



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Estimación de la sensibilidad de un detector basado en
sensores CCD para la búsqueda directa de materia oscura
en forma de WIMP**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Youssef Sarkis Mobarak

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alexis Armando Aguilar Arévalo

Cd. Universitaria, D.F. 2014



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Hoja de datos del jurado

Datos del alumno: Youssef
Sarkis
Mobarak
41 71 44 03
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
305317423

Datos del tutor: Dr.
Alexis Armado
Aguilar
Arévalo
(52-55) 5622-4690, Ext. 3342
Universidad Nacional Autónoma de México
ICN

Datos del sinodal 1: Dr.
Dario
Núñez
Zúñiga

Datos del sinodal 2: Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

Datos del sinodal 3: Dr.
Genaro
Toledo
Sánchez

Datos del sinodal 4: Dr.
Efraín Rafael
Chávez
Lomelí

Trabajo escrito: Estimación de la sensibilidad de un detector basado en sensores CCD para la búsqueda directa de materia oscura en forma de WIMP 132pp. 2014

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Agradecimientos

Esta tesis está dedicada principalmente a mi difunta abuelita Laura Eva Vale Navarrete, que para tristeza mía falleció en el transcurso de este proyecto. Ella me enseñó a ser disciplinado a ser una persona franca y sencilla ya que como ella decía “de nada sirve el talento si falta la educación” y sin duda no habría podido salir adelante sin su cariño y determinación lo que me enseñó a no darme por vencido fácilmente y afrontar lo que la vida te lleva por delante. A mi mamá también le agradezco por el continuo apoyo ilimitado e incondicional que siempre me ha dado, por tener siempre la fortaleza de salir adelante sin importar los obstáculos, por haberme formado como un hombre de bien dándome todo su cariño y comprensión, ya que gracias a ambas pude desarrollarme como persona íntegra, realizada y feliz. A Laura Espinosa por mostrarme su confianza y amor en toda la carrera, lo cual me ha dado una bonita motivación que siempre me impulsa en los momentos difíciles.

A mi asesor de tesis el Dr. Alexis Armando Aguilar Arévalo, que he conocido desde antes del servicio social y desde entonces hasta la fecha me ha dado una figura ejemplar como investigador y asesor en todo este tiempo. Gracias a su paciencia y buena disposición he aprendido a usar las herramientas de trabajo que son indispensables para la formación de un físico experimental, como son el análisis de datos experimentales, el uso y calibración de equipo experimental, en donde tuvimos muchas discusiones productivas al respecto. Con su ayuda me ha permitido acercarme al trabajo de colaboraciones internacionales como en Fermilab, en donde tuve la oportunidad de conocer un equipo de trabajo muy dinámico e incluyente que me permitió acercarme de una forma activa y emocionante al trabajo experimental de física de partículas. Además de mandarme a conferencias, talleres, congresos y cursos de física de partículas, lo cual me ha servido mucho como motivación y crecimiento profesional. Le agradezco todas sus enseñanzas y consejos que a lo largo de este trabajo me han ayudado en percibir y corregir mis defectos y a ser un físico más perspicaz y objetivo. Simplemente podría decir que no hay mejor asesor que el.

Agradezco también al Dr. Juan Carlos D’Olivo por su entusiasta ayuda y opiniones en las reuniones semanales lo cual contribuyó a mejorar mi trabajo y en el apoyo para poder ir a conferencias, congresos y estancias. Agradezco a Juan Estrada y a Javier Tiffinberg por su especial atención en ayudarme a entender el experimento CONNIE así como el funcionamiento de las CCD y dejarme participar en el manejo del excitante equipo experimental para detectar materia oscura. En lo personal considero que Juan Carlos, Juan Estrada y Javier son grandes personas.

Agradezco a todos los sinodales por su amabilidad y buena disposición en los trámites.

Que sería la vida sin amigos como Eben, Mario, Miguel Reyes el Chino y Ernesto el Brody que a lo largo de los años hemos compartido muchas experiencias que solo uno nosotros sabríamos contar, los estimo mucho y cuentan conmigo siempre. A Karina Fragoso por su bonita amistad. Permítanme mencionar a los mejores camaradas de la facultad físicos, matemáticos y biólogos; Gaby Hernández, Diana García, Miguel Sánchez, Felipe Méndez, Omar Cruz, Dinorah Pacheco, Cris Coria, Jorge Chávez, Susana Estrada, Marisol Chávez, Guille, Felipe Ángeles, Diana Méndez, Guadalupe Moreno, David Mochan y todos los demás que conocí en esta gran facultad, con quienes compartí muchos momentos divertidos y pláticas únicas.

Al profesor Emilio Flores, con quien lleve Cálculo 1 y 3, le agradezco su amistad, consejos, comidas y de darme la oportunidad de debutar como ayudante en su curso de Cálculo 2. Al profesor Sang Kwon Park por su empatía y su agradable compañía en los momentos difíciles. Al profesor Ángel Prieto por permitirme debutar como ayudante de física en su curso de electromagnetismoII.Y al profesor Jaime Saldaña por compartir sus experiencias conmigo y en aconsejarme bien para estudiar esta maravillosa carrera.

Agradecemos el apoyo de la DGAPA UNAM proyectos PAPIIT números IN112213 y IB100413.

~Vita cogitarent...

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	I
1. Evidencias de la existencia de materia oscura	2
1.1. Modelo cosmológico estándar	2
1.2. Curvas de rotación de las galaxias.	5
1.3. Cúmulos de galaxias	6
1.4. Fondo de radiación de microondas (CMB)	7
1.5. Lentes gravitacionales débiles	10
1.6. Cúmulo de la Bala	11
1.7. Abundancia de elementos ligeros	13
2. Búsquedas Directas de Materia Oscura	16
2.1. WIMP como candidatos a materia oscura	16
2.2. Técnicas de detección de WIMP	17
2.2.1. Cámaras de proyección temporal	17
2.2.2. Bolómetros	18
2.2.3. Detectores Centelleo	19
2.2.4. Cámaras de burbujas	20
2.2.5. Detectores basados en CCD	20
2.3. Límites existentes para las búsquedas de WIMP	21
2.3.1. Experimento CRESST	21
2.3.2. Experimento COGENT	22
2.3.3. EDELWEISS	22
2.3.4. ZEPLIN-III	23
2.3.5. Experimento Xenon 10 y 100.	23
2.3.6. Experimento LUX	23
2.4. Indicaciones experimentales de la posible existencia de WIMP	24
2.4.1. Experimento DAMA/LIBRA	24
2.4.2. Experimento CDMSII-Si	24
2.4.3. LUX	25
2.4.4. COGent 2014	25
2.4.5. Experimento Xenon 1T	25
2.5. El modelo del halo galáctico de WIMP	26
2.5.1. Modelo Matemático del halo galáctico (tasa de eventos)	27

3. Ruido de fondo en experimentos subterráneos	32
3.1. Fuentes principales de eventos de ruido de fondo.	32
3.2. Cálculo de eventos de ruido de fondo	32
3.2.1. Neutrones cosmogénicos	33
3.2.2. Dispersión leptón-núcleo y el modelo de Weizsäcker-Williams	36
Espectro de neutrones producidos por espalación de muones	42
3.2.3. Neutrones de reacciones (α, n)	58
4. El experimento DAMIC	60
4.1. Las CCD como detectores de partículas ionizantes	60
4.1.1. Detectores CCD de alta resistividad	61
4.1.2. Calibración de los CCD	61
4.1.3. Criterios de selección de eventos de materia oscura en las CCD (Prototipo DAMIC)	64
4.2. Prototipo de DAMIC en Fermilab E.U.A	70
4.3. DAMIC100	70
4.3.1. Calibración de DAMIC100	71
4.3.2. Contaminación radioactiva en DAMIC	74
4.4. DAMIC400	74
5. Cálculo de la sensibilidad de un detector tipo DAMIC400	76
5.1. Detalles Relevantes	76
5.2. Intervalos de confianza en el plano σ_χ vs M_χ	76
5.2.1. Método de máxima verosimilitud	77
5.2.2. Experimento de conteo y ajuste espectral	78
6. Resultados	86
6.1. Resultados derivados del cálculo teórico de espalación nuclear por muones	86
6.2. Estimación de los eventos de ruido de fondo para diversos experimentos	89
6.2.1. Sensibilidad para un experimento tipo DAMIC400 a 650m de profundidad	90
6.2.2. Regiones permitidas en caso de una señal positiva	94
7. Conclusiones	96
A. Resolución general de la ecuación de difusión en tres dimensiones.	100
B. Cálculo del camino libre medio y del coeficiente de difusión	102
C. Choques elásticos e inelásticos entre neutrón-núcleo.	104
C.0.3. Choque elásticos	104
C.0.4. Choques inelásticos	105
D. Deducción del estadístico para el Maximum Gap C_0	108
E. Análisis de imágenes DAMIC100	112

Índice de figuras

1.1.	Parámetros del modelo cosmológico Λ CDM, $\Omega_b h^2$ es la densidad bariónica, $\Omega_c h^2$ materia oscura fría, $100\theta_{MC}$ es “sound horizon at last scattering”, n_s es el índice espectral estelar, τ camino óptico hasta la reionización, $\ln(10^{10} \Delta_{\frac{5}{8}}^2)$ amplitud de fluctuación escalar, h es la constante de Hubble, σ_8 Amplitud de fluctuación de galaxias, Ω_m es la densidad de materia total del universo y Ω_Λ es la densidad de energía oscura del universo[74].	3
1.2.	Curvas de rotación para la galaxia (NGC 6503). Se muestran los datos experimentales y las predicciones teóricas según la mecánica newtoniana, debidas al disco estelar, el gas en la galaxia y un modelo de halo de materia oscura.[50].	5
1.3.	El cúmulo de Coma en rayos X fotografiado por telescopio ROSAT.[70]	7
1.4.	Dependencia del espectro de fondo de microondas con los parámetros del modelo cosmológico Λ CDM[73].	9
1.5.	Curva que muestra la anisotropía del espectro de fondo de microondas en función del momento multipolar.	10
1.6.	Imagen que muestra como se distorsiona la luz de una galaxia por el efecto de la presencia de materia oscura dentro del trayecto de la luz.	10
1.7.	(izquierda) Imagen que muestra esquemáticamente los parámetros de interés en el estudio de lentes gravitacionales débiles, (derecha) se muestra el efecto de la convergencia κ	12
1.8.	(Izquierda) Imagen del observatorio Chandra de rayos X, que ilustra la dinámica de dos cúmulos de galaxias, en azul se aprecia que la materia oscura que no es afectada por colisiones mientras que la materia bariónica (violeta) sufre alteraciones, Imagen a color del observatorio Magellian, en donde la raya blanca indica una escala de 200kpc,(abajo-derecha) imagen del observatorio Chandra del cúmulo. Se muestra en los contornos verdes en ambos paneles la reconstrucciones de convergencia de lentes débiles κ , con los niveles de contorno exterior en kp 0.16 y aumentando en incrementos de 0.07. Los contornos blancos muestran los errores en las posiciones de los picos κ y corresponden a 68,3 %, 95,5 % y 99,7 % los niveles de confianza.	12
1.9.	Figura que muestra la densidad de materia ordinaria comparada con la energía de radiación y la abundancia relativa de los principales elementos ligeros.	13
2.1.	La configuración de un detector de proyección temporal de doble fase es mostrado en la parte izquierda de la imagen, en la parte derecha se muestra el poder de discriminación de este detector para un posible evento de WIMP y un evento gama[75].	17
2.2.	Figura que muestra la variación del “quenching factor” con la energía.	19
2.3.	Proceso esquematizado sobre el funcionamiento de un plástico centellador[74].	19
2.4.	Vista de una CCD utilizada para la detección de partículas ionizantes.	20
2.5.	Imagen resultante de una exposición del CCD a la fuente de neutrones ^{252}Cf , los puntos corresponden a eventos de neutrón [1].	21
2.6.	Esquema del detector CRESST.	22
2.7.	Arreglo que usó CRESST en su simulación.	22
2.8.	Diagrama que representa la forma y localización del detector EDELWEISS.	23
2.9.	Límites y señales positivas de varios experimentos de detección directa de WIMP.	26
2.10.	Colisión elástica entre una WIMP y el núcleo.	28
2.11.	Distribución e probabilidad dada por la ecuación (2.6).	28
2.12.	Factores de forma según la ecuación (2.11).	29

2.13. Tasa de flujo diferencial de eventos (roja), tasa total por segundo de eventos (punteada), para A=28 (Si), un kg de material, $M_\chi=100 \text{ GeV}, \sigma_X=10^{-42} \text{ cm}^2$ 30

3.1. Neutrones producidos en roca promedio ($\rho = 2.65, Z/A = 0.5 A = 24$), se muestran diversas fuentes de neutrones en donde se observa que la más importante es la de neutrones producidos por muones por el proceso de espalación [18]. 33

3.2. Dependencia de la energía media perdida por muon, con la profundidad, la línea continua representa la ecuación (3.7), y los puntos son datos experimentales según [21]. 35

3.3. Espectro de muones según [20], donde la línea continua es la ecuación (3.6), y los puntos son datos experimentales. 35

3.4. Diagrama de Feynman para el proceso de espalación fotonuclear profundamente inelástico. 38

3.5. Proceso de fotoabsorción. 40

3.6. Espectro diferencial de la ecuación 3.35, para el Carbono (A=12). 42

3.7. Espectro de neutrones producido por el proceso de espalación de un Muon con un núcleo de Plomo. 43

3.8. Curva de neutrones por volumen, en función de la energía inicial de muon, (negra) multiplicada por la recta R(Ei), (verde) multiplicada por 2.5, (azul) curva deducida directamente del cálculo de espalación y (roja) curva de [28]. . 44

3.9. Curva de Mei & Hime del artículo [28], la cual expresa la producción de neutrones por centímetro cúbico en función de la profundidad. 45

3.10. Energía media de los neutrones que salen de las paredes de cavidades a diferentes profundidades. Datos medidos en distintos laboratorios subterráneos. Tomada de la referencia [29] 45

3.11. Esquema que representa el caso seminfinito en (z) e infinito en (x,y), en donde el punto negro representa la caverna subterránea y el plano xy la superficie. 49

3.12. Esquema que ilustra el modelo para estimar los neutrones efectivos producidos por el volumen. 53

3.13. Gráficos que representan la comparación entre la teoría y los valores experimentales (azul), para la sección eficaz total. 54

3.14. Figura esquemática que ilustra el modelo a usar para estimar la energía media de los neutrones y su espectro. . . 55

3.15. Figura que muestra la aproximación hecha para estimar la sección eficaz total, en el rango de energías de 1-200 MeV el promedio es de 1.25 barns y en el rango de energías mayor a 200MeV el promedio es de 0.64 barns. . . . 56

3.16. Espectro estimado para neutrones dispersados en la caverna. 57

3.17. Figura que muestra la comparación de la curva de [28](roja) con la curva estimada en esta sección (negra). . . . 58

3.18. Estimación de los componentes de radioactividad natural en la roca de Modane, la cual se asumirá como roca promedio. En la segunda imagen se observa la comparación con la curva y el ajuste propuesto (rojo). 59

4.1. Proceso básico de detección para una CCD, una vez que se ha producido un retroceso nuclear este ioniza el medio produciendo pares electrón-agujero, esta carga se almacena en un pixel de la CCD y se difunde en función de la profundidad de creación del evento. 61

4.2. En estas imágenes se muestran muones detectados por la CCD, los cuales son vistos por la trayectoria de ancho asimétrico, la parte gruesa corresponde a mayor difusión de carga y es proveniente de la parte trasera de la CCD, mientras que la parte delgada de la trayectoria proviene de la parte más cercana al pozo de potencial. Los puntos representan retrocesos nucleares, la línea blanca (figura izquierda) solo esta para dar una escala de la imagen. En la figura derecha se aprecia una reconstrucción de una imagen que pone en evidencia la traza que deja cada partícula ionizante. [1]. 62

4.3. Espectro obtenido de los eventos reconstruidos de los rayos-X (^{55}Fe), de la CCD de Decam, las flechas indican las líneas de emisión de la fuente de (^{55}Fe), $K\alpha = 5.9 \text{ keV}, K\beta = 6.5 \text{ keV}$ y líneas de escape de 4.2 y 4.8 keV y las líneas de emisión del Silicio que corresponde a 1.7 keV. En la figura derecha se da otra versión de la misma gráfica la cual indica la resolución de cada pico.[1]. 63

4.4. Mediciones del “Quenching Factor” para el Silicio, en donde se comparan las mediciones con el modelo de Linhard [15, 16]. 63

4.5. Energía visible reconstruida para una exposición del detector a una fuente de ^{252}Cf , la línea roja considera el modelo de Linhard, la línea verde no considera este modelo y los puntos son los datos reconstruidos de las CCD [1]. 64

4.6. Diagrama esquemático que ilustra cualitativamente como se lee una CCD, vista de una CCD real donde se puede apreciar las terminales de lectura. 65

4.7. Funcionamiento de un sensor CCD [2] . Durante la exposición los pocillos están polarizados y los electrones permanecen en el sustrato de silicio (1), cuando un fotón (P) alcanza el pocillo la energía que suministra permite que un electrón del sustrato se libere (2) y se mueva hacia la zona con polaridad positiva (3) de esta forma los pocillos se van llenando de electrones (4). 65

4.8. Figura que muestra la forma en que se esta modelando la densidad de carga en el material tipo (p) 66

4.9. Arreglo experimental de CONNIE para tomar datos de prueba. 68

4.10. Imagen tomada directamente de la CCD usando el software ds9. 68

4.11. Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, procesada usando la resta del ruido del sobreescaneo sobre toda la CCD. 69

4.12. Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, correspondiente al “Master Bias”, (derecha) distribución de pixeles malos en la CCD. 69

4.13. Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, imagen restada al “Master Bias”. 69

4.14. Limite obtenido por DAMIC 0.5 g al 90 %C.L (linea negra) comparada con CRESST (linea azul), CDMS (cruces) y XENON (triángulos). También se muestran las regiones positivas de DAMA/LIBRA (amarillo) y COGent(contorno negro) [40]. 70

4.15. Vista esquemática del arreglo experimental propuesto para escudar DAMIC100. 71

4.16. Vista esquemática del complejo de SNOLAB en Sudbury Canadá. 72

4.17. Pulso de una señal de un pixel de la CCD, donde se aprecia la señal de referencia y la señal total debida a la carga del pixel. 73

4.18. Curva de ruido contra tiempo de integración. 73

4.19. Imágenes del prototipo del detector DAMIC400, que piensa ser instalado en México, (arriba) el detector completo con los escudos de polietileno y (abajo) se muestra el arreglo de CCD en un dewar de cobre.. . . . 75

5.1. Ilustración una función chi cuadrada, dado una señal (WIMP) y un espectro de eventos de ruido. 80

5.2. Ilustración del método del “maximum gap”. 83

6.1. Curva de neutrones por volumen, en función de la energía inicial de muon, (negra)multiplicada por la recta R(Ei), (verde) multiplicada por 2.5, (azul) curva deducida directamente del cálculo de espalación y (roja) curva de [28]. . 86

6.2. Curva que muestra la relación entre la profundidad y la tasa de neutrones por volumen que se calculo de primeros principios (negra), curva de [28] (roja) los puntos son datos de la misma referencia. 87

6.3. Espectro estimado para neutrones dispersados en la caverna. 88

6.4. Figura que muestra la comparación de la curva de [28](roja) con la curva estimada en esta sección (negra). . . . 88

6.5. Curvas de sensibilidad en el espacio de parámetros (σ_χ, M_χ) a un 90 %C.L, para un experimento DAMIC100 con un ruido de $1 \text{ cpd kg}^{-1}\text{keV}^{-1}$ y una exposición de 0.365kg-día (ajuste espectral) .La curva roja es la calculada por la colaboración DAMIC [33] y la negra por el método de la chi-quadrada en este tesis. 90

6.6. (izquierda) Bin único de conteo considerando los eventos de ruido cosmogénico y el total, (derecha) curvas de sensibilidad, considerando solo errores estadísticos, en un espacio de parámetros (σ_χ, M_χ) a un 90 %C.L para un experimento de conteo de DAMIC400 a 650 metros de profundidad, donde se considero una exposición de 0.4 kg-año. 90

6.7. (izquierda)Espectro de retrocesos nucleares obtenido para DAMIC400 con 25 bins y (derecha) curvas de sensibilidad a un 90 %C.L (solo error estadístico) para ruido cosmogénico y para el ruido total (cosmogénico +radioactivo), con una exposición de 0.4kg-año. 91

6.8. Lista de espectros (Izq) que se usaron para estimar los errores sistemáticos de la energía media del muon, la multiplicidad y el escalamiento de energía. Del otro lado se muestra la sensibilidad al 90 % C.L obtenida con cada error y se compara con la sensibilidad sin error sistemático. 92

6.9. Degradación de las sensibilidades al 90 %C.L, para los diferentes errores sistemáticos considerados. 93

6.10. Curva de sensibilidad final para DAMIC400(negra) a un 90%C.L, en el recuadro se muestran otros experimentos con contornos al 90%C.L.	93
6.11. Contornos de señales positivas, considerando errores estadísticos y sistemáticos.	95
B.2. Colisiones partículas	102
B.1. Recorrido libre medio de una partícula.	102
C.1. Choque elástico en el sistema centro de masa	104
E.1. computeMB.sh.	113

Introducción

En 1933 el astrónomo suizo Fritz Zwicky[52] , proporcionó la primera evidencia astronómica sobre la existencia de la materia oscura. Zwicky observó un cúmulo de alrededor de 1000 galaxias (cúmulo Coma), notando una gran discrepancia en las velocidades de rotación de las galaxias respecto a las esperadas para un sistema ligado gravitacionalmente de acuerdo a la cantidad de materia visible, concluyendo que en este cúmulo debía existir una masa mayor que la observada, por lo que llamó a este tipo de materia “materia oscura”. No fue hasta 1970 que la idea de la materia oscura comenzó a ser tomada en serio, cuando empezó a ser evidente una discrepancia entre la densidad de materia observada según la dinámica de galaxias ($\Omega_m=0.35$) y aquella calculada según el modelo cosmológico estándar ($\Omega_{\text{barion}} = 0.04$). Esto confirmó que la materia oscura debía ser de naturaleza no bariónica y existir en grandes cantidades. Los modelos más actuales [48] consideran que la materia oscura compone un $\sim 24\%$ del total de densidad de energía del universo, comparado con la densidad bariónica de $\sim 4\%$.

Esta materia oscura puede estar constituida por varios elementos de materia que podría ser exótica o materia bariónica escondida. Los candidatos a materia oscura más conocidos son: los MACHOS (“MASSive Compact Halo Objects”) los cuales son componentes de materia bariónica invisible que podría formar una gran parte de la materia oscura, los Axiones que son partículas teóricas que de existir podrían ayudar a resolver problemas de conservación de simetría CP en la cromodinámica cuántica, pero en teoría estos Axiones solo pueden constituir una pequeña parte de la materia oscura fría, otro candidato serían los neutrinos que también por su pequeña masa solo constituirían una fracción de la materia oscura y finalmente están los WIMPS (“Weak Interactive Massive Particles”) las cuales son los candidatos favoritos para la materia oscura, pues al menos tienen la densidad que puede explicar la nucleogénesis a orden de magnitud.

Las primeras búsquedas de materia oscura, se han realizado suponiendo en la mayoría de los casos que la materia oscura esta constituida de WIMP, estas primeras búsquedas en general se han hecho con detectores semiconductores ultrapuros en laboratorios subterráneos con escudos puros de plomo o cobre. Combinando una buena resolución en la medición de la energía y una buena pureza de material sensible, se han logrado obtener los mejores límites experimentales para la búsqueda de WIMP (DAMA-LIBRA, COGENT, CDMSII, EDELWEISS, entre otros). La sensibilidad en general para detectar interacciones de WIMP dependerá principalmente en reducir los eventos de ruido de fondo y en reducir al máximo posible el umbral de detección para la energía de los retrocesos nucleares de la WIMP-núcleo.

Este trabajo se realiza en el contexto del experimento DAMIC (“Dark Matter In CCDs”), el cual realiza también una búsqueda directa de materia oscura en forma de partículas masivas débilmente interactuantes (WIMP) con masas del orden de $10 \text{ GeV}/c^2$, empleando tecnologías de detectores CCD (desarrollados por el laboratorio Berkeley). La colaboración DAMIC, en la que participan investigadores del instituto del ICN UNAM, actualmente esta involucrada en la instalación, calibración y optimización de un detector de 100 g (DAMIC100) en el laboratorio SNOLAB en Canadá. El uso de CCD en este contexto fue desarrollado inicialmente por investigadores del laboratorio Fermilab de EE.UU. Su potencial para realizar búsquedas de materia oscura fue demostrado en un experimento relativamente modesto que impuso el límite más restrictivo en su momento para WIMP con masas menores a $5 \text{ GeV}/c^2$. Una de las principales ventajas de utilizar CCD y que lo hacen competitivo para la

búsqueda directa de WIMP son; el muy bajo nivel de ruido de la CCD (menor a $2e$ por pixel), el bajo umbral de detección de energías de retrocesos nucleares ($\sim 40eVee$) lo que aumenta la señal y lo hace sensible a bajas masas de WIMP, el experimento es compacto y no es muy costoso en comparación con los otros experimentos de detección directa de materia oscura.

El objetivo de este trabajo es, hacer una estimación de la sensibilidad de un experimento tipo DAMIC con 400 g de masa sensible el cual esta siendo diseñado por investigadores de la UNAM, para ser operado en un futuro en una mina en territorio nacional. Este trabajo esta centrado en estudiar los principales eventos de ruido de fondo así como la señal esperada en experimentos tipo DAMIC en particular, aunque es un proceso que puede generalizarse para cualquier otro experimento.

Para este trabajo se plantea como objetivo calcular por medio de un estadístico chi-cuadrado las curvas de sensibilidad que dependan de los parámetros físicos de la WIMP y de parámetros experimentales como son la masa del detector, el umbral de energía de detección etc. Finalmente con la ayuda del modelo teórico se puede analizar el ruido cosmogénico y con ello se puede hacer un estudio de sensibilidad considerando también errores sistemáticos gracias a este modelo. Así que la propuesta de esta tesis consiste en calcular de la mejor forma posible las sensibilidades del experimento con una simulación realizada por modelos propuestos por el equipo de trabajo de esta tesis.

La estructura de esta tesis es la siguiente: En el capítulo 1 se da una introducción general sobre las distintas evidencias indirectas sobre la existencia de la materia oscura. El capítulo 2 se centra en describir de forma breve y cualitativa varias técnicas experimentales que se han propuesto para encontrar la materia oscura de forma directa por medio de la interacción de la WIMP con un núcleo blanco, así como dar a conocer cuales son los resultados más actuales sobre la existencia de materia oscura. En especial se explicará el método de detección de WIMP usando dispositivos CCD ya que esta es la técnica experimental usada por DAMIC. El capítulo 3 tiene como fin describir el modelo de espalación nuclear entre un Muón y un núcleo, para poder obtener los neutrones que puedan ocasionar algún evento de ruido en el detector. Para este modelo y siguiendo a varios autores, se usa la aproximación de Weizsäcker-Williams, el modelo de los potenciales ópticos y modelos de difusión para estimar todas las posibles interacciones que pueden tener los neutrones en el detector. En el capítulo 4 se describe a detalle el experimento DAMIC en general. Se describe la forma básica de operación de este experimento, así como el procedimiento de toma de datos y los detalles de ajuste que necesita el experimento para su funcionamiento. En el capítulo 5 se plantea la teoría necesaria para hacer un análisis estadístico del experimento en cuestión, se explica con detalle los distintos estadísticos que pueden emplearse para estimar la sensibilidad del experimento. También se describe el procedimiento de obtención de regiones de sensibilidad considerando errores sistemáticos. En el capítulo 6 se muestran los diversos resultados obtenidos. Y en el capítulo 7 se muestran las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Evidencias de la existencia de materia oscura

La cosmología estándar y observaciones astrofísicas experimentales que se discutirán brevemente en este capítulo, exhortan a pensar en la existencia de un tipo de materia en forma de partícula que sea débilmente interactuante con la materia bariónica, estable, que no interactúe electromagnéticamente y no sea relativista (partícula masiva), hasta ahora el modelo estándar no sugiere ninguna partícula estable con estas características. Este misterio sin resolver se denomina generalmente como el problema de la materia oscura. Históricamente, el problema de la materia oscura es anterior a la aparición de la cosmología estándar, que se remonta a la década de 1930 y principios de las observaciones de Fritz Zwicky del cúmulo de galaxias Coma [52].

En este capítulo se presentan algunos tipos de pruebas de observación indirectas que tradicionalmente se han asociado con el problema de la materia oscura. Si bien estas formas de detección pueden ser útiles para cálculos aproximados de la densidad de materia oscura, sin embargo no proporcionan ninguna evidencia directa que pueda determinar las propiedades fundamentales de esta materia. También aportan pruebas bastante convincentes de que la materia oscura llena nuestra galaxia y vecindad solar, donde podría ser detectable por sensores terrestres.

1.1. Modelo cosmológico estándar

La cosmología moderna surge al aplicar las ideas de la relatividad general al universo como un todo y en donde cualquier universo homogéneo e isotrópico resulta de un hecho natural la expansión del universo. Sin embargo a pesar de poder estudiar cualquier distribución de materia en el universo con la relatividad general, este modelo enfrenta problemas con las condiciones iniciales como la inflación, la distribución de materia en el universo y la aceleración actual del universo. El modelo más aceptado hasta ahora es el modelo Λ CDM “Cold Dark Matter with cosmological constant” que asume la existencia de la materia oscura y de una constante cosmológica distinta de cero para explicar las observaciones astronómicas que indican una aceleración de un universo en expansión, los parámetros de este modelo se muestran en el cuadro 1.1

	Plank+WP+highL	Plank+WP+highL+BAO	WMAP9+eCMB+BAO
$\Omega_b h^2$	0.02207 ± 0.00027	0.02214 ± 0.00024	0.02211 ± 0.00034
$\Omega_c h^2$	0.1198 ± 0.0026	0.1187 ± 0.0017	0.1162 ± 0.0020
$100\theta_{MC}$	1.0413 ± 0.0006	1.0415 ± 0.0006	-
n_s	0.958 ± 0.007	0.961 ± 0.005	0.958 ± 0.008
τ	$0.091+0.013 -0.014$	0.092 ± 0.013	$0.079+0.011 -0.012$
$\ln(10^{10} \Delta_{\mathcal{R}}^2)$	3.090 ± 0.025	3.091 ± 0.025	3.212 ± 0.029
h	0.673 ± 0.012	0.678 ± 0.008	0.688 ± 0.008
σ_8	0.828 ± 0.012	0.826 ± 0.012	$0.822+0.013 -0.014$
Ω_m	$0.315+0.016 -0.017$	0.308 ± 0.010	0.293 ± 0.010
Ω_Λ	$0.685+0.017 -0.016$	0.692 ± 0.010	0.707 ± 0.010

Figura 1.1: Parámetros del modelo cosmológico Λ CDM, $\Omega_b h^2$ es la densidad bariónica, $\Omega_c h^2$ materia oscura fría, $100\theta_{MC}$ es “sound horizon at last escatering”, n_s es el índice espectral estelar, τ camino óptico hasta la reionización, $\ln(10^{10} \Delta_{\mathcal{R}}^2)$ amplitud de fluctuación escalar, h es la constante de Hubble, σ_8 Amplitud de fluctuación de galaxias, Ω_m es la densidad de materia total del universo y Ω_Λ es la densidad de energía oscura del universo[74].

El problema de la materia oscura [67] se refiere originalmente a la falta de materia luminosa para explicar ciertas observaciones astronómicas en el marco de la gravedad convencional. Esta discrepancia entre la teoría y la observación puede explicarse por un componente de materia desconocida en el universo. Otra solución al problema de la materia oscura puede ser el descubrimiento de una nueva teoría de la gravedad, la cual consista en modificar adecuadamente la inercia de la materia que interactúa gravitacionalmente para grandes distancias. Para entender como surge este problema emplearemos el aparato matemático y teórico de la relatividad general [66].

El desarrollo teórico de estos temas se puede encontrar en varios libros de texto y artículos estándar sobre cosmología [63, 64, 65]. La métrica de Robertson-Walker, que es el resultado de suponer que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas, viene dada por

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right], \quad (1.1)$$

donde k es un factor de curvatura que va de -1 a 1, el cual es ajustado por $R(t)$, donde r es adimensional y R es el que lleva las dimensiones, θ ϕ son el ángulo sólido del espacio y t es el tiempo. Por otro lado las ecuaciones de campo de Einstein para determinar el tensor de curvatura son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

aquí $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de curvatura de Ricci, Λ es la constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento y $g_{\mu\nu}$ es la curvatura de Minkowski. El modelo cosmológico Λ CDM considera al universo como un fluido perfecto isotrópico y homogéneo, por lo que el tensor de energía momento se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu, \quad (1.3)$$

donde p y ρ son la presión y la densidad del fluido respectivamente y u_μ es la cuadrivelocidad del fluido ($u_\mu = (1, 0, 0, 0)$, por considerar el universo isotropico y homogéneo) .De aquí se puede deducir la ecuación de Friedman para este universo usando las ecuaciones de Einstein 1.21.3 junto con la métrica 1.1

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.5)$$

donde Λ es la constante cosmológica (Seusaron unidades de $c=1$). La densidad y la presión de la materia que llena el universo se dan por ρ y p , respectivamente. La constante de Newton está representada por G , mientras que k es el índice de curvatura dado anteriormente. Los términos relacionados con la constante cosmológica Λ puede ser absorbidos en la ecuación 1.4, si se la considera el espacio como un fluido que tiene densidad de energía $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ y una presión $p = -\rho_\Lambda$. Para la materia y la radiación la presión p está dada por 0 y $\rho/3$, respectivamente. Considerando el parámetro de Hubble $H = \dot{R}/R$, y la suposición de un universo plano $k = 0$, se puede definir

$$\rho_c = \rho + \rho_\Lambda = 3H^2/8\pi G,$$

el valor de $\rho_c = 1.05 \times 10^{-5} h^2 \text{GeV}/\text{cm}^3$ se refiere a la densidad crítica del universo, usando esta definición se reescribe 1.5

$$1 + \frac{k}{H^2 R^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho + \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right] = \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c},$$

definiendo $\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c}$ y $\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$ $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda$, la ecuación anterior se puede reescribir

$$1 + \frac{k}{H^2 R^2} = \Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda.$$

Hay que recordar que las Ω son funciones de R . También tomando en cuenta que una Ω sea mayor o menor, o igual a la unidad corresponde a un universo positivamente curvado, negativamente curvada, o un universo plano, respectivamente. La constante de Hubble H experimentalmente medida tiene un valor $71 \pm 7 \text{ km/seg/Mpc}$.

Se sabe que la luz de las galaxias distantes sufren un corrimiento al rojo visto desde cualquier punto del espacio. Este comportamiento observado está bien establecido, y es la motivación detrás de la teoría de que el universo está en expansión: el desplazamiento al rojo se interpreta como una consecuencia de que las galaxias se alejan. Independiente de la teoría, la magnitud del cambio a energías de la luz más bajas, que se llama un corrimiento al rojo, es una medida de la distancia a una galaxia que puede ser calibrado mediante la comparación de las medidas de distancias de supernovas tipo 1A (“Faros cósmicos”). La forma estándar de expresar el corrimiento al rojo de una galaxia en astronomía es a través de la variable z , que se define por la ecuación $\nu_{obs} = \nu_{fuente}/(1+z)$. La distancia se relaciona a continuación con el corrimiento al rojo por $d = cz/H$, donde c es la velocidad de la luz. Gracias a las observaciones de las supernovas tipo 1A se puede determinar z .

Estos experimentos, junto con otras observaciones recientes proporcionaron pruebas precisas a favor de un particular modelo cosmológico. Este modelo es descrito por

$$\Omega \cong 1, \quad \Omega_m \cong 0.3, \quad \Omega_\Lambda \cong 0.7.$$

La razón teórica de porque $\Omega = 1$, se debe a que solo para este valor (o valores muy cercanos a la unidad) las ecuaciones 1.5son estables, es decir, si el valor de Ω fuera distinto de la unidad este variaría muy rápidamente en el tiempo, contradiciendo las observaciones de actuales de que el universo es plano.

Si la materia oscura está compuesta de un tipo genérico de partículas que se crearon en el Big Bang, el número de estas que se crearon están sujetas a condiciones genéricas que se aplican a todas las partículas creadas en el “Big Bang”.El argumento a favor de una abundancia de vestigios de tales partículas es también genérica y se llama el argumento “Freeze-Out” [67]. En los inicios del universo, la temperatura es suficientemente alta para mantener a las WIMP equilibrio cinético-químico a través de diversos canales de creación y aniquilación. A medida que el universo se expande y se enfría, la densidad de equilibrio de caída es dominado por una supresión de Boltzmann de la densidad del número de WIMP ($e^{-m_\chi/kT}$, m_χ es la masa de la WIMP). Sin embargo, como el universo se expande cada vez más, la densidad numérica de WIMP empieza ser demasiada baja para

aniquilarse entre si y mantener un equilibrio térmico. Esto ocurre cuando el promedio del camino libre medio de aniquilación de WIMP crece debido a la expansión de Hubble del universo, y crece más rápido que la velocidad cinética promedio de las WIMP en ese momento. Por lo tanto, la abundancia de WIMP está determinada por su masa y sección transversal de aniquilación, que dependen del factor de Boltzmann y el camino libre medio. Así una densidad de WIMP cerca de la densidad crítica $\Omega_\chi \cong 1$ naturalmente implica una tasa de interacción débil como partícula.

1.2. Curvas de rotación de las galaxias.

La evidencia de materia oscura galáctica (específicamente Vía Láctea) es crítico para poder detectar esta por medio de detectados de detectores terrestres. Esta evidencia permite determinar parámetros importantes sobre la materia oscura como lo son; la densidad en la galaxia, la evidencia de no interacción electromagnética y poder saber que la masa de esta partícula debe ser mayor a 100 MeV [49]

En nuestra galaxia las estrellas y cuerpos luminosos se sitúan a unos ~ 10 kpc del centro, por lo cual se debería esperar que la velocidad de rotación de los cuerpos en la galaxia obedeciera las leyes de gravitación newtonianas;

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (1.6)$$

donde $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal, M la masa del disco galáctico y (r) la distancia desde el centro galáctico.

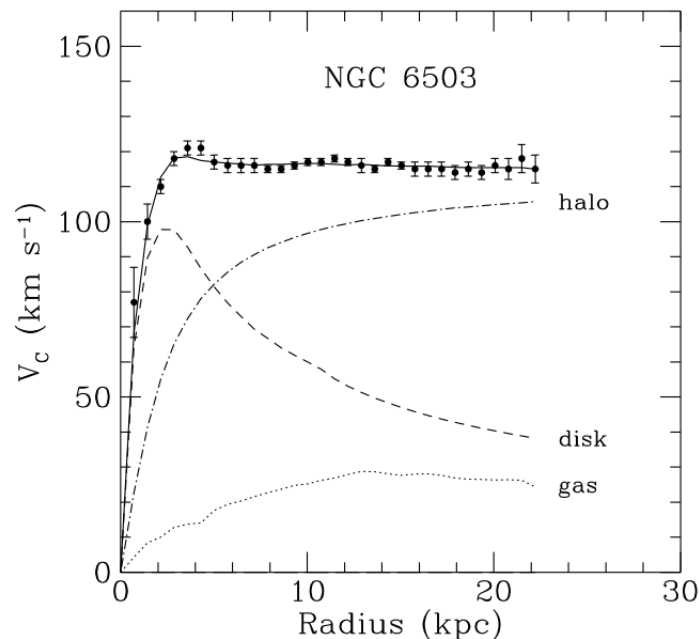


Figura 1.2: Curvas de rotación para la galaxia (NGC 6503). Se muestran los datos experimentales y las predicciones teóricas según la mecánica newtoniana, debidas al disco estelar, el gas en la galaxia y un modelo de halo de materia oscura. [50].

Esta ecuación (1.6) es de capital importancia para el análisis astrofísico de las curvas de rotación de galaxias, ya que según la teoría newtoniana debería obedecerse esta última ecuación. Pero si solo se considera la masa visible de la galaxia (gas y masa estelar), se observa una gran discrepancia con las leyes de Newton (Figura 1.2). Las mediciones astronómicas por efecto Doppler observaron que la velocidad en las afueras de las galaxias se mantiene prácticamente constante, en contraste con el comportamiento que se esperaba $v(r) \propto 1/r$ considerando solo la masa visible, estos hechos se han comprobado con más de 1000 galaxias espirales incluyendo la nuestra. Así probablemente lo que ocurre es que en realidad la masa de la galaxia (a pesar de que no es visible), sigue

aumentando con la distancia al centro galáctico (de forma aproximadamente lineal) hasta radios mucho mayores que el radio visible de las galaxias. Esto daría lugar, al comportamiento observado de las curvas de rotación.

Estas curvas en conclusión indican que la velocidad de rotación no varía según (1.6), mas bien esta velocidad permanece constante con la distancia, esto lleva a asumir que la masa de la galaxia varía como $M(r) \propto r$ y tomando en cuenta que la densidad de materia no bariónica depende del radio entonces se tiene una expresión explícita para calcular la masa de “materia oscura”; $M(r) = 4\pi \int \rho(r)r^2 dr$, como la masa $M(r)$ debe depender linealmente con el radio entonces la densidad de materia oscura $\rho(r)$, debe depender de forma directamente proporcional a cuadrado inverso del radio. En base a esto se han propuesto varios modelos que cumplan esta descripción para ajustar los datos experimentales y de aquí obtener la posible densidad de “materia oscura” en las galaxias espirales. Una de las formas propuestas más usada [50] para $\rho(r)$ es:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_c^2}{r^2 + r_c^2} \right), \quad (1.7)$$

donde r_c es un parámetro de ajuste para cada curva de rotación experimental y ρ_0 es la densidad de materia no bariónica. Introduciendo esta distribución de densidad en la integral para $M(r)$ se tiene una expresión para la velocidad:

$$v^2 = 4\pi G \rho_0 (r_c^2) \left[1 - \frac{r_c}{r} \arctan \left(\frac{r}{r_c} \right) \right] \quad (1.8)$$

En el límite cuando $r \rightarrow \infty$ la velocidad de rotación tiende a una constante igual a $v^2 = 4\pi G \rho_0 (r_c^2)$ tal como lo indican los datos experimentales, así de esta forma es posible obtener el valor de la densidad ρ_0 de la hipotética “materia oscura” presente en nuestra galaxia (la vía lactea) con $\rho_0 = 0.39 \pm 0.03 \text{ GeV/cm}^3$. Este es una de los resultados indirectos más conocidos que apuntan hacia la evidencia de materia oscura.

1.3. Cúmulos de galaxias

Los cúmulos galácticos son agrupaciones de galaxias y gas caliente intracúmulo que se mantienen unidos debido a su mutua atracción gravitacional. Se estudian los cúmulos de galaxias por medio de la masa dinámica que poseen para estar constituidos, es decir, la masa del cúmulo debe ser suficiente para explicar los movimientos de las galaxias del cúmulo según la teoría newtoniana de gravitación. Como la masa (galaxias y gas) de los cúmulos galácticos no puede ser directamente observable, se emplean varias técnicas para determinar de forma aproximada la masa del cúmulo [58]; el teorema del virial que hace uso de las velocidades de dispersión de las galaxias del cúmulo y la emisión de rayos X para detectar la luminosidad del gas intracúmulo y por efectos de lentes gravitacionales que estudian distorsiones luminosas del cúmulo.

El teorema del virial [49] estudia un sistema de N cuerpos de partículas situadas en posiciones \mathbf{r}_k , sobre las que actúan fuerzas \mathbf{F}_k (incluyendo internas y externas), se puede deducir de la teoría clásica que se cumple

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_k^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle,$$

donde $\langle T \rangle$ y $\left\langle \sum_k^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle$ representan la energía cinética promedio y la energía potencial promedio respectivamente. En el caso newtoniano $\mathbf{F}_k = -\nabla U_k$, $U_k = -\alpha GM/r_c$, donde α es un factor numérico que depende del perfil de densidad del cúmulo, M es la masa total del cúmulo y G la constante de gravitación universal. De esta forma podemos reescribir la ecuación como

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_k^N \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle \nabla U_k \cdot r_k \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial U_k}{\partial r} r_k \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle, \quad (1.9)$$

De la ecuación 1.9 se puede deducir la masa de un cúmulo midiendo la dispersión de velocidades a lo largo de una línea de observación, asumiendo que esta dispersión es isotrópica, el radio r_c se puede medir a partir de la esfera que contiene la mitad de la luminosidad total del cúmulo. Esta es la masa dinámica inferida a partir de los movimientos de las galaxias del cúmulo y contiene todos los elementos que producen gravedad. Las mediciones experimentales han demostrado por este método que la materia necesaria para explicar las velocidades de dispersión observadas debe ser mayor a la materia visible.

Otro método que sirve para determinar la masa dinámica de un cúmulo consiste en medir la temperatura y densidad del gas caliente intracúmulo.

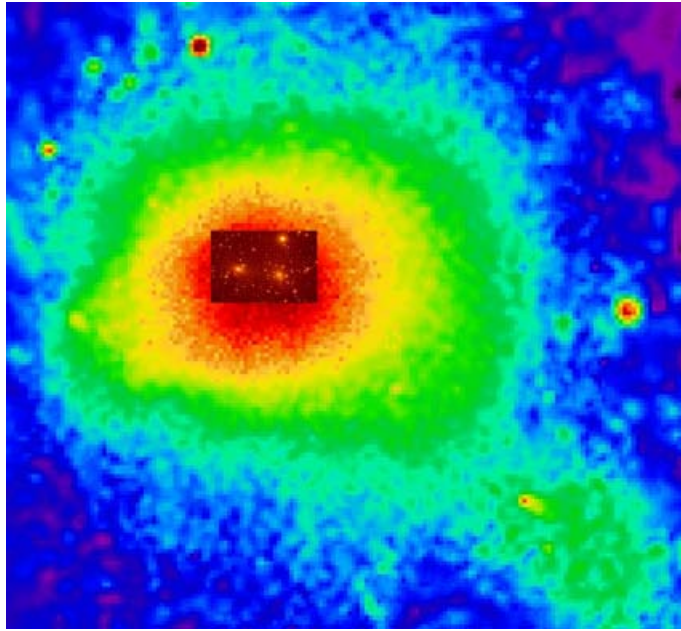


Figura 1.3: El cúmulo de Coma en rayos X fotografiado por telescopio ROSAT.[70]

La figura 1.3 en rayos X revela gas muy caliente ($\sim 10^8\text{K}$) de baja densidad que llena el espacio intracúmulo. El espectro electromagnético revela que se trata de un gas altamente ionizado, además el gas debe encontrarse en equilibrio hidrostático y gravitatorio para mantenerse unido al cúmulo. Como se requieren de altas temperaturas ($\sim 10^8\text{K}$) para que la presión del gas pueda contrarrestar la fuerza gravitacional del cúmulo, en estas condiciones de temperatura el plasma emite radiación bremsstrahlung en la banda de rayos X, así la temperatura del gas se obtiene directamente del espectro de rayos X y el perfil de densidad se obtiene del perfil de brillo en rayos X. Con ello es posible determinar directamente la masa del gas intracúmulo que por lo general es del orden de seis veces más grande que la masa interestelar.

De estas dos mediciones independientes se concluye que en general la masa interestelar de un cúmulo es del orden del 2%, la masa de gas caliente intracúmulo es del orden del 10% y el porcentaje restante de masa del cúmulo es oscura (no está en forma de los elementos que emiten luz como las estrellas y el gas caliente). Los cúmulos galácticos son considerados para estudiar la densidad de materia del universo, por lo que las mediciones de materia en estos cúmulos proporcionan una evidencia indirecta importante de la existencia de la materia oscura.

1.4. Fondo de radiación de microondas (CMB)

Las mediciones de la estructura de la radiación a gran escala del universo ofrecen la evidencia más convincente de que la materia oscura es no bariónica y es una de las mediciones más precisas. Como se sabe la radiación de fondo cósmico es la radiación remanente del inicio del universo en el big bang, si se supone que esta radiación

es electromagnética y sigue la ley de cuerpo negro, entonces es posible asociar a esta radiación observada una temperatura de 2.725 K. De esta radiación se han observado fluctuaciones pequeñas de temperatura en el mapa celeste, estas fluctuaciones son del orden de $\sim 10^{-5}$ K las cuales según el modelo cosmológico estándar explican la formación y agrupación de las estructuras macroscópicas de materia (galaxias, cúmulos etc) que se ven en el universo en la actualidad. Esto es así porque la relación de las anisotropías del espectro de microondas está ligada a la formación de estructuras en el universo y como la mayor cantidad de materia en el universo es oscura (asumiendo la hipótesis de la existencia de materia oscura) esto implica que existe una relación directa con las anisotropías y la materia oscura.

Para explicar con más detalle esta relación entre las anisotropías y el problema de la materia oscura, es necesario explicar la interacción de la materia bariónica con la materia oscura en los primeros instantes del big bang.

En la época de desacoplamiento de los fotones y la materia bariónica en el inicio del universo, se puede explicar la evolución de las galaxias y cúmulos de galaxias a partir de las perturbaciones iniciales, estas perturbaciones iniciales de materia, principalmente materia oscura, crecieron de forma gradual desde el desacoplamiento de fotones y bariones. Así que antes del desacoplamiento entre bariones y fotones la materia bariónica no interactuaba mucho con la materia oscura debido al acoplamiento electromagnético con los fotones en los primeros instantes del universo. Una vez que la materia bariónica se torno en forma de átomo neutros, está pudo empezar a acumularse en potenciales gravitacionales de materia oscura. Este proceso sucedió después del desacoplamiento de la materia bariónica y los fotones del universo, como la materia bariónica está compuesta de partículas cargadas estos átomos colisionaron entre si, excitando sus niveles de energía más próximos y como la densidad del universo era lo suficientemente baja estos átomos excitados podían decaer emitiendo fotones, de esta manera se estaba extrayendo energía del gas de materia bariónica y facilitando de esta forma que la materia bariónica se acumule en los pozos de potencial gravitatorio producidos por la materia oscura. La materia oscura al no interactuar con la fuerza electromagnética no emite radiación y por ende no evoluciona de la manera en que evolucionó la materia bariónica después del acoplamiento bariónico-fotón.

