



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Diseño, construcción y evaluación de un sistema
para la determinación del tiempo mínimo de
recorrido de un cuerpo en diversas trayectorias bajo
un campo gravitacional**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

F Í S I C O

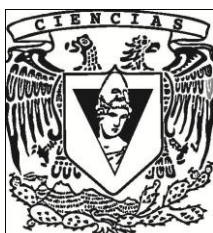
P R E S E N T A :

JESÚS ANTONIO ROSAS GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS :

M. EN C. JOSÉ LUIS DEL RÍO VALDÉS

Cd. Universitaria, D. F. 2014





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

Datos del alumno

Apellido paterno	Rosas
Apellido materno	Gutiérrez
Nombre	Jesús Antonio
Teléfono	5554667236
Universidad Nacional Autónoma de México	
Facultad de Ciencias	
Carrera	Física
Número de cuenta	301095901

Datos del tutor

Grado	M. en C.
Apellido paterno	del Río
Apellido materno	Valdés
Nombre	José Luis

Datos del sinodal 1

Grado	Fis.
Apellido paterno	Espejel
Apellido materno	Paz
Nombre	Raúl

Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Apellido paterno	Morales
Apellido materno	Saavedra
Nombre	Omar Guillermo

Datos del sinodal 3

Grado	M.E.C.
Apellido paterno	González
Apellido materno	y Hernández
Nombre	Plutarco Alejandro Constantino

Datos del sinodal 4

Grado	Dr.
Apellido paterno	Reyes
Apellido materno	Cervantes
Nombre	Juan Adrián

Agradecimientos

Este tema me lo sugirió Luis Fernando como trabajo de tesis y al profe y a mí nos gustó, así que voy a empezar con ellos.

Al profesor José Luis del Río no sólo por haber sido mi tutor, sino por tratarme siempre mejor que a un amigo; a Luis Fernando por el gran apoyo que me brindó, cada que tenía una duda él se sentaba conmigo a resolverla y me decía por dónde seguir; a Guille porque a pesar de que lo molesto, es el amigo más noble; a Marco y a Gabriel porque también me ayudaron y porque sin su presión y buena vibra aún no estaría terminado este trabajo; a Pao porque gracias a ella nunca hay silencio y porque con su compañía nadie se queda solo en el laboratorio; a Mon, a Leo, a Julián, a Chivis y Brayán por los buenos amigos que son y porque simplemente sin ellos el grupo no estaría completo.

A mis sinodales por haberme hecho un espacio en su agenda apretada, aceptando formar parte de mi trabajo y por sus aportaciones a éste; al profesor Raúl Espejel por sus sugerencias para mejorar el dispositivo y porque pocos saben tanto de electrónica como él; al profesor Omar Morales porque con sus correcciones oportunas hizo que mi trabajo quedará mejor; al profesor Adrián Reyes porque desde el principio mostró toda la disposición y revisó mi trabajo inmediatamente; al profesor Andrés Porta porque sus sugerencias son siempre consejos sabios; y al profesor Alejandro González por su enorme ayuda en el laboratorio de mecánica pero sobre todo porque lo vi tan entusiasmado como yo con mi braquistócrona.

A la pequeña Ana Pau que con su cariño de hija me cambió; a Mari por ser tan linda conmigo; y a Alejandro Becerril por ser tan buen amigo desde la secundaria y por llevarme siempre a la facultad y traerme de vuelta a casa.

A mi familia, porque hay cosas en la vida que no serían posibles sin su apoyo y esta etapa que culmina es un ejemplo de ello. A Diana, a Zayra, a Toto, a Raúl, a Sofi y Danna, y principalmente a mis mamás Lupe y Tere porque tuvieron que aguantar muchos años para verme titulado.

A mi papá Chucho, porque no me pudo haber tocado un mejor padre.

Para ellos va mi agradecimiento.

Índice

A manera de prólogo	7
Capítulo 1: El problema de la braquistócrona	10
1.1 Curiosidades	10
1.1.1 La leyenda	
1.1.2 Principio de Fermat	
1.1.3 El reto	
1.2 Las primeras soluciones	13
1.2.1 Solución de Galileo Galilei	
1.2.2 Solución de Newton	
1.2.3 Solución de Johann Bernoulli	
1.3 Características de la cicloide	16
1.3.1 El péndulo isócrono	
1.3.2 Ecuaciones paramétricas de la cicloide	
1.3.3 Braquistócrona y tautócrona	
1.3.4 Área bajo un arco de cicloide	
1.3.5 Longitud de un arco de cicloide	
Capítulo 2: Principios variacionales	22
2.1 Ecuaciones de Lagrange	22
2.2 Principio de Hamilton	23
2.3 Funcionales	23
2.3.1 Variación de un funcional	
2.3.2 Extremo de un funcional	
2.3.2.1 Extremos fuertes y extremos débiles	
2.4 Problema elemental del cálculo variacional	26
2.5 Ecuación de Euler-Lagrange	26
2.6 Integrabilidad de la ecuación de Euler	28
2.6.1 Extremales	
2.6.2 Casos elementales de integrabilidad	
Capítulo 3: Rodar en un plano inclinado	31
3.1 Rodar sin deslizar	31
3.1.1 Ecuaciones de la dinámica	
3.1.2 Conservación de energía	
3.1.3 Condición de rodadura	

3.2	Rodar con deslizamiento	36
3.2.1	Ecuaciones de la dinámica	
3.2.2	Conservación de energía	
3.3	Velocidad final del centro de masa del cuerpo en función de la altura	39
3.3.1	Ángulo del plano inclinado menor que el ángulo crítico	
3.3.2	Ángulo del plano inclinado mayor que el ángulo crítico	
Capítulo 4: La cicloide		40
4.1	La cicloide como braquistócrona	41
4.2	Tiempo de recorrido sobre la cicloide	
4.2.1	Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la cicloide	44
4.2.2	Rodar sin deslizar sobre la cicloide	
4.2.3	Rodar con deslizamiento sobre la cicloide	
4.3	La cicloide como tautócrona	48
4.4	Ecuación de la recta	50
4.5	Tiempo de recorrido sobre la recta	51
4.5.1	Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la recta	
4.5.2	Rodar sin deslizar sobre la recta	
4.5.3	Rodar con deslizamiento sobre la recta	
Capítulo 5: Construcción e instrumentación del dispositivo experimental		54
5.1	Programación para obtener las curvas	54
5.1.1	Programa para la cicloide	
5.1.2	Programa para la recta	
5.2	Construcción de las curvas en madera	57
5.3	Longitudes	59
5.3.1	Longitud del medio arco de cicloide	
5.3.2	Longitud de la recta	
5.4	Instrumentación del problema	62
5.4.1	Diseño electrónico	
5.4.2	Electroimán para la braquistócrona	
5.4.3	Temporizadores	
5.4.4	Interruptores	
5.4.5	Electroimán para la tautócrona	
5.5	Calibración del cronómetro	67
Capítulo 6: Datos y resultados		68
6.1	Datos experimentales	68
6.2	Propagación de incertidumbres	76
6.2.1	Incertidumbre	
6.2.2	Cifras significativas	

	6.2.3 Redondeo	
6.3	Incertidumbres en el dispositivo	77
	6.3.1 Cristal (oscilador)	
	6.3.2 Tiempo de respuesta del microcontrolador	
	6.3.3 Interruptores	
	6.3.4 Histéresis magnética	
	6.3.5 Calibración del cronómetro	
	6.3.6 Incertidumbre neta	
6.4	Análisis de datos	79
	6.4.1 Braquistócrona y recta con el balón 1	
	6.4.2 Braquistócrona y recta con el balón 2	
	6.4.3 Braquistócrona y recta con el balón 3	
	6.4.4 Tautócrona con el balón 1	
	6.4.5 Tautócrona con el balón 2	
	6.4.6 Tautócrona con el balón 3	
6.5	El valor de la gravedad en Ciudad Universitaria	80
6.6	Resultados	82
	6.6.1 Tiempos experimentales	
	6.6.1.1 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la recta	
	6.6.1.2 Rodar sin deslizar sobre la recta	
	6.6.1.3 Rodar con deslizamiento sobre la recta	
	6.6.1.4 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la cicloide	
	6.6.1.5 Rodar sin deslizar sobre la cicloide	
	6.6.1.6 Rodar con deslizamiento sobre la cicloide	
	6.6.1.7 Rodar sin deslizar sobre la tautócrona	
	Conclusiones	85
<i>Apéndice A</i>	Ecuaciones	86
<i>Apéndice B</i>	Algoritmo del cronómetro en lenguaje ensamblador	93
<i>Apéndice C</i>	Algoritmo de control del circuito en lenguaje ensamblador	96
<i>Apéndice D</i>	Calibración del cronómetro	98
	Bibliografía y referencias	99

A manera de prólogo

Pienso que pocas son las cosas matemáticas y físicas que, como la curva cicloide, tienen tanta desproporción entre el escaso número de personas que la conocen bien y las que, sin haberla estudiado a fondo, creen conocerla.

En este trabajo se verá la extraordinaria coincidencia que tiene la cicloide al servir de dos maneras distintas, recordándonos que la naturaleza trata de comportarse de la manera más sencilla. Además de agregar la extraña característica que tiene acerca de que tanto su longitud como el área que encierra resultan ser exactamente múltiplo entero del valor del radio y el área del círculo que la genera, respectivamente.

Razones como esta hacen de la cicloide una curva tan particular, y justifica el hecho de que haya sido estudiada por los matemáticos importantes en todas las épocas. Provocó tantas controversias entre ellos, que se le conoce como la “Helena” de la geometría.

Quiero especificar que las intenciones de realizar este trabajo son de fines históricos, divulgativos y didácticos. Se trata de un problema de mecánica clásica propuesto y resuelto hace más de trescientos años por algunos de los grandes científicos de esa época, y que además dio origen a lo que actualmente se le conoce como el cálculo variacional.

Abordaré dicho problema de manera histórica, teórica y experimental, mostrando un recorrido por las distintas soluciones de los científicos que participaron del problema a lo largo de la historia, después haciendo el desarrollo teórico y la solución del problema utilizando los fundamentos del cálculo variacional y, finalmente, construyendo un dispositivo electrónico que sea totalmente automatizado y permita la toma de datos de manera digital, buscando con esta labor corroborar de manera empírica los resultados ya conocidos por el análisis teórico.

Quedará el modelo como un sistema didáctico para estudiantes de todas las edades.

*a mi hermano Toto
y a mi papá Chucho*

“Nada tiene lugar en el mundo cuyo significado no sea el de algún máximo o mínimo”

Euler

Capítulo 1

El problema de la braquistócrona

El cálculo variacional o cálculo de variaciones es una rama clásica y fundamental de las matemáticas. En lo que respecta a las aplicaciones, muchos conceptos centrales de la física teórica están en estrecha relación con el cálculo variacional.

Históricamente, el cálculo de variaciones tuvo una gran relevancia en el desarrollo del cálculo en el siglo XVIII. Uno de los primeros problemas relacionados con el cálculo variacional fue propuesto y resuelto por Newton en 1694: *determinar la forma más aerodinámica posible de una superficie de revolución, es decir, la que presenta menor resistencia al movimiento.*

1.1 Curiosidades

Quizás el problema más famoso que envuelve el cálculo variacional, es el de la braquistócrona propuesto por Johann Bernoulli en 1696, como un reto para los matemáticos de la época, y es el tema del presente trabajo.

1.1.1 La leyenda [1]

Uno de los problemas más antiguos del cálculo variacional es el problema isoperimétrico. Este problema está relacionado con la legendaria Dido. Según el poeta Virgilio, el cálculo de variaciones nació en el año 850 antes de Cristo cuando la reina Dido fundó la ciudad de Cartago.

Cuenta la leyenda que Dido tuvo que huir de su tierra después de que su hermano Pigmalión matase a su marido, y fue así como Dido, su hermana Ana y un grupo de seguidores, llegaron a las costas de lo que ahora es Túnez, en la costa del norte de África. Solicitaron un pedazo de tierra a los habitantes locales: su ciudad sería tan grande como podría encerrar una piel de toro. La petición le fue concedida por el rey local Jarbas dado que no parecía muy ambiciosa. La astuta Dido cortó la piel en tiras muy finas y logró hacer una cuerda muy larga. Usando la costa del mar Mediterráneo como un lado de su ciudad, la reina tenía que encontrar la curva que cubriera la mayor cantidad posible de área. El resultado fue lo que después se convertiría en la ciudad de Cartago.

1.1.2 Principio de Fermat

Al matemático francés del siglo XVII Pierre Fermat se le atribuye el principio físico de tiempo mínimo, el cual establece que:

La trayectoria que toma la luz entre dos puntos es la trayectoria que puede ser recorrida en el menor tiempo.

En 1662, Fermat utilizó su principio de tiempo mínimo para deducir la ya entonces conocida ley de Snell, que describe la refracción de la luz al pasar de un medio a otro. A partir de este momento se empiezan a utilizar métodos analíticos para la resolución de problemas de optimización, que se abordaban previamente con métodos geométricos. El tratamiento de Fermat a este problema es considerado como el comienzo del cálculo variacional por el uso de técnicas analíticas semejantes a las que se usarían más tarde en el análisis matemático.

1.1.3 El reto [2]

Antes del reto propuesto por Bernoulli, Newton resolvió problemas sobre el contorno óptimo que debe tener un cuerpo en un fluido, para tener la menor resistencia. Sin embargo, se considera que el nacimiento moderno del cálculo de variaciones se originó con este desafío matemático.

Hoy se sabe que, en la geometría Euclidiana, la línea recta es la trayectoria más corta entre dos puntos, sin embargo, en un plano vertical no es la que permite el descenso más rápido, sino que es una curva plana llamada braquistócrona, del griego *braquis = corto* y *cronos = tiempo*.

El problema matemático de la braquistócrona se solucionó en el siglo XVII, y conllevó polémica involucrando a los mejores matemáticos de la época.

Este famoso problema no solo permite contar una bella historia, sino que fue el origen de esta nueva área de las matemáticas, el cálculo variacional.

En Junio de 1696, en la revista científica alemana *Acta Eruditorum*, Johann Bernoulli (de la famosa familia de matemáticos de los siglos XVII y XVIII) planteó a los matemáticos de la Royal Society (Real Sociedad de Ciencias de Londres) el problema de determinar cuál era la trayectoria de mínimo tiempo que debía seguir una partícula al deslizarse de un punto a otro por efectos únicamente gravitatorios, añadiendo con sarcasmo que la curva era una bien conocida de los matemáticos.

Lo hizo junto con un segundo problema, el cual trataba de encontrar una curva tal, que si se traza una línea desde un punto dado O , que corte a la curva en P y en Q , entonces, $OP + OQ$ sea una constante. Se trató más bien de un reto pues ofreció como premio un costoso libro científico de su librería. Además, siendo Bernoulli amigo de Leibniz, el desafío parecía ir dirigido a Newton, quién se había alejado de las actividades científicas. Y es que la solución requería del cálculo infinitesimal cuya paternidad entre Leibniz y Newton se discutía, pues lo desarrollaron de manera independiente y sin colaborar entre sí, pero Leibniz lo publicó de inmediato y Newton no lo hizo hasta mucho después.

Johann Bernoulli presentó el problema de la siguiente manera a los matemáticos más brillantes del mundo:

Nada hay más atractivo para la gente inteligente, que un problema difícil, honesto y cuya solución posible pueda otorgar fama y permanecer como un monumento duradero. Siguiendo el ejemplo de Pascal, Fermat, etc., espero ganar la gratitud de toda la comunidad científica mediante la colocación ante los mejores matemáticos de nuestro tiempo, de un reto que pondrá a prueba sus métodos y la fuerza de su intelecto. Si alguien me comunica la solución del problema propuesto, voy a declararlo públicamente digno de alabanza.

El enunciado del reto de Bernoulli fue:

Dados dos puntos A y B en un plano vertical, ¿Cuál es la curva trazada por un punto que se mueve sólo por gravedad, el cual inicia en A y termina en B en el menor tiempo posible?

La novedad del problema en sí era evidente: no se trata de encontrar puntos donde una curva tiene un máximo o un mínimo, sino que la misma incógnita buscada es una curva que debe minimizar cierta relación. Según palabras de Leibniz este tipo de problemas resulta muy bello y hasta el momento totalmente desconocidos.

Varios matemáticos ilustres respondieron el reto resolviéndolo. Entre los participantes del certamen estuvieron Robert Hooke, Sir Edmond Halley, Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens.

Bernoulli estableció un plazo máximo de seis meses para presentar las soluciones y solamente Leibniz pudo encontrar la solución a la braquistócrona tras el término de ese tiempo, pero no al otro problema.

Pasaron otros seis meses y nadie pudo mejorar la solución de Leibniz al primer problema, misma que fue hecha con medios matemáticamente penosos, ni resolver el segundo problema.

Leibniz persuadió a Bernoulli de permitir más tiempo para las soluciones, seis meses más de los que originalmente se habían previsto, para que los matemáticos extranjeros también tuvieran oportunidad de solucionar el problema. Además Leibniz, molesto por su fracaso, sugirió a Bernoulli que enviara los problemas a Newton para humillarlo, entonces Bernoulli llamó a Sir Edmond Halley, muy amigo de Newton, para que le entregara ambos problemas.

Halley se presentó en la residencia de Newton el 29 de enero de 1697 a las dos de la tarde para presentarle los problemas, a lo que respondió que los estudiaría más tarde. Después de regresar a casa, Newton sorprendentemente resolvió los dos problemas tan solo en diez horas, a las cuatro de la madrugada, y a las 8 de la mañana del 30 de enero envió su solución a Charles Montague, Conde de Halifax, que era un innovador ministro de Finanzas y el fundador del Banco de Inglaterra. Montague era el principal patrono y amigo de toda la vida de Newton y, además, el marido de su sobrina. Fue presidente de la Royal Society durante los años 1695 a 1698, así que era natural que enviara la solución de Newton al problema de la braquistócrona.

El episodio no fue del agrado de Newton, ya que él mismo escribió lo siguiente:

Yo no quiero ser molestado ni quiero burlas por parte de extranjeros sobre las cosas matemáticas.

A pesar de que envió las soluciones de manera anónima, los desarrollos eran tan perfectos y elegantes, que fueron publicados en el número de febrero de 1697 de *Philosophical Transactions de la Royal Society* (revista científica publicada por la Real Sociedad), también de manera anónima.

Cuenta la historia que el organizador del concurso, Johann Bernoulli, apenas leído el texto e impresionado por la elegancia de las soluciones no tuvo dificultad en identificar al ignoto autor:

Es Newton - *afirmó*

¿Cómo lo sabe? - *le preguntaron*

Porque reconozco las garras del león - *respondió*

En el sentido de que solo Newton podría ser capaz de resolver tales problemas y lo que es más en el estilo claro, conciso y brillante característico del inglés.

Además de Leibniz y Newton, tanto Johann como su hermano Jacob Bernoulli resolvieron el primer problema. La solución de Leibniz era muy trabajosa. La de Johann Bernoulli era bastante elegante pero muy particular. La de su hermano mayor Jacob era muy elaborada y aburrida, pero más general que la de Johann, ocupa un método similar al de Fermat pero más refinado. La de Newton fue la mejor: breve, simple, elegante, entretenida y general, nadie ha podido superarla.

La publicación de mayo de 1697 del *Acta Eruditorum* contenía la solución de Leibniz al problema de la braquistócrona en la página 205, la solución de Johann Bernoulli en las páginas 206-211, la solución de Jacob Bernoulli en las páginas 211-214 y una traducción al latín de la solución de Newton en la página 223. La solución de L'Hôpital no se publicó hasta 1988, casi 300 años más tarde.

Johann Bernoulli presentó estas soluciones diciendo:

Mi hermano mayor hizo el cuarto de ellos, que los tres grandes países, Alemania, Inglaterra y Francia, cada uno de los suyos se unan conmigo en hermosa búsqueda tal, la búsqueda de la misma verdad.

Los métodos de los matemáticos que respondieron al reto de Bernoulli fueron desarrollados y generalizados por Euler y después Lagrange, llevando a un método sistemático para estudiar este tipo de problemas y con esto propiamente al cálculo de variaciones. Fue Euler quien dio este término. Durante el siglo XIX los trabajos de Euler y Lagrange fueron formalizados y generalizados para conformar lo que hoy en día es el cálculo variacional.

1.2 Las primeras soluciones [2]

Es interesante observar las diversas soluciones que los antiguos científicos le dieron al problema de la braquistócrona.

1.2.1 Solución de Galileo Galilei

Johann Bernoulli no fue el primero en abordar el problema de la braquistócrona. En 1638, Galileo había estudiado el problema en su obra *Discurso sobre dos nuevas ciencias*. Su versión fue encontrar primero la línea recta desde un punto A hasta el punto en una línea vertical que se alcanzaría más rápido. Calculó correctamente que tal línea desde A a la línea vertical sería en un ángulo de 45° hasta llegar a la línea vertical requerida en B , es decir, calculó el tiempo necesario para pasar de A a B en línea recta.

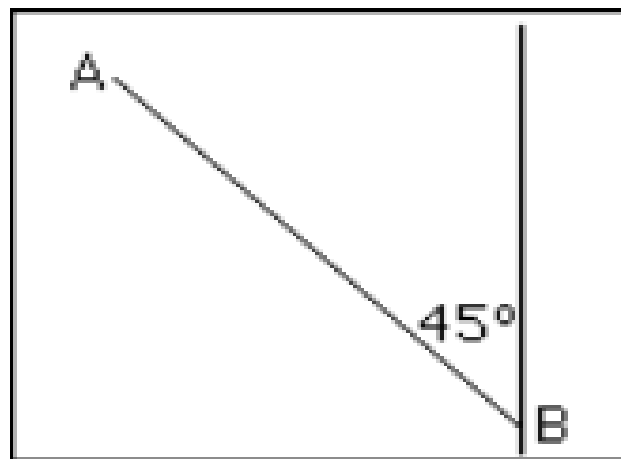


Figura 1.1: Mejor recta de Galileo

Entonces Galileo mostró que se alcanzaría más rápido el punto B si se viajara a lo largo de dos segmentos de línea AC seguido de CB donde C es un punto sobre un arco de círculo.

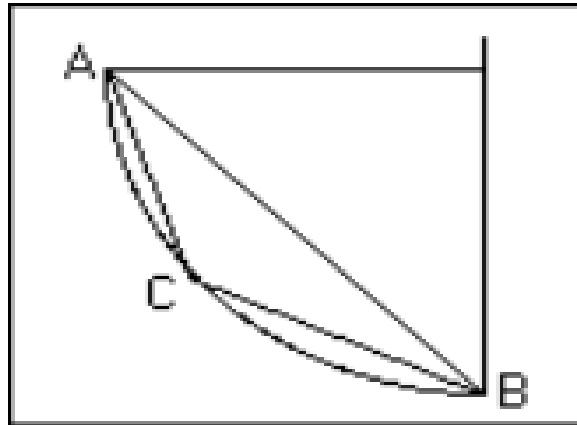


Figura 1.2: Resultado de Galileo

Galileo estuvo correcto en esto, pero cometió el error de argumentar que la trayectoria de más rápido descenso de A a B sería un arco de círculo.

1.2.2 Solución de Newton

Como se dijo anteriormente, la Royal Society publicó la solución de Newton en las *Philosophical Transactions de la Royal Society* en febrero de 1697, y su solución fue explicada de la siguiente manera.

Problema . Es necesario encontrar la curva ADB en la que una masa, por la fuerza de gravedad, descenderá más rápidamente de cualquier punto A dado a un punto B .

Solución . Desde el punto dado A se traza una recta infinita $APCZ$ paralela a la horizontal. Se describirá la cicloide arbitraria AQP y la línea recta AB que pasa por el punto Q (que se supone elaborada y producida si es necesario), y aún más, una segunda cicloide ADC cuya base y altura son la base y la altura de la primera cicloide, como la recta AB es a AQ respectivamente. Esta última cicloide pasará por el punto B , y será esa curva a lo largo de la cual una masa, por la fuerza de gravedad, descenderá más rápido desde el punto A hasta el punto B .

