UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

EL *REVENUE MANAGEMENT* COMO HERRAMIENTA PARA LA OPTIMIZACIÓN DE INGRESOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

DAVID CHAFFREY MORENO FERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN B. Y E.I. LEONARDO LÓPEZ MONROY

2014

1. **Datos del alumno**
   Moreno
   Fernández
   David Chaffrey
   56 88 02 76
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   306690958

2. **Datos del Tutor**
   M. en B.
   Leonardo
   López
   Monroy

3. **Sinodal 1**
   Dra.
   Guillermina
   Eslava
   Gómez

4. **Sinodal 2**
   Dr.
   Luis Antonio
   Rincón
   Solís

5. **Sinodal 3**
   Dra.
   Claudia Orquídea
   López
   Soto

6. **Sinodal 4**
   M. en I.O.
   María del Carmen
   Hernández
   Ayuso

7. **Datos del trabajo escrito**
   El Revenue Management como una herramienta para la optimización de ingresos
   92 p
   2014

A ti que fuiste luz en obscuridad y sombra en claridad,
gracias por todo lo que me diste y todo lo que tomaste,
sin ti no sería la persona que soy el día de hoy.

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme a lo largo de toda mi vida y en especial en la licenciatura. Mamá, papá y Krueguer, sólo me resta agradecerles por todo y decirles que los amo.

A Carlos, Karen y Mafer por todo su apoyo a lo largo de la carrera, sin ustedes sería un hombre responsable y trabajador pero prefiero su amistad, si tuviera que elegir de nuevo entonces volvería a elegirlos.

A Edna y Graciela que nunca se cansaron de regañarme y mucho menos dejaron de apoyarme en la culminación de mi licenciatura, sin ustedes este trabajo no habría terminado.

A Karla y Mariana, mis amigas de las tertulias teseras, gracias por todas las alegrías, regaños, risas, lágrimas y hasta golpes que compartieron conmigo.

A Emo Barreda, por mostrarme que aún en tiempos difíciles se puede salir avante con una sonrisa en el rostro. Gracias por tu amistad Cristina, tal vez algún día dejes de amarme y logres seguir adelante.

A Robin por acompañarme y desvelarse conmigo durante las arduas noches que fui escribiendo esta tesis, gracias por tu compañía incondicional en las buenas y en las malas.

A Claudia, Guillermina y Omar por permitirme aprender tanto de ustedes cuando me adoptaron como su ayudante, en ese breve período pude crecer observándolos, con admiración y esperanza.

A mis sinodales por todo su apoyo en este proyecto, gracias por ayudarme a superarme en este aspecto de mi vida.

A Leonardo por toda la confianza y ayuda que me brindaste a lo largo de estos dos años, gracias por escucharme y apoyarme.

A la Facultad de Ciencias, por darme cobijo en los últimos 6 años tanto en mi etapa de estudiante como en la de ayudante.

ABSTRACT

El *Revenue Management* es un área de la Investigación de Operaciones que tiene como objetivo maximizar las ganancias utilizando la heterogeneidad de los consumidores de un mercado. Diversas industrias han utilizado sistemas de *Revenu Management* en los últimos años mientras que el estudio académico ha sido rezagado. Este trabajo presenta la teoría básica que sustenta al *Revenue Management* e ilustra el modelo determinista y modelo lineal probabilístico para el cálculo de límites de venta. Además ejemplifica el método de Bellman para la resolución del modelo lineal probabilístico y propone una simplificación del problema general para poder resolverlo con el análisis de la regla de Littlewood.

Índice general

Introducción

Conforme fui avanzando en la licenciatura, entré en contacto con las distintas áreas de la Actuaría: Finanzas, Probabilidad, Estadística, Investigación de Operaciones, Cálculo Actuarial, entre otras. A diferencia de la mayoría de mis compañeros y amigos, quedé fascinado con todas y cada una de las áreas; tal vez de unas más que otras, pero nunca llegué a querer especializarme en alguna particularmente ni me desagradó materia alguna. Tal fue mi gusto por la carrera que seguí tomando materias cuando ya tenía el total de créditos cubierto y comencé a dar clases como adjunto en la facultad.

Al principio no me preocupé mucho por la tesis, pensaba que saldría a su tiempo y forma cuando llegara el momento, pero pronto me di cuenta que no sería tan sencilla su realización. El primer problema que debí afrontar fue encontrar quien me quisiera y pudiera asesorar. Después de conseguir asesor, tuve el problema de seleccionar el tema a desarrollar. Originalmente quería realizar un trabajo sobre gráficas aleatorias, un tema que me agradó bastante cuando llevé la materia de Procesos Estocásticos II. Sin embargo, entre los temas que me propuso mi asesor hubo uno que se escuchaba bastante interesante: el *Revenue Management*.

