.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Para más información acerca de gráficas se puede consultar [5], y para semigrupos se puede consultar [8].

Definición 1.0.1 Una **digráfica** $\Gamma = (V, E)$ es un conjunto finito $V = V(\Gamma)$ de **vértices**, junto con una relación binaria $E = E(\Gamma)$ sobre V. Los elementos $e = (u, v)$ de E son llamados **arcos** o **aristas** de Γ, u es llamado **tallo** de e y v es llamado la **cabeza** de e. Para una digráfica Γ el **ingrado**, $d^-_\Gamma(v)$, de un vértice v de Γ es el número de arcos con cabeza v, el **exgrado**, $d^+_\Gamma(v)$, de v es el número de arcos con tallo v.

Definición 1.0.2 Si $\Gamma = (V, E)$ es una digráfica, se denomina **lazo** a una arista cuya cabeza y tallo es el mismo vértice. Dos o más aristas con el mismo par de extremos (cabezas y tallos) se llaman **aristas múltiples**. Una digráfica sin lazos y sin aristas múltiples se denomina **digráfica simple**.

En este trabajo no consideraremos digráficas con arcos múltiples ni con lazos.

Definición 1.0.3 La **gráfica subyacente sin dirección** de Γ es la gráfica con el mismo conjunto de vértices V y una arista sin dirección $\{u, v\}$ por cada arista (u, v) de Γ. Una digráfica es **conexa** si su gráfica subyacente sin dirección es conexa.

Hay que aclarar que a lo largo del trabajo cuando aparezca la palabra gráfica nos referimos a la gráfica subyacente sin dirección de alguna digráfica.

Definición 1.0.4 Sea $\Gamma = (V, E)$ una digráfica, sea $A \subseteq V$, entonces decimos que H es la **digráfica inducida por** A si $H = (A, E')$, donde $E' \subseteq E$, es decir, E' es una restricción de E con únicamente extremos en A. H es denotada como $\Gamma[A]$.

Definición 1.0.5 Sean (V_1, E_1) y (V_2, E_2) dos digráficas; un mapeo $\phi : V_1 \to V_2$ es un **homomorfismo de gráficas (digráficas)** si $(u, v) \in E_1$ implica que $(\phi(u), \phi(v)) \in E_2$. Éste es llamado **isomorfismo de gráficas (digráficas)** si es biyectivo y ϕ, ϕ^{-1} son homomorfismos. Un homomorfismo de gráficas $\phi : (V, E) \to (V, E)$ es llamado **endomorfismo** y un isomorfismo de gráficas sobre $\Gamma = (V, E)$ se llama **automorfismo**. Denotaremos al conjunto de todos los endomorfismos de una gráfica Γ como $End(\Gamma)$ y al conjunto de todos los automorfismos de Γ como $Aut(\Gamma)$.

Todos los conjuntos que trataremos son finitos.

Definición 1.0.6 Un **grupoide** es un conjunto no vacío G y una operación binaria sobre G. Un **semigrupo** es un grupoide G que es asociativo. Un **monoide** es un semigrupo G que contiene un elemento identidad $1_G \in G$. Un **grupo** es un monoide G, tal que para todo $a \in G$, existe un inverso a^{-1} tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1_G$.

Definición 1.0.7 Sea S un semigrupo finito y sea $C \subseteq S$ un subconjunto. La **digráfica de Cayley** $C(S, C)$ es la digráfica que tiene como conjunto de vértices a S. Dos vértices $u, v \in S$ están unidos por una arista dirigida de u a v si y sólo si existe $c \in C$ tal que $u = cv$. El conjunto C es llamado **conjunto de conexión** de $C(S, C)$. Cada arista (u, v) está etiquetada para denotar que corresponde a $c \in C$ si $u = cv$. Una digráfica (V, E) es llamada **digráfica de grupo (semigrupo)** si existe un grupo (semigrupo) S y un conjunto de conexión $C \subseteq S$ tal que (V, E) es isomorfa a la digráfica de Cayley $C(S, C)$.

Si C genera a S, donde S es un grupo, la digráfica de Cayley $C(S, C)$, etiquetada de la foma que indicamos en la definición anterior, determina una regla de correspondencia entre la digráfica y el grupo que conforma su conjunto de vértices, por lo que, dada una digráfica de Cayley se puede determinar de manera única a S. Sin embargo, las etiquetas son necesarias para que la unicidad se de. La siguiente proposición da un criterio para saber si una digráfica es una digráfica de grupo.

Proposición 1.0.8 ***(Teorema de Sabidussi)****([18]). Una digráfica $\Gamma = (V, E)$ es una digráfica de un grupo G si y sólo si el grupo de automorfismos $Aut(\Gamma)$ contiene un subgrupo Δ isomorfo a G tal que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V$ existe $\sigma \in \Delta$ tal que $\sigma(u) = v$*

Para una digráfica de Cayley $C(S, C)$ denotamos a $End(C(S, C))$ por $End_C(S)$ y $Aut(C(S, C))$ por $Aut_C(S)$.

Definición 1.0.9 Un elemento $f \in End_C(S)$ es llamado **endomorfismo que preserva color** si $cx = y$ implica que $cf(x) = f(y)$ para todo $x, y \in S$ y $c \in C$. El conjunto de todos los endomorfismos que preservan color de $C(S, C)$ se denota como $ColEnd_C(S)$ y el conjunto de todos los automorfismos que preservan color de $C(S, C)$ por $ColAut_C(S)$.