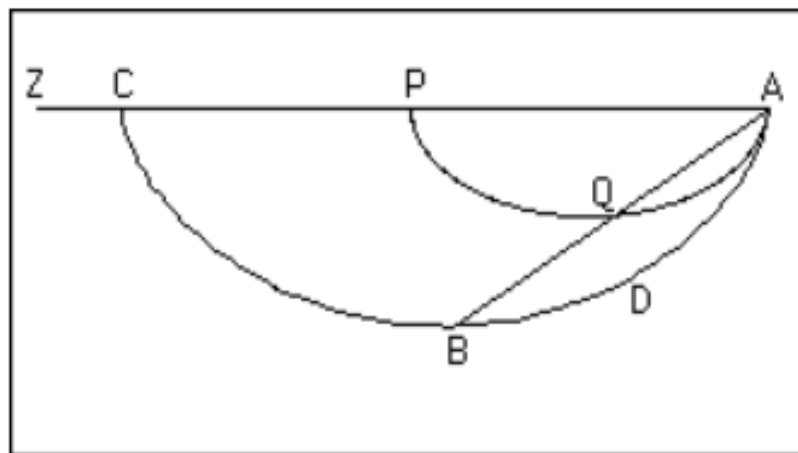


Figura 1.3: Diagrama de Newton

1.2.3 Solución de Johann Bernoulli

Johann divide el plano en tiras y supone que la partícula sigue una línea recta en cada tira, por lo tanto el camino es lineal por tramos. Entonces el problema es determinar el ángulo del segmento de línea recta en cada banda y para hacer esto recurre al principio de Fermat, es decir, que la luz siempre sigue el camino que le toma el menor tiempo posible. Si v es la velocidad en una tira en un ángulo α respecto a la vertical y u es la velocidad en la siguiente tira en un ángulo β respecto a la vertical, entonces, de acuerdo la ley de los senos

$$\frac{v}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{u}{\text{sen}(\beta)}$$

En el límite, cuando las tiras se hacen infinitamente pequeñas, los segmentos de línea tienden a una curva en la que en cada punto el ángulo del segmento de línea realizado con la vertical se convierte en el ángulo de la tangente a la curva con la vertical, como se ve en la siguiente figura.

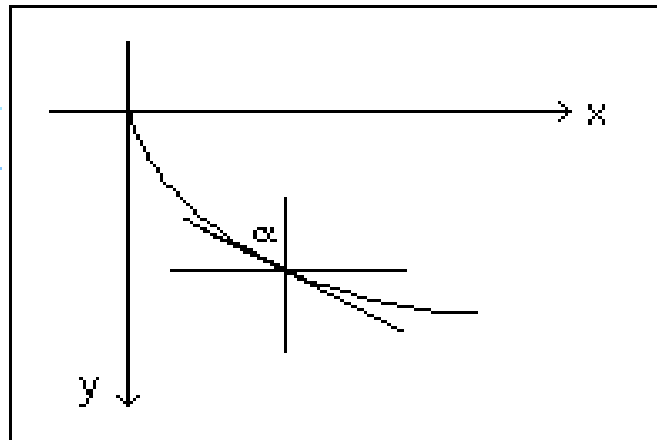


Figura 1.4: Los segmentos de línea tienden a una curva

Si v es la velocidad en (x, y) y α es el ángulo que la tangente a la curva hace con la vertical, se satisface

$$\frac{v}{\text{sen}(\alpha)} = \text{constante}$$

Galileo había demostrado que la velocidad v satisface

$$v = \sqrt{2gy}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Sustituyendo v de la ecuación de la curva se tiene

$$\frac{\sqrt{y}}{\text{sen}(\alpha)} = \text{constante}$$

Entonces

$$y = k^2 \text{sen}^2(\alpha)$$

Utilizando

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cot(\alpha)$$

Y la siguiente identidad

$$1 + \text{ctg}^2(\alpha) = \text{csc}^2(\alpha)$$

Se tiene la expresión para el $\text{sen}(\alpha)$

$$\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{\text{csc}^2(\alpha)} = \frac{1}{1+ctg^2(\alpha)} = \frac{1}{1+y'^2}$$

Se obtiene

$$y(1 + y'^2) = 2h$$

para una constante

$$h = \frac{1}{2}k^2$$

las cicloides

$$x(t) = h(t - \text{sen}(t))$$

$$y(t) = h(1 - \text{cos}(t))$$

satisfacen esta ecuación.

Huygens había mostrado en 1659, incitado por Pascal, que la cicloide es la solución al problema de la tautócrona, a saber, la curva para que el tiempo de descenso de una partícula que desliza bajo gravedad uniforme hacia su punto más bajo es independiente de su punto de partida.

Johann Bernoulli terminó su solución del problema de la braquistócrona con las siguientes palabras:

Antes de terminar, debo expresar una vez más la admiración que siento por la identidad inesperada de Huygens entre su tautócrona y mi braquistócrona. Considero que es especialmente notable que esta coincidencia sólo puede tener lugar bajo la hipótesis de Galileo, por lo que incluso obtenemos de esto una prueba de su corrección. La naturaleza siempre tiende a actuar de la manera más simple, por lo que aquí permite que una curva sirva a dos funciones diferentes, mientras que en virtud de cualquier otra hipótesis deberíamos necesitar dos curvas.

1.3 Características de la cicloide

En esta sección analizaremos la parametrización de la cicloide (una braquistócrona y tautócrona).

1.3.1 El péndulo isócrono

En 1673, Christiaan Huygens descubrió un hecho sorprendente acerca de la trayectoria de la cicloide. Si un cuerpo cae, en caída libre, siguiendo una cicloide desde un punto a su punto más bajo, el tiempo de caída no depende del punto en que se inició el movimiento.

Ese año, Huygens construyó un reloj de péndulo cuya lenteja la hacía oscilar en una cicloide. De esta manera resolvió el problema de que la frecuencia de oscilación de un péndulo dependiera de su amplitud de oscilación.

El científico sujetó la lenteja de un alambre cuyo movimiento al alejarse del centro estaba restringido por dos toques. Hizo que la lenteja describiera la trayectoria de una cicloide, limitando el movimiento del alambre entre dos cicloides.

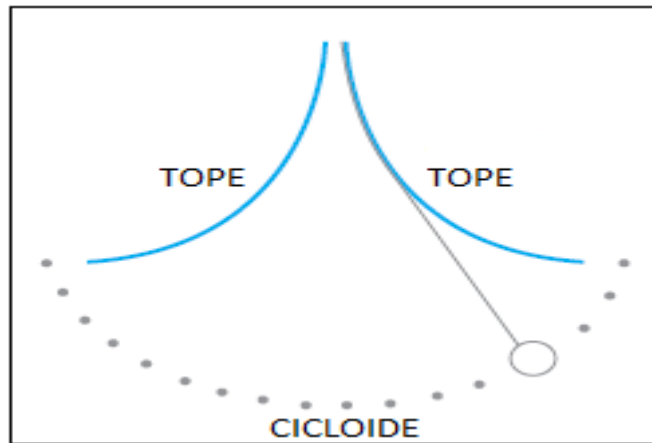


Figura 1.5: En el reloj de péndulo de Huygens, la frecuencia es independiente de la amplitud.

Las oscilaciones del péndulo simple sólo son isócronas para pequeñas amplitudes.

1.3.2 Ecuaciones paramétricas de la cicloide

La cicloide es una curva obtenida por un punto perteneciente a un círculo generador al rodar y sin deslizar sobre una línea recta directriz.

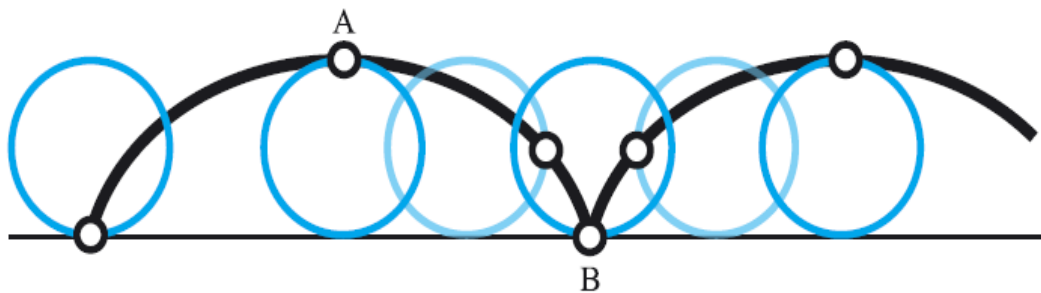


Figura 1.6: El arco de curva entre los puntos A y B es la braquistócrona

Consideremos una rueda de radio a que se mueve a lo largo de una recta horizontal. Llamamos *cicloide* a la trayectoria recorrida por un punto P en la circunferencia de la rueda.

A continuación encontraremos las ecuaciones paramétricas para dicha trayectoria.

Sea el eje X la línea recta directriz, se marca un punto P en la rueda que coincide en el origen $(0,0)$. Se hace mover la rueda hacia la derecha y como parámetro utilizamos el ángulo t que gira la rueda (en radianes).

En la siguiente figura se muestra la rueda cuando su base se encuentra a at unidades del origen.

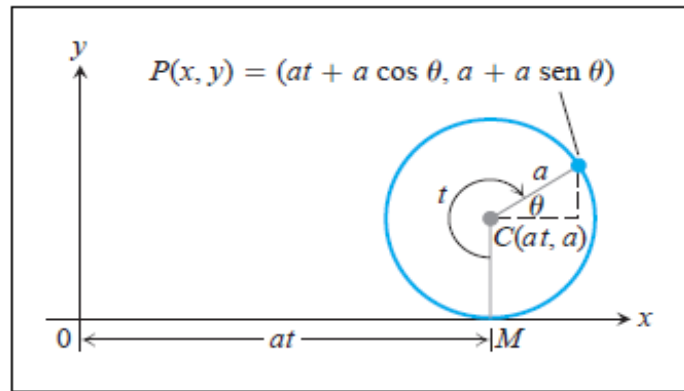


Figura 1.7: Coordenadas del punto $P(x, y)$ para un ángulo de giro t .

El centro C de la rueda está en el punto (at, a) y las coordenadas del punto P están dadas por:

$$\begin{aligned}x &= at + a \cos(\theta) \\y &= a + a \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Para expresar θ en términos de t , de la figura 1.7, debe notarse que

$$t + \theta = \frac{3}{2}\pi$$

Por lo que

$$\theta = \frac{3}{2}\pi - t$$

Entonces

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) = -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(\theta) &= \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) = -\cos(t)\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned}x &= at - a \operatorname{sen}(t) \\y &= a - a \cos(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$\begin{aligned}x &= a(t - \operatorname{sen}(t)) \\y &= a(1 - \cos(t))\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde la constante a es el radio del círculo generatriz.

En la siguiente figura se muestra el primer arco de la cicloide.

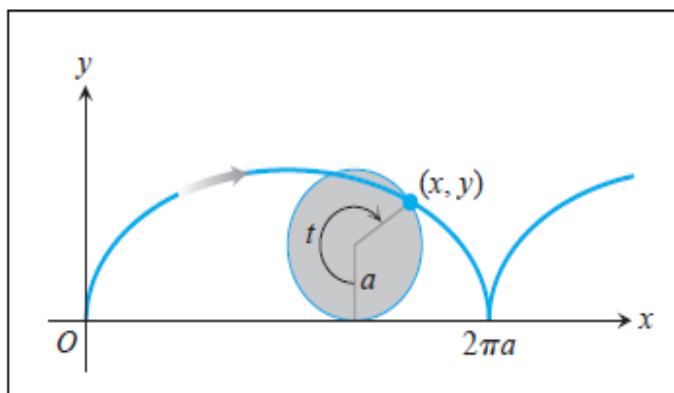


Figura 1.8: Cicloide para $t \geq 0$.

1.3.3 Braquistócrona y tautócrona

Si se refleja sobre el eje X, la curva de la figura 1.8, las ecuaciones paramétricas (1.2) siguen siendo válidas. En la siguiente figura se muestra la curva resultante:

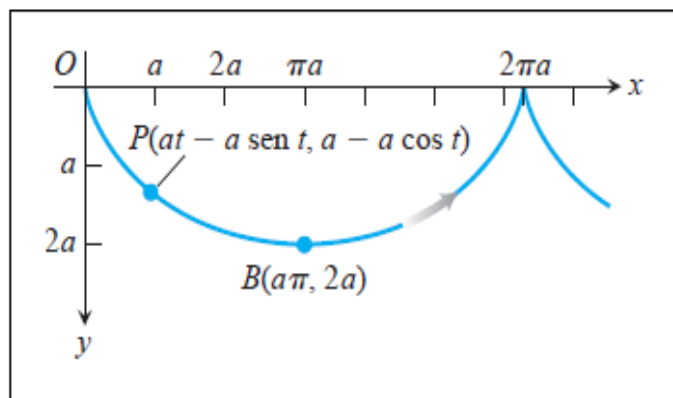


Figura 1.9: Movimiento a lo largo de una cicloide invertida

Esta curva tiene dos propiedades físicas interesantes.

- De todas las curvas suaves que unen el punto de origen O y el punto B en el fondo del primer arco, la cicloide es la curva a lo largo de la cual un cuerpo sujeto a la fuerza de gravedad y sin fricción, se deslizará de O a B en el menor tiempo. Esto hace a la cicloide una braquistócrona.
- Aunque el cuerpo inicie su descenso hacia B desde un punto intermedio de la curva, tardará la misma cantidad de tiempo. Esto hace de la cicloide una tautócrona, del griego *tauto* = *mismo* y *cronos* = *tiempo*, es decir, la curva con el mismo tiempo para O y B .

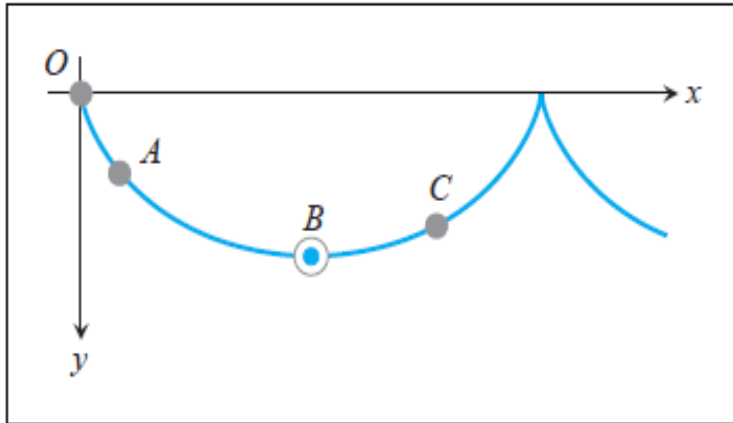


Figura 1.10: Los cuerpos en O, A y C, llegaran a B al mismo tiempo

Sin importar desde dónde inicien su desplazamiento, a los cuerpos les tomará el mismo tiempo descender al punto mínimo de un arco de cicloide. Esta es la razón por la que el movimiento del péndulo del reloj de Huygens es independiente de la amplitud de la oscilación.

Este problema de encontrar la curva de la tautócrona fue resuelto por Christiaan Huygens en 1659, publicando en 1673 que la curva es una cicloide:

En una cicloide cuyo eje se eleva sobre la perpendicular y cuyo vértice está localizado en el fondo, el tiempo de descenso en el cual un cuerpo llega al punto más bajo (vértice), después de haber partido desde cualquier punto de la cicloide, es igual a cualquier otro.

Las demostraciones del por qué la cicloide es una braquistócrona y una tautócrona se encuentran en el capítulo 4.

1.3.4 Área bajo un arco de cicloide

Es claro que el primer arco de la cicloide se produce cuando los valores de t están entre 0 y $2\pi a$, ya que se necesita un giro completo de la rueda para trazarlo. Así pues, el área bajo un arco de cicloide viene dado por:

$$A = \int_0^{2\pi a} y dx$$

De las ecuaciones paramétricas (1.2) se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (a - a \cdot \cos(t))(a - a \cdot \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos^2(t) - 2\cos(t)) dt \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \right] \\ &= a^2 \left[t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t) - 2\text{sen}(t) \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

Finalmente

$$A = 3\pi a^2 \quad (1.3)$$

Por lo tanto el área bajo el arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que rueda para generarla. Galileo Galilei fue el primero en predecir que esto debía ser pero no pudo demostrarlo. Torricelli en Italia y Roberval en Francia fueron quienes lo demostraron por primera vez.

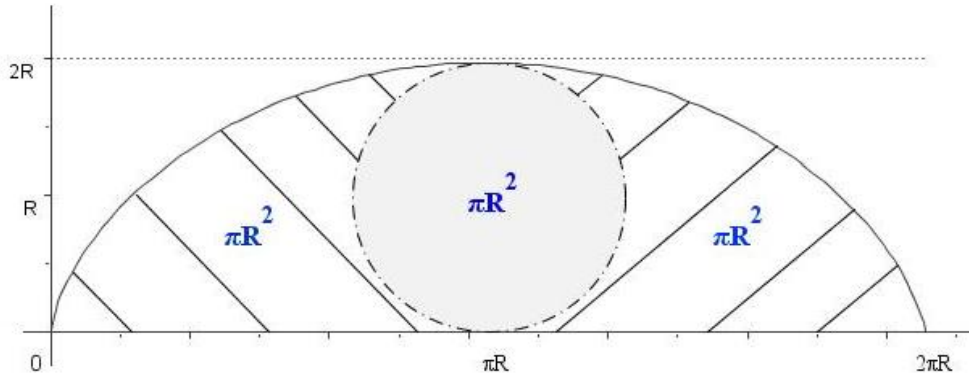


Figura 1.11: El área bajo el arco de la cicloide es tres veces el área de su círculo generador.

1.3.5 Longitud de un arco de cicloide

En cuanto a la longitud de un arco de cicloide se tiene

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos(t))^2 + a^2 \text{sen}^2(t)} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t) - 2\cos(t) + \text{sen}^2(t)} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(t))} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2a \left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= 2a(2 + 2) \end{aligned}$$

Entonces

$$L = 8a \quad (1.4)$$

Por lo tanto, la longitud de un arco de cicloide es ocho veces el radio del círculo que la genera.

Capítulo 2

Principios variacionales

El desarrollo del cálculo variacional, está relacionado con el de la física. Las leyes de la física, deben ser el producto de principios variacionales. Así es como surgen la mecánica analítica y la mecánica Hamiltoniana, y de ahí la formalización de la mecánica cuántica.

El cálculo variacional tiene origen, en una generalización de la teoría elemental de los máximos y mínimos de las funciones diferenciales. Aquí la búsqueda de los valores extremos trata con objetos llamamos *funcionales*.

Antes de profundizar en el tema, se verán unos conceptos básicos de mecánica.

2.1 Ecuaciones de Lagrange [3] [4]

La energía cinética total de un sistema de N partículas es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

De igual forma hay que recordar que la energía potencial total del sistema es

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}$$

Donde el segundo término es la energía potencial interna del sistema, que en general no tiene que ser nulo e incluso puede variar cuando el sistema varía con el tiempo.

Ahora, la función lagrangiana L se define como

$$L = T - V \tag{2.1}$$

Entonces, cuando las fuerzas se derivan de un potencial escalar V

$$F_i = -\nabla_i V$$

se tiene que las ecuaciones de Lagrange son de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{2.2}$$

Donde q_j son las coordenadas generalizadas y \dot{q}_j las velocidades generalizadas.

2.2 Principio de Hamilton [3] [4]

Se hará notar que las ecuaciones de Lagrange presentadas en la ecuación (2.2) también pueden obtenerse a partir del principio de Hamilton.

Antes, se verá lo que dice este principio para sistemas conservativos:

El movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 , es tal que la integral curvilínea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.3)$$

es una extremal respecto de la trayectoria del movimiento.

Que sea extremal significa que, de todas las trayectorias posibles que puede describir el punto representativo entre los tiempos t_1 y t_2 , describirá la trayectoria para la cual la integral sea un máximo o un mínimo.

Que el valor de la integral sea un máximo o mínimo quiere decir que a través de la trayectoria dada, el movimiento es tal que la variación de la integral curvilínea I (2.3) para t_1 y t_2 fijos es cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt = 0$$

Este principio de Hamilton es condición suficiente y necesaria para que se verifiquen las ecuaciones de Lagrange (2.2).

Para demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton, se tendrá que incursionar en los métodos del cálculo variacional, ya que dentro de los intereses principales que se encuentran en la teoría del cálculo de variaciones, está la determinación de caminos que dan las soluciones de máximos o mínimos. En nuestro caso se trata del camino entre dos puntos por el que el tiempo de recorrido es más corto.

El principio de Fermat es un buen ejemplo del uso de esta teoría: la luz viaja por el camino que le toma la menor cantidad de tiempo.

2.3 Funcionales [1] [7] [8]

En los problemas asociados al cálculo de variaciones se trata de encontrar máximos o mínimos donde las variables son curvas, superficies, etc., es decir, extremos de funciones de funciones.

Sea M una clase de funciones $y(x)$. Si a toda función $y(x) \in M$ le corresponde, según una regla, un número determinado J se dice que en la clase M está definida la funcional J y se escribe $J = J[y(x)]$.

La clase M de funciones $y(x)$ en la que está definida la funcional J se denomina *dominio del funcional J* .

Definición. Se llama variación o incremento δy del argumento $y(x)$ de un funcional $J[y(x)]$ a la diferencia

$$\delta y = y(x) - y_0(x)$$

de dos funciones $y(x)$ e $y_0(x)$ pertenecientes a la clase M de funciones elegida.

2.3.1 Variación de un funcional

Definición. Sea $J[y(x)]$ un funcional definido en un conjunto M de funciones $y(x)$. Se denomina *incremento del funcional* $J[y(x)]$, correspondiente al incremento $\delta y(x)$ del argumento, a la magnitud

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

donde

$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x), \quad \tilde{y}(x) \in M, \quad y(x) \in M$$

Primera definición de variación de un funcional. Si el incremento

$$\Delta J = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)]$$

del funcional $J[y(x)]$ se puede expresar como

$$\Delta J = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \cdot \|\delta y\|$$

donde $L[y(x), \delta y]$ es un funcional lineal respecto a δy , y $\beta(y(x), \delta y) \rightarrow 0$ cuando $\|\delta y\| \rightarrow 0$, entonces la parte lineal respecto a δy del incremento del funcional, es decir, $L[y(x), \delta y]$ se denomina *variación del funcional* $J[y(x)]$ y se denota mediante δJ . En este caso el funcional $J[y(x)]$ se denomina *diferenciable* en el punto $y(x)$.

Segunda definición de variación de un funcional. Se denomina *variación de un funcional* $J[y(x)]$ en un punto $y = y(x)$ al valor de la derivada del funcional

$$J[y(x) + \alpha \delta y(x)]$$

respecto al parámetro α para $\alpha = 0$:

$$\delta J = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y(x)] \right]_0$$

Si existe la variación de un funcional como la parte lineal principal de su incremento, es decir, en el sentido de la primera definición, entonces existe también la variación como el valor de la derivada respecto al parámetro α para $\alpha = 0$, y estas dos variaciones coinciden.

La segunda definición de variación de un funcional es más amplia que la primera, en el sentido de que existen funcionales de cuyo incremento no se puede destacar la parte lineal principal, pero existe la variación en el sentido de la segunda definición.

2.3.2 Extremo de un funcional

Definición. Se dice que el funcional $J[y(x)]$ alcanza un máximo en una curva $y = y_0(x)$ si en toda curva próxima a $y = y_0(x)$ los valores del funcional $J[y(x)]$ no son mayores que $J[y_0(x)]$, es decir,

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0$$

Si $\Delta J \leq 0$ y $\Delta J = 0$ sólo para $y(x) = y_0(x)$, entonces se dice que en la curva $y = y_0(x)$ se alcanza un máximo estricto.

Análogamente se define una curva $y = y_0(x)$ donde se alcanza un mínimo. En este caso $\Delta J \geq 0$ en toda curva próxima a $y = y_0(x)$.

2.3.2.1 Extremos fuertes y extremos débiles

Definición. Se dice que un funcional $J[y(x)]$ alcanza un *máximo relativo fuerte* en una curva $y = y_0(x)$ si para todas las curvas admisibles $y = y(x)$ dispuestas en cierta vecindad ε de orden cero de la curva $y = y_0(x)$, se verifica

$$J[y(x)] \leq J[y_0(x)]$$

De modo análogo se define en concepto de *mínimo relativo fuerte de un funcional*.

Definición. Se dice que el funcional $J[y(x)]$ alcanza un *máximo relativo débil* en una curva $y = y_0(x)$ si para todas las curvas admisibles $y = y(x)$ situadas en cierta vecindad ε de primer orden de la curva $y = y_0(x)$ se cumple

$$J[y(x)] \leq J[y_0(x)]$$

De manera análoga se define el concepto de *mínimo relativo débil* de un funcional.

Definición. Los máximos y mínimos (fuertes y débiles) de un funcional $J[y]$ se llaman *extremos relativos*.

Todo extremo fuerte es débil, pero no todo extremo débil es fuerte.

Definición. El extremo de un funcional $J[y]$ en todo el conjunto de funciones donde está definido, se denomina *extremo absoluto*.

Todo extremo absoluto es un extremo relativo débil y fuerte, pero no todo extremo relativo es absoluto.

Teorema

Condición necesaria de extremo de un funcional. Si un funcional diferenciable $J[y(x)]$ alcanza un extremo en $y = y_0(x)$, donde $y_0(x)$ es un punto interior del dominio del funcional, entonces

$$\delta J[y_0(x)] = 0$$

Definición. Las funciones para las cuales $\delta J = 0$ se llaman *funciones estacionarias*.