A decir verdad, fue un tema que se antojaba complejo al principio pero me ofrecía la oportunidad de aplicar los conocimientos que había adquirido a lo largo de la carrera. Luego de leer varios artículos proporcionados por mi asesor me convenció el tema, la idea era realizar una compilación de la teoría del *Revenue Management*, las visiones que tenía y los resultados que se han obtenido en diversas industrias, para posteriormente intentar implementarlo en alguna empresa y verificar su eficiencia para mejorar los ingresos. En esas fechas me encontraba realizando el servicio social en la Comisión Nacional de Protección Social en Salud por lo que le propuse a mi asesor aplicarlo en el área de salud, de modo que contactamos con una clínica para solicitar que nos brindaran la oportunidad de desarrollar un sistema de *Revenue Management* e implementarlo.

Mi asesor me recomendó enfocarme en la visión de control de inventarios del *Revenue Management* dada la poca flexibilidad para modificar los precios de medicinas, consultas y estudios de salud. Es por ello que este trabajo tiene una fuerte inclinación hacia ese enfoque y no se trabajó tan extensamente la visión de precios. Después de estudiar y revisar diversos artículos y libros del tema, me disponía a tratar de implementarlo al problema de la clínica cuando me encontré con un nuevo problema: las bases de datos no estaban organizadas, había muchos datos faltantes y no se podía hacer una segmentación de los consumidores con base en la información recabada. Por presión principalmente de tiempo, tuve que abandonar la idea de aplicar la teoría adquirida a la clínica y opté por realizar una simulación para ejemplificar la implementación de sistemas de *Revenue Management* sin el obstáculo de limpiar y organizar las bases de datos para poder realizar la clasificación de los consumidores.

Mientras fui escribiendo el trabajo, fui encontrando varias similitudes con la teoría de las distintas materias que llegué a dar como adjunto. Fue entonces cuando comencé a tener la inquietud de simplificar el problema, aún cuando mi asesor me recomendaba no extender más el trabajo de la tesis por la cuestión del tiempo, entre más avanzaba en el escrito vi varios puntos que me sugerían que podía aplicar los conocimientos de las distintas áreas para simplificar el caso general de la obtención de límites de venta.

Es por ello que el presente trabajo tiene el enfoque de control de inventarios y la siguiente estructura: en el capítulo 1 se dan los elementos básicos de Economía, Investigación de Operaciones, Teoría de la Utilidad y se introduce el problema de optimización de ingresos brevemente para luego con ayuda del marco histórico y la idea económica ver al *Revenue Management* como un problema de Investigación de Operaciones. El capítulo 2 trata sobre qué es el *Revenue Management*, desde sus distintas definiciones hasta la caraterización de los problemas que son candidatos a resolverse con la implementación del mismo, así como las bases de los distintos enfoques del *Revenue Management*. El capítulo 3 ejemplifica la aplicación del *Revenue Management* y se analizan las bondades del mismo mediante una simulación buscando verificar su utilidad, así como hacer una comparación de las ganancias obtenidas con y sin la aplicación de los límites de venta. Finalmente, en el último capítulo se explica la idea para simplificar el problema general y se comparan los resultados obtenidos con ayuda de una segunda simulación.

Capítulo 1

El problema de optimización de ingresos

"Ser o no ser, he ahí el dilema."
William Shakespeare

1.1. Breve introducción

Según la real academia de la lengua española, un dilema es un argumento formado de dos proposiciones contrarias disyuntivamente, con tal artificio que, negada o concedida cualquiera de las dos, queda demostrado lo que se intenta probar. En la obra "La tragedia de Hamlet, príncipe de Dinamarca" de William Shakespeare, una decisión lleva a la tragedia dejando la interrogante de qué hubiera pasado si se hubiera tomado otra decisión; una que podría haber llevado a un "mejor" desenlace.

Si bien la tragedia de Hamlet es una gran historia, en la vida real han existido muchas personas que se han enfrentado a situaciones que requieren una toma de decisiones, tal que una mala decisión podía llevarlos a una tragedia. La mayoría de esas situaciones no son dilemas porque existen varias opciones a escoger y de manera que al descartar una solo se reduce el problema. Aún cuando una mala decisión no conduzca a la muerte, esta puede tener repercusiones muy serias por lo que es necesaria una manera de tomar las mejores decisiones posibles. ¿Cómo saber cuándo una decisión es mejor que otra? ¿Cómo encontrar la mejor decisión posible?

Con el transcurso del tiempo las decisiones que tenían que tomar las personas requirieron tomarse con mayor velocidad. Estas exigencias prácticas originaron métodos especiales. Con ayuda de esos métodos, las personas lograron tomar decisiones para hacer frente a sus problemas y obtener mejores resultados. Las decisiones se consideran óptimas si tienen preferencia respecto a las otras, partiendo de uno u otro criterio. De este modo pudieron afrontar mejor sus problemas, construyendo el modelo y seleccionando el criterio deseado. Es importante notar que el criterio en cuestión debe distinguir que tan buena o mala es una decisión.