Las anisotropías en la temperatura están expresadas por medio de una expansión de armónicos esféricos¹

$$T(\theta, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde Y_{lm} son los armónicos esféricos, donde los coeficientes a_{lm} son los coeficientes multipolares. El espectro de potencia de los momentos l está dado por un promedio de los momentos m de la forma

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2.$$

El espectro medido está generalmente dibujado en función a los momentos l en forma del cuadrado de la temperatura de anisotropía ΔT_l

$$(\Delta T_l)^2 = l(l+1)C_l/2\pi.$$

De la figura 1.5 se puede observar esta dependencia de forma explícita. La interpretación del momento monopolar $l = 0$ está dada por la temperatura uniformemente distribuida del universo $T = 2.7255 \pm 0.0096$ K. El término dipolar $l = 1$ está interpretado por el corrimiento Doppler de la longitud de onda de la radiación de fondo dada por el movimiento del sistema solar relativo al campo de radiación de cuerpo negro del fondo de

¹Como la medición de la temperatura está relacionada con la longitud de onda de los fotones de la radiación de fondo, entonces los fotones obedecen la ecuación de onda $\nabla^2 E = \partial_{tt} E$, si se toma el caso estacionario $\nabla^2 E = 0$ entonces la distribución de radiación puede ser expresada en armónicos esféricos para cualesquiera condiciones de frontera, ya que los armónicos esféricos son la solución de la parte radial del operador ∇^2 , así al expresar el espectro de radiación de fondo en armónicos esféricos se está usando una base natural y de fácil manejo para su interpretación y análisis.

microondas. Este corrimiento se puede calcular con la fórmula relativista para calcular la frecuencia del efecto Doppler de un cuerpo en movimiento en relación a una fuente luminosa

$$T(\theta) = T_0 \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos(\theta)^{1/2}},$$

donde $\beta = v/c$, v es la velocidad del sistema solar con respecto al campo de radiación de cuerpo negro y c es la velocidad de la luz. Con esta última fórmula se puede calcular la contribución dipolar. La relación principal de este espectro con la materia oscura se explica con los picos que se forman en la región $100 < l < 1000$. Es decir, los picos acústicos en el espectro de potencia CMB también son visibles como fluctuaciones en la densidad de la materia bariónica. Antes que el universo fuera neutro el plasma electrón-protón estaba fuertemente ligado a los fotones formando un fluido-bariónico-fotónico, la gran densidad de fotones produce una onda de choque barión-fotón esférica que deja atrás la materia oscura (ya que la materia oscura no interactúa con los fotones), esta al evolucionar produce fluctuaciones en el fluido barión-fotón lo que produjo oscilaciones dentro de este fluido, las cuales produjeron cambios en la temperatura en el fluido. Después cuando se desacoplan la materia bariónica y los fotones de radiación de fondo, los fotones (CMB) siguen avanzando pero la materia bariónica alcanza un radio máximo debido a la atracción gravitatoria de la materia oscura y después de millones de años esta materia oscura interactúa con la materia bariónica formando estructuras (galaxias y cúmulos). Así cuando los fotones de radiación de fondo se desacoplan de la materia bariónica estos llevan como resultado de esta interacción las ondas en modo estacionario producidas en el fluido barión-fotón justo antes de que se desacoplaran. Es por ello que los picos en la región de $100 < l < 1000$ están separados cada uno aproximadamente por unidades de $300l$ lo cual corresponde a armónicos de Fourier de la fluctuación inicial del fluido barión-fotón producidas por la materia oscura, por ello se llaman picos acústicos. En resumen estos picos acústicos solo pueden haberse formado si hubiese existido una materia oscura no bariónica que no interactúe electromagnéticamente (en la figura 1.4 se muestran diversos ajustes de los parámetros cosmológicos a los datos experimentales del espectro de radiación de microondas).

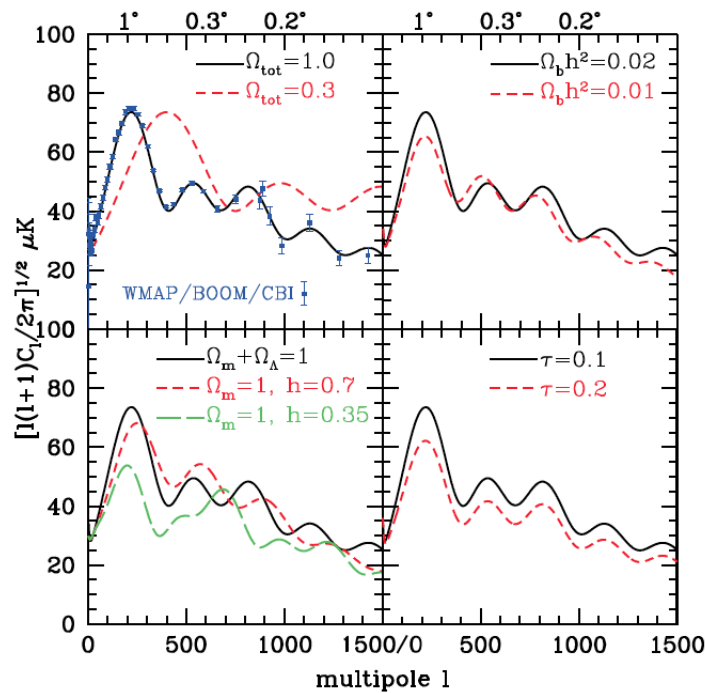


Figura 1.4: Dependencia del espectro de fondo de microondas con los parámetros del modelo cosmológico Λ CDM[73].

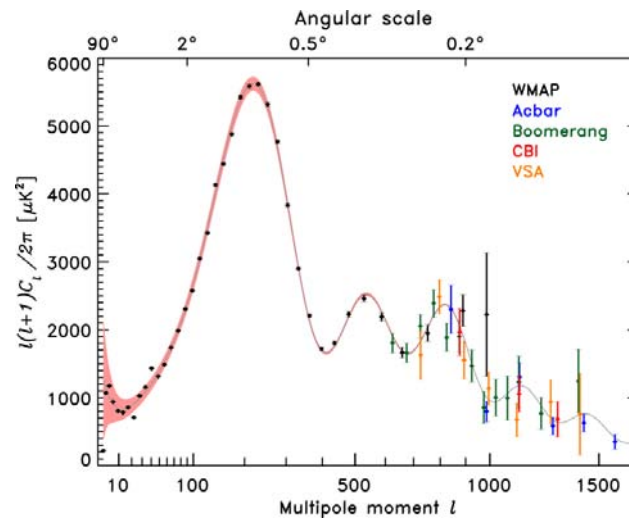


Figura 1.5: Curva que muestra la anisotropía del espectro de fondo de microondas en función del momento multipolar.

1.5. Lentes gravitacionales débiles

Los cúmulos de galaxias exhiben el fenómeno de lente gravitacional [51] [49], porque el campo gravitatorio del cúmulo curva el espacio a su alrededor, así los rayos de luz emitidos de objetos detrás de estos cúmulos viajan de forma curva en lugar de seguir caminos rectos, para ser vistos en los telescopios. Si la lente gravitacional es débil es posible ver la luz de una misma galaxia enfocada como si fuese un lente perfecto. Los lentes gravitacionales ocurren a todas escalas de masas, en particular un cúmulo de galaxias puede servir de lente para galaxias ubicadas detrás del cúmulo. Debido a que la masa del cúmulo es tan grande ($\sim 10^{14}M_{\text{sol}}$) el ángulo de desviación es de varios segundos de arco y se puede resolver.

Estimando este ángulo en mecánica clásica es posible obtener una relación útil entre este ángulo de deflexión de la luz y la masa del cúmulo galáctico ($\alpha = (\frac{GM}{dc^2})^{1/2}$), donde d es la distancia focal, c la constante de velocidad de la luz, G la constante de gravitación y M la masa del cúmulo. Así la masa del cúmulo se puede calcular a partir del grado de distorsión de las imágenes de las galaxias de fondo. Para esto se requiere modelar la distribución de la masa del cúmulo, ver figura 1.6. Las masas determinadas por este método están en buen acuerdo con las masas determinadas por el método del teorema del Virial.

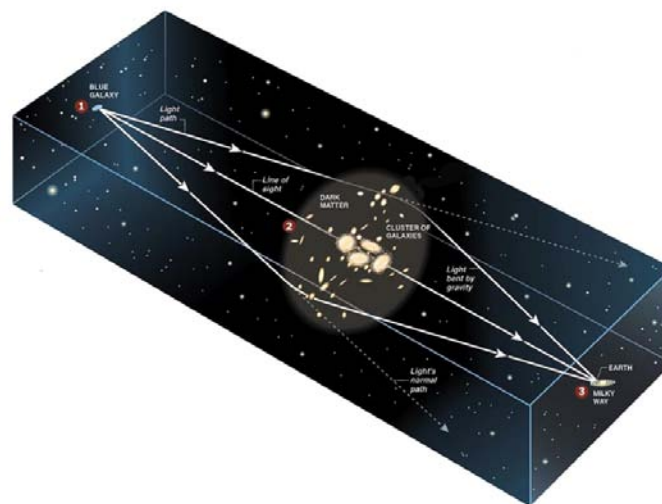


Figura 1.6: Imagen que muestra como se distorsiona la luz de una galaxia por el efecto de la presencia de materia oscura dentro del trayecto de la luz.

1.6. Cúmulo de la Bala

El cúmulo Bala o 1E 0657-56 (“Bullet cluster”) [4], observable en la constelación Carina, es el resultado de la colisión de dos cúmulos de galaxias que ocurrieron allí hace 150 millones años. El estudio de esta colisión se inició en el 2006 y es considerada como una de las mejores evidencias a favor de la existencia de la materia oscura.

Durante la colisión de este cúmulo, la materia visible (estrellas, gas y polvo) fue perturbada por las fuerzas gravitacionales. La masa interestelar que esta constituida por objetos pesados como estrellas no colisionan, debido a que el espacio entre las estrellas es muy grande. Las estrellas por lo tanto, no se ven afectados por la colisión, solo se pueden acelerar ligeramente o frenar gravitacionalmente. En cambio durante la colisión, los gases fríos y calientes, que constituyen la mayor parte de la masa bariónica de las galaxias, van a poder interactuar entre si, porque van a mezclarse más fácilmente debido a su libertad atómica y su muy débil enlace gravitacional, lo que producirá que estas componentes de gas sean rápidamente frenadas.

Se analiza la masa visible de este cúmulo en sus dos componentes, la masa interestelar (estrellas) que se analiza en el espectro óptico visible de la luz y el gas intracúmulo se analiza en el espectro de rayos X. De la figura 1.8 se observan las galaxias de los dos cúmulos que colisionaron, de esta colisión se ha originado una ola de choque visible en la punta de la pequeña mancha roja. Esta onda de choque se ha comprimido fuertemente y por lo tanto ha calentado el gas hasta los 100 millones de grados. El cúmulo Bala es uno de los cúmulos más calientes conocidos. En algunos lugares, el telescopio Chandra X-Ray Observatory ha medido una velocidad de desplazamiento del gas a 4500 km/s. Los dos grupos están separados en 3.4 años luz y la masa total calculada en función de su velocidad y su distancia, representa más que la masa de la materia ordinaria visible .

En ausencia de materia oscura el potencial gravitatorio del cúmulo debería trazar un contorno de masa que en este caso debería estar situado espacialmente en la componente de rayos X (gas intracúmulo) y por otro lado si la materia oscura existiese los contornos de materia deberían coincidir espacialmente con las galaxias y estrellas del cúmulo. Por lo tanto, mediante la obtención de un mapa de la potencial gravitatorio, se puede discriminar entre estas dos posibilidades. El mapa del potencial gravitacional[71] se obtiene utilizando lentes gravitacionales débiles, que miden las distorsiones de las imágenes de galaxias de fondo causados por la desviación gravitacional de la luz por la masa del cúmulo. Para entender como se hace este estudio se define una cantidad usada en astronomía para estudiar lentes gravitacionales débiles llamada convergencia $\kappa(\theta)$ (para mas detalles ver [72, 71])

$$\kappa(\theta) = \frac{\Sigma D_d \theta}{\Sigma_{cr}}, \quad \Sigma_{cr} = \frac{c^2 D_s}{4\pi G D_{ds} D_s},$$

en donde Σ es la densidad de proyección de masa, D_d, D_{ds}, D_s son las distancias del observador al lente, del los lentes a la fuente y la distancia del observador a la fuente respectivamente (ver imagen 1.7), c es la constante de velocidad de la luz y G la constante de gravitación universal. Este parámetro mide cuanto diverge en tamaño la imagen observada de la imagen real. El objetivo de este estudio es elaborar un mapa de convergencia κ , por medio de la medición de la elipticidad observada que suele ser comparable o menor que la intrínseca a la galaxia, y por lo tanto la distorsión es sólo medible estadísticamente con grandes números de galaxias de fondo. Para hacer esta medición, se detectan galaxias tenues en las imágenes ópticas profundas y se calcula su elipticidad a partir de la distribución de brillo de la superficie de esta. Finalmente con suficiente estadística se puede obtener un mapa en dos dimensiones que da información acerca de la distribución de masa total en el cúmulo como se muestra en la figura 1.8.

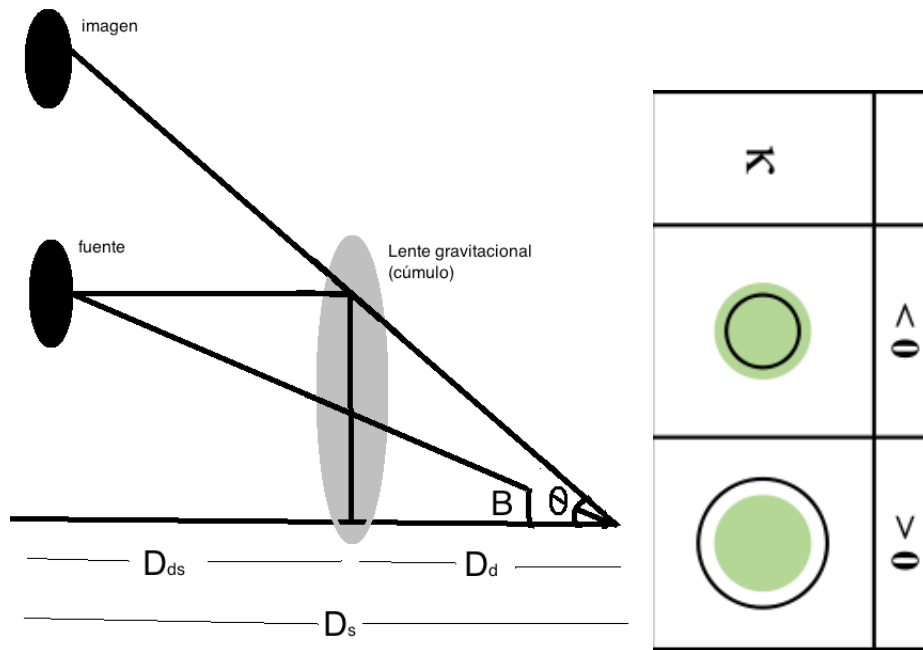


Figura 1.7: (izquierda) Imagen que muestra esquemáticamente los parámetros de interés en el estudio de lentes gravitacionales débiles, (derecha) se muestra el efecto de la convergencia κ .

Además se han hecho un estudio acerca de la sección eficaz y la masa que debería tener la materia oscura, se estima que se cumple la relación ($\frac{\sigma}{M_x} < 1\text{gr}^{-1}\text{cm}^2$), a un nivel solo de orden de magnitud. Cualquier modelo que considere una fuerza gravitacional no estándar que se escale con la masa bariónica no puede reproducir estas observaciones[71], dando así una fuerte evidencia contra las teorías de gravedad modificada que no consideran necesaria la hipótesis de materia oscura.

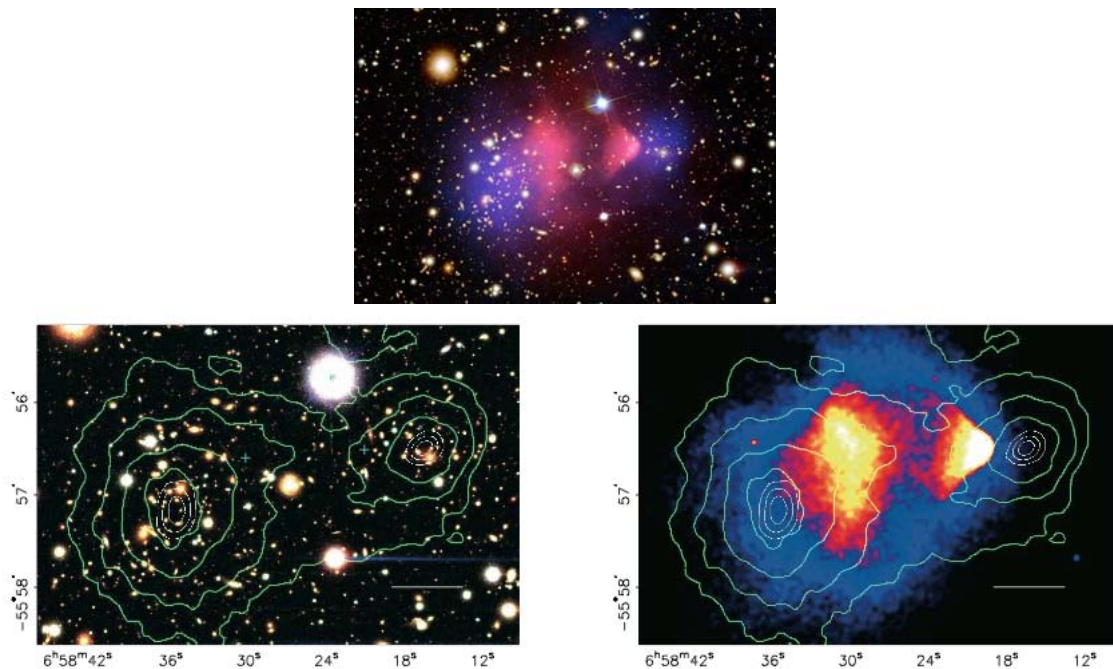


Figura 1.8: (Izquierda) Imagen del observatorio Chandra de rayos X, que ilustra la dinámica de dos cúmulos de galaxias, en azul se aprecia que la materia oscura que no es afectada por colisiones mientras que la materia bariónica (violeta) sufre alteraciones, Imagen a color del observatorio Magelliano, en donde la raya blanca indica una escala de 200kpc, (abajo-derecha) imagen del observatorio Chandra del cúmulo. Se muestra en los contornos verdes en ambos paneles las reconstrucciones de convergencia de lentes débiles κ , con los niveles de contorno exterior en κ 0.16 y aumentando en incrementos de 0.07. Los contornos blancos muestran los errores en las posiciones de los picos κ y corresponden a 68,3%, 95,5% y 99,7% los niveles de confianza.

1.7. Abundancia de elementos ligeros

Al inicio del universo “Big Bang” [68][69], en donde muy al principio la temperatura y la densidad del universo eran suficientemente altas como para producir reacciones nucleares, las cuales eran capaces de producir elementos ligeros (He-3 , He-4 y remanentes de deuterio) se sabe que no hubo suficiente tiempo en esos instantes para que los elementos pesados se pudieran constituir y estos se formaron posteriormente en las primeras estrellas y en las supernovas.

Armados con este modelo estándar (se sabe que la expansión en ese momento estaba dominada por la radiación) y por procesos nucleares, los cosmólogos pueden hacer predicciones muy precisas sobre la abundancia relativa de los elementos ligeros en la etapa de nucleosíntesis. Las abundancias de los elementos ligeros se pueden medir siguiendo el método que consiste en observar la intensidad relativa de las características espectrales de las estrellas y las galaxias. Una vez que se mide la abundancia de elementos, se llega al problema de saber que cantidad del elemento se produjo durante el inicio del universo y cuánto se generó más después durante la nucleosíntesis estelar. Una forma de resolver este problema es observando el deuterio de las estrellas, ya que de los elementos producidos durante el “Big Bang”, el deuterio tiene la energía de amarre por nucleón más baja de todos los elementos. Como resultado, el deuterio que se produce en las estrellas se consume muy rápidamente en otras reacciones y cualquier deuterio que observamos en el universo es muy probable que sea primordial. Otra alternativa sería observar las estrellas más distantes, sabiendo que entre más lejos este una estrella más antigua es, por lo que estudiar estos objetos permite tener observaciones más precisas sobre los elementos que se generaron en el inicio del universo.

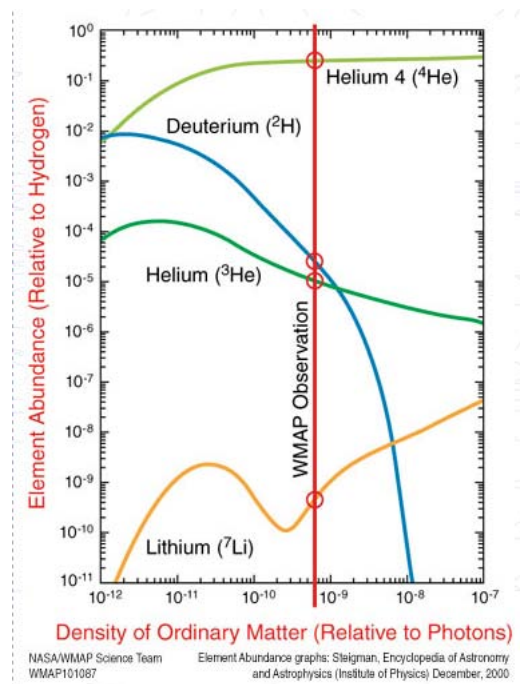


Figura 1.9: Figura que muestra la densidad de materia ordinaria comparada con la energía de radiación y la abundancia relativa de los principales elementos ligeros.

Con todo esto se muestra en la figura 1.9 cómo la abundancia del deuterio y de los demás elementos ligeros, helio y litio, cambiaría si la cantidad de materia ordinaria en el universo fuese diferente. La línea roja muestra el valor de la densidad de la materia ordinaria que se cree correcta, y los círculos rojos muestran la abundancia esperada de los diferentes elementos que debemos observar. Valores experimentales están en excelente acuerdo con esta predicción. Este acuerdo apoya la noción de que la densidad de la materia ordinaria es sólo el 4 por ciento de la densidad crítica. Al considerar esta observación junto con la observación de la sección 1.1 en la que

se menciona que la densidad del universo en forma de materia oscura fría ($\Omega_{DM} = 0.27$) conduce a la conclusión de que la materia oscura es no barionica.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Capítulo 2

Búsquedas Directas de Materia Oscura

2.1. WIMP como candidatos a materia oscura

Uno de los candidatos más importantes para la búsqueda directa de materia oscura es la partícula llamada WIMP (Weakly Interacting Massive Particles), son unas partículas hipotéticas neutras eléctricamente y estables que podrían explicar el problema de la materia oscura[47]. Cabe mencionar que existen otros candidatos como los CHAMP's (CHARGed Massive Particle), los cuales suponen que la materia oscura está débilmente cargada, lo cual en este trabajo no se va a considerar. También están los MACHOS los cuales están constituidos por materia bariónica invisible como por ejemplo agujeros negros, planetas sin estrellas, polvo etc. Pero recientemente[77] se han hecho mediciones de la luminosidad de millones de estrellas en las nubes de Magallanes y el experimento EROS confirmó que los MACHOS no pueden constituir más del 8% de la materia oscura. Las WIMP son partículas que interactúan debido a la interacción nuclear similar a la fuerza débil del modelo estándar e interactúan también con la gravedad y posiblemente, a través de otras interacciones no más fuertes que la fuerza nuclear débil. Sin embargo estas partículas en principio no pueden ser parte del modelo estándar, ya que si fuere así serían partículas que actuarían por la fuerza débil, deberán ser partículas cargadas y la única alternativa posible es que fuesen neutrinos, pero esta hipótesis puede ser descartada por la cota de Tremaine-Gunn [56][53], un argumento simple para explicar que los neutrinos no pueden ser materia oscura es el siguiente; Siguiendo el modelo estadístico de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzman para la materia oscura, entonces existe la materia oscura en el halo galáctico tendría una velocidad de dispersión de $\langle v \rangle = 10 \text{ km/s}$ [54], y el espaciamiento medio de los neutrinos sería $\Delta x = n_\nu^{-1/3} \sim (\rho_\nu/m_\nu)^{-1/3}$ y finalmente por el principio de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, tomando el valor cosmológico esperado para la densidad de neutrinos ($n_\nu \cong 340 \nu/\text{cm}^3$) se tiene $m_\nu \geq \hbar n_\nu / \langle v \rangle$, $m_\nu \geq 5 \text{ eV}$. Esto permite excluir a los neutrinos como candidatos, a materia oscura por el hecho de que la cota experimental en [55][56] excluye estos valores.

Las WIMP no se pueden ver directamente, ya que no interactúan y no emiten radiación electromagnética y tampoco reaccionan enérgicamente con el núcleo del átomo debido a que no interactúan con la fuerza nuclear fuerte. Las WIMP son extremadamente difíciles de detectar debido a que sólo interactuarían a través de las fuerzas nuclear débil y gravitatoria. Sin embargo, se han realizado algunos experimentos con el fin de detectar estas hipotéticas partículas, ya sea directa o indirectamente, una de las maneras de hacer esta detección de forma directa es detectando el impacto de una de ellas sobre el núcleo de un átomo (asumiendo que interactúan de forma débil). La WIMP en principio resolvería el problema astrofísico de la materia oscura, y esta partícula según los modelos supersimétricos debe tener una masa del orden de $M_\chi \approx 10 - 1000 \text{ GeV}$ [49].

2.2. Técnicas de detección de WIMP

Como las WIMP deben estar atrapadas gravitacionalmente en las galaxias en forma de halo galáctico debido a que estas partículas no interactúan entre sí y además es posible saber por medio de las evidencias indirectas de las curvas de rotación galácticas la densidad de materia no bariónica que debe haber en nuestra galaxia en particular. Estos dos parámetros determinan las principales características para la detección directa de materia oscura. Otros parámetros también importantes son la energía de umbral que entre más baja sea mayor sensibilidad tendrá el experimento a bajas masas y mayor cantidad de eventos podrá detectar.

2.2.1. Cámaras de proyección temporal

Las cámaras de proyección temporal fueron inventadas en los años 1970 por David Nygren, están construidas de materiales gaseosos, líquidos o una combinación de ambos, en donde se produce un campo eléctrico uniforme que arrastra los electrones producidos por partículas cargadas que atraviesan el medio, estos electrones son colectados por los extremos del detector en forma bidimensional. La amplitud de la señal y el tiempo de arribo de la señal son almacenados con el fin de reconstruir el evento en forma tridimensional. Estos detectores se usan en aceleradores de partículas como el LHC y en la búsqueda de eventos raros fuera de los aceleradores. En el caso de la búsqueda de eventos raros, se emplean cámaras de proyección temporal con masas grandes lo cual a la vez dificulta la detección de partículas de baja energía.

Una variante significativa para mejorar la eficiencia de detección consiste en la construcción de una doble fase de detección (gas-líquido), la forma de detección está basada [59, 75] en las interacciones de las partículas en un gas noble (típicamente Xenon) que producen fotones en el rango de ultravioleta, esta luz es detectada por un arreglo de fotomultiplicadores que se encuentran en la parte superior de la parte gaseosa, lo que constituye la primera parte de la señal del detector (S1), ver figura 2.1. La segunda parte de la señal (S2) producida por los electrones de centelleo en la parte líquida, que se forman cuando llegan los electrones producidos en (S1) por la partícula ionizante, estos electrones son arrastrados por medio de un campo eléctrico hacia la parte líquida y producen fotoluminiscencia, en donde esta luz es detectada por los fotomultiplicadores. De esta forma la mezcla de ambas señales corresponden a un evento en el detector.

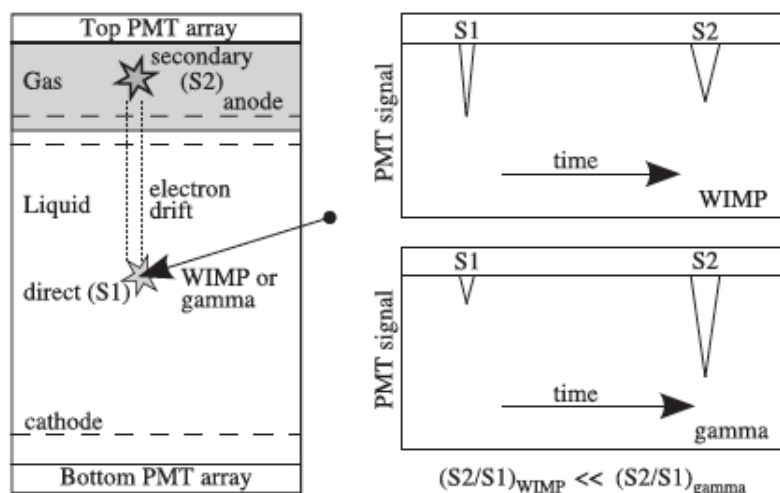


Figura 2.1: La configuración de un detector de proyección temporal de doble fase es mostrado en la parte izquierda de la imagen, en la parte derecha se muestra el poder de discriminación de este detector para un posible evento de WIMP y un evento gamma [75].

Este detector utiliza el tiempo entre las señales S1 y S2 para encontrar la profundidad de una partícula que interactúa en el detector. Debido a que los electrones se mueven con una velocidad constante en el Xenón líquido, el tiempo de retardo de la señal S2 respecto a la señal S1 se puede convertir en una profundidad física.

La coordenada xy del evento podrá inferirse al observar la distribución de los fotones de electroluminiscencia detectados por los tubos fotomultiplicadores del detector.

2.2.2. Bolómetros

En general existen muchas subcategorías de estos detectores, pero para la búsqueda de materia oscura se usan bolómetros criogénicos que operan a temperaturas de decenas de grados mK, los cuales son sensibles a fonones (cuantos de vibración mecánica en cristales) producidos por partículas que depositan su energía en el cristal, de esta forma el detector mide el aumento de temperatura del detector lo cual está relacionado con la interacción de una partícula con el cristal. La sensibilidad de este proceso está dada por

$$\sigma_E^2 = \xi^2 kT [TC(T) + \beta E],$$

donde C es la capacidad calorífica del detector, T es la temperatura de operación, k es la constante de Boltzmann y ξ es un factor adimensional que depende de las características del detector. El último término en esta ecuación considera fluctuaciones estadísticas en el número de fonones producidos por la radiación, por lo que β es también un factor adimensional que depende de la naturaleza del detector. La capacidad calorífica C puede ser obtenida por el modelo de Debye $C \propto T^3$, esto da una sensibilidad del orden de $\sigma_E \sim 10\text{eV}$, la cual se ve afectada por un orden de magnitud debido a factores como el ruido de lectura, la disipación de energía etc. Una de las principales desventajas es que la energía de resolución de estos detectores disminuye con la masa M en la forma $\sigma_E \propto \sqrt{M}$.

Cuando una partícula interactúa con un cristal de Ge o Si[58], después de un evento de dispersión, la mayor parte de la energía impartida al cristal se deposita como un espectro de fonones atómicos de alta frecuencia ("fonones primarios"). Estos son vibraciones de la red localizadas que rápidamente se degradan en frecuencia y viajan hacia las superficies del detector. A lo largo de la trayectoria del electrón en retroceso o núcleo, los pares electrón-hueco son creados y producen una señal. El número de eventos depende de la energía de retroceso total, así como el tipo de interacción, así los retrocesos nucleares son menos eficientes en la creación de pares electrón-hueco que retrocesos de electrones, esto puede explicarse con el factor de eficiencia "quenching factor" el cual se puede apreciar en la figura (2.2).

En el mismo acto un campo eléctrico aplicado a través del cristal hará que los electrones y los huecos se desplacen hacia los lados opuestos, donde los electrodos de superficie se pueden usar para medir una señal de ionización. Los electrones (agujeros) se recombinan con agujeros (electrones) en los electrodos (o en la mayor parte), momento en el cual la energía depositada, que entró en la creación de los portadores de carga se libera como fonones. En consecuencia, se tiene una población de fonones-primarias, más los eventos de recombinación. Esto es igualmente cierto para los electrones y retrocesos nucleares. En general para una energía dada, las respuestas del cristal son más pequeñas para un retroceso nuclear que para un retroceso de electrones.

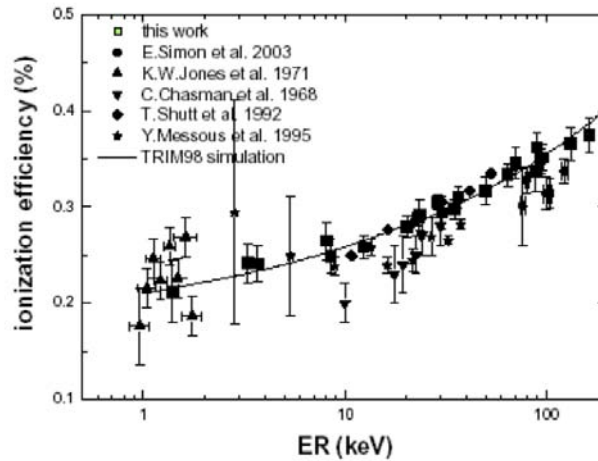


Figura 2.2: Figura que muestra la variación del “quenching factor” con la energía.

2.2.3. Detectores Centelleo

Este detector funciona por medio de la producción de destellos luminosos en el rango del ultravioleta-azul, causados por el dopaje de moléculas especiales en un plástico, líquido o un cristal. cuando una partícula atraviesa el medio ya sea plástico, líquido o cristal se excitan muchas moléculas del medio produciendo radiación gamma la cual es absorbida por las moléculas y retransmitida en una longitud de onda más baja (azul), ver figura 2.3 . Esta luz se recoge y transforma en un pulso eléctrico por medio de un fotomultiplicador. El material que produce el destello se llama cristal de centelleo. Se selecciona para que tenga una alta eficiencia en absorber radiación ionizante y emitir luz (luminiscencia). Debe ser transparente para poder transmitir la luz producida, y debe estar a oscuras para que la luz ambiental no le afecte. El material más empleado como cristal de centelleo es el yoduro de sodio activado con Talio, NaI (Tl). Es de costo bajo y es muy estable. Otro muy común es el yoduro de cesio activado con Talio, CsI (Tl), y hay otros materiales inorgánicos de usos especiales. Con objeto de transformar la pequeña cantidad de luz producida por un cristal de centelleo en una señal eléctrica que se puede manejar con más comodidad, se pone en contacto con un fotomultiplicador. La eficiencia de un detector de centelleo depende de la eficiencia de la conversión de energía del proceso de dopaje, la eficiencia cuántica y la eficiencia de transferencia de luminiscencia del material.

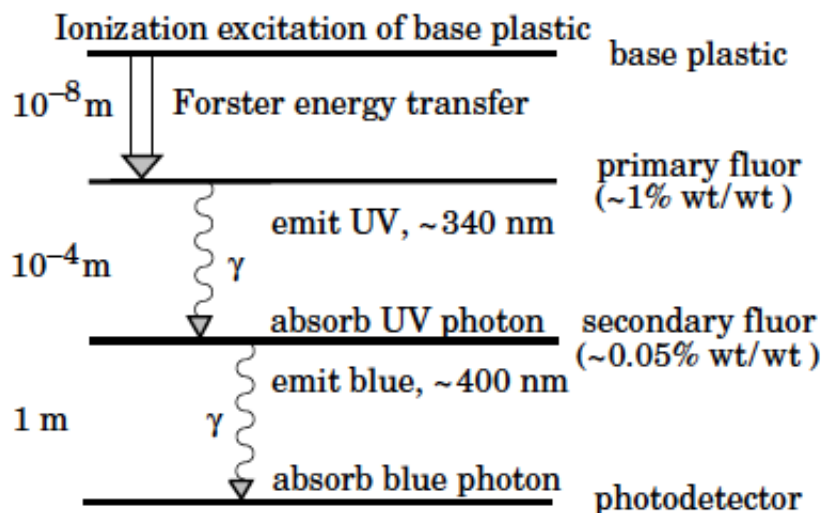


Figura 2.3: Proceso esquematizado sobre el funcionamiento de un plástico centellador[74].

2.2.4. Cámaras de burbujas

Las cámaras de burbujas fueron uno de los primeros detectores de partículas que usaba un líquido sobrecalentado que permitía observar las trayectorias de las partículas cargadas bajo la influencia de un campo magnético, este método está ya en desuso porque existen detectores semiconductores más eficientes, pequeños, económicos y más precisos, además de que era muy difícil mantener el líquido en estado sobreenfriado del detector. Últimamente se usaron estos detectores volvieron a surgir para su uso de detección de eventos raros, como la materia oscura. El experimento [41, 76] usa un líquido (CF_3I) en estado metaestable (líquido sobreenfriado), en donde al pasar una partícula produce una nucleación del líquido y esto induce protoburbujas que posteriormente debido a la energía depositada de la partícula se forman burbujas microscópicas de estas protoburbujas, en donde la energía de umbral está limitada a la producción de burbujas con un radio crítico mínimo ($E_{th} = 4\pi r_c^2(\sigma - T\partial\sigma/\partial T) + 4\pi r_c^3\rho(h_b - h_l)/3$, donde σ es la tensión superficial N/m, r_c radio crítico, T la temperatura, ρ la densidad del líquido y h_b, h_l es la entalpía del líquido sobreenfriado y del vapor respectivamente). La desventaja de este método es que es incapaz de medir la energía directa de las partículas y en lugar de eso solo puede medir la tasa de frecuencia de eventos, que son lo suficientemente energéticos para superar la energía de umbral.

2.2.5. Detectores basados en CCD

Recientemente se ha demostrado que los dispositivos CCD [33] de alta resistividad tienen gran potencial para detectar partículas ionizantes con un bajo nivel de ruido. Los detectores de CCD fueron inicialmente fabricados en el Laboratorio Nacional Lawrence Berkeley MicroSys27 tems Lab para el “Dark Energy Survey” (DES) de la cámara (DECam) [60]. El tamaño del pixel es de $15\mu \times 15\mu$ y la región activa del detector es de alta resistividad (10-20 k Ω cm) de Silicio con cientos de micras de espesor de tipo n. La alta resistividad del silicio permite una baja densidad de los donantes en el sustrato, lo que conduce a un funcionamiento óptimo a valores razonablemente bajos de la tensión de polarización aplicada ($\sim 20\text{V}$). Los CCD son típicamente de 8 o 16 Mpíxeles ver figura 2.4. Los CCD funcionan gracias a que son capaces de almacenar carga en un pixel cuando una partícula ioniza el medio, esta carga puede ser leída por medio de relojes trifásicos y puede ser procesada por un software específico.

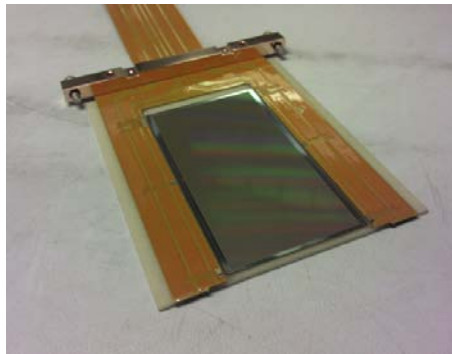


Figura 2.4: Vista de una CCD utilizada para la detección de partículas ionizantes.

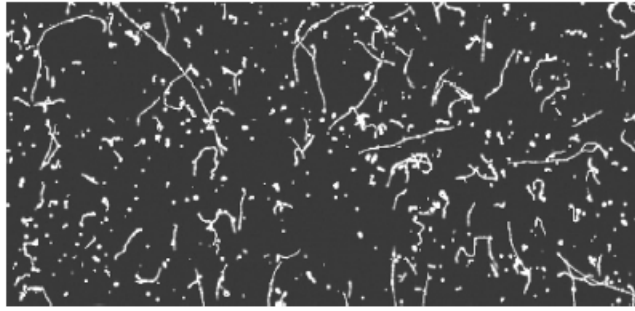


Figura 2.5: Imagen resultante de una exposición del CCD a la fuente de neutrones ^{252}Cf , los puntos corresponden a eventos de neutrón [1].

2.3. Límites existentes para las búsquedas de WIMP

Varios experimentos se han construido siguiendo las líneas de detección mencionadas en la sección anterior. Sin embargo varios de estos experimentos no han encontrado ningún indicio de señal de WIMP según el modelo del halo galáctico, por lo que solo han establecido límites experimentales a típicamente a un 90 %C.L.

2.3.1. Experimento CRESST

El experimento CREST (CRESST-II) (Cryogenic Rare Event Search with Superconducting Thermometers) por sus siglas en inglés, está localizado en Italia a una profundidad de 3500 m.w.e. El experimento usa detectores criogénicos de centelleo de cristales (CaWO_4) operando también con bolómetros (sensibles a fonones) y junto con otro detector auxiliar de detección de luz (Si con filamentos de Tungsteno).

La simultánea adquisición de datos de ambos detectores de fonones (CaWO_4) y de luz (Si) permite una discriminación eficiente de eventos espurios como partículas alfa y retrocesos nucleares provenientes de neutrones, esto es gracias a las sutiles diferencias entre la señal del bolómetro y del detector de luz. Adicionalmente estos detectores están cubiertos de material reflejante, ya que esto resulta crítico para discriminar decaimientos radioactivos del Po^{210} , que ocurren en las superficies del cristal o en los alrededores del detector. Cuando esta partícula alfa llega al detector produce un evento similar a un WIMP, pero gracias a la cubierta reflejante la luz emitida por la partícula alfa es capaz de producir un “veto”. El experimento CRESST usa un detector equipado con dos termómetros para detectar los fonones y la luz proveniente de un impacto de alguna partícula como una WIMP. La señal de los fonones es medida por ende como un incremento en la temperatura del cristal, mientras que la luz de centelleo es detectada por el incremento de temperatura del detector de Silicio. La colaboración CRESST, ha detectado límites para la sección eficaz de la WIMP independiente del spin de $5 \times 10^{-43} \text{ cm}^2$ y aun sigue intentado mejorar su experimento para remover ruidos de fondo y aumentar su sensibilidad ([11]).

Este detector se puso en un laboratorio subterráneo a una profundidad de 3500 m.w.e. Los detectores están escudados contra la radioactividad natural quedando casi exclusivamente como Background los neutrones producidos por rayos cósmicos en el escudamiento de Pb y Cu (ver figura (2.6)).

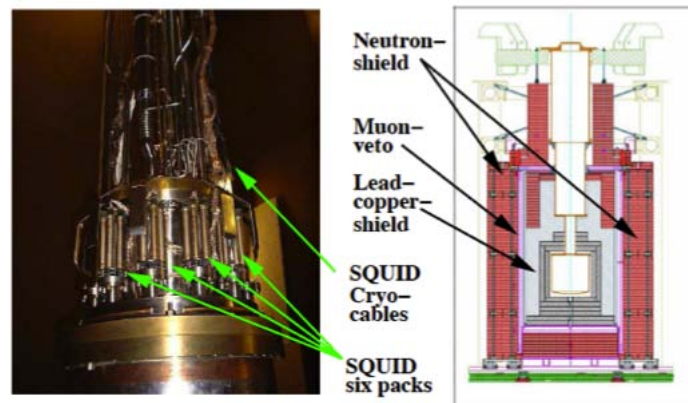


Figura 2.6: Esquema del detector CRESST.

Sin embargo la colaboración de CRESST hizo una simulación que considera solo los escudos de Pb y Cu para ver cuantos neutrones de espalación se producen en el detector. Para ver cual fue el arreglo que se usó en la simulación de CRESST véase la figura (2.7).

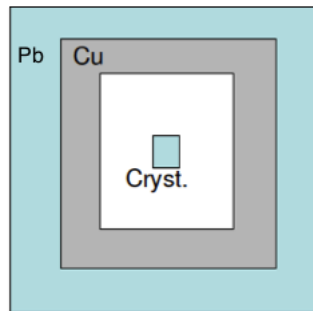


Figura 2.7: Arreglo que usó CRESST en su simulación.

2.3.2. Experimento COGENT

El experimento CoGeNT [49] usa un solo cristal como bolómetro de 440 gramos de Germanio ultra-puro, enfriado a la temperatura del Nitrógeno líquido. Una de las ventajas del detector es que es uno de los que poseen un umbral de energía de detección muy bajo (0.5 keV), en consecuencia esto implica que este experimento tiene sensibilidad para ver masas de WIMP del orden de 5 GeV. Además de tener un nivel de umbral bajo, el detector es capaz de distinguir y discriminar los eventos de ruido de fondo proveniente de la superficie, por medio de las trazas de las señales del detector. COGENT observó una modulación anual, utilizando un método similar que el experimento DAMA/LIBRA, esta modulación sugiere una masa de WIMP de 7-8 GeV y una sección eficaz de $\sim 10^{-44}\text{cm}^2$.

2.3.3. EDELWEISS

Este experimento usa también detectores de bolómetros e ionización de Germanio a temperaturas criogénicas, se encuentra a una profundidad de 4800 m.w.e, en Modane entre Francia e Italia. Está escudado con 50 cm de polietileno y 20 cm de Plomo para evitar neutrones y rayos gamma (ver figura (2.8)).

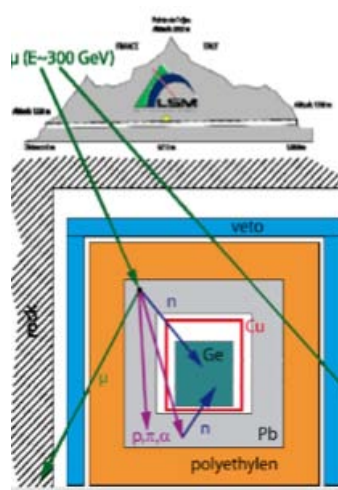


Figura 2.8: Diagrama que representa la forma y localización del detector EDELWEISS.

2.3.4. ZEPLIN-III

ZEPLIN-III [62] es un experimento de gas noble de dos fases (líquido/gas) que usa Xenon, ubicado en el Laboratorio Subterráneo de Boulby (Noreste de Inglaterra, Reino Unido), a una profundidad de 1.100 m. A esta profundidad el fondo de rayos cósmicos se reduce por un factor de un millón. El detector consta de 12 kg de Xenón líquido frío y encima por una fina capa de vapor de Xenón. Los eventos son vistos por un conjunto de 31 tubos fotomultiplicadores sumergidos en el líquido. El detector funciona por medio de campos eléctricos grandes y proporciona la reconstrucción de alta precisión del punto de interacción en tres dimensiones. Junto con una baja contaminación de eventos de ruido, estas características dan a ZEPLIN-III de una alta sensibilidad para las búsquedas directas de WIMP. El experimento ha llegado a su fin y solo ha proporcionado un límite experimental.

2.3.5. Experimento Xenon 10 y 100.

Este es un experimento [57] dedicado a observar ionizaciones producidas por átomos de Xenon con interacciones de WIMP, es un detector que usa cámaras de proyección temporal dobles. El detector es de Xenon líquido ultrapuro y gracias a la detección de ionización y el proceso de centelleo el detector es capaz de distinguir entre retrocesos nucleares de una WIMP con otros ruidos naturales. La masa fiducial del detector de Xenon 10 es de 10 kg y la de Xenon 100 es de 100 kg, el nivel de energía de umbral de este detector es alto de 15 keVee lo cual restringe la sensibilidad de este experimento a regiones de masa mayores a $50 \text{ GeV}/c^2$. Hasta la fecha estos experimentos no han visto nada significativo en cuanto a señal de WIMP se refiere, solo han impuesto límites de sensibilidad para su región de masa y sección eficaz ($\sim 10^{-43} \text{ cm}^2$).

2.3.6. Experimento LUX

Large Underground Xenon [42] (LUX) opera en Sandford a 4300 m.w.e en Lead en Dakota del sur, el detector consiste en una masa de Xenon líquido de 370 kg y una masa activa de 250 kg en estado de doble fase (líquido-gas). De esta forma las interacciones de las partículas en el líquido producen electrones de centelleo que son arrastrados por medio de un campo eléctrico hacia la parte gaseosa en donde finalmente producen luz, esta luz es detectada por 61 fotomultiplicadores que se encuentran en la parte superior de la parte gaseosa y otra parte en la sección inferior donde se encuentra la fase líquida. La forma de discriminar a una WIMP en este experimento es solo cuando se tiene uno y solo un evento en la parte líquida y gaseosa, con una extracción mínima de ocho electrones.

2.4. Indicaciones experimentales de la posible existencia de WIMP

Contrario a la sección anterior en esta parte se pretende mencionar brevemente los indicios experimentales de señales positivas de WIMP consistentes con el modelo del halo galáctico que se han encontrado hasta ahora. Estas señales no son del todo consistentes pues aunque algunas regiones de señal coinciden otras discrepan en absoluto, posiblemente por errores estadísticos de los análisis y sobretodo errores sistemáticos.