De la misma forma que para digráficas, cuando nos referimos a una gráfica de Cayley, significa que ésta es la gráfica subyacente sin dirección de alguna digráfica de Cayley.

Definición 1.0.10 La gráfica de Cayley $C(S, C)$ es **vértice transitiva** si para cualesquiera dos vértices $x, y \in S$, existe $f \in Aut_C(S)$ tal que $f(x) = y$. Las nociones de $ColAut_C(S)$ **vértice transitiva**, $ColEnd_C(S)$ **vértice transitiva** y $End_C(S)$ **vértice transitiva** se definen de manera similar.

Como un resultado inmediato de la proposición 1.0.7 podemos concluir que toda gráfica de Cayley de un grupo es vértice transitiva.

Definición 1.0.11 Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un subgrupo de G, denotado como $G > S$, si $s \in G$ implica que $s^{-1} \in G$ y $s, t \in G$ implica que $st \in G$.

Definición 1.0.12 Sea N un subgrupo de un grupo G. Decimos que N es **normal** a G, denotado como $N \lhd G$, si $xN = Nx$ para todo $x \in G$, o de manera equivalente, si $xNx^{-1} \subseteq N$ para todo $x \in G$. Si G es abeliano, entonces todo subgrupo de G es normal. Los subgrupos 1 y G son siempre normales en G, si éstos son los únicos grupos normales en G, entonces decimos que G es **simple**.

Si nos referimos a un subgrupo S de un grupo G en el que no necesariamente hay contención propia, lo denotaremos como $G \geq S$, de manera análoga, si nos referimos a un subgrupo normal N que no necesariamente está contenido propiamente en G, lo denotaremos como $N \trianglelefteq G$.

Definición 1.0.13 Decimos que una serie de subgrupos $G = G_0 > G_1 >...> G_r = 1$ de un grupo G es una **serie de composición** de G si $G_{i+1} \lhd G_i$ para toda i y cada cociente sucesivo $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ es simple. La serie de composición anterior se dice que tiene longitud r. Los cocientes sucesivos de una serie de composición son llamados factores de composición de la serie.

Teorema 1.0.14 *[1] Todos los grupos finitos tienen series de composición.*

Definición 1.0.15 Una serie de subgrupos $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_r = 1$ de un grupo G es llamada **serie subnormal** de G si $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ para toda i, una serie subnormal es llamada **serie normal** si además $G_i \trianglelefteq G$ para toda i. Una **serie central o principal** de G es una serie normal de G sin términos repetidos y con la condición adicional que ningún subgrupo normal de G está entre los términos de la serie. Los **factores principales o centrales** son los cocientes sucesivos de la serie.

Teorema 1.0.16 *[1] Todo grupo finito tiene series centrales.*

Capítulo 2

Caminos hamiltonianos en gráficas de Cayley.

2.1. La conjetura de Lovász.

Encontrar ciclos hamiltonianos en gráficas no es un problema sencillo, es uno de los problemas clásicos NP-completos, por lo tanto, no esperamos que tenga una solución sencilla. Después de mucho esfuerzo a lo largo de los años, ha habido un pequeño progreso en resolver de forma total la conjetura. Algunos autores han mostrado dudas en la validez de la conjetura ([2], [19]).

Presentaré algunos resultados importantes que imponen ciertas condiciones en el conjunto de conexión de una gráfica de Cayley para que ésta sea hamiltoniana.

Los resultados de este capítulo son válidos para las gráficas de Cayley $C(G, C)$ donde G es un grupo finito y C un conjunto generador simétrico, es decir, tal que $C = C^{-1}$, además, tendremos la restricción de que las únicas aristas existentes serán de la forma (g, gc), $(g, gc^{-1}) \in G^2$ donde $c \in C$. Claramente $C(G, C)$ es d-regular, donde $d = |C|$.

Definición 2.1.1 Una **trayectoria hamiltoniana** en una gráfica Γ es una trayectoria que pasa por todos los vértices una sola vez. Un **ciclo hamiltoniano** es una trayectoria hamiltoniana cerrada.

Conjetura de Lovász 2.1.2 *([12]) Toda gráfica vértice transitiva conexa contiene una trayectoria hamiltoniana.*

2.2. Condiciones combinatorias para que una gráfica sea hamiltoniana.

Definición 2.2.1 Sea S un semigrupo. Un elemento $\alpha \in S$ es llamado **involución** si $\alpha^2 = 1$.

Lema 2.2.2 *[17] Sea G un grupo finito generado por tres involuciones α, β, γ. Suponga que $\alpha\beta = \beta\alpha$. Entonces, la gráfica de Cayley $C(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Para todo $z \in G$ y para todo $X \subset G$, definimos

$$\partial_z(X) = \{g \in G - X : g = xz,\, x \in X\}.$$

Denotamos $H = <\beta, \gamma>$ un subgrupo de G de orden $|H| = 2m$. El orden de H es par ya que un subgrupo de él es $<\beta>$ y éste tiene orden dos, por ser β una involución, entonces, por el teorema de Lagrange, dos tiene que dividir al orden de H, por lo que éste tiene que ser un número par.

Sea $X_1 = H$, como H es un grupo diédrico, $C(X_1, \{\beta, \gamma\})$ contiene un ciclo hamiltoniano;

$$1 \to \beta \to \beta\gamma \to \beta\gamma\beta \to \beta\gamma\beta\gamma \to ... \to (\beta\gamma)^{m-1}\beta \to (\beta\gamma)^m = 1. \; (*)$$

Construiremos un ciclo hamiltoniano en $C(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ por inducción. En el paso i obtenemos un ciclo que expande el conjunto $X_i \subset G$. Aún más; cada X_i satisface la condición $\partial_\beta(X_i) = \partial_\gamma(X_i) = \emptyset$. Ésto es equivalente a decir que cada X_i es la unión de clases izquierdas de H. Por definición de H, $\partial_\beta(X_1) = \partial_\gamma(X_1) = \emptyset$, lo cual establece la base inductiva.