La **Investigación de Operaciones** (IO) es la aplicación del método científico sobre un conjunto de actividades con un objetivo determinado. Comenzó desarrollando problemas referentes a ordenamiento de tareas, reparto de cargas de trabajo, planificación y asignación de recursos en el ámbito militar, diversificándose luego y extendiéndose finalmente a organizaciones industriales, académicas y gubernamentales. El término Investigación de Operaciones se utilizó por primera vez en el año 1939 durante la segunda Guerra Mundial, específicamente cuando surge la necesidad de investigar las operaciones tácticas.

Definición 1.1.1 (**Programación Lineal**): clase de modelos matemáticos concernientes a la asignación eficiente de ciertos recursos limitados por restricciones lineales a actividades conocidas con el objeto de alcanzar un objetivo también lineal.

Dantzig menciona en su libro [DA97] que se puede ver la **Programación Lineal** como parte de un gran desarrollo revolucionario que le ha dado a la humanidad la habilidad de fijar objetivos generales y establecer una secuencia de decisiones detalladas que deben tomarse para conseguir el mejor resultado al encontrarse en situaciones complicadas. Además menciona que dicha habilidad comenzó en 1947 (haciendo alusión al año en el que dio a conocer el método Simplex), poco después de la segunda guerra mundial y ha estado manteniendo el ritmo desde que empezó a crecer extraordinariamente la potencia del cáculo de las computadoras.

Definición 1.1.2 (**Variables de decisión**): variables por determinar para la solución del problema, de las que depende la actividad enmarcada en el objetivo buscado.

Al criterio para seleccionar el mejor valor de las variables de decisión en el problema se le conoce como **función objetivo** y a las reglas de operación que definen las alternativas de solución como **restricciones** del problema.

Los problemas que se pueden abordar con programación lineal deben cumplir ciertas condiciones [WI94][pp. 54-55]:

- Aditividad

  La contribución a la función objetivo de cualquier variable es independiente de los valores de las otras variables de decisión. Además, la contribución de una variable a cada restricción es independiente de los valores de la variable.

- Proporcionalidad

  La contribución de cada variable de decisión a la función objetivo es proporcional al valor de la variable de decisión. Además, la contribución de cada variable a cada restricción es proporcional al valor de la variable.

- Certeza

  Se conocen con certeza los coeficientes de la función objetivo, el vector del lado derecho y los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones.

- Divisibilidad

  Cada variable de decisión puede tomar valores fraccionarios.

Matemáticamente un problema de programación lineal significa encontrar los valores $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ que minimicen (maximicen) z satisfaciendo un conjunto restricciones lineales:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Max (o Min)} & z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n \\
\text{s.a (sujeto a)} & & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \quad (\text{o bien} \geq \text{o} =) \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \quad (\text{o bien} \geq \text{o} =) \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & \leq & b_n \quad (\text{o bien} \geq \text{o} =) \\
 & & & & & & & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n. &
\end{array}
$$

Los problemas de programación lineal pueden expresarse de forma matricial de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Max (o Min)} & z & = & cx & \\
\text{s.a} & & & & \\
 & Ax & \leq & b & (\text{o bien} \geq \text{o} =) \\
 & x & \geq & 0. &
\end{array}
$$

En donde c es un vector renglón en $\mathbb{R}^n$, llamado **vector de costos** o de coeficientes en la función objetivo, x es un vector columna en $\mathbb{R}^n$ formado por las variables de decisión, A es una matriz en $M_{nxm}(\mathbb{R})$ llamada **matriz de restricciones** y b es un vector columna en $\mathbb{R}^m$ llamado **vector de recursos** o lado derecho.

Se dice que un problema de programación lineal está en **forma estándar** si:

i) Las restricciones del problema son todas ecuaciones.

ii) Las variables de decisión son no negativas.

iii) Los elementos del vector de recursos son todos no negativos.

Todo problema de programación lineal puede ser expresado en forma estándar, es decir, puede definirse un problema en forma estándar equivalente a él. Si una restricción es de tipo $\leq$ $(\geq)$ puede ser transformada en ecuación sumando (restando) una variable no negativa que recibe el nombre de **variable de holgura**. Para una variable no positiva x_i puede definirse $x'_i = -x_i$ resultando $x'_i \geq 0$, para una x_i no restringida pueden ser definidas dos variables no negativas x'_i y x''_i tales que $x_i = x'_i - x''_i$ considerando así todos los valores posibles de x_i.

La forma estándar de un problema de programación lineal es importante porque el algoritmo **simplex**, desarrollado por Dantzig en 1947, supone un problema en forma estándar para resolverlo de manera iterativa.

Un vector en $\mathbb{R}^n$, se denomina **solución factible** de un problema de programación lineal si satisface el conjunto de resticciones de éste. Al conjunto de soluciones factibles se les llama **región o espacio de soluciones factibles** y se denota con F_p.

Teorema 1.1.1 Sea P un problema de programación lineal en forma estándar. Sea F_p el conjunto de soluciones factibles de P; es decir:

$$F_P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

Entonces F_P es convexo; es decir, si $x, y \in F_P$ y $\lambda \in [0, 1]$ entonces $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F_P$.

Adicionalmente, se dice que un elemento x de un conjunto convexo C es un **punto extremo** si no puede expresarse como combinación lineal convexa de dos elementos distintos de C.