2.4.1. Experimento DAMA/LIBRA

El experimento DAMA / LIBRA emplea una arreglo de cristales NaI de centelleo en el Laboratorio de Gran Sasso en Italia. Las interacciones en los cristales se identifican por su centelleo de la pura luz. El rendimiento de centelleo de un retroceso nuclear se reduce en comparación con la de un retroceso de electrones de energía similar por un “Quenching Factor” $Q = 0.3$ para retrocesos de Na y $Q = 0,009$ para el I ([7]). El enfoque utilizado por el experimento DAMA / LIBRA es un poco diferente en comparación con lo que otros experimentos de detección directa de WIMP. En lugar de lograr solo el rechazo de fondo midiendo los retrocesos nucleares producidos por WIMP cuando dispersan por un núcleo, DAMA / LIBRA en su lugar busca una señal de modulación, generalmente conocido como modulación anual. La modulación anual es causada por la revolución de la Tierra alrededor del Sol . Esto conduce a una modulación de la velocidad de la Tierra con respecto a la estructura galáctica y por lo tanto una modulación detectable del flujo de WIMP durante todo el año. La evidencia basada en modulación de WIMPs típicamente requiere una muestra muy amplia de retrocesos nucleares producidos por WIMP , y tener muy bien caracterizado el ruido de fondo. En base a los datos recogidos durante un período de 13 ciclos anuales, la colaboración DAMA / LIBRA informa de pruebas de una modulación anual con una significación estadística de 8.9σ . La variación de su señal es consistente con una función seno alcanzando un máximo el 16 de Mayo ± 7 días a energías entre 2 y 4 keV, 22 de mayo ± 7 días entre 2 y 5 keV, y 26 de mayo ± 7 días entre 2 y 6 keV, consistente con el modelo de distribución de velocidades maxwelliano de la materia oscura en un halo. Aunque la estrategia de buscar una modulación anual en su tasa de DAMA / LIBRA puede discriminar eventos de modulación diferentes a los que podría ser materia oscura, que también podrían sufrir variaciones estacionales. Por ejemplo, el flujo de muones es conocido por modular como resultado de las variaciones de temperatura en la estratosfera . Variaciones observadas de la tasa de ruido provenientes del radón inducida también están fuera de fase con la señal reportada por DAMA / LIBRA. Hasta la fecha, ningún ruido de fondo ha sido identificado con la misma fase y frecuencia compatibles con la señal de DAMA / LIBRA ([8, 9, 10]), ver figura 2.9.

2.4.2. Experimento CDMSII-Si

Es un experimento que consiste en detectores en forma de disco semiconductores (Si y Ge), que operan a temperaturas criogénicas (40 mK), esta ubicado en el laboratorio subterráneo de Soudan, el detector consiste en dos arreglos de cristales de Silicio (1.2 kg) y Germanio (4.6 kg). CDMS II ha adquirido datos para su detector de Silicio desde Julio del 2007 hasta Septiembre del 2008, la exposición final del detector resulta ser de 140.2 kg-día, el detector fue calibrado usando Californio (252), y los eventos del ruido de fondo provenientes de neutrones fueron excluidos por medio de una simulación montecarlo (GEANT4), al igual que el ruido proveniente del Plomo radioactivo, estos ruidos según reportan [12] son menores a 0.21 eventos, así obteniendo finalmente un resultado del ruido total del experimento de $0.42_{-0.08}^{+0.20} (stat) +_{-0.24}^{+0.28} (sys)$. Con estos datos observaron tres eventos por encima de este ruido de fondo en su espectro de retrocesos nucleares (8.2 keV, 9.5 keV, 12.3 keV) con un intervalo de confianza entre ruido-sígnal de $(6.7\sigma, 4.9\sigma, 5.1\sigma)$ respectivamente. Con esto CDMSII_Si hizo un estudio estadístico “likelihood” para los parámetros de masa de la WIMP y la sección eficaz de interacción independiente del espín de la WIMP, con ello ellos obtuvieron los valores del “likelihood” de $(M_\chi = 8.6 \text{ GeV}/c^2, \sigma_\chi = 1.9 \times 10^{-41} \text{ cm}^2)$ ver figura 2.9, con estos parámetros aseguran que la probabilidad de que esta interacción sea una WIMP es del 68 % comparada con la probabilidad de la hipótesis de que esta señal solo fuese ruido de 4.5 %. Esto quiere indicar que el evento sugiere una interacción solo debida a un WIMP, en

la siguiente figura se puede observar los límites obtenidos por CDMII_Si y otros experimentos.

2.4.3. LUX

Como se menciona en la parte 2.4.4 LUX es un experimento de centelleo a 4300 m.w.e, el cual obtuvo datos en el 2013 en un tiempo de 85.3 días efectivos. El experimento es especialmente sensible en la región de masas grandes (33-50 GeV/c²), pero debido a su gran masa fue lo suficientemente sensible en teoría para cubrir la región de COGent y CDMSII, ver figura 2.9. Estos resultados contradicen en principio los resultados de COGent y CDMSII (sección 2.5.1) ya que según LUX no encontró ninguna señal significativa en esta región. Pero aun esto puede deberse a un error sistemático que no se esta considerando ya que los experimentos que usan bolómetros y cristales si encuentran señales positivas.

2.4.4. COGent 2014

Como se vio en la sección 2.4.5 COGent usa cristales de Germanio en modo de bolómetros para detectar partículas, en 2014 [43] publico nuevos datos de 1136 días activos de exposición. En esta versión se rehicieron estudios de errores sistemáticos y de ruido de fondo cosmogénico (0.67 cpd) se obtuvo una señal positiva usando el método del “maximum likelihood” de $M_\chi \sim 10 \text{ GeV}/c^2$ y $\sigma=5.2 \times 10^{-42} \text{ cm}^2$, ver figura 2.9. Estos datos no son del todo consistentes con los obtenidos en los resultados anteriores de COGent, por lo que hasta ahora se esta buscando la razón por la cual sucede este efecto y en la espera de más datos para poder comparar.

2.4.5. Experimento Xenon 1T

El experimento XENON [17] tiene por objeto la detección directa de la materia oscura en forma de WIMP a través de la dispersión elástica de núcleos de Xenón. Con una masa fiducial de 1000 kg de Xenón líquido, un umbral suficientemente bajo de 16 keV de energía de retroceso y una tasa de rechazo de 10 eventos por año, XENON sería sensible a una WIMP-nucleón sección eficaz de interacción de $\sim 10^{-46} \text{ cm}^2$ y con WIMP con masas superiores a 50 GeV. El experimento XENON consiste en una tonelada de xenon ubicado en Gran Sasso que se llevará a cabo con una serie de diez detectores idénticos de 100 kg módulos detectores (XENON100). Los detectores son “time projection chambers” operados en doble fase (líquido/gas), para detectar simultáneamente la ionización, a través del centelleo secundario del gas, y eventos de retrocesos nucleares de baja energía producidos en el líquido centellador. La relación entre este cociente de detección primaria y secundaria de WIMP o neutrones es vital para la reconstrucción y discriminación de eventos posible de WIMP y ruido de fondo de XENON.

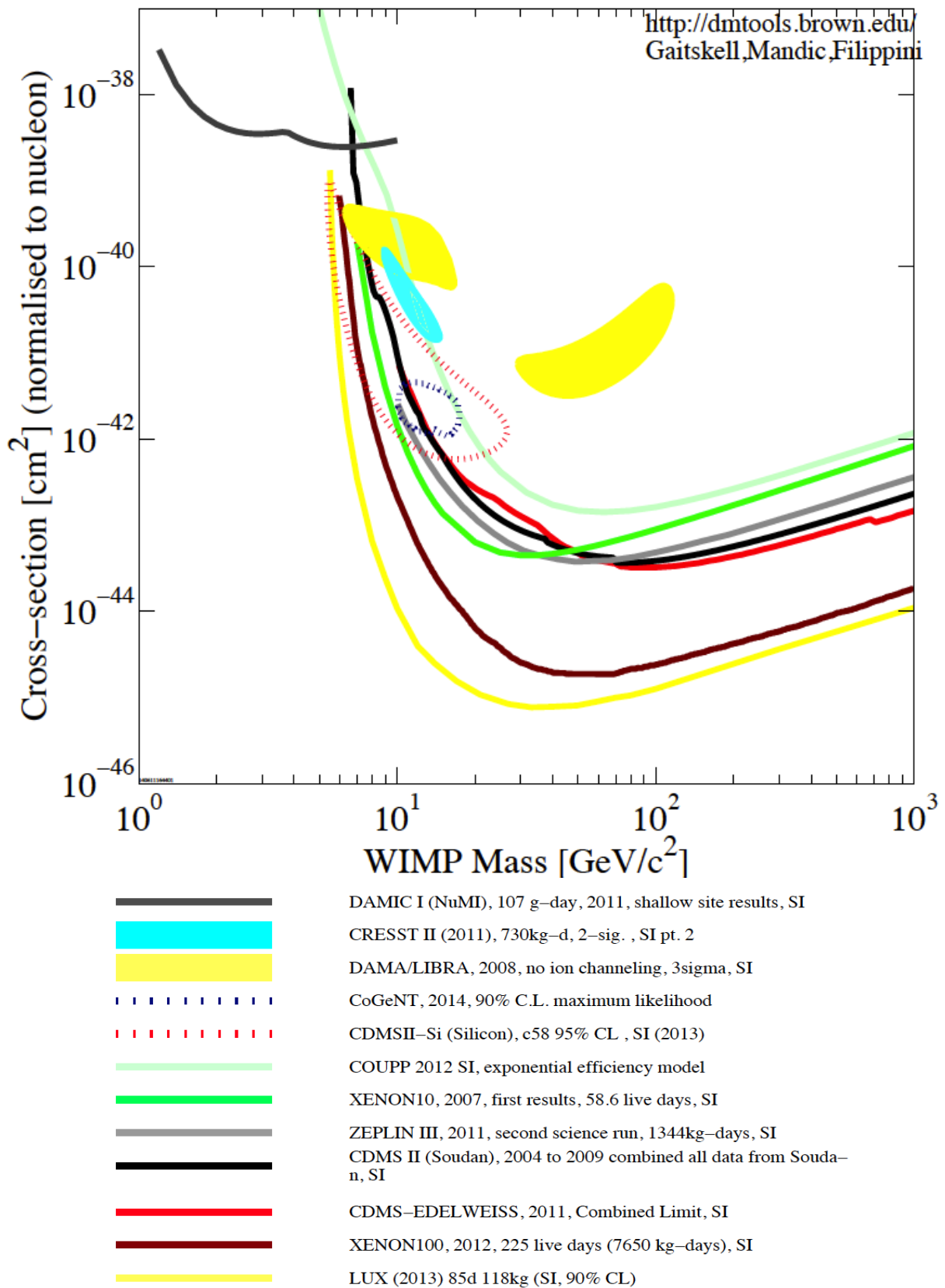


Figura 2.9: Límites y señales positivas de varios experimentos de detección directa de WIMP.

2.5. El modelo del halo galáctico de WIMP

El principal objetivo de los experimentos de detección directa de materia oscura en forma de WIMP, consiste en observar retrocesos de núcleos en un detector causados por la interacción WIMP-nucleón. Así este tipo

de experimentos están limitados a observaciones en laboratorios terrestres, y dependen de observar con gran precisión retrocesos nucleares en un detector dado, por eso en esta sección se considerará un modelo genérico para estudiar la estas interacciones.

Las hipótesis para este modelo son las siguientes:

- I. Se asume que existe un halo estacionario de materia oscura.
- II. El halo se asume estático en promedio, sin embargo se asume que las WIMP siguen una distribución de Maxwell con velocidad R.M.S, proporcional a la velocidad a la que gira el sol.
- III. Se asume que el halo es lo suficientemente poco denso para que existan colisiones entre WIMP de forma significativa.
- IV. Se asume que la WIMP debe ser muy masiva y por lo tanto debe acoplarse a la mecánica no relativista.

2.5.1. Modelo Matemático del halo galáctico (tasa de eventos)

Empezando por considerar que las WIMP se comportan como una gas ideal (hipótesis 3), estas deben seguir la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \phi = 0, \phi = nv, \quad (2.1)$$

como se asumió que el halo es estacionario (hipótesis 1), entonces se deduce de la ecuación de continuidad que el flujo es constante en el tiempo e isotrópico. Lo único que se necesita conocer es la densidad de materia oscura, este dato se puede obtener de las observaciones astronómicas de las curvas de rotación de galaxias, ($n \equiv \delta_\chi = 0.4 \text{ GeV/cm}^3$) ([45]). Así el flujo (ϕ) puede quedar de la siguiente forma

$$\phi = \left(\frac{\delta_\chi}{m_\chi c^2} \right) v_\chi. \quad (2.2)$$

Con una expresión para el flujo, y la velocidad v_χ de la WIMP en el halo galáctico ,será posible estimar la tasa de interacciones por segundo (R) de la WIMP.

$$R = N_B \phi \sigma_{\chi-A} \quad (2.3)$$

En donde N_B , es el número de blancos, $\sigma_{\chi-A}$ es la sección eficaz de interacción coherente entre la WIMP y el núcleo. La sección eficaz que es de interés es la que contempla la interacción WIMP-Nucleón, ya que en principio esta sección eficaz sería más general, ya que no depende del núcleo blanco del detector, los cuales pueden ser muy variados, así la sección eficaz WIMP-Nucleón es indiferente a que tipo de núcleo sea, ya que independientemente de que detector se este usando este sección eficaz puede ser escalada por el número de nucleones que tenga el blanco del detector. Esta sección eficaz puede ser escalada de la siguiente forma

$$\sigma_{\chi-A} = \frac{\mu_{\chi A}^2}{\mu_{\chi n}^2} A^2 \sigma_{\chi-n}, \quad (2.4)$$

donde $\mu_{\chi A}^2$ es la masa reducida entre la WIMP y el núcleo y $\mu_{\chi n}^2$ es la masa reducida entre la WIMP y un nucleón, así reescribiendo la ecuación (2.3)

$$R = \left(\frac{\delta_\chi}{m_\chi c^2} \right) v_\chi \frac{N_A}{A} M_D \frac{\mu_{\chi A}^2}{\mu_{\chi n}^2} A^2 \sigma_{\chi-n}. \quad (2.5)$$

En este caso (A) denota el número de nucleones del elemento, N_A es el número de Avogadro y M_D es la masa del detector en gramos. Ahora lo que sigue es incorporar la información de cuanta energía se depositará por una colisión de una WIMP en un núcleo, para esto se elaborará un cálculo simple de colisiones elásticas entre estas dos partículas esto es válido gracias a la hipótesis (4) y con la suposición de que las colisiones son elásticas,

haciendo el cálculo se llega a la relación entre la energía incidente de la WIMP y la energía de retroceso del núcleo (M_N es la masa del núcleo)

$$E_R = \frac{2\mu_{\chi A}^2 v_\chi^2}{M_N} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.6)$$

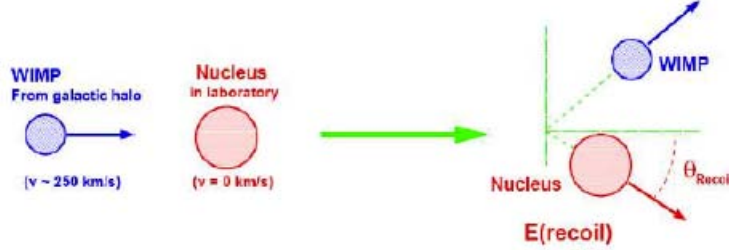


Figura 2.10: Colisión elástica entre una WIMP y el núcleo.

De aquí se supondrá que la WIMP tiene la misma probabilidad de producir una energía de retroceso (E_R), en un intervalo ($0 \leq E_R \leq E_{Rmax}$) para una velocidad incidente dada, así tomado la distribución de probabilidad

$$F(E_R) = \frac{1}{E_{Rmax}}, \quad E_{Rmax} = \frac{2\mu_{\chi A}^2 v_\chi^2}{M_N}, \quad (2.7)$$

de tal forma esta distribución de probabilidad esta correctamente normalizada ($\int_0^{E_{Rmax}} F(E_R) dE = 1$). De esta forma se ha construido un espectro diferencial de tasa de eventos

$$\frac{dR}{dE_R} = R F(E_R) dE_R = \left(\frac{\delta_\chi}{m_\chi c^2}\right) v_\chi \frac{N_A}{A} M_D \frac{\mu_{\chi A}^2}{\mu_{\chi n}^2} A^2 \sigma_{\chi-n} \left(\frac{M_N}{2\mu_{\chi A}^2 v_\chi^2}\right) dE_R. \quad (2.8)$$

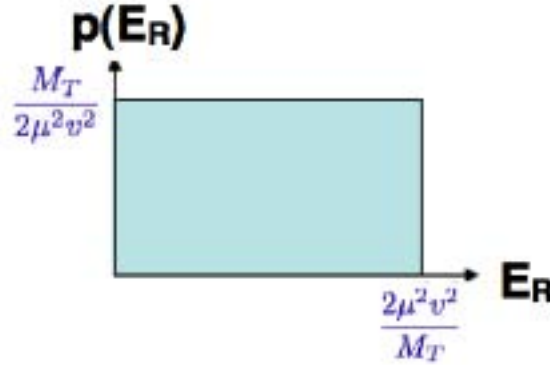


Figura 2.11: Distribución e probabilidad dada por la ecuación (2.6).

Hasta este punto lo único que falta considerar es que las WIMP se mueven en un halo con distribución de velocidades maxwelliana, empezando por tomar la distribución de Maxwell para este caso

$$\rho(v_\chi) = \frac{4\pi v_\chi^2}{(\pi v_0^2)^{3/2}} e^{-\frac{v_\chi^2}{v_0^2}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2v_\chi^2}{3}}, \quad (2.9)$$

será necesario calcular el valor esperado de la tasa de flujo diferencial ($\frac{dR}{dE_R} = \int_{v_{min}}^{v_{max}} p(v_\chi) r(v_\chi) dv_\chi$), en donde la velocidad v_{max} , es la velocidad de escape de la galaxia, la cual se aproximará a ($v_{max} \rightarrow \infty$) ya que el efecto de este número contribuye solo el 0.5 %, la velocidad mínima se obtiene despejando (2.6) cuando E_R es máxima ($\theta = \pi$). así se obtiene la velocidad mínima para producir una energía de retroceso E_R ($v_{min} = \sqrt{\frac{M_N E_R}{2\mu_{\chi A}^2}}$). De

este análisis finalmente se obtiene para la tasa diferencial de eventos ($\overline{\frac{dR}{dE_R}} \equiv \frac{dR}{dE_R}$)

$$\frac{dR}{dE_R} = \left(\frac{\delta_\chi}{m_\chi c^2} \right) \frac{N_A}{A} M_D \frac{\mu_{\chi A}^2}{\mu_{\chi n}^2} A^2 \sigma_{\chi-n} \left(\frac{M_N}{2\mu_{\chi A}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-\frac{M_N E_R}{2\mu_{\chi A}^2 v_0^2}} dE_R. \quad (2.10)$$

Finalmente solo queda añadir el efecto de las funciones de onda de los nucleones con la partícula incidente, ya que en un análisis de dispersión nuclear siempre se debe tomar en cuenta la estructura del núcleo. Esto se modela por lo que se conoce como el factor de Forma del núcleo ($F(q) = \int \Psi_i^* \Psi_i e^{-ix \cdot q} d^3x = \int \rho(x) e^{-ix \cdot q} d^3x$), donde ρ representa la densidad de carga nuclear. Usando la expresión de Lewin and Smith([6])

$$F(q) = \frac{3j_1(qr)}{qr} e^{-(qs)^2/2}, \quad (2.11)$$

$q = \sqrt{2M_N E_R}$, $s \approx 0.9\text{fm}$, $r \approx 1.3A^{1/3}$, este efecto solo es perceptible para energías de umbral mayores a 1keV. Esto nos permite reescribir la expresión anterior del flujo diferencial de eventos

$$\frac{dR}{dE_R} = \left(\frac{\delta_\chi}{m_\chi c^2} \right) \frac{N_A}{A} M_D \frac{\mu_{\chi A}^2}{\mu_{\chi n}^2} A^2 (\sigma_{\chi-n} (F(q))^2) \left(\frac{M_N}{2\mu_{\chi A}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-\frac{M_N E_R}{2\mu_{\chi A}^2 v_0^2}} dE_R. \quad (2.12)$$

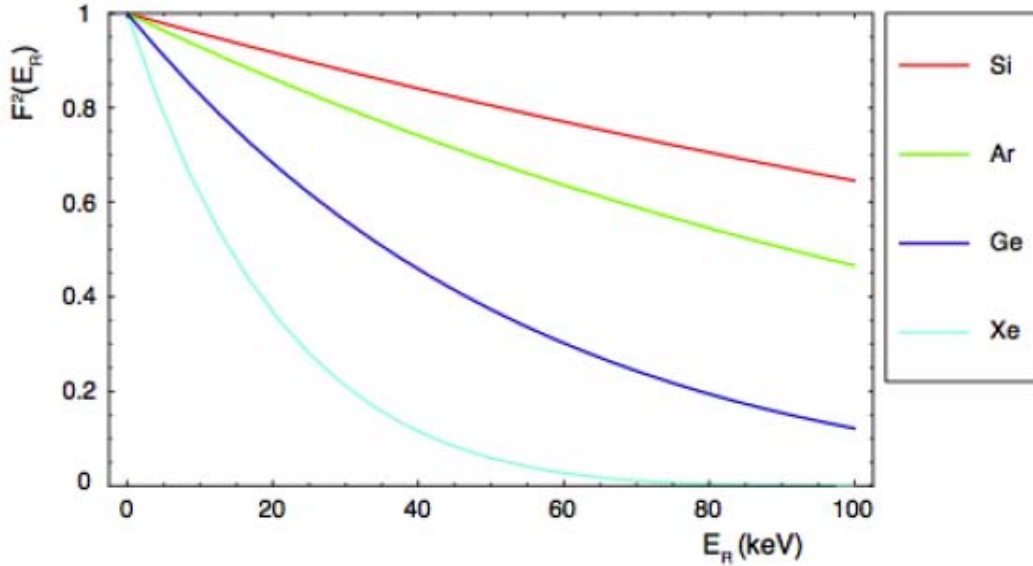


Figura 2.12: Factores de forma según la ecuación (2.11).

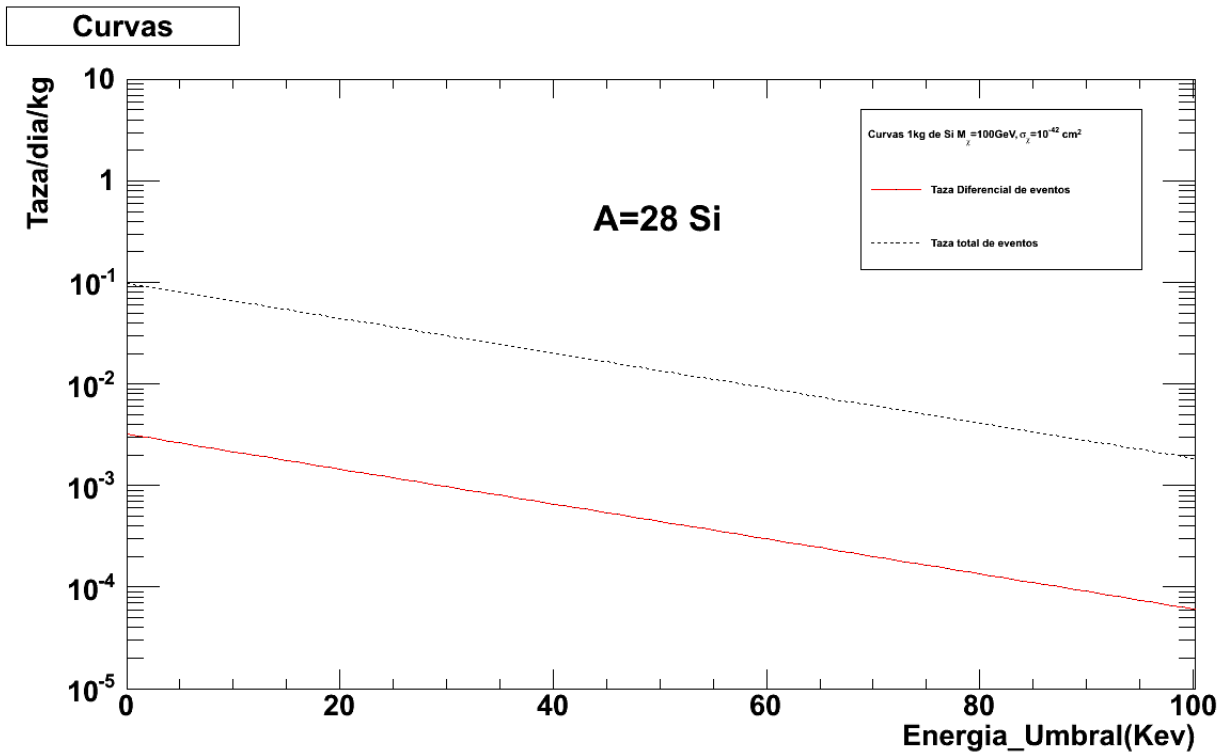


Figura 2.13: Tasa de flujo diferencial de eventos (roja), tasa total por segundo de eventos (punteada), para A=28 (Si), un kg de material, $M_\chi=100\text{ GeV}$, $\sigma_\chi=10^{-42}\text{cm}^2$

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Capítulo 3

Ruido de fondo en experimentos subterráneos

3.1. Fuentes principales de eventos de ruido de fondo.

Para los experimentos de búsqueda directa de materia oscura es necesario tener un experimento con pocos eventos de ruido por día, ya que como se explico en el capítulo anterior la tasa de eventos esperados por día por kilogramo de WIMP son del orden de 10 eventos por día. Las fuentes de ruido pueden variar según el experimento, pero se pueden listar las tres componentes principales de ruido

- I. Eventos de ruido cosmogénico: Son producidos por los muones producidos por los rayos cósmicos de alta energía en la atmósfera, estos muones pueden penetrar varios metros de roca al llegar a la superficie y al interaccionar con núcleos pesados puede espalarlos y producir neutrones los cuales también pueden recorrer grandes distancias antes de absorberse y así estos neutrones tienen una alta posibilidad de interaccionar con el detector.
- II. Radioactividad intrínseca del detector y sus alrededores: Esta componente es debida principalmente por los remanentes de Uranio, Torio y Polonio que se encuentran en los mismos materiales del detector, como puede ser un escudo de Plomo, la electrónica etc.
- III. Ruido electrónico: Este ruido es debido al detector mismo y depende de cada caso particular.

Para poder reducir los eventos de ruido cosmogénicos, los experimentos de detección directa de materia oscura que buscan WIMP, son operados a profundidades de varios metros sobre el nivel de la superficie, para que la roca sirva como un escudo ante los muones de alta energía (los muones solares solo son considerables en la superficie, ya que son de baja energía y se atenúan rápidamente), para reducir la radioactividad lo único que se puede hacer es conseguir que el experimento sea elaborado con materiales ultrapuros. El ruido electrónico puede ser optimizado para cada caso particular de un experimento y su método de detección.

En esta sección tiene como objetivo explicar un modelo que ayude a comprender el origen de los eventos de ruido cosmogénico antes mencionado, y con ello poder estimar los eventos de ruido de fondo de un experimento de materia oscura subterráneo. El modelo se basará en explicar a partir del espectro de muones incidentes y los procesos fotonucleares, la producción de neutrones en un material, en donde después se utilizará este espectro para hacer la estimación de los neutrones que pudiesen llegar al detector.

3.2. Cálculo de eventos de ruido de fondo

En general calcular los eventos de ruido de fondo de un experimento no es algo trivial, ya que la Física que se requiere, aunque conocida resulta compleja de estudiar por la gran variedad de detalles que se necesitan

considerar. en particular es necesario conocer la interacción de neutrones con la materia, así como de muones y procesos radioactivos en general. En la práctica los experimentos recurren a simulaciones montecarlo altamente detalladas para estimar estos efectos. En lo que sigue trataremos de hacer estimaciones basadas en primeros principios para tener una estimación del ruido del experimento DAMIC.

Para efecto de esta tesis una de las fuentes de ruido más importantes será la de neutrones rápidos los cuales provienen de las siguientes fuentes: 1) los muones cosmogénicos, los cuales son producidos por procesos de espalación directa de muones con núcleos pesados de un material (por ejemplo un escudo de plomo) en donde los neutrones pueden ser emitidos por una interacción fotonuclear la cual libera neutrones de muy alta energía (~ 2 GeV) 2) el proceso por captura de un Muón con un protón lo cual genera neutrones de energías más bajas (50 MeV), 3) los neutrones provenientes de la caverna, los cuales en principio también tienen el mismo origen y (1) sin embargo estos son más lentos que los primeros y por ende más fáciles de bloquear y 4) por último están los neutrones producidos por las reacciones (α, n) , o sea, que son neutrones producidos por dispersiones de partículas alfa (producidas por radioactividad) con los núcleos del mismo material dispersor. En la siguiente figura (figura 3.1) se observan la importancia de cada una de estas fuentes de neutrones como función de la profundidad (los neutrones producidos por procesos secundarios en los rayos cósmicos como son los neutrones térmicos lentos y rápidos, son bloqueados fácilmente por la roca y no serán de interés en este trabajo).

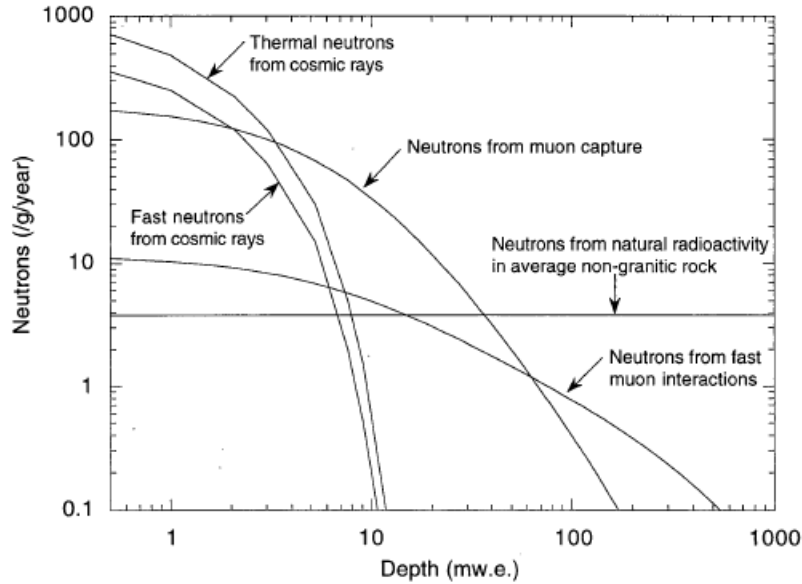


Figura 3.1: Neutrones producidos en roca promedio ($\rho = 2.65$, $Z/A = 0.5$, $A = 24$), se muestran diversas fuentes de neutrones en donde se observa que la más importante es la de neutrones producidos por muones por el proceso de espalación [18].

3.2.1. Neutrones cosmogénicos

Para estimar esta contribución al ruido de fondo se tomará en cuenta los muones provenientes de las cascadas electromagnéticas producidas en la atmósfera terrestre por los rayos cósmicos. Para esto se tomará el estudio hecho por Thomas K. Gaisser [19], en donde analizó la producción de muones por medio del estudio del decaimiento de Piones y Kaones y los respectivos espectros de estos canales de producción. En este estudio se despreció la curvatura de la tierra por lo que el ángulo de incidencia (θ) para los muones está limitado por $\theta < 70^\circ$. Con esto en mente Thomas K. Gaisser deduce la siguiente expresión para el espectro de muones en la superficie terrestre

$$\frac{dN_\mu}{dE_\mu d\Omega} = \frac{0.14E_\mu^{-(\gamma+1)}}{\text{cm}^2\text{s sr GeV}} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1.1E_\mu \cos(\theta)}{115\text{GeV}}} + \frac{0.054}{1 + \frac{1.1E_\mu \cos(\theta)}{850\text{GeV}}} \right\}, \quad (3.1)$$

en donde E_μ es la energía de los muones, y $\gamma = 1.7$. Un factor importante de esta fórmula es que solo es válida en el rango de energías de muones de 100 GeV-10,000 GeV ya que a bajas energías empiezan a dominar los procesos de interacción de los muones con la atmósfera lo cual no había sido considerado. Lo importante para este problema es el flujo de muones como función de la profundidad de la roca. Para esto es necesario considerar la roca promedio según [20] la cual se define con un número de protones promedio $Z=11$, número de nucleones promedio $A=22$, $Z/A = 0.5$, $Z^2/A = 5.5$ y la densidad promedio $\rho = 2.650 \text{ g/cm}^3$.

Antes de revisar el flujo de muones como función de la profundidad, es necesario estudiar la propagación de muones en la materia, de esta manera la energía que un muon pierde en un medio material es continua, por medio de la ionización, esta pérdida de energía es constante para partículas cargadas relativistas y crece muy lentamente con la energía, una fórmula [19] con un error del 5% es

$$\frac{dE_\mu}{dx} = -(1.9 + 0.08 \ln \left(\frac{E_\mu}{\mu} \right)), \quad (3.2)$$

dE_μ/dx esta en unidades de densidad de columna (g cm^{-2}). La forma de perder energía para un muón es por medio de bremsstrahlung, creación de pares e^- y e^+ y por procesos fotonucleares con los núcleos atómicos. Según se discute en [21], estas pérdidas continuas dependen linealmente con la energía al menos en el rango relativista. De esta manera se puede modelar la pérdida total de energía como

$$\frac{dE_\mu}{dx} = -\alpha - (b_{\text{brems}} + b_{\text{par}} + b_{\text{fotonuclear}})E_\mu = -\alpha - bE_\mu, \quad (3.3)$$

de aquí se obtiene una parametrización empírica ($\alpha = 2.3 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2 \text{ MeV}$, $b = 2.510^{-6} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$) con ello se puede integrar la ecuación 3.3 con la condición inicial $E_\mu(0) = E_0$, donde E_0 es la energía de un muon en la superficie

$$E_\mu(x) = (E_0 + \epsilon)e^{-xb} - \epsilon, \quad \epsilon = \frac{\alpha}{b}, \quad (3.4)$$

esta ecuación es interpretada como la energía de un haz de muones con energía inicial E_0 después de penetrar una distancia x , para calcular así la energía mínima para que un muon alcance la distancia x se impone la condición $E_\mu(x) = 0$:

$$E^{\text{min}} = \epsilon(e^{xb} - 1) \quad (3.5)$$

Ahora falta tomar en cuenta las fluctuaciones de energía de los muones, ya que los muones no llegan con energías monocromáticas ya que tienen un espectro de energías bien definido, así para considerar este efecto [21] reparametriza el coeficiente $b = b_{\text{efec}} = 0.374 \text{ (k.m.w.e)}^{-1}$. Si se calcula la integral angular de 3.1 entre los ángulos $0 < \theta < 1.22$ y $0 < \varphi < 2\pi$ además considerando una energía media de E_μ en el logaritmo de la integral de 300 GeV, esto se hizo para simplificar la ecuación final ya que esta integral depende logarítmicamente de la energía y esta aproximación resulta aceptablemente válida, con ello se aproxima el factor logarítmico por una constante $B=180.4$. Despejando de la ecuación 3.4 la energía E_0 y usando la regla de la cadena se obtiene con ayuda de 3.1

$$\frac{dN_\mu(x)}{dE_\mu} = \frac{dN_\mu(E_0)}{dE_0} \frac{dE_0}{dE_\mu} = \frac{dN_\mu(E_0)}{dE_0} e^{xb_{\text{efec}}} = B e^{-xb_{\text{efec}}\gamma} (E_\mu + \epsilon(1 - e^{-xb_{\text{efec}}}))^{-(\gamma+1)}, \quad (3.6)$$

donde $\gamma = 2.7$ esto sale de la integración angular (se añade un factor E_μ), esta ecuación se puede ver dibujada en la figura 3.3. También se puede reescribir la ecuación para la pérdida de energía promedio de los muones considerando las fluctuaciones del espectro $\epsilon_{\text{efec}} = 647 \text{ GeV}$. Como los muones no llegan con energías monocromáticas, sino siguen un espectro de energías dado por 3.1, para obtener la energía promedio de un muon a una profundidad dada se obtiene el promedio de la energía con respecto al espectro 3.6

$$\langle E_\mu(x) \rangle = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \frac{dN_\mu(x)}{dE_\mu} E_\mu(x) dE_\mu,$$

donde Γ es la constante de normalización del espectro. De aquí se deduce al hacer la integral

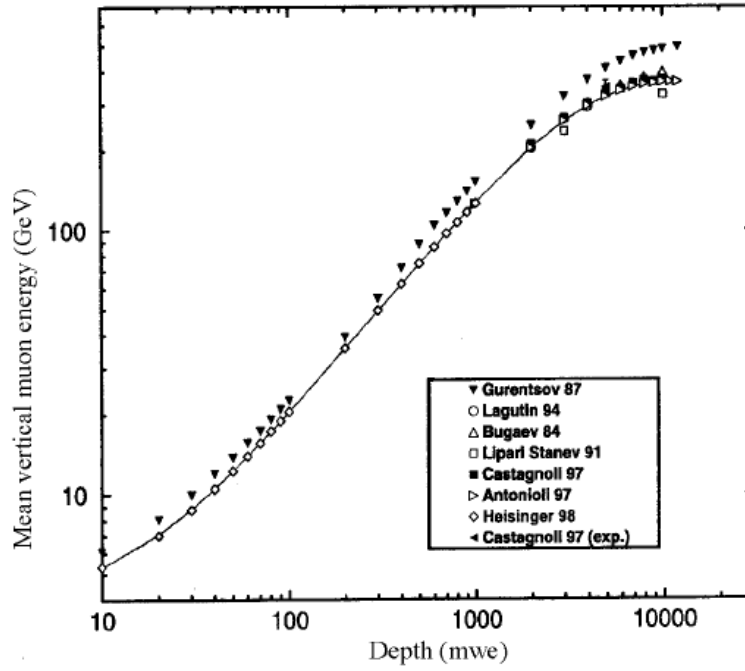


Figura 3.2: Dependencia de la energía media perdida por muon, con la profundidad, la línea continua representa la ecuación (3.7), y los puntos son datos experimentales según [21]..

$$\langle E_{\mu}(x) \rangle = \frac{\epsilon_{efec}}{\gamma - 1} (1 - e^{-x b_{efec}}). \quad (3.7)$$

De estas ecuaciones se observa que la energía media perdida por muon se vuelve independiente de la profundidad para $x \gg 1/b_{efec}$ (ver figura 3.2), lo cual está en acuerdo con lo que se ha medido experimentalmente para profundidades grandes.

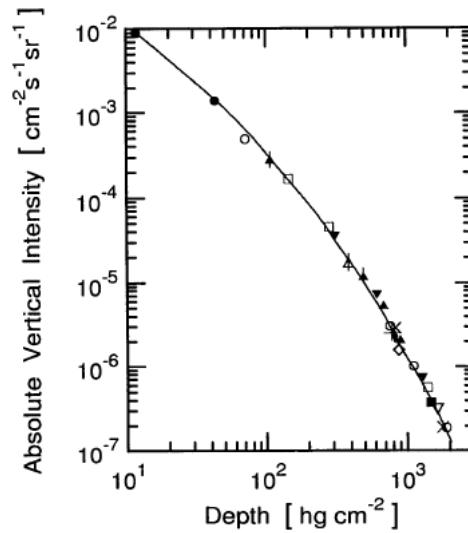


Figura 3.3: Espectro de muones según [20], donde la línea continua es la ecuación (3.6), y los puntos son datos experimentales.

3.2.2. Dispersión leptón-núcleo y el modelo de Weizsäcker-Williams

Modelo básico de la teoría

En esta sección se intentará hacer un estudio teórico detallado del proceso de generación de neutrones por la dispersión inelástica profunda de un leptón con un núcleo. Se considerará un modelo que considere de forma apropiada este complicado proceso que hasta la fecha no se tiene un modelo satisfactorio completo para describir esta interacción, la cual se conoce también como la espalación de un núcleo por un leptón. Se abordará de forma general la teoría necesaria para entender este modelo.

Partiendo de ecuación de Dirac para una partícula libre $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$, donde γ^μ son las llamadas “gamma matrices” en la convención estándar de “Bjorken y Drell”, \hbar es la constante de Planck, m es la masa de la partícula y ψ son los espinores. Introduciendo la derivada covariante y la invariansa de norma del potencial electromagnético $A_\mu = (A, i\phi)$ $\partial/\partial x_\mu \rightarrow \partial/\partial x_\mu - ie/\hbar c A_\mu$ se obtiene la ecuación de Dirac que incluye la interacción de campos electromagnéticos (una deducción detallada de estas ecuaciones se puede ver en las referencias [22],[23]).

$$\left[i\hbar\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) - mc \right] \psi = 0. \quad (3.8)$$

De esta ecuación se puede deducir el hamiltoniano

$$H = c\alpha \cdot \left(p - \frac{e}{c} A \right) + \beta_0 mc^2 + e\phi = H_0 + H_1, \quad H_0 = c\alpha \cdot p + \beta_0 mc^2, \quad H_1 = -\alpha \cdot (eA) + e\phi. \quad (3.9)$$

$$\gamma_j = i\alpha_j\beta_0, \quad \gamma_4 = \beta_0 \gamma \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ son las matrices de Pauli. Este hamiltoniano se usará más adelante en la deducción de la matriz de dispersión. Tomando el adjunto de (3.8) y multiplicando por el espinor adjunto $\bar{\psi}$ del lado izquierdo y haciendo lo mismo con la ecuación original 3.8 multiplicandola por el espinor adjunto $\bar{\psi}$, restando ambas ecuaciones y usando la hermiticidad de ψ se llega a la ecuación

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad J_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (3.10)$$

ya que esta ecuación representa una ecuación de continuidad si se consideran las cuatro componentes de la derivada así J_μ representa la densidad de probabilidad. Ahora proponiendo una solución de onda plana para la ecuación de Dirac $\psi = e^{-ik \cdot x} u(k)$ donde $k \cdot x = k_\mu x^\mu = k^0 ct - k_i \cdot x^i$ y $ck_0 = \omega \lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ $k^\mu = \pm p^\mu/\hbar$ con c la velocidad de la luz, λ la longitud de la onda que se propaga en la dirección \mathbf{k} y p^μ el cuadrimomento de la partícula, se puede deducir las relaciones

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$N \equiv \sqrt{(E + mc^2)/c}$$

donde E es la energía relativista de la partícula. De la ecuación de Dirac y la onda plana $\psi = e^{-ik \cdot x} u(k)$ se puede deducir fácilmente que se cumple

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - mc)u &= 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu - mc)v = 0 \quad \bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \\ , u^{(1)}u^{(2)} &= \bar{v}^{(1)}v^{(2)} = 0 \\ \sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} &= (\gamma^\mu p_\mu + mc), \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}\bar{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mc) \end{aligned}$$

si se define el operador $S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $p_x = p_y = 0$ se verifica que se cumple que los espinores u^1, u^2, v^1, v^2 son autoespinores propios del operador S_z , por lo tanto los espinores u^1, v^1 representan una partícula con espín arriba y los espinores u^2, v^2 representan a una partícula con espín abajo. El campo cuántico relativista para un electrón libre puede ser expandido en términos de la solución de ondas planas de Dirac u^1, u^2, v^1, v^2 , los coeficientes de la expansión $a_{k,s}$ y $b_{k,s}$ se convierten en operadores de creación y aniquilación, este campo puede tomar la forma (para ver una discusión más detallada de este proceso ver [24, 23])

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k,s} [a_{k,s} u(k) e^{ik \cdot x} + \bar{b}_{k,s} v(-k) e^{-ik \cdot x}], \quad (3.13)$$

donde V es el volumen de una caja con condiciones periódicas de cuantización y del hamiltoniano 3.9 en la representación de la segunda cuantización este hamiltoniano toma la forma[23]

$$\hat{H} = \int \bar{\psi} \left\{ c\alpha \cdot \left[p - \frac{e}{c} A \right] + \beta mc^2 + e\phi \right\} \psi d^3x, \quad (3.14)$$

en donde de esta última ecuación y 3.13 se puede deducir $\hat{H}_1 = -e\hat{J}_\mu A_\mu$ [23]. Esta ecuación será útil más adelante.

Reglas de Feynman del proceso leptón-núcleo

Primero se debe considerar como expresar la matriz de dispersión S en términos de este acoplamiento electromagnético, esto nos permitirá calcular el efecto de fotoabsorción de un núcleo. Primero consideraremos la dispersión de un leptón por un núcleo por medio de un vértice fotón-leptón, así empezando por las ecuaciones de Maxwell se tiene (norma de Lorentz, Z número atómico del núcleo) y tomando unidades naturales $c = \hbar = 1$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} A_\mu = -Z \langle j | J_\mu(\hat{x}, t) | i \rangle. \quad (3.15)$$

De aquí se puede deducir por los autovalores de p en la representación de Heisenberg de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} A_\mu = -Z \langle j | J_\mu(0) | i \rangle e^{i(p-p') \cdot x}, \quad (3.16)$$

donde p y p' son el momento inicial y final del núcleo respectivamente. Usando la forma canónica de la matriz de dispersión $S = \int \bar{\psi} e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \psi d^3x$, en donde se usará la aproximación a primer orden

$$S = \frac{-i}{\hbar} \int \hat{H}_1 d^4x \quad (3.17)$$

Insertando las ecuaciones (3.10), (3.14) en (3.17) y considerando leptones con momentos iniciales $k_1 k_2$ y espines $s_1 s_2$ (figura 3.4) se llega

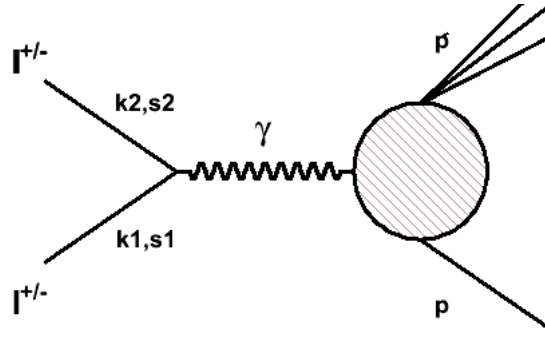


Figura 3.4: Diagrama de Feynman para el proceso de espalación fotonuclear profundamente inelástico.

$$\langle k, s_2 | \hat{S} | k_1, s_1 \rangle = -\frac{e}{V} \bar{u}(k_2, s_2) \gamma_\mu u(k_1, s_1) \int e^{-iq \cdot x} A_\mu(x) d^4x, \quad q = k_2 - k_1 \quad (3.18)$$

Observando que el último factor es la integral de Fourier de 3.18 ($A_\mu(q) = \int e^{-iq \cdot x} A_\mu(x) d^4x$) implica $A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iq \cdot x} A_\mu(q) d^4q$, insertando esta ecuación en (3.16), se tiene

$$-q^2 A_\mu(q) = -e \langle j | J_\mu(0) | i \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q), \quad (3.19)$$

insertando esta ecuación en (3.18) se llega finalmente a la relación de la matriz de dispersión la cual renombraremos como M

$$M = \frac{eZ}{V} \bar{u}(k_2, s_2) \gamma_\mu u(k_1, s_1) \left(\frac{1}{q^2} \right) \langle j | J_\mu(0) | i \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q). \quad (3.20)$$

De aquí se deducen las reglas de Feynman para el vértice fotón-hadrón,

- I. Para leptones poner una $u(k)$ si son leptones entrantes (\rightarrow) y $\bar{u}(k)$ si son leptones salientes (\leftarrow), para $v(k)$ y $\bar{v}(k)$ de forma análoga si son anti-leptones. En caso de tratar se fotones reales se debe poner en analogía con lo anterior el vector de polarización $e_{k,\lambda} (1/2\omega_k V)^{1/2}$.
- II. Para cualquier vértice hadrónico se debe incluir un factor $-Ze \langle j | J_\mu(0) | i \rangle$.
- III. Para un vértice leptónico se debe incluir un factor $-ie\gamma_\mu$.
- IV. Incluir los factores $u(k_1)/\sqrt{V}$ y $\bar{u}(k_2)/\sqrt{V}$ para los estados iniciales y finales del leptón respectivamente.
- V. Incluir un propagador $\frac{1}{(2\pi)^4 i q^2} g_{\mu\nu}$ por cada fotón virtual que aparezca ($g_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski).
- VI. Incluir un factor $(2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q)$ por cada vértice.
- VII. Integrar $\int d^4q$ sobre todas las líneas internas del diagrama.

Ahora definiendo W_i y W_f como las energías iniciales y finales del sistema, y definiendo

$$T_{if} = iZe \bar{u}(k_2, s_2) \gamma_\mu u(k_1, s_1) \left(\frac{1}{q^2} \right) \langle j | J_\mu(0) | i \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - q).$$

donde recordemos que p y p' son el momento inicial y final del núcleo respectivamente y e es el momento.