Supongamos que existe un conjunto X_i como el descrito anteriormente; si $\partial_\alpha(X_i) = \emptyset$, se tiene que el ciclo obtenido es generador y $X_i = G$, lo cual termina la demostración. De otra manera existe $y \in \partial_\alpha(X_i) \subset G - X_i$. Hay que notar que $yH \cap X_i = \emptyset$ ya que si no, $yh = x \in X_i$, para algún $h \in H$. Ésto implica que $y = xh^{-1} \in X_i$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Sea $X_{i+1} = X_i \cup yH$, claramente, $\partial_\beta(X_{i+1}) = \partial_\gamma(X_{i+1}) = \emptyset$. Ya que $y = x\alpha$, $x = y\alpha \in X_i$ y, por inducción, x está en un ciclo que expande a X_i. Entonces x debe estar conectada a $x\beta$ y $x\gamma$, como $x\alpha = y \notin X_i$. Considera el ciclo en yH obtenido al multiplicar el ciclo (*) por y. Recordemos que $\alpha\beta = \beta\alpha$, esto implica que $x\beta\alpha = y\beta$. Remueve las aristas $(x, x\beta)$ y $(y, y\beta)$ del ciclo en X_i y en yH respectivamente; ésto nos da un ciclo hamiltoniano que se expande a X_{i+1}. $\square$

Lema 2.2.3 *[15] Sea G un grupo finito generado por una involución β y un elemento α. Sea $\gamma = \beta^\alpha = \alpha^{-1}\beta\alpha$. Entonces la gráfica de Cayley $C(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Usaremos el mismo procedimiento que utilizamos para demostrar el lema anterior, pero en este caso el paso inductivo tiene más casos a considerar. Como antes, sea $H = <\alpha, \beta> \subset G$. Sea $X_1 = H$, asumimos que $C(G, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ restringida a X_i contiene un ciclo hamiltoniano C_i y $\partial_\beta(X_i) = \partial_\gamma(X_i) = \emptyset$.

Decimos que un elemento del grupo G tiene etiqueta α si el elemento es de la forma $b\alpha$ con $b \in G$. De forma análoga, definimos que un elemento en G tiene etiquetas β ó γ. Al dotar a C_i de una orientación, tomaremos en cuenta las siguientes reglas de etiquetación; niguna etiqueta α precede a una etiqueta γ o sigue de una etiqueta β, de la misma manera, ninguna etiqueta α^{-1} precede de una etiqueta β o sigue de una etiqueta γ. Estas reglas de etiquetación se deben a que si ocurriera cualesquiera de los casos mencionados, α sería una involución y caeríamos en el lema anterior. Por lo tanto, vamos a suponer que α no es una involución.

Debido a que α no es su propio inverso, debemos considerar los conjuntos $\partial_\alpha(X_i)$ y $\partial_{\alpha^{-1}}(X_i)$. Si $\partial_\alpha(X_i) = \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) = \emptyset$, entonces $X_i = G$ y ya acabamos con la demostración. Supongamos que $\partial_\alpha(X_i) \neq \emptyset$, entonces existe $y = x\alpha \in \partial_\alpha(X_i) \subset G - X_i$ donde $x \in X_i$. Sea $X_{i+1} = X_i \cup yH$, hacemos el mismo análisis de la prueba anterior y concluimos que existe C_{i+1}, ciclo hamiltoniano que extiende a X_i. Lo único que falta demostrar es que las condiciones de etiquetamiento establecidas se cumplen para C_{i+1}.

Como x tiene etiqueta α^{-1} y está conectado a un elemento y con etiqueta α, el otro elemento al que está conectado tiene etiqueta β ó γ. Supongamos que x está conectada a un elemento con etiqueta β, en este caso, los ciclos C_i en X_i y R en yH están conectados por el ciclo:

$$x \to y = x\alpha \to y\gamma = x\alpha\gamma \to x\alpha\gamma\alpha^{-1} \to x\alpha\gamma\alpha^{-1}\beta = x.$$

Entonces podemos unir los dos ciclos, removemos las aristas $(x, x\beta)$ y $(y, y\gamma)$ de la unión de los dos ciclos $C_i \cup R$ y agregamos las aristas (x, y) y $(y\beta, y\gamma)$. Claramente, el ciclo resultante es hamiltoniano en la gráfica restringida a X_{i+1}. Notamos que C_{i+1} hereda la orientación de C_i, debido a que las etiquetas de R son todas involuciones β y γ, se puede obtener una orientación adecuada.

Ahora supongamos que uno de los vértices adyacentes a x tiene etiqueta γ en C_i. Por las condiciones de etiquetación, la etiqueta α no puede preceder a γ y la etiqueta α^{-1} no puede seguir de la etiqueta γ. Sin embargo, en cualquier orientación que le demos a C_i estos casos suceden, por lo cual debemos descartar este caso. Terminamos de analizar el caso $y = x\alpha$.