El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal tiene la característica de tener un número finito de puntos extremos.

Teorema 1.1.2 Sea el problema de programación lineal

$$\begin{array}{llcll}
\text{Max} & z & = & cx & \\
\text{s.a} & & & & \\
 & Ax & \leq & b & (\text{o bien} \geq \text{o} =) \\
 & x & \geq & 0. &
\end{array}$$

Entonces la función z alcanza el óptimo, si existe, en un punto extremo del conjunto de soluciones factibles.

Este teorema da una idea de cómo resolver los problemas de programación lineal: comparar los valores que toma la función objetivo en los puntos extremos. Para ello es necesario contar con una caracterización de dichos puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde $A \in M_{nxm}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$, sea $B \in M_{mxm}(\mathbb{R})$ una submatriz de A no singular y supóngase que las $n - m$ componentes de x asociadas con las columnas de A que no están en B son iguales a cero; entonces la solución del conjunto de ecuaciones resultante se denomina **solución básica** con respecto a la base B. Las componentes de x asociadas a las columnas de B se conocen como variables básicas, si alguna de éstas toma el valor cero entonces se dice que la solución es **degenerada**.

Teorema 1.1.3 Sea F_P el politopo convexo[1] formado por los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ax = b$, $x \geq 0$. Entonces x es un punto extremo de F_P si y sólo si x es una solución básica de $Ax = b$ y $x \geq 0$.

Se puede consultar la demostración de los teoremas 1.1.1, 1.1.2 y 1.1.3 en [HE07], los cuales son la base del algoritmo simplex; el algoritmo se inicia con una solución básica factible y, en cada iteración, se construye otra solución básica factible que mejora la función objetivo hasta que ya no es posible.

Definición 1.1.3 (**Solución adyacente**): Dos soluciones básicas son adyacentes si difieren en una sola variable básica.

Para saber si la nueva solución básica factible mejora o no la función objetivo se comparan los valores obtenidos. Al incremento de z causado por aumentar la variable no básica x_j en una unidad se le conoce como **coeficiente de costo reducido** de la variable x_j y se denota con $\bar{c}_j$. Dependiendo de si el problema es de maximización o de minimización se deseará que $\bar{c}_j > 0$ o que $\bar{c}_j < 0$; es decir, el criterio de optimalidad será el coeficiente de costo reducido.

Hernández [HE07][p.82] describe el algoritmo simplex, el cual durante su ejecución conserva siempre la factibilidad e itera hasta alcanzar la optimalidad, de la siguiente manera:

Algoritmo simplex para un problema lineal de maximización (minimización).

1. Expresar el problema en forma estándar.
2. Determinar una solución básica inicial y construir la tabla simplex inicial.
3. Calcular $\bar{c} = c - c_B B^{-1} A$.
   - Si $\bar{c}_j \leq (\geq)\ 0\ \forall x_j$ no básica, terminar. La solución actual es óptima.
   - Si $\bar{c}_j > (<)\ 0$ para alguna x_j no básica ir al paso 4.
4. Determinar la variable que entra a la base. Ésta es cualquiera tal que $\bar{c}_j > (<)\ 0$.
5. Determinar la variable que sale de la base.

[1]Los politopos convexos pueden representarse como la intersección de hemiespacios.

Definición 1.1.4 (**Programación Dinámica**): clase de modelos matemáticos que pueden dividirse en varias etapas con variables de decisión asociadas, conocidas como variables de estado. Cada etapa incluye un subproblema de una sola variable de modo que al resolver los subproblemas se obtiene la solución óptima del problema global.

La Programación Dinámica fue desarrollada por Richard Bellman, Wayne L. Winston [WI94] explica más sobre el planteamiento y las características de este tipo de problemas.

1.2. Marco histórico

Como se mencionó anteriormente, la Investigación de Operaciones extendió la esfera de sus aplicaciones a las más diversas ramas de la práctica. Una de sus aplicaciones más reciente es el *Revenue Management*, Kalyan Talluri y Garret Van Ryzin en su libro [TV05][p. xxv] mencionan lo siguiente:

> *"Revenue management (RM) has gained attention recently as one of the most successful application areas of operations research (OR). The practice has grown from its origins as a relatively obscure practice among a handful of major airlines in the post-deregulation era in the U.S. (circa 1978) to its status today as a mainstream business practice with a growing list of industry users from Walt Disney Resorts to National Car Rental and a supporting industry of software and consulting firms. Major airlines, hotel chains, and car rental companies have large staffs of developers and analysts working on RM, and major consulting and software firms also employ large numbers of RM professionals."*

Como mencionan Talluri y Van Ryzin, el *Revenue Management* al igual que muchas otras áreas de la investigación de operaciones empezó basándose en la intuición de las personas que tomaban las decisiones por lo que era considerada una práctica obscura utilizada solo por algunas de las aerolíneas más grandes en el período en que decayó su regulación en Estados Unidos. Conforme fueron obteniendo experiencia, se construyeron mejores modelos y su práctica empezó a ser más aceptada hasta llegar hoy en día a ser considerada un área bastante exitosa, utilizada no solamente por la industria aeronáutica sino por una amplia gama de empresas.