Usando la regla de oro de Fermi es posible calcular la sección eficaz de dispersión

$$d\sigma = \frac{R_{if}}{R_0} = 2\pi |T_{if}|^2 \delta(W_f - W_i) d\varrho_f \frac{1}{R_0}, \quad (3.21)$$

donde R_0 es el flujo inicial y ϱ_f es la densidad de estados del sistema. El flujo inicial se calculo como sigue

$$R_0 = \frac{v_{rel}}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{k_1}{E_1} + \frac{p}{E} \right),$$

E es la energía inicial del núcleo, suponiendo que la masa del leptón es despreciable comparada con la del núcleo se puede asumir que el leptón no tiene masa en esta aproximación y si \mathbf{k}_1 es ortogonal a \mathbf{p} se llega a la relación

$$R_0 = \frac{1}{VE_1E}(E_1E + k_1p),$$

como se desprecia la masa del leptón (se aproxima este valor como cero), entonces se cumple ($k_1 \cdot k_1 = 0, \Rightarrow E_1 = k_1$), de aquí se llega a la relación:

$$R_0 = \frac{1}{VE_1E}(k_1E + E_1p), \quad k_1 = (E_1, k_1, 0, 0) \quad p = (E, -p, 0, 0) \Rightarrow k_1 \cdot p = k_1E + E_1p$$

$$R_0 = \frac{1}{VE_1E} \sqrt{(k_1 \cdot p)^2}, \quad (3.22)$$

y definiendo la densidad de estados de los leptones en su estado final, considerando como aproximación que se encuentran confinados en una caja con condiciones periódicas

$$d\varrho_f = \frac{V_p d^3k_2}{(2\pi)^3}. \quad (3.23)$$

Teniendo estas relaciones se puede redefinir (3.21) de la siguiente forma (en donde se están considerando leptones inicialmente no polarizados y se está suponiendo que la polarización final es desconocida, así se suman todos los estados posibles de polarización y se promedian)

$$d\sigma = \frac{4Z^2\alpha^2}{q^4} \left(\frac{d^3k_2}{(2E_2)} \right) \frac{1}{\sqrt{(k_1 \cdot p)^2}} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

$$L = -2E_1E_2 \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \bar{u}(k_1) \gamma_\nu u(k_2) \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1)$$

$$W^{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_i \sum_j \langle i | J_\mu(0) | f \rangle \langle f | J_\nu(0) | i \rangle (V_p E) \delta^4(p' - p - q).$$

En la última ecuación el término $L_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor leptónico y es un tensor bien conocido [22], mientras que el tensor $W^{\mu\nu}$ es un tensor que como se dijo en el comienzo de esta sección, es un elemento teórico que no puede calcularse exactamente. Así que solo se puede conocer su expresión más general, la cual se deducirá de (3.10) como sigue

$$\frac{\partial \langle i | J_\mu(\hat{x}) | f \rangle}{\partial x_\mu} = 0,$$

de la representación de Heisenberg es posible reescribir esta ecuación de la siguiente forma

$$\frac{\partial e^{i(p-p') \cdot x} \langle i | J_\mu(\hat{0}) | f \rangle}{\partial x_\mu} = e^{i(p-p') \cdot x} i(p-p') \langle i | J_\mu(\hat{0}) | f \rangle = 0 \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0.$$

De esta relación se puede inferir una parametrización general de $W^{\mu\nu}$, donde este tensor debe ser función del momento transferido al cuadrado (q^2) y de $(p \cdot q)$ ya que como el proceso es inelástico no es posible encontrar una relación entre estas dos cantidades, porque la conservación del momento no lo permite. De aquí después de algo de álgebra se deduce la siguiente expresión para el tensor

$$W^{\mu\nu} = W_1(q^2, p \cdot q) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu p_\nu}{q^2} \right) + W_2(q^2, p \cdot q) \frac{1}{M_{nucleo}^2 c^4} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \quad (3.26)$$

Interacción fotonuclear

Ahora para considerar el proceso de fotoabsorción de un hadrón (figura 3.5), se usarán nuevamente las reglas de Feynmann que se deducieron con anterioridad. Empezando con construir T_{ij} , observando que el fotón ahora no es virtual sino es un fotón real y solo existe un vértice (hadrónico), entonces se empieza con añadir el vector de polarización que considera un fotón real $e_{k,\lambda} (1/2\omega_k V)^{1/2}$, considerando también que el diagrama es de segundo orden se multiplica por un $(-i)^2$, además por el vértice hadrónico se multiplica por $-Ze \langle j | J_\mu \hat{0} | i \rangle$ y finalmente se añade el término $(2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k)$ por haber solo un vértice. Entonces la matriz de dispersión resulta.

$$T_{ij} = -Ze (1/2\omega_k V)^{1/2} e_{k,\lambda} \cdot \langle j | J_\mu \hat{0} | i \rangle V (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k) \quad (3.27)$$

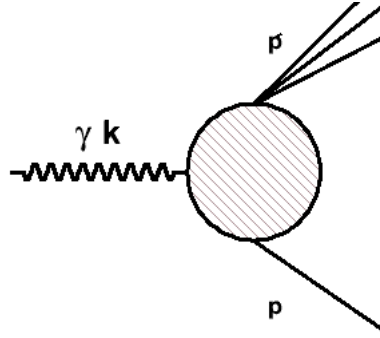


Figura 3.5: Proceso de fotoabsorción.

Usando nuevamente la regla de oro de Fermi es posible llegar a una relación con la sección eficaz de dispersión como en 3.21. Por un medio totalmente análogo se obtiene.

$$\sigma_\gamma = \frac{2\pi |T_{ij}|^2 \delta(W_f - W_i)}{\text{Flujo}} \quad (3.28)$$

$$\text{Flujo} = \frac{\sqrt{(k \cdot p)^2}}{V \omega_k E} \quad (3.29)$$

donde σ_γ es la sección eficaz de fotoabsorción. Ahora tomando el promedio de los vectores de polarización y sobre todos los posibles estados iniciales y finales del sistema como en las ecuaciones (3.24), se llega a la expresión

$$\sigma_\gamma = \frac{2\pi^2 Z\alpha}{\sqrt{(p \cdot q)^2}} \sum_{i,j} \sum_{\lambda \pm 1} (e_{k,\lambda}^\dagger)_i W_{ij} (e_{k,\lambda})_j, \quad (3.30)$$

donde W_{ij} es el tensor 3.26 que describe las interacciones con el hadrón y solo se consideran las componentes espaciales, ya que el vector de polarización del fotón no tiene componente temporal. Usando la relación de completos para los vectores de polarización $\sum_{\lambda \pm 1} (e_{k,\lambda}^\dagger)_i (e_{k,\lambda})_j = \delta_{ij} - \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j / k^2$ y usando la relación 3.25, se deduce que (al final se recupera la parte temporal del tensor $W_{\mu\nu}$)

$$\sigma_\gamma = \frac{2\pi^2 Z\alpha}{\sqrt{(p \cdot q)^2}} \sum_{i,j} \sum_{\lambda \pm 1} (e_{k,\lambda}^\dagger)_i W_{ij} (e_{k,\lambda})_j = \sigma_\gamma = \frac{2\pi^2 Z\alpha}{\sqrt{(p \cdot q)^2}} \sum_{i,j} \delta_{ij} W_{ij} = \frac{2\pi^2 Z\alpha}{\sqrt{(p \cdot q)^2}} W_{\mu\mu}. \quad (3.31)$$

Analizando la traza de W_{qq} , se observa que cuando $k^2 \rightarrow 0$ la traza $W_{\mu\mu}$ diverge, con este argumento se pueden imponer las siguientes condiciones para los coeficientes W_1 y W_2

$$\begin{aligned} W_2 &\rightarrow O(k^2) \\ -W_1 + \frac{(p \cdot k)^2}{M^2 k^2} W_2 &\rightarrow O(k^2), \end{aligned}$$

calculando la traza del tensor $W_{\mu\mu}$ se tiene

$$W_{\mu\mu} = 3W_1 + W_2 \frac{1}{M^2} \left[p^2 - \frac{(p \cdot k)^2}{k^2} \right].$$

Con el uso de estas últimas relaciones se puede llegar a concluir, que para $k^2 \rightarrow 0$, el tensor W_{qq} tendrá el siguiente comportamiento,

$$W_{\mu\mu} \rightarrow 3W_1 - W_2 - W_1 + O(k^2) = 2W_1 + O(k^2),$$

tomado el límite se llega finalmente a la conclusión

$$W_{\mu\mu}(k^2 = 0) = 2W_1(k^2 = 0) \Rightarrow \sigma_\gamma = \frac{(2\pi)^2 Z\alpha}{\sqrt{(p \cdot k)^2}} W_1(k^2 = 0, -k \cdot p). \quad (3.32)$$

Aproximación de Weizsäcker-Williams.

Ahora por la aproximación de Weizsäcker-Williams en donde proponen estudiar procesos fotonucleares en donde la interacción fundamental es por medio de un fotón virtual, simplificando este proceso con un modelo de fotones reales. Para el caso altamente relativista el momento transferido es pequeño ($q^2 \rightarrow 0$) comparado con $q \cdot p$ de esta forma se tiene la desigualdad $W_1 \gg W_2$. Y se puede reescribir 3.24 junto con 3.32 de la siguiente forma (contrayendo el tensor $L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$)

$$d\sigma = \frac{4Z\alpha^2}{q^4} \left(\frac{d^3k_2}{(2E_2)} \right) \frac{1}{\sqrt{(k_1 \cdot p)^2}} (W_1(q^2, q \cdot p)(q^2 - 2M)) \quad (3.33)$$

$$d\sigma = \frac{4\alpha}{q^4(2\pi)^2} \left(\frac{d^3k_2}{(2E_2)} \right) \frac{\sqrt{(q \cdot p)^2}}{\sqrt{(k_1 \cdot p)^2}} \sigma_\gamma \left(\frac{q \cdot p}{M} \right).$$

Esta relación es lo que se considera la aproximación de Weizsäcker-Williams, si se analizan todos los términos con cuidado se puede llegar a las siguientes expresiones a partir de 3.33

$$\frac{d\sigma}{dE_2 d\Omega} = \frac{\alpha p_f E_\gamma}{q^2 p_i 2\pi^2} \sigma_\gamma(E_\gamma), \quad M E_\gamma = q \cdot p \quad (3.34)$$

usando el procedimiento de [25] se puede integrar sobre el ángulo sólido y llegar a finalmente a la ecuación funcional

$$\frac{d\sigma}{dE_2} = \frac{N(E_\gamma) \sigma_\gamma(E_\gamma)}{E_\gamma} \quad (3.35)$$

donde $N(E_\gamma)$ es el espectro de fotones

$$N(E_\gamma) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{E_i^2 + E_f^2}{p_i^2} \ln \left(\frac{E_f E_i + p_i p_f - M}{M E_\gamma} \right) - \frac{(E_i + E_f)^2}{2p_i^2} \ln \left(\frac{(p_i + p_f)^2}{(E_i - E_f) E_\gamma} \right) - \frac{p_f}{p_i} \right].$$

Ahora para tener todo completo falta conocer la sección eficaz de fotoabsorción, esta sección eficaz será obtenida de [26]. En donde estos autores usan una parametrización que obtienen de datos experimentales y argumentan que esta parametrización cumple con lo que se debería esperar teóricamente. Así la sección eficaz de foto absorción en μb para un núcleo de número atómico A y una energía para el fotón E en GeV esta dada por

$$\sigma_\gamma(E) = A \sigma_{\gamma n}(E) (0.75G(x) + 0.25) \quad (3.36)$$

$$x = 0.00282 A^{1/3} \sigma_{\gamma n}(E)$$

$$G(x) = \frac{3}{x^3} \left(\frac{x^2}{2} + e^{-x(1+x)} \right)$$

$$\sigma_{\gamma n}(E) = 114.3 + 1.647 \ln^2(0.0213E)$$

Ahora si se junta esta ecuación 3.36 y la ecuación 3.35 junto con la relación $E_\gamma = E_i - E_f$, donde E_i, E_f son las energías inicial y final del muon respectivamente y E_γ es la energía del fotón que se transfiere al núcleo, de esto se puede obtener un espectro diferencial de la sección eficaz de interacción y la energía final del leptón (muón) (figura 3.6).

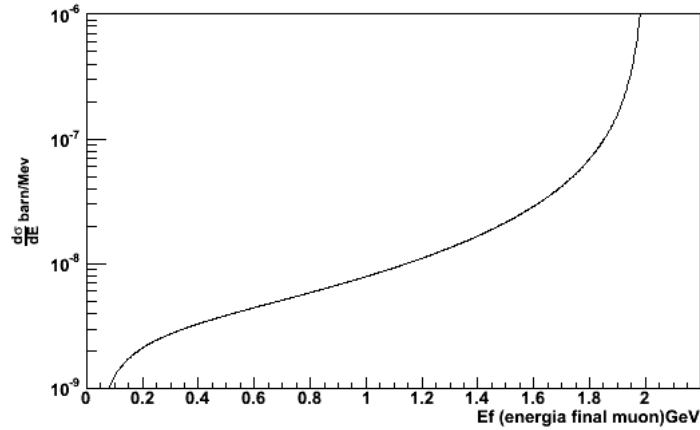


Figura 3.6: Espectro diferencial de la ecuación 3.35, para el Carbono (A=12).

Espectro de neutrones producidos por espalación de muones

Para obtener el espectro de energía de los neutrones finales se hace un muestreo del espectro (figura 3.6 ecuación 3.36) para obtener E_f . Y como la energía inicial se supone conocida se puede obtener la energía del fotón por medio de $E_\gamma = E_i - E_f$. Con esto se tiene la energía del fotón y esta a su vez se subdivide en la energía cinética de retroceso del núcleo y la energía interna, para considerar esto se muestrea de forma uniforme este valor de cero a E_γ y esta energía finalmente es dividida entre la multiplicidad del proceso con lo que se obtiene la energía promedio de los neutrones.

Para estimar la multiplicidad de neutrones se usaron las curvas de la referencia [26], en donde se presentan dos curvas de multiplicidad para el Carbono y el Plomo, lo mejor que se pudo hacer para obtener una ecuación funcional de la multiplicidad como función del número atómico y la energía, fue digitalizar las curvas y ajustar estas curvas por una función potencial ($m_C = 1.7E^{0.22}$, $m_{Pb} = 6.4E^{0.23}$). Así los coeficientes de proporcionalidad se ajustaron a una recta y se obtuvo el promedio de los valores para las potencias ($k = 0.0241(A) + 1.41 \Rightarrow m_A = kE^{0.225}$) donde A es el número de nucleones. En la figura (3.7) se muestra el espectro de neutrones producidos por espalación para la roca promedio.

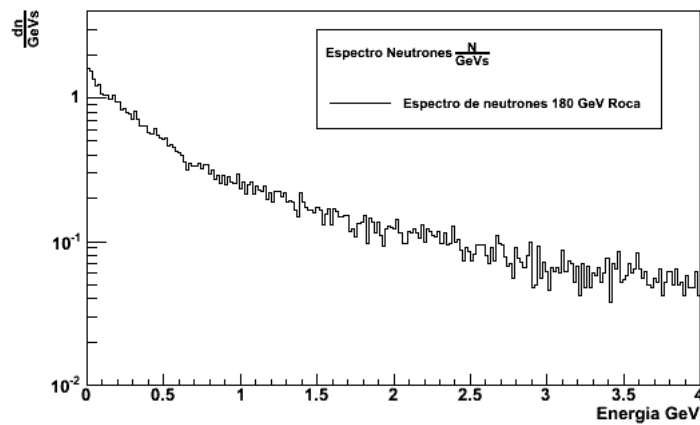


Figura 3.7: Espectro de neutrones producido por el proceso de espalación de un Muon con un núcleo de Plomo.

Para calcular el número de neutrones por centímetro cúbico se integra la ecuación 3.35, con la diferencia de que es necesario multiplicar esta ecuación por la multiplicidad (m_A), en el rango de energía de cero a la energía inicial del muon. Y multiplicando por la densidad de partículas del medio ($N = \rho N_A/A$), donde ρ es la densidad del medio y N_A es el número de Avogadro.

De la figura (3.8 curva azul) se observa que existe un déficit de neutrones, esto se debe a que falta considerar en este modelo las reacciones ($A + n \rightarrow A' + 2n$ y $A + n \rightarrow A' + 3n$), las cuales son reacciones inelásticas entre el neutrón emitido y el núcleo blanco. Según [27] a energías del orden de 10 MeV la sección eficaz inelástica es debida principalmente a estos dos procesos en donde la reacción $A + n \rightarrow A' + 2n$ tiene una probabilidad del 50% y la otra reacción $A + n \rightarrow A' + 3n$ con probabilidad del 50%, sin embargo no hay datos más allá de estas energías, por lo que se especula que a energías más altas del orden de 500 MeV - 2 GeV este proceso sigue dominando comparado con la sección eficaz inelástica, con la misma proporción que se discutió con anterioridad. Haciendo cálculos esto nos dice que hay un factor adicional del 2.5-3.0 de neutrones producidos según esta estimación (figura 3.8).

Estas dos curvas 3.8 (curva verde comparada con la curva roja) nos muestran que a muy bajas energías del muón incidente y por ende un espectro de neutrones de baja energía, nos dice que suponer que solo se producen neutrones por espalación es un buen modelo, a energías un poco más altas es aceptable considerar que solo se producen las reacciones $A + n \rightarrow A' + 2n$ y a altas energías lo más correcto es suponer que se produce el triple de neutrones por reacciones secundarias. Se puede con estas observaciones mejorar la curva por medio de este argumento, si se multiplica la curva por una recta que en $E_i=0$ GeV valga 2.0 y en $E_i=500$ GeV valga 3.0 ($R(E_i) = 2.0 + 0.006E_i$) se obtiene la siguiente gráfica (figura 3.8 curva negra). Para referencia la curva que cita [21] para la tasa de neutrones por centímetro cúbico es la siguiente

$$N(E_\mu) = 4.14(E_\mu)^{0.74} \times 10^{-6} \text{ n}/\mu \text{ g cm}^{-2} \quad (3.37)$$

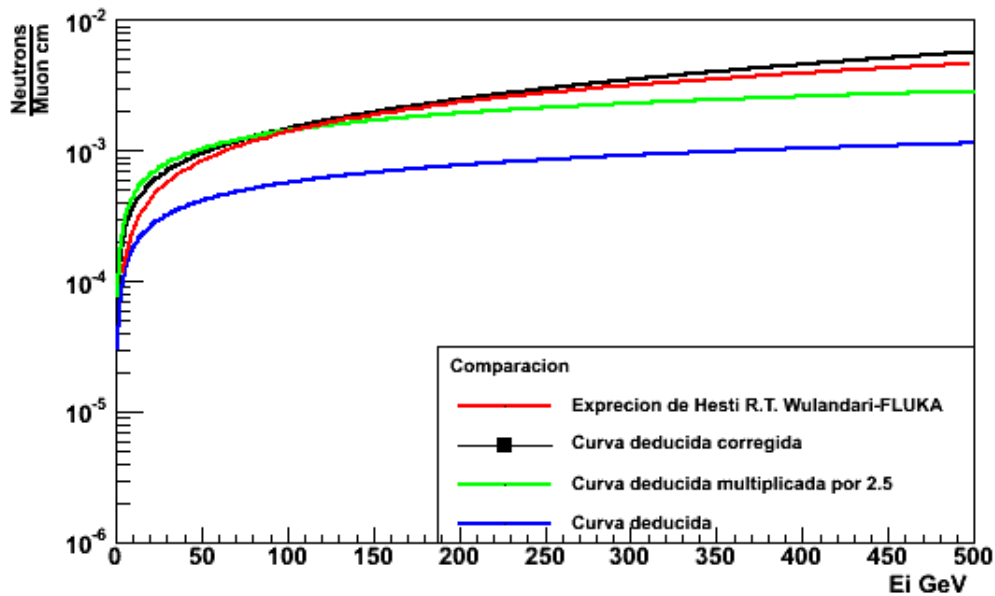


Figura 3.8: Curva de neutrones por volumen, en función de la energía inicial de muon, (negra) multiplicada por la recta $R(E_i)$, (verde) multiplicada por 2.5, (azul) curva deducida directamente del cálculo de espalación y (roja) curva de [28].

Se observa que con este simple argumento la gráfica 3.8 (negra) se ajusta notablemente mejor a la curva de la simulación de [21].

Curvas de flujo y tasa de neutrones en función de la profundidad

Procediendo ahora por calcular el flujo de neutrones es necesario conocer la curva anterior de tasa de neutrones en función de la energía incidente del muon y para relacionar esta energía con la profundidad se usará la ecuación (3.5) que es fácil de manipular. Además usando la ecuación del espectro de muones como función de la profundidad (3.6) la cual es válida en el rango de energías de 100 GeV a 10 TeV. Sin embargo es necesario extender este rango de energías para el flujo de muones ya que entre las energías de 1 GeV a 100 GeV el flujo es del orden del 90% del total que se va a considerar. Para este rango de energías se usará la ecuación citada en [20]

$$I(x, \theta) = \frac{174}{x \cos(\theta) + 400} (x + 10 \sec(\theta))^{-153} \frac{x + 75}{x + 50 + 25 \sec(\theta)} e^{8x10^{-4}(x+10 \sec(\theta))} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}, \quad (3.38)$$

donde (x) esta en metros de agua equivalente (m.w.e). Con estas expresiones y la curva (3.37), se puede calcular la tasa de neutrones por centímetro cúbico de la siguiente manera; se integra sobre la energía (100 GeV-10 TeV) la ecuación del espectro (3.6) se integra sobre el ángulo la ecuación (3.38) y finalmente se suman estos dos flujos, después se multiplica por la densidad del medio en unidades de gramos por centímetro cúbico y se multiplica por la ecuación (3.37) en función de la energía promedio del muón que esta relacionada con la profundidad por medio de la ecuación (3.5). Esta curva se compara con una curva que presenta el artículo [28], la cual expresa la tasa de neutrones por centímetro cúbico en función de la profundidad (ver figura 3.9) y esta parametrizada por

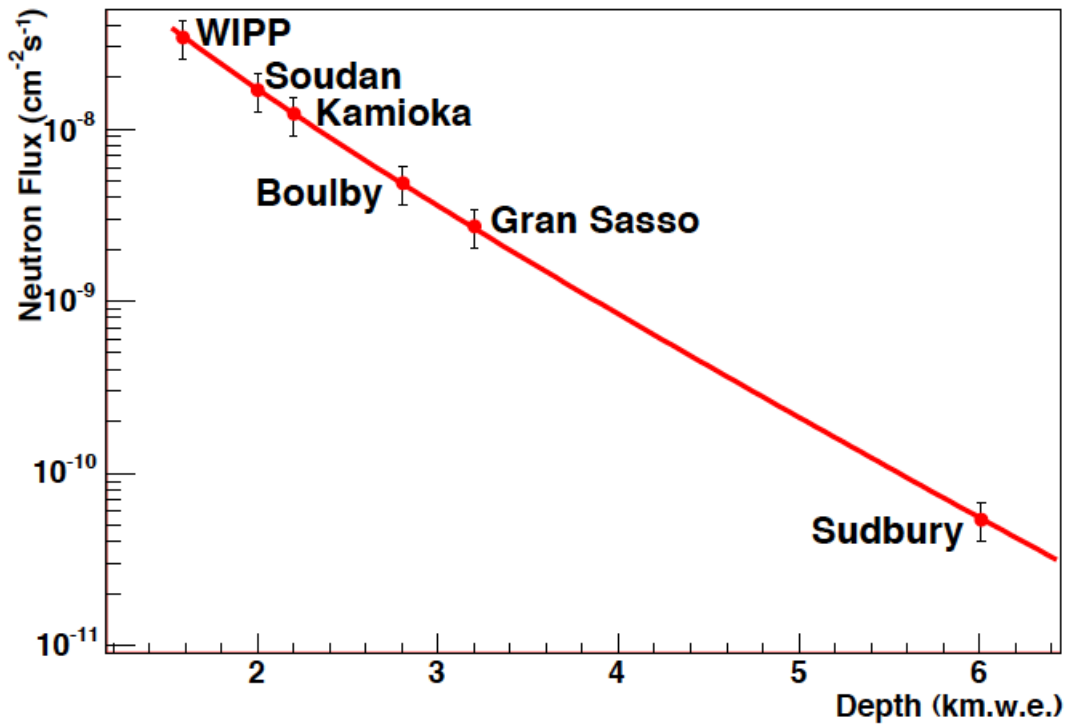


Figura 3.9: Curva de Mei & Hime del artículo [28], la cual expresa la producción de neutrones por centímetro cúbico en función de la profundidad.

$$R(h) = P_0 \left(\frac{P_1}{h} \right) e^{-h/P_1} \text{ n/cm}^2 \text{ s}, \quad (3.39)$$

donde $P_1 = 860$ m.w.e y P_0 es un parámetro que depende del material. Esta curva junto con la que se ha calculado se muestran en la figura 6.2 en la página 87.

Neutrones producidos en las paredes de la cavidad

Con este proceso de cálculo es posible estimar el flujo de neutrones provenientes de las paredes de la cavidad a una profundidad dada. Para este cálculo se usará un modelo simple de difusión y el resultado previo de la tasa de neutrones por centímetro cúbico. Para empezar se tomarán la energía media promedio de los neutrones que salen de la cavidad, la cual se obtendrá de cálculos teóricos y se confirmaran con observaciones empíricas. Así por ejemplo la referencia [29], calcula esta energía promedio a diferentes profundidades la cual se muestra en la figura (3.10). Estos datos están tabulados en el cuadro 3.1 en la página siguiente.

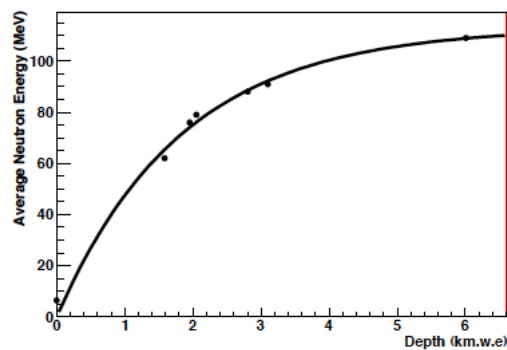


Figura 3.10: Energía media de los neutrones que salen de las paredes de cavidades a diferentes profundidades. Datos medidos en distintos laboratorios subterráneos. Tomada de la referencia [29]

A continuación se mostrará una tabla que continúe la información más relevante de esta gráfica (cuadro 3.1).

Sitio	Profundidad k.w.e	Energía $\langle E \rangle$ MeV	R (n/cm ³ seg)
superficie	0	6.5	-
WIPP	1.585	62	0.16
Soudan	1.95	76	0.085
Kamioka	2.05	79	0.072
Boulby	2.805	88	0.022
Gran Sasso	3.1	91	0.014
Sudbury	6.011	109	0.0002

Cuadro 3.1: Energía media de neutrones de espalación producidos en varios laboratorios subterráneos. Estos datos corresponden a la figura 3.10. La última columna muestra la tasa de producción calculada para la roca promedio.

A profundidades entre 1.6 k.m.w.e y 6 k.m.w.e la energía media de los neutrones producidos por espalación en la roca promedio puede calcularse como el promedio de las energías de el cuadro (3.1), pesadas por la tasa de producción de neutrones por centímetro cúbico a cada profundidad. Haciendo esto se obtiene un promedio pesado de 71 MeV.

Las energías medias en el cuadro (3.1) fueron calculadas considerando neutrones con energías mayores a 1 MeV, sin embargo la espalación por rayos cósmicos produce una gran cantidad de neutrones con energías menores. Ahora para energías menores a 1 MeV no se tiene una referencia en donde obtener esta energía media.

Para estimar la energía media inicial de los neutrones producidos por la espalación simplemente se puede usar nuestro cálculo teórico y además se deben considerar los choques elásticos e inelásticos del neutrón con el medio. Si se obtiene la energía media en función de la energía incidente del muon se obtiene un promedio pesado de forma similar a como se hizo con el cuadro (3.1) se obtiene un valor de 1540 MeV (ver cuadro (3.2)).

Profundidad m.w.e según el espectro que se calculó	Energía media GeV R (n/cm ³ seg)/N	
1530	1.40	0.57
1979	1.65	0.26
2519	1.87	0.110
3197	2.1	0.039
4108	2.32	0.01
5501	2.55	0.0015
8585	3.4	2.8×10^{-5}

Cuadro 3.2: Cuadro que ilustra como cambia la energía media del espectro inicial de neutrones producidos por espalación pesados por el número de neutrones por volumen.

Ahora estos neutrones aun no están difundidos en el material, para ello se usará un modelo que se describe en la sección “Neutrones provenientes de la caverna”.

Con esta energía inicial de los neutrones emitidos por la espalación y una fórmula que relaciona la energía inicial promedio de los neutrones con la energía final de estos. Para esto se necesita considerar las colisiones (m) tanto elásticas como inelásticas entre el neutrón y el núcleo que se estudian en el apéndice D. La ecuación funcional para calcular este valor de m según lo que se demuestra en el apéndice D C.2 en la página 106 es

$$E_f = (k_{elastic} - k_{inelastic})^m E_i,$$

donde $k_{elastic}$ representa las pérdidas por colisiones elásticas y $k_{inelastic}$ representa las pérdidas inelásticas en una colisión de un neutrón núcleo. Para calcular $k_{elastic}$ se usa el procedimiento explicado en el apéndice D en la sección 0.1 (choques elásticos) y para estimar $k_{inelastic}$ se usará un modelo más complejo de potenciales ópticos para la interacción neutrón-núcleo, lo cual se explicará en la siguiente sección.

Modelo de Potenciales ópticos

En este caso analizaremos como en mecánica cuántica se considera una interacción inelástica, la cual es necesario analizar como se comenta en el apéndice D. Para eso se tiene que definir un potencial complejo (parte real e imaginaria), en la ecuación de Schrödinger de la siguiente forma.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + (V + iW - E)\psi = 0 \quad (3.40)$$

donde \hbar es la constante de Planck, m es la masa del neutrón y V, W son potenciales efectivos determinados experimentalmente. Para demostrar que se tiene una interacción inelástica, se usa la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad de estados

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0. \quad (3.41)$$

De la interpretación de Born se puede hallar una relación explícita para la densidad y corriente de probabilidad con la función de onda(3.41)

$$\rho = \|\psi\|^2, J = \frac{\hbar}{i2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (3.42)$$

Insertando (3.42) en (3.41) se tiene

$$\frac{\partial\|\psi\|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*), \quad (3.43)$$

ahora usando la ecuación de Schrödinger (3.40)

$$\nabla^2\psi = \frac{2m}{\hbar^2}(V + iW - E)\psi$$

$$\nabla^2\psi^* = \frac{2m}{\hbar^2}(V - iW - E)\psi^*,$$

se llega introduciendo estas dos últimas ecuaciones en (3.43)

$$\frac{\partial\|\psi\|^2}{\partial t} = -\frac{2W}{\hbar}\|\psi\|^2$$

$$\|\psi\|^2 = \|\psi_0\|^2 e^{-\frac{2Wt}{\hbar}}. \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) indica que se perdió información después de la interacción de una partícula con otra en un tiempo (t), esta pérdida depende exclusivamente del potencial imaginario como se había advertido. Con esta ecuación y considerando que el neutrón incide como una onda plana al núcleo y en primera aproximación sale como otra onda plana también. Entonces si $\psi = Ae^{-ikx}$ con A constante se puede calcular de forma general la densidad de corriente $J = \|\psi\|^2 \frac{\hbar k}{m} = \|\psi\|^2 v$.

Por medio de la densidad de corriente es posible calcular el coeficiente k_{inel} , como la densidad de corriente depende de la velocidad entonces la relación no con k_{inel} no es lineal sino como la raíz cuadrada de k_{inel} . Para hacer el cálculo de k_{inel} se debe tomar en cuenta la densidad de corriente final debida solamente a un choque elástico $J_{f-\text{inel}}$, la densidad de corriente final debido a los dos efectos juntos J_f y la densidad de corriente inicial J_i , así se tiene la relación.

$$\sqrt{k_{\text{inel}}} = \frac{J_{f-\text{inel}} - J_f}{J_i} = \frac{v_{f-\text{ela}}\|\psi_0\|^2 - v_f\|\psi\|^2}{v_i\|\psi_0\|^2} \quad (3.45)$$

usando las relaciones $v_{f-ela} = \sqrt{k_{ela}}v_i$, $v_f = \sqrt{k_{ela} - k_{inel}}v_i$ y las ecuaciones (3.45) (3.44), se tiene.

$$\sqrt{k_{inel}} = \sqrt{k_{ela}} - \sqrt{k_{ela} - k_{inel}}e^{-\frac{2Wt}{\hbar}} \quad (3.46)$$

definiendo $y = \sqrt{k_{inel}}$ y haciendo toda el álgebra en (3.46) se llega a la siguiente ecuación.

$$(1 + e^{-\frac{4Wt}{\hbar}})y^2 - 2\sqrt{k_{ela}}y + k_{ela}(1 - e^{-\frac{4Wt}{\hbar}}) = 0 \quad (3.47)$$

Se puede ver fácilmente que cuando el tiempo de interacción del neutrón con el núcleo $t \rightarrow \infty$, entonces $k_{ine} \rightarrow k_{ela}$ y según la ecuación C.2 en la página 106, implica $E_f \rightarrow 0$, lo cual es consistente con el hecho de que el neutrón para esta condición se absorbió en el núcleo, además esta ecuación siempre tendrá como solución trivial $k_{ela} = k_{ine}$, esta solución será ignorada por considerarse muy improbable. Para poder hacer el cálculo solo falta estimar el tiempo de interacción del neutrón con el núcleo y el potencial óptico W de interacción.

Para estimar el tiempo de interacción entre el neutrón y el núcleo la referencia [32], calcula la distancia media de interacción entre estas dos partícula como sigue.

$$\bar{R} = \frac{\int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2}) 2\pi x dx}{\int_0^R 2\pi x dx} = \frac{4}{3}R$$

Donde $R = 1.378A^{0.00793}A^{1/3}$ Fm. Ahora según [32] los potenciales ópticos están dados por las siguientes relaciones.

$$V = (46.51 + 6.74(1 - \frac{2Z}{A}) - 117.5/A - 3.22\sqrt{E})MeV$$

$$W = (5.293 + 0.3388\sqrt{E+V})MeV$$

Estimando los valores medios de estos potenciales usando la energía, media estimada en el cuadro 3.2 ($E_{media} = 1520$ MeV) los valores característicos de la roca promedio [20] ($A=23.21, Z=11, \rho = 2.65$ g/cm³), se tiene $V=18.7$ MeV, $\bar{W} = 14.15$ MeV. Finalmente se estima la velocidad media usando estos valores promedios.

Y calculando finalmente el tiempo propio de interacción promedio $\bar{t} = \frac{\bar{R}}{\bar{v}}$ ($\bar{v} \cong 0.79c$), se tienen los elementos para calcular k_{inel} según la ecuación 3.47

$$k_{inel} = 0.51.$$

Para estudiar como se difunden los neutrones en la roca se propondrá la siguiente ecuación de difusión lineal para estudiar el problema del flujo de neutrones en una cavidad.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla n = D\nabla^2 n + Q(x, y, z) \quad (3.48)$$

Hasta este punto esta ecuación de difusión considera los neutrones que se difunden en un medio material con coeficiente de difusión $D = \lambda \bar{v} e^{-l/\lambda}$, sin embargo esta considerando que los neutrones se mueven con una convección en un medio libre, esto por supuesto no es cierto, los neutrones también se mueven en un medio material. Para considerar este efecto en el término de convección es necesario considerar cual es la probabilidad de que un neutrón atravesase una longitud promedio de interacción sin que choque con ningún núcleo del medio material (ver Apéndice C), esto se considera atenuando la velocidad de convección de la siguiente manera $\bar{v}_f = \bar{v} e^{-l/\lambda}$, (λ es el camino libre medio total del neutrón) así la probabilidad ($e^{-l/\lambda}$) es la probabilidad de que el neutrón choque ($1/\lambda$) veces, ya que la media de esta distribución es (λ).

Ahora se procederá a resolver esta ecuación (3.48), por medio de los propagadores de Green (ver Apéndice B) calculando la función de Green para el caso infinito, y después usando el método de las imágenes para calcular casos seminfinitos. Para considerar los efectos del medio material, se considerara el problema seminfinito en (z), e infinito en las variables (x,y), como se muestra en la figura 3.11. En este caso el punto negro representa la caverna subterránea y el plano (xy) la superficie terrestre.

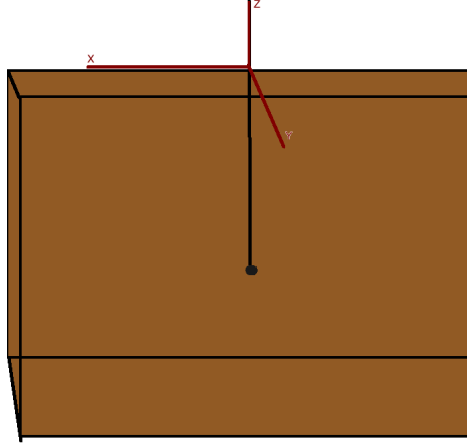


Figura 3.11: Esquema que representa el caso seminfinito en (z) e infinito en (x,y), en donde el punto negro representa la caverna subterránea y el plano xy la superficie.

Matemáticamente hablando estas condiciones de frontera se enuncian de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} n(x, y, z, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} n(x, y, z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} n(x, y, z, t) = 0$$

$$n(x, y, 0, t) = 0, \quad n(x, y, z, 0) = 0$$

Estas condiciones modelan el problema real de difusión de neutrones, para resolver la ecuación (3.48) primero se efectuará el siguiente cambio de variable que es válido para el caso infinito que estamos tratando; $n(X,t)=n(X-Vt,T)$. Con este cambio de variable la ecuación (3.48) se simplifica.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n + Q(x, y, z) \quad (3.49)$$

Esta ecuación es igual a la que se resuelve en el (Apéndice B), solo falta añadir la fuente de neutrones, que en este caso es la ecuación 3.39 en la página 45 ($Q(z)=P_{0roca}(\frac{P_{1roca}}{z})e(-z/P_1)n/cm^3s$), $P_{0roca}=(1.86\pm 1.4)\times 10^{-8}n/cm^3s$ y $P_{1roca}=860\pm 50$ m.w.e, con esto se tiene

$$n(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0-v_x t)^2}{4D(t-t_0)}} e^{-\frac{(y-y_0-v_y t)^2}{4D(t-t_0)}} * \\ *(e^{-\frac{(z-z_0-v_z t)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(z+z_0+v_z t)^2}{4D(t-t_0)}}) Q(z_0) dx_0 dy_0 dz_0 dt_0$$

Se puede demostrar fácilmente que $n(x,y,z,t)$, solo depende de la variable (z), ya que las integrales en (x_0) y (y_0) son integrales de gaussianas, si se efectúan la solución se simplifica :

$$n(z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{1/2}} (e^{-\frac{(z-z_0-v_z t)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(z+z_0+v_z t)^2}{4D(t-t_0)}}) Q(z_0) dz_0 dt_0 \quad (3.50)$$

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (3.48), se verifica que efectivamente la solución solo depende de

la variable (z).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (-v_{fz}) \frac{\partial n}{\partial z} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + Q(z) \quad (3.51)$$

$$v_{fz} = \bar{v}_z e^{-l/\lambda}$$

Además se verifica que el flujo en la dirección (x) y (y) es el mismo que en el eje z por considerarse una difusión isotrópica. Así con esto en mente tiene sentido físico solo considerar la velocidad en la dirección (z), con esta suposición se puede aproximar el flujo en (x) y en (y) como ($j_x = j_y \approx j_z$). Por ende el flujo total solo depende de (z) y considerando el flujo hacia arriba y hacia abajo se tiene la relación para el flujo total $J = -D\nabla n \Rightarrow \|J\| = \sqrt{3}J_z$.

Entonces el problema queda resuelto si se conoce el flujo en (z) J_z , para esto se usara la ecuación (3.51) independiente del tiempo, por razones de que solo interesa el estado final del flujo y no el transitorio, con esto la ecuación (3.51) se simplifica.

$$-v_{fz} \frac{\partial n}{\partial z} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + Q(z), v_{fz} = \bar{v}_z e^{-l/\lambda} \quad (3.52)$$

Para resolver esta ecuación ordinaria diferencial, se hará el cambio de variable $u = \frac{\partial n}{\partial z}$, simplificando la ecuación (3.52), de la siguiente forma; $-v_{fz}u = D \frac{\partial u}{\partial z} + Q(z)$. ahora resolviendo usando el método del factor integrante se tiene la siguiente solución.

$$u = \frac{dn}{dz} = -\frac{e^{-\frac{v_{fz}z}{D}}}{D} \int_{-\infty}^{z > 1600m} e^{\frac{v_{fz}z}{D}} Q(z) dz + K e^{-\frac{v_{fz}z}{D}} \quad (3.53)$$

Esta ecuación integral se puede resolver usando integración por partes de forma recursiva, además la constante $K=0$, ya que en $z \rightarrow -\infty$ el flujo no debe diverger.

$$j_z = -Du = e^{-\frac{v_{fz}z}{D}} (P_{0roca} P_{1roca}) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n! e^{-(-\frac{v_{fz}}{D} + \frac{1}{P_1})z}}{(\frac{v_{fz}}{D} - \frac{1}{P_1})^n z^n} \quad (3.54)$$

Tomando como aproximación el término $n=1$ y despreciando los elementos de orden $n > 2$, por el hecho de que $(\frac{z}{P_1})^{n > 2} \gg 1$ si $z > 1600$ m, se tiene finalmente como aproximación.

$$j_z = (P_{0roca}) \left(\frac{P_{1roca}}{z} \right) \frac{e^{-\frac{z}{P_1}}}{(\frac{v_{fz}}{D} - \frac{1}{P_1})} \quad (3.55)$$

Para estimar el término $\frac{v_{fz}}{D} = \frac{v_z e^{-l/\lambda}}{D}$, es necesario calcular el coeficiente de difusión (ver Apéndice B), que en este caso se toma $D = \frac{\lambda \bar{v}}{3} e^{-l/\lambda}$, en donde el camino libre medio esta dado por $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n\sigma_{tot}}} = \frac{1}{n\sigma_{tot}}$ (porque podemos suponer a los átomos en reposo dado que las velocidades de los neutrones son significativamente más altas), y para estimar el factor exponencial $e^{-l/\lambda}$, se debe considerar a (l/λ) como el número de caminos libres medios que necesita un neutrón ($l/\lambda = m$) con una energía media asociada (1540 MeV), para atenuar su energía a 71 MeV que es el límite de energía considerado. Para esto se necesita considerar las colisiones tanto elásticas como inelásticas entre el neutrón y el núcleo que se estudian en el apéndice D. La ecuación funcional para calcular este valor de m según lo que se demuestra en el apéndice D es

$$E_f = (k_{elastic} - k_{inelastic})^m E_i,$$

donde $k_{elastic} = 0.92$ representa las pérdidas por colisiones elásticas y $k_{inelastic} = 0.51$ representa las pérdidas inelásticas en una colisión de un neutrón núcleo.

Recordando la ecuación C.2 en la página 106 del apéndice D, y con los valores de $k_{elastic}$ y $k_{inelastic}$, y con

una energía inicial promedio $\langle E_i \rangle = 1540$ MeV y una energía final promedio según 3.1 en la página 46 $\langle E_f \rangle = 71$ MeV. Se tiene un valor de $m = 3.27$ choques en promedio.

Para calcular la sección eficaz promedio de interacción entre el neutrón y el núcleo, nos remitiremos a la referencia [32], en donde se obtiene una manera de calcular la sección eficaz total de la interacción neutrón-núcleo para valores de energías de 1-1000 MeV. De esta sección eficaz se obtiene el promedio en ese mismo intervalo de energía, el resultado es: $\sigma_{elas1-1000MeV} = 0.36$ barns (notar que no se tiene que hacer un promedio pesado de esta sección eficaz porque esto ya se considero al tomar las energías promedio inicial y final 71 MeV, 1540 MeV respectivamente).

Con esto se puede calcular el camino libre medio promedio para un neutrón ($\lambda = 34$ cm). Para terminar el cálculo hay que recordar que la velocidad de convección v_z , depende de la velocidad promedio total por medio de $\bar{v} \cong \sqrt{3}v_z$ y de igual modo $l = \sqrt{3}l_x$ lo que implica $v_{fz}/D = (\sqrt{3}/\lambda)e^{0.42l/\lambda}$. Solo falta considerar los neutrones que se producen por reacciones secundarias, estos hacen que el camino libre medio efectivo aumente ya que el aumento de neutrones favorece su propagación en el medio, por lo que podemos suponer que el camino libre medio aumenta según la multiplicidad de neutrones que se crean en promedio por cada neutrón. Así ya sabemos de la sección anterior que este número de neutrones promedio producidos por neutrón es del orden de 2.5, ya que esto explica satisfactoriamente 3.37 en la página 43. De esta forma el camino libre medio que considera este efecto se puede modelar como $\lambda' = (\text{neutrones promedio producidos por neutrón}) \lambda = 2.5\lambda = 85$ cm.

Aglomerando todos los datos anteriores y recordando $J = \sqrt{3}J_z$ y la ecuación 3.55 en la página anterior, se tiene finalmente para J.

$$J = \sqrt{3} \left((P_{0roca}) \left(\frac{P_{1roca}}{z} \right) \frac{e^{-\frac{z}{P_1}}}{\left(\frac{v_{fz}}{D} - \frac{1}{P_1} \right)} \right), \quad (3.56)$$

donde $v_{fz}/D = (\sqrt{3}/\lambda)e^{0.42*m} = 0.087 \text{ cm}^{-1}$, esto implica

$$J = (21.5 \text{ cm}) (P_{0roca}) \left(\frac{P_{1roca}}{z} \right) e^{-\frac{z}{P_1}}$$

si consideramos todos los errores se tiene

$$J = (21.5 \pm 4.1 \text{ cm}) (P_{0roca}) \left(\frac{P_{1roca}}{z} \right) e^{-\frac{z}{P_1}} = (3.98 \pm 0.75) \times (10^{-7}) \left(\frac{P_{1roca}}{z} \right) e^{-\frac{z}{P_1}} \text{ n/cm}^2\text{s}$$

, donde se usó $P_{0roca} = 1.85 \times 10^{-8} \text{ n/s cm}^{-3}$ comparada con la ecuación para el flujo según simulaciones Monte Carlo de [28]

$$\phi(z) = (4.0 \pm 1.1) \times 10^{-7} \left(\frac{P_1}{z} \right) e^{(-z/P_1)} \text{ n/cm}^2\text{s}$$

, se concluye que el resultado está en acuerdo con los errores que se esperan de la curva de [28].

Cálculo del número de eventos

Ahora que tenemos una forma de calcular la tasa total de neutrones por centímetro cúbico en un material dado cualquiera, nos resta resolver el problema de cuantos de esos neutrones producidos van a salir de una cara del material la cual apunta hacia el detector. Esto es vital ya que no todos los neutrones producidos en el volumen del material van a interactuar con el detector.

Para modelar este proceso se tomo la ecuación de difusión lineal con un término convectivo y una fuente. Esta ecuación debe poder decirnos cual es el flujo de neutrones en cada pared del material. Primero el término

convectivo modelará la velocidad promedio de un neutrón en el material. El término de difusión considerará el camino libre medio promedio de un neutrón con ese medio y la fuente será simplemente la tasa de neutrones por centímetro cúbico que se calculó en la sección anterior. Con esto la ecuación de difusión quedaría

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \cdot \nabla n = D \nabla^2 n + Q(x, y, z) \quad (3.57)$$

$$\text{Condiciones Frontera : } n = 0, \quad (3.58)$$

donde $D = \frac{1}{3} \lambda v$ y para estimar $Q(x, y, z)$ se efectuará el siguiente análisis. Suponiendo que la probabilidad de que un muon produzca una espalación en un punto cualquiera del material es la misma, ya que el flujo para esas dimensiones (orden de metros) se puede considerar isotrópico. Entonces por cada punto se tiene una fuente dada por $Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$, donde Q tiene unidades de N/s y como consideramos un flujo isotrópico es posible calcular el promedio de las contribuciones a la fuente de neutrones en cada punto esto implica

$$\bar{Q} = \sum \sum \sum \frac{Q}{V} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \frac{L_x}{n} \frac{L_y}{n} \frac{L_z}{n} = \int Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \frac{Q}{V}.$$

Y por lo tanto esta cantidad que tiene unidades de $N/cm^3 s$, es la estimación que ya podemos calcular en función de una profundidad. En esta situación la ecuación (3.57), no puede ser simplificada como lo fue en casos anteriores, por tanto se aplico un método numérico de diferencias finitas para resolver esta ecuación.

Como puede ser importante poder estimar ahora el espectro final de los neutrones emitidos por la difusión, que en nuestro caso esto podría ser importante para los neutrones producidos en el agua que esta contenida en los tanques de polietileno, ya que en este caso los neutrones pierden una energía cinética significativa por colisión. En el caso de los neutrones producidos en el escudo de Plomo se puede suponer que el espectro final es igual al espectro inicial de neutrones producidos por la espalación, ya que el neutrón casi no pierde energía cinética al colisionar con el pesado núcleo de Plomo.

Escudo de H_2O y efecto de rebote

Para tomar en cuenta la absorción de neutrones provenientes de la caverna exterior por parte de un escudo de agua se considerará un modelo de difusión que tome en cuenta los choques elásticos entre neutrones y el núcleo del material blanco (H_2O) y las interacciones inelásticas entre estas dos partículas. Considerando la ecuación de difusión lineal en una dimensión, para el caso estacionario y añadiendo el término de absorción (ver ecuación 3.57)

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - v \sigma_a N n = 0, \quad (3.59)$$

donde σ_a es la sección eficaz de absorción entre el neutrón y el núcleo blanco. Si se usa la relación para el coeficiente de difusión del apéndice B ($D = \lambda_{elas} v / 3$) y la ecuación para calcular $\lambda_{elas} = 1/\sqrt{2} n \sigma_a$ se simplifica la ecuación (3.59)

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{n}{L^2}, \quad L = \left(\frac{\lambda_{elas} \lambda_a}{3} \right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

Imponiendo la condición de frontera $-D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=\infty} < \infty$ y $-D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0} = \phi(h)$, se tiene como solución de (3.60)

$$J = \phi e^{-x/L}. \quad (3.61)$$

Usando este mismo modelo para considerar la producción de neutrones por unidad de volumen que se producen en la misma agua (H_2O), considerese la tasa de producción de neutrones por centímetro cúbico

co del material y una lámina infinitesimal (ver figura 3.12), así el flujo que atraviese x según (3.61) será $\phi_{cm^3} dV / A e^{-x/L} = \phi_{cm^3} dx e^{-x/L}$, donde A es el área transversal. Haciendo todo el proceso se finaliza con la integral que nos da el flujo

$$J = \phi_{cm^3} \int_{L_x}^0 e^{-x/L} dx = \phi_{cm^3} L (1 - e^{-L_x/L}). \quad (3.62)$$

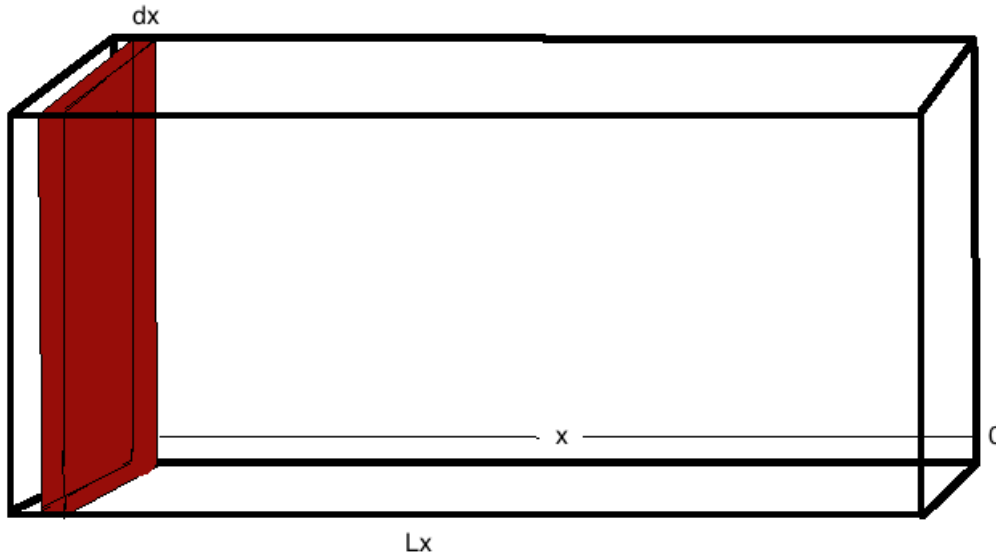


Figura 3.12: Esquema que ilustra el modelo para estimar los neutrones efectivos producidos por el volumen.