Para el caso $y = x\alpha^{-1} \in \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) \subset G - X_i$, como $\beta = \alpha\gamma\alpha^{-1}$, podemos analizar los casos de la misma manera, intercambiando los roles de β con γ y α con α^{-1}. Note que las condiciones de etiquetamiento siguen siendo las mismas. Con ésto, terminamos las posibilidades.

$\square$

Ejemplo 1 *Sea $G = S_n$ y sea $\alpha = (12...n)$, $\beta = (12)$ y $\gamma = (23)$. Se observa que se cumplen todas las condiciones del lema anterior, entonces la gráfica de Cayley $C(S_n, \{\alpha, \beta, \gamma\})$ contiene un ciclo hamiltoniano. De hecho, se sabe que la subgráfica $C(S_n, \{\alpha, \beta\})$ es también hamiltoniana [7].*

Lema 2.2.4 *(Rankin) Sea G un grupo finito generado por dos elementos α y β, tal que $(\alpha\beta)^2 = 1$. Entonces la gráfica de Cayley $C(G, \{\alpha, \beta\})$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Otra vez utilizaremos el mismo método inductivo con una condición simple de etiquetamiento. Sea $H = <\beta>$ y $X_1 = H$, sabemos que si $\partial_\alpha(X_i) = \partial_{\alpha^{-1}}(X_i) =$, entoces $X_i = G$ y acabamos. Sabemos, por inducción, que la gráfica de Cayley generada por X_i contiene un ciclo hamiltoniano C_i; nuestra condición de etiquetamiento será que C_i contiene únicamente etiquetas β y α^{-1} ya que de otro modo caeríamos en el lema anterior ya que α sería una involución.

La base inductiva es obvia. Suponemos que $\partial_\alpha(X_i) \neq \emptyset$, entonces existe $y = x\alpha \in \partial_\alpha(X_i) \in G - X_i$. Note que el ciclo x en el ciclo C_i contenido en la gráfica inducida por X_i no puede tener como vecino un vértice etiquetado con α^{-1}, ya que de esta forma, se tendría contenida la arista $(y, x) \in C_i$, lo cual nos lleva a una contradicción ya que $y \notin X_i$. Tampoco puede tener como vecinos a los etiquetados por β^{-1} y α por las condiciones de etiquetamiento. Por tanto, el único vecino posible para x es uno con etiqueta β, por lo tanto, la arista $(x\beta^{-1}, x) \in C_i$. Ahora consideraremos el ciclo hamitoniano R en la gráfica de Cayley inducida por yH. Observe que:

$$x \to x\alpha = y \to x\alpha\beta = y\beta \to x\beta^{-1} = x\alpha\beta\alpha \to x.$$

es un ciclo que conecta a C_i con R. Si removemos las aristas $(x\beta^{-1}, x)$ y $(y, y\beta)$ y agregamos las aristas (x, y) y $(y\beta, x\beta^{-1})$ obtenemos el ciclo hamiltoniano C_{i+1} en $X_{i+1} = X_i \cup yH$. C_{i+1} hereda la orientación de C_i, por el mismo análisis que en el lema anterior, C_{i+1} respeta las reglas de etiquetación.

En el caso cuando $y = x\alpha^{-1} \notin X_i$, procederemos intercambiando los papeles de la misma forma que en el lema anterior. Ésto termina las posibilidades y la demostración. $\square$

Ejemplo 2 *Sea $G = S_n$, $\alpha = (12...n)$, $\beta = (23...n)$. Se puede verificar que $\alpha\beta^{-1} = (1n)$ es una involución. Por el lema anterior, la gráfica de Cayley $C(S_n, \{\alpha, \beta\})$ contiene un ciclo hamiltoniano. Esta gráfica es importante ya que se ha conjeturado que tiene el diámetro de mayor longitud de todas las gráficas de Cayley de S_n [6].*

2.3. Acotamiento del conjunto de conexión de una gráfica de Cayley

El siguiente lema de reducción nos será útil para la demostración del teorema más importante de esta sección.

Lema 2.3.1 *[15] Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal a él $H \triangleleft G$. Suponga que $S = S_1 \bigcup S_2$ es un conjunto generador de G, tal que, $S_1 \subset H$, $<S_1> = H$ y la proyección S_2' de S_2 sobre $\frac{G}{H}$ genera a $\frac{G}{H}$. Supongamos que $C_1 = C(H, S_1)$ y $C_2 = C(\frac{G}{H}, S_2')$ contienen trayectorias hamiltonianas. Entonces $C = (G, S)$ también contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Sea $C(G, S)$ una gráfica de Cayley que contiene una trayectoria hamiltoniana. Por vértice transitividad en $C(G, S)$, podemos reordenar la trayectoria de tal manera que comience en el vértice $g \in G$.

Sea $k = [G : H] =|\frac{G}{H}|$, y sea $g_1 = 1 \in G$. Considera la trayectoria hamiltoniana en la gráfica de Cayley $C(\frac{G}{H}, S_2')$:

$$H = Hg_1 \to Hg_2 \to Hg_3 \to ... \to Hg_k.$$

Ahora procederemos por inducción de manera similar al lema 2.2.3. Fija una trayectoria hamiltoniana en la clase derecha Hg_1, de tal manera que 1 es el vértice inicial. Suponga que h_1g_1 es su vértice final, añade la arista (h_1g_1, h_1g_2) a $C(G, S)$, considera la trayectoria hamiltoniana en la clase Hg_2

que tiene como vértice inicial h_1g_2 y vértice final a h_2g_2. Repite hasta que la trayectoria resultante tenga como vértice final a h_kg_k. Ésto finaliza la construcción y demuestra el lema. $\square$

Con los lemas anteriores podemos tener múltiples condiciones para que una gráfica sea hamiltoniana, encontrando una variedad de gráficas de Cayley que tienen trayectorias o ciclos hamiltonianos a través de construcciones con el grupo simétrico y con ciertas permutaciones específicas que lo generen.