También es importante resaltar que el *Revenue Management* se fue desarrollando con la ayuda de las computadoras, que han ido facilitando la tarea de tomar decisiones al poder realizar una mayor cantidad de cálculos en menor tiempo de lo que podría hacerlo una persona, con lo que además se han podido implementar modelos más complejos con mejores resultados.

1.2.1. El RM y la industria de las aerolíneas

Es imposible entender a una persona sin conocer su historia. Saber qué eventos fueron moldeando su carácter y personalidad ayuda a comprenderla, incluso conociendo bien a una persona no se podría llegar a prever el rumbo que le dará después a su vida. Aunque no se pueda definir completamente a alguien por quién fue el día de ayer, se puede dar una idea de cómo es hoy e incluso tal vez de cómo será mañana.

Con el *Revenue Management* no es tan diferente que con las personas, el conocer su historia puede ayudar a comprender cómo y por qué llegó a ser un área tan exitosa de la Investigación de Operaciones. Por lo que antes de definir formalmente al *Revenue Management*, es valioso conocer una breve parte de su historia y los factores que le dieron vida y fuerza. Al igual que muchas personas, la historia del *Revenue Management* está fuertemente ligada a la historia de una industria en particular, aquella con la que compartió su infancia y con la que fue creciendo hombro a hombro: la industria de la aviación comercial.

Con el Acta de Desregularización de las Aerolíneas en Estados Unidos de América la *U.S. Civil Aviation Board* perdió el control de los precios que las aerolíneas ofrecían a los viajeros. Antes de dicha acta, los precios habían sido estrictamente regulados en base a un precio estándar y ciertos objetivos de rentabilidad, es decir, los precios que las aerolíneas podían ofrecer por cierto producto, tenían que estar de acuerdo con los precios fijados por la *U.S. Civil Aviation Board* calculados con base en que tanto ganarían las aerolíneas en relación a su inversión.

La desregularización fue ocasionada por el exceso de burocracia que ejercía la *U.S. Civil Aviation Board*, el mejor ejemplo de ello fue la vez que la aerolínea World Airways pidió permiso para poder vender vuelos de Nueva York a Los Ángeles a una tarifa baja y la *U.S. Civil Aviation Board* "estudió" la solicitud durante seis años, para rechazarla argumentando que el expediente era viejo. Otro ejemplo de dicha burocracia fue el caso de Continental Airlines, que pudo empezar a ofrecer vuelos entre Denver y San Diego hasta que una corte de apelación le ordenó a la *U.S. Civil Aviation Board* aprobar la solicitud, ocho años después.

La aprobación del acta de desregularización condujo a un rápido cambio y una precipitada inovación de la industria. Las aerolíneas podían cambiar los precios, los planes de vuelo y el servicio que ofrecían sin necesidad de que la *U.S. Civil Aviation Board* lo aprobara. Las nuevas libertades de las que gozaban las aerolíneas provocaron muchos cambios en el mercado, uno de los más impactantes es tal vez la constitución de nuevas aerolíneas que ofrecían vuelos sin escalas a un costo bastante accesible, lo suficiente para que las personas empezaran a preferir viajar en avión en vez de hacerlo en autobús o en automóvil, surgiendo la gran demanda de este nuevo segmento del mercado. Además, las nuevas aerolíneas también comenzaron a robarle mercado a las grandes aerolíneas. Fue entonces cuando las aerolíneas tuvieron que ofrecer vuelos con mayor frecuencia, mayor cantidad de destinos posibles y publicitar la calidad de sus servicios. Para la mayoría de las personas que viajaban por negocios, la coveniencia de los horarios de vuelos y la calidad del servicio era, y continúa siendo, más importante que el precio, de manera que las nuevas aerolíneas no representaban una gran amenaza para las grandes aerolíneas en cuanto a que pudieran quitarles éste del segmento del mercado.

Sin embargo, era necesario implementar una nueva estrategia para recuperar el segmento del mercado que era más sensible a los cambios en el precio ya que el potencial de dicho segmento era bastante prometedor. La aerolínea PeopleExpress fue el mejor representante de las ganancias que se podían obtener de éste. PeopleExpress comenzó sus operaciones en 1981 de una manera eficiente en relación a los costos que tenía y las tarifas que ofrecía, las cuales eran entre un 50 y 70 % más baratas que las ofrecidas por las grandes aerolíneas. Para el año de 1984, los ingresos que tenía PeopleExpress eran cercanos al billón de dólares teniendo una ganancia de sesenta millones de dólares.[2]

¿Qué debían hacer las grandes aerolíneas para recuperar la parte del mercado que les habían robado las aerolíneas como PeopleExpress? Era claro que una guerra directa de precios sería un suicido para ellas ya que al tener costos de operación bajos, las nuevas aerolíneas podían ofrecer precios más accesibles, en cambio si las grandes aerolíneas ofrecían precios tan baratos tendrían pérdidas por cada venta.