En conclusión el efecto absorbedor del agua depende del coeficiente de atenuación de longitud L , si la longitud del escudo excede por mucho esta longitud a lo máximo se producirán de forma efectiva $\phi_{cm^3} L$ neutrones dentro del material (H_2O).

Finalmente falta considerar si los neutrones provenientes del escudo al atravesar el espacio vacío entre los escudos o inclusive interaccionar con el detector, este neutrón va a llegar al otro extremo del escudo e interaccionará con este pudiendo producir un rebote total hacia el detector nuevamente y tener otra oportunidad de contribuir con el ruido. Para considerar este efecto se considerará que el escudo tiene dimensiones laterales grandes comparadas con el camino libre medio del neutrón en ese medio. Primero dividase el espectro en una región de $0 - 100 MeV$ donde se considerará que un neutrón se puede dispersar de forma equiprobable para todos los ángulos de dispersión y la región $> 100 MeV$ donde la probabilidad de que el neutrón se disperse a un ángulo pequeño es muy grande y por ende la probabilidad de un rebote total en este caso sería despreciable. Así centrados en la primera región del espectro la cual contiene aproximadamente la mitad de todos los eventos, se considerará que un neutrón colisiona L_x / λ_{tot} veces. En la primera colisión el neutrón tiene una probabilidad de $1/2$ de rebotar y salir del material, por otro lado los neutrones que se dispersen hacia el fondo del material podrán interaccionar otra vez a una distancia de dos caminos libres medios del material y tendrán una probabilidad de $1/2$ de rebotar pero como están a dos caminos libres medios al rebotar pueden interaccionar otra vez y tener una probabilidad de $1/2$ de rebotar hacia afuera, esto daría una probabilidad total de $1/4$ y considerando la probabilidad del primer choque la probabilidad finalmente sería de $1/8$. Así siguiendo el análisis completo se tiene que la probabilidad total es la suma $p_{rebote} = \sum_{i=0}^{\infty} (1/2)^{2i+1} = 2/3$. Considerando ahora que el neutrón realiza la primera interacción a dos caminos libres medios del inicio del material por el apéndice B y el análisis anterior se puede llegar a que la probabilidad de rebote para este caso es $p'_{rebote} = e^{-1} (\sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^{2i}) = 0.13$. Sumando estas probabilidades y despreciando los demás casos se tiene que la probabilidad de rebote es $p = 0.8$.

Como los neutrones pueden rebotar consecutivamente, se estima la contribución total por medio de la

suma geométrica de la probabilidad de rebote multiplicada por el flujo inicial de neutrones y considerando que aproximadamente la mitad del flujo total sufre este efecto; $\phi' = 0.5\phi \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \phi(2.5)$.

Espectro de retrocesos nucleares

Para este paso final debemos usar la sección eficaz total de interacción neutrón-núcleo, la cual se puede deducir del modelo de potenciales ópticos discutido en la sección 4.2.2.5. Usando el análisis de ondas parciales se pueden deducir las siguientes expresiones para la sección diferencial elástica e inelástica de interacción

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2} \sum (2l+1)(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\beta)) \quad (3.63)$$

$$\sigma_{in} = \frac{\pi}{k^2} \sum (2l+1)(1 - \alpha^2)$$

,donde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $K = \frac{\sqrt{2m(E+V+iW)}}{\hbar}$ y $\alpha = e^{-2Im(\delta)}$, $\beta = 2Im(\delta)$, donde δ es el ángulo de desfase de la onda parcial. Usando la aproximación WKB para calcular la fase δ , se deduce que

$$\delta = R(K - k).$$

Esto implica que $\beta = 2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}(\sqrt{E+V} - \sqrt{E})R$ y $\alpha = e^{-2mWR/\hbar^2K}$. Con esto es posible construir la función de la sección diferencial de dispersión e inelástica y por ende la total, solo a partir de energías mayores a 1 MeV, ya que a menores energías empiezan a dominar los efectos de la estructura nuclear del blanco y empiezan a haber resonancias. En la figura (3.13), se muestran las comparaciones entre esta teoría y datos experimentales.

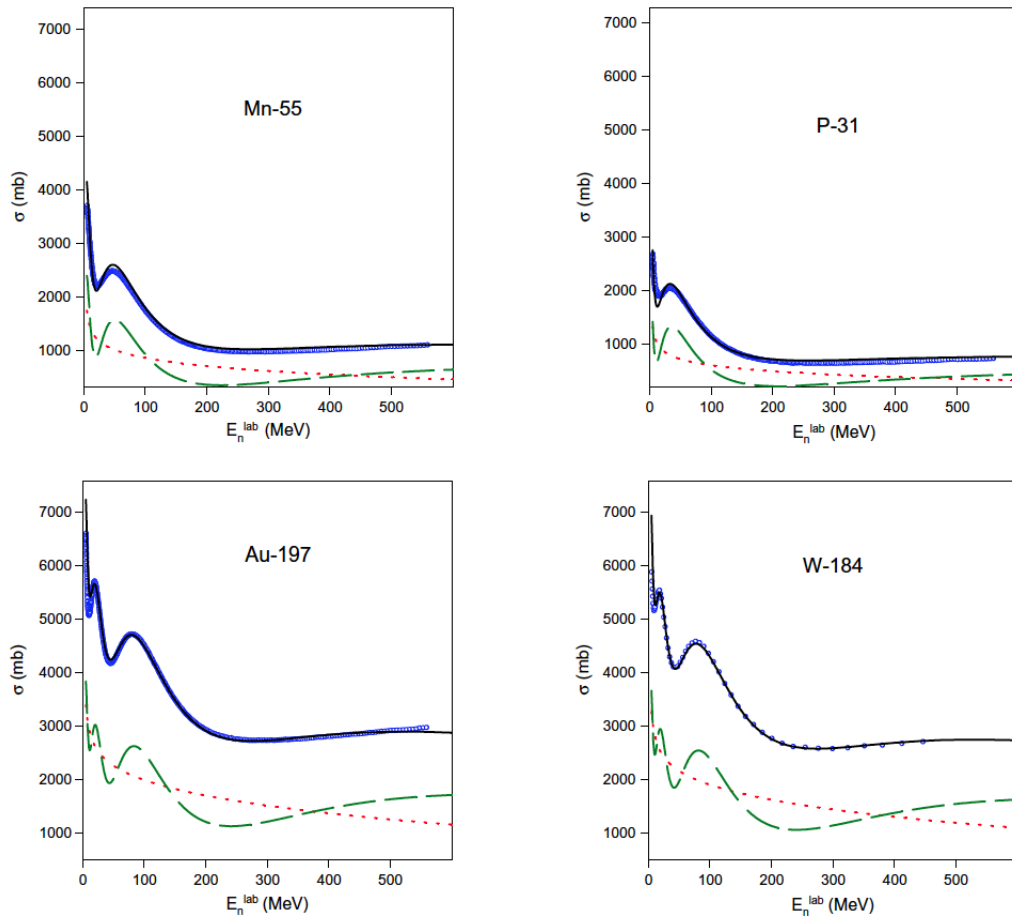


Figura 3.13: Gráficos que representan la comparación entre la teoría y los valores experimentales (azul), para la sección eficaz total.

Con esta función ya hecha podemos calcular el número de eventos totales como función del espectro de energía de los neutrones que inciden sobre el blanco, la sección eficaz de interacción y el flujo de neutrones que están incidiendo sobre el blanco

$$N_r = \frac{N_b}{\Gamma} \int \phi(h) \frac{d\Gamma}{dE} \sigma(E) dE \quad (3.64)$$

donde $\frac{d\Gamma}{dE}$ es el espectro de neutrones que se calculó en la sección 4.2.2.2. Con la ayuda de esta expresión podemos tener el espectro de retrocesos nucleares en función de la energía incidente, pero se requiere que el espectro este en función de la energía de retroceso del núcleo. Para poder lograr esto necesitamos considerar con que probabilidad se puede dispersar un neutrón a un cierto ángulo de dispersión. Esta información la podemos deducir de la sección eficaz diferencial calculada por el método de aproximación de Born a primer orden y usando que los potenciales ópticos son constantes y no dependen de la distancia, se puede deducir que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{K}{Q^4} \left(\cos(Q) - \frac{\sin(Q)}{Q} \right)^2, \quad Q = 2Rk \sin(\theta/2). \quad (3.65)$$

Sampleando esta función podemos obtener un ángulo de dispersión θ , el cual nos dice directamente cuanto vale la energía de retroceso nuclear, si M es la masa del núcleo entonces

$$E_R = 2E_i \frac{m}{M} (1 - \cos(\theta)). \quad (3.66)$$

Para considerar colisiones inelásticas entre el núcleo y el neutrón incidente, podemos modelar esto multiplicando el valor de la energía de retroceso nuclear E_R por un número aleatorio entre uno y cero.

Finalmente hemos llegado a la parte final del cálculo inicial que se planteo en un principio, que fue como estimar a grosso modo el espectro de ruido de fondo proveniente de la espalación de muones cosmogénicos con la materia. Todo este proceso podría considerarse una simulación rápida y sencilla para poder darse una idea de que espectro de retrocesos nucleares se esperarían en la vida real.

Neutrones provenientes de la caverna

Para estudiar los neutrones que provienen de la caverna propondremos un modelo simple que considere los efectos más importantes del proceso de dispersión, como considerar el camino libre medio y los efectos geométricos de la dispersión de neutrones. Si hacemos referencia al cuadro 3.1, el cual nos dice cual es la energía media de los neutrones de la caverna, para deducir con nuestro modelo esta energía media haremos las siguientes consideraciones sobre los neutrones dispersados; supondremos que en regiones de dimensiones pequeñas ($\sim 10\text{m}$) los neutrones se producen uniformemente, además se supondrá que en una longitud igual a la del camino libre medio los neutrones solo se dispersan una sola vez y se supondrá un medio uniforme en la caverna.

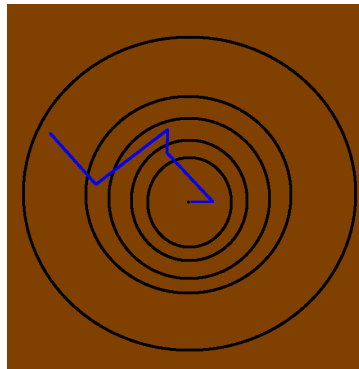


Figura 3.14: Figura esquemática que ilustra el modelo a usar para estimar la energía media de los neutrones y su espectro.

Con estas suposiciones podemos formar un modelo que intente explicar la naturaleza de los neutrones en la caverna, primero tomemos un punto de la caverna y llamemosle punto central, el cual supondremos es donde está nuestro experimento o detector. De este punto central considerese una esfera de radio λ (camino libre medio) de esta esfera provendrán neutrones que a lo mucho se han dispersado una sola vez, según las suposiciones que se hicieron, ahora considerese otra esfera con el mismo centro y de radio 2λ de esta esfera provendrán neutrones que a lo mucho se han dispersado dos veces, este proceso puede continuar así indefinidamente, ver figura 3.14. Pero en este problema solo nos interesan neutrones que tengan una energía mayor a 1 MeV, por lo que esto limitará el número de capas que se necesitan para este modelo, otro factor importante es la sección eficaz total de interacción entre el neutrón y el núcleo que varía con la energía, como este proceso puede ser complicado de describir modelaremos esta sección eficaz por medio de un promedio entre los valores de 1-200 MeV y otro promedio entre energías mayores a 200 MeV ver figura 3.15. Para determinar cuantos caminos libres medios se necesitan para considerar los cálculos hechos por [29] que se muestran en la tabla 3.1, se sabe de las secciones anteriores que la energía media inicial de los neutrones es de 1540 MeV y la energía final después de un choque de un neutrón con un núcleo esta relacionada con la energía inicial de este por medio $E_f = (0.39)^m E_i$, donde (m) es el número de colisiones.

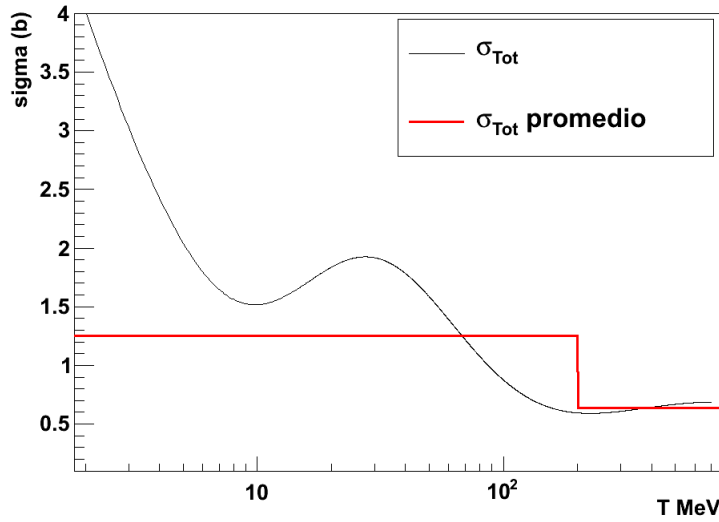


Figura 3.15: Figura que muestra la aproximación hecha para estimar la sección eficaz total, en el rango de energías de 1-200 MeV el promedio es de 1.25 barns y en el rango de energías mayor a 200MeV el promedio es de 0.64 barns.

Ahora solo falta considerar que los neutrones más cercanos al punto central son menos numerosos que los neutrones producidos en las capas más alejadas de este punto. Para considerar esto pesaremos la energía de cada neutrón que llega al punto central de cada capa en particular hasta la última y multiplicamos esta energía por el volumen de cada cáscara y como es de esperarse se divide todo entre el volumen total de la esfera

$$\bar{E} = \frac{4/3\pi(\sum_{i=0}^N(\lambda(i+1))^3 - (\lambda i)^3)(0.39)^i}{4/3\pi(N\lambda)^3} E_i,$$

donde N es el número total de caminos libres medios para atenuar el neutrón de una energía de 1540 MeV a 1MeV. Con esto es posible calcular la energía media estimada usando el modelo completo y la sección eficaz aproximada anteriormente discutida.

$$\bar{V} = \begin{cases} 4/3\pi(\sum_{i=0}^N(0.5\lambda(i+1))^3 - (0.5\lambda i)^3)(0.39)^i & , si E < 200MeV \\ 4/3\pi(\sum_{i=0}^N(\lambda(i+1))^3 - (\lambda i)^3)(0.39)^i & , si E > 200MeV \end{cases}, \bar{E} = \frac{\bar{V}E_i}{4/3\pi(j+0.5(n-j))^3}, \quad (3.67)$$

donde (j) es el número de veces que $E > 200$ MeV. Con esta última fórmula se puede obtener la energía media para cada profundidad en función de la energía promedio inicial de los neutrones.

Profundidad m.w.e según el espectro que se calculó	Energía $\langle E \rangle$ MeV	Energía $\langle E \rangle$ MeV Calculada	Energía media GeV
1530	64	53	1.40
1979	74	62	1.65
2519	84	70	1.87
3197	93	74	2.1
4108	101	79	2.32
5501	107	86	2.55

Cuadro 3.3: Energía media de neutrones de espalación producidos para varias profundidades, donde se comparan los resultados de 3.10 con los calculados según nuestro modelo.

Con esto también se puede calcular el espectro de neutrones dentro de la caverna si se consideran las energías de todos los bins del espectro de neutrones se tiene un espectro que se ajusta bien a la curva que menciona [29, 28] al menos para el término más importante de la fórmula, ver figura 3.16.

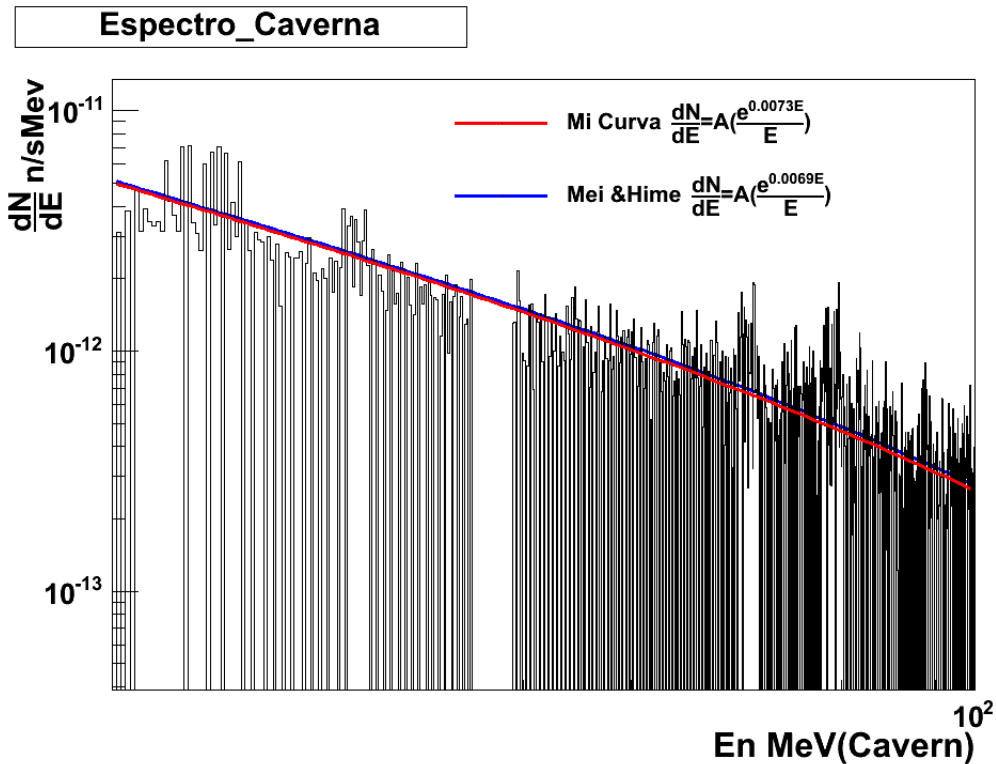


Figura 3.16: Espectro estimado para neutrones dispersados en la caverna.

Además se puede estimar la fracción de neutrones producidos por muon en función de la distancia. Para ello se necesita retomar la ecuación 3.59 en tres dimensiones, en donde por isotropía podemos considerar que

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \Rightarrow$$

$$3D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = v \sigma_a N n.$$

De aquí se puede deducir fácilmente usando los datos para $\lambda_{elas} = 85$ cm y $\lambda_{abs} = 83$ cm, que la función de densidad de neutrones es:

$$N = N_0 e^{-x/L}, \quad L = \sqrt{\lambda_{elas} \lambda_{abs}} = 84 \text{ cm}.$$

Esta ecuación se compara bastante bien para la que se reporta en [28] $L = 76 \text{ cm}$, ver figura 3.17

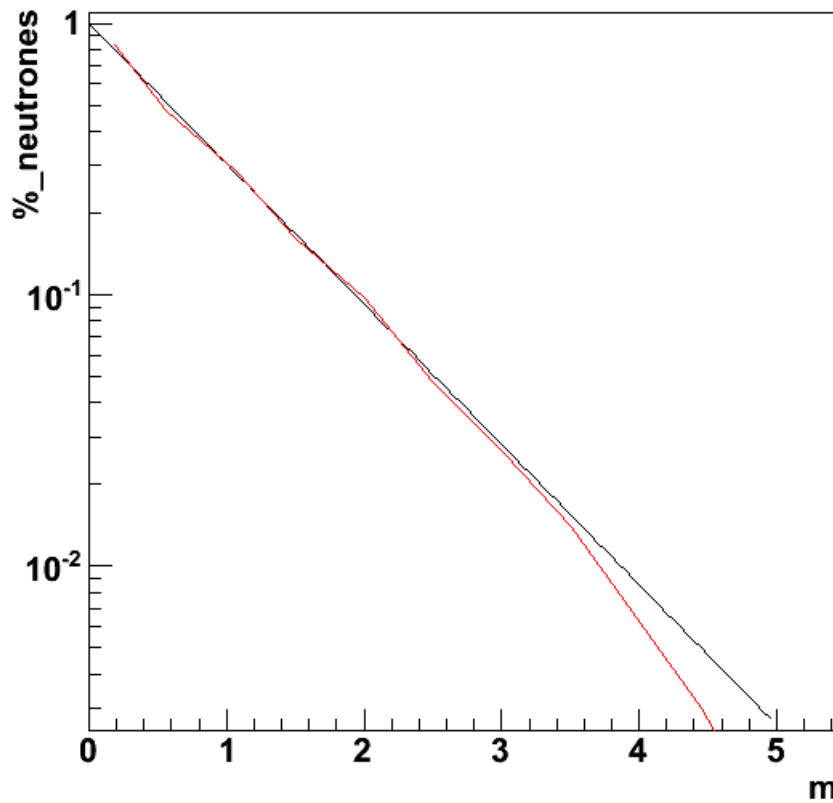


Figura 3.17: Figura que muestra la comparación de la curva de [28](roja) con la curva estimada en esta sección (negra).

3.2.3. Neutrones de reacciones (α, n)

Para este tipo de ruido, desafortunadamente no es posible hacer una estimación teórica como los eventos de ruido de neutrones cosmogónicos, en este caso también se cuenta con la desventaja de que este ruido no depende de la profundidad, por lo cual este defecto pondría un límite experimental que no pudiese ser removido por una variable de control, como es la profundidad en el caso del ruido cosmogénico. Un ejemplo real de esta limitante lo está sufriendo el experimento DAMIC 100 en SNOLAB [33], en donde la profundidad en donde se lleva a cabo el experimento es de aproximadamente de 6000 m.w.e, a esta profundidad los eventos de ruido cosmogénico se estima menor a 1cpd/KeV kg. Sin embargo ellos reportan un ruido de 60 cpd/KeV kg, lo cual es aproximadamente dos ordenes de magnitud mayor a lo que esperaban. Incluso con todo el proceso que tenemos para estimar los eventos de ruido cosmogénico, se puede estimar que los eventos de ruido que ellos observan es equivalente a estar a una profundidad de 2500 m.w.e, esto quiere decir que su profundidad hasta ahora no les ha servido de mucho.

Empecemos por estudiar el flujo de neutrones provenientes de la caverna, este flujo se puede estimar según [34] (Experimento CoGenT), en donde argumentan que en general este flujo es más grande que los eventos de ruido producido por los muones cosmogénicos.

El flujo de neutrones principal proviene del proceso (α, n), se estima que el flujo es de $3,8 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, es mayor que el flujo de neutrones cosmogénicos, pero con una energía media más baja. En Gran Sasso los (α, N) neutrones tienen un espectro más duro que el Sudán, y las simulaciones utilizar esto como una estimación del peor caso. El espectro aproximado de estas contribuciones se puede apreciar en la gráfica (3.18), en donde

se ha propuesto como mejor parametrización a este espectro la siguiente curva

$$N(E) = Ae^{-kE+kkE^{1/2}} E, \quad (3.68)$$

donde $A=5.0 \times 10^{-8} \text{ N MeV}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-3}$, $k=1.27 \text{ MeV}^{-1}$, $kk=1.015 \text{ MeV}^{-1/2}$.

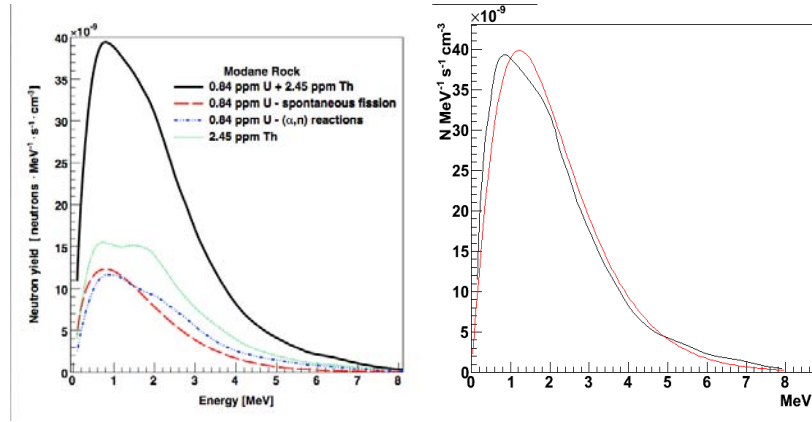


Figura 3.18: Estimación de los componentes de radioactividad natural en la roca de Modane, la cual se asumirá como roca promedio. En la segunda imagen se observa la comparación con la curva y el ajuste propuesto (rojo).

Contaminación de los resistores

La cerámica utilizada en muchas resistencias tiene una concentración relativamente alta de U^{238} y Th^{232} . Tales resistencias residen en los componentes de lectura electrónica de detectores de puntos de contacto de tipo p comerciales. Por ejemplo en el experimento Cogent [34], las simulaciones han demostrado que es probable que los eventos de ruido de fondo en la región de 0-12 keV del espectro total se debe a estas resistencias frontales. Una alternativa muy directa para disminuir este tipo de ruido, consiste en adquirir materiales de mayor pureza o eliminar estas resistencias lo más posible.

Capítulo 4

El experimento DAMIC

4.1. Las CCD como detectores de partículas ionizantes

Como se ha visto en el capítulo 2, se han desarrollado varias tecnologías para la detección de materia oscura en forma de WIMP y aun siguen en desarrollo varios experimentos. Sin embargo estos experimentos fueron diseñados para detectar choques elásticos de WIMP con núcleos para masas de WIMP arriba de 50 GeV. En otros experimentos sin embargo, se han visto señales positivas de materia oscura, en regiones de bajas masas, como es el caso de DAMA/LIBRA que observo una modulación anual y CoGeNT que observo un indicio de señal para masas pequeñas de WIMP (10 GeV) con un detector de Germanio de bajo umbral. Bajo la motivación de estos resultados, se han desarrollado modelos teóricos nuevos que consideren WIMP de masas del orden de 18 GeV [13]. Debido a razones de ruidos en la electrónica en los detectores anteriormente mencionados, estos no son capaces de tener una sensibilidad competente en esa región de masas y así probar estos nuevos modelos teóricos.

Así la CCD es capaz de observar retrocesos nucleares con un umbral muy bajo ($\sim 50eVee$), esto se debe a que el ruido intrínseco de la CCD es muy bajo del orden de 2.5 electrones R.M.S, lo cual fija el umbral de energía anterior. El principio básico de operación de la CCD, es que cuando se produce una carga en un pixel por causa de la interacción de una partícula ionizante, esta carga se acumula en el pixel y dependiendo en que profundidad se haya creado, esta se difundirá a través de otros pixeles, entre mas profunda sea la creación de la carga más difusión habrá. Este proceso esta esquematizado en la figura 4.1

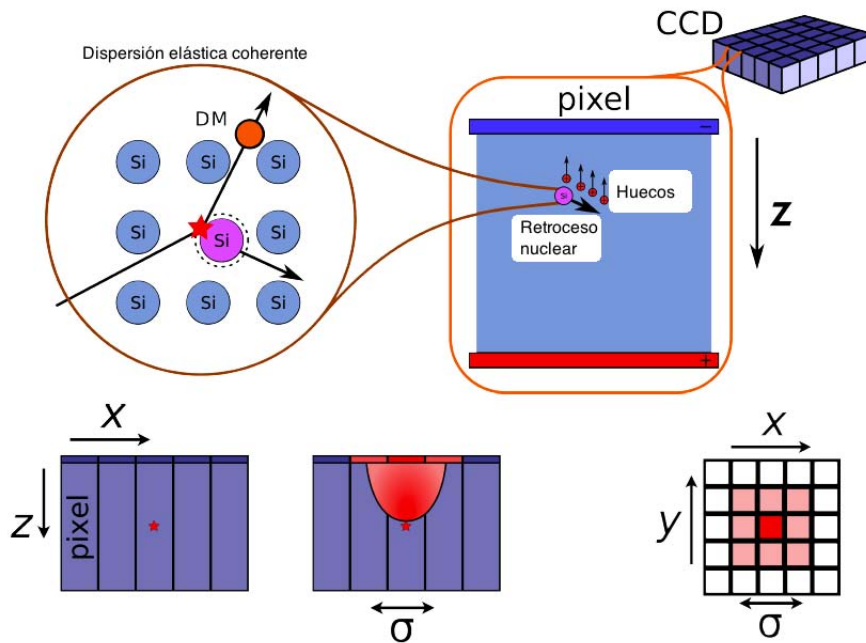


Figura 4.1: Proceso básico de detección para una CCD, una vez que se ha producido un retroceso nuclear este ioniza el medio produciendo pares electrón-agujero, esta carga se almacena en un pixel de la CCD y se difunde en función de la profundidad de creación del evento.

4.1.1. Detectores CCD de alta resistividad

En un esfuerzo [40] por mejorar la detección de fotones del infrarrojo cercano de los CCD, el grupo de Lawrence Berkeley National Laboratory (LBNL), desarrollo detectores con una región de depleción de $300 \mu\text{m}$ de grueso y una alta resistividad ($10 \text{ k}\Omega\text{cm}$) ya que estos parámetros son importantes según lo que se discutió en el capítulo (2.3), así debido a su gran eficiencia en detectar fotones en el infrarrojo cercano y el rojo, estos dispositivos CCD's son usados como instrumentos de observación astronómica, en particular en "Dark Energy Camera" (DeCam). El experimento DAMIC usa los mismos CCD de DeCam para la búsqueda de materia oscura.

Como se explico en la sección (2.3), los CCD funcionan por medio de dispositivos tipo (p), lo cuales forman pozos que retienen la carga de los huecos y electrones producidos por los fotones, las CCD de DeCam funcionan de esta manera con un grosor de $250 \mu\text{m}$ y un potencial de polarización de 40 V . Un detalle importante que se debe tomar en cuenta es la difusión de cargas producidas cerca del fondo de la parte trasera de la CCD, las cuales tiene que atravesar casi el 100% del material para alcanzar el pozo potencial, de esta manera en este proceso un hueco podría atravesar de forma perpendicular el pixel, a esto se le llama difusión de carga, la cual puede afectar la calidad de la imagen del CCD. DAMIC usa CCD de 4.2 millones de pixeles con dimensiones de $15 \mu\text{m} \times 15 \mu\text{m}$, una masa efectiva de 0.5 g y son controladas por dos amplificadores conectados en paralelo. Los detectores tienen una ganancia electrónica de $2.5 \mu\text{V}/e$. La señal es digitalizada después de ser corregida por un doble muestreo (CDS) y los eventos de ruido de la señal depende del tiempo de adquisición de datos, en donde el mejor resultado se obtuvo con un tiempo de lectura de $50 \mu\text{s}$.

4.1.2. Calibración de los CCD

Para calibrar los CCD se usan fuentes de rayos-X (^{55}Fe), los cuales penetran en las CCD aproximadamente $20 \mu\text{m}$ en el Silicio antes de producir un par electrón-hueco, lo cual demanda una energía de $3.64 \text{ eV}/e$ por cada par. De esta manera los rayos-X producen eventos los cuales se pueden ver en el CCD ya que son delimitados por la difusión de carga producida por estos fotones. En una exposición de estos rayos-X para una CCD de Decam el tamaño del pico de 5.9 keV de los rayos-X del (^{55}Fe) es de $\sim 7.5 \mu\text{m}$ R.M.S.

De esta forma es posible catalogar estos rayos-X en las CCD, gracias a la difusión de carga producida por la creación del par electrón-hueco. La figura (4.2) muestra dos ejemplos de eventos en las CCD, la energía de los rayos-X en las CCD es proporcional a la carga producida por la difusión, en donde se usa el factor de conversión de 3.64 eV/e para poder convertir esta carga de ionización en energía ionizante, en la figura (4.3) se muestra el espectro medido del la fuente de rayos-X (^{55}Fe) en una CCD de Decam.

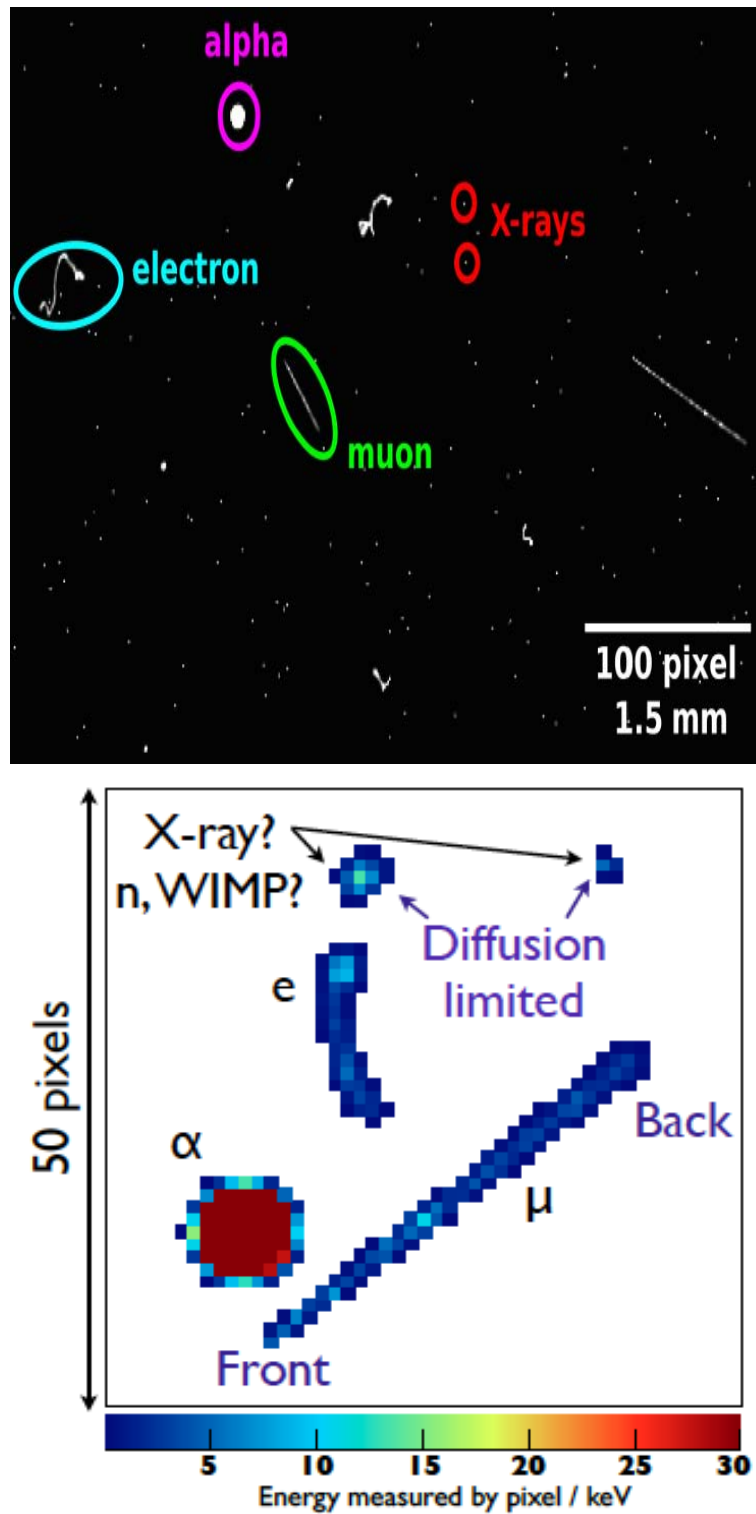


Figura 4.2: En estas imágenes se muestran muones detectados por la CCD, los cuales son vistos por la trayectoria de ancho asimétrico, la parte gruesa corresponde a mayor difusión de carga y es proveniente de la parte trasera de la CCD, mientras que la parte delgada de la trayectoria proviene de la parte más cercana al pozo de potencial. Los puntos representan retrocesos nucleares, la línea blanca (figura izquierda) solo está para dar una escala de la imagen. En la figura derecha se aprecia una reconstrucción de una imagen que pone en evidencia la traza que deja cada partícula ionizante. [1].

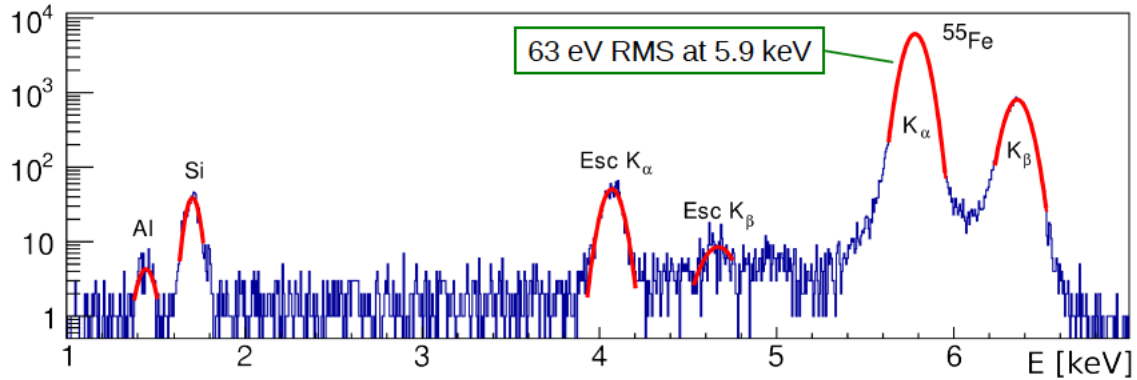


Figura 4.3: Espectro obtenido de los eventos reconstruidos de los rayos-X (^{55}Fe), de la CCD de Decam, las flechas indican las líneas de emisión de la fuente de (^{55}Fe), $K\alpha = 5.9\text{ keV}$, $K\beta = 6.5\text{ keV}$ y líneas de escape de 4.2 y 4.8 keV y las líneas de emisión del Silicio que corresponde a 1.7 keV. En la figura derecha se da otra versión de la misma gráfica la cual indica la resolución de cada pico.[1].

Como los retrocesos nucleares tienen una eficiencia de ionización en las CCD diferentes de los rayos-X, estos resultados no son directamente aplicables a retrocesos nucleares, para esto es necesario considerar el radio de eficiencia entre la eficiencia de ionización de los retrocesos nucleares y la eficiencia de los retrocesos de electrones, en donde este parámetro es conocido como “Quenching Factor (Q)”. El “Quenching Factor”, ha sido medido con precisión en el Silicio para energías de retroceso por encima de los 4 keV, para energías de retroceso menores a 4 keV el “Quenching Factor” se vuelve muy dependiente de la energía y es muy difícil de medir. En la figura (4.4), se usa el modelo de Linhard [15, 16] para convertir energía visible (“electrón equivalent”) a energía de ionización.

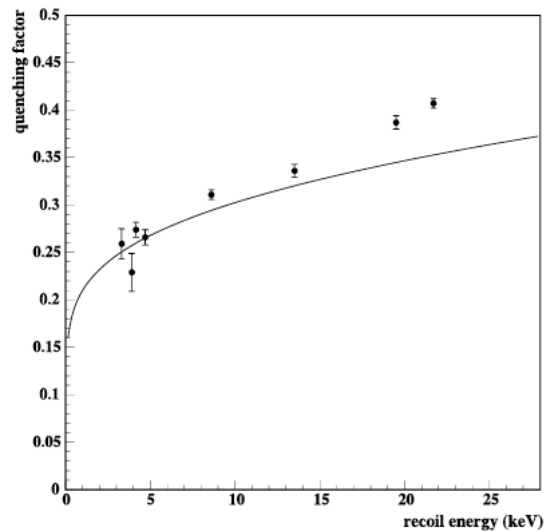


Figura 4.4: Mediciones del “Quenching Factor” para el Silicio, en donde se comparan las mediciones con el modelo de Linhard [15, 16].

Para poder estudiar el Q, el experimento DAMIC fue expuesto a una fuente de neutrones de ^{252}Cf , ver figura (2.5 en la página 21). Los retrocesos nucleares producidos por los neutrones, producen una señal similar a los rayos-X en los detectores CCD, en donde de igual forma estos eventos son detectados en la CCD como puntos de difusión de carga. Para hacer esta estimación se usó una simulación montecarlo GEANT4 para simular la interacción de los neutrones con la cubierta de aluminio que protege a la CCD, el espectro resultante se usó para simular los retrocesos nucleares que se esperarían ver en el Silicio, en donde finalmente se usó el modelo de Linhard para calcular Q y obtener la energía esperada que se debería observar en el CCD. Los resultados

de esta prueba se muestran en la figura (4.5). Se observa un pico en la región de energía de 1.7 keV, lo cual es consistente con los rayos-X del Silicio, sin embargo el modelo de Linhard deja de funcionar para energías menores a 1.5 keV, en donde los datos indican una dependencia débil de la energía y el “Quenching Factor” en esta región, cabe señalar que a energías menores a 0.5 keV (Q) tiene una dependencia fuerte con la energía y la comparación con estos resultados ya no resulta válida.

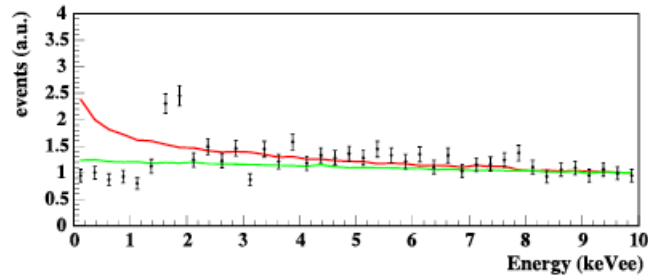


Figura 4.5: Energía visible reconstruida para una exposición del detector a una fuente de ^{252}Cf , la línea roja considera el modelo de Linhard, la línea verde no considera este modelo y los puntos son los datos reconstruidos de las CCD [1].

Desafortunadamente el ^{252}Cf , también produce retrocesos de electrones producidos por rayos gamma de esta fuente, por lo cual el análisis anterior no sirve para determinar (Q), en donde solo se debe asumir una comparación entre el modelo de Linhard y los datos. Esto solo se hizo para hacer énfasis en la importancia de la dependencia de (Q) con la energía en el espectro de retrocesos y motivar una futura investigación de estos parámetros.

4.1.3. Criterios de selección de eventos de materia oscura en las CCD (Prototipo DAMIC)

Para poder discriminar los posibles eventos de WIMP en el detector se deben hacer tres tipos de análisis. El primero consiste simplemente en recortar el espectro de energía de retrocesos a partir de la energía de 0.04 keV, con el fin de evitar ruido electrónico. El otro tipo de análisis consiste en separar los eventos producidos en el interior del CCD y los eventos producidos en las superficies traseras de estos. Como los Rayos-X producen eventos similares a los que produciría una WIMP, estos se pueden discriminar por el simple hecho de que los rayos-X se producen en las fronteras superficiales del CCD, produciendo una difusión de carga pequeña.

Las CCD funcionan por medio de pozos de carga llamados pixeles, los cuales almacenan una carga la cual en principio es proporcional a la raíz cuadrada del voltaje del sustrato. Utiliza tres relojes de señal cuadrada para desplazar la carga hacia un extremo de la CCD. Utiliza otros relojes (verticales) para desplazar la carga que se acumuló en el extremo de la CCD al amplificador.

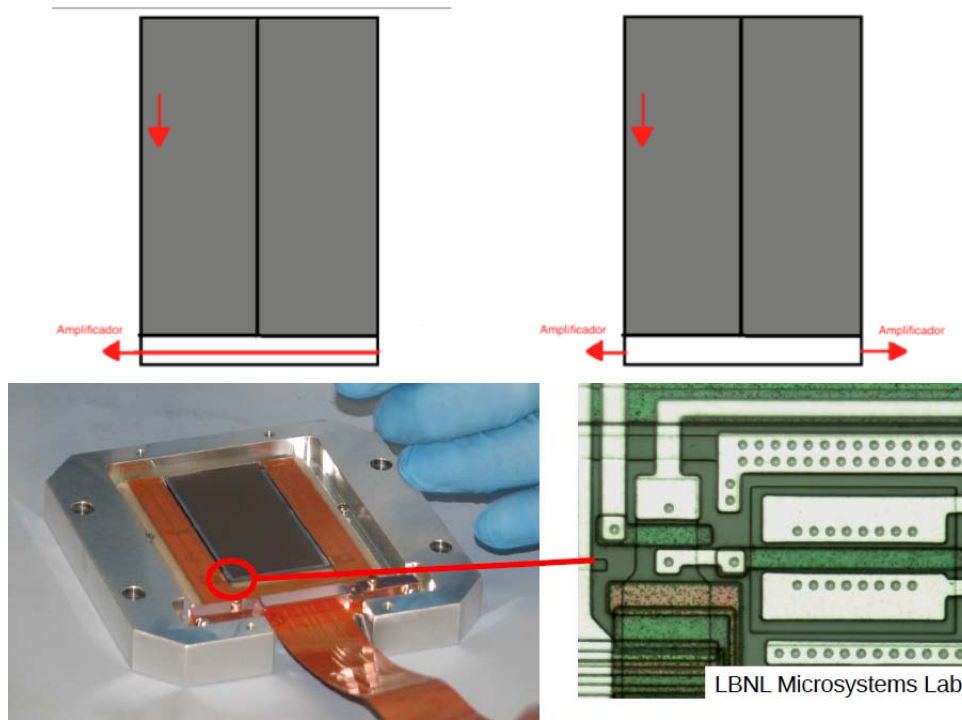


Figura 4.6: Diagrama esquemático que ilustra cualitativamente como se lee una CCD, vista de una CCD real donde se puede apreciar las terminales de lectura.

En esta primera parte se pretende estudiar las características más relevantes y generales que determinan a estos dispositivos.

Paso de radiación ionizante por el detector

El detector funciona por medio de semiconductores intrínsecos tipo (p) el cual esta formado por medio de un arreglo de pozos de voltaje positivo, al aplicar este voltaje los portadores mayoritarios de carga tienden a ser repelidos por estas compuertas, así cuando un fotón atraviesa uno de esos pozos ioniza el medio semiconductor produciendo pares electrón-hueco, de los cuales los electrones son depositados en el extremo de la compuerta positiva la cual esta aislada por Oxido de Silicio (SiO_2). Así se forma una capacitancia efectiva que retiene los electrones según estos se van acumulando. Se muestra a continuación una figura de este proceso figura(4.7).

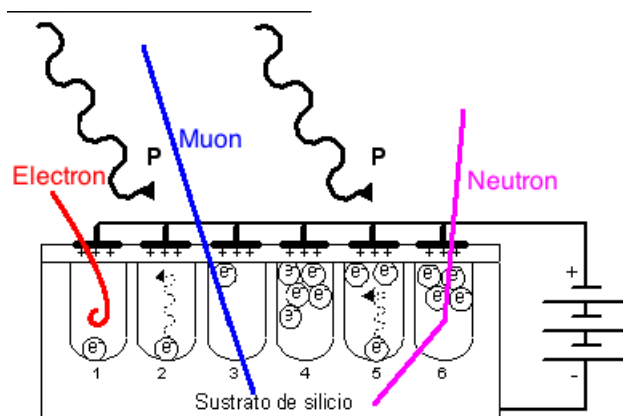


Figura 4.7: Funcionamiento de un sensor CCD [2] . Durante la exposición los pocillos están polarizados y los electrones permanecen en el sustrato de silicio (1), cuando un fotón (P) alcanza el pocillo la energía que suministra permite que un electrón del sustrato se libere (2) y se mueva hacia la zona con polaridad positiva (3) de esta forma los pocillos se van llenando de electrones (4).

La ventaja dominante de los detectores basados en materiales semiconductores es su bajo nivel de umbral,

debidos a su baja energía de ionización la cual en el caso del germanio es del orden de $\epsilon = 3 \text{ eV}$ para generar un electrón-hueco, que comparada con la energía de ionización de un gas es aproximadamente diez veces menor. Este factor depende de la naturaleza de la radiación incidente, de donde por lo general se usan partículas alfa para calibrar los dispositivos, para iones pesados estos valores pueden cambiar bastante (por ejemplo en nuestro caso se toma este valor de creación de par electrón-hueco de $\epsilon = 3.7 \text{ eV}$). Un factor importante para calibrar estos dispositivos es el Fano Factor o índice de dispersión el cual se define $F = \frac{\sigma^2(\text{observada})}{\frac{E}{\epsilon}}$, según ciertas mediciones [3] este factor puede ser estimado como $F=0.143$ para Si y $F=0.129$ Ge.