Definición 2.3.2 Sea G un grupo finito y sea $l(G)$ el número de factores de composición de G. Denotaremos a $r(G)$ y a $m(G)$ el número de factores de composición abelianos y no abelianos respectivamente. Claramente
$l(G) = r(G) + m(G)$.

El siguiente teorema es de suma importancia para el acotamiento del conjunto de conexión de una gráfica de Cayley, es el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.3 *([15]) Sea G un grupo finito, entonces, existe un conjunto generador C con $|C| \leq r(G) + 2m(G)$ tal que la gráfica de Cayley correspondiente $C(G, C)$ contiene una trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Es sabido que una consecuencia de la clasificación de grupos simples finitos es que todo grupo simple no abeliano finito puede ser generado por dos elementos, uno de ellos una involución. Entonces podemos aplicar el lema 2.2.3 y, para todo grupo simple no abeliano finito nos proporciona un conjunto generador C con $|C| = 2$, tal que la gráfica de Cayley correspondiente contiene un ciclo hamiltoniano. Si el grupo G es cíclico, entonces un simple generador es suficiente.

Utilizando el lema anterior, cualquier conjunto generador $<S_2'> = \frac{G}{H}$ puede ser relacionado con $S_2 \subset G$ de tal forma que $C = S_1 \cup S_2$ es un conjunto generador de G. Entonces, si H y $\frac{G}{H}$ tienen conjuntos generadores de cardinalidad k_1 y k_2 respectivamente, entonces, las correspondientes gráficas de Cayley contienen trayectorias hamiltonianas, entonces G tiene tal conjunto generador de cardinalidad $k_1 + k_2$.

Si fijamos la serie de composición de un grupo G, por el lema anterior, podemos construir un conjunto generador C de tamaño $r(G) + 2m(G)$ de tal forma que la gráfica de Cayley correspondiente contiene una trayectoria hamiltoniana. Ésto completa la prueba. $\square$

El siguiente teorema se puede ver como un corolario del anterior; también nos proporciona una cota para el conjunto de conexión.

Teorema 2.3.4 *([15]) Todo grupo finito G de tamaño $|G| \geq 3$ tiene un conjunto generador C de tamaño $|C| \leq log_2|G|$, tal que su gráfica de Cayley correspondiente $C(G, C)$ contiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Fija una serie de composición para G. Sea $r = r(G)$ y $m = m(G)$. Denota por K_1,...,K_r y L_1,...,L_m a los factores de composición abelianos y no abelianos de G respectivamente. Recuerda que $|L_j| \geq 60 > 4$, ya que el grupo simple no abeliano más pequeño tiene orden 60. Tenemos que:

$$2^{r+2m} = 2^r 4^m \leq \prod_{i=1}^{r} |K_i|. \prod_{j=1}^{m} |L_j| = |G|.$$

Entonces, $r(G) + 2m(G) \leq log_2|G|$ y podemos utilizar el teorema anterior. Podemos agregar al conjunto de conexión un elemento extra que conecte los extremos de la trayectoria hamiltoniana que se obtiene para así tener el ciclo hamiltoniano deseado. □

El resultado es óptimo en el sentido que el tamaño del conjunto generador más pequeño de un grupo finito G, denotado por $d(G)$ es igual a $log_2(|G|)$ para $G = \mathbb{Z}_2^m$. Por supuesto, para otros grupos $d(G)$ es mucho más pequeño. Por ejemplo, $d(G) = 2$ para todos los grupos simples finitos.

Hay que notar que el teorema anterior no implica que todas (o incluso algunas) gráficas de Cayley de un grupo finito son hamiltonianas, simplemente se tiene que para todo grupo finito G se tiene una gráfica de Cayley hamiltoniana con un conjunto de conexión específico. Incluso para grupos simples o grupos simétricos con $d(G) = 2$ la conjetura de Lóvasz no se puede demostrar.

Los siguientes conceptos y el siguiente teorema, aunque son específicos tienen importancia por lo relevante del grupo $PSL(2, p)$, con p primo.

Sea p primo, $p \equiv 1 mod 4$. Sea $\mathbb{F}_p$ un campo finito con p elementos de tal forma que $a^2 = -1$ con $a \in \mathbb{F}_p$. Consideramos al grupo $SL(2, p)$ que es el conjunto de matrices de 2×2 sobre $\mathbb{F}_p$ con determinante 1. Sea $PSL(2, p) = G$ el cociente de $SL(2, p)$ con el subgrupo de matrices diagonales $\{\pm 1\}$. Por abuso de notación, usaremos las matrices para denotar elementos de $PSL(2, p)$.

Considera tres elementos α, β, γ

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

Se sabe que $PSL(2,p) = \langle\alpha, \beta, \gamma\rangle$ [14]. Podemos verificar que α, β y γ son involuciones. Consideremos la siguiente gráfica de Cayley:

$$C_p = C(PSL(2,p), \{\alpha, \beta, \gamma\}).$$

A partir de las definiciones anteriores se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.5 *Las gráficas de Cayley C_p definidas anteriormente contienen ciclos hamiltonianos.*

Demostración. La demostración es muy sencilla, sólo se tiene que verificar que α, β y γ son involuciones y que $\alpha\beta = \beta\alpha$, de esta forma se puede utilizar el lema 2.2.3 y listo. $\square$

Capítulo 3

Grupos Rectangulares.