2.4 Problema elemental del cálculo variacional [1] [7] [8]

Sea $F(x, y(x), y'(x))$ una función continua y con derivadas parciales también continuas hasta de segundo orden en el intervalo $[a, b]$. La clase de funciones es el subconjunto de clase $C^1[a, b]$ que satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}y(a) &= A \\y(b) &= B\end{aligned}\tag{2.4}$$

El problema elemental del cálculo variacional se plantea así: entre todas las funciones $y(x)$ con derivada continua que satisfacen las condiciones de frontera [Ec.(2.4)] hallar la función en la cual el funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx\tag{2.5}$$

alcanza un extremal (máximo o mínimo).

La variable x desempeña aquí el papel de parámetro t , en el problema de la braquistócrona, que se analizará más adelante.

En la ecuación (2.5), J depende de la función $y(x)$ y los límites de integración están fijos dadas las condiciones de frontera [Ec.(2.4)]. Entonces la función $y(x)$ se varía hasta encontrar un valor extremo del funcional J . Es decir, si una función $y = y(x)$ da el valor mínimo a la integral J , entonces cualquier función vecina, sin importar qué tan cerca esté de $y(x)$, debe hacer que J aumente.

En otras palabras, el problema elemental del cálculo variacional consiste en la búsqueda de un extremo del funcional J en el conjunto de todas las curvas suaves que unen dos puntos dados $P_1(a, A)$ y $P_2(b, B)$.

Como se requiere que J tenga un valor extremal para el camino correcto relativo a todo camino próximo, la variación debe ser cero relativa a algún conjunto particular de caminos vecinos señalados por un parámetro infinitesimal α .

2.5 Ecuación de Euler-Lagrange [1] [3] [7] [8]

Hagamos corresponder a cada una de las posibles curvas $y(x)$ un valor diferente del parámetro α , de modo que para ciertos valores de α , la curva coincida con la trayectoria o las trayectorias que hacen de la integral un extremal, por tanto y será función de x y α .

Entonces representamos tal conjunto de caminos por $y(x, \alpha)$, siendo $y(x, 0)$ el camino correcto. Seleccionemos una función cualquiera $\mu(x)$ que se anula en $x = a$ y $x = b$, entonces un conjunto posible de caminos variados sería

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\mu(x)\tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) es solo una de las posibles familias de curvas paramétricas y .

Supóngase que el camino correcto $y(x)$ y la función auxiliar $\mu(x)$ son continuas y sin singularidades en $x = a$ y $x = b$, con primera y segunda derivada también continuas en el mismo intervalo. La funcional J de la ecuación (2.5) será también función de α para cualquiera de las familias de curvas paramétricas:

$$J(\alpha) = \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx\tag{2.7}$$

Ahora, se conoce que la condición para obtener un máximo o mínimo ordinariamente es:

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{x=0} = 0 \quad (2.8)$$

Entonces, derivando la ecuación (2.7) con los métodos usuales bajo el signo de integral resulta que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} dx \quad (2.9)$$

Tomando la segunda integral

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \quad (2.10)$$

Todas las curvas deben pasar por los puntos de las ecuaciones (2.4), por lo tanto, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ debe valer cero en los puntos a y b . Entonces el primer término de la integral en la ecuación (2.10) debe valer cero.

De tal manera la ecuación (2.9) queda reducida como sigue:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Ahora multiplíquese por la diferencial $d\alpha$ y calcúlense las derivadas para $\alpha = 0$, entonces

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha dx \quad (2.11)$$

Denotando a la ecuación anterior como δJ , y llamémosle la variación de J , esto es:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta J$$

De modo análogo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y' \quad (2.12)$$

en donde δy representa cierta variación arbitraria de $y(x)$, obtenida por variación del parámetro α en un entorno de su valor cero.

Como δy es arbitraria, de las ecuaciones (2.11) y (2.12) se deduce que

$$\delta J = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 \delta y dx = 0$$

sólo si

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Por lo tanto, J solo es extremal para las curvas $y(x)$ tales que F satisface la ecuación diferencial (2.13), que es la ecuación de Euler-Lagrange.

2.6 Integrabilidad de la ecuación de Euler [1] [7] [8]

A continuación, se dará formalidad al resultado obtenido al final del capítulo anterior.

2.6.1 Extremales

Teorema 1. *Para que el funcional*

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

definido en el conjunto de funciones $y = y(x)$ con primera derivada continua que satisfacen las condiciones de frontera

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$

alcance un extremo en una función dada $y(x)$, es necesario que dicha función satisfaga la ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Las soluciones de la ecuación (2.13) se denominan *extremales* (curvas de Lagrange).

El funcional (2.5) puede alcanzar un extremo sólo en las extremales que satisfacen las condiciones (2.4).

Este problema de frontera no siempre tiene solución, y en caso de que exista solución, ésta puede no ser única.

La ecuación de Euler-Lagrange (2.13) del funcional (2.5) es una ecuación diferencial de segundo orden, por lo cual su solución $y(x)$ debe tener derivada segunda $y''(x)$, sin embargo, se presentan casos en los que el funcional (2.5) alcanza un extremo en una función que no es dos veces derivable.

Teorema 2. *Sea $y(x)$ solución de la Ecuación de Euler*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Si la función $F(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive, entonces en todos los puntos (x, y) donde

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$$

la función $y = y(x)$ tiene derivada segunda continua.

De aquí, podemos concluir un resultado mayor:

Corolario. *Una extremal $y = y(x)$ puede tener picos solo en los puntos donde $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$.*

2.6.2 Casos elementales de integrabilidad

Caso 1. F no depende de y' : $F = F(x, y)$ (2.14)

En este caso la ecuación de Euler es

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

La solución de esta ecuación no-diferencial finita no contiene elementos de arbitrariedad y en general no satisface las condiciones (2.4).

El extremo se puede alcanzar solo en casos de excepción, cuando la curva (2.15) pasa por los puntos definidos en las ecuaciones (2.4).

Caso 2. F depende de y' linealmente:

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' \quad (2.16)$$

En este caso la ecuación de Euler es

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

Igual que en el primer caso, la ecuación obtenida es finita y no diferencial. La curva determinada por la ecuación (2.17) en general no satisface las condiciones (2.4), por lo que usualmente el problema variacional no tiene solución en la clase de funciones continuas. El funcional no depende del camino de integración, es decir, el valor del funcional J es el mismo en todas las curvas admisibles, por lo que el problema variacional pierde sentido.

Caso 3. F depende sólo de y' : $F = F(y')$ (2.18)

La ecuación de Euler es

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (2.19)$$

En este caso las extremales son todas las posibles líneas rectas

$$y = C_1 x + C_2 \quad (2.20)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Caso 4. F no depende de y : $F = F(x, y')$ (2.21)

En este caso la ecuación de Euler es

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.22)$$

de donde
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \quad (2.23)$$

donde C_1 es una constante arbitraria.

La ecuación (2.23) es una ecuación diferencial de primer orden e integrándola se hallan las extremales del problema variacional.

Caso 5. F no depende explícitamente de x

$$F = F(y, y') \quad (2.24)$$

En este caso la ecuación de Euler es

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0 \quad (2.25)$$

El caso 5 dice que la ecuación de Euler (2.13) puede simplificarse cuando

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Consideremos nuevamente la ecuación (2.13)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

y multiplíquese por

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

entonces

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \right) - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} F(y, y') - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

finalmente

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \quad (2.26)$$

donde C_1 es una constante arbitraria. La ecuación (2.26) puede ser integrada despejando y' y separando las variables, o introduciendo un parámetro.

Capítulo 3

Rodar en un plano inclinado

Se dice que el movimiento de un cuerpo es rectilíneo y uniformemente acelerado, cuando se mueve en línea recta y con aceleración constante. Se analizará en este capítulo el movimiento de un cuerpo esférico a lo largo de un plano inclinado.

Cuando el cuerpo rota a la vez que se traslada, podrá hacerlo sin deslizar o con deslizamiento. Esto dependerá de la fuerza de rozamiento, que desempeña aquí un papel importante.

3.1 Rodar sin deslizar [5] [6]

- Para que un cuerpo ruede sin deslizar, se necesita que exista una fuerza de rozamiento, pero esta fuerza no realiza trabajo, por lo que la energía mecánica se conserva.

3.1.1 Ecuaciones de la dinámica

Se estudiará el movimiento de un cuerpo que rueda a lo largo de un plano inclinado. Sobre el cuerpo actuarán las siguientes fuerzas (Fig. 3.1)

- El peso mg
- La reacción del plano inclinado (normal) N
- La fuerza de rozamiento F_{roz}

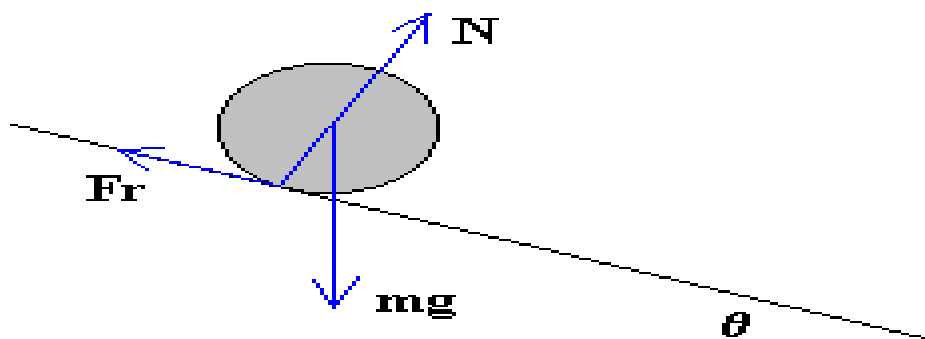


Figura 3.1: Fuerzas que actúan sobre un cuerpo en un plano inclinado

Descomponiendo el peso en una fuerza a lo largo del plano y otra perpendicular al plano inclinado (Fig.3.2), se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento

- Movimiento de traslación del centro de masa

$$ma_{cm} = mg \cdot \text{sen}(\theta) - F_{roz} \quad (3.1)$$

- Movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa

$$F_{roz} \cdot r = I \cdot \alpha \quad (3.2)$$

- Relación entre el movimiento de traslación y rotación (sin deslizar)

$$a_{cm} = \alpha \cdot r \quad (3.3)$$

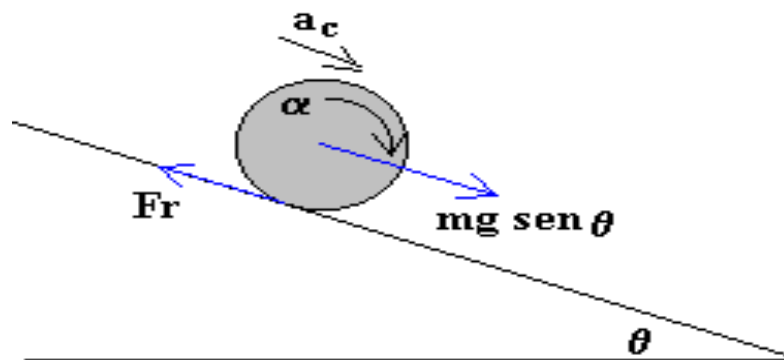


Figura 3.2: Componente del peso en la dirección del movimiento

El momento de inercia I se expresa como

$$I = k \cdot mr^2 \quad (3.4)$$

donde k es un factor que depende de la geometría del cuerpo, cuyo valor es $\frac{2}{5}$ para el caso de una esfera, por lo tanto

$$I_{esfera} = \frac{2}{5} mr^2 \quad (3.5)$$

Si se conocen el ángulo de inclinación y el momento de inercia I del cuerpo, se pueden calcular la aceleración del centro de masa a_{cm} y la fuerza de rozamiento F_{roz}

$$a_{cm} = \frac{g \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.6)$$

$$F_{roz} = \frac{2}{5} \cdot \frac{mg \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.7)$$

Para calcular la velocidad del cuerpo después de haber recorrido una distancia x a lo largo del plano inclinado, se emplean las ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (3.8)$$

Si el cuerpo parte desde el reposo y además se coloca el origen coordenado en el punto de partida, la ecuación queda

$$x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (3.9)$$

Derivando respecto al tiempo, la velocidad será

$$v_{cm} = a_{cm} t \quad (3.10)$$

Combinando las ecuaciones (3.9) y (3.10), se obtiene la velocidad final del centro de masa del cuerpo al llegar al otro extremo del plano inclinado, después de recorrer una distancia x

$$v_{cm}^2 = a_{cm}^2 t^2 = 2a_{cm} x$$

Entonces

$$v_{cm} = \sqrt{2a_{cm} x} \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.6)

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2g \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \cdot x} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}}} \quad (3.12)$$

donde h es la altura de partida del cuerpo referida a la posición

$$h = x \cdot \text{sen}(\theta) \quad (3.13)$$

3.1.2 Conservación de energía

La energía cinética de traslación de un cuerpo está dada por

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \quad (3.14)$$

y su energía cinética rotacional es

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.15)$$

Entonces la energía cinética de un cuerpo que rueda, es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.16)$$

El trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que rueda es la suma del trabajo en el movimiento de traslación más el trabajo en el movimiento de rotación (Fig.3.3)

$$W = W_{tras} + W_{rot} \quad (3.17)$$

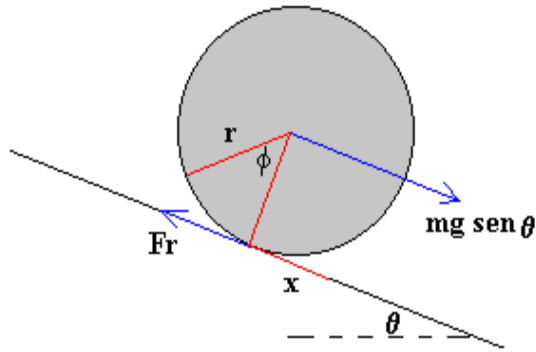


Figura 3.3: Trabajo sobre el cuerpo que rueda

Haciendo uso de la ecuación (3.1) se obtiene la expresión para el trabajo en el movimiento de traslación

$$\begin{aligned} W_{tras} &= (mg \cdot \text{sen}(\theta) - F_{roz}) \cdot x \\ &= mgh - F_{roz} \cdot x \end{aligned} \quad (3.18)$$

A partir de la ecuación (3.2), el trabajo en el movimiento de rotación es

$$W_{rot} = F_{roz} \cdot r \cdot \phi = F_{roz} \cdot x \quad (3.19)$$

Por lo tanto, el trabajo total es

$$W = mgh \quad (3.20)$$

Se observa que la fuerza de rozamiento en el movimiento de rodar produce dos trabajos de la misma magnitud pero de signos opuestos, por lo que no se debe incluir el trabajo de la fuerza de rozamiento en el balance de energía.

El trabajo de la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo modifica su energía cinética, tanto de traslación del centro de masa como de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.21)$$

Cuando el cuerpo empieza a girar, irá adquiriendo una rapidez angular cada vez mayor y, por lo tanto, su energía cinética rotacional (3.15) también irá aumentando.

Como la variación de energía potencial es la misma en ambos casos (si el cuerpo rueda o si desliza sin rodar), necesariamente al final del recorrido la energía cinética debido a su traslación (3.14) debe ser menor y, por lo tanto, el cuerpo que rueda debe llegar al final del plano inclinado con una rapidez menor a la experimentada por la que se desliza sin rodar.

3.1.3 Condición de rodadura

Existe una condición de ligadura que relaciona la velocidad con la que se traslada el centro de masa y la velocidad angular de rotación del cuerpo. En una rodadura el punto de apoyo del cuerpo no sufre desplazamiento con respecto al suelo, es decir, está instantáneamente en reposo.

Supóngase el cuerpo (esfera) apoyada en el suelo. Para que ruede debe haber alguna fuerza que haga momento con respecto al centro de masa, por ejemplo, una fuerza de rozamiento, pues ni el peso ni la normal ejercen momento con respecto al centro de masa.

Para que la esfera ruede sin deslizar, el desplazamiento del centro de masa debe coincidir con el arco s correspondiente al ángulo girado, como se muestra en la siguiente figura

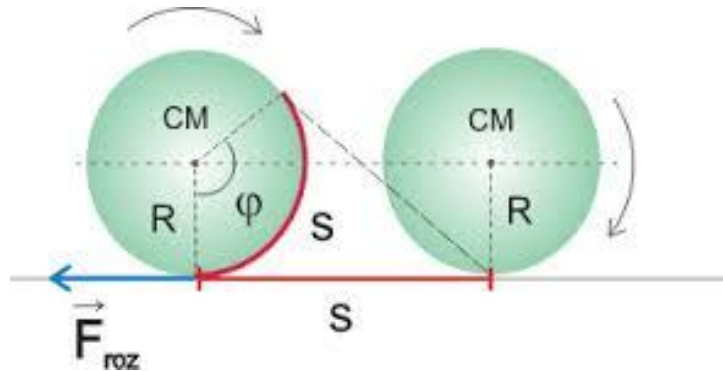


Figura 3.4: Condición de rodadura

La velocidad con la que se traslada el centro de masa será la derivada con respecto al tiempo de dicho desplazamiento

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\phi)}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} \quad (3.22)$$

Como la velocidad angular de rotación ω es la variación del ángulo girado, se tiene

$$v_{cm} = R\omega \quad (3.23)$$

Esta expresión es la **condición de rodadura**, que da la relación que debe haber entre la velocidad de traslación del centro de masa y la velocidad angular de rotación para que el cuerpo ruede sin deslizar.

Derivando se obtiene la ya mencionada ecuación (3.3), que es la relación entre las aceleraciones

$$a_{cm} = \alpha R$$

Para comprender mejor la idea de que la fuerza de rozamiento no realiza trabajo, analicemos la siguiente figura

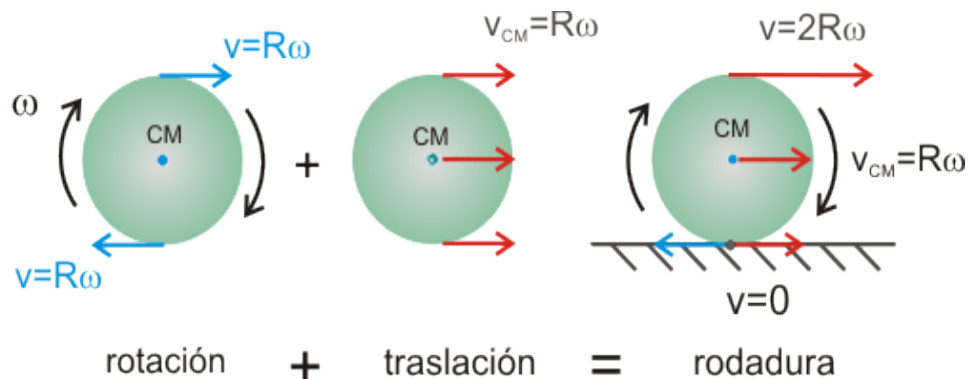


Figura 3.5: Movimiento de rodadura

El movimiento de rodadura se descompone en un movimiento de rotación con respecto a un eje que pase por el centro de masa y un movimiento de traslación. En la rotación las partículas del borde describen un movimiento circular con una velocidad lineal $v = R\omega$ con respecto al centro de masa; a su vez el centro de masa se traslada con una velocidad $v_{cm} = R\omega$ con respecto al suelo (por la condición de rodadura). Luego la velocidad del punto de apoyo con respecto al suelo es nula, ya que ambas se cancelan, por lo que no se produce desplazamiento.

Como no hay desplazamiento, aplicando la definición de trabajo a la fuerza de rozamiento

$$W = F \cdot x \quad (3.24)$$

el trabajo que ésta realiza sobre el punto de apoyo es nulo, por lo tanto en una rodadura la fuerza de rozamiento no disipa energía.

Retomando la ecuación de conservación de energía (3.21), se mostrará que la velocidad final del centro de masa del cuerpo al llegar al final del plano inclinado es la misma que se calculó (3.12) a partir de la dinámica.

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2}{5}}}$$

La velocidad angular ω que se ha de considerar viene dada por la condición de rodadura (3.23), que dice que para que el balón ruede sin deslizar debe cumplirse que

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} \quad (3.25)$$

Reescribiendo la ecuación de balance de energía

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v_{cm}^2}{R^2}$$

$$gh = \frac{1}{2}v_{cm}^2\left(1 + \frac{2}{5}\right)$$

Por lo tanto

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{2}{5}\right)}}$$

que es la misma que se había obtenido.

3.2 Rodar con deslizamiento [5] [6]

- Cuando el cuerpo rueda con deslizamiento, la fuerza de rozamiento cambia de estática a cinética y realiza un trabajo que se transforma en una disminución de la energía final del cuerpo.

La fuerza de rozamiento F_{roz} en un cuerpo que rueda sin deslizar se calcula resolviendo las ecuaciones de movimiento, como se vio en temas anteriores

$$F_{roz} = \frac{2}{5} \cdot \frac{mg \cdot \text{sen}(\theta)}{1+\frac{2}{5}}$$

Para que haya movimiento de rodar sin deslizar se tiene que cumplir que

$$F_{roz} \leq \mu_s \cdot N \quad (3.26)$$

Donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático que depende de la naturaleza de los cuerpos en contacto, la esfera y el carril, y N la reacción del plano inclinado

$$N = mg \cdot \cos(\theta) \quad (3.27)$$

Combinando estas tres ecuaciones, el cuerpo rodará por el plano inclinado sin deslizar hasta un determinado ángulo límite, aquel en el que se cumple

$$\mu_s \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{\tan(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.28)$$

3.2.1 Ecuaciones de la dinámica

Si no se cumple la condición (3.28), el cuerpo rueda y desliza, la fuerza de rozamiento toma el valor

$$f_{roz} = \mu_k \cdot N \quad (3.29)$$

donde μ_k es el coeficiente de rozamiento dinámico.

Entonces las ecuaciones del movimiento del centro de masa del cuerpo son:

- El movimiento de traslación del centro de masa (3.1) será

$$ma_{cm} = mg \cdot \text{sen}(\theta) - \mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \quad (3.30)$$

Despejando la aceleración queda

$$a_{cm} = g(\text{sen}(\theta) - \mu_k \cdot \cos(\theta)) \quad (3.31)$$

- El movimiento de rotación (3.2) alrededor de un eje que pasa por el centro de masa es

$$\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \cdot r = I \cdot \alpha \quad (3.32)$$

Despejando la aceleración se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \frac{2}{5} mr^2 &= \mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \cdot r \\ \alpha &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\mu_k \cdot g \cdot \cos(\theta)}{r} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se aprecia que deja de cumplirse la condición (3.3) de rodar sin deslizar

$$a_{cm} = \alpha \cdot r$$

Se vio que la velocidad final v_{cm} del cuerpo, ecuación (3.11), al llegar al final del plano inclinado después de haber recorrido una distancia x , o haber descendido una altura h es

$$v_{cm}^2 = 2a_{cm}x$$

Sustituyendo la ecuación (3.31) se tiene

$$\begin{aligned} v_{cm}^2 &= 2g(\text{sen}(\theta) - \mu_k \cdot \cos(\theta)) \cdot x \\ &= 2gh - 2gh \cdot \mu_k \cdot \cot(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\theta))} \quad (3.34)$$

El cuadrado de la velocidad angular ω del cuerpo después de haber girado un ángulo φ es $\omega^2 = 2\alpha\varphi$

Así
$$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi} \quad (3.35)$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\mu_k \cdot g \cdot \cos(\theta)}{r} \cdot \varphi} \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot \mu_k \cdot g \cdot \cos(\theta)}{r} \cdot \varphi} \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.2.2 Conservación de energía

La energía inicial del cuerpo es la energía potencial

$$E_p = mgh \quad (3.37)$$

La energía final del cuerpo del cuerpo es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa, más la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{cm}^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2\right) \quad (3.38)$$

Trabajo W_r de la fuerza de rozamiento $f_{roz} = \mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta)$

- En el movimiento de traslación

$$-f \cdot x \quad (3.39)$$

- En el movimiento de rotación

$$f \cdot r \cdot \varphi \quad (3.40)$$

El trabajo total es

$$\begin{aligned} W_{roz} &= -f \cdot (x - r \cdot \varphi) \\ &= -\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \cdot (x - r \cdot \varphi) \\ &= -\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \cdot \left(x - r \cdot \frac{\omega^2}{2\alpha}\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo x y α , de las ecuaciones (3.13) y (3.33) queda

$$W_{roz} = -\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \frac{h}{\text{sen}(\theta)} + \frac{1}{5}mr^2\omega^2 \quad (3.41)$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento modifica la energía del cuerpo, y es igual a la diferencia entre la energía final e inicial del cuerpo

$$W_{roz} = E_f - E_i \quad (3.42)$$

Entonces

$$-\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \frac{h}{\text{sen}(\theta)} + \frac{1}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{cm}^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2\right) - mgh$$

Se anula el trabajo de la fuerza de rozamiento correspondiente al movimiento de rotación $f \cdot r \cdot \varphi$, con la energía cinética de rotación

$$-\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \frac{h}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 - mgh \quad (3.43)$$

Por lo tanto, se obtiene la misma expresión (3.34) para la velocidad v_{cm} que la deducida a partir de las ecuaciones de la dinámica

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\theta))}$$

3.3 Velocidad final del centro de masa del cuerpo en función de la altura [5] [6]

Se vio que cuando un cuerpo rota y se traslada al mismo tiempo, lo hará sin deslizar o con deslizamiento.