Robert Crandall, quien en ese entonces era el vice-presidente del área de marketing de American Airlines, se dió cuenta de que la aerolínea en esos momentos disponía de asientos a un costo marginal cercano a cero ya que la mayoría de los costos de un vuelo eran fijos. Fue entonces cuando comprendieron que American Airlines podía competir en precios con las nuevas

[2]Continental Air Lines, Inc. v. Civil Aeronautics Board, 519 F.2d 944, C.A.D.C. 1975.

aerolíneas utilizando los asientos sobrantes en cada vuelo. Sin embargo, surgieron dos problemas que se tuvieron que resolver antes de emplear dicha estrategia para competir con las demás aerolíneas. Primero, debieron encontrar una manera de identificar esos asientos "excedentes" en cada vuelo ya que dicha estrategia no sería buena si una venta de precio bajo desplazara a una de un cliente de negocios que estuviera dispuesto a pagar mucho por ella. En segundo lugar, tuvieron que asegurarse que sus clientes no intentaran comprar los nuevos productos de bajo costo que ofrecían a los clientes que viajaban por placer.

Cuando American Airlines logró resolver esos dos problemas, pudo competir directamente en precios con las nuevas aerolíneas sin tener pérdidas, ni disminuir sus ventas al segmento de los viajeros de negocios. La idea de Crandall no funcionó inmediatamente, pasaron varios años y procesos de prueba hasta que se pudieron observar ganancias. American Airlines pudo competir en precios de todos los vuelos con PeopleExpress a tal nivel que llevó a ésta última a su quiebra en el año de 1986. Donald Burr, director ejecutivo de PeopleExpress, resumió las razones del fracaso de la compañía [TV05][p. 9]:

> *"We were a vibrant, profitable company from 1981 to 1985, and then we tipped right over into losing $50 million a month. We were still the same company. What changed was American's ability to do widespread Yield Management in every one of our markets. We had been profitable from the day we started until American came at us with Ultimate Super Savers. That was the end of our run because they were able to under-price us at will and surreptitiously. Obviously PeopleExpress failed... We did a lot of things right. But we didn't get our hands around Yield Management and automation issues. ... [If I were to do it again,] the number one priority on my list every day would be to see that my people got the best information technology tools. In my view, that's what drives airline revenues today more than any other factor—more than service, more than planes, more than routes."*

En su declaración se puede apreciar que PeopleExpress pasó de ser una empresa muy exitosa a la bancarrota por no poder competir con los *Ultimate Super Savers*, los asientos excedentes que American Airlines vendió a precios muy bajos, más bajos que los precios de PeopleExpress, y que además de ser baratos tenían una mejor calidad en el servicio y una mayor variedad de opciones de vuelos.

Esta misma historia se fue repitiendo de maneras similares a lo largo de los años en toda la industria de la aviación comercial después de la desregularización. Las aerolíneas que no tenían habilidades similares a las del *Revenue Management* se apuraron a conseguirlas. Actualmente la práctica del *Revenue Management* en la industria de la aviación comercial es tanto madura como total. Aplicar *Revenue Management* se considera fundamental para poder dirigir una aerolínea moderna redituable.

Así, el *Revenue Management* nació de una necesidad de las aerolíneas y comenzó a desarrollarse para que éstas pudieran ser competitivas. Al observar los resultados obtenidos, se volvió fundamental para operar de manera eficiente y con el tiempo se ha convertido en una exitosa área de la Investigación de Operaciones. Pero, ¿qué fue lo que motivo a aquellos hombres a desarrollar el *Revenue Management*? Más allá de saber que se disponía de asientos "excedentes", las aerolíneas no tenían la certeza que esa nueva estrategia funcionaría... Entonces, ¿qué bases tenían para respaldar sus argumentos?

1.3. *Revenue Management* como un problema de IDO

En la sección anterior se mencionó que el *Revenue Management* se ha convertido en una exitosa área de la Investigación de Operaciones. Pero, ¿qué características lo convierten en un problema de Investigación de Operaciones?

En el caso de las aerolíneas se puede plantear el problema de la siguiente manera: distinguir diferentes productos y consumidores de modo que cada segmento tenga una valuación diferente de los bienes ofertados, localizar los asientos que estarían vacíos y ofrecerlos a un menor precio de una forma controlada para que no se incurra en el error de vender barato a alguien que de otra forma compraría a un mayor precio; se desea hacer todo lo anterior de modo que se maximicen las ganancias obtenidas.

Lo anterior se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Con base en datos históricos determinar una partición del conjunto de consumidores del mercado y a cada segmento asignarle un precio distinto al cual ofrecer el bien.

2. Dada una partición del mercado, diseñar mecanismos que restrinjan el acceso de los clientes a los segmentos que sean distintos al suyo.

3. Determinar la capacidad destinada a cada segmento del mercado de modo que se maximicen las ganancias considerando que mayor capacidad que demanda significa menos ventas

y por lo tanto menos ganancias.