Para explicar mejor como funciona un CCD, se explicará un modelo simple [3] para determinar las características más relevantes para un funcionamiento óptimo de este dispositivo. Recuerdese que según un CCD es capaz de almacenar los electrones producidos por la luz o partícula ionizante que los generó, de esta forma debe existir una capacitancia efectiva entre el pozo y la zona de recolección de electrones, de esta manera este parámetro limitará la carga o luz total que el CCD puede procesar. Para estimar este valor se considerará que en la parte donde se aplica el potencial positivo al cristal tipo (p), se considera una región tipo (n) ya que el material tiende a estar polarizado. Así se establecerá la siguiente distribución de carga en el material (ver figura (4.8)).

$$\rho(x) = \begin{cases} eN_D & (-a < x < 0) \\ -eN_A & (0 < x < b) \end{cases} \quad (4.1)$$

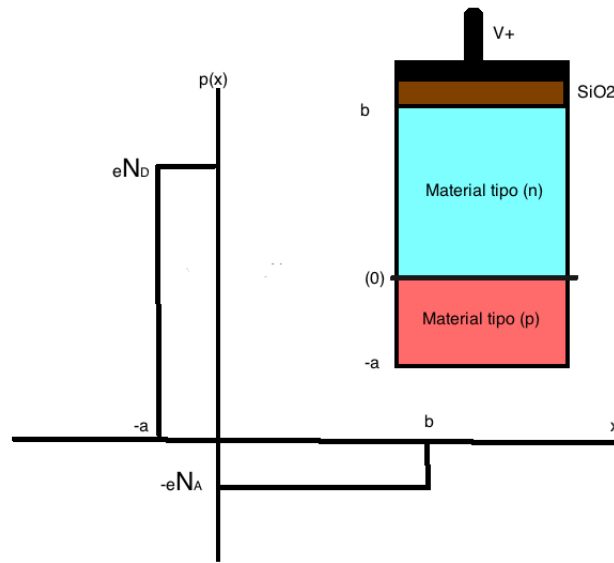


Figura 4.8: Figura que muestra la forma en que se esta modelando la densidad de carga en el material tipo (p)

donde N_D, N_A son las densidades de los donadores y aceptores respectivamente. Además se debe cumplir la ecuación de Poisson para campos eléctricos.

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.2)$$

Por tratarse de un problema que se esta modelando en una dimensión la ecuación (4.2), se simplifica .

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \begin{cases} -\frac{eN_D}{\epsilon} & (-a < x < 0) \\ \frac{eN_A}{\epsilon} & (0 < x < b) \end{cases} \quad (4.3)$$

Suponiendo que el campo eléctrico de depleción se desvanece en la frontera de la densidad de carga, entonces se imponen las siguientes condiciones de contorno; $\frac{dV}{dx}(-a) = 0, \frac{dV}{dx}(b) = 0, V(-a) = 0, V(b) = V$. Resolviendo

esta ecuación diferencial se tiene.

$$V(x) = \begin{cases} \frac{-eN_D}{2\epsilon}(x+a)^2 & (-a < x < 0) \\ \frac{eN_A}{2\epsilon}(x-b)^2 + V & (0 < x < b) \end{cases} \quad (4.4)$$

Ahora imponiendo la restricción de continuidad del potencial de la ecuación (4.4) en $x=0$, se llega al siguiente resultado.

$$N_D a^2 + N_A b^2 = \frac{2\epsilon V}{e} \quad (4.5)$$

Como la carga total del material debe ser cero se impone la restricción $N_D a = N_A b$, además como se esta suponiendo que la región tipo (n) esta más dopada y definiendo la región de deplección $d=(a+b)$, $N_A \gg N_D \Rightarrow b \gg a$, $d \cong b$, lo cual implica la siguiente simplificación.

$$(a+b)b = db \cong d^2 = \frac{2\epsilon V}{eN_D} \quad (4.6)$$

Si se recuerda la definición de resistividad en términos de la movilidad ($\rho = \frac{1}{e\mu N_D}$) y definiendo la capacitancia por unidad de área del semiconductor como $C = \frac{\epsilon}{d}$, y usando la ecuación (4.6), se tiene.

$$C = \frac{\epsilon}{d} \cong \left(\frac{\epsilon}{2V\mu\rho} \right)^{1/2}, d = (2\epsilon V\mu\rho)^{1/2} \quad (4.7)$$

Para tener una buena resolución de la energía de la partícula es necesario tener una capacitancia baja, que según la ecuación (4.7), implica un alto voltaje y una alta resistencia del cristal semiconductor, además la región de deplección también depende de estos parámetros lo cual indica que entre mayor sea la región de deplección también mayor será el *volumen activo del detector*. En la práctica la forma de mejorar la región de deplección consiste en aumentar el voltaje del sustrato y de mejorar la pureza del Silicio, lo que implica una mayor resistividad.

El detector como se ha de suponer no esta libre de ruido, el cual proviene de tres factores importantes.

- I. Shot Noise: fugas de corriente
- II. Fluctuaciones en la corriente de fuga de la superficie.
- III. eventos de ruido Johnson: asociado con malas conexiones eléctricas al detector.
- IV. Ruido Térmico: asociado con la creación repentina de pares-electrón-hueco debidas a las fluctuaciones térmicas del medio.

Estos ruidos se deben sumar de forma cuadrática $(\Delta E)^2 = (\Delta E_{ShotNoise})^2 + (\Delta E_{flctuaciones})^2 + (\Delta E_{Johnson})^2 + (\Delta E)_{\text{terimico}}^2$. Las fluctuaciones debidas al punto (1) y (4) solo pueden ser reducidas bajando la temperatura del cristal, en donde la probabilidad de que exista este ruido esta dado por la ecuación $(P(T) = CT^{3/2}e^{-\frac{E_g}{2kT}})$, $E_g = \text{band-gap}$. Para reducir el ruido del punto (2) es necesario considerar los procesos de fabricación del cristal y su historia. Y el punto (3) solo se reduce usando buenas conexiones y contactos ohmicos entre el detector y el circuito descodificador.

Análisis de imágenes de las CCD

En esta parte se pretende explicar brevemente el proceso de análisis de datos para una CCD. En este caso se mostraran datos de prueba que se tomaron con el experimento CONNIE (coherent nuclear neutrino inelastic scattering) en Fermilab E.U.A, con el siguiente arreglo experimental (ver figura 4.9). Para ver detalles técnicos ver apéndice E.

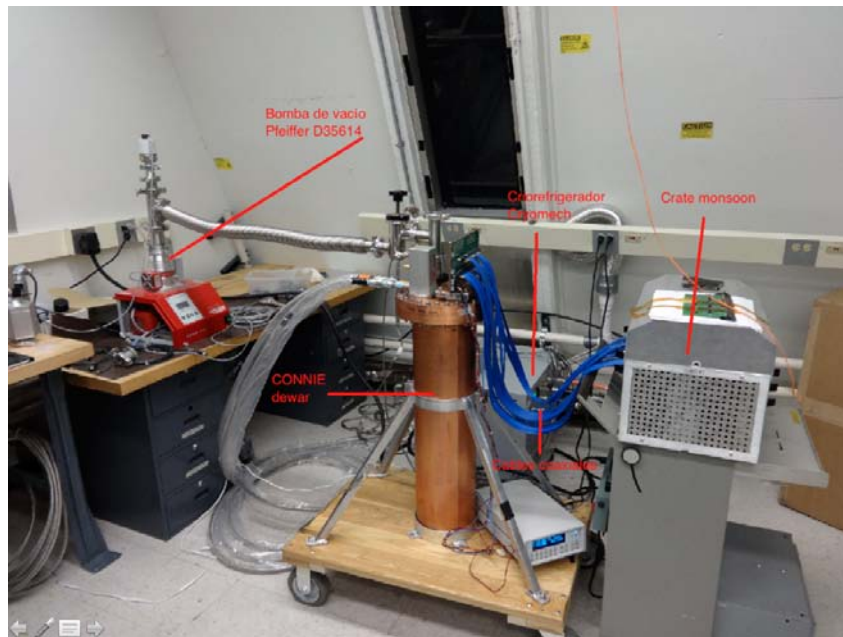


Figura 4.9: Arreglo experimental de CONNIE para tomar datos de prueba.

El programa que se usa para analizar las imágenes es el DS9 con una electrónica Monsoon poniendo la CCD a una temperatura de 133 K. El proceso en general para analizar imágenes (ver figura 4.10) es el siguiente (estas imágenes son solo ilustrativas en donde la CCD no esta completamente empobrecida y por eso se observan nubes de carga alrededor de las trazas):

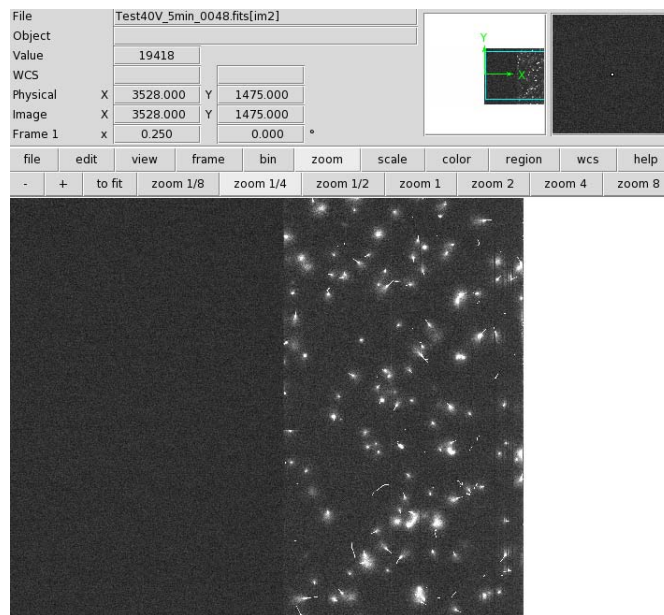


Figura 4.10: Imagen tomada directamente de la CCD usando el software ds9.

Primero se resta el ruido del “over scann ” o sobre escaneo de la CCD (el cual corresponde a leer la CCD un número mayor al número de pixeles, lo cual indica que extraerá solamente el ruido electrónico de la CCD), a todas las imágenes (ver figura 4.11).

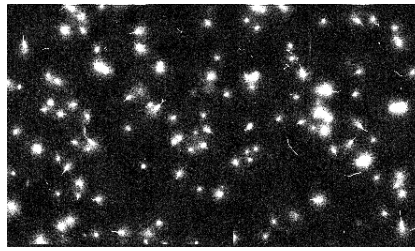


Figura 4.11: Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, procesada usando la resta del ruido del sobreescaneo sobre toda la CCD.

Después se hace el “Master-Bias”, el cual consiste en tomar la mediana de todas las imágenes y para cada pixel de la CCD (ver figura 4.12).

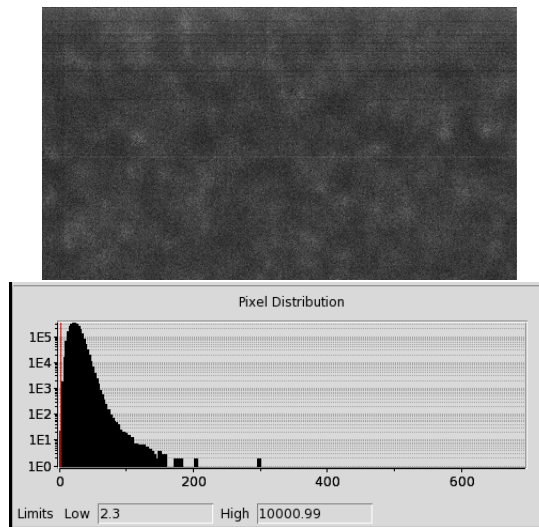


Figura 4.12: Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, correspondiente al “Master Bias”, (derecha) distribución de pixeles malos en la CCD.

Después se resta este “Master-Bias” a todas las imágenes lo cual en principio debe de reducir el ruido de correlacionado de los amplificadores (ver figura 4.13). Finalmente se hace una máscara que sirve para eliminar los pixeles malos, por medio de un discriminador simple de ruido alto (si hay pixeles muy iluminados se eliminan). Antes de procesar los datos se pueden hacer cortes por medio de un programa llamado trim2Image.sh, en donde se pueden suprimir pixeles que tengan un ruido menor a $n\sigma$. Se pueden extraer las imágenes de cada evento y se hace la reconstrucción de energía convirtiendo la señal del pixel en keV. Después se pone todo en un archivo catalog.root.

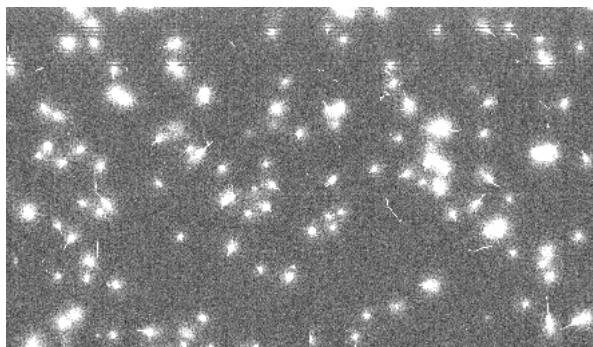


Figura 4.13: Imagen tomada directamente de la CCD usando ds9, imagen restada al “Master Bias”.

A este proceso aun le falta la parte de restar el ruido correlacionado del amplificador izquierdo, el cual no

se ejemplifico aquí por el hecho de que el amplificador izquierdo no funcionaba en ese experimento, como se observa en la parte izquierda de la figura (4.10).

4.2. Prototipo de DAMIC en Fermilab E.U.A

En Fermilab E.U.A se probó este experimento en forma de prototipo con una CCD de 0.5 g de Si y $300\mu\text{m}$ de espesor totalmente empobrecida a una profundidad de 300 m.w.e con una exposición total de 107 g-día. Se asumió una señal de materia oscura (WIMP) consistente al modelo del halo galáctico maxwelliano con una densidad de materia oscura de $0.3\text{GeV}/c^2\text{cm}^3$ una velocidad de dispersión del halo de 230km/s la velocidad de la tierra de 244km/s y una velocidad de escape de 650km/s . Para el análisis de datos se usó el método del “Maximum Gap” (sección 4.2.4.3) en donde la región de análisis para este experimento fue de 0.05 keVee y 2.0 keVee. En la figura (4.14) se muestra el límite que se obtuvo en este experimento.

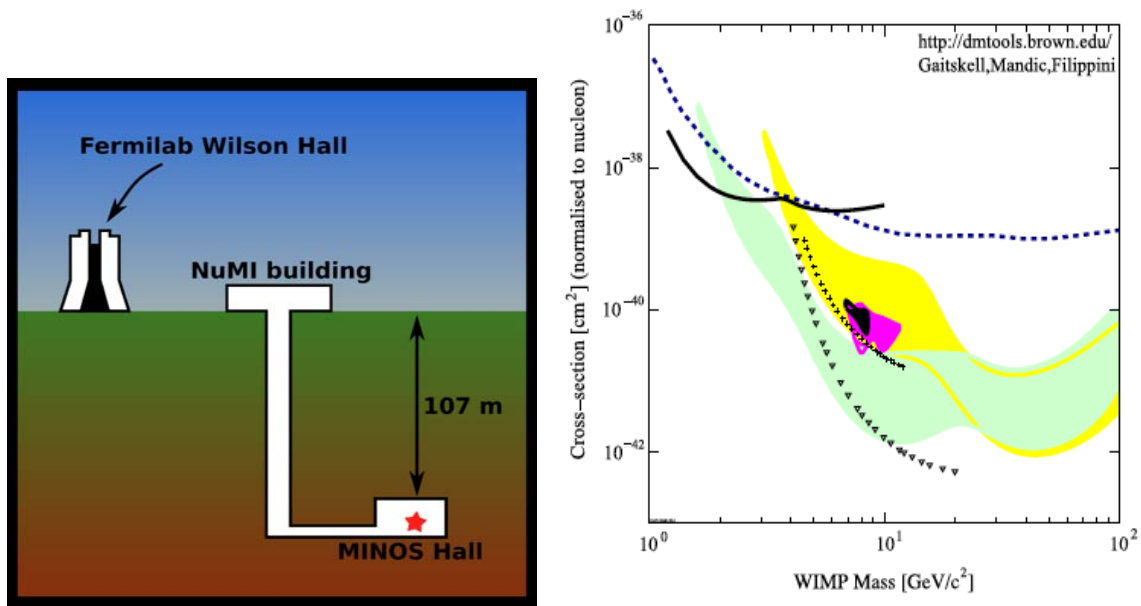


Figura 4.14: Limite obtenido por DAMIC 0.5 g al 90% C.L (línea negra) comparada con CRESST (línea azul), CDMS (cruces) y XENON (triángulos). También se muestran las regiones positivas de DAMA/LIBRA (amarillo) y COGENT (contorno negro) [40].

Para esta profundidad se midió un ruido proveniente de neutrones de $600\text{cpdkg}^{-1}\text{keVee}^{-1}$ y a pesar de tener un ruido tan alto (ya que no contaba con escudos antineutrones) se obtuvo uno de los mejores límites de sensibilidad para la región de masas pequeñas ($1-10\text{GeV}/c^2$). La discontinuidad en la pendiente de la curva de DAMIC es debido a la naturaleza del método del “maximum gap”, para profundidades mayores se espera que el ruido disminuya un orden de magnitud debido al escudamiento de la roca.

4.3. DAMIC100

Esta versión de DAMIC es una mejora a la anterior por tres factores; la primera debida al incremento de la masa del detector a 100 g, por eso el nombre DAMIC100, la segunda porque en este experimento se van a usar CCD más gruesas de $650\mu\text{m}$ de Silicio más puro que en el DAMIC anterior, el factor final es debido a que para DAMIC100 se hicieron estudios más detallados sobre el ruido sistemático de las CCD.

El experimento tiene planeado ser montado en SNOLAB Sudbury Canadá a 6000 m.w.e (ver figura 4.16), esto proporcionaría un escudo casi perfecto contra los neutrones cosmogénicos producidos por muones.

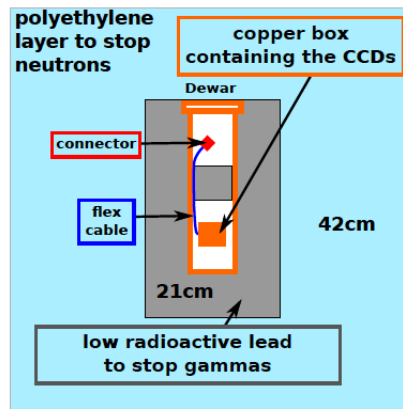


Figura 4.15: Vista esquemática del arreglo experimental propuesto para escudar DAMIC100.

El experimento está escudado con bloques de polietileno de 42 cm de grosor para detener los neutrones provenientes de la caverna debido a la radioactividad y la espalación cósmica y un escudo de Plomo de 21 cm de espesor para detener los gammas provenientes de contaminación radioactiva (ver figura 4.15).

La importancia de este experimento se resalta por dos puntos, uno es que sería el experimento con el nivel de umbral de detección más bajo que hay hasta la fecha, permitiendo así aumentar la cantidad de señal total esperada. En segundo lugar por este mismo hecho de tener el nivel de umbral de detección bajo el experimento será sensible en regiones de masas pequeñas y será bastante competitivo en comparación de otros experimentos como COGent y LUX que son mucho más grandes y costosos.

4.3.1. Calibración de DAMIC100

En este trabajo se presentarán los aspectos básicos que son necesarios para calibrar la CCD como son, la relación energía e iluminación de pixeles, el ruido intrínseco de la CCD debido a los preamplificadores, los eventos de ruido proveniente del exterior, analizar datos y ver la temperatura ideal de operación de las CCD.

El ruido principal es debido a la corriente oscura de la CCD el cual depende de la temperatura ($\sim T^{3/2}$), sin embargo si se baja demasiado la temperatura los electrones de las bandas de donadores y aceptores ya no tienen suficiente energía para ir a la banda de valencia y se pierde la conductividad y por ende la transferencia de carga se atrofia.

Primero se verá como es la señal electrónica de una CCD, ya que como se sabe el dispositivo es leído de forma vertical y horizontal, así cuando la señal pasa por el preamplificador hay una señal intrínseca de la CCD la cual debe ser comparada con la señal que se produjo en el pixel, esto se puede hacer por medio de un pulso (ver figura 4.17) el cual es dividido en dos partes por otro pequeño pulso, la primera parte comprende la señal de referencia intrínseca del pixel y la segunda es la señal total que incluye la carga acumulada correspondiente al pixel, el tiempo del pulso se le conoce como tiempo de integración el cual como es de esperarse aumenta la carga total del pulso. El ruido también depende de la ventana de integración, ya que el amplificador puede tomar ruido de frecuencias del orden de ese tiempo, afortunadamente las frecuencias muy altas MHz y las muy bajas Hz no afectan el ruido de la CCD.

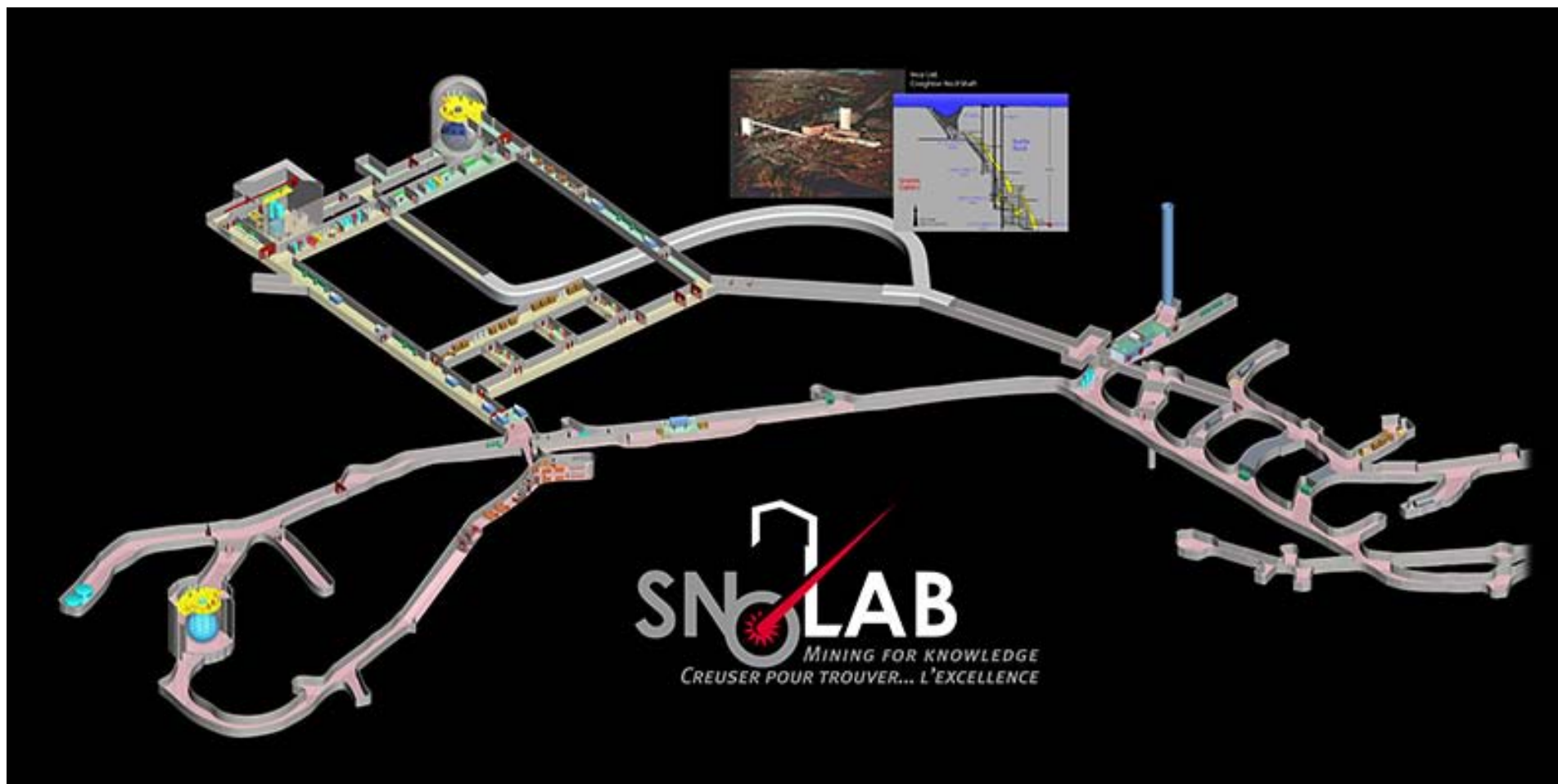


Figura 4.16: Vista esquemática del complejo de SNOLAB en Sudbury Canadá.

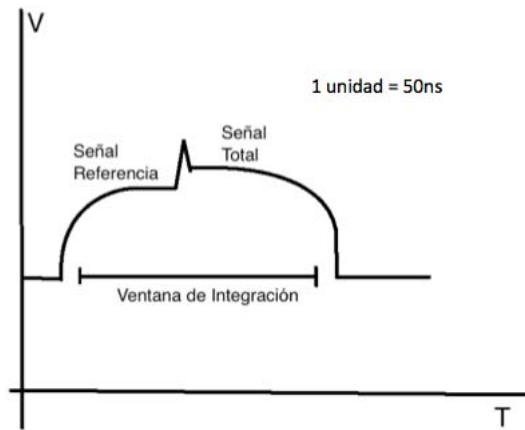


Figura 4.17: Pulso de una señal de un pixel de la CCD, donde se aprecia la señal de referencia y la señal total debida a la carga del pixel.

Para hacer la calibración de energía se usa una fuente de rayos X con energía conocida y estos rayos X se detienen cerca de la región del sustrato lo cual minimiza la difusión de carga en el pixel, de esta forma los eventos de ruido se disminuye y como la energía del rayo X es conocida es posible hacer una relación entre carga vista en la CCD y la energía del rayo X, además la relación carga-energía es lineal.

Las principales fuentes de ruido externo de la CCD son debidas a tierras mal aterrizadas en el arreglo experimental, el funcionamiento del criorefrigerador y los movimientos mecánicos que se pudiesen presentar en el experimento. Para hacer un estudio de como afectan estos ruidos se hizo una prueba en Fermilab, usando el arreglo experimental (ver figura 4.9). La prueba consistió en leer la CCD para diferentes tiempos de integración y con un tiempo de exposición mínimos para no leer trazas de rayos cósmicos y solamente medir los eventos de ruido intrínsecos de la CCD, se hizo esta prueba con el arreglo tal y como estaba sin tomar ninguna precaución a una temperatura del criostato de 133 K, después se repitió la prueba teniendo la precaución de no tener tierras flotando en el detector y finalmente se repitió la prueba con el criorefrigerador apagado. Los resultados se muestran en la figura e indican el ruido en función del tiempo de integración (en unidades de 50 ns), otro detalle es que se sabe que por cada 8 unidades de tiempo de integración se producen 0.25 electrones en promedio. Así esta curva se divide entre $(0.25/8)T$. Para este análisis sólo se tomó una pequeña región de la CCD.

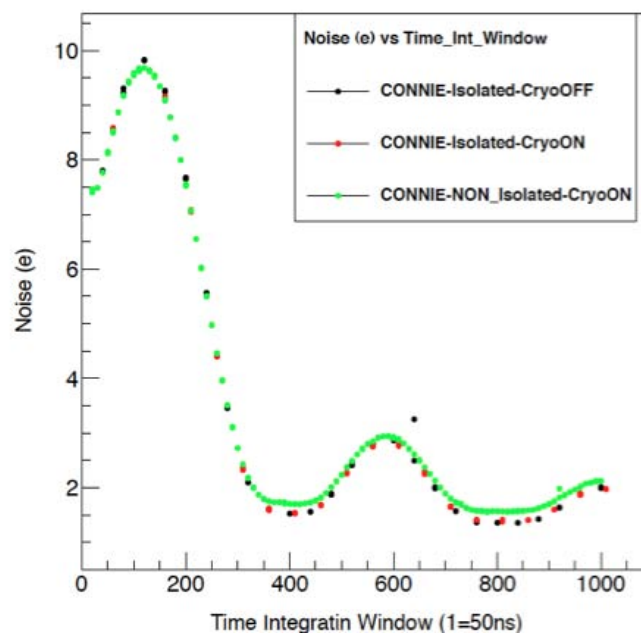


Figura 4.18: Curva de ruido contra tiempo de integración.

Como se observa claramente en la curva (4.18) el ruido es mínimo para un tiempo de integración de 400 unidades, o sea, 20 microsegundos. Para ver la estabilidad de este ruido se hizo otra prueba en donde se midió los eventos de ruido para este tiempo de integración varias veces, el resultado fue que al hacer doce mediciones de este ruido se obtuvo un ruido promedio de 1.545 ± 0.0029 e por pixel, de igual forma el experimento se efectuó a una temperatura de 133K° (La temperatura nunca debe bajar de 130K°).

4.3.2. Contaminación radioactiva en DAMIC

Hasta el momento no hay pruebas de contaminación radiactiva en los CCD. La radiación dominante proviene de decaimientos alfa cerca de la CCD debidas a la presencia de los elementos ^{238}U y ^{210}Pb , los cuales se encuentran en la superficie de la CCD o encima de esta. Debido a la gama dinámica limitada del conjunto de datos actual, no es posible medir la energía de estas partículas alfa. Debido a esto se necesitan hacer pruebas para calibrar e identificar estos decaimientos alfa los cuales están en un rango de energía de 4.6-4.9 MeV correspondientes a los decaimientos de los elementos ^{234}U , ^{230}Th y ^{226}Ra , y para el decaimiento alfa del ^{232}Th se harán búsquedas para energías del orden de ~ 19 MeV, esta contaminación se espera que sea del orden de $\sim 100\text{ppt}$. La capacidad de las CCD es también útil en discriminar los eventos de ruido de fondo provenientes dentro de la CCD, este ruido es generado principalmente por los decaimientos beta del ^{32}Si y ^{210}Pb , los cuales se pueden discriminar fácilmente gracias a que por cada decaimiento de estos elementos se producen elementos que también decaen en electrones beta, de este hecho se puede emplear la técnica de buscar dos trazas de electrones beta en diferentes imágenes de la CCD y de esta manera es posible identificar y discriminar dichos eventos de ruido. Proporcionando de esta forma una técnica única del carácter de las CCD para discriminar eventos de ruido de fondo, incluso si éste ruido se hace dominante o significativo para el experimento.

4.4. DAMIC400

Este es otro experimento que aún está en planeación el cual solo tiene la variante de tener el cuádruple de masa que DAMIC100 y de estar localizado en el hemisferio sur y poder tener más poder de discriminación debido a su mayor masa y por medio de un análisis de ruido por medio de una modulación anual de señal en ambos hemisferios. Se piensan hacer pruebas para el detector en México y muy posiblemente se pueda efectuar una corrida de datos en una mina en el país. El detector contará en principio con la misma tecnología que DAMIC100, y tentativamente se planea colocar en una mina mexicana a 650 metros de profundidad

EL proyecto se ha presentado en el LVI Congreso Nacional de Física en San Luis Potosí (Octubre de 2013) y en el XIV MEXICAN WORKSHOP ON PARTICLES AND FIELDS en Oaxaca (Noviembre 2013). Por el momento el proyecto esta liderado por el Dr. Alexis A. Aguilar Arévalo y el Dr. Juan Carlos D'Olivo en el instituto de Ciencias Nucleares en la UNAM México. Para darse una idea hasta el momento de como será el detector, se puede ver la figura 4.19

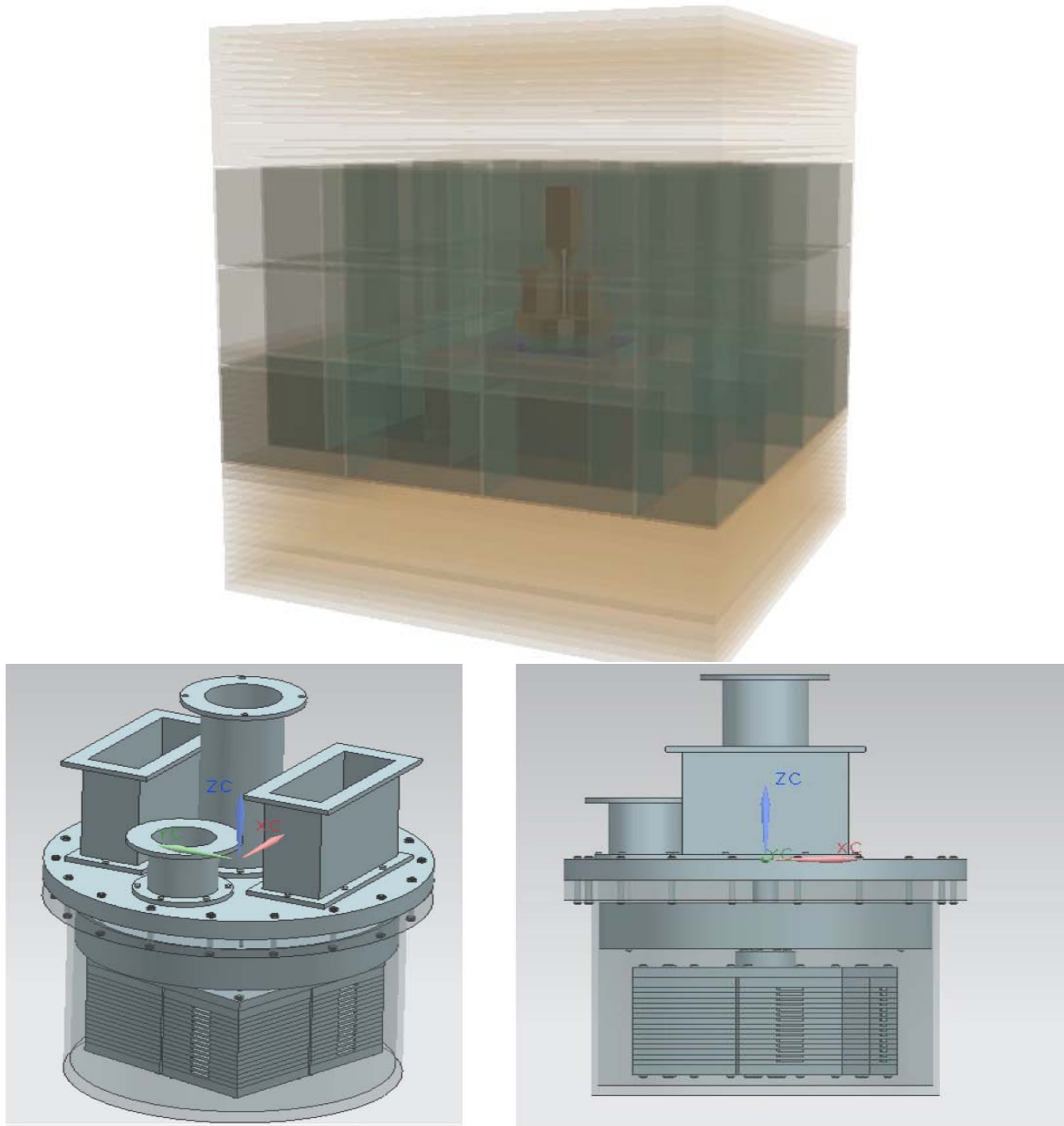


Figura 4.19: Imágenes del prototipo del detector DAMIC400, que piensa ser instalado en México, (arriba) el detector completo con los escudos de polietileno y (abajo) se muestra el arreglo de CCD en un dewar de cobre..

Como este detector tiene una masa cuatro veces mayor, surge la problemática de como ordenar esta masa de tal forma que cumpla lo siguiente: ocupe el mínimo espacio, no use demasiados cables (para minimizar la contaminación) y como mantener la estructura del criostato y todas sus componentes seguros frente a estrés mecánico. Estas son las problemáticas adicionales que se deberán superar para poder operar el experimento DAMIC400 y por el momento la colaboración trabaja en teorías e ideas para resolver esta problemática. También para este diseño se tiene como mira, utilizar un mejor sensor de temperatura, que mida de la forma más directa posible la temperatura de las CCD (ya que en DAMIC100, el sensor de temperatura es indirecto y menos preciso), para ello el Ingeniero Frederic T. trabaja en un modelo térmico así como en construir un aparato experimental que permita medir con precisión la temperatura.

Capítulo 5

Cálculo de la sensibilidad de un detector tipo DAMIC400

5.1. Detalles Relevantes

Para un experimento de materia oscura en general se deben tomar en cuenta como en todo experimento los niveles de ruido esperados del experimento en base a la Física ya conocida. Además de poder hacer un análisis estadístico, en donde se considere como hipótesis nula la no existencia de materia oscura y se use un método para poder rechazar esta hipótesis nula con un nivel de confianza de al menos del 90 %.

Por otro lado para hacer el análisis estadístico se usará la herramienta de Chi-Cuadrado de máxima similitud, la cual es una distribución de probabilidad continua con (k) grados de libertad y (X_k) variables aleatorias las cuales se asumirá que cada una sigue una distribución de Poisson. Esto nos podrá dar un método para poder rechazar la hipótesis nula con el 90 % de nivel de confianza, en los capítulos siguientes se hablará con más detalle sobre este análisis.

5.2. Intervalos de confianza en el plano σ_χ vs M_χ

Para un experimento de materia oscura es importante saber cual es la sensibilidad de este a los parámetros de interés que son en este caso la sección eficaz σ_χ y la masa M_χ de la WIMP. Para poder calcular esta sensibilidad se debe conocer del experimento la señal esperada y tener una estimación del ruido esperado, de esta forma es posible rechazar o aceptar la hipótesis de la señal que se desea detectar, en nuestro caso la señal esperada son los eventos de retrocesos nucleares que produce la WIMP en un material (ver sección 2) y los eventos de ruido serán en nuestro caso los neutrones producidos por la espalación de un núcleo por un muon cosmogénico de un material cercano al detector. En esta sección se discutirá brevemente la teoría estadística para abordar el problema de calcular la sensibilidad.

Estimador

Un estimador [46] puede ser considerado como un instrumento de medida de un parámetro en base a un numero finito de observaciones experimentales, este parámetro se supone que tiene un valor determinado pero desconocido. Dadas estas observaciones se define una estimación puntual como la que determina un el valor más próximo al verdadero valor y la estimación de intervalo, determina un rango de valores muy probables que incluyan el valor real del punto.

Para estimar un parámetro, se debe escoger una serie de observaciones y un método para parametrizar estas observaciones, el cual se le llama estimador. Así el valor numérico particular del estimador para un conjunto de

observaciones se le conoce como estimación. Habiendo escogido un estimador, se puede estudiar que tan bueno es el estimador por medio de las siguientes propiedades: Consistencia, sesgo, eficiencia y robustez.

Un estimador se le considera consistente si, la predicción del estimador converge al valor real en cuanto el número de eventos aumenta. Así definamos nuestro estimador θ_n del parámetro θ con n observaciones. Dados un $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$, entonces θ_n es un estimador consistente si existe un N tal que

$$P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) > \eta$$

para todo $n > N$. Una observación importante es que como la consistencia es una propiedad asintótica, no necesariamente implica que la precisión sea una función monótona con relación a n . Esto sucede incluso si el estimador cumple con la definición de consistencia, así añadir más observaciones no siempre incrementa la precisión.

Para describir la propiedad de sesgo considere un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ , con un número N de observaciones. Se define la propiedad de sesgo (bias) b del estimador $\hat{\theta}$ como la desviación numérica del valor de expectación del estimador $\hat{\theta}$ ($E(\hat{\theta})$) del valor real θ_0 ,

$$b_N(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta_0 = E(\hat{\theta} - \theta_0).$$

Un estimador se considera no sesgado (unbiased) si, para toda N y θ_0 ,

$$b_N(\hat{\theta}) = 0.$$

Es importante señalar que la propiedad de convergencia no implica la propiedad de sesgo o viceversa.

Recordando que una estimación es una variable aleatoria, y por ende tiene una distribución de probabilidad llamada la distribución de probabilidad del estimador. Como ya definimos la consistencia y el sesgo de un estimador de tal modo que si la distribución es consistente esta centrada de forma arbitrariamente cerca del valor real θ_0 y una distribución esta no sesgada si el estimador esta siempre centrado en θ_0 . La eficiencia mide en si la relación que tienen estos dos parámetros por medio de la varianza del estimador.

Cuando una distribución de una serie de observaciones no es bien conocida se pueden hacer la siguiente preguntas

- I. ¿Qué parámetros pueden ser estimados sin saber nada acerca de la distribución?
- II. ¿Qué tan creíbles son los valores estimados si la distribución no es del todo correcta ?

Cuando las estimaciones que tratan de responder a la pregunta (1) se les conoce como estimaciones de distribución-libre. Sin embargo este término no es usado porque hay parámetros que dependen fuertemente de la distribución, como son la varianza por ejemplo. Un nombre más propio para describir esta clase de problemas es el término de Robustez. En general, la robustez es tomada para medir la insensibilidad de pequeñas desviaciones de la distribución original.

5.2.1. Método de máxima verosimilitud

En nuestro experimento en particular deseamos conocer información sobre la hipotética materia oscura fría, sin embargo para poder conocer algo (en particular las propiedades de a materia oscura) debemos tener un concepto experimental de información que deseamos obtener con nuestro experimento. Según R.A Fisher la definición de información experimental puede entenderse con los siguientes principios:

- I. En un conjunto de observaciones, la información debe aumentar conforme aumentan las observaciones.

II. La información debe estar condicionada en relación a lo que estamos buscando del experimento. Así datos que están fuera de la hipótesis experimental, no contienen información.

III. La información esta ligada al concepto de precisión; a mayor información, el experimento será más preciso.

De aquí se deduce que en un experimento cualquiera para poder tener información se deben tener datos consistentes con lo que se espera ver, ya que no pueden haber experimentos sin suficientes datos como para ser analizados o publicados. Es por eso que es necesario tener un herramienta que pueda discriminar datos que no son información experimental o en un caso más realista contar con un método que reduzca lo más posible los datos del experimento en el mismo acto que se pierda una cantidad mínima de información experimental.

Función de verosimilitud

Se puede definir una variable aleatoria X (en un conjunto de N mediciones), con una distribución de probabilidad $f(X, \theta)$, donde θ es un parámetro (o un conjunto de k parámetros). El conjunto de todos los valores posible de X será denotado por Ω_θ .

Considerese un conjunto de N observaciones independientes de X , X_1, X_2, \dots, X_N . La función de distribución de probabilidad total de X es, considerando eventos independientes entre si,

$$P(X | \theta) = P(X_1, \dots, X_N) = \prod_{i=1}^N f(X_i | \theta). \quad (5.1)$$

Cuando la variable X es remplazada por datos reales X^0 , entonces (5.1) ya no es una distribución de probabilidad y es denotada generalmente por $L(X^0 | \theta)$ y se le denomina función de verosimilitud. Ahora definase un estadístico como una variable aleatoria $T=T(X_1, \dots, X_N)$, por ejemplo la media aritmética de los eventos X es un estadístico.

Una forma de definir la función $f(X_i | \theta)$ es por medio de una función gaussiana o poissoniana dependiendo de la naturaleza del problema, así si se cuenta con una estadística lo suficientemente alta se usa una gaussiana y en el caso contrario se usa una distribución de Poisson.

5.2.2. Experimento de conteo y ajuste espectral

Si nos remitimos ala pregunta (2) de la sección 4.3.0.5, nos estamos cuestionando si es posible establecer una región de exclusión de los parámetros de interés (σ, M_χ) la cual pueda ser razonablemente confiable. Ya que como se ha visto solo hemos podido hacer aproximaciones para estimar los eventos de ruido de fondo del experimento, así para minimizar el efecto de cualquier cambio en las curvas que se han obtenido se utilizará el método del máxima verosimilitud que consiste en minimizar con respecto a los parámetros el logaritmo de la función de máxima verosimilitud mencionada en la sección 4.3.1.2 .

La ventaja de usar el método de máxima verosimilitud es que es el mejor método para estimar parámetros de una teoría, incluso si estos parámetros son numerosos, además como este proceso usa cada evento a la vez no es necesario en principio construir un histograma o espectro para poder hacer un análisis, a este tipo de experimento se le llama experimento de conteo ya que no contiene la información de la forma de la señal esperada y los eventos de ruido.

Para el método de máxima verosimilitud se cumplen optimas condiciones de

- Consistencia: sobre el valor del parámetro verdadero que generó los datos, que se recupera asintóticamente (con suficientes datos).

- Eficiencia: se obtiene la menor-possible varianza de los estimados del parámetro, recuperado asintóticamente.
- Robustez: Invarianza a la parametrización (obtiene la misma solución para el método independientemente de la parametrización utilizada).

Razón de verosimilitudes

La razón de verosimilitudes sirve para comparar que tan significativo es una probabilidad en comparación con la probabilidad máxima que físicamente es posible. Es permite determinar cuando una señal esperada tiene un comportamiento esperado o anómalo. Matemáticamente esto se define de la siguiente forma

$$R = \frac{P(n, \mu)}{P(n, \mu_{max})}.$$

Este cociente es proporcional a la probabilidad y toma un valor máximo de $R = 1$, cuando los valores experimentales son muy parecidos a $P(n, \mu)$ entonces R será próximo a la unidad, de lo contrario R rondará cerca de cero. Esto es importante ya que en este caso se supondrá que $P(n, \mu)$ será una gaussiana y como se verá en la siguiente sección los contornos de confianza dependerán del “razón de verosimilitudes”.

Caso Gaussiano, la Chi-cuadrada

Para empezar a estimar la función de máxima verosimilitud, supongase que los datos que queremos tomar tienen suficiente estadística para ser descritos por una gaussiana, así es muy directo ver que la función de verosimilitud es:

$$P(X(\mu)) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(X_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (5.2)$$

donde X_i son los posible datos experimentales distribuidos, μ_i es un bin del espectro de señal esperada más los eventos de ruido de fondo. Según el teorema de Wilks¹ [36] el valor de $-2\ln(P(X(\mu))/P(X(\hat{\mu})))$ (logaritmo del “razón de verosimilitudes”) sigue una distribución de probabilidad Gamma $\Gamma(x, n) = (1/2^{n/2}\Gamma(n/2))x^{n/2-1}e^{-x/2}$ con n grados de libertad, donde $\hat{\mu}$ el mejor estimador del estadístico ($\hat{\mu} = X_i$, para la gaussiana). Tomando el logaritmo del “likelihood ratio” para este caso

$$t_\mu = -2\log\left(\frac{P(X(\mu))}{P(X(\hat{\mu}))}\right) = \sum_{i=0}^N \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}. \quad (5.3)$$

1

Hay que considerar además que si se tienen N datos y la señal μ_i depende además de los datos y de los parámetros físicos $N + M$ entonces los grados de libertad del estadístico serian en total M . Así por ejemplo en nuestro caso la señal (ver sección 2.2) depende de dos parámetros físicos que son la sección eficaz de interacción entre la WIMP y el núcleo y la masa de la propia WIMP. Con esto podemos tomar una hipótesis nula de no señal y tratar de excluirla con un nivel de confianza usando la función Gamma con dos grados de libertad. //

Siendo ahora más explícitos con este estadístico para nuestro caso se tiene que los parámetros de significativos del experimento son los los datos del espectro de retrocesos nucleares producidos por una WIMP, los cuales se tiene que comparar con una señal esperada y un ruido de fondo estimado, ver figura 5.1. En nuestro caso el error estadístico se tomaría poissoniano y el error sistemático no se considerará por el momento. Entonces el estadístico gaussiano para este caso se puede reescribir como

¹El teorema de Wilk’s enuncia que dados X_1, \dots, X_n , sampleados de una distribución $f(x, \theta) \in \Theta$, dada una hipótesis nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra la hipótesis $H_1 \in \Theta \setminus \Theta_0$, y definase el estadístico $\text{Log}(\Lambda X^n) = \sup_{\theta \in \Theta} (L(\theta | X^n)) - \sup_{\theta \in \Theta_0} (L(\theta | X^n))$ donde $L(\theta | X^n) = \text{Log}(\prod_{i=1}^n f(X_i | \theta))$, entonces se cumple $2\text{Log}(\Lambda X^n) \rightarrow \chi_k^2$ donde χ_k^2 denota una distribución chi-cuadrada de k grados de libertad.

$$t_\mu = \sum_{i=0}^N \frac{(D_i - (S_i(\sigma, M_\chi) + B_i))^2}{(\sqrt{D_i})^2} \quad (5.4)$$

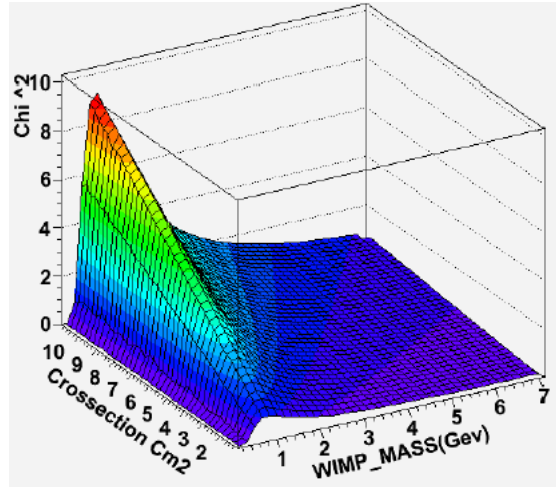


Figura 5.1: Ilustración una función chi cuadrada, dado una señal (WIMP) y un espectro de eventos de ruido.

En principio esto sería lo que se debe estimar para poder calcular las regiones de confianza según los datos obtenidos. Pero en ausencia de datos (D_i), puede hacerse una estimación de la sensibilidad, a lo que se refiere es a formular una hipótesis nula de señal, la cual implica que los datos observados según esta hipótesis tendrían que ser igual al ruido de fondo ($D_i = B_i$), entonces se puede hacer la pregunta ¿cuál es la región de parámetros límite, para un nivel de confianza, entre la región de valides de la hipótesis y la región negada?. Ciertamente la región negada de la hipótesis es la que es de nuestro interés ya que a un experimento le interesa poder excluir las regiones de posible señal. entonces se concluye que un experimento es más sensible entre más área de la región de parámetros cubra la región de hipótesis nula, o sea, suponer que hay señal. Matemáticamente hablando, el estadístico para calcular la sensibilidad en nuestro caso quedaría a partir de (5.4)

$$t_\mu = \sum_{i=0}^N \frac{(S_i(\sigma, M_\chi))^2}{(\sqrt{B_i})^2}, \quad (5.5)$$

así por ejemplo si queremos rechazar la hipótesis de señal para nuestro caso a un nivel del 90% de confianza, el valor de $t_\mu = 4.61$ y los parámetros (σ, M) deben ser tales que cumplan con esta restricción. Como se aprecia con cierta obviedad, este estadístico usa información de la forma del espectro de señal y del ruido para el análisis, sin embargo también es posible hacer un análisis sin necesidad de saber la forma de estos espectros, solamente conociendo cual es la señal total que se espera y los eventos de ruido totales, podemos agrupar esta información en un bin y el estadístico (5.5) solo sería

$$t_\mu = \frac{(S(\sigma, M_\chi))^2}{(\sqrt{B})^2}, \quad (5.6)$$

donde ahora como ya se había dicho $S(\sigma, M_\chi)$ y B , son la señal total y los eventos de ruido totales del experimento. A este tipo de análisis se llama experimento de conteo.