3.3.1 Ángulo del plano inclinado menor que el ángulo crítico

Si $\theta \leq \theta_c$, el cuerpo rueda sin deslizar.

La velocidad final v_{cm} que alcanza el cuerpo en función de su altura inicial h es la de la ecuación (3.12)

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2g}{(1+\frac{2}{5})} h}$$

El cuadrado de la velocidad v_{cm} es proporcional a la altura h

3.3.2 Ángulo del plano inclinado mayor que el ángulo crítico

Si $\theta > \theta_c$, el cuerpo rueda y desliza.

En este caso, la velocidad final v_{cm} que alcanza el cuerpo en función de su altura inicial es la de la ecuación (3.34)

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\theta))}$$

donde

$$\cot(\theta) = \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 1} \quad (3.44)$$

Finalmente

$$v_{cm} = \sqrt{2gh \left(1 - \mu_k \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 1} \right)} \quad (3.45)$$

Reescribiendo la ecuación (3.28) se tiene que el ángulo crítico se calcula mediante la fórmula

$$\tan(\theta_c) = \frac{\mu_s(1+k)}{k}$$

Entonces

$$\tan(\theta_c) = \frac{5}{2} \cdot \mu_s \left(1 + \frac{2}{5} \right) \quad (3.46)$$

Si la tangente del ángulo del plano inclinado es mayor que el resultado de ésta ecuación, no se cumplirá la condición de rodadura.

Capítulo 4

La cicloide

Una primera conjetura que se podría hacer, es que la curva de menor tiempo de recorrido entre dos puntos no alineados verticalmente, para un cuerpo bajo la acción de un campo gravitacional es una recta, ya que la recta es la curva con menor distancia entre esos puntos. Galileo, mucho antes del reto de Bernoulli, pensaba equivocadamente que esta curva era un arco de circunferencia. Se verá enseguida, con cálculo variacional, que la solución correcta es un arco de cicloide.

Con la finalidad de comprobarlo, los dos puntos que se elegirán son: el extremo del arco y su punto mínimo (que coincide con la mitad de su longitud), por lo que dichos puntos conformarán medio arco de cicloide. La razón de elegir construir exactamente medio arco es porque justamente para esta longitud también se cumple la propiedad de ser *tautócrona*, como se demostrará más adelante.

4.1 La cicloide como braquistócrona [1] [7] [8] [9]

Se sitúa un sistema cartesiano tal que dos puntos A y B tengan coordenadas $(0,0)$ y (a, y_1) , respectivamente, con $y_1 < 0$. Se requiere la condición de que $a \neq 0$ para que no estén verticalmente alineados.

Empleando las ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (3.8) y (3.9), vistas en el capítulo anterior

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$
$$x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

un cuerpo en caída libre y cuya velocidad inicial es cero, la altura y en función del tiempo estará dada por

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.1)$$

Despejando el tiempo se tiene que

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad (4.2)$$

De la derivada de la ecuación (4.1) respecto al tiempo, la velocidad es

$$v = \frac{dy}{dt} = g t \quad (4.3)$$

Combinando las ecuaciones (4.2) y (4.3) se tiene otra expresión para la velocidad

$$v = g \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

simplificando:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (4.4)$$

que coincide con la de la ecuación del capítulo anterior (3.11).

Usando el principio de conservación de la energía

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.5)$$

la ecuación (4.4) sigue siendo cierta para un cuerpo que cae a lo largo de una curva, ya que despejando de (4.5) se obtiene

$$v^2 = mgy \frac{2}{m} = 2gy$$

Ahora, recordando que la velocidad se define como

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dt}{dx}v = \frac{dt}{dx}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dt}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Entonces

$$\frac{dt}{dx}v = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$$

Reescribiendo

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{v} \quad (4.6)$$

Finalmente

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} \quad (4.7)$$

Integrando resulta

$$\int \left(\frac{dt}{dx}\right) dx = \int \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} dx$$

Entonces, el tiempo que tardará un cuerpo en descender una determinada altura (tiempo de recorrido) a lo largo de *cierta curva* $y = y(x)$ es

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} dx \quad (4.8)$$

Para resolver este problema variacional, de encontrar la curva de menor tiempo de recorrido, se tomarán en cuenta los casos de integrabilidad de la ecuación de Euler que se presentaron en el segundo capítulo (apartado 2.6.2).

Para ello se hace uso del argumento de la integral (4.8), entonces la función F requerida queda

$$F = \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} \quad (4.9)$$

Como se dijo al principio de este capítulo, el sistema está situado en el origen, entonces el cuerpo que cae está en el punto $A(0,0)$. Se buscará la trayectoria de menor tiempo de recorrido por la que llega a cierto punto $B(a, y_1)$, por lo que las condiciones de frontera mencionadas en la ecuación (2.4) son

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(a) &= y_1 \quad , \quad \text{con } y_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notando que la función F , en la ecuación (4.9), no depende explícitamente de x , entonces la ecuación de Euler (2.13) se resolverá usando el caso 5 de integrabilidad

$$F = F(y, y')$$

Para este caso la ecuación de Euler era

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0$$

Se vio que este caso derivó en la ecuación (2.26)

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$$

Entonces, se requiere hacer el siguiente cálculo

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2gy}{(1+y'^2)}} \frac{2y'}{2gy}$$

Simplificando

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \quad (4.11)$$

Entonces la ecuación (2.26) se escribe

$$\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C_1$$

Simplificando

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = C_1 \quad , \quad \text{con } C_1 = cte$$

O bien

$$2gy(1+y'^2) = C_2 \quad , \quad \text{con } C_2 = cte$$

Finalmente

$$y(1+y'^2) = C_3 \quad , \quad \text{con } C_3 = cte \quad (4.12)$$

Entonces

$$y = \frac{C_3}{(1+y'^2)} \quad (4.13)$$

Para resolver la ecuación conviene hacer el siguiente cambio de variable, sea

$$y'^2 = ctg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.14)$$

Haciendo uso de la siguiente identidad trigonométrica

$$1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha) = \operatorname{csc}^2(\alpha) \quad (4.15)$$

y de las ecuaciones (4.13) y (4.14) se tiene

$$y = \frac{C_3}{(1+y^2)} = \frac{C_3}{\operatorname{csc}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Por lo tanto

$$y = C_3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.16)$$

Considerando la siguiente identidad

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \quad (4.17)$$

la ecuación (4.16) toma la forma

$$y = C_3 \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{2}\right) \quad (4.18)$$

Derivando

$$dy = \frac{C_3}{2} \operatorname{sen}(\theta) d\theta \quad (4.19)$$

Entonces, al combinar las ecuaciones (4.14) y (4.19) se obtiene

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{C_3 \operatorname{sen}(\theta) d\theta}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{C_3 \operatorname{sen}(\theta) d\theta}{2 \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ahora, usando la siguiente identidad

$$\operatorname{sen}(\theta) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.21)$$

Con esto la ecuación (4.20) queda

$$\begin{aligned} dx &= \frac{C_3 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= C_3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = C_3 \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{2}\right) d\theta \end{aligned}$$

Integrando

$$x = \frac{C_3}{2} \int (1 - \cos(\theta)) d\theta$$

Entonces

$$x = \frac{C_3}{2} (\theta - \operatorname{sen}(\theta)) + C_4, \quad C_4 = cte \quad (4.22)$$

De la primera condición de frontera mencionada en las ecuaciones (4.10), se obtiene que $x = 0 = C_4$, entonces las ecuaciones (4.18) y (4.22) quedan

$$\begin{aligned}x &= C(\theta - \text{sen}(\theta)) \\y &= C(1 - \text{cos}(\theta)) \quad , \quad \text{con } C = \text{cte}\end{aligned}\tag{4.23}$$

Se han encontrado las ecuaciones paramétricas de una familia de curvas. Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones paramétricas de la cicloide (1.2), lo que demuestra que, para que el recorrido sea en el menor tiempo posible, la trayectoria que debe seguir el cuerpo ha de ser una cicloide.

Al principio del capítulo se dijo que para comprobar este resultado, se elige construir medio arco de cicloide. Una manera de obtenerlo a partir de las ecuaciones (4.23) es variar el parámetro θ , desde 0 hasta πC

$$\begin{aligned}\text{si } \theta = 0 \quad , \quad x(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad y(\theta) = 0 \\ \text{si } \theta = \pi \quad , \quad x(\theta) = \pi C \quad \text{y} \quad y(\theta) = 2C\end{aligned}\tag{4.24}$$

Con esa elección del parámetro θ , las condiciones de frontera (4.10) son los puntos A y B, cuyas coordenadas resultaron ser

$$A(0,0) \quad , \quad B(\pi C, 2C)\tag{4.25}$$

Entonces se tiene que el límite de la integral de la ecuación (4.8) es

$$a = \pi C\tag{4.26}$$

Se nota que las coordenadas del punto B dependen del valor que se elige para la constante C (que finalmente resulta ser el radio del círculo generatriz, como ya se había dicho en el apartado 1.3.2).

4.2 Tiempo de recorrido sobre la cicloide [1] [7] [8]

Ahora se encontrará el tiempo que tarda en descender un cuerpo recorriendo la cicloide. Se vio en el capítulo anterior, que cuando el cuerpo rota a la vez que se traslada, podrá hacerlo con deslizamiento y sin él, y que esto depende de la fuerza de rozamiento.

Se tienen tres casos a analizar

- Deslizar sin fricción y sin rodar (caso ideal)
- Rodar sin deslizar
- Rodar con deslizamiento

4.2.1 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la cicloide

Recuérdese la ecuación integral que da el tiempo de recorrido (4.8)

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} dx$$

Reescribiendo la ecuación queda

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx \\
 &= \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{(2gy)dx^2}} dx \\
 &= \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}} dx
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ahora, de las ecuaciones (4.23) se tiene

$$\begin{aligned}
 dx &= C(1 - \cos(\theta))d\theta \\
 dy &= C\sin(\theta)d\theta
 \end{aligned}$$

Entonces

$$dx^2 + dy^2 = 2C^2(1 - \cos(\theta))d\theta^2 \tag{4.28}$$

$$dx^2 + dy^2 = 2Cyd\theta^2 \tag{4.29}$$

También, de las ecuaciones (4.23) se ve cómo cambian los límites de la integral para el tiempo

$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces} \quad \theta = 0$$

$$\text{si } x = \pi C \quad \text{entonces} \quad \theta = \pi \tag{4.30}$$

Combinando las ecuaciones (4.27), (4.29) y (4.30) se tiene

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2Cyd\theta^2}{2gy}} \\
 &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^\pi d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{C}{g}} [\theta]_0^\pi
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T_{ideal \text{ cicloide}} = \pi \sqrt{\frac{C}{g}} \tag{4.31}$$

4.2.2 Rodar sin deslizar sobre la cicloide

Esta vez no se puede resolver inmediatamente la ecuación (4.8) para calcular el tiempo, ya que la energía cinética que adquiere el cuerpo al rodar modifica la velocidad de la ecuación (4.4)

$$v = \sqrt{2gy}$$

En el capítulo anterior se vio que la energía cinética de un cuerpo que rueda es

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Y que con la condición de rodadura

$$v_{cm} = R\omega$$

la expresión para la velocidad que ha de adquirir el cuerpo debido a la rodadura es la ecuación (3.12)

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gy}{1+\frac{2}{5}}}$$

Ahora sí, la ecuación para el tiempo de recorrido (4.8) se reescribe de la siguiente manera

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{(1+[y'(x)]^2)(1+\frac{2}{5})}{2gy}} dx \quad (4.32)$$

Reescribiendo

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{(dx^2+dy^2)(1+\frac{2}{5})}{2gy}} \quad (4.33)$$

Nuevamente usando las ecuaciones (4.29) y (4.30) se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2cy(1+\frac{2}{5})d\theta^2}{2gy}} \\ &= \sqrt{\frac{c}{g}\left(1+\frac{2}{5}\right)} \int_0^\pi d\theta \\ &= \sqrt{\frac{c}{g}\left(1+\frac{2}{5}\right)} [\theta]_0^\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T_{rot\ cicoide} = \pi \sqrt{\frac{c}{g}\left(1+\frac{2}{5}\right)} \quad (4.34)$$

4.2.3 Rodar con deslizamiento sobre la cicloide

En el capítulo anterior se vio que si el ángulo de un plano inclinado es mayor que el ángulo crítico $\theta > \theta_c$, el cuerpo tendrá un movimiento combinado entre rodamiento y deslizamiento. Se encontró que la velocidad final v_{cm} del cuerpo está dada por (3.34)

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\theta))}$$

Estudiar este caso de movimiento para la braquistócrona se vuelve muy complicado, puesto que el ángulo de inclinación en ningún momento se encuentra fijo y además el cuerpo empieza a caer a un ángulo de 90° (caída libre, con θ mucho mayor que θ_c) y va disminuyendo gradualmente hasta llegar a 0° .

Para evitar confusiones entre este ángulo θ de inclinación del plano inclinado y el ángulo θ del parámetro en las ecuaciones de la cicloide, se renombrará como α al ángulo del plano.

Por lo tanto, conviene también renombrar como α al ángulo de la pendiente de la cicloide en cualquier punto. Para conocerlo se necesita la derivada respecto a θ de las ecuaciones paramétricas (4.23), entonces

$$\frac{d}{d\theta}(x, y) = C[1 - \cos(\theta), \text{sen}(\theta)]$$

Usando esta ecuación, el ángulo de la pendiente α depende del parámetro θ de las ecuaciones paramétricas de la cicloide de la siguiente manera

$$\tan(\alpha(\theta)) = \frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

Entonces

$$\alpha(\theta) = \arctang\left(\frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)}\right)$$

Entonces la ecuación (3.34) queda

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha(\theta)))}$$

El cuerpo rueda y desliza con esta velocidad mientras se cumple que el ángulo en el recorrido de la cicloide es mayor que ángulo crítico $\alpha(\theta) > \alpha_c(\theta)$.

A partir de que la pendiente sobre la cicloide sea menor que la del ángulo crítico, el movimiento del cuerpo será solamente de rodadura, que está dado por la ecuación (4.33).

Finalmente, usando la ecuación (4.27) el tiempo de recorrido combinando los dos tipos de movimiento será

$$\begin{aligned} T &= T_{rot/desliz\ cicloide} + T_{rot\ cicloide} \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{2gy(1-\mu_k \cot(\alpha(\theta)))}} + \int_a^\pi \sqrt{\frac{(dx^2+dy^2)\left(1+\frac{2}{5}\right)}{2gy}} \\ &= \int_0^{\theta_c} \sqrt{\frac{2Cy d\theta^2}{2gy(1-\mu_k \cot(\alpha(\theta)))}} + \int_{\theta_c}^\pi \sqrt{\frac{2Cy\left(1+\frac{2}{5}\right)d\theta^2}{2gy}} \\ &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\mu_k \cot(\alpha(\theta))}} + \sqrt{\frac{C}{g}} \left(1 + \frac{2}{5}\right) \int_{\theta_c}^\pi d\theta \end{aligned}$$

Esto todavía puede simplificarse con la siguiente identidad

$$\cot[\arctan(x)] = \frac{1}{x}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\cot[\alpha(\theta)] &= \cot\left[\arctang\left(\frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)}\right)\right] \\ &= \frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación para el movimiento combinado de rodar y deslizar, más el movimiento de sólo rodar a lo largo de la cicloide queda

$$T_{mov\ comb\ cicloide} = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu_k \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}\right)}} + \sqrt{\frac{C}{g}} \left(1 + \frac{2}{5}\right) \int_{\theta_c}^{\pi} d\theta \quad (4.35)$$

La evaluación de esta integral depende del coeficiente de fricción dinámico μ_k y del ángulo crítico de la pendiente en los puntos de la cicloide $\alpha_c(\theta)$ (para algún valor θ_c del parámetro θ en las ecuaciones paramétricas de la cicloide). También se dijo en la ecuación (3.46), que el ángulo crítico $\alpha_c(\theta)$ depende del valor del coeficiente de fricción estático μ_s .

En resumen, el cuerpo rueda y resbala durante una parte del medio arco de cicloide (es evidente que al principio el ángulo es muy grande), y después del ángulo crítico el cuerpo sólo rueda. Nótese la complicación matemática para este tipo de movimiento y la falta de control en la observación del experimento.

4.3 La cicloide como tautócrona

En el apartado 1.3.3 se dijo que en la cicloide, además de tener la propiedad de ser braquistócrona, un cuerpo que inicie su descenso hacia el punto más bajo B de la curva (véase nuevamente figura 1.10), tardará la misma cantidad de tiempo si lo hace desde cualquier punto intermedio, por ejemplo los puntos $y_0 = A$ y $y_0 = C$.

Es sabido que la velocidad del cuerpo es $v = \sqrt{2gy}$ donde y es la altura vertical recorrida.

Para demostrar el hecho de que es una tautócrona, supóngase que el cuerpo no empieza en $y = 0$, sino en un punto inferior y_0 , entonces

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} \quad (4.36)$$

De las ecuaciones paramétricas (4.23) se tiene

$$\begin{aligned}y - y_0 &= C[(1 - \cos(\theta)) - (1 - \cos(\theta_0))] \\ &= C[\cos(\theta_0) - \cos(\theta)]\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.36)

$$v = \sqrt{2gC(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

La ecuación para el tiempo de recorrido (4.8) se reescribe

$$T = \int_{x_0}^{C\pi} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gC(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}}$$

Sustituyendo la ecuación (4.28) y usando las condiciones (4.30) queda

$$\begin{aligned} T &= \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2C^2(1-\cos(\theta))d\theta^2}{2gC(\cos(\theta_0)-\cos(\theta))}} \\ &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{\cos(\theta_0)-\cos(\theta)}} d\theta \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para resolver la integral se usa la identidad (4.17)

$$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$$

Al despejar se hace el siguiente cambio de variable

$$1 - \cos(\theta) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Entonces la integral (4.37) queda

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1-2\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)-\left(1-2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\left(\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \end{aligned} \quad (4.38)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$\text{sea } u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{entonces} \quad \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -2du$$

Los límites de la integral se transforman

$$\text{si } \theta = \theta_0 \quad \text{entonces} \quad u = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\text{si } \theta = \pi \quad \text{entonces} \quad u = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces la integral (4.38) queda

$$T = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^0 \frac{-2du}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-u^2}} \quad (4.39)$$

Ahora, se hace el siguiente cambio de variable

$$\text{sea } u = z \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{entonces} \quad du = dz \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

Los límites de la integral se transforman

$$\text{si } u = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{entonces} \quad z = 1$$

$$\text{si } u = 0 \quad \text{entonces} \quad z = 0$$

La integral (4.39) se reescribe

$$T = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_0^1 \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) dz}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - z^2 \cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{c}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Como los valores de la variable en el intervalo de integración tienen valor absoluto menor o igual que 1 entonces

$$T = 2 \sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \arcsen(z) \Big|_0^1$$

$$= 2 \sqrt{\frac{c}{g}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

Por lo tanto

$$T_{tautócrona} = \pi \sqrt{\frac{c}{g}}$$

El tiempo de recorrido resulta ser el mismo que el de la ecuación (4.31). Esto verifica que, como ya se anticipó, el tiempo que le toma llegar hasta su punto más bajo es independiente del punto de partida. Se puede decir que el mayor recorrido que tendría que hacer un cuerpo al soltarlo desde puntos más altos se compensa con una mayor aceleración al estar la pendiente más inclinada.

Huygens también demostró que el tiempo de descenso es igual al tiempo que tarda un cuerpo en caer verticalmente la misma distancia (el diámetro del círculo que genera la cicloide) pero multiplicado por $\frac{\pi}{2}$. Para mostrar esto recuérdese que, en caída libre, la altura y como función del tiempo es (4.1)

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

de donde el tiempo de caída libre es (4.2)

$$t_{caída libre} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Si ahora se sustituye la altura y por el diámetro $2C$ del círculo generatriz queda

$$t_{caída libre} = \sqrt{\frac{2(2C)}{g}} = 2 \sqrt{\frac{C}{g}}$$

Por lo tanto

$$T_{tautócrona} = \frac{\pi}{2} \cdot t_{caída libre}$$

4.4 Ecuación de la recta

Ahora, para comparar el tiempo de recorrido de un cuerpo a través de la braquistócrona con otra trayectoria que una los mismos puntos A y B , se elige la recta que los une, debido a que es la distancia más corta entre ellos.

La recta a construir está sujeta a las características del medio arco de cicloide, pues los extremos de la recta también están determinados por las condiciones de frontera (4.10), y los extremos de ambas curvas son los mismos puntos de las ecuaciones (4.25).

Considerando la ecuación de la recta

$$y(x) = mx + b \quad (4.40)$$

Se verá cómo se transforma con las condiciones impuestas por la braquistócrona. Del punto $A(0,0)$ se tiene que la ordenada al origen es

$$b = 0$$

pues ambas curvas parten del origen del sistema coordenado.

Con el punto $B(\pi C, 2C)$ se calcula el valor de la pendiente, resultando

$$m = \frac{2}{\pi}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que deberá construirse es

$$y = \left(\frac{2}{\pi}\right)x \quad (4.41)$$

4.5 Tiempo de recorrido sobre la recta [1] [7] [8]

Para encontrar el tiempo que tardará en descender el cuerpo a través de la recta, también habrán de considerarse los tres casos de movimiento tratados para la cicloide

- Deslizar sin fricción y sin rodar (caso ideal)
- Rodar sin deslizar
- Rodar con deslizamiento

4.5.1 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la recta

Se tenía la ecuación (4.27) como la expresión para obtener el tiempo de recorrido

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

Ahora, de la ecuación (4.41) se tiene

$$dy = \frac{2}{\pi} dx$$

Entonces

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= dx^2 + \left(\frac{4}{\pi^2}\right) dx^2 \\ dx^2 + dy^2 &= \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) dx^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por lo que la integral para el tiempo (4.27) queda escrita como

$$T = \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) dx^2}{2gy}} \quad (4.43)$$

Sustituyendo la ecuación de la recta (4.41) queda

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{(1+\frac{4}{\pi^2})}{2g(\frac{2}{\pi}x)}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)} \int_0^{\pi C} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)} [2\sqrt{x}]_0^{\pi C} = 2\sqrt{\pi C} \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)} \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$T = \pi \sqrt{\frac{C}{g} \left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2}\right)}$$

Por lo tanto

$$T_{ideal\ recta} = \sqrt{\frac{C}{g} (\pi^2 + 4)} \quad (4.44)$$

4.5.2 Rodar sin deslizar sobre la recta

Por las mismas razones que en el caso de la cicloide, la velocidad que adquiere el cuerpo al rodar estará dada por la ecuación (3.12)

$$v = \sqrt{\frac{2gy}{\left(1+\frac{2}{5}\right)}}$$

Para calcular el tiempo en este caso, se tiene la ecuación (4.33). Si se sustituye la expresión (4.42) se tiene

$$T = \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)dx^2}{2gy}}$$

Sustituyendo la ecuación de la recta (4.41)

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)}{2g\left(\frac{2}{\pi}x\right)}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right)} \int_0^{\pi C} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right)} [2\sqrt{x}]_0^{\pi C} = 2\sqrt{\pi C} \sqrt{\frac{\pi}{4g} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right)} \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$T = \pi \sqrt{\frac{C}{g} \left(\frac{\pi^2+4}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right)}$$

Por lo tanto

$$T_{rot\ recta} = \sqrt{\frac{C}{g} (\pi^2 + 4) \left(1 + \frac{2}{5}\right)} \quad (4.45)$$

Como en el caso de la cicloide, la ecuación que da el tiempo en el movimiento de rotación está afectada por el mismo factor de $\sqrt{\left(1 + \frac{2}{5}\right)}$ comparada con la del caso ideal. El origen de este término viene de la geometría de la esfera, pues como ya se dijo, tiene un momento de inercia de $\frac{2}{5}mr^2$.