La partición del mercado puede ser determinada mediante técnicas estadísticas o simplemente seleccionando una segmentación arbitraria a gusto de la compañía y los precios se pueden fijar mediante un análisis económico como se menciona más adelante.

En el problema de las aerolíneas se desea encontrar la manera de revelar la verdadera naturaleza de los clientes, Ken Binmore define en su libro [BI07][p. 29] los **mecanismos** como las reglas de un juego y al **diseño de mecanismos** como la rama de la teoría de juegos en la cual se diseñan nuevos juegos que la gente racional pueda jugar de manera que se beneficie la sociedad con los resultados. Los mecanismos se pueden diseñar con base en el comportamiento observado a lo largo del tiempo, existen teorías sobre el diseño de mecanismos pero éstas se enfocan más hacia mecanismos dedicados a hacer que la valuación de las personas se incremente, éstas pueden consultarse en el libro de Leonid Hurwicz [HU06].

Binmore [BI07][pp. 567-569] plantea el problema del rey Salomón de determinar a cuál de dos mujeres darle el bebé que ambas declaraban como suyo y cuestiona la solución dada, argumentando que si la mujer que miente fuera más inteligente entonces la Justicia Salomónica hubiera fallado. Para posteriormente ofrecer un mecanismo en el cuál la madre verdadera siempre obtiene al bebé, mediante la asignación de la mayor ganancia esperada a cada una de las mujeres al revelar su verdadera identidad. Dicho ejemplo muestra que es posible construir mecanismos que obliguen a los clientes a revelar el precio que están dispuestos a pagar por un producto impidiendo al mismo tiempo que intenten comprarlo a un precio menor.

Una vez resueltos los primeros dos pasos, lo anterior se puede plantear como un problema de programación lineal en donde las variables de decisión del problema b_i corresponde a la capacidad destinada al segmento i del mercado para $i = 1, \ldots, n$, suponiendo que hay n segmentos de éste. Sean C la capacidad disponible del bien ofertado, d_i la demanda observada del segmento i a lo largo del tiempo y v_i el precio asignado al segmento i. La función objetivo es la ganancia obtenida dada esa asignación de capacidad, es decir, $z = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \ldots + v_n b_n$.

La capacidad asignada a cada segmento debe ser menor o igual a la demanda del mismo, ya que en caso contrario no se vendería toda y se incurriría en una pérdida. De la misma forma la capacidad debe ser mayor o igual a cero ya que la capacidad negativa no tiene sentido. Por último, la suma de las capacidades asignadas a cada segmento no puede exceder la capacidad de producción total. Este problema se puede expresar matemáticamente como sigue:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Max} & z & = & v_1 b_1 & + & v_2 b_2 & + & \dots & + & v_n b_n \\
\text{s.a} & & & & & & & & & \\
& b_1 & + & b_2 & + & \dots & + & b_n & \leq & C \\
& b_1 & & & & & & & \leq & d_1 \\
& & & b_2 & & & & & \leq & d_2 \\
& & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
& & & & & & & b_n & \leq & d_n \\
& \multicolumn{5}{l}{b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n} & & & &
\end{array}
$$

De este modo se puede resolver el problema utilizando el algortimo simplex para obtener la mayor ganancia posible. Es importante mencionar que dicha ganancia es máxima dada la partición del mercado y bajo el supuesto que los mecanismos diseñados para segmentar al mercado son infalibles. En parte esto es lo que da un toque característico a los problemas del *Revenue Management* que se abordará más adelante.

1.4. Base Económica

La economía se divide en dos ramas principales: microeconomía y macroeconomía. La microeconomía estudia el comportamiento de las unidades individuales económicas. Estas unidades incluyen a consumidores, trabajadores, inversionistas, dueños de tierras, empresas de negocios, cualquier individuo o entidad que juegue un papel en el funcionamiento de la economía. La microeconomía explica pues cómo y por qué toman decisiones económicas estas unidades. La macroeconomía estudia el comportamiento de la economía en su conjunto, como son las expansiones y las recesiones, la producción total de bienes y servicios, el crecimiento total de la producción, las tasas de inflación entre otras cosas.

Definición 1.4.1 (**Bien**): mercancía producida con el fin de satisfacer una necesidad latente.

Los bienes y servicios consumidos por la unidad familiar se llaman genéricamente bienes. No hay nada en la teoría que limite rigurosamente el alcance de lo que llamamos “bienes”.

Las unidades económicas individuales se pueden dividir en dos grandes grupos de acuerdo a su función de compradores y vendedores. Los compradores incluyen consumidores que compran bienes y servicios, así como empresas que compran trabajo, capital y materias prima que utilizan para producir bienes y servicios. Los vendedores incluyen empresas que venden sus bienes y servicios, trabajadores que venden sus servicios laborales y dueños de recursos que rentan tierras o venden recursos minerales a las empresas. La interacción de compradores y vendedores forma lo que se conoce como mercado.

Definición 1.4.2 (**Mercado**): conjunto de compradores y vendedores que interactúan, y da como resultado la posibilidad de intercambio.