Caso Poissoniano

Consideremos ahora un conjunto de valores de datos $n = (n_1, \dots, n_N)$ que podemos considerar como un histograma con N elementos. Supongamos que los valores de n_i son independientes y cumplen con una distribución de Poisson con valores medios ν_i , De modo que la probabilidad conjunta para el vector n es

$$P(n, \nu) = \prod_{i=0}^N \frac{\nu_i^{n_i}}{n_i!} e^{-\nu_i}. \quad (5.7)$$

tomando el “likelihood” se tiene

$$\log(P(n, \nu)) = \sum_{i=0}^N (n_i \log(\nu_i) - \nu_i) + C$$

, donde C es una constante que no depende de ν_i . Ahora derivando esta función con respecto a cero con respecto a ν_i se calculan los estimadores de similitud

$$\hat{\nu}_i = n_i \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Con esto es posible tener el logaritmo del “razón de verosimilitudes” t_ν y aplicar el teorema de Wilk’s

$$t_\nu = -2 \frac{\log(P(\nu))}{\log(P(\hat{\nu}))} = -2 \sum_{i=0}^N (n_i \log(\frac{\nu_i}{\hat{\nu}_i}) - \nu_i + \hat{\nu}_i) = -2 \sum_{i=0}^N (n_i \log(\frac{\nu_i}{n_i}) - \nu_i + n_i)$$

, donde en el último paso se sustituyo $\nu_i \hat{=} n_i$. De aquí en adelante por el teorema de Wilk’s se procede de la misma manera que el caso anterior, ya que t_ν debe seguir una distribución Gamma con dos grados de libertad para nuestro caso. Ahora la señal y los eventos de ruido de fondo $S(\sigma, M_\chi)$ y B , se representan como $\nu_i = S_i(\sigma, M_\chi) + B_i$ y los datos corresponden a los n_i de la distribución. Así mismo para calcular la sensibilidad se asumen las mismas hipótesis y se toman los datos iguales al ruido de fondo

$$t_\nu = -2 \sum_{i=0}^N (B_i \log(\frac{(S_i(\sigma, M_\chi) + B_i)}{B_i}) - S_i(\sigma, M_\chi)).$$

Errores sistemáticos

Hasta ahora solo se han considerado errores o fluctuaciones estadísticas del experimento, en un caso más realista existen también errores sistemáticos, los cuales son debidos a algún desconocimiento en la estimación de los eventos de ruido de fondo o también pueden deberse a los errores de los aparatos de medición que usa el experimento. Estos errores no disminuyen conforme se vayan adquiriendo más datos ya que no dependen de ello y solo pueden ser reducidos con un aumento del conocimiento de los cálculos de los eventos de ruido de fondo del experimento o del conocimiento de la fuente de ruido de algún sistema experimental.

Para el método de máxima verosimilitud existe un proceso estándar para determinar estos errores [35], en este trabajo se estudiará principalmente los eventos de ruido sistemático debido a algún desconocimiento de los eventos de ruido de fondo y solo se discutirá el proceso de obtener un error sistemático de los dispositivos experimentales. La generalización del estadístico chi-cuadrada para incluir los errores sistemáticos es a través de la matriz de error M_{ij} la cual contiene la información del error estadístico (diagonal) y el error sistemático, matemáticamente la chi-cuadrada se reescribe

$$\chi^2 = \sum_{i,j} (D_i - (S_i(\sigma, M_\chi) + B_i)) M_{ij}^{-1} (D_j - (S_j(\sigma, M_\chi) + B_j)), \quad (5.8)$$

donde se usó la misma notación que en (5.5). Como antes se mencionó la matriz de error contiene la información del error estadístico y sistemático del experimento, así es matriz puede ser escrita $M_{ij} = M_{ij}^{stat} + M_{ij}^{sys}$, $M_{ij}^{stat} = \sqrt{D_i} \delta_{ij}$, como era de esperarse la parte del error estadístico se puede conocer exactamente de la misma forma que en 4.3.2.2. Pero el problema ahora se centra en calcular la matriz del error sistemático, esta va a ser calculada a partir del proceso del cálculo del ruido de fondo.

Usando la definición de matriz de error de [35] los elementos de esta matriz M_{ij} para un conjunto de variables x_0, \dots, x_n se calculan como el valor esperado de $\langle (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \rangle$. Esta definición implica que la matriz de error es simétrica. Antes de dar la regla de correspondencia para calcular en nuestro caso esta matriz de error, es necesario clasificar cual es el error sistemático más grande en el cálculo de los eventos de ruido de fondo, ya que solo se piensa por el momento introducir un elemento de error en consideración.

Si se recuerda el proceso del cálculo para los eventos del ruido de fondo a partir del espectro inicial incidente de Muones, uno de los errores más grandes en principio es la multiplicidad de producción de neutrones por Muon, pero esta multiplicidad fue corregida y mejor comprendida en la sección 4.2.2.2 a partir de argumentos físicos, por ende se considerará este error como algo pequeño. Así que queda analizar la segunda fuente de error que sería la energía media del Muon al atravesar la roca, ya que en primer lugar la roca se supone uniforme, lo cual en general no debe de ser así y en segundo lugar porque el Muon pierde energía en función de su misma energía de forma complicada y en el cálculo se asumió una forma aproximada más sencilla. Por esta razón se considerará como una fuente de error sistemático la energía promedio perdida del Muon.

Regresando al problema de calcular explícitamente la matriz de error sistemático, entonces se procederá como sigue. Para cada energía media del Muon hay un espectro de retrocesos nucleares asociado, así tomando un error $\pm \delta E_\mu$ de la energía media del Muon es posible hacer un sampleo gaussiano en este intervalo de energías y para cada sampleo calcular el espectro de retrocesos nucleares (poner imagen espectros). Si cada espectro por ejemplo tiene 100 bins y sea E_r^k la energía de retrocesos nucleares para el Si de cada espectro k , entonces la matriz de error para este parámetro quedara determinada

$$M_{ij}^{sys} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (E_{ri}^k - \overline{E_{ri}^k})(E_{rj}^k - \overline{E_{rj}^k}), \quad (5.9)$$

donde N es el número de sampleos y $\overline{E_r^k}$ es el valor central de los bins del espectro correspondiente a la energía media del Muon (media de la gaussiana). Finalmente lo que se debe de hacer es invertir la matriz M_{ij} para poder usarla en (5.8).

El método de la brecha máxima (*Maximum Gap*)

En este tema se dará una discusión del método usado por CDMSII en sus análisis de datos [37]. En donde en este caso se tiene el problema de tener un ruido de fondo que posiblemente sea desconocido en su totalidad y este afectando los datos, así una ventaja de este método será que no dependerá de la forma de la distribución de los eventos de ruido de fondo, una desventaja de este proceso es que no es posible añadir errores sistemáticos de forma directa y simple como el método de máxima verosimilitud.

En la figura (5.2), se muestra un ejemplo donde se muestra una señal esperada y los eventos de ruido conocido (línea continua dN/dE) y una serie de datos que incluyen ruidos conocidos y desconocidos más la posible señal esperada. La idea del método consiste en encontrar un conjunto de puntos formado por la integral entre un evento E_i e E_{i+1} ($x_i = \int_{E_i}^{E_{i+1}} (dN/dE)dE$) y de ese conjunto obtener el máximo, pues en este espacio existe más posibilidad de que en un experimento ficticio este “gap” se perturbe por los eventos de ruido desconocidos. Así una vez esto se toma el valor de la señal y se modula el valor de la sección eficaz de interacción σ de tal forma que en el “maximum gap” obtenido de los datos reales se cumpla que los eventos esperados de dN/dE sean siempre menores que el “maximum gap” generados por experimentos ficticios dados por la señal y los eventos de ruido conocido, con un nivel de confianza dado C_0 .

Así por ejemplo si se obtiene en un experimento un “maximum gap” de 5 eventos y se generan experimentos ficticios de la señal y el ruido conocidos y se obtienen “maximum gaps” de 1 evento y 2 eventos como máximo,

entonces esto quiere decir que la sección eficaz es muy alta y se debería bajar a un 60 % para que se cumpla la condición de óptima sección eficaz. En este ejemplo se puede ver claramente como existe una penalización a la sensibilidad al reducir la señal .

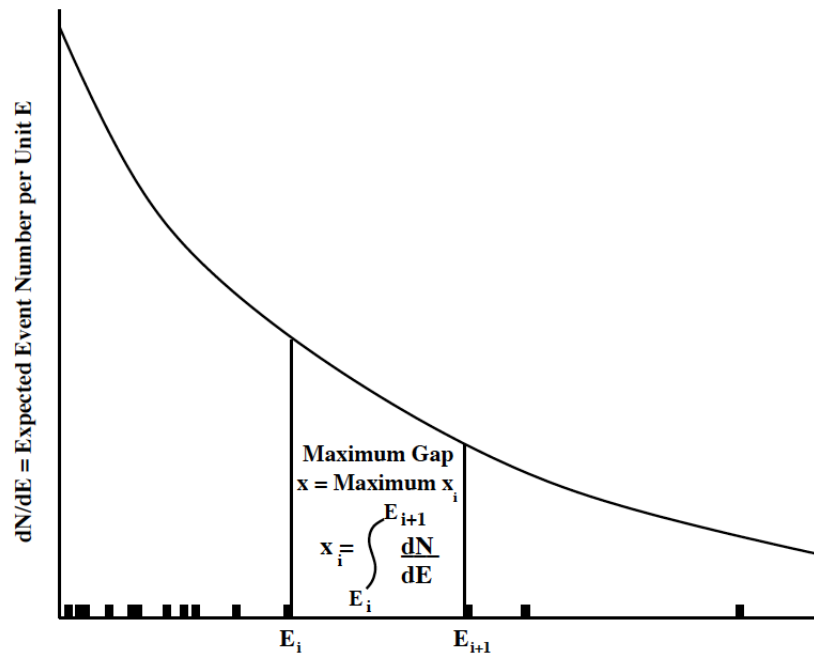


Figura 5.2: Ilustración del método del “maximum gap”.

Es fácil convencerse de que el conjunto de valores x_i , no depende de la forma del parámetro usado, en este caso E , esto se demuestra fácil usando el teorema de sustitución para integrales[38]. Entonces se puede hacer un cambio de variable para que la variable solo este definida en el rango de $[0,1]$. Finalmente se construye el estadístico (ver apéndice E)

$$C_0(x, \mu) = \sum_{k=0}^m \frac{(kx - \mu)e^{-kx}}{k!} \left(1 + \frac{k}{\mu - kx}\right), \quad (5.10)$$

donde m es el máximo entero tal que $m = \lfloor \mu/x \rfloor$, μ son los eventos esperados y x es el valor del “maximum gap”.

El método de Feldman-Cousins

En las secciones anteriores se habló del método de máxima verosimilitud el cual sirve para obtener contornos de confianza. Pero como la señal que se espera depende de la sección eficaz de interacción y la masa de la WIMP, esta dependencia es en general como se sabe no lineal, por lo que la distribución de probabilidad gaussiana puede no cumplir con que la razón de verosimilitud sea cercano a uno cuando los datos sean parecidos a la señal esperada.

Esto tendría como consecuencia que el sistema estadístico como tal se comportara como si tuviese distintos grados de libertad para cada punto (σ, M_χ) , o sea, en teoría si el estadístico tuviese una señal que depende linealmente de los parámetros, entonces como se tienen dos parámetros se tiene dos grados de libertad. Pero como la señal no es lineal con los parámetros entonces los grados de libertad serán en general distintos de dos, para cada punto (σ, M_χ) . Esto es matemáticamente posible gracias a que la distribución gamma la cual depende de la función gamma es analítica, ya que la función gamma puede ser continuada analíticamente.

Así que es algo aproximado suponer que se tienen en toda la región de parámetros (σ, M_χ) dos grados de libertad. Para hacer un contorno estadísticamente más correcto sería necesario que para cada punto de la región se obtenga la distribución de probabilidad y ajustarla a la distribución gamma para obtener el grado de libertad

asociado a este punto. Entonces aplicar el método de Feldman-Cousins consistiría en tomar cada punto ($P_{\sigma M_\chi}$) de la región de parámetros (σ, M_χ) y tomar la señal y los eventos de ruido de ese punto, después se samplean de forma poissoniana los experimentos ficticios con la ayuda de la señal en ($P_{\sigma M_\chi}$) y los eventos de ruido esperados. De esta manera se calcula para este punto la chi-cuadrada, la cual tendrá un mínimo cerca de ($P_{\sigma M_\chi}$), si se obtiene el mínimo varias veces para el mismo punto ($P_{\sigma M_\chi}$) se formará la distribución chi-cuadrada en de ese punto y se puede proceder a ajustarla a la distribución gamma para obtener el grado de libertad de ($P_{\sigma M_\chi}$).

Este proceso solo es para un punto de la región de parámetros, para tener el contorno se debe hacer una retícula de la región (σ, M_χ) que sea de interés para el experimento, así el cálculo del contorno se necesitarían del orden de cien millones de iteraciones en un computador, lo cual es un cómputo pesado que puede tardar varios días en completarse. Por estos motivos y por tiempo este análisis no será realizado en este trabajo de tesis y se trabajará con la suposición de que los grados de libertad en toda la región de parámetros es dos.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Capítulo 6

Resultados

6.1. Resultados derivados del cálculo teórico de espalación nuclear por muones

Uno de los primeros resultados que se pueden derivar del cálculo, es la curva de producción de neutrones en un material dado que esta referida en la tesis [21] en donde se usaron simulaciones montecarlo (FLUKA) para obtenerla. Esta curva es obtenida de forma aproximada por el método explicado en el capítulo 3 y está mostrada en la figura 6.1 de esta tesis, en donde se tuvieron que hacer algunos ajustes a posteriori para poder tener una curva aceptablemente comparable con [21].

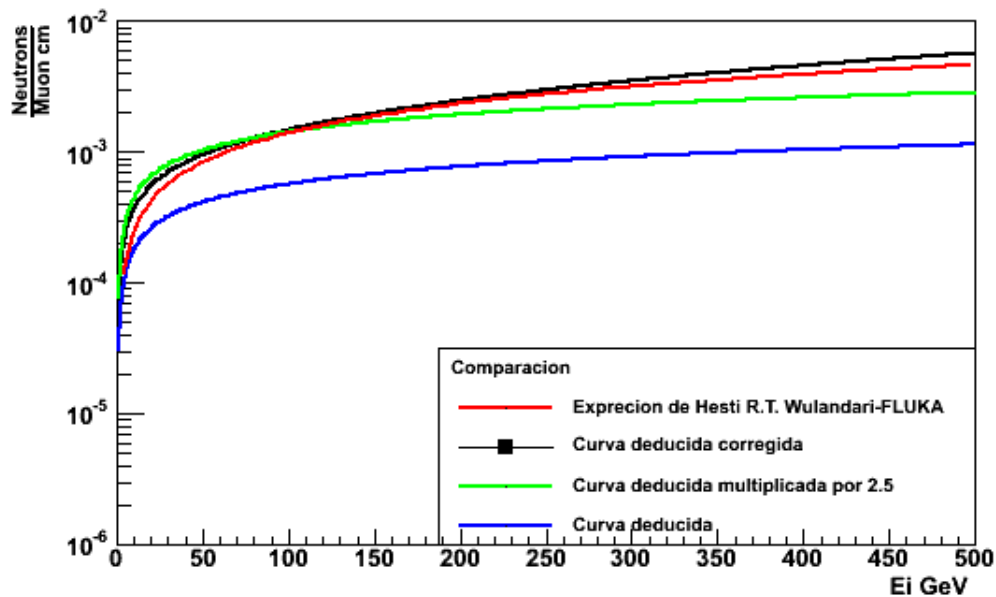


Figura 6.1: Curva de neutrones por volumen, en función de la energía inicial de muon, (negra) multiplicada por la recta $R(E_i)$, (verde) multiplicada por 2.5, (azul) curva deducida directamente del cálculo de espalación y (roja) curva de [28].

Otro resultado importante derivado del cálculo teórico de espalación nuclear, es el de poder reproducir la curva 3.39 en la página 45 por medio del espectro de neutrones inicial y por las fórmulas de Thomas K Gaisser para estimar el espectro de muones a una profundidad dada. Combinando estos elementos fue posible reproducir la gráfica de la figura 6.2

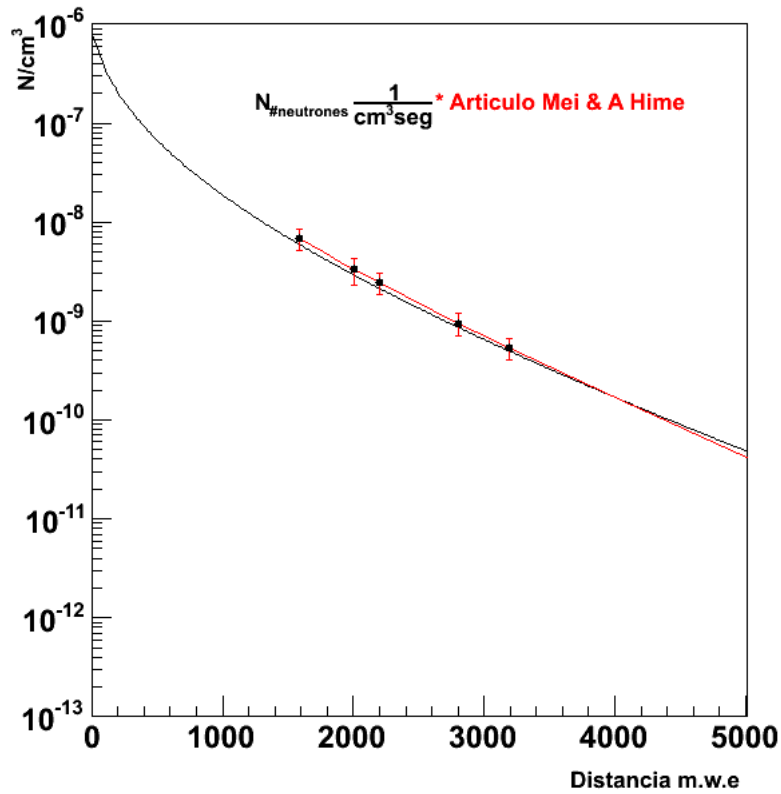


Figura 6.2: Curva que muestra la relación entre la profundidad y la tasa de neutrones por volumen que se calculo de primeros principios (negra), curva de [28] (roja) los puntos son datos de la misma referencia.

También de esta última gráfica se puede estimar el flujo de neutrones que salen de la pared de la caverna, esto se hizo por medio de un modelo sencillo de difusión lineal (ver capítulo 3) en donde se supuso que los neutrones solo rebotan y no son absorbidos. de aquí se dedujo la ecuación

$$J = (21.5 \pm 4.1 \text{ cm})(P_{0roca})\left(\frac{P_{1roca}}{z}\right)e^{-\frac{z}{P_1}} = (3.98 \pm 0.75) \times (10^{-7})\left(\frac{P_{1roca}}{z}\right)e^{-\frac{z}{P_1}} \text{ n/cm}^2\text{s}$$

que es consistente con la ecuación propuesta en [28].

Otro resultado importante fue poder estimar la energía media de los neutrones dispersados en la caverna, esto se estudio con un modelo de esferas concentricas con un grosor de un camino libre medio cada una, el camino libre medio se aproximó usando el moelo de potenciales ópticos y con ello se obtuvo la siguiente tabla de valores que se pueden comparar con las de [29]

Profundidad m.w.e según el espectro que se calculó	Energía <E> MeV	Energía <E> MeV Calculada	Energía media GeV
1530	64	53	1.40
1979	74	62	1.65
2519	84	70	1.87
3197	93	74	2.1
4108	101	79	2.32
5501	107	86	2.55

Cuadro 6.1: Energía media de neutrones de espalación producidos para varias profundidades, donde se comparan los resultados de 3.10 con los calculados según nuestro modelo.

Además con este mismo modelo junto con el espectro inicial de neutrones producidos por espalación se puede obtener una estimación del espectro de neutrones dispersados en la caverna, como se muestra en la figura 6.3

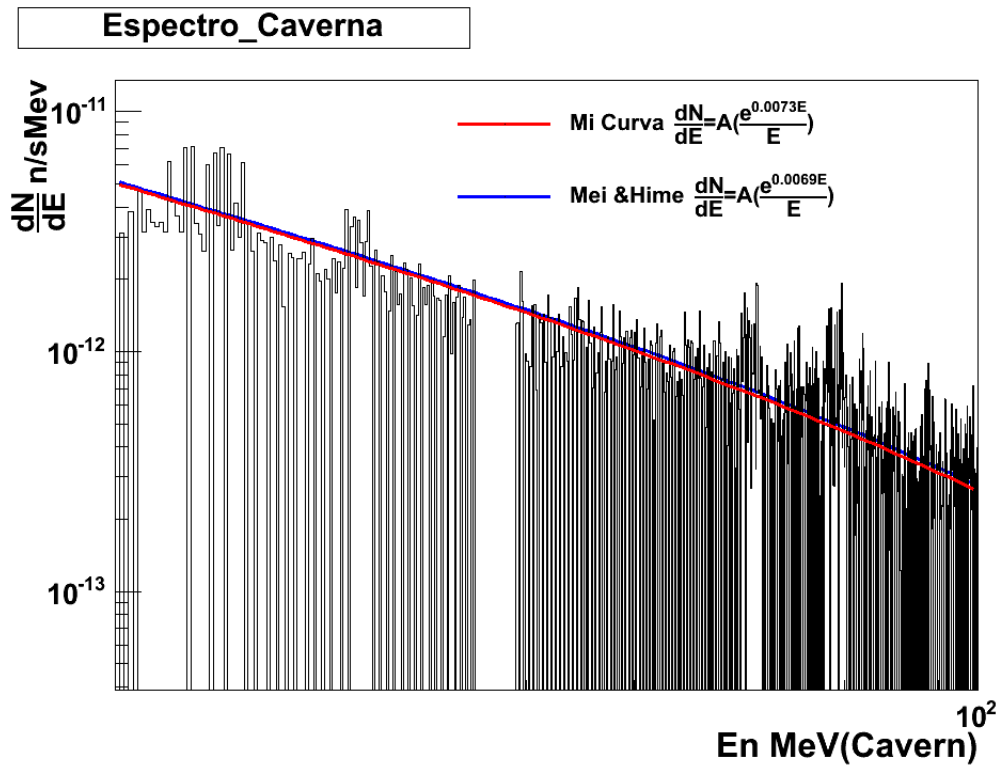


Figura 6.3: Espectro estimado para neutrones dispersados en la caverna.

Otra curva que también se puede estimar fácilmente con el modelo del capítulo 3, es la fracción de neutrones en función de la distancia del punto de creación de neutrones. Esta curva se puede apreciar en la figura 6.4

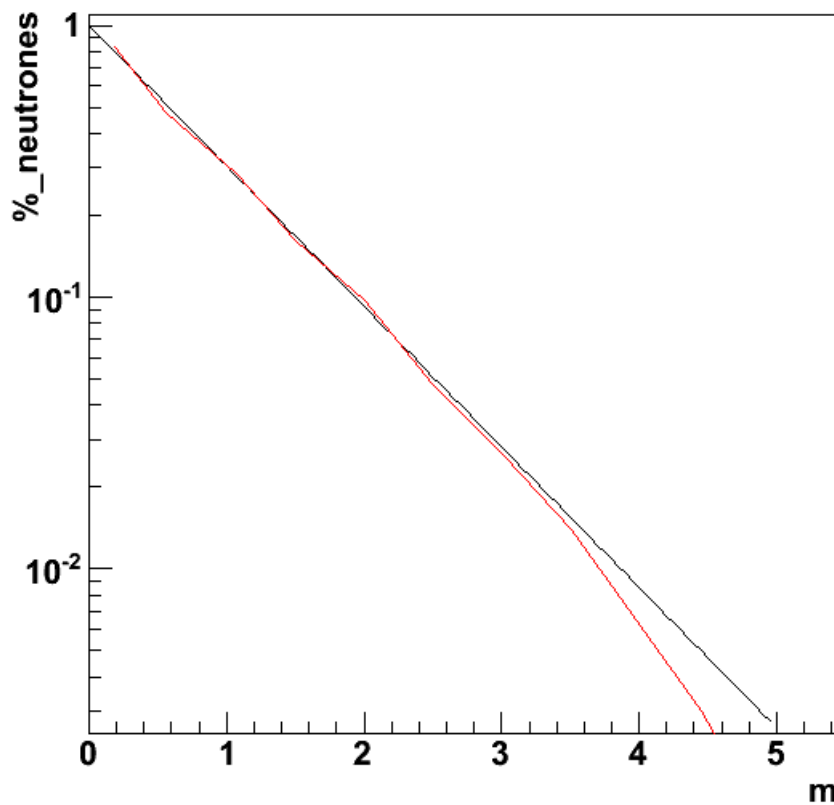


Figura 6.4: Figura que muestra la comparación de la curva de [28](roja) con la curva estimada en esta sección (negra).

En donde por el cálculo realizado se ha estimado la longitud de atenuación $L = 84$ cm, la cual se compara

con la longitud de atenuación de la curva negra[28] $L = 0.76\text{cm}$.

6.2. Estimación de los eventos de ruido de fondo para diversos experimentos

Antes que nada se debe comprobar que es posible estimar los eventos de ruido totales obtenido por un experimento real, ya sea que se comparen con datos reales o por medio de simulaciones. Utilizaremos toda la herramienta que se ha desarrollado para hacer estas estimaciones, y en todos de los casos se despreciaran los ruidos provenientes de radioactividad y los neutrones que provienen de la caverna (ver cuadro 6.2).

El detector CREEST como se vio en los diagramas de la sección 2.4.2 esta escudado por Plomo y Cobre, estos elementos producen una significativa cantidad de neutrones. Para hacer el cálculo del número de eventos se usan las curvas de producción de neutrones por centímetro cúbico y el espectro de retrocesos nucleares que se puede obtener del espectro de neutrones de espalación y con la ayuda del conocimiento de la sección eficaz total, la cual se sabe calcular gracias al modelo de potenciales ópticos. Si se obtiene el total de eventos y se pasa de unidades de mol a kg, además se multiplica por los 6 lados del cubo de Plomo-Cobre y por un factor de 0.46 que son los neutrones que llegan al centro del cubo se tiene una tasa $R = 0.20\text{cpd/kg}$ los cuales se comparan con el valor que obtuvo la simulación de $R = 0.128\text{cpd/kg}$. En donde el exceso indica que existe un factor de quencheo que reduce la eficiencia, además que a estas profundidades podría afectar los eventos de ruido provenientes de la contaminación radioactiva y la radioactividad natural en la caverna y en el detector mismo.

En CDMS Standfort [18] se probó un detector de Germanio a 20 m.w.e, en donde se midieron tasas de eventos de interacción con el detector de 423cpd/kg . Si se usan los mismos análisis que en la subsección anterior se estima una tasa de 1840cpd/kg , que es consistente con el hecho de que hay un “quenching factor” del orden de 0.3 como se puede apreciar en la sección 2.5.1.

Experimento	Ruido de fondo reportado	Ruido de Fondo calculado
CREEST	0.20 cpd/kg	0.128 cpd/kg
CDMS	423 cpd/kg	1840 cpd/kg
EDELWEISS	0.042 cpd/kg	0.04 cpd/kg

Cuadro 6.2: Cuadro comparativo donde se muestra los ruidos de fondo calculados por la simulación de cada experimento y los eventos de ruido de fondo calculado por el método de este trabajo.

Para el experimento EDELWEISS (sección 2.5.2) se usan cálculos análogos que en la sección anterior se obtiene una tasa de ruido esperada de 0.042cpd/kg incluyendo los neutrones producidos por el Plomo y el polietileno. Comparando este resultado con lo que se reporta experimentalmente en [39] que es de 0.04cpd/kg , se observa que existe un déficit de eventos, ya que falta considerar el “quenching factor” que reduciría los eventos. Sin embargo a estas profundidades esto es de hecho esperado, ya que no se esta considerando los eventos de ruido proveniente de la radioactividad natural y la contaminación de elementos radioactivos en el detector, que a profundidades altas ($> 3000\text{m.w.e}$) los eventos de ruido cosmogénico se empieza a comparar en promedio con este ruido. En conclusión el cálculo esta de acuerdo con lo que se esperaba a estas altas profundidades.

Sensibilidad de DAMIC100 en SNOLAB

Para estimar la sensibilidad se utilizo el método de la Chi-cuadrada (método máxima verosimilitud caso gaussiano), como se explica en la sección 5.3.2. Si se toma un espectro plano en el rango de energía de 0.5 a 10 keV, con 25 bins, a un nivel de $1\text{cpd kg}^{-1}\text{keV}^{-1}$ se obtienen las curvas de la figura 6.5(derecha). La sensibilidad al realizar un ajuste espectral es mejor que en el caso de solo considerar un bin para los eventos de ruido, gracias a que ahora se puede obtener información adicional proveniente de las diferencias entre las formas

de los espectros de la señal y los eventos de ruido. En este cálculo se hacen suposiciones consistentes con [33] pero con la diferencia de que se usa un método estadístico diferente.

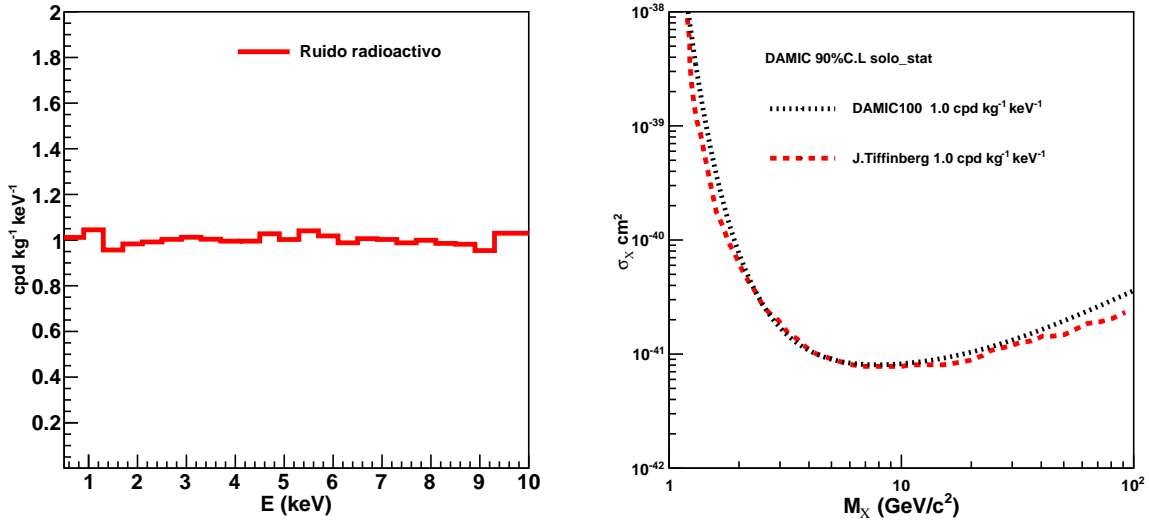


Figura 6.5: Curvas de sensibilidad en el espacio de parámetros (σ_χ, M_χ) a un 90% C.L. para un experimento DAMIC100 con un ruido de $1 \text{ cpd kg}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ y una exposición de 0.365kg-día (ajuste espectral). La curva roja es la calculada por la colaboración DAMIC [33] y la negra por el método de la chi-cuadrada en este tesis.

6.2.1. Sensibilidad para un experimento tipo DAMIC400 a 650m de profundidad

Para DAMIC400 (400 gramos) se supuso una geometría similar a la mostrada en la sección 3.3 (figura 4.15), con una corrida de un año, con una profundidad de 650 m debajo del suelo y con una densidad promedio de roca de 2.65 g/cm^3 . Con las dimensiones del escudo de Plomo y de agua es posible hacer el cálculo completo de los eventos de ruido de fondo debido a neutrones cosmogénicos. En un experimento de conteo, solo es necesario calcular los eventos de ruido totales esperado y la señal total esperada. Añadiendo un ruido debido a contaminación radioactiva de $1 \text{ cpd kg}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ al ruido cosmogénico, para una exposición de 0.4kg-año, se obtiene la curva de sensibilidad considerando sólo errores estadísticos, mostrada figura 6.6 (derecha).

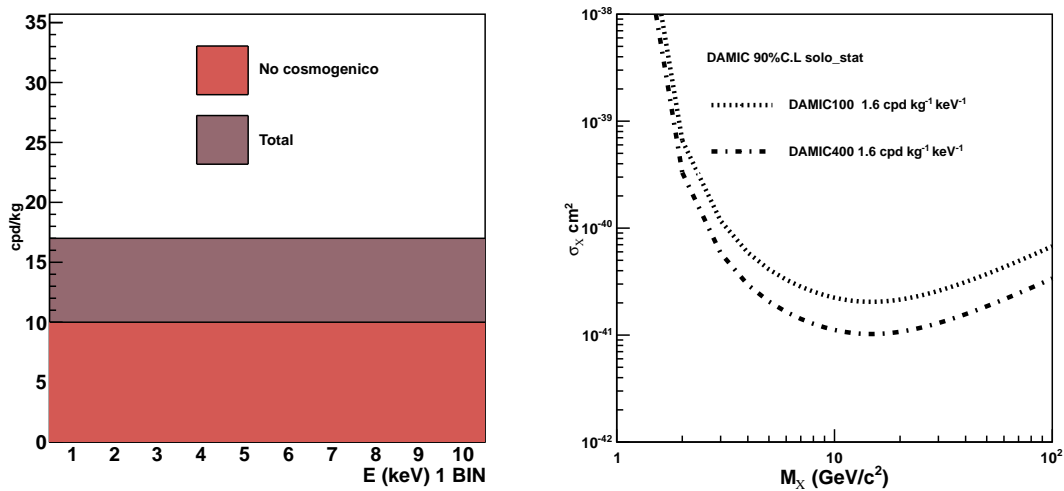


Figura 6.6: (izquierda) Bin único de conteo considerando los eventos de ruido cosmogénico y el total, (derecha) curvas de sensibilidad, considerando solo errores estadísticos, en un espacio de parámetros (σ_χ, M_χ) a un 90% C.L. para un experimento de conteo de DAMIC400 a 650 metros de profundidad, donde se considero una exposición de 0.4 kg-año.

La sensibilidad considerando la forma del espectro de energías de retroceso de los eventos de ruido de fondo y de la señal, se muestra en la figura 6.7(derecha), para el caso de considerar sólo errores estadísticos. El espectro que se obtiene según las características supuestas para DAMIC400 se puede ver en la figura 6.7(izquierda).

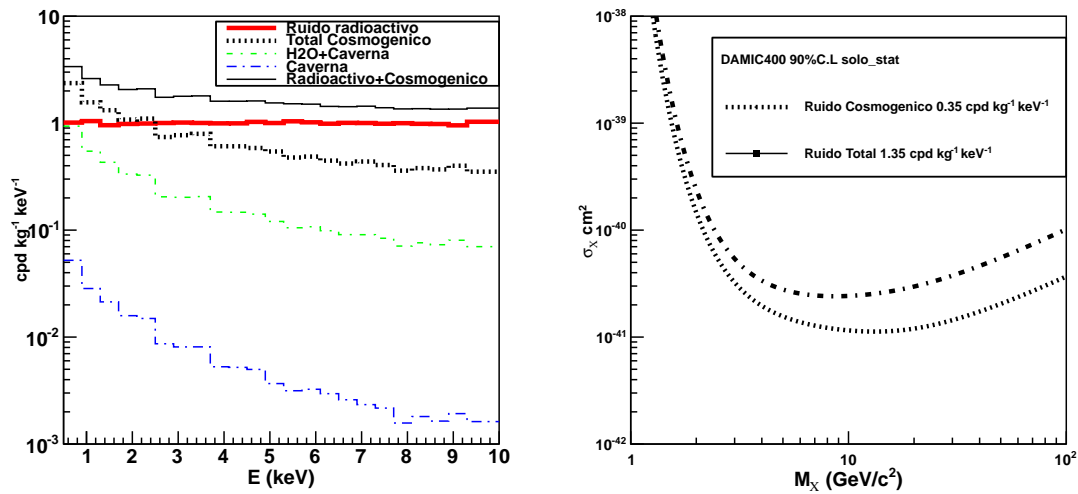


Figura 6.7: (izquierda) Espectro de retrocesos nucleares obtenido para DAMIC400 con 25 bins y (derecha) curvas de sensibilidad a un 90% C.L (solo error estadístico) para ruido cosmogénico y para el ruido total (cosmogénico +radioactivo), con una exposición de 0.4kg-año.

Errores sistemáticos en DAMIC400

El efecto de los errores sistemáticos se implemento como se describe en la sección 5.2.2.4. Se consideraron tres fuentes de error sistemático: a) Energía media que pierde el Muon al atravesar por la roca; b) la multiplicidad de los neutrones que se producen en la espalación; c) La escala de energía asociada a los eventos de retroceso. Se espera de forma cualitativa que al cambiar cualquiera de estos tres parámetros, cambie tanto la forma como la normalización del espectro de energías de retroceso. Esto se puede apreciar en las gráficas de la columna izquierda de la figura 6.8.

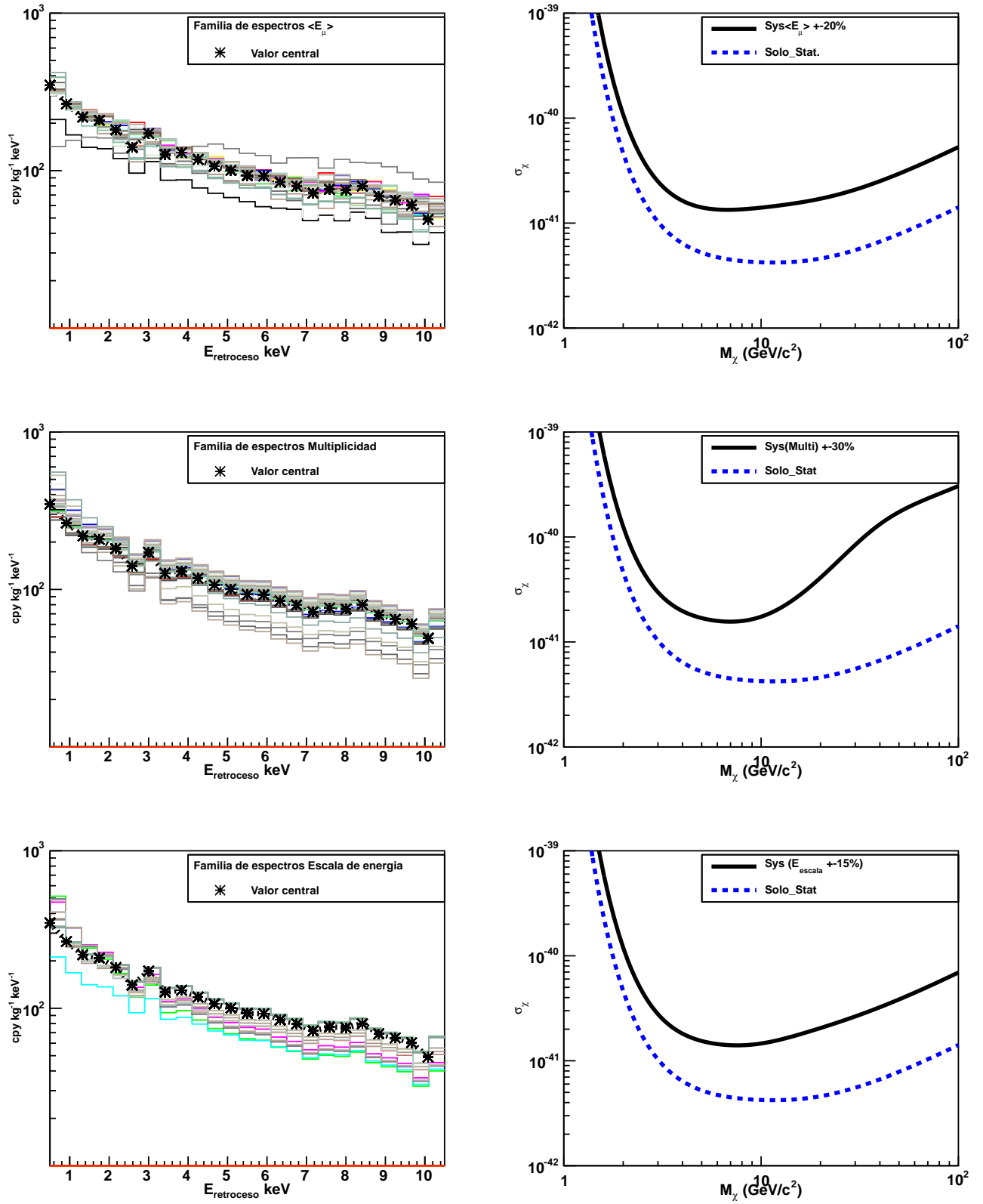


Figura 6.8: Lista de espectros (Izq) que se usaron para estimar los errores sistemáticos de la energía media del muon, la multiplicidad y el escalamiento de energía. Del otro lado se muestra la sensibilidad al 90% C.L obtenida con cada error y se compara con la sensibilidad sin error sistemático.

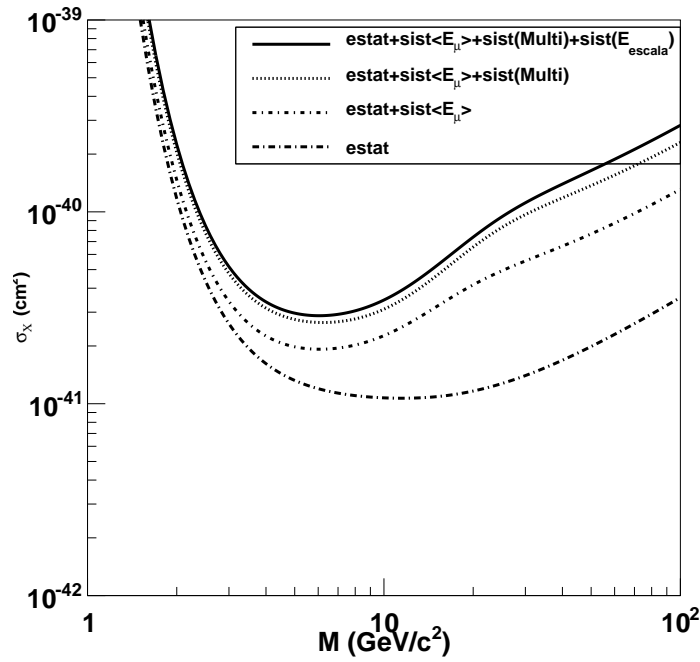


Figura 6.9: Degradación de las sensibilidades al 90% C.L., para los diferentes errores sistemáticos considerados.

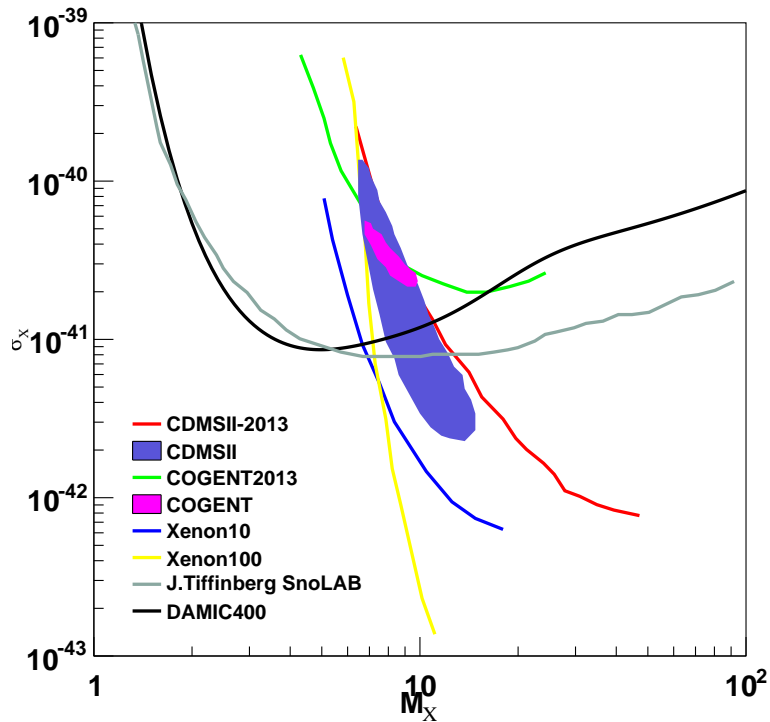


Figura 6.10: Curva de sensibilidad final para DAMIC400(negra) a un 90% C.L., en el recuadro se muestran otros experimentos con contornos al 90% C.L.

Las gráficas de la columna del lado derecho de la figura 6.8 muestran el efecto de cada error sistemático en la sensibilidad. Para cada error sistemático se consideran espectros de 25 bins para los espectros, junto con un total de 400 espectros de sampleo. La figura 6.9, muestra el efecto acumulativo de estas tres fuentes de error sistemático sobre la sensibilidad; la curva negra sólida muestra la estimación final de la sensibilidad. En la

figura 6.10 , se compara la sensibilidad final con los límites y señales positivas producidos por otros experimentos.

6.2.2. Regiones permitidas en caso de una señal positiva

Una señal positiva se puede estimar por medio de la información del espectro de ruido de fondo y de la señal esperada. Lo que debe hacerse es tomar en cuenta las fluctuaciones de los eventos de ruido y de la señal, estas fluctuaciones se pueden estimar gracias a que se conocen los espectros de estas cantidades, estas fluctuaciones en este caso van a seguir una estadística de Poisson aplicada a cada Bin del espectro tanto de señal y ruido. De esta manera se producen datos ficticios (\hat{D}_i) según la señal esperada (S_i) y un ruido (B_i) para una sección eficaz y una masa de la WIMP consideradas, estos datos simulan solo fluctuaciones estadísticas. Esto produciría un contorno en el plano de la sección eficaz y la masa de la WIMP, este contorno se puede construir con el estadístico chi-cuadrada (considerando solo errores estadísticos)

$$\chi^2 = \frac{\sum_i^N (\hat{D}_i - (S_i + B_i))^2}{(S_i + B_i)},$$

y para el caso de considerar también errores sistemáticos

$$\chi^2 = \sum_i^N (\hat{D}_i - (S_i + B_i)) M_{ij}^{-1} (\hat{D}_j - (S_j + B_j)).$$

Para poder obtener contornos de 90% de nivel de confianza esta curva debe cortarse en el plano (z) a una altura de 4.6 con respecto del mínimo que en este caso es distinto de cero a diferencia de la sensibilidad, esto puede verse en la figura 6.11 . Para encontrar el mínimo se armó un programa que ejecuta esta tarea siguiendo un algoritmo propio.

Cortando a una altura de 4.6 en el eje (χ^2) y considerando un detector de 400 g con una exposición de un año se obtiene un contorno de nivel el cual se sobrepone a la sensibilidad calculada por errores estadísticos. Cabe señalar aquí que este método de cortar con un plano supone que el estadístico chi-cuadrado tiene en toda la región sólo dos grados de libertad, pero en general esto no debe ser cierto y los grados de libertad pueden depender del punto en cuestión, para tomar en cuenta este efecto se debe usar el método de Feldman-Cousins descrito en la sección 5.2.2.6, en donde en este caso en vez de cortar con un plano deberíamos cortar con una superficie más compleja si se usará este procedimiento.

Finalmente se hará este mismo análisis que incluya el error sistemático para una masa de 400 g de Silicio y para varias señales (sección eficaz y masa) que corresponden a DAMIC400. Estos contornos se muestran en la figura 6.11.

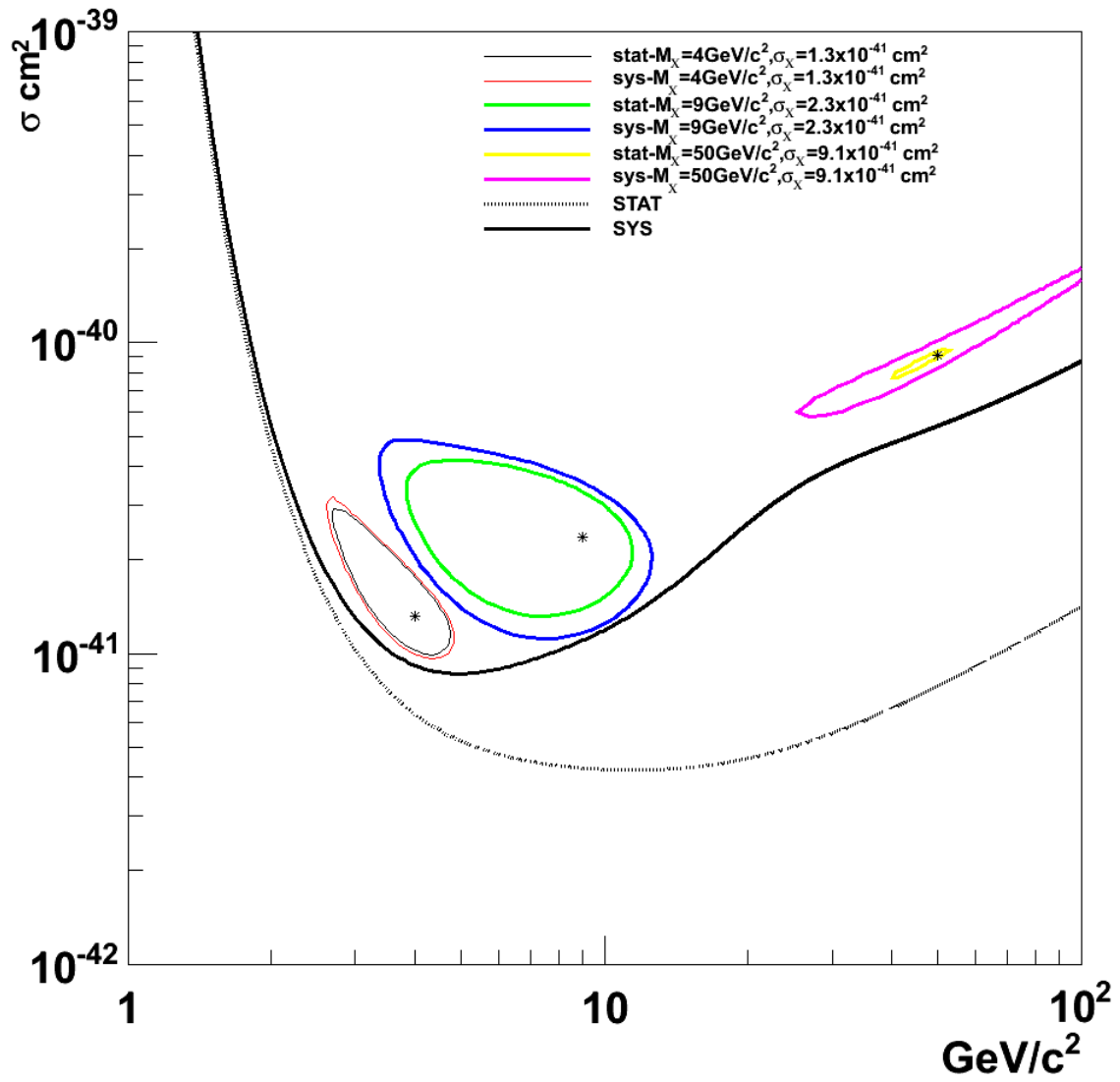


Figura 6.11: Contornos de señales positivas, considerando errores estadísticos y sistemáticos.