4.5.3 Rodar con deslizamiento sobre la recta

La recta construida tiene 32.48° de inclinación, un ángulo relativamente pequeño por lo que estudiar si un cuerpo rodará y deslizará al mismo tiempo sobre ella, dependerá principalmente del coeficiente de fricción. Del capítulo anterior se tenía que el cuerpo rodará sin deslizar hasta un ángulo límite bajo la condición (3.28)

$$\mu_s \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{\tan(\theta)}{1 + \frac{2}{5}}$$

Se dijo que si no se cumplía esta condición, la velocidad final v_{cm} del cuerpo es (3.34)

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}$$

Entonces, comparando con la ecuación (4.27) para calcular el tiempo de recorrido se tiene

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{v_{cm}}} = \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) dx^2}{2gy(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \\ &= \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)}{2g\left(\frac{2x}{\pi}\right)(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4g(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \int_0^{\pi C} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4g(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) [2\sqrt{x}]_0^{\pi C} = 2\sqrt{\pi C} \sqrt{\frac{\pi}{4g(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$T = \pi \sqrt{\frac{C}{g(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \left(\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2}\right)$$

Por lo tanto, el tiempo rotando y deslizando sobre la recta es

$$T_{rot/destliz \text{ recta}} = \sqrt{\frac{C}{g(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \left(\frac{\pi^2 + 4}{\pi^2}\right) \quad (4.46)$$

A pesar de que la pendiente no sea tan grande en el plano inclinado, si el coeficiente de fricción es lo suficientemente pequeño, el cuerpo rueda y resbala. En el caso de esta ecuación el ángulo de inclinación está fijo y solo dependerá del coeficiente de fricción dinámico entre las superficies.

Capítulo 5

Construcción e instrumentación del dispositivo experimental

Hasta ahora todo se ha resuelto de una manera formal y analítica. El siguiente paso de este proyecto consiste en la construcción de un dispositivo experimental, que permita resolver empíricamente el problema planteado por Bernoulli en su famoso reto del siglo XVII.

5.1 Programación para obtener las curvas [10]

Para la construcción de las curvas se hace un programa en Matlab, a través de él se obtienen las gráficas que servirán de base para construir las trayectorias en madera.

5.1.1 Programa para la cicloide

En el capítulo 4 se dedujeron las ecuaciones paramétricas de la braquistócrona (4.23), y se hizo notar que coinciden con las ecuaciones de la cicloide (1.2) obtenidas en el primer capítulo. Por simplicidad en la programación, se elige que la constante C (radio de la circunferencia generatriz) sea igual a 1 y se grafican en Matlab las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= (\theta - \text{sen}(\theta)) \\ -y &= (1 - \text{cos}(\theta))\end{aligned}\tag{5.1}$$

El signo negativo en la segunda coordenada, viene del hecho de que se construirá una cicloide invertida.

Es necesario mencionar que a pesar de que a la constante C se le asigne el valor 1, esta constante tiene unidades de longitud debido a que se trata del radio de la circunferencia generadora. Más adelante se observará que al aumentar el tamaño de las gráficas para imprimirlas, C adquiere valor en metros.

En el capítulo anterior, se vio que con las condiciones (4.24) se obtiene la gráfica de medio arco de cicloide, cuyos extremos son los puntos de la ecuación (4.25).

Como en la programación se ha hecho la constante $C = 1$, dichos puntos quedan

$$A(0,0) \quad , \quad B(\pi, -2) \quad (5.2)$$

Programa en Matlab para la cicloide

- `theta = 0 : 0.001 : pi`
- `x = theta - sin(theta)`
- `y = 1 - cos(theta)`
- `plot (x,-y)`
- `title 'MEDIO ARCO DE CICLOIDE'`
- `xlabel 'Eje X'`
- `ylabel 'Eje Y'`

La gráfica del medio arco de cicloide realizada en Matlab con dichas especificaciones es la siguiente

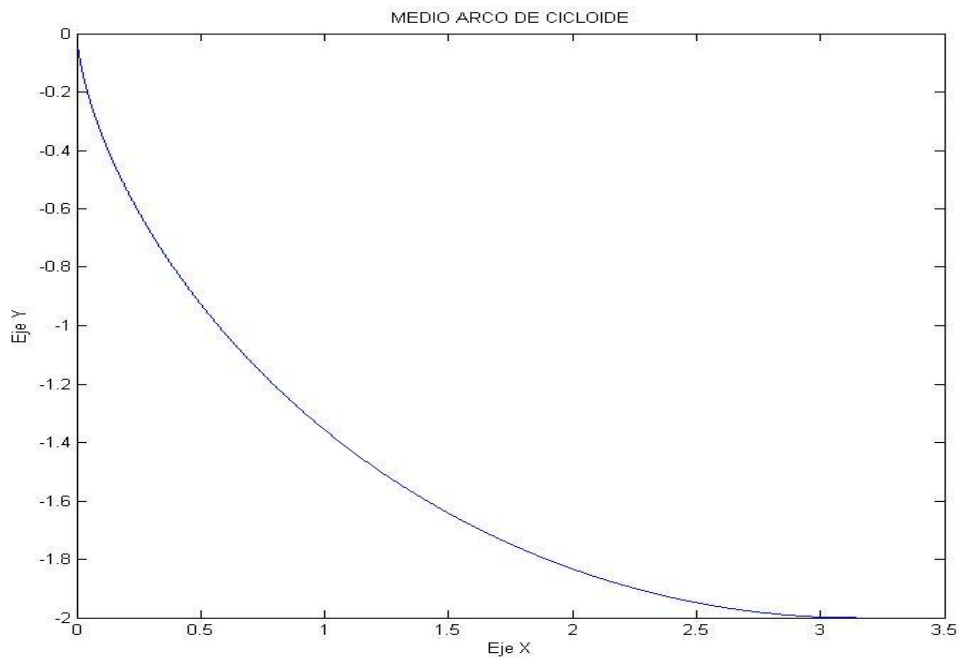


Figura 5.1: Medio arco de cicloide en Matlab

5.1.2 Programa para la recta

También en el capítulo anterior, se obtuvo la ecuación de la recta (4.41). Es claro que debe tener los mismos extremos A y B de la cicloide de la ecuación (5.2).

Programa en Matlab para la recta

- $x = 0 : 0.001 : \pi$
- $y = (-2/\pi)*x$
- `plot(x,y)`
- `title 'RECTA'`
- `xlabel 'Eje X'`
- `ylabel 'Eje Y'`

La gráfica de la recta con el programa hecho en Matlab y las características mencionadas se muestra a continuación

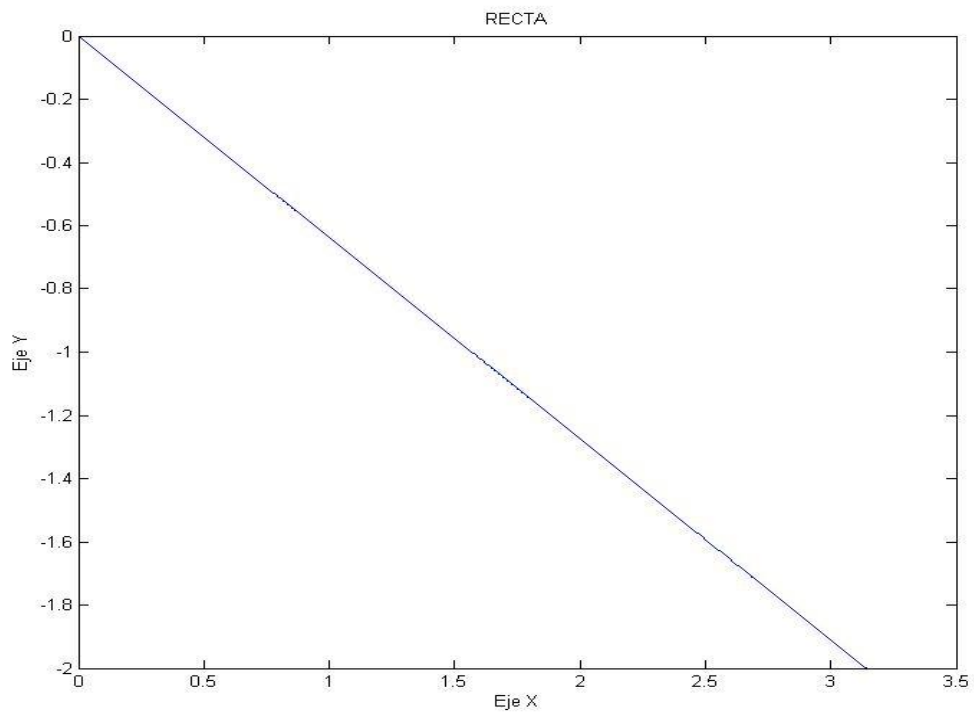


Figura 5.2: Recta en Matlab

5.2 Construcción de las curvas en madera

Las dos gráficas obtenidas anteriormente se grafican en una sola para la impresión en un póster, que sirve de guía para construir las dos curvas en madera.

Programa en Matlab de ambas trayectorias

- $\theta = 0 : 0.001 : \pi$
- $x = \theta - \sin(\theta)$
- $y = 1 - \cos(\theta)$
- `plot(x,-y)`

- `hold on`
- $x = 0 : 0.001 : \pi$
- $y = (-2/\pi)*x$
- `plot(x,y)`
- `title 'TRAYECTORIAS'`
- `xlabel 'Eje X'`
- `ylabel 'Eje Y'`

Se muestran en la siguiente figura las dos trayectorias juntas para el póster

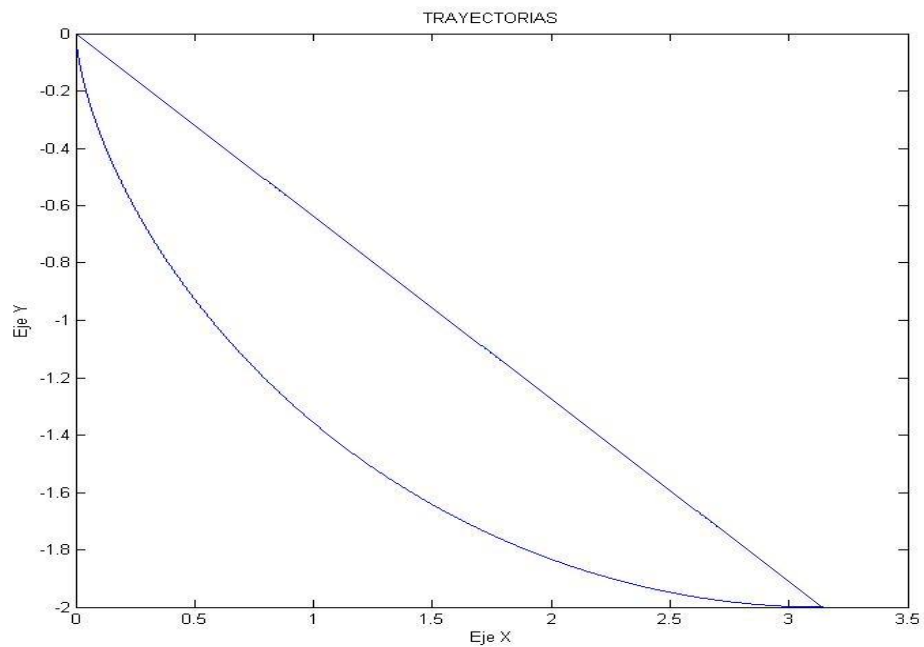


Figura 5.3: Curvas en Matlab

Esta imagen obtenida en Matlab se imprimió en papel fotográfico de 120×90 centímetros para ampliar considerablemente sus dimensiones pero cuidando de guardar las proporciones (a escala). Es aquí donde se aprecia que el anterior valor elegido para la constante $C = 1$ (radio de la circunferencia), varía al momento de la ampliación quedando finalmente con un valor real de

$$C = \frac{1.16}{\pi} \text{ metros} \quad (5.3)$$

Con este resultado, el punto B de las ecuaciones (5.2) queda

$$B(\pi C, -2C)$$

Por lo que las coordenadas finales, en metros, de los extremos de las curvas serán

$$A(0,0) \quad , \quad B(1.16, -0.738) \quad (5.4)$$

Con el póster como base, las curvas fueron transferidas a la madera a manos de un carpintero



Figura 5.4: Curvas en madera

5.3 Longitudes

El cálculo integral permite determinar la longitud de una curva. A continuación se encontrarán las longitudes del medio arco de cicloide y la recta construidas.

5.3.1 Longitud de medio arco de cicloide

En el capítulo 1, sección 1.3.5, se mostró rápidamente que la longitud de un arco de cicloide es ocho veces el radio del círculo que la genera. Enseguida se calculará la longitud del medio arco construido de manera detallada empleando las ecuaciones paramétricas.

Si se considera una curva $y = y(x)$ y su respectiva derivada $y' = y'(x)$, continuas en un intervalo $[a, b]$, la longitud del arco S delimitada por ese intervalo, se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.5)$$

Reescribiendo se obtiene una relación que facilitará los cálculos

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} dx \end{aligned}$$

Finalmente

$$S = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5.6)$$

Para determinar la longitud de media cicloide, conviene retomar algunas ecuaciones del capítulo 4.

Se tenía que las ecuaciones paramétricas (4.23) de la cicloide son

$$x = C(\theta - \text{sen}(\theta))$$

$$y = C(1 - \text{cos}(\theta))$$

donde $C = \frac{1.16}{\pi}$ metros

También se obtuvo la relación (4.28)

$$dx^2 + dy^2 = 2C^2(1 - \text{cos}(\theta))d\theta^2$$

y los límites de la integral estaban dados por las ecuaciones (4.30)

$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces} \quad \theta = 0$$

$$\text{si } x = \pi C \quad \text{entonces} \quad \theta = \pi$$

Por lo tanto la longitud de arco (5.6) de la mitad de la cicloide se escribe

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi C} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2C^2(1 - \cos(\theta))} d\theta \\ &= \sqrt{2}C \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

Para resolver la integral, nuevamente se hace uso de la identidad de la ecuación (4.17)

$$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

Reescribiendo la integral queda

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2}C \int_0^{\pi} \sqrt{2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \\ &= 2C \int_0^{\pi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \end{aligned} \tag{5.7}$$

Usando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \frac{\theta}{2} & \text{entonces} & \quad d\theta = 2du \\ \text{si } \theta &= 0 & \text{entonces} & \quad u = 0 \\ \text{si } \theta &= \pi & \text{entonces} & \quad u = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

la ecuación (5.7) toma la forma

$$\begin{aligned} S &= 2C \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\text{sen}(u) du \\ &= 4C \left(-\cos(u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_{\text{media cicloide}} = 4C \tag{5.8}$$

Comparando el resultado con la ecuación (1.4), se verifica que la constante C es el radio del círculo generador de la cicloide.

Entonces, usando (5.8), la braquistócrona construida tiene como longitud

$$S_{\text{braquistócrona}} = 1.477 \text{ metros} \tag{5.9}$$

5.3.2 Longitud de la recta

Nuevamente conviene recordar algunas ecuaciones del capítulo 4. Se había obtenido la ecuación de la recta (4.41), pero como se tiene una cicloide invertida, entonces se requiere cambiar el signo de la pendiente de la recta, por lo que se tiene

$$y = \left(\frac{-2}{\pi}\right)x$$

Para calcular su longitud primero hay que hacer

$$dy = \left(\frac{-2}{\pi}\right) dx$$

Entonces, haciendo uso de la ecuación (5.6) se tiene

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^{\pi C} \sqrt{dx^2 + \left(\frac{-2}{\pi}\right)^2 dx^2} \\ &= \int_0^{\pi C} \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) dx^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)} \int_0^{\pi C} dx \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)} \pi C \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$S_{recta} = C\sqrt{\pi^2 + 4} \quad (5.10)$$

Entonces la longitud de la recta construida es

$$S_{recta} = 1.375 \text{ metros} \quad (5.11)$$

La longitud de la braquistócrona es 10.2 centímetros mayor que la de la recta

$$S_{braquistócrona} > S_{recta}$$

Resulta interesante encontrar esta longitud utilizando el teorema de Pitágoras y comparar el resultado. Considérese la siguiente figura 5.5

La longitud de la recta estará dada por

$$\begin{aligned} S_{recta} &= \sqrt{(\pi C)^2 + (2C)^2} \\ &= C\sqrt{\pi^2 + 4} \end{aligned}$$

que coincide con la ecuación (5.10).

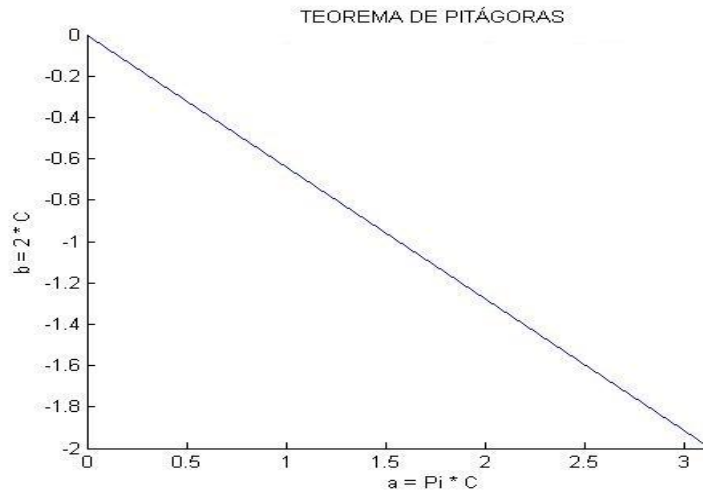


Figura 5.5: Triángulo rectángulo

5.4 Instrumentación del problema

Una vez construidas las curvas en rampas de madera, y el problema de la braquistócrona ya resuelto en forma teórica, sigue la implementación de un dispositivo electrónico, que sea totalmente automático y que incluya dos cronómetros que midan el tiempo de recorrido del cuerpo, en cada trayectoria con gran precisión.

5.4.1 Diseño electrónico

En la construcción de dicho dispositivo intervienen varios retos:

- ✓ Soltar dos cuerpos de igual masa, forma, material y tamaño (balines), desde el punto $A(0,0)$ simultáneamente, y uno en cada rampa (problema de la braquistócrona).
- ✓ Diseñar y sincronizar dos cronómetros con precisión de milésimas de segundo.
- ✓ Que el conteo de los cronómetros inicie exactamente al momento de que los balines comienzan a caer.
- ✓ Que cada balín detenga su propio cronómetro, justo en el instante de llegar al punto $B(\pi C, -2C)$
- ✓ Adicionalmente, diseñar un electroimán móvil para dejar caer el balín desde cualquier punto sobre la curva y medir su tiempo de recorrido (problema de la tautócrona).
- ✓

Un microcontrolador maestro PIC16F84A envía una señal a un integrado L293D que amplifica la corriente para suministrarla a un relevador (interruptor electromagnético), el cual apaga dos bobinas conectadas en serie para dejar caer los dos balines de manera simultánea. Al mismo tiempo el microcontrolador maestro activa otros dos microcontroladores (también PIC16F84A) que operan los cronómetros y visualizan en dos pantallas LCD los tiempos de recorrido para cada trayectoria. Dos interruptores mecánicos al final de las curvas indican al microcontrolador maestro el momento en que su respectivo balín llega al final del recorrido y dicho microcontrolador ordena a los otros dos microcontroladores que detengan también su respectivo cronómetro.

En la siguiente figura se muestra el diagrama.

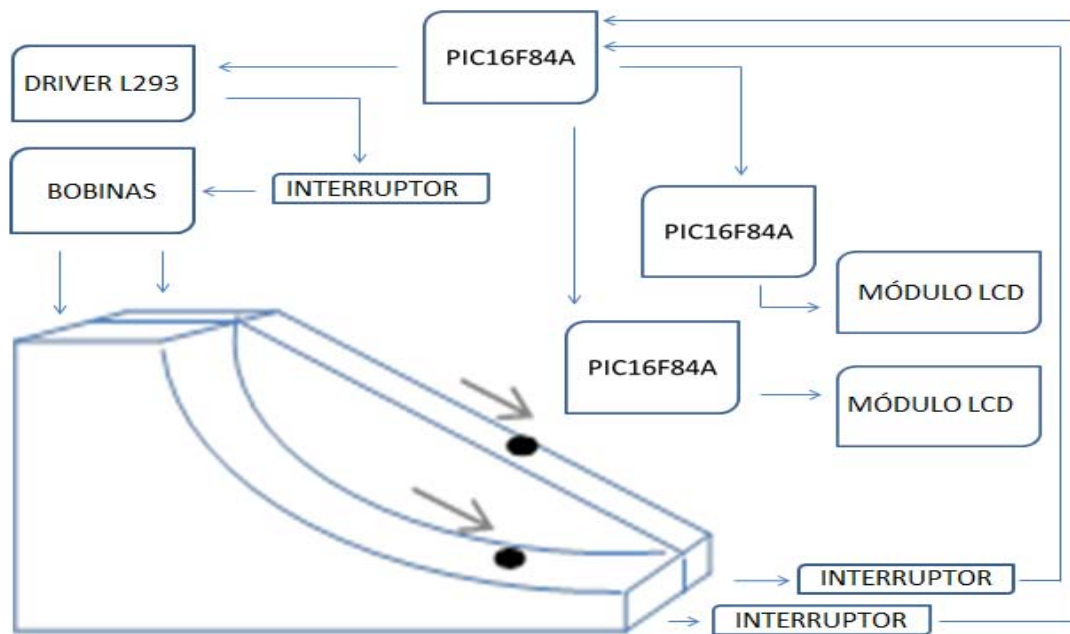


Figura 5.6: Diagrama a bloques del dispositivo experimental

5.4.2 Electroimán para la braquistócrona

Uno de los retos es lograr que ambos balines empiecen su respectivo recorrido al mismo tiempo y para ello se diseñó un electroimán.

Se colocan dos embobinados idénticos al inicio de cada curva conectados en serie. Se hacen pasar 120 volts de corriente alterna por las bobinas para que el campo magnético generado por ellas sostenga, cada una, un balín. Es sabido que una vez que la corriente sea interrumpida, el campo magnético desaparecerá y ambos balines caerán por su respectiva rampa.

Este método de hacer circular o interrumpir la corriente a través de las bobinas se consigue utilizando un relevador que se controla con 5 volts. El electroimán se conecta al relevador en la modalidad “normalmente cerrado”, y el control del relevador se realiza con un circuito integrado driver L293D que tuvo que utilizarse para amplificar la corriente que es necesaria para la lógica del relevador.

Inicialmente el driver está apagado por lo que el relevador sigue estando en la modalidad “cerrado” y las bobinas sostienen a los balines. El microcontrolador maestro es programado en lenguaje ensamblador de tal manera que cuando un interruptor le envía una señal, el microcontrolador active el driver, y a su vez el driver active el relevador por lo que cambiará a modo “abierto”, interrumpiéndose así el flujo de corriente a través de las bobinas por lo que el campo magnético generado desaparecerá.

Es así como se consigue la sincronía en la caída de los dos balines.

5.4.3 Temporizadores [11] [12] [13]

Otro reto es que los cronómetros “arranquen” al mismo tiempo que empiezan a caer los balines. La figura 5.7 muestra el diseño del cronómetro realizado en Proteus (ambos cronómetros son idénticos).

También el algoritmo con que se programa el microcontrolador maestro es tal que con la misma señal que se le envió para que activara el driver, activa los otros dos microcontroladores que hacen que los cronómetros empiecen a correr.

De esta forma se consigue que cuando ambos balines caen de manera simultánea, los dos cronómetros también empiezan a correr al instante.

El algoritmo mediante el cual se consigue que los otros dos microcontroladores funcionen como cronómetro también se realiza en lenguaje ensamblador. Como se requiere un estricto control de tiempos, se hará uso de un *timer*.

Un timer se implementa por medio de un contador que determina un tiempo preciso entre el momento en que el valor es cargado y el instante en el que se produce su desbordamiento. Un timer típico consiste en un contador ascendente (o descendente) que, una vez inicializado con un valor, su contenido se incrementa con cada impulso de entrada hasta llegar a su valor máximo $b'11 \dots 11'$, desbordando y volviendo a comenzar desde cero.

El microcontrolador PIC16F84A dispone de un timer principal denominado *Timer 0* o *TMR0*, que es un contador ascendente de 8 bits. El TMR0 se inicializa con un valor, que se incrementa con cada impulso de entrada hasta su valor máximo $b'11111111'$, con el siguiente impulso de entrada el contador se **desborda** pasando a valer $b'00000000'$, circunstancia que se advierte mediante la activación de un flag(bit).

Los impulsos aplicados al TMR0, pueden provenir de los pulsos aplicados al pin *T0CKI* o de la señal de reloj interna ($F_{osc}/4$), lo que permite actuar de dos formas diferentes:

- Como contador de los impulsos que le llegan por el pin *RA4/T0CKI*.
- Como temporizador de tiempos.

El actuar de una u otra forma depende del bit *T0CS* del registro *OPTION*:

- Si $T0CS=1$, el TMR0 actúa como contador.
- Si $T0CS=0$, el TMR0 actúa como temporizador.

Para la adaptación de cada cronómetro en el dispositivo resultó conveniente leer la señal digital del microcontrolador maestro (actuando como pulsador). Esto se realiza eligiendo un protocolo de interrupción, que tiene la característica de la inmediatez con la que se puede interrumpir el programa en cualquier momento, deteniendo así el conteo del cronómetro.