En el caso básico del mercado sólo se pide que haya un equilibrio entre la oferta y la demanda: la **oferta** es la cantidad de bien o servicio que el vendedor pone a la venta y la **demanda** es la cantidad de un bien o servicio que la gente desea adquirir.

Siempre que se intenta explicar el comportamiento humano es necesario tener un marco teórico en el cual se pueda basar el análisis. En muchos estudios económicos, se usa un marco teórico construido con base en los dos siguientes principios:

Principio de optimización: Las personas intentan escoger los mejores patrones de consumo que pueden costearse.

Principio de equilibrio: El precio de un bien sigue un proceso de ajuste hasta que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofertada.

Hal R. Varian [VA06][p. 3] realiza un anásilis de dichos principios y menciona que la definición de equilibrio puede cambiar según el modelo. Así, aunque para el sencillo caso del mercado, la idea del equilibrio entre lo que se vende y se compra es suficiente, modelos más complejos exigen definiciones más generales de equilibrio. Normalmente, se necesita que las acciones de los agentes económicos sean consistentes entre ellas en el equilibrio.

Definición 1.4.3 (**Curva de la oferta**): representación de la cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a vender por cada uno de los precios que reciben en el mercado.

La curva de la oferta tiene pendiente ascendente porque conforme mayor es el precio mayor es la cantidad de empresas que normalmente serán capaces y estarán dispuestas a producir y vender.

Definición 1.4.4 (**Curva de la demanda**): representación de cuántos bienes o servicios están dispuestos a comprar los consumidores por cada precio por unidad que deben pagar.

La curva de la demanda tiene una pendiente descendente porque los consumidores normalmente están dispuestos a comprar una mayor cantidad de bienes si el precio al que los ofertan es menor.

Se conoce como mecanismo del mercado a la tendencia de que el precio cambie hasta que la cantidad ofertada sea la misma que la cantidad demandada, similar al principio del equilibrio. El razonamiento detrás de dicho mecanismo se puede consultar en el libro de Robert S. Pindyck [PI09][p. 19].

Definición 1.4.5 (**Precio de equilibrio**): aquel en el cual las curvas de oferta y de demanda se intersectan.

Es decir, en este precio la cantidad de bienes ofertados y la cantidad de bienes demandados son justamente iguales. En este punto, como no existe exceso de demanda ni exceso de oferta, las presiones para que siga variando el precio se extinguen.

Al dibujar las curvas de la oferta y la demanda se supone que existe una cantidad producida y vendida para cualquier precio, pero esto solo tiene sentido si el mercado es al menos algo competitivo, es decir, que es elevado el número de ofertantes que operan en él. A mayor número de productores de bienes, mayor es la competencia en el mercado.

Definición1.4.6 (**Competencia perfecta**): situación del mercado que cumple las siguientes condiciones:

a) Los demandantes son tomadores de precio en el mercado.

b) Los productos ofertados son homogéneos.

c) Todos los productos son perfectamente móviles y pueden trasladarse rápidamente dentro o fuera del mercado en respuesta a señales pecuniarias.

d) Los demandantes poseen un conocimiento completo y perfecto.

Así, la demanda de un consumidor sobre un bien depende del precio, el ingreso del consumidor y los precios de otros bienes. De manera similar, la oferta depende del precio y de otras variables que afectan el costo de producción. Sin embargo, frecuentemente se quiere saber cuánto puede incrementarse o disminuir la oferta o la demanda. El concepto de elasticidad surge al preguntarse qué tan sensible son la oferta y la demanda. La **elasticidad** es una medida de sensibilidad de una variable con respecto a otra.

Análisis de las elasticidades se pueden consultar en Varian, Gould y Pindyck. Varian hace un análisis de las elasticidades de distintos tipos de bienes y desarrolla otra expresión equivalente para la elasticidad [VA06][pp. 273-291]. John P. Gould hace una comparación entre elasticidad a corto y largo plazo tanto para la oferta como para la demanda [GO00][pp. 24-56]. Pindyck ejemplifica las elasticidades [PI09][pp. 21-62].

Los consumidores cuentan con cierto ingreso para gastar en distintos bienes, de modo que deben seleccionar un conjunto de bienes a comprar dentro de todos los que desean bajo la limitante del ingreso. Es decir, los consumidores deben decidir qué conjunto de bienes deben comprar de manera que les alcance el dinero y cubra mejor sus necesidades.

Definición 1.4.7 (**Canasta de mercado**): conjunto de uno o más artículos básicos que puede costearse un consumidor.

Aún cuando una canasta de mercado pueda contener múltiples bienes, por lo general se supone que contiene dos bienes: un bien y todos los demás. De esta forma se pueden estudiar las preferencias de consumo que involucren muchos bienes de consumo utilizando diagramas bidimensionales. Dadas dos canastas, se supone que existe un orden inducido entre ellas, es decir, que el consumidor podrá determinar cuál le da mayor satisfacción, en otras palabras, el consumidor puede distinguir si una es estrictamente