Capítulo 7

Conclusiones

Determinar la naturaleza de la materia oscura es uno de los problemas centrales de la Física actual. Un buen número de experimentos en la actualidad buscan detectar directamente la materia oscura (WIMP), colocando detectores de alta sensibilidad en laboratorios a grandes profundidades bajo tierra. Los detectores empleados para este propósito emplean tecnologías diversas (ionización, centelleo, cámara de burbujas, bolómetros). Algunos de ellos (COGent, CDMS) han encontrado señales positivas, mismas que han sido excluidas por otros experimentos (LUX, Xenon100), por ende hasta el momento la situación experimental sobre la búsqueda directa de materia oscura es confusa.

El experimento DAMIC (Dark Matter In CCD), instalado en SNOLAB utiliza sensores CCD similares a los utilizados en las cámaras digitales, con la variante de ser mucho más gruesos ($\sim 500\mu\text{m}$). En este trabajo se calculó la sensibilidad de un detector de Silicio tipo DAMIC con 400 g de masa fiducial, en un laboratorio hipotético a 650 m de profundidad. El detector considerado en principio puede alcanzar la sensibilidad suficiente para acceder a la señal del experimento COGENT reportada en el 2013, gracias a que el umbral de energía de detección de retrocesos nucleares es muy bajo (~ 40 eVee). Además este tipo de detector puede discriminar los eventos ruidos producidos por electrones, rayos gammas y neutrones. Sin embargo no puede distinguir las interacciones de WIMP de las de neutrones (eventos de difusión limitada con la CCD), ya que en ambos casos se producen retrocesos nucleares de baja energía que son indistinguibles de la señal esperada para la WIMP.

En esta tesis se hace la suposición de que la materia oscura esta compuesta de partículas masivas débilmente interactuantes (WIMP) las cuales interaccionan con la materia ordinaria a través de una fuerza fundamental que aun es desconocida pero es similar a la fuerza débil del modelo estándar. Se asumió también el modelo del halo galáctico, el cual supone que las WIMP rodean la galaxia en forma de un halo esférico con una distribución de velocidades Maxwelliana que depende de la distancia al centro galáctico. De esta forma se calculó el flujo de WIMP incidente en la tierra y el espectro de energías de retrocesos de los núcleos blanco en un detector dado (Silicio), el cual es función de la masa y la sección eficaz de interacción de la WIMP así como de los parámetros fijos galácticos.

Una parte esencial para el cálculo de la sensibilidad de un experimento de búsqueda directa de materia oscura, es la estimación del número de eventos de ruido esperados en el detector ya que en principio la señal esperada son pequeñas, y puede confundirse fácilmente con el ruido. Las principales fuentes de eventos de ruido para un experimento a una profundidad menor a 1000 m, son los neutrones producidos por el proceso de espalación nuclear de los muones cosmogénicos con los núcleos de materiales pesados que rodean al detector, así como los eventos debidos a la radioactividad intrínseca de los componentes del detector (separando los eventos de ruido en dos partes: cosmogénico y radioactivo).

En este trabajo se hizo un esfuerzo por estimar de primeros principios y con ayuda de simulaciones de

otros experimentos de detección de materia oscura, el número de eventos de ruido cosmogénico producidos principalmente en el escudo de Plomo y el Cobre que compone el detector. Como parte de este proceso usaron las reglas de Feynman para el proceso de espalación nuclear que es un proceso electromagnético, haciendo la aproximación de fotón real en lugar de fotón virtual (aproximación de Weizsäcker-Williams, ver Capítulo 3). Con esto y partiendo del flujo incidente de muones fue posible construir un espectro de neutrones en función de la profundidad el cual se pudo manipular para obtener el espectro de energía de los neutrones expulsados en el proceso de espalación. Este modelo teórico proveyó de un mecanismo para estimar el efecto de errores sistemáticos en la sensibilidad.

Para estimar la sensibilidad del experimento se usó como estadístico una función Chi-cuadrada (método de máxima verosimilitud gaussiano), del cual se obtuvieron los contornos al 90% C.L considerando errores estadísticos y tres fuentes de errores sistemáticos: a) Energía media que pierde el Muon al atravesar por la roca; b) la multiplicidad de los neutrones que se producen en la espalación; c). También se hicieron estudios de posibles señales positivas según los eventos de ruido y la señal esperada.

A continuación se destacan los principales resultados de esta tesis.

Se obtuvo un modelo teórico que describe el proceso de espalación de un núcleo por medio de un muon altamente relativista, usando la aproximación de Weizsäcker-Williams para implementar las reglas de Feynman y calcular el tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ (3.1.1). También se desarrolló un modelo simple de difusión lineal que permite estimar como se difunden los neutrones producidos por la espalación.

Como parte del desarrollo teórico desarrollado anteriormente, se logró calcular con base a principios el número de neutrones por unidad de volumen de material blanco producidos por la espalación de muones relativistas como función de la profundidad, y el número de neutrones por unidad de área que emergen de las paredes de una caverna a diferentes profundidades, obteniendo en ambos casos una excelente concordancia con cálculos basados en simulaciones montecarlo, ver Sección 4.3.

Se obtuvieron las curvas de sensibilidad para la detección directa de materia oscura de detectores basados en sensores CCD (tipo DAMIC) incluyendo el efecto de errores estadísticos y sistemáticos. El cálculo se verificó obteniendo curvas de sensibilidad consistentes reportadas por DAMIC100 en SNOLAB, bajo las mismas suposiciones aunque empleando métodos estadísticos distintos. Para el detector DAMIC de 400 g a 650 metros de profundidad, se obtuvieron las curvas de sensibilidad utilizando un estadístico chi-cuadrada, incluyendo los eventos de ruido cosmogénico a esta profundidad y los eventos de ruido radioactivo el cual se estimó en $1 \text{ cpd kg}^{-1} \text{ keV}^{-1}$ de acuerdo a estimaciones recientes de la colaboración DAMIC en SNOLAB.

Durante una estancia de trabajo en Fermilab tuve la oportunidad de trabajar con el sistema de lectura de las CCD, como parte del trabajo que hice consistió en hacer mediciones de los eventos de ruido intrínseco de la CCD (4.1.2), en específico se midió como varía el ruido de la CCD como función de la ventana de integración de lectura, se observó que el ruido se minimiza con un valor de la ventana de integración de $(400 \times 50) \text{ ns}$ a 133 K. También hice estudios experimentales de como varía la difusión de carga en la CCD y la región de depleción como función del voltaje del sustrato, en donde obtuve datos cualitativos que indicaban que la región de depleción de la CCD aumentaba en función de la raíz cuadrada del voltaje del sustrato y en cuanto a la difusión de la carga también se observó que al aumentar el voltaje del sustrato hubo una pequeña mejora. También se observó un límite experimental para el voltaje del sustrato que fue alrededor de 100 V. De todo ello se concluye que para mejorar la región de depleción de la CCD era totalmente necesario contar con una CCD de Silicio más puro, ya que al llegar al límite de operación de voltaje de la CCD la difusión es bastante considerable.

Una de las principales limitaciones de este trabajo, consiste en solo considerar algunas partes del detector

para la producción de los eventos de ruido cosmogénico y no incluir detalles de la producción de neutrones debidas a estructuras menores, que en principio por su cercanía con las CCD podrían producir más ruido. Para ello se necesitaría una simulación montecarlo con GEANT4 o FLUKA que considere todo el detalle del detector y los eventos de ruido que se produce, pero este trabajo escapa del alcance de esta tesis. Además los cálculos realizados dependen de un número de aproximaciones, por lo que los números de eventos calculados deben considerarse como una aproximación a orden de magnitud de los eventos esperados en un detector real. Otra limitación a nivel estadístico fue calcular la sensibilidad usando el estadístico chi-cuadrada, ya que en principio según el caso es necesario emplear el método de Feldman-Cousins (5.2.2), este método corregiría detalles en la forma de la sensibilidad. Finalmente otra limitación fue el desconocimiento del Factor de Quencheo (“Quenching Factor”) del detector, el cual es muy sensible a bajas energías y hasta el momento la colaboración sigue haciendo esfuerzos experimentales por medir este factor.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Apéndice A

Resolución general de la ecuación de difusión en tres dimensiones.

Empezamos por definir la ecuación de difusión en tres dimensiones, con fuente.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n + Q(x, y, z)$$

Definiendo el operador ; $L = \frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2$, el cual no es auto-adjunto en el tiempo ya que no satisface la integral de Green. Por lo tanto es necesario definir otro operador complementario; $L^\dagger = -\frac{\partial}{\partial t} - D\nabla^2$. Así estos operadores verifican la integral de Green de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \iiint (uL^\dagger(v) - vL(u))d^3xdt &= -\iiint (uv)d^3x + D\iiint (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)d^3xdt \\ \iiint (uL^\dagger(v) - vL(u))d^3xdt &= -\iiint (uv)d^3x + D\iiint (v\nabla u - u\nabla v) \cdot \hat{n}dSdt \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula final en representación $n(x,y,z,t)=n(X,t)$, en términos de la función de Green $G(X,t;X_0,t_0)$, se debe considerar la propiedad de traslación de la función de Green, $G(X,t_1;X_1,t)=G(X,-t;X_1,-t_1)$. Y el principio de causalidad $G(X,t_1;X_1,t)=0$, si $t > t_1$, con esto se tiene que la función de Green también satisface tanto al operador autoadjunto como el operador complementario autoadjunto.

$$L(G(X, t_1; X_1, t)) = \delta(X - X_1)\delta(t - t_1) = L^\dagger(G(X, t_1; X_1, t))$$

Se deduce entonces que la función de Green del operador de difusión es igual a la función de Green complementaria, $G(X,t_1;X_1,t)=G^\dagger(X,t;X_1,t_1)$, en donde ambas satisfacen el principio de causalidad. También es fácil demostrar por medio de la fórmula de Green que se cumple el principio de reciprocidad $G(X,t_1;X_1,t)=G(X_1,t_1;X,t)$.

Con esto en mente es posible obtener la relación entre la solución $n(X,t)$ y la función de Green $G(X,t_1;X_1,t)$, usando la fórmula de Green antes mencionada y desarrollada y sustituyendo $u=n(X,t)$ y $v=G(X,t_1;X_1,t)$, se tiene.

$$\begin{aligned} \iiint (uL^\dagger(v) - vL(u))d^3xdt &= -\iiint (uv)d^3x + D\iiint (v\nabla u - u\nabla v) \cdot \hat{n}dSdt \\ \iiint (nL^\dagger(G) - GL(n))d^3xdt &= -\iiint (nG)d^3x + D\iiint (G\nabla n - n\nabla G) \cdot \hat{n}dSdt \end{aligned}$$

Despejando n , recordando el principio de causalidad de la función de Green se tiene.

$$n(X_0,t_0) = \iiint G(X,t_0;X_0,t)Q(X,t)d^3xdt + \iiint n(X_0,0)G(X,t_1;X_1,0)d^3x + D\iint [G(X,t_0;X_0,t)\nabla n - n\nabla G(X,t_0;X_0,t)] \cdot \hat{n}dSdt$$

Finalmente aplicando el principio de reciprocidad y la propiedad de traslación, cambiando X por X_0 y t por t_0 , se obtiene la fórmula.

$$n(X,t) = \iiint G(X,t;X_0,t_0)Q(X_0,t_0)d^3x_0dt_0 + \iiint n(X_0,0)G(X,t;X_1,0)d^3x_0 + D\iint [G(X,t;X_0,t_0)\nabla_{x_0}n(X_0,t_0) - n(X_0,t_0)\nabla_{x_0}G(X,t;X_0,t_0)] \cdot \hat{n}dS_0dt_0$$

Como se observa el primer término de la ecuación considera el efecto de la fuente, el segundo miembro considera el efecto de la condición inicial del problema y el último término considera las condiciones de frontera

ya sean del tipo Dirichlet, Neumann o Robin. El siguiente paso lógico es obtener la función de Green de la forma más general posible, para esto se empezará por obtener la función de Green en una región sin fronteras (infinita), de ahí por el método de las imágenes se obtendrán los casos seminfinitos y acotados. La ventaja de este procedimiento en comparación de separación de variables es que puede resolver la ecuación de difusión con coeficiente no constantes, que al contrario de separación de variables generalmente no se puede hacer de forma sencilla, además es posible manipular mejor la solución y tener una idea más intuitiva del comportamiento de la ecuación. Como la función de Green complementaria es igual a la función de Green original da igual resolver uno u otra, tomando el operador autoadjunto y la función de Green originales se tiene:

$$L(G(X, t_1; X_0, t)) = \delta(X - X_0)\delta(t - t_0) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial t} = D\nabla^2 G + \delta(X - X_1)\delta(t - t_1)$$

$$G(X, t_1; X_0, t) = 0 \text{ si } t < t_0$$

Como se va a tratar el problema en tres dimensiones, se definirá la transformada de Fourier en tres dimensiones para el caso infinito que se está estudiando.

$$\overline{G(X, t_1; X_0, t)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint G(X, t_1; X_0, t) e^{i\omega \cdot x} d^3x \omega$$

$$G(X, t_1; X_0, t) = \iiint \overline{G(X, t_1; X_0, t)} e^{-i\omega \cdot x} d^3\omega$$

Usando las identidades para las derivadas de la transformada de Fourier y la transformada de Fourier de la delta de Dirac se obtiene la ecuación diferencial ordinaria para la función de Green.

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = -D\omega^2 \overline{G} + e^{i\omega \cdot x_0} \frac{\delta(t-t_0)}{(2\pi)^3}, \quad \omega^2 = \omega \cdot \omega, \quad \overline{G(X, t_1; X_0, t)} = 0 \text{ si } t < t_0.$$

Para $t > t_0$, la ecuación se resuelve fácilmente ya que desaparece el término de la delta de Dirac.

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} = -D\omega^2 \overline{G}$$

cuya solución general es

$$\overline{G(X, t_1; X_0, t)} = C(\omega) e^{-D\omega^2(t-t_0)}$$

El coeficiente $C(\omega)$, se calcula a partir de dato inicial $t=t_0$, y como la delta de Dirac actúa en ese tiempo, se puede calcular el coeficiente $C(\omega)$ gracias a la discontinuidad de la función de Green en $t=t_0$.

$$\overline{G(t_0^+) - G(t_0^-)} = \frac{e^{i\omega \cdot x_0}}{(2\pi)^3} \Rightarrow \overline{G(X, t_1; X_0, t)} = \frac{e^{i\omega \cdot x_0}}{(2\pi)^3} e^{-D\omega^2(t-t_0)}$$

La transformada inversa de Fourier nos da la representación de la función de Green en función de su transformada.

$$G(X, t_1; X_0, t) = \iiint \frac{e^{i\omega \cdot x_0}}{(2\pi)^3} e^{-D\omega^2(t-t_0)} e^{-i\omega \cdot x} d^3\omega = \iiint \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-D\omega^2(t-t_0)} e^{-i\omega \cdot (x-x_0)} d^3\omega$$

Ahora usando la propiedad de traslación de la transformada de Fourier ($f(x-x_0) \rightarrow e^{i\omega \cdot x_0} F(\omega)$) y recordando que la integral de una gaussiana es

($\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$), se tiene finalmente.

$$G(X, t_1; X_0, t) = \frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} = \frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4D(t-t_0)}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}}$$

Para el caso seminfinito en donde existe una condición de frontera y en el otro extremo no, se usa el método de las imágenes. Por ejemplo si la condición de frontera en (x) es $n(0, y, z, t) = 0$ y $n(x \rightarrow \infty, y, z, t) = 0$ de igual manera la función de Green debe satisfacer estas condiciones, se asume que la función de Green tiene un reflejo en $-x_0$, de tal forma si se define la nueva función de Green como la resta de estas dos funciones de Green, se satisface la condición de frontera requerida.

$$G(X, t_1; X_0, t) = (G(X, t_1; X_0, t) - G(X, t_1; -X_0, t)) = \left(\frac{1}{(4\pi D(t-t_0))^{3/2}} \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4D(t-t_0)}} \right) e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4D(t-t_0)}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4D(t-t_0)}} \right)$$

$$G(0, t_1; X_0, t) = 0$$

Apéndice B

Cálculo del camino libre medio y del coeficiente de difusión

Para calcular el camino libre medio de una partícula se necesita estimar el tiempo medio entre colisiones de esta partícula con otras y la velocidad media. Si la partícula se mueve en una dirección y se consideran en un cilindro de radio $(2D)$, donde (D) es el radio de interacción de la partícula (ver figura 8). Ahora se calcula el volumen barrido por la molécula hasta que colisiona, este volumen es $\pi D^2 \lambda = \frac{1}{n}$.

Si se define la sección eficaz de dispersión $\sigma = \pi D^2$, se tiene $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$. Sin embargo esta relación le falta considerar la distribución de velocidades de la partícula después de la colisión. Si se asume un vector velocidad el cual sea la diferencia de velocidades entre las dos partículas que chocaron (ver figura 9), $V = v_1 - v_2$.

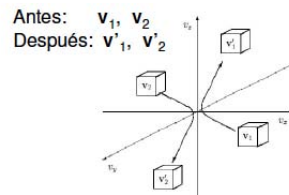


Figura B.2: Colisiones partículas

Entonces $V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 \cdot v_2$, si se asume que las direcciones de colisión y dispersión son equiprobables se tiene $v_1 \cdot v_2 = 0$, de esta manera si $v_1 = v_2$, en promedio se tiene que $V = \sqrt{2}v$. Esto implica que el camino libre medio ahora es: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$ (En caso de que las partículas no choquen entre si el factor de $\sqrt{2}$ se elimina).

Cada molécula de un medio se desplaza siguiendo una trayectoria aleatoria, pues se mueve más o menos en línea recta hasta que choca con otra molécula y se desvía en otra dirección que no guarda ninguna relación con la que seguía antes de la colisión. Por lo tanto, podemos imaginar el movimiento de una molécula como una sucesión de trayectorias libres de longitudes l_i ($i = 1, 2, K$) con direcciones distribuidas al azar. Las trayectorias libres no son todas de la misma longitud, pero trayectorias libres muy largas son poco probables. La distribución de estas trayectorias libres obedece la ley.

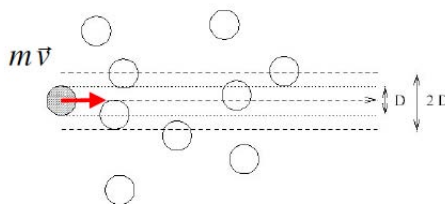


Figura B.1: Recorrido libre medio de una partícula.

$$P(l)dl = e^{-l/\lambda} \frac{dl}{\lambda}$$

Donde $P(l)dl$ es la probabilidad que l esté comprendido entre l y $l + dl$, esto es, la probabilidad de que la molécula recorra la distancia l sin chocar y luego sufra un choque en el tramo de l a $l + dl$. La probabilidad que la molécula recorra la distancia l sin sufrir ningún choque es.

$$1 - \int_0^l e^{-l/\lambda} dl = e^{-l/\lambda}$$

Luego la ecuación $P(l) = \frac{e^{-l/\lambda}}{\lambda} dl$ es autoconsistente y satisface las condiciones que surgen de la aleatoriedad de las colisiones. Además está correctamente normalizada, pues la probabilidad que la trayectoria libre esté entre 0 e ∞ vale 1, como debe ser. Por último la trayectoria libre promedio es $\int_0^{\infty} lP(l)dl = \lambda$.

De acuerdo a la teoría cinética de gases y la ley de Fick en un gradiente de presión en un gas existe un flujo de partículas, en donde en un espacio 3D solo un sexto de los átomos atraviesan el gradiente en la dirección x . Así el flujo en el eje x es $(n_2 - n_1)v/6$, donde n_2, n_1 son las densidades que forman el gradiente en el gas y v es la velocidad más probable de estos átomos. Como las partículas chocan en promedio cada camino libre medio λ de distancia entonces a escala infinitesimal el flujo queda $J = -(2\lambda v/6) \frac{\partial n}{\partial x}$, que implica $D = \lambda v/3$.

Apéndice C

Choques elásticos e inelásticos entre neutrón-núcleo.

C.0.3. Choque elásticos

Para considerar un choque inelástico entre un neutrón y un núcleo, se empleará un modelo clásico de colisiones entre partículas por el hecho de que este modelo se usa generalmente para estudiar estas colisiones entre neutrones-nucleos. Consideramós el sistema en el centro de masa, de aquí por conservación de momento se tiene.

$$\frac{mMv}{M+m} = MV_C$$

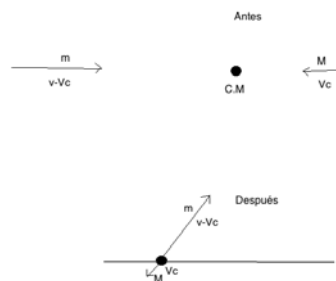


Figure C.1: Choque elástico en el sistema centro de masa

La velocidad total esta relacionada por medio de los vectores $(v-V_C)$ y (V_C) .

$$v_f^2 = (v - V_C)^2 + (V_C)^2 + 2 * (v - V_C)(V_C)\cos(\phi) = v^2\left[\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 + 2 * \left(\frac{mM}{(m+M)^2}\right)\cos(\phi)\right]$$

Se puede ver de la ecuación anterior que la energía máxima perdida se debe a un choque frontal $\phi = \pi$, de donde se tiene la siguiente relación entre la energía inicial del neutrón y la fin

$$E_f = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E_i = r E_i$$

Aproximaremos $r = (\frac{A-1}{A+1})^2$. Ahora nos interesa saber cual es la energía promedio final de un neutrón, para esto como se asume que la distribución de todos los ángulos de dispersión son equiprobables, entonces la densidad de probabilidad de que un neutrón tenga una energía final después de la colisión entre E y $E+dE$ es:

$$PdE = \frac{dE}{E_0(1-r)}$$

Donde $E_0(1-r)$, es el rango total de energía que puede tener el neutrón. Definiendo $\varepsilon = \frac{\overline{\ln(E_0)} - \overline{\ln(E)}}{\overline{\ln(\frac{E_0}{E})}}$ se tiene.

$$\varepsilon = \int_{rE_0}^{E_0} \overline{\ln(\frac{E_0}{E})} \frac{dE}{E_0(1-r)} = 1 + \frac{r}{1-r} \overline{\ln(r)}$$

Esta fórmula nos dice cual es la energía final promedio de un neutrón que colisiona elásticamente con un núcleo de masa atómica A . En nuestro caso según la referencia [20], el número atómico de la roca promedio es $\langle A \rangle = 23.21$. Con este dato se obtiene que la energía final promedio de un neutrón que colisiona elásticamente con un núcleo de esa masa, además considerando que la probabilidad de que un neutrón se disperse a un ángulo de π es muy alta se tiene: $\overline{E}_f = 0.92\overline{E}_0 = k_{elastic}\overline{E}_0$, $k_{elastic} = 0.92$.

C.0.4. Choques inelásticos

Para estimar el choque inelástico nos remitiremos a un estudio clásico para demostrar la forma general de la relación entre la energía final y la energía inicial del neutrón. Para este análisis nos remitiremos a lo que dice la referencia [31], donde se define un coeficiente de restitución como sigue.

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

Donde v_1 es la velocidad inicial del neutrón y v_2 es la velocidad inicial del núcleo en el sistema de laboratorio, v_1' y v_2' son las velocidades finales respectivamente. Tomando la conservación del momento $mv_1 + Mv_2 = mv_1' + Mv_2'$, y la ecuación anterior despejando se llega a la siguiente relación.

$$v_1' = v_1 \left(\frac{m - eM}{m + M} \right) + v_2 \left(\frac{M(e + 1)}{m + M} \right)$$

$$v_2' = v_2 \left(\frac{M - em}{m + M} \right) + \left(\frac{mv_1(e + 1)}{m + M} \right)$$

Ahora la velocidad del núcleo es totalmente térmica, y es cuatro ordenes de magnitud más baja que la velocidad media considerada en la Sección 2, por lo que es una buena aproximación considerarla cero en nuestros cálculos, también la masa del núcleo se considerara mucho mayor que la del neutrón, con esto en mente se considera la siguiente simplificación.

$$v_1' \cong -ev_1$$

$$v_2' \cong \frac{mv_1(e + 1)}{M}$$

\Rightarrow

$$E_f = e^2 E_i = k_{inelastic} E_i \tag{C.1}$$

Así finalmente se tiene demostrado que para un choque inelástico la energía final de un neutrón es proporcional a la energía inicial de este por un constante de inelasticidad. Con estos resultados se puede formular la ecuación general que relacione la energía final de un neutrón que interactúa con un núcleo para (m) choques;

$$E_f = (k_{elastic} - k_{inelastic})^m E_i \quad (C.2)$$

Sin embargo $k_{inelastic}$ solo puede ser calculado por medio de un análisis cuántico ya que la interacción neutrón-núcleo no es clásica en absoluto.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Apéndice D

Deducción del estadístico para el Maximum Gap C_0

Para la deducción será necesario calcular la probabilidad de que el “max gap” sea menor que x para n eventos y así obtener C_0 promediando sobre estos eventos con una distribución de Poisson. Definase una variable de distribución z , y una integral de μ eventos esperados, así se puede definir la probabilidad de que el “max gap” sea menor que x , como $P(x; n, \mu)$. Es obvio que esta probabilidad no depende de la forma del espectro de señal y ruido y como se dijo en la sección 4.3.2.3 tampoco depende de un mapeo continuo de $z \rightarrow w(z)$. Con el cambio de variable $w(z) = z/\mu$, la variable nueva ahora esta distribuida en el rango $[0,1]$ como se explico en la sección 4.2.2.3. Como la probabilidad no depende de este mapeo entonces se tiene $P(x/\mu; n, 1) = P(x; n, \mu)$. Se denotara ahora que $P(x/\mu; n, 1) \equiv P(x; n)$. //

Para calcular la probabilidad de que el máximo intervalo vacío tenga un “gap” menor que x , se usará la información de $P(x; n)$ para conocer $P(x; n + 1)$. Si se toma $P(x; n + 1)$ como la integral entre $t < x$ de la probabilidad de que el evento más pequeño este entre t y $t + dt$ y en el rango restante $1 - t$ los n eventos faltantes no tengan un “gap” mayor que x . Así la probabilidad de que el evento menor esté entre t y $t + dt$ es; el número de opciones particulares que hay para escoger el “gap” ($n + 1$ veces), por el diferencial dt , la probabilidad de que el los restantes n eventos sean mayores a t ($(1 - t)^n$) y la probabilidad de que no halla un “gap” mayor que x para los otros n eventos: $P(x; n, 1 - t) = P(x/(1 - t); n)$ entonces para el intervalo $0 < x < 1$ la relación de recursión queda

$$P(x; n + 1) = (n + 1) \int_0^x dt (1 - t)^n P(x/(1 - t); n). \quad (D.1)$$

Es fácil convencerse por medio del método de inducción matemática que $P(x; n) = n!x^n$. Ahora es conveniente partir el intervalo en m segmentos y definiremos $P_m(x; n) = P(x; n)$ si x está en el intervalo $1/(m+1) < x < 1/m$ y se dirá que x está en el m rango. Si x se encuentra en el rango m y como $0 < t < x$ entonces $x/(1 - t)$ puede estar en el rango m y el rango $m - 1$, en donde la frontera en común de estos dos rangos es $1/m = x/(1 - t)$ que implica $t = 1 - mx$ entonces esto indica que el rango esta dividido de $[0, 1 - mx]$ para P_m y en $[1 - mx, x]$ para P_{m-1} , rescribiendo (D.1)

$$\frac{P_m(x; n + 1)}{n + 1} = \int_0^{1 - mx} dt (1 - t)^n P_m(x/(1 - t); n) + \int_{1 - mx}^x dt (1 - t)^n P_{m-1}(x/(1 - t); n). \quad (D.2)$$

De la solución a la ecuación (D.1) y del hecho de haber dividido el intervalo en m partes, se puede proponer una solución de la ecuación (D.2) de la siguiente forma

$$P_m(x; n) = \sum_{k=0}^m a_k^n (1 - kx)^n. \quad (\text{D.3})$$

Insertando esta solución en (D.2) queda

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k^{n+1} (1 - kx)^{n+1} &= \sum_{k=0}^m a_k^n [(1 - kx)^{n+1} - ((m - k)x)^{n+1}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^m a_{k-1}^n [(1 - (k - 1)x)^{n+1} - ((m - k + 1)x)^{n+1}] \end{aligned}$$

separando términos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k^{n+1} (1 - kx)^{n+1} + a_0^{n+1} &= a_0^n + \sum_{k=1}^m a_k^n [(1 - kx)^{n+1}] - a_0^n (mx)^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m a_{k-1}^n [(1 - (k - 1)x)^{n+1}] - \sum_{k=1}^m (a_k^n ((m - k)x)^{n+1} - a_{k-1}^n ((m - (k - 1))x)^{n+1}) \end{aligned}$$

Como para $P_0(x; n) = 1$ entonces $a_0^{n+1} = a_0^n$ y observando que en el último término de la derecha se tiene una serie telescópica se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k^{n+1} (1 - kx)^{n+1} &= \sum_{k=1}^m a_k^n [(1 - kx)^{n+1}] - a_0^n (mx)^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m a_{k-1}^n [(1 - (k - 1)x)^{n+1}] - (a_m^n 0 - a_0^n (mx)^{n+1}), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m a_k^{n+1} (1 - kx)^{n+1} = \sum_{k=1}^m a_k^n [(1 - kx)^{n+1}] - \sum_{k=1}^m a_{k-1}^n [(1 - (k - 1)x)^{n+1}] \Rightarrow$$

$$a_k^{n+1} = a_k^n - a_{k-1}^n.$$

Si para esta última ecuación se sustituye $a_k^n = (-1)^k a_k^n$ resulta

$$a_k^{n+1} = a_k^n + a_{k-1}^n, \quad (\text{D.4})$$

propiedad que se distingue por ser la identidad de los combinatorios binomiales

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

los cuales según el teorema del binomio son únicos y por lo tanto la identidad (D.4) sólo puede tener como solución estos coeficientes. Considerando que el índice k va desde cero y no desde uno se tiene finalmente que $a_k^n = (-1)^k \binom{n+1}{k}$ y la solución para cualquier m

$$P_m(x; n) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1}{k} (1 - kx)^n, \quad (\text{D.5})$$

para una $\mu \neq 1$ se tiene

$$P_m(x; n, \mu) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1}{k} (1 - kx/\mu)^n. \quad (\text{D.6})$$

Calculando C_0 como la probabilidad de que en el “gap” vacío dentro del rango $(0, \mu)$ sea menor que x , y pesando todos los eventos por una distribución de Poisson con media μ

$$C_0 = \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} (-1)^k \binom{n+1}{k} (1 - kx/\mu)^n,$$

reordenando términos y multiplicando por un neutro multiplicativo $\frac{(1-kx/\mu)^k}{(1-kx/\mu)^k}$

$$C_0 = \sum_{k=0}^m (-1)^k (1 - kx/\mu)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \binom{n+1}{k} (1 - kx/\mu)^{n-k},$$

usando la identidad binomial

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k (\mu - kx)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (\mu - kx)^{n-k} \\ &+ \sum_{k=0}^m (-1)^k (\mu - kx)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{k-1} (\mu - kx)^{n-k}, \\ C_0 &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\mu - kx)^{n-k} \\ &+ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{(n-k+1)!} (\mu - kx)^{n-k} \end{aligned}$$

multiplicando el último término de la derecha por el neutro multiplicativo $\frac{(1-kx)}{(1-kx)}$ y usando la expansión en taylor de la función exponencial se tiene

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\mu - kx)^{n-k} \\ &+ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} \frac{k}{(\mu - kx)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-k+1)!} (\mu - kx)^{n-k+1}, \\ C_0 &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} e^{\mu - kx} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} (\mu - kx)^k e^{-\mu} \frac{k}{(\mu - kx)} e^{\mu - kx} \Rightarrow \\ C_0 &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (kx - \mu)^k e^{-kx} \left(1 + \frac{k}{\mu - kx}\right). \end{aligned}$$

El cual es el mismo resultado que se menciona en la sección 4.2.2.3 .

Apéndice E

Análisis de imágenes DAMIC100

El Dr. Javier Tiffinberg desarrollo un proceso para analizar imágenes extraídas de una CCD usando el programa DS9. El programa consiste en restar el ruido intrínseco de la CCD por medio de un “over scann” después se puede recortar la imagen de la CCD. Después se obtiene el “Master Bias” el cual posteriormente se resta a cada imagen, para finalizar se prepara una máscara de pixeles malos y se pueden hacer cortes para eliminar pixeles debidos a la difusión.

En esta parte se verá la parte técnica de como hacer esto. En el cuadro (E.1) se muestra el programa principal que corre el programa. Antes de correrlo es necesario hacer un link virtual (ln -s link ../) donde se especifique donde están las imágenes de las CCD, en este caso el link virtual se llama “raw”

```
#!/bin/bash
BASEDIR=/blue-ccd-data/mobarak/analysis/connie_100V //directorio donde se guardan los resultados
./computeOSI.sh $BASEDIR //programa de sustracción de “overscan”
./trim2Image.sh $BASEDIR //programa que recorta a la mitad la imagen de la CCD (opcional)
./computeMB.sh $BASEDIR //programa que calcula el “Master Bias” o la mediana de todas las imágenes
./computeMBS.sh $BASEDIR //programa que sustrae el “Master Bias” a cada imagen
./prepareMask.sh $BASEDIR //programa que hace la máscara de pixeles malos.
./extract.sh $BASEDIR //cortes estadísticos elegidos por el usuario
echo echo All done! echo
```

Cuadro E.1: Doall.sh.

Ahora se explicara las partes importantes del programa de “over scann” ya que es el primer programa que lee las imágenes y es el más importante para modificar en caso de ser necesario (ver cuadro (E.2)).

```

#/bin/bash
BASEDIR=$1 //se lee lo primero que encuentre el programa en el Doall.sh
ls $BASEDIR/raw/*.fits > $BASEDIR/list.dat
LISTNAME=$BASEDIR/list.dat osiEXE=/home/s1/javiert/análisis/tools/subtractOverscan/subtractOverscan.exe
if [ ! -d "$BASEDIR/osi" ] then mkdir $BASEDIR/osi fi
for inFile in $(cat $LISTNAME)
do
echo
echo =====
echo $inFile
echo =====
echo outName=$BASEDIR"/osi/osi_"
`echo $inFile | sed 's#/# #g' | awk '{print $NF}'` $osiEXE $inFile -o $outName -s 3 //el numero
(3) indica que esta leyendo la segunda CCD del arreglo.
echo
echo =====
echo done
echo

```

Cuadro E.2: ComputeOSI.sh.

Si se requiere recortar la imagen usando el programa trim2image.sh, entonces se debe cambiar el programa del "Master Bias" computeMB.sh.

```

#/bin/bash
BASEDIR=$1
mbEXE=/home/s1/javiert/análisis/tools/checkConsistencyAndComputeMedian/checkConsistencyAndComputeMedian.exe
maskEXE=/home/s1/javiert/análisis/tools/makeMask/makeMask.exe
ls $BASEDIR/right2/right2*.fits > $BASEDIR/mbImageList.dat //Cambiar right2 a osi si no se esta usando
trim2Image.sh, sino dejarlo como esta.
echo
echo
echo =====
echo Computing MB echo =====
echo $mbEXE -i $BASEDIR/mbImageList.dat -o $BASEDIR/masterBias.fits
echo
echo
echo =====
echo Computing MAD
echo =====
echo $mbEXE -i $BASEDIR/mbImageList.dat -o $BASEDIR/mad.fits -m

```

Figura E.1: computeMB.sh.

De esta forma el programa puede continuar hasta llegar al programa extract.sh, en donde es posible hacer cortes estadísticos según la preferencia del usuario y obtener las imágenes de los eventos seleccionados.

```
<sigma
default="27" //En esta parte se puede decir al programa que excluya los eventos con un valor de sigma,
comparado con el ruido intrinseco del pixel.
/>
<calibration
default="5.3363e-4" //Calibracion de energía-pixel, no mover
/>
<thr
seed="10" //Discrimina el número de pixels a reconocer, en este caso el valor central del evento debe tener 10
pixeles como mínimo para ser tomado en cuenta
add="5"
skirtSize="3"
/>
<extra saveTracks="0" //Es cero sino se requieren guardar las imágenes de los eventos de las CCD, si es una
las guarda.
saveTrackCuts="n0>100" //Discrimina para guardar solo imágenes mayor a un numero dado de señal total,
en este caso 100.
/>
<systemConfig stackSize="128" />
```

Cuadro E.3: extractConfig.sh.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

Bibliografía

- [1] Gustavo Canelo, Juan Estrada et all, “Deep sub electrón noise readout in CCD systems using digital filtering techniques.”, arXiv:1107.0925 [astro-ph.IM] FERMILAB-PUB-11-391.
- [2] Antonio Fernández,”Relación Señal-Ruido en Astrofotografía Digital de Cielo Profundo Bases teóricas y aplicación práctica”,Versión 1.1, Marzo 2006.
- [3] Knoll (completar referencia)
- [4] M. MARKEVITCH1, A. H. GONZALEZ, et all, “DIRECT CONSTRAINTS ON THE DARK MATTER SELF-INTERACTION CROSS-SECTION FROM THE MERGING GALAXY CLUSTER 1E 0657–56”,astro-ph/0309303, 22-enero 2004.
- [5] Manungu Kiveni, Joseph,”A Search for WIMP Dark Matter using an Optimized Chi-square Technique on the Final Data from the Cryogenic Dark Matter Search Experiment (CDMS II)”,Ph Thesis, Italy 2005.
- [6] J. D Lewin and P.F Smith, “Review of mathematic, numerical factors, and corrections for dark matter experiments based on elastic recoil”, atroparticle physics 6 (1996).
- [7] R. Bernabei et al., Phys. Lett. B 389, 757 (1996).
- [8] Chris Kelsoa, Dan Hoopera and Matthew R. Buckley” Toward A Consistent Picture For CRESST, CoGeNT and DAMA”, arXiv:1110.5338v1 (2011).
- [9] R. Bernabei et al. “The DAMA/LIBRA apparatus. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research “A592(3):297. arXiv:0804.2738.
- [10] R. Bernabei et al. “results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI”, European Physical Journal C56:333. arXiv:0804.2741.
- [11] G. Angloher et al., Astropart. Phys. 31, 270 (2009).
- [12] R. Agnese, Z. Ahmed, A.J. Anderson et all,”Dark Matter Search Results Using the Silicon Detectors of CDMS II”,arXiv:1304.4279v1 [hep-ex] 15 Apr 2013.
- [13] N. Fornengo, S. Scopel, A. Bottino, Phys. Rev. D 83 (2011) 015001, arXiv: 1011.4743.
- [14] Dark Energy Survey Collaboration, astro-ph/0510346.
- [15] L. Reichhart D.Yu. Akimov, et all,”Quenching Factor for Low Energy Nuclear Recoils in a Plastic Scintillator”,arXiv:1111.2248v1 [nucl-ex] 9 Nov 2011.
- [16] V.I. Tretyak ,”Semi-empirical calculation of quenching factors for ions in scintillators”,arXiv:0911.3041v1 [nucl-ex] 16 Nov 2009.
- [17] Masaki Yamashita,”R&D Results and Status of the XENON Dark Matter Experiment”,Astropart. Phys., 20 (2003) 79-84.

- [18] ANgela Jane Silva, "Development of a low background environment for the cryogenic dark matter search", Ph Tesis, University of British Columbia, Abril 1996, p116.
- [19] Thomas K. Gaisser, "Cosmic Rays and Particle Physics", Editorial Cambridge University Press, 1990.
- [20] Peter K.F. Grieder, "COSMIC RAYS AT EARTH", Editorial ELSEVIER, 2001.
- [21] Hesti R.T. Wulandari Vollständiger, "Study On Neutron-Induced Background in the Dark Matter Experiment CRESST", Ph tesis, Mayo 2003.
- [22] David Griffiths, "Introduction to elementary particles", Wiley-VCH second edition 2008.
- [23] John Dirk Walecka, "Electron Scattering for Nuclear and Nucleon Structure", Cambridge Monographs Particle Physics Nuclear Physics and Cosmology, 2001.
- [24] Walter Greiner, "Quantum Mechanics Special Chapters", Springer, 1989.
- [25] J. Delorme et al., Phys. Rev. C 52 2222 (1995)
- [26] T. Luu, C. Haggmann, "Neutron Production by Muon Spallation I: Theory", Lawrence Livermore National Laboratory, Noviembre 13 2006.
- [27] National Nuclear Data Center, "Sigma Evaluated Nuclear Data File ENDF".
- [28] D.-M. Mei and A. Hime, "Muon-Induced Background Study for Underground Laboratories", Astrophysics (astro-ph), Phys. Rev. D73:053004, 2006.
- [29] D. Barker, D.-M. Mei, and C. Zhang "Muon-Induced Background Study for an Argon-Based Long Baseline Neutrino Experiment", physics.ins-det, 31 Jul 2012.
- [30] M.J. Carson, J.C. Davies, "Simulations of neutrón background in a time projection chamber relevant to dark matter searches", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Volume 546, Issue 3, Pages-509-522, 11 July 2005.
- [31] Santiago Burbano de Ercilla et al., "Física General", Tebar, Edición 32, Capítulo 8 pag187.
- [32] Tapan Mukhopadhyay et al. "Theoretical estimates of cross sections for neutron-nucleus collisions", Annals of Nuclear Energy, 22-Abril-2011.
- [33] JAVIER TIFFENBERG¹, "DAMIC: a novel dark matter experiment", 33RD INTERNATIONAL COSMIC RAY CONFERENCE, RIO DE JANEIRO 2013 THE ASTROPARTICLE PHYSICS CONFERENCE.
- [34] R.M. Bonicalzi, J.I. Collar, et al., "The C-4 Dark Matter Experiment", arXiv:1210.6282v1 [astro-ph.CO] 23 Oct 2012.
- [35] Louis Lyons, "Statistics for Nuclear and Particle Physicists", Cambridge University Press, 1986.
- [36] S. Wilks, "The large-sample distribution of the ratio of verosimilitudes for testing composite hypotheses", Ann. Math. Statist. 9 (1938) 60-2.
- [37] S. Yelling, "Finding an Upper Limit in the Presence of Unknown Background", arXiv:physics/0203002 [physics.data-an], February 2, 2008.
- [38] Michael Spivak, "Cálculo Infinitesimal", ed. reverté, segunda edición p 507.
- [39] H. Kluck, "Investigation of the neutrón background within the EDELWEISS dark matter search", SFB-TR27 Meeting Heidelberg | July 10, 2009
- [40] J. Barreto, H. Cease, H.T. Diehl, J. Estrada et al., "Direct search for low mass dark matter particles with CCDs", Physics Letters B 711 (2012) 264-269.

- [41] Plática en el ICN del investigador Dr. Erick Vázquez Jáuregui titulada resultados de PICO Diciembre 2013.
- [42] D.S. Akerib, et al, "First results from the LUX dark matter experiment at the Sanford Underground Research Facility", arXiv:1310.8214v2 [astro-ph.CO] 30 Oct 2013.
- [43] C.E. Aalseth, "Maximum Likelihood Signal Extraction Method Applied to 3.4 years of CoGeNT Data", arXiv:1401.6234v1 [astro-ph.CO] 24 Enero 2014.
- [44] Gary J. Feldman, Robert D. Cousins, "A Unified Approach to the Classical Statistical Analysis of Small Signals", arXiv:physics/9711021v2 [physics.data-an] 16 Dec, 1999.
- [45] J.D. Lewin, P.F. Smith, "Review of mathematics, numerical factors, and corrections for dark matter experiments based on elastic nuclear recoil", *Astroparticle Physics* 6 87-112, 1996.
- [46] James, Frederick, "Statistical methods in experimental physics", World scientific 2nd edition.
- [47] Samuel D. McDermott, et al. "Turning off the Lights: How Dark is Dark Matter?", arXiv:1011.2907v2 [hep-ph] 22 Nov 2010.
- [48] Roos & Harun-or-Rashio 1999, "Determination of the dynamical parameters of the Universe and its age", arXiv:astro-ph/9901234, 18 Jan 1999.
- [49] Sabino Matarrese et al, "Dark Matter and Dark Energy a challenge for modern cosmology", *Astrophysics and Space Science Library*, Springer 2010.
- [50] G. JUNGMAN, et al "SUPERSYMMETRIC DARK MATTER", *Physics Reports* 267 (1996) 195-373 June 1995.
- [51] N. Fornengo, A. Bottino, F. Donato, S. Scopel, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 138 (2005) 28.
- [52] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* 6, 110 (1933).
- [53] S. Tremaine and J. E. Gunn, *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979) 407.
- [54] C. Pryor & J. Kormendy, *Astron. J.* 100 (1990) 127.
- [55] R. N. Cahn, D. A. Dwyer, "White Paper: Measuring the Neutrino Mass Hierarchy", arXiv:1307.5487v2 [hep-ex] 27 Sep 2013.
- [56] Steen Hannestad, "Neutrinos in Cosmology", arXiv:hep-ph/0404239v1 27 Apr 2004.
- [57] Laura Baudis, "The XENON10 WIMP Search Experiment at the Gran Sasso Underground Laboratory", arXiv:astro-ph/0703183v1 8 Mar 2007.
- [58] A Low-threshold Analysis of Data from the Cryogenic Dark Matter Search Experiment, "Raymond A. Bunker III", Ph Thesis, diciembre 2011.
- [59] Akerib, et al. "Technical results from the surface run of the LUX dark matter experiment". *Astroparticle Physics* 45: 34-43, Mayo-2013.
- [60] S. Holland, D. Groom, N. Palaio, R. Stover, M. Wei, "Fully depleted, back-illuminated charge-coupled devices fabricated on 297 high-resistivity silicon, *Electron Devices*", *IEEE Transactions on* 50 (1) (2003) 225-238. doi:10.1109/TED.2002.806476.
- [61] T. Saab et al, "An Introduction to Dark Matter Direct Detection Searches & Techniques", arXiv:1203.2566v1 [physics.ins-det] 12 Mar 2012.
- [62] D. Yu. Akimov, et al "The ZEPLIN-III dark matter detector: Instrument design, manufacture and commissioning", *Astropart. Phys.* 27: 46-60 (2007).

- [63] A. Aguirre, J. Schaye, and E. Quataert. astro-ph/0105184. Submitted to *Astrophys. J.*, 2001.
- [64] D. Scott et al. astro-ph/0104435. Submitted to *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2001.
- [65] A. Aguirre, J. Schaye, and E. Quataert. astro-ph/0105184. Submitted to *Astrophys. J.*, 2001.
- [66] Shutz, “A first course in General relativity”, Cambridge segunda edición 2009.
- [67] THUSHARA PERERA, “THE LIMITING BACKGROUND IN A DARK MATTER SEARCH AT SHALLOW DEPTH”, PH Tesis January 2012.
- [68] K. A. Olive and G. Steigman, On the abundance of primordial helium, *Astrophys. J. Suppl.* 97 (1995) 49 (astro-ph/9405022).
- [69] Y. Izotov, T. X. Thuan, and V. A. Lipovetsky, The Primordial Helium Abundance: Systematic Effects and a New Determination, *Astrophys. J. Suppl.* 108 (1997).
- [70] Rosati et al. (*ARA&A*, 2002, 40, 539)
- [71] Douglas Clowe, et all, “A DIRECT EMPIRICAL PROOF OF THE EXISTENCE OF DARK MATTER”, *The Astrophysical Journal*, 648:L109–L113, 2006 September 10.
- [72] Bartelmann, M.; Schneider, P. (January 2001). "Weak Gravitational Lensing". *Physics Reports D* 340 (4–5): 291–472.
- [73] M. Kamionkowski, arXiv:0706.2986 [astro-ph].
- [74] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 38, 090001 (2014).
- [75] M. Schaumann, “The XENON 100 Dark Matter Experiment,” 10th Conf. on the Intersections of Part. & Nucl. Phys., (2009), to be published in *AIP Conf. Proc.*
- [76] E. Behnke, et all, “Direct Measurement of the Bubble Nucleation Energy Threshold in a CF3I Bubble Chamber”, arXiv:1304.6001v1 [physics.ins-det] 22 Apr 2013.
- [77] B. Paczynski, *Astrophys. J.* 304, 1 (1986);