El algoritmo final del cronómetro es tal que permite medir tiempos con una precisión de milésimas de segundo y se muestra en el *apéndice B*.

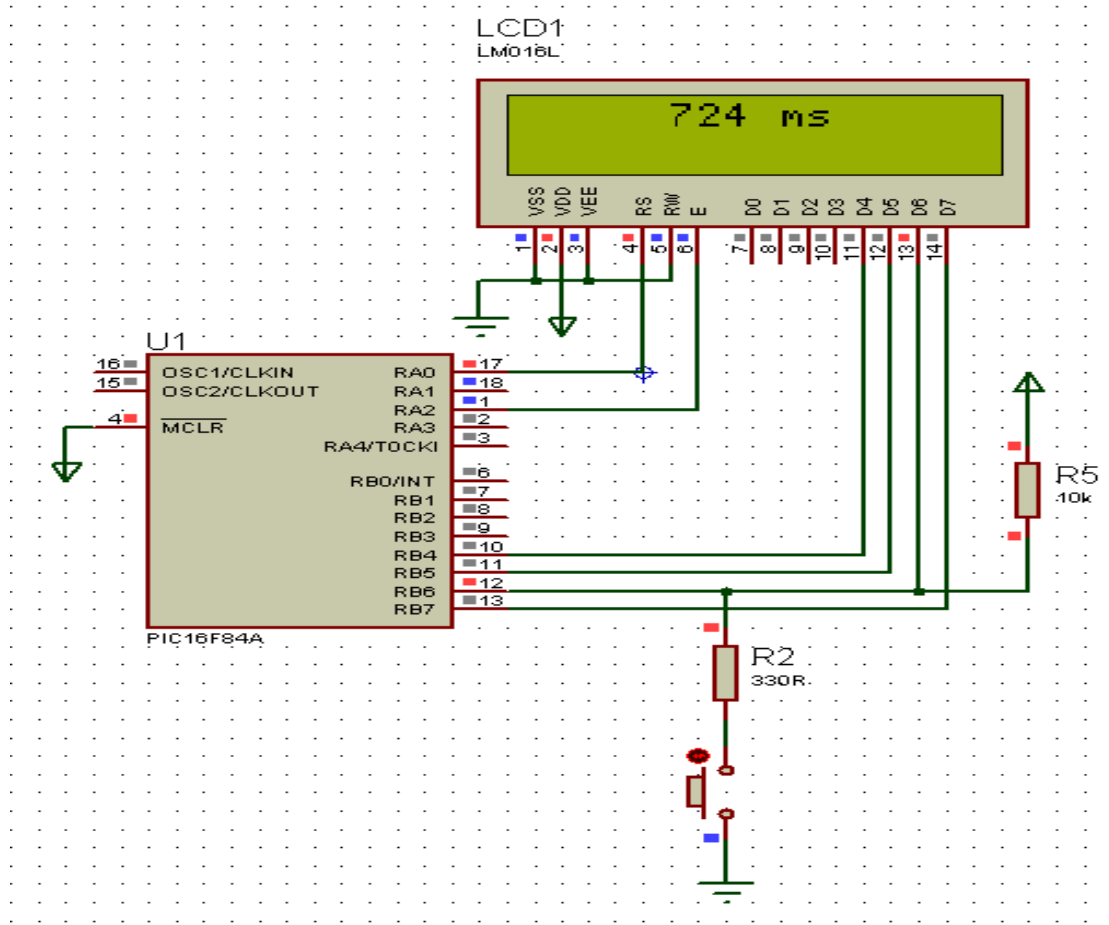


Figura 5.7: Simulación del cronómetro en Proteus

5.4.4 Interruptores

El último de los retos relevantes es que cada balín detuviera su cronómetro justo al momento de llegar al punto B.

Hay un interruptor al final de cada rampa y éstos envían permanentemente una señal al microcontrolador maestro. Mientras los balines van rodando/deslizándose a través de las curvas, la señal de dichos interruptores hace que el programa del microcontrolador maestro mantenga a los otros dos microcontroladores realizando el conteo en los cronómetros. Una vez que cada balín alcanza el extremo de su curva en el punto B, impacta su interruptor y se modifica la señal enviada al microcontrolador maestro por lo que el algoritmo hará que sea enviada una señal a cada microcontrolador para que detenga su cronómetro respectivo que, como ya se mencionó, fue programado con un método de interrupción.

Así es como cada balín detiene su cronómetro justo al momento de terminar su recorrido. El algoritmo de control se muestra en el *apéndice C*, en él se considera el posible efecto “rebote del pulsador” así como el rebote del balín, por lo que se elimina que esto afecte las mediciones.

La figura 5.8 muestra la simulación completa del circuito realizado en Proteus [13] y la figura 5.9 muestra el dispositivo experimental completo. En esta última se aprecian las curvas en madera con un electroimán al principio y un interruptor al final de cada una de ellas, el circuito de control y los dos circuitos correspondientes a cada cronómetro.

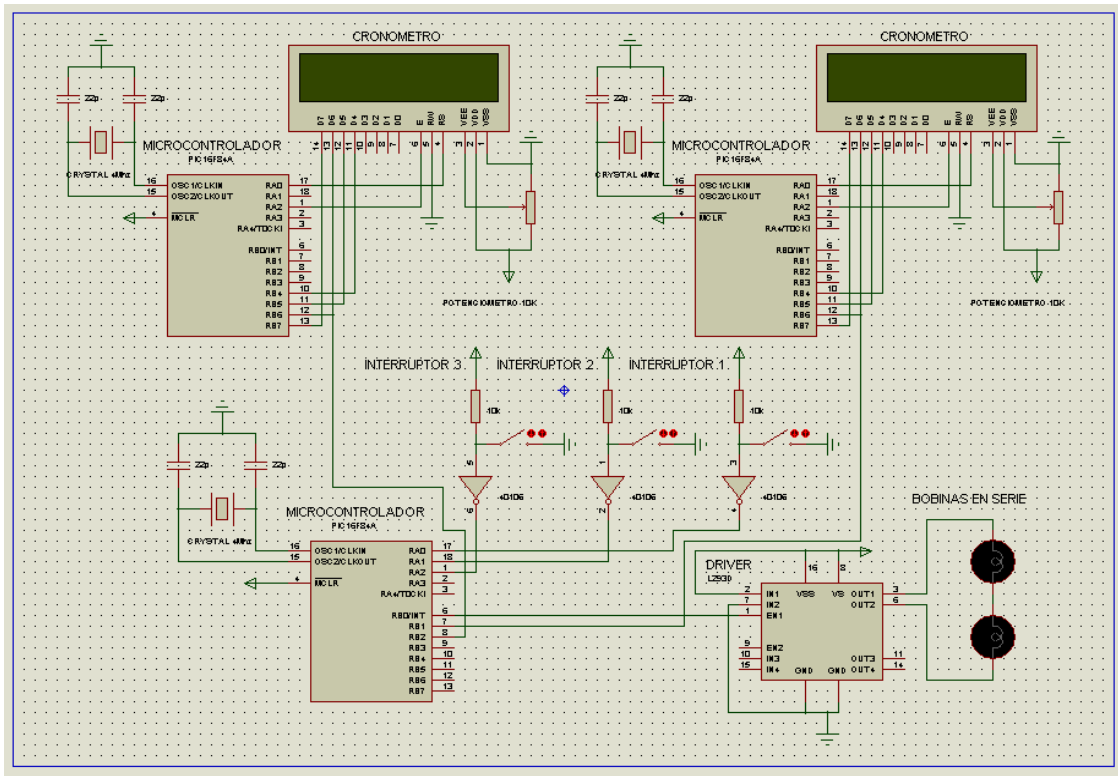


Figura 5.8: Simulación del circuito completo en Proteus

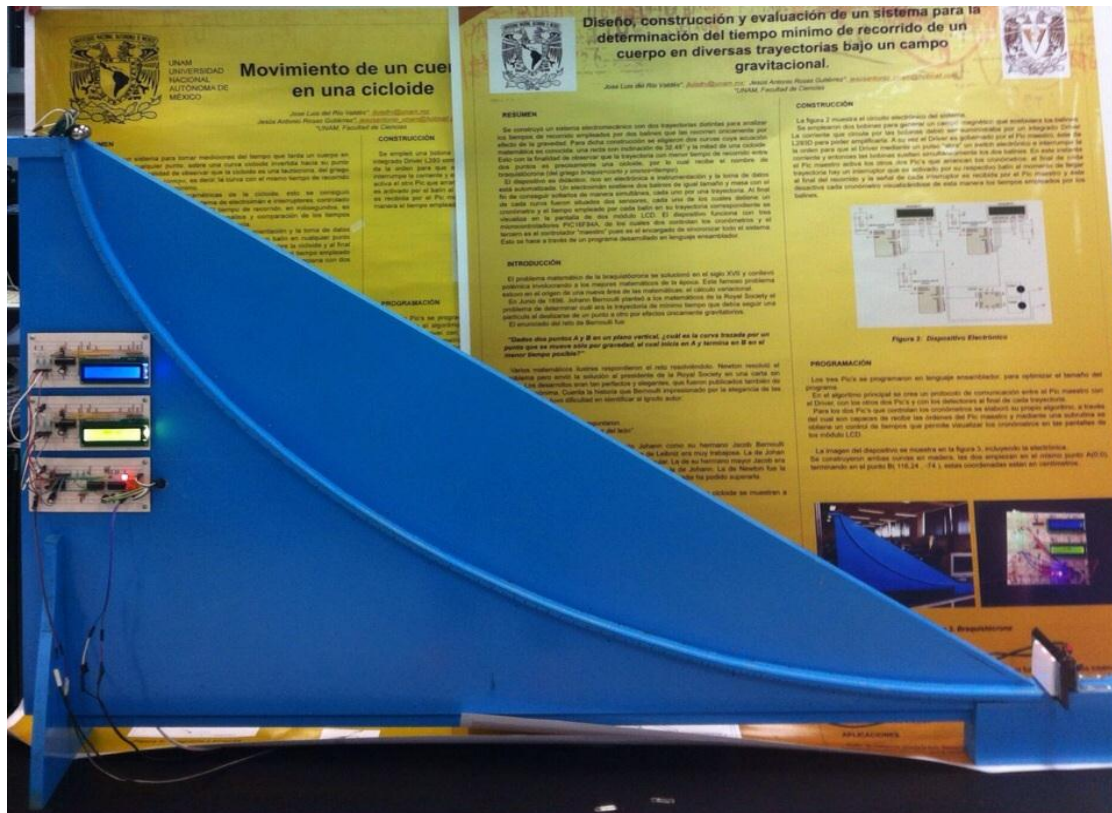


Figura 5.9: Dispositivo experimental

5.4.5 Electroimán para la tautócrona

Como experimento adicional, se adaptó un electroimán desmontable, mismo que puede posicionarse sobre cualquier punto de ella. Dicho embobinado se conecta al mismo sistema de control de la braquistócrona, por lo que el funcionamiento del dispositivo es igual en la toma de datos para este caso.

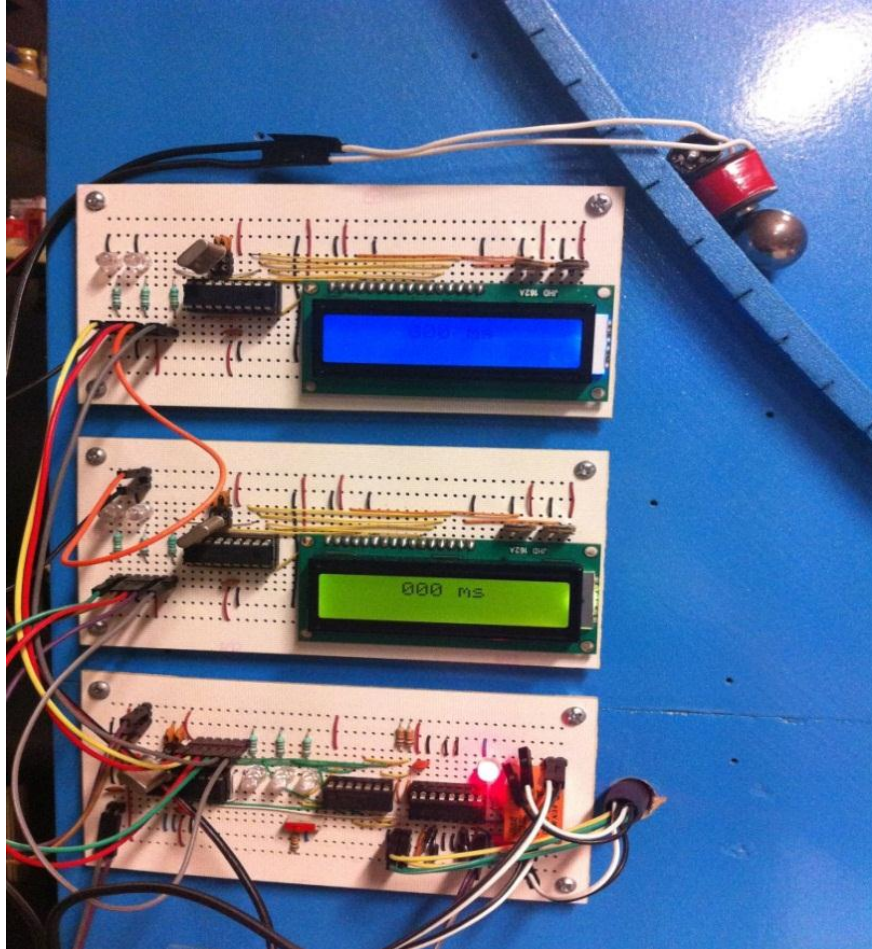


Figura 5.10: Electroimán móvil

5.5 Calibración del cronómetro [11]

El cronómetro se diseñó tomando como base el programa de un cronómetro con precisión de centésimas de segundo que viene realizado en un libro de proyectos con el PIC16F84A. Como se sabe que el cronómetro de centésimas de segundo ya está calibrado, se utilizó para calibrar el cronómetro de milésimas de segundo.

Se conectaron ambos cronómetros en un mismo circuito y con una señal se inicializó el conteo simultáneo de ellos. Se realizaron varias mediciones para tomar nota de la discrepancia que había en sus mediciones, encontrando como máximo un retraso de 3 milisegundos del cronómetro diseñado en relación con el cronómetro del libro. En ocasiones la medida fue exactamente la misma. Esta parte del proyecto está ilustrada en las imágenes del *apéndice D*.

Este error es sistemático y se corrige sumando 3 milisegundos a los datos obtenidos.

Capítulo 6

Datos y resultados

En el capítulo 4 se obtuvieron las ecuaciones con las que se calcula el tiempo de recorrido del balón sobre la cicloide y la recta [ecs.(4.31), (4.34), (4.35), (4.44), (4.45) y (4.46)]. En ellas se aprecia que el valor no depende de la masa del cuerpo esférico ni de su radio, sino del valor de la gravedad y el radio de la circunferencia generatriz de la cicloide. Para verificar esto el experimento se realizó con balines de distinto tamaño y masa.

6.1 Datos experimentales

Las tablas 6.1, 6.2 y 6.3 muestran los tiempos medidos por los cronómetros del dispositivo utilizando simultáneamente ambas trayectorias con los balines 1, 2 y 3 respectivamente (experimento de la braquistócrona).

Las tablas 6.4, 6.5 y 6.6 muestran los tiempos medidos *únicamente* utilizando la trayectoria de la cicloide con los mismos balines 1, 2 y 3 de manera respectiva (experimento de la tautócrona). Cada columna de datos corresponde a puntos sobre la cicloide ubicados a diferente longitud sobre ella, empezando de la parte superior y bajando cada vez a intervalos de un dieciseisavo del arco construido, hasta llegar a la mitad del mismo. Para ilustrar esto, las flechas de la siguiente figura señalan los orificios donde se coloca el electroimán móvil, separados cada uno a una distancia igual a la longitud del medio arco dividida en 16 partes, esto es, cada 9.23 cm de recorrido sobre la curva.

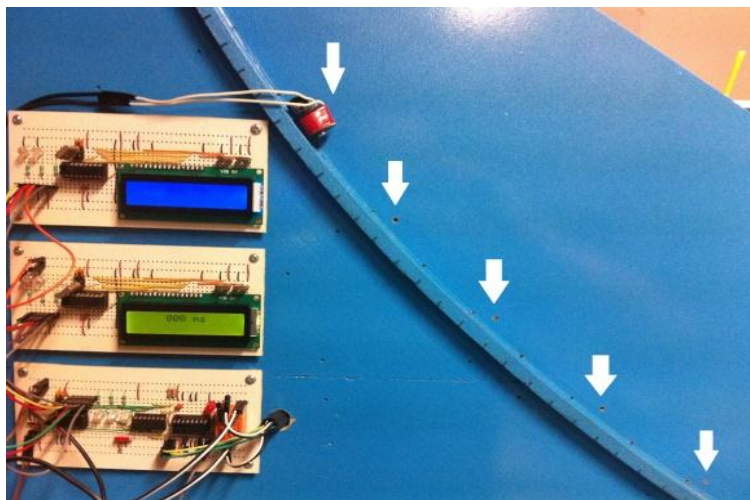


Figura 6.1: Electroimán sobre la tautócrona

Tabla 6.1: Datos de ambas curvas con el balín 1

Balín 1 Masa Diámetro
CHICO 7 gramos 1.2 cm

Recta ms	Recta ms	Recta ms	Cicloide ms	Cicloide ms	Cicloide ms
882	857	857	714	717	708
873	860	850	733	711	720
873	863	857	720	714	720
873	866	853	736	720	717
879	853	844	733	711	720
879	841	844	723	720	714
876	853	863	730	711	714
869	866	863	720	714	717
869	857	853	723	720	717
873	873	857	733	717	714
876	847	850	723	714	717
879	863	850	736	723	717
876	860	841	736	720	723
866	847	847	730	726	726
876	853	853	723	720	717
879	853	838	726	726	704
876	866	847	717	726	720
869	847	850	723	720	717
876	853	853	726	717	717
866	863	850	733	717	717
857	850	853	726	717	714
860	853	844	720	723	720
873	853	847	720	714	723
879	853	860	720	720	720
873	847	850	733	733	717
876	847	860	730	717	720
850	853	844	708	723	717
857	850	853	720	717	717
844	847	860	711	717	714
844	850	857	704	723	711

En la gráfica 6.1 se muestra la resultante de estos datos

Tabla 6.2: Datos de ambas curvas con el balín 2

Balín 2 Masa Diámetro
MEDIANO 16 gramos 1.6 cm

Recta	Recta	Recta	Cicloide	Cicloide	Cicloide
ms	ms	ms	ms	ms	ms
853	834	831	720	708	708
857	828	831	723	714	711
850	828	831	723	714	714
857	834	834	723	714	711
860	834	828	723	714	714
857	828	831	723	714	704
857	825	828	723	708	717
860	822	828	726	714	708
853	822	822	720	717	714
850	819	828	723	711	708
853	822	831	726	711	714
850	819	819	720	708	714
850	819	819	726	717	714
844	816	819	723	708	711
841	819	816	726	714	714
847	816	819	726	717	711
844	822	816	720	717	717
841	816	822	723	717	714
841	819	825	717	714	714
841	822	822	714	717	717
834	828	822	708	717	714
831	819	825	704	714	714
834	816	822	708	711	711
834	819	819	704	714	720
834	816	822	708	714	720
831	816	822	708	711	717
831	819	819	708	711	717
831	812	822	695	704	714
831	819	825	704	701	717
831	834	825	708	717	714

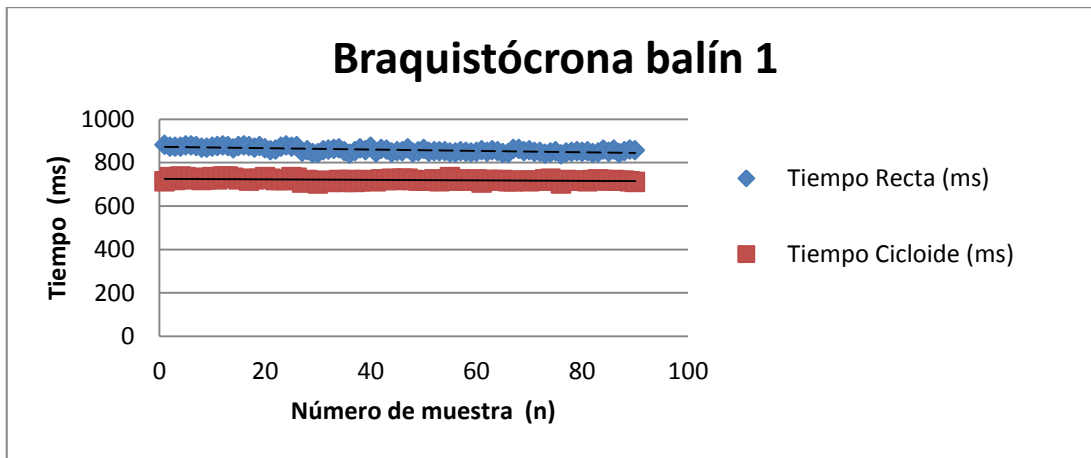
En la gráfica 6.2 se muestra la resultante de estos datos

Tabla 6.3: Datos de ambas curvas con el balín 3

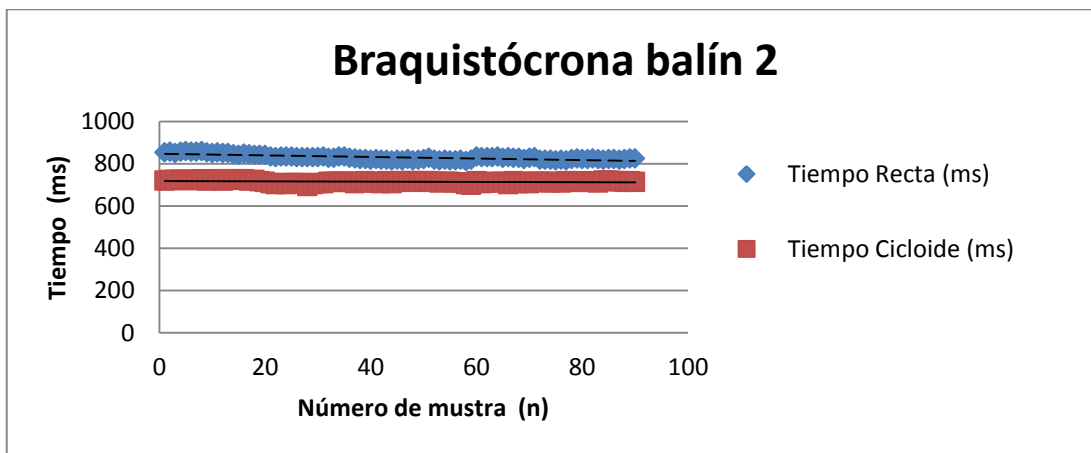
Balín 3 Masa Diámetro
GRANDE 29 gramos 1.9 cm

Recta ms	Recta ms	Recta ms	Cicloide ms	Cicloide ms	Cicloide ms
857	841	800	711	714	701
850	834	825	717	711	698
847	841	812	714	711	701
850	844	806	714	708	701
857	825	812	717	704	698
838	841	803	714	711	695
838	844	803	711	708	695
828	834	806	708	708	698
828	831	803	708	695	698
828	825	803	708	698	695
831	819	809	708	698	704
831	816	809	708	695	704
819	838	809	704	711	704
831	847	809	711	708	708
812	841	809	708	708	708
822	850	812	704	711	701
816	838	809	708	714	708
816	850	806	704	717	701
825	850	803	708	714	711
812	825	809	698	711	708
838	847	803	695	708	701
844	803	809	695	704	708
838	812	809	698	708	708
831	812	806	695	692	708
828	803	809	695	698	714
825	806	809	695	698	711
825	812	812	695	708	704
831	816	809	692	701	701
822	809	809	688	688	711
831	800	809	692	685	708

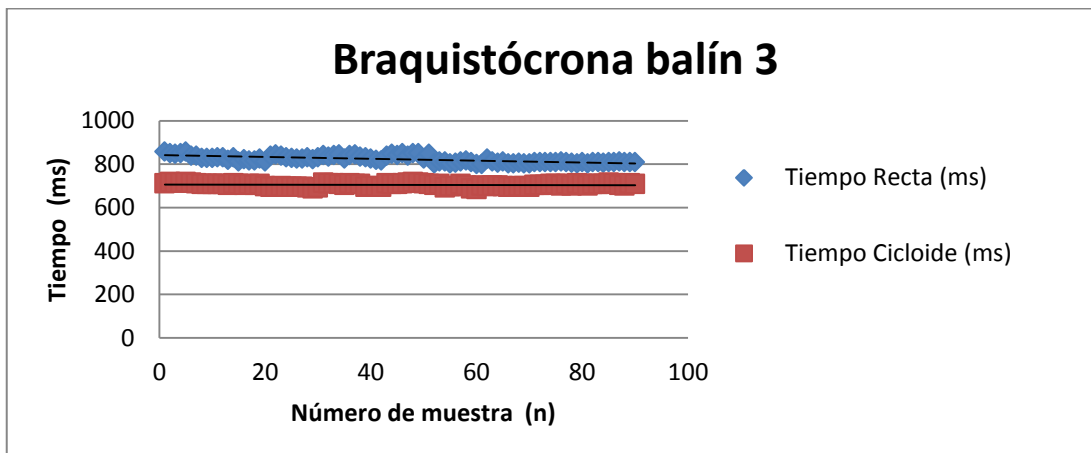
En la gráfica 6.3 se muestra la resultante de estos datos



Grafica 1: Tiempo experimental con el balón chico



Grafica 2: Tiempo experimental con el balón mediano



Grafica 3: Tiempo experimental con el balón grande

Tabla 6.4: Datos de la tautócrona con el balín 1

Balín 1 Masa Diámetro
CHICO 7 gramos 1.2 cm

1/16 long (ms)	2/16 long (ms)	3/16 long (ms)	4/16 long (ms)	5/16 long (ms)	6/16 long (ms)	7/16 long (ms)	8/16 long (ms)
745	752	749	755	761	745	744	781
742	752	739	761	761	755	765	781
745	730	745	733	758	736	771	768
742	742	745	765	758	761	755	777
739	742	755	755	806	755	752	784
733	745	736	755	761	752	749	768
723	742	745	755	736	745	777	771
720	739	742	752	755	758	771	787
720	749	752	739	752	745	771	800
742	749	749	745	765	749	784	819
717	739	755	758	765	749	781	749
736	745	739	758	752	755	774	765
739	739	752	730	784	758	758	755
739	742	742	752	761	752	755	774
733	739	736	742	765	761	777	787
723	730	739	742	745	765	752	781
711	714	717	742	742	758	752	781
730	736	736	736	742	761	765	774
714	733	736	736	720	771	752	755
714	733	714	733	749	777	765	765
714	730	755	730	733	736	768	765
720	733	714	755	755	777	771	777
708	708	730	733	749	771	761	781
701	708	733	720	758	749	745	755
717	720	733	739	749	761	761	758
701	714	711	749	745	765	771	771
723	730	717	717	749	765	777	790
720	733	714	730	726	755	752	797
701	726	736	717	739	765	777	768
708	726	711	742	745	784	774	768

En la gráfica 6.4 se muestra la resultante de estos datos.