Definición 3.0.6 Sea S un semigrupo; decimos que $x \in S$ es un **elemento idempotente** si y sólo si $x^2 = x$.

Definición 3.0.7 Un **semigrupo con cero a la derecha (cero a la izquierda)** es un semigrupo S que satisface la identidad $xy = y$ ($xy = x$ respectivamente) para todo $x, y \in S$. Una **banda** es un semigrupo en el que todos sus elementos son idempotentes. Una **banda rectangular** es una banda que satisface la identidad $xyx = x$ para cualesquiera tres de sus elementos. Se sabe que toda banda rectangular es isomorfa al producto directo de un semigrupo con cero a la izquierda y un semigrupo con cero a la derecha (ver [8]). Un semigrupo es llamado **grupo rectangular** si es isomorfo al producto directo de un grupo con una banda rectangular.

Definición 3.0.8 Sea S un semigrupo. Si A y B son dos subconjuntos de S, $AB = \{ab | a \in A,\, b \in B\}$. Entonces A es llamado **ideal derecho** si $AS \subseteq A$. Si $SA \subseteq A$, entonces A es llamado **ideal izquierdo**. Si A es un ideal derecho e izquierdo entonces es llamado **ideal**.

Definición 3.0.9 Llamamos a un semigrupo **simple izquierdo (simple derecho)** si no tiene ningún ideal izquierdo (derecho) propio. Un semigrupo es llamado **grupo izquierdo (grupo derecho)** si es simple izquierdo (derecho) y cancelativo derecho (izquierdo). Se sabe que un semigrupo es izquierdo (derecho) si y sólo si es isomorfo al producto directo de un grupo y un semigrupo con cero por la izquierda (derecha) (ver [8]). Un semigrupo es **completamente simple** si no tiene ideal contenido estrictamente en él y tiene un elemento idempotente que es minimal respecto al orden parcial $e \leq f$ si y sólo si $e = ef = fe$ sobre los elementos idempotentes f.

Definición 3.0.10 El **producto de gráficas categórico** de las gráficas $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ y $\Gamma_2 = (V_2.E_2)$, denotado por $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, tiene por conjunto de vértices $V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas $\{((u, v), (u'.v'))|(u, u') \in E_1, (v, v') \in E_2\}$.

Lema 3.0.11 *([11]) Para dos semigrupos S y T y sus subconjuntos C y D respectivamente tenemos que:*

$$C(S \times T, C \times D) = C(S, C) \times C(T, D)$$

Definición 3.0.12 Sea S un semigrupo y $E(S)$ el conjunto de todos elementos idempotentes de S. Un elemento x de $E(S)$ se dice que es **minimal** si xSx es un subgrupo de S. Se sabe que cuando S tiene un elemento idempotente minimal, el ideal minimal de S, $K(S)$, es no vacío ([8], [4]); aún más, $E(K(S)) = \{x \in E(S)|x \text{ es minimal }\}$. Un semigrupo es **simple** si no tiene ideales propios o, de manera equivalente, si $K(S) = S$

Ahora presentaré algunos resultados que caracterizan a los grupos rectangulares por sus propiedades algebraicas, éstos serán de gran ayuda al obtener cotas para las trayectorias hamiltonianas de gráficas de Cayley de grupos rectangulares.

Proposición 3.0.13 *([9]) Para un semigrupo S, con idempotente minimal, los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) S es simple.

ii) S es cancelativo débilmente, es decir, para $x, y, z \in S$ las igualdades $xz = yz$ y $zx = zy$ implican que $x = y$.

iii) $x(exe)^{-1}x = x$ para todo $x \in S$ y $e \in E(K(S))$.

iv) Existe un elemento $e \in E(K(S))$ tal que $x(exe)^{-1}x = x$ para toda $x \in S$.

Definición 3.0.14 Sea Y un subsemigrupo de S, entonces se dice que S es un **inflación** de Y si y sólo si $S^2 \subseteq Y$ y existe un epimorfismo $r : S \to Y$ que su restricción a Y es el mapeo identidad.

Proposición 3.0.15 *([9]) Sea S un semigrupo, entonces*

i) S es un grupo rectangular si y sólo si S tiene un idempotente minimal, S es simple y $xzy = xy$, para todo $x, y \in S$, $z \in E(S)$.

ii) S es una inflación de un grupo rectangular si y sólo si H tiene un idempotente minimal y $xzy = xy$, para todo $x, y \in S$, $z \in E(S)$.

Corolario 3.0.16 *Un semigrupo S es un grupo rectangular si y sólo si S es simple y una inflación de un grupo rectangular.*

Capítulo 4

Gráficas de Cayley de grupos rectangulares.

4.1. Caracterización de gráficas de Cayley de grupos rectangulares.

En este capítulo se considerarán únicamente digráficas y digráficas de Cayley.

Teorema 4.1.1 *([3]) Una digráfica D es una digráfica de un grupo rectangular si y sólo si D contiene r subgráficas $\{D_\alpha\}_{\alpha=1}^{r}$ tal que las D_α's son ajenas por pares e isomorfas a una gráfica, denotada por $\Gamma = (V, E)$ que satisface:*

1) $V = \bigcup_{i=1}^{l} V_i$, donde las V_i's son ajenas por pares y tienen la misma cardinalidad.