Tabla 6.5: Datos de la tautócrona con el balín 2

Balín 2 Masa Diámetro
MEDIANO 16 gramos 1.6 cm

1/16 long (ms)	2/16 long (ms)	3/16 long (ms)	4/16 long (ms)	5/16 long (ms)	6/16 long (ms)	7/16 long (ms)	8/16 long (ms)	10/16 lon (ms)
726	736	730	736	739	736	745	752	758
723	736	733	736	739	736	742	749	761
723	733	730	736	742	736	739	749	765
726	736	733	739	742	733	745	752	765
723	736	733	739	739	733	742	749	761
726	730	730	736	739	733	739	749	761
726	733	733	736	739	733	742	749	761
723	730	733	739	736	736	742	749	758
726	733	733	739	736	733	742	745	761
726	733	730	736	736	733	739	749	761
701	736	736	720	733	736	742	749	761
701	733	733	723	730	733	745	749	765
701	736	733	720	736	733	745	749	761
698	730	733	717	736	733	745	749	761
698	730	736	717	736	733	742	749	765
708	720	723	730	733	739	739	749	765
708	720	717	726	730	742	739	745	761
708	717	720	726	730	739	730	739	758
708	720	726	720	726	739	739	745	758
711	720	720	726	733	736	739	742	761
708	720	720	726	730	736	733	742	761
711	717	726	726	730	736	739	742	761
711	717	723	723	736	736	736	739	755
711	720	717	726	726	736	733	742	761
711	723	720	720	726	733	736	739	758
711	720	723	723	730	736	733	739	765
714	720	726	726	726	736	736	739	761
714	720	723	726	723	739	736	742	761
714	723	723	723	723	736	736	739	758
717	720	723	723	730	730	733	739	765

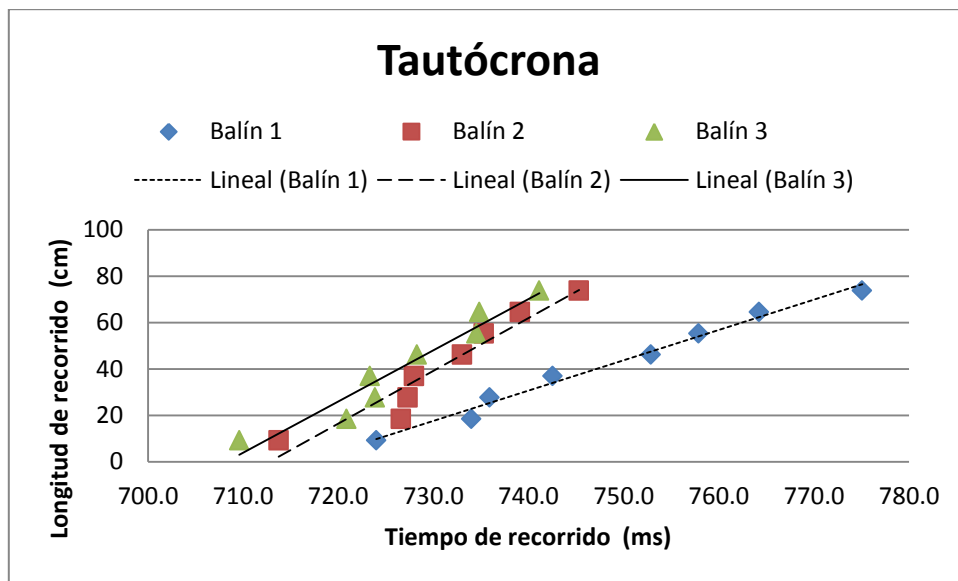
En la gráfica 6.4 se muestra la resultante de estos datos.

Tabla 6.6: Datos de la tautócrona con el balín 3

Balín 3 Masa Diámetro
GRANDE 29 gramos 1.9 cm

1/16 long (ms)	2/16 long (ms)	3/16 long (ms)	4/16 long (ms)	5/16 long (ms)	6/16 long (ms)	7/16 long (ms)	8/16 long (ms)	10/16 lon (ms)
723	730	726	733	733	733	739	742	761
711	726	723	733	733	733	739	749	761
704	730	726	736	736	730	736	745	755
708	723	726	733	736	726	742	745	761
704	720	730	733	736	736	739	745	758
711	723	723	733	733	733	739	745	761
708	726	730	733	733	733	739	742	758
711	726	730	736	726	726	739	742	758
704	720	730	736	726	733	736	742	758
708	726	730	736	733	733	736	745	749
708	720	730	726	736	733	739	745	755
711	720	733	726	730	733	739	745	755
708	723	733	726	733	736	739	742	758
711	723	723	723	733	730	739	745	752
708	720	726	723	733	733	742	745	758
714	723	723	714	723	739	733	739	761
714	720	720	720	723	736	736	742	749
717	717	720	714	723	739	736	742	761
720	720	723	717	723	739	736	739	755
704	717	720	717	720	736	726	742	752
701	717	717	717	723	736	733	739	749
701	717	723	717	723	739	733	739	758
711	720	723	717	726	736	733	736	758
711	717	720	717	726	733	733	736	755
708	714	720	714	723	736	726	739	755
708	717	717	714	723	736	730	736	758
708	717	720	714	723	739	726	739	755
714	714	717	714	723	736	730	736	755
711	720	717	714	726	736	726	733	752
708	720	717	714	730	739	726	733	755

En la gráfica 6.4 se muestra la resultante de estos datos.



Gráfica 4: Tiempos experimentales de los tres balines sobre cualquier punto de la curva

6.2 Propagación de incertidumbres [14]

Antes de asignar la incertidumbre a los datos y resultados obtenidos, hay que considerar diversos criterios.

6.2.1 Incertidumbre [14]

La incertidumbre (δx) de una cantidad (x) determina la confiabilidad de ésta. Puede expresarse en forma absoluta (δx) o en forma relativa ($\frac{\delta x}{x}$) también llamada porcentual.

La incertidumbre de una medida es la mitad de la menor división posible de la escala de medida del instrumento.

Cuando una cantidad está afectada por errores de diversa índole, proveniente de varias fuentes de incertidumbre, se presenta el problema de calcular su incertidumbre neta.

6.2.2 Cifras significativas [14]

Las cifras significativas de una medida están dadas por la escala del instrumento usado, sin embargo, es válido agregar una más que se estima entre las divisiones menores de la escala. Generalmente, esta cifra estimada no puede tomar cualquier valor del conjunto de dígitos; muy comúnmente sólo puede ser 0 ó 5, significando que solo es posible interpolar una división imaginaria entre dos de las menores que tiene la escala, pudiendo decirse entonces que es media cifra.

La precisión del cronómetro es de milisegundos, por esta razón, el promedio y la desviación estándar de las tablas 6.7, ..., 6.12, son reportados con una cifra adicional a las milésimas de segundo.

Hay que hacer notar que la incertidumbre de una cantidad debe afectar sólo a la última o a las dos últimas cifras de ésta y dicha incertidumbre no debe tener más de 1.5 cifras significativas.

6.2.3 Redondeo [14]

Acerca del redondeo, solo hay que recordar que la cifra por eliminar es 5: la anterior sube si es impar y se queda igual si es par.

6.3 Incertidumbres en el dispositivo [14]

Las diferentes fuentes que aportan incertidumbre al experimento serán mencionadas a continuación.

6.3.1 Cristal (oscilador)

El cristal con el que trabaja el microcontrolador debe ser de 4 *Mhz*. El fabricante lo garantiza con una exactitud de hasta 3 decimales (4.000 *Mhz*), por lo que su incertidumbre se encuentra hasta la cuarta cifra decimal, es decir ± 500 *Hz*.

6.3.2 Tiempo de respuesta del microcontrolador [11]

El microcontrolador PIC16F84A consume 4 ciclos máquina por cada instrucción, por lo que al utilizar un cristal de 4 *Mhz*, tarda un microsegundo en realizar cada instrucción. Por consiguiente, un microsegundo es el tiempo de respuesta del PIC, es decir, lo máximo que podría tardarse en detectar que un balón ha impactado su interruptor al final de la trayectoria y detener el cronómetro.

6.3.3 Interruptores

Se utilizan interruptores del tipo mecánico, por lo que al ser activados, éstos presentarán un pequeño tiempo de respuesta.

6.3.4 Histéresis magnética

Cuando en un material ferromagnético, sobre el cual ha estado actuando un campo magnético, cesa la aplicación de éste, el material no anula completamente su magnetismo, sino que permanece un cierto magnetismo residual. Este fenómeno se llama histéresis magnética, que quiere decir inercia o retardo.

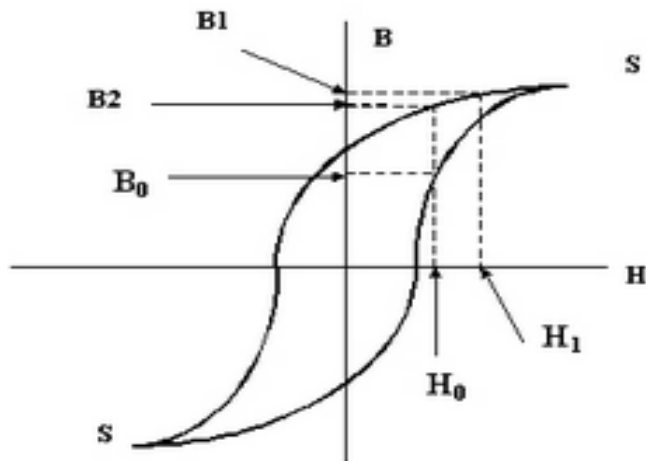


Figura 6.2: Ciclo de histéresis

En la figura, se supone que una bobina crea sobre dicho material magnético una intensidad de campo H_0 , el cual crea en ese material una inducción de valor B_0 . Si ahora aumenta H hasta un valor H_1 , B también aumentará hasta B_1 . Pero al restituir H , a su valor inicial H_0 , B no vuelve al valor B_0 , sino que toma un valor diferente B_2 (el camino de ida es distinto que el de regreso).

El punto S representa la saturación del núcleo magnético. Una vez saturado el núcleo, B no puede aumentar por mucho que lo haga H .

Debido al campo magnético generado por el embobinado, después de varias tomas de datos los tres pares de balines van quedando magnetizados, por lo que en el resto del experimento no caerán exactamente al momento de interrumpir la corriente, sino que tardaban un tiempo muy pequeño en soltarse.

6.3.5 Calibración del cronómetro

En el caso del cronómetro digital elaborado, éste tiene precisión de milisegundos por lo que su incertidumbre debería ser de medio milisegundo. Ya se vio en el apartado 5.5, en la parte de calibración del cronómetro, que en ocasiones se tiene un retraso máximo de 3 milisegundos comparado con un cronómetro ya calibrado.

Esta discrepancia se debe en gran parte al algoritmo del programa. Para corregirlo se pueden ir agregando instrucciones que consuman un poco más de tiempo (del orden de microsegundos) e ir calibrándolo.

6.3.6 Incertidumbre neta [14]

Los dos últimos errores mencionados arriba son los más significativos del experimento, ya que tienen el valor más grande. Sin embargo, se trata de errores sistemáticos, por lo que se corrigen restando el tiempo de retardo provocado por la histéresis y sumando las tres milésimas de retraso que en promedio tiene el cronómetro. La evaluación de la incertidumbre que se decidió asignar a las medidas obtenidas se hizo con el criterio de desviación estadística, por resultar mayor que cualquiera de las incertidumbres. Además de que determina con precisión la probabilidad de que una medición de la magnitud en cuestión caiga dentro del intervalo de incertidumbre calculado.

6.4 Análisis de datos

A continuación, el promedio y la desviación estándar de cada tabla de datos son reportados con una cifra adicional a las milésimas de segundo.

6.4.1 Braquistócrona y recta con el balón 1

Tabla 6.7: Promedio y desviación estándar con el balón chico en ambas trayectorias

Recta		(ms)	Cicloide		(ms)
Promedio	experimental	858.8	Promedio	experimental	720.1
		(ms)			(ms)
Desviación	estándar	11.4	Desviación	estándar	6.9

6.4.2 Braquistócrona y recta con el balón 2

Tabla 6.8: Promedio y desviación estándar con el balón mediano en ambas trayectorias

Recta		(ms)	Cicloide		(ms)
Promedio	experimental	830.1	Promedio	experimental	714.4
		(ms)			(ms)
Desviación	estándar	12.5	Desviación	estándar	6.2

6.4.3 Braquistócrona y recta con el balón 3

Tabla 6.9: Promedio y desviación estándar con el balón grande en ambas trayectorias

Recta		(ms)	Cicloide		(ms)
Promedio	experimental	822.7	Promedio	experimental	704.2
		(ms)			(ms)
Desviación	estándar	15.9	Desviación	estándar	7.3

6.4.4 Tautócrona con el balón 1

Tabla 6.10: Promedio y desviación estándar con el balón chico sobre la cicloide

1/16 long	2/16 long	3/16 long	4/16 long	5/16 long	6/16 long	7/16 long	8/16 long
Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
724.0	734.0	735.9	742.5	752.9	757.9	764.2	775.1
Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
13.9	12.1	14.1	13.1	16.3	11.4	11.4	15.0

6.4.5 Tautócrona con el balón 2

Tabla 6.11: Promedio y desviación estándar con el balón mediano sobre la cicloide

1/16 long	2/16 long	3/16 long	4/16 long	5/16 long	6/16 long	7/16 long	8/16 long	10/16 lon
Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
713.7	726.6	727.3	728.0	733.0	735.3	739.1	745.3	761.1
Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
9.2	7.2	5.9	7.3	5.5	2.6	4.2	4.5	2.6

6.4.6 Tautócrona con el balón 3

Tabla 6.12: Promedio y desviación estándar con el balón grande sobre la cicloide

1/16 long	2/16 long	3/16 long	4/16 long	5/16 long	6/16 long	7/16 long	8/16 long	10/16 lon
Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
709.6	720.9	723.9	723.3	728.3	734.5	734.8	741.1	756.2
Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est	Desv est
(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)	(ms)
5.0	4.2	5.1	8.7	5.2	3.5	5.0	4.0	3.7

6.5 El valor de la gravedad en Ciudad Universitaria [15] [16]

Antes de obtener los resultados, es necesario calcular el valor de la gravedad en el lugar donde se realizó el experimento. La gravedad tiene un valor aproximado de

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

lo que significa que, haciendo caso omiso de los efectos de la resistencia del aire, la velocidad de un objeto que cae libremente cerca de la superficie de la Tierra aumentará en alrededor de $9.81 \frac{m}{s}$ cada segundo.

La fuerza exacta de la gravedad de la Tierra varía dependiendo de la ubicación. La superficie de la Tierra está girando. En latitudes más cercanas al Ecuador, la fuerza centrífuga hacia el exterior producida por la rotación de la Tierra (efecto Coriolis) es más grande que en las latitudes polares. Esto contrarresta la gravedad en un pequeño grado.

Otra razón para la diferencia de la gravedad en diferentes latitudes es la protuberancia ecuatorial de la Tierra, pues los objetos en el Ecuador están más lejos del centro de la Tierra que los objetos en los polos. Esto debido a que la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Un objeto en el Ecuador experimenta una fuerza gravitacional más débil que un objeto en los polos.

También, por la razón antes mencionada, la gravedad disminuye con la altitud. Cuando un cuerpo se levanta por encima de la superficie de la Tierra, significa mayor distancia del centro del planeta.

Adicionalmente, se podrían contemplar varios efectos, como el del aire que hace que los objetos experimenten una fuerza de flotabilidad de soporte que reduce la fuerza de gravedad, o como los efectos gravitacionales del Sol y la Luna, etc.

El valor de la gravedad a nivel del mar se puede estimar por

$$g_{\varphi} = 9.780327[1 + 0.0053024\text{sen}^2(\varphi) - 0.0000058\text{sen}^2(2\varphi)] \frac{m}{s^2}$$

en la latitud φ , en grados.

Esta es la fórmula internacional de la gravedad (Sistema de Referencia Geodésico 1967), conocida como fórmula de Helmert o de Clairaut [15].

Finalmente, haciendo la corrección acerca de la altura h a la que se encuentre un cuerpo por encima de la superficie nominal promedio de la Tierra, el valor de la gravedad está dada por

$$g_{\varphi,h} = 9.780327[1 + 0.0053024\text{sen}^2(\varphi) - 0.0000058\text{sen}^2(2\varphi) - 3.155 \times 10^{-7}h] \frac{m}{s^2} \quad (6.1)$$

en la latitud φ , en grados y la altura h , en metros.

La ubicación de Ciudad Universitaria es [16]

$$\varphi = 19.324139^{\circ} \text{ latitud norte}$$

$$99.179253^{\circ} \text{ longitud oeste}$$

o bien

$$19^{\circ}19'9'' \text{ N}$$

$$99^{\circ}10'45.3'' \text{ W}$$

A una altura

$$h = 2300 \text{ metros sobre el nivel del mar}$$

Con estos datos, usando (6.1) el valor estimado de la gravedad en Ciudad Universitaria es

$$g_{CU} = 9.778886505 \frac{m}{s^2}$$

Para los cálculos requeridos se tomará el valor redondeando a dos decimales, entonces

$$g = 9.779 \frac{m}{s^2} \quad (6.2)$$

Que coincide con el valor autorizado de la gravedad en la Ciudad de México.

6.6 Resultados

Es básico tener en cuenta que la exactitud del resultado de una operación aritmética no puede ser mayor que la exactitud del ingrediente más inexacto que intervenga en la operación. Por ejemplo, si la operación sólo involucra sumas y restas, el resultado tendrá tantos decimales como el término de la operación que menos tenga; en el caso de que la operación sólo incluya multiplicaciones y divisiones el resultado deberá tener tantas cifras significativas como el factor de la operación que menos tenga.

6.6.1 Tiempos experimentales [17]

Los valores que hay que tener en cuenta para los siguientes cálculos son

$$C = \frac{1.16}{\pi} \text{ metros} \quad , \quad \text{radio del círculo generatriz}$$

$$g = 9.779 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6.6.1.1 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la recta

El tiempo ideal de recorrido sobre la recta está dado por (4.44), sustituyendo se tiene

$$T_{ideal \text{ recta}} = \sqrt{\frac{C}{g}(\pi^2 + 4)} = 723.7 \text{ ms}$$

6.6.1.2 Rodar sin deslizar sobre la recta

El tiempo teórico de recorrido sobre la recta rodando sin deslizar es (4.45), sustituyendo queda

$$T_{rot \text{ recta}} = \sqrt{\frac{C}{g}(\pi^2 + 4)\left(1 + \frac{2}{5}\right)} = 856.3 \text{ ms}$$

De las tablas anteriores el tiempo experimental es

$$\textit{balín chico} \quad 858.8 \pm 11.4 \text{ ms}$$

$$\textit{balín mediano} \quad 830.1 \pm 12.5 \text{ ms}$$

$$\textit{balín grande} \quad 822.7 \pm 15.9 \text{ ms}$$

Se aprecia que, dentro del intervalo de incertidumbre, el tiempo para el balín pequeño es el que empata mejor con el tiempo teórico.

6.6.1.3 Rodar con deslizamiento sobre la recta [17]

Como $\alpha = 32.48^\circ$, entonces

$$\cot(32.48^\circ) = 0.555$$

Por lo tanto, el tiempo rodando y deslizando sobre la recta es (4.46)

$$T_{rot/des\ recta} = \sqrt{\frac{c}{g} \frac{(\pi^2 + 4)}{(1 - \mu_k(0.555))}}$$

Se requiere conocer el coeficiente de fricción dinámico μ_k para evaluar esta ecuación. Sin embargo puede hacerse aquí una estimación a partir de los datos experimentales. Si por ejemplo, se toma el valor experimental del balón chico $T = 0.859$, al despejar el valor del coeficiente resulta $\mu_k = 0.523$.

6.6.1.4 Deslizar sin fricción y sin rodar sobre la cicloide

El tiempo ideal de recorrido sobre la braquistócrona está dado por (4.31), sustituyendo se obtiene

$$T_{ideal\ cicloide} = \pi \sqrt{\frac{c}{g}} = 610.5\ ms$$

6.6.1.5 Rodar sin deslizar sobre la cicloide

El tiempo teórico de recorrido sobre la braquistócrona rodando sin deslizar es (4.34), entonces

$$T_{rot\ cicloide} = \pi \sqrt{\frac{c}{g} \left(1 + \frac{2}{5}\right)} = 722.3\ ms$$

De las tablas anteriores, el tiempo experimental es

$$bal\acute{o}n\ chico \quad 720.1 \pm 6.9\ ms$$

$$bal\acute{o}n\ mediano \quad 714.4 \pm 6.2\ ms$$

$$bal\acute{o}n\ grande \quad 704.2 \pm 7.3\ ms$$

Nuevamente se aprecia que, dentro del intervalo de incertidumbre, el tiempo para el balón pequeño es el que mejor empata con el tiempo teórico.

6.6.1.6 Rodar con deslizamiento sobre la cicloide [17]

El tiempo en el movimiento combinado de rodar y deslizar sobre la cicloide es (4.35)

$$T_{mov\ comb\ cicloide} = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu_k \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right)}} + \sqrt{\frac{c}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \right)} \int_{\theta_c}^{\pi} d\theta$$

Nuevamente se requiere conocer el coeficiente de fricción dinámico μ_k . Si por ejemplo se considera el valor estimado anteriormente a partir de la ecuación para el tiempo de la recta $\mu_k = 0.523$, y si se sustituye en la ecuación (3.46), se obtiene que el ángulo crítico es $\theta_c = 61.35^\circ = 1.07\ rad$, entonces el resultado sería

$$\begin{aligned} T_{mov\ comb\ cicloide} &= \sqrt{\frac{c}{g}} \int_0^{1.07} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (0.523) \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right)}} + \sqrt{\frac{c}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \right)} \int_{1.07}^{\pi} d\theta \\ &= 226\ ms + 476\ ms = 702\ ms \end{aligned}$$

Nótese que el valor se aproximaría a los promedios obtenidos experimentalmente, aunque claro, esto solo fue una estimación.

6.6.1.7 Rodar sin deslizar sobre la tautócrona

Ya se ha dicho que el tiempo de recorrido de un cuerpo partiendo desde cualquier punto de la cicloide coincide con el de la braquistócrona, por lo que también se tiene

$$T_{rot\ tautócrona} = \pi \sqrt{\frac{c}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \right)} = 722.3\ ms$$

Analizando la tabla 6.10, el tiempo experimental del balón chico cae dentro del valor teórico únicamente para los primeros $\frac{3}{16}$ avos de la longitud de la cicloide.

Analizando la tabla 6.11, el tiempo experimental del balón mediano cae dentro del valor teórico únicamente para los primeros $\frac{4}{16}$ avos de la longitud de la cicloide.

Analizando la tabla 6.12, el tiempo experimental del balón grande cae dentro del valor teórico únicamente para el intervalo que va de $\frac{2}{16}$ avos hasta $\frac{5}{16}$ avos de la longitud de la cicloide.

Se deduce que, a diferencia de la braquistócrona, el experimento con el balón pequeño es el que menos se acerca a los datos esperados de la teoría.

Conclusiones

Sobre el problema de la braquistócrona, se hizo un análisis histórico, teórico y experimental, iniciando con un repaso sobre las soluciones clásicas, hasta llegar al cálculo variacional. La aportación al trabajo fue instrumentar el problema construyendo un dispositivo electrónico que permita obtener datos buscando observar de manera experimental los resultados ya conocidos por el análisis teórico.

Inicialmente se planteó este trabajo contemplando que los balines solamente rodarían, pero en el experimento se observó que existe deslizamiento en ciertas partes de la curva, por lo que también se tuvo que considerar esto en la teoría para comparar los resultados experimentales. Sin embargo, la solución analítica para este tipo de movimiento se complica demasiado debido a que no se tiene control sobre la parte en la que el cuerpo desliza, por lo que se sale de los objetivos planteados para este proyecto, quedando para futuros trabajos.

Existieron distintos problemas y fuentes de incertidumbre en el dispositivo experimental, la histéresis de la bobina que sostiene los balines representó un factor importante, debido a que los cronómetros arrancan inmediatamente de que es activado el interruptor mecánico, y el campo magnético remanente de las bobinas retiene a los balines un instante del orden de 1 a 2 centésimas. Esto aunado al hecho de que el movimiento al principio es el más lento de todo el recorrido, siendo más evidente este fenómeno cuando se realiza el experimento de la curva tautócrona. También existe una diferencia de tiempo entre los balines de distintos tamaños sobre la misma trayectoria, esto debido a que los puntos de contacto sobre el canal de madera son distintos para cada balón, originando que la torca resultante que provoca el rodamiento varíe para cada uno.

Como una sugerencia para mejorar el dispositivo experimental en un futuro, se puede reducir la corriente del electroimán para disminuir el campo magnético o corregir el tiempo en las mediciones, considerándolo un error sistemático.

El dispositivo construido es rico en electrónica y está automatizado para que pueda utilizarse de manera didáctica por estudiantes que cursen las materias de mecánica. El abordar el problema clásico de la braquistócrona de manera electrónica e instrumental tiene grandes ventajas debido a que se está tratando con tiempos muy pequeños (del orden de milésimas de segundo) que son difíciles de analizar con herramientas como el video en cámara lenta y análisis con software como Tracker y lógicamente más complicado tratarlos a simple vista.

Apéndice A: Ecuaciones

Capítulo 1: El problema de la braquistócrona

$$\begin{aligned}x &= at + a\cos(\theta) \\ y &= a + a\sin(\theta)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin(t)) \\ y &= a(1 - \cos(t))\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$A = 3\pi a^2\tag{1.3}$$

$$L = 8a\tag{1.4}$$

Capítulo 2: Principios variacionales

$$L = T - V\tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\tag{2.2}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt\tag{2.3}$$

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B\tag{2.4}$$

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx\tag{2.5}$$

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\mu(x)\tag{2.6}$$

$$J(\alpha) = \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) dx\tag{2.7}$$

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} dx\tag{2.9}$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx\tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha dx\tag{2.11}$$

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta J$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \delta y' \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad (2.13)$$

$$F = F(x, y) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

$$F = F(y') \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad (2.19)$$

$$y = C_1 x + C_2 \quad (2.20)$$

$$F = F(x, y') \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \quad (2.23)$$

$$F = F(y, y') \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0 \quad (2.25)$$

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \quad (2.26)$$

Capítulo 3: Rodar en un plano inclinado

$$ma_{cm} = mg \cdot \text{sen}(\theta) - F_{roz} \quad (3.1)$$

$$F_{roz} \cdot r = I \cdot \alpha \quad (3.2)$$

$$a_{cm} = \alpha \cdot r \quad (3.3)$$

$$I = k \cdot mr^2 \quad (3.4)$$

$$I_{esfera} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (3.5)$$

$$a_{cm} = \frac{g \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.6)$$

$$F_{roz} = \frac{2}{5} \cdot \frac{mg \cdot \text{sen}(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.7)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (3.8)$$

$$x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \quad (3.9)$$

$$v_{cm} = a_{cm} t \quad (3.10)$$

$$v_{cm} = \sqrt{2a_{cm}x} \quad (3.11)$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}}} \quad (3.12)$$

$$h = x \cdot \text{sen}(\theta) \quad (3.13)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \quad (3.14)$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.15)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.16)$$

$$W = W_{tras} + W_{rot} \quad (3.17)$$

$$W_{tras} = mgh - F_{roz} \cdot x \quad (3.18)$$

$$W_{rot} = F_{roz} \cdot r \cdot \varphi = F_{roz} \cdot x \quad (3.19)$$

$$W = mgh \quad (3.20)$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.21)$$

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.22)$$

$$v_{cm} = R\omega \quad (3.23)$$

$$W = F \cdot x \quad (3.24)$$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} \quad (3.25)$$

$$F_{roz} \leq \mu_s \cdot N \quad (3.26)$$

$$N = mg \cdot \cos(\theta) \quad (3.27)$$

$$\mu_s \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{\tan(\theta)}{1 + \frac{2}{5}} \quad (3.28)$$

$$f_{roz} = \mu_k \cdot N \quad (3.29)$$

$$m a_{cm} = mg \cdot \text{sen}(\theta) - \mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \quad (3.30)$$

$$a_{cm} = g(\sin(\theta) - \mu_k \cdot \cos(\theta)) \quad (3.31)$$

$$\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \cdot r = I \cdot \alpha \quad (3.32)$$

$$\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{\mu_k \cdot g \cdot \cos(\theta)}{r} \quad (3.33)$$

$$v_{cm} = \sqrt{2gh(1 - \mu_k \cdot \cot(\theta))} \quad (3.34)$$

$$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi} \quad (3.35)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5 \cdot \mu_k \cdot g \cdot \cos(\theta)}{r} \cdot \varphi} \quad (3.36)$$

$$E_p = mgh \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{cm}^2 + \frac{2}{5}r^2\omega^2\right) \quad (3.38)$$

$$-f \cdot x \quad (3.39)$$

$$f \cdot r \cdot \varphi \quad (3.40)$$

$$W_{roz} = -\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \frac{h}{\sin(\theta)} + \frac{1}{5}mr^2\omega^2 \quad (3.41)$$

$$W_{roz} = E_f - E_i \quad (3.42)$$

$$-\mu_k \cdot mg \cdot \cos(\theta) \frac{h}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 - mgh \quad (3.43)$$

$$\cot(\theta) = \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 1} \quad (3.44)$$

$$v_{cm} = \sqrt{2gh\left(1 - \mu_k \sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 1}\right)} \quad (3.45)$$

$$\tan(\theta_c) = \frac{5}{2} \cdot \mu_s \left(1 + \frac{2}{5}\right) \quad (3.46)$$

Capítulo 4: La cicloide

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (4.1)$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad (4.2)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = gt \quad (4.3)$$

$$v = \sqrt{2gy} \quad (4.4)$$

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.5)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{v} \quad (4.6)$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} \quad (4.7)$$

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} dx \quad (4.8)$$

$$F = \sqrt{\frac{1 + [y'(x)]^2}{2gy}} \quad (4.9)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(a) = y_1 \quad , \quad \text{con } y_1 < 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \quad (4.11)$$

$$y(1 + y'^2) = C_3 \quad , \quad \text{con } C_3 = cte \quad (4.12)$$

$$y = \frac{C_3}{(1+y'^2)} \quad (4.13)$$

$$y'^2 = ctg^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.14)$$

$$1 + ctg^2(\alpha) = csc^2(\alpha) \quad (4.15)$$

$$y = C_3 sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.16)$$

$$sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \quad (4.17)$$

$$y = C_3 \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{2}\right) \quad (4.18)$$

$$dy = \frac{C_3}{2} sen(\theta) d\theta \quad (4.19)$$

$$dx = \frac{dy}{ctg\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{C_3 sen(\theta) d\theta}{2 \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)} \quad (4.20)$$

$$sen(\theta) = 2 \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.21)$$

$$x = \frac{C_3}{2} (\theta - sen(\theta)) + C_4 \quad , \quad C_4 = cte \quad (4.22)$$

$$x = C(\theta - sen(\theta))$$

$$y = C(1 - \cos(\theta)) \quad , \quad \text{con } C = cte \quad (4.23)$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad , \quad x(\theta) = 0 \quad \text{y} \quad y(\theta) = 0$$

$$\text{si } \theta = \pi \quad , \quad x(\theta) = \pi C \quad \text{y} \quad y(\theta) = 2C \quad (4.24)$$

$$A(0,0) \quad , \quad B(\pi C, 2C) \quad (4.25)$$

$$a = \pi C \quad (4.26)$$

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{2gy}} \quad (4.27)$$

$$dx^2 + dy^2 = 2C^2(1 - \cos(\theta))d\theta^2 \quad (4.28)$$

$$dx^2 + dy^2 = 2Cyd\theta^2 \quad (4.29)$$

$$\text{si } x = 0 \quad \text{entonces} \quad \theta = 0$$

$$\text{si } x = \pi C \quad \text{entonces} \quad \theta = \pi \quad (4.30)$$

$$T_{ideal \text{ cicloide}} = \pi \sqrt{\frac{C}{g}} \quad (4.31)$$

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{(1 + [y'(x)]^2)(1 + \frac{2}{5})}{2gy}} dx \quad (4.32)$$

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{(dx^2+dy^2)(1 + \frac{2}{5})}{2gy}} \quad (4.33)$$

$$T_{rot \text{ cicloide}} = \pi \sqrt{\frac{C}{g} \left(1 + \frac{2}{5}\right)} \quad (4.34)$$

$$T_{mov \text{ comb } \text{ cicloide}} = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_0^{\theta_c} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu_k \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}\right)}} + \sqrt{\frac{C}{g} \left(1 + \frac{2}{5}\right)} \int_{\theta_c}^{\pi} d\theta \quad (4.35)$$

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} \quad (4.36)$$

$$T = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} d\theta \quad (4.37)$$

$$T = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \quad (4.38)$$

$$T = \sqrt{\frac{C}{g}} \int_{\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}^0 \frac{-2du}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - u^2}} \quad (4.39)$$

$$y(x) = mx + b \quad (4.40)$$

$$y = \left(\frac{2}{\pi}\right) x \quad (4.41)$$

$$dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right) dx^2 \quad (4.42)$$

$$T = \int_0^{\pi C} \sqrt{\frac{(1 + \frac{4}{\pi^2}) dx^2}{2gy}} \quad (4.43)$$

$$T_{ideal\ recta} = \sqrt{\frac{C}{g}(\pi^2 + 4)} \quad (4.44)$$

$$T_{rot\ recta} = \sqrt{\frac{C}{g}(\pi^2 + 4)\left(1 + \frac{2}{5}\right)} \quad (4.45)$$

$$T_{rot/desliz\ recta} = \sqrt{\frac{C}{g} \frac{(\pi^2 + 4)}{(1 - \mu_k \cdot \cot(\alpha))}} \quad (4.46)$$

Capítulo 5: Construcción e instrumentación

$$x = (\theta - \text{sen}(\theta))$$

$$-y = (1 - \text{cos}(\theta)) \quad (5.1)$$

$$A(0,0) \quad , \quad B(\pi, -2) \quad (5.2)$$

$$C = \frac{1.16}{\pi} \text{ metros} \quad (5.3)$$

$$A(0,0) \quad , \quad B(1.16, -0.738) \quad (5.4)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.5)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (5.6)$$

$$S = 2C \int_0^\pi \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (5.7)$$

$$S_{media\ cicloide} = 4C \quad (5.8)$$

$$S_{braquistócrona} = 1.477 \text{ metros} \quad (5.9)$$

$$S_{recta} = C\sqrt{\pi^2 + 4} \quad (5.10)$$

$$S_{recta} = 1.375 \text{ metros} \quad (5.11)$$

Capítulo 6: Datos y resultados

$$g_{\varphi, h} = 9.780327[1 + 0.0053024\text{sen}^2(\varphi) - 0.0000058\text{sen}^2(2\varphi) - 3.155 \times 10^{-7}h] \frac{m}{s^2} \quad (6.1)$$

$$g = 9.779 \frac{m}{s^2} \quad (6.2)$$

Apéndice B: Algoritmo del cronómetro en lenguaje ensamblador

; Jesús Antonio Rosas Gutiérrez

; Visualiza el tiempo que mantiene presionado un pulsador en milisegundos

```
__CONFIG _CP_OFF & _WDT_OFF & _PWRTE_ON & _XT_OSC
```

```
LIST      P=16F84A
```

```
INCLUDE <P16F84A.INC>
```

```
CBLOCK 0x0C
```

```
Decima           ; Guarda las décimas de segundo
```

```
Milesima         ; Incrementa cada 1000 us
```

```
ENDC
```

```
#DEFINE IncrementarPulsador      PORTB,6
```

```
TMR0_Carga1000us      EQU      d'6'      ; Para conseguir la interrupción del Timer 0 cada 1000 us = 1 ms
```

```
ORG      0
```

```
goto     Inicio
```

```
ORG      4
```

```
goto     ServicioInterrupcion
```

```
Inicio
```

```
call     LCD_Inicializa
```

```
bsf      STATUS,RP0
```

```
movlw    b'10000001'          ; Prescaler de 4 para el TMR0
```

```
movwf    OPTION_REG
```

```
bsf      IncrementarPulsador
```

```
bcf      STATUS,RP0
```

```
clrf     Decima                ; Inicializa los registros y visualiza
```

```
clrf     Milesima
```

```
call     Visualiza
```

```
Principal
```

```
btfs    IncrementarPulsador
```

```
goto     Fin                    ; Si no está pulsado visualiza el último tiempo
```

```
call     LCD_Borra              ; Borra la pantalla
```

```
clrf     Decima                ; Inicializa los registros
```

```

clrf    Milesima
movlw   TMR0_Carga1000us           ; Carga el TMR0
movwf   TMR0
movlw   b'10100000'                ; Autoriza interrupción del TMR0 (T0IE)
movwf   INTCON
EsperaDejePulsar
btfsc   IncrementarPulsador
goto    InhabilitaInterrupciones
call    Visualiza                   ; Visualiza el tiempo que lleva pulsado
goto    EsperaDejePulsar
goto    Fin
InhabilitaInterrupciones
clrf    INTCON                      ; Prohibe interrupciones
Fin     goto    Principal
; Subrutina "ServicioInterrupcion" Se ejecuta debido a la petición de interrupción del Timer 0 cada 1000 us
CBLOCK
Guarda_W
Guarda_STATUS
ENDC
ServicioInterrupcion
movwf   Guarda_W                    ; Guarda los valores que tenían W y STATUS
swapf   STATUS,W                    ; en el programa principal
movwf   Guarda_STATUS
bcf     STATUS,RP0                  ; Garantiza que trabaja en el Banco 0
movlw   TMR0_Carga1000us           ; Carga el Timer 0
movwf   TMR0
call    IncrementaMilesimas
btfss   STATUS,C                    ; ¿Ha contado 100 veces 1000 us = 1 ms?
goto    FinInterrupcion             ; No, Pues sale
incf    Decima,F                    ; Sí, Incrementa el segundo
FinInterrupcion
swapf   Guarda_STATUS,W            ; Restaura registros W y STATUS.
movwf   STATUS

```

```

swapf  Guarda_W,F
swapf  Guarda_W,W
bcf    INTCON,T0IF
retfie

; Subrutina "Visualiza" -----
Visualiza
movlw  .4                ; Para centrar visualización
call   LCD_PosicionLinea1
movf   Decima,W          ; Visualiza las décimas de segundo
call   BIN_a_BCD         ; Lo pasa a BCD
call   LCD_Byte
movf   Milesima,W        ; Visualiza las milésimas de segundo
call   BIN_a_BCD         ; Lo pasa a BCD
call   LCD_ByteCompleto
movlw  ''                ; Visualiza un espacio
call   LCD_Caracter
movlw  'm'               ; Visualiza la letra m
call   LCD_Caracter
movlw  's'               ; Visualiza la letra s
call   LCD_Caracter
return

; Subrutina "IncrementaMilesimas" -----
IncrementaMilesimas
incf   Milesima,F
movlw  .100
subwf  Milesima,W        ; (W)=(Milesima)-100
btfsc  STATUS,C          ; ¿C=0?, ¿(W) negativo?, ¿(Milesima) < 100?
clrf   Milesima          ; Lo inicializa si ha superado su valor máximo
return

INCLUDE <RETARDOS.INC>
INCLUDE <LCD_4BIT.INC>
INCLUDE <BIN_BCD.INC>
END

```


Apéndice C: Algoritmo de control del circuito en lenguaje ensamblador

; Jesús Antonio Rosas Gutiérrez

; Control de cronómetros

__CONFIG_CP_OFF & _WDT_OFF & _PWRTE_ON & _XT_OSC

LIST P=16F84A

INCLUDE <P16F84A.INC>

bsf STATUS,RP0

movlw b'00000000'

movwf TRISB

movlw b'11111'

movwf TRISA

bcf STATUS,RP0

PRINCIPAL

movf PORTA,w

addwf PCL,f

goto CERO ; parados ambos cronómetros

goto UNO ; arrancan ambos cronómetros

goto DOS ; NADA

goto TRES ; detiene cronómetro braquistócrona

goto CUATRO ; NADA

goto CINCO ; detiene cronómetro recta

goto SEIS ; NADA

goto SIETE ; detiene ambos cronómetros

CERO ; NADA

movlw b'00001110' ; detenidos ambos cronómetros

movwf PORTB

goto PRINCIPAL ; leds apagados

UNO

movlw b'01010000' ; arrancan ambos cronómetros

movwf PORTB

```

goto    PRINCIPAL    ; leds verdes encendidos
DOS
movlw   b'00001110' ; detenidos ambos cronómetros
movwf   PORTB
goto    PRINCIPAL    ; leds apagados
TRES
movlw   b'01100100' ; detiene cronómetro braquistócrona
movwf   PORTB
goto    PRINCIPAL    ; led verde + led rojo
CUATRO
movlw   b'00001110' ; detenidos ambos cronómetros
movwf   PORTB
goto    PRINCIPAL    ; leds apagados
CINCO
movlw   b'10011000' ; detiene cronómetro recta
movwf   PORTB
goto    PRINCIPAL    ; led rojo + led verde
SEIS
movlw   b'00001100' ; detenidos ambos cronómetros
movwf   PORTB
goto    PRINCIPAL    ; leds apagados
SIETE
movlw   b'10101100' ; detiene ambos cronómetros
movwf   PORTB
call    Retardo_20ms
goto    PRINCIPAL    ; leds rojos encendidos

```

```

INCLUDE <RETARDOS.INC>

```

```

END

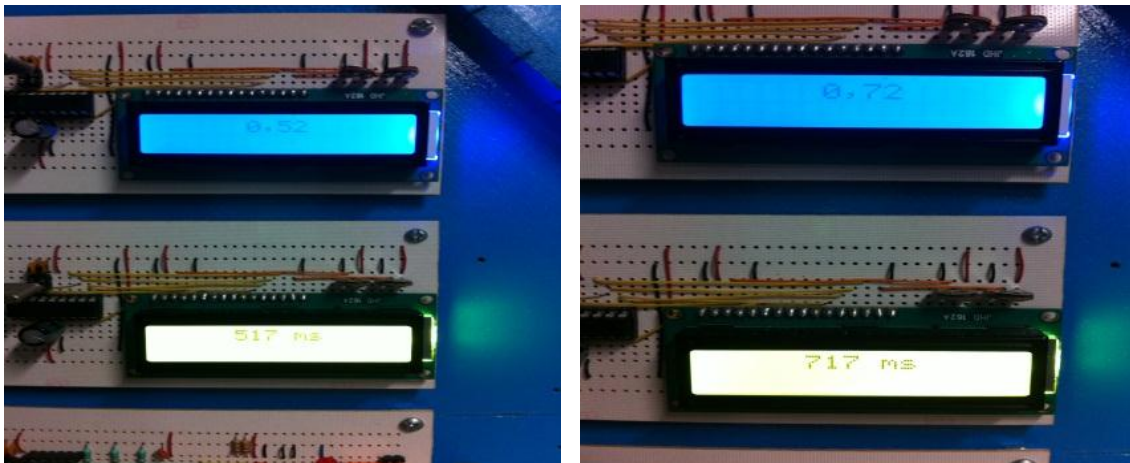
```

Apéndice D: Calibración del cronómetro

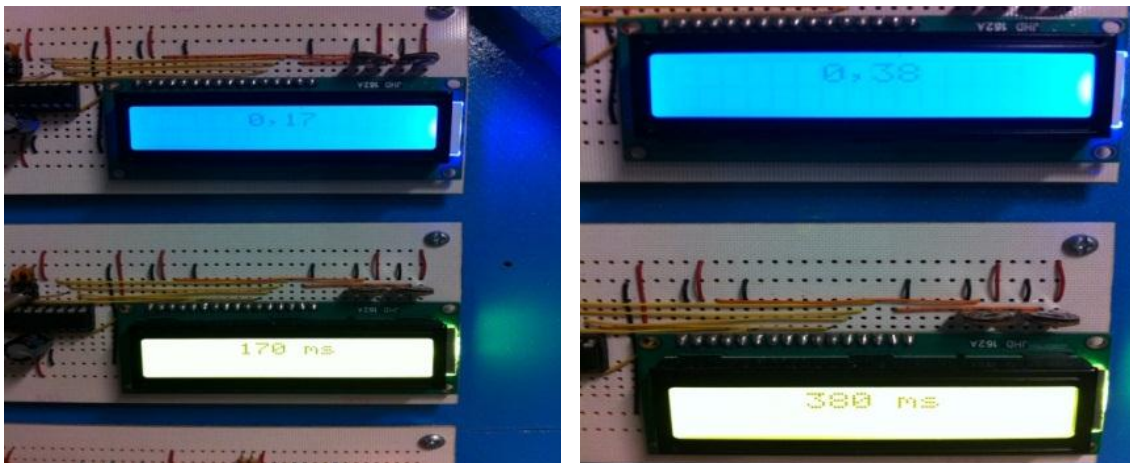
En las siguientes 2 imágenes se muestran 2 milisegundos por debajo del cronómetro calibrado



En las siguientes 2 imágenes se muestran 3 milisegundos por debajo del cronómetro calibrado



En las siguientes 2 imágenes se muestra el empate en milisegundos con el cronómetro calibrado



Bibliografía y referencias

- [1] Cálculo de variaciones. Jorge Ize. Centro de investigaciones y estudios avanzados del IPN. 1987.
- [2] A history of the calculus of variations. Herman H. Goldstine. Springer-Verlag. 1980.
- [3] Mecánica clásica. Herbert Goldstein. Aguilar, S.A. de Ediciones. 1963.
- [4] Introducción a los principios de mecánica. Walter Hauser. UTEHA. 1969.
- [5] Física. Robert Resnick, David Halliday. Editorial Continental. 1991
- [6] Física moderna. Harver E. White. Editorial Limusa. 2002.
- [7] Cálculo variacional. M.L.Krasnov, A.I.Kiseliov, G.I.Makarenko. Editorial URSS. 2005.
- [8] Cálculo variacional (ejemplos y problemas). M.L.Krasnov, G.I.Makarenko, A.I.Kiseliov. Editorial Mir Moscú. 1976.
- [9] Óptica Hamiltoniana. Enrique López Moreno, Marcela Grether. Facultad de Ciencias, UNAM. 2004
- [10] Matlab 2011
- [11] Microcontrolador PIC16F84, desarrollo de proyectos. Enrique Palacios, Fernando Ramiro, Lucas J. Palacios. Alfaomega. 2004
- [12] Lenguaje de programación ensamblador. Microchip.
- [13] Programa de simulación de circuitos electrónicos Proteus. Labcenter.
- [14] Datos y reporte en el laboratorio de mecánica. René Garduño. Facultad de Ciencias, UNAM. 2002
- [15] International Association of Geodesy (1971): Geodetic Reference System 1967. Publi. Spéc. n°3 du Bulletin Géodésique. París.
- [16] Google Maps
- [17] Wolfram Mathematica 10
- [18] www.wikipedia.com