2) $E = \bigcup_{j=1}^{k} E_k$, donde las E_k's son ajenas por pares y si $\Gamma_j = \Gamma[E_j]$, entonces $V(\Gamma_j) = V$ y para cada vértice v de Γ, $d^+_{\Gamma_j}(v) = 1$.

3) Para cada $1 \leq j \leq k$ existe $V_{n_j} \in \{V_1, ..., V_l\}$ tal que para cada $1 \leq i \leq l$ con $i \neq n_j$, $\Gamma_j[V_i]$ es una gráfica vacía, y para cada u de $\Gamma_j[V_i]$ es adyacente a un único vértice η_u^j de $\Gamma_j[V_{n_j}]$ tal que ningún otro vértice de $\Gamma_j[V_i]$ es adyacente a η_u^j, también, $d^-_{\Gamma_j}(v) = 0$.

4) Existe una familia de isomorfismos de gráficas $\{f_j\}_{j=1}^{k}$ donde $f_j : \Gamma_j[V_{n_j}] \to C(G, \{g_{n_j}\})$, $g_{n_j} \in G$ y para todo $1 \leq j,\ j' \leq k$, $u \in V$, $g_{n_j}^{-1} f_j(n_u^j) = g_{\eta_{j'}}^{-1} f_{j'}(\eta_u^{j'})$

El teorema anterior caracteriza a las digráficas de grupos rectangulares y considerando que los grupos derechos, los grupos izquierdos, las bandas rectangulares, los semigrupos con cero por la derecha y los semigrupos con cero por la izquierda son casos especiales de grupos rectangulares también obtenemos la caracterización de las gráficas de Cayley de estos semigrupos.

4.2. Gráficas de Cayley vértice transitiva de grupos rectangulares

Teorema 4.2.1 *([3]) Sea $S = G \times E$ un grupo rectangular finito, donde G es un grupo y $E = L \times R$ una banda rectangular. Sea C un subconjunto de S. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $C(S, C)$ es $Aut_C(S)$- vértice transitiva.

ii) $C(S, C)$ es $End_C(S)$- vértice transitiva y $C(<C>, C)$ es $Aut_C(<C>)$- vértice transitiva.

iii) $CS = S$ y $C(<C>, C)$ es $Aut_C(<C>)$- vértice transitiva.

iv) $C \bigcap sS \neq \emptyset$ para toda $s \in S$ y $C(<C>, C)$ es $Aut_C(<C>)$- vértice transitiva.

Teorema 4.2.2 *([3]) Sea $S = G \times L \times R$ un grupo rectangular finito, donde G es un grupo, L es un semigrupo con cero por la izquierda y R es un semigrupo con cero por la derecha de cardinalidad n. Sea C un subconjunto de S. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $C(S, C)$ es $ColAut_C(S)$- vértice transitiva.

ii) $C(S, C)$ es $ColEnd_C(S)$- vértice transitiva.

iii) $|L| = 1$ y $cS = S$ para todo $c \in C$;

iv) $C(S, C) \cong |R| C(G, \pi_1(C))$, donde $\pi_1 : S \to G$ es la proyección.

v) $C(S, C) \cong C(G \times \mathbb{Z}_n, \pi_1(C) \times \{0_{\mathbb{Z}_n}\})$, que es una digráfica de grupo.

Sea $S = G \times L \times R$ un grupo rectangular, donde G es un grupo y $L \times R$ es una banda rectangular. Sabemos que si $|L| = 1$, entonces S es un grupo por la derecha. Entonces tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.2.3 *Sea $S = G \times R$ un grupo derecho, donde G es un grupo y R es un semigrupo con cero por la derecha. Entonces $C(<C>, C)$ es $Aut_C(<C>)$-vértice transitiva.*

Si S es un grupo por la derecha, los teoremas 4.2.1 y 4.2.2 son equivalentes.

4.3. Gráficas de Cayley de semigrupos vértice transitivas.

En esta sección daremos criterios sobre el conjunto de conexión de una gráfica de Cayley para que ésta se una gráfica de Cayley de un grupo rectangular o ésta sea vértice transitiva.

Definición 4.3.1 Un semigrupo S es **ortodoxo** si es regular ($a \in aSa$ para todo $a \in S$) y el conjunto de sus elementos idempotentes es un subsemigrupo.

Lema 4.3.2 *([10]) Sea S un semigrupo con un subconjunto C tal que $<C>$ es completamente simple y $CS = S$. Entonces, toda componente conexa de la gráfica de Cayley $C(S, C)$ es fuertemente conexa y para cada $v \in S$, la componente que contiene a v es igual a $<C>v$. También si $<C>$ es isomorfo a un grupo derecho, entonces las clases derechas de $<C>$ son las componentes conexas de $C(S, C)$.*

Teorema 4.3.3 *([3]) Sea S un semigrupo finito y sea C un subconjunto de S tal que $<C>$ es ortodoxo. Si la gráfica de Cayley $C(S, C)$ es $Aut_C(S)$-vértice transitiva, entonces $C(S, C)$ es isomorfa a la gráfica de Cayley de un grupo rectangular.*

Teorema 4.3.4 *([3]) Una gráfica vértice transitiva Γ es una gráfica de Cayley de un semigrupo S con conjunto de conexión C, tal que $<C>$ es ortodoxo si y sólo si Γ satisface las condiciones $i) - iv)$ del teorema 4.2.1.*

Conclusiones.

A través de los resultados enlistados uno se puede preguntar lo siguiente: ¿existe para todo grupo finito una gráfica de Cayley mínima por contención que sea hamiltoniana?. La pregunta se puede abordar desde distintos puntos de vista pero el teorema que nos da la pauta es el 2.3.3. Éste nos da una cota para el conjunto de conexión bastante buena para grupos simples y por el teorema 3.0.15 y el corolario 3.0.16 podemos establecer esta cota para grupos rectangulares de una manera bastante general y por consecuencia obtendríamos cotas más específicas para grupos derechos, grupos izquierdos, semigrupos con cero a la derecha, semigrupos con cero a la izquierda y bandas rectangulares.

La importancia de los grupos rectangulares es por el teorema 4.3.3 y 4.3.4, ya que el primero caracteriza de una forma general las gráficas vértice transitivas como gráficas de Cayley de un grupo rectangular y el segundo lo hace para gráficas de Cayley de un semigrupo. Entonces, si obtenemos una cota general para las gráficas de Cayley de un grupo rectangular, la tendremos también para un groso importante de gráficas vértice transitivas y, tomando en cuenta la conjetura de Lovász, se tendría para un número importante de gráficas hamiltonianas.

Denotamos por $\zeta(G)$ a la cardinalidad del conjunto generador más pequeño de tal forma que la gráfica de Cayley correspondiente contenga una trayectoria hamiltoniana. El problema puede ser interpretado como ¿cuándo se da la igualdad $\zeta(G) = d(G)$?, donde $d(G)$ es la cardinalidad del conjunto generador más pequeño de un grupo finito G. El lema es equivalente a la desigualdad $\zeta(G) \leq \zeta(H) + \zeta(\frac{G}{H})$. El teorema 2.3.3 implica que $\zeta(G) \leq r(G)+2m(G)$. En particular, para grupos finitos simples no abelianos G, tenemos que $\zeta(G) = d(G) = 2$.

Un caso bastante importante es el de grupos nilpotentes. Si G es un grupo finito nilpotente, y $G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_l = 1$ su serie central con $G_i = [G, G_{i-1}]$ y $H_i = \frac{G_i}{G_{i-1}}$. Se puede ver que $d(G) = d(\frac{G}{[G,G]}) = d(H_1)$, entonces las cotas quedarían como $\zeta(G) \leq \sum_i \zeta(H_i) = \sum_i d(H_i)$.

De esta forma, podemos hacer una clasificación y análisis de distintas clases de grupos para obtener diversas cotas para $\zeta(G)$ y comenzar a establecer cotas de $\zeta(S)$, donde S es un grupo rectangular; basándonos en las propiedades obtenidas del grupo G inmerso en el producto directo que lo determina.

También se puede obtener información más detallada de los grupos simples finitos, basándonos en el lema 2.2.2, ya que se sabe que, exceptuando en un solo caso, los grupos simples son generado por tres involuciones ([13]). Además, teniendo en cuenta la demostración por inducción de los lemas de la sección de condiciones combinatorias podemos adaptarla para ciertos grupos diédricos y simétricos. Para los grupos cíclicos el resultado es evidente.

Bibliografía

[1] Alperin J.L., Bell Rowen B., Groups and Representations, Springer, (1991), 100-110.

[2] Babai L., Automorphism groups, isomorphism, reconstruction; Handbook of Combinatorics, Elsevier, (1996).

[3] Bahman Khosravi, Mojgan Mahmoudi, On Cayley graphs of rectangular groups, Discrete Mathematics 310, (2010), 804-811.

[4] Berglund J.F., Junghenn H.D. y Milnes P., Analysis on Semigroups: Function Spaces, Compactifications, Representations; Wiley, (1989).

[5] Bondy J.A., Murty U.S.R., Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., (1976).

[6] Bourgain J., Gamburd A., Uniform expansion bounds for Cayley graphs of $SL_2(\mathcal{F}_p)$, Ann. of Math. (2) 167, (2008), 625-642.

[7] Compton R.C., Williamson S.G., Doubly adjacent Gray codes for the simmetryc group, Linear and Multilinear Algebra 35, (1993), 237-293.

[8] Howie J.M., Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press Oxford, (1995).

[9] Jabbari A., Rectangular Group Compactification of a Semigroup, Int. J. Contemp. Math. Sciences 2, (2007), 1263-1269.

[10] Kelarev A.V., Praeger C.E., On transitive Cayley graphs of groups and semigroups, European J. Combin. 24(1), (2003), 59-72.

[11] Knauer U., Wang Y., Zhang X., Functorial properties of Cayley constructions, Acta Comment Univ. Tartu Math 10, (2006), 17-29.

[12] Lovász L., Problema 11 en Combinatorial structures and their applications, Gordon and Breach, (1970).

[13] Malle G., Saxl J., Weigel T., Generation of classical groups, Geom. Dedicata 49, (1994), 85-116.

[14] Nuzhin Ya. N., Generating triples of involutions of Lie type groups over a finite field of add characteristic II (en ruso), Algebra i Logika 36, (1997), 77-96.

[15] Pak Igor, Radoicić Rados, Hamiltonian paths in Cayley Graphs, Baruch College CUNY, (2008).

[16] Rankin R.A., A campanological problem in group theory II, Proc. Camb. Phil. Soc. 62, (1966), 11-18.

[17] Rapaport Strasser E., Cayley color groups and Hamilton lines, Scripta Math. 24, (1959), 51-58.

[18] Sabidussi G., On a class of fixed-point-free graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 9, (1958), 800-804.

[19] Tomassen C., Tilings of the Torus and the Klein Bottle and Vertex Transitive graphs on a Fixed Surface, Trans A.M.S. 323, (1991), 605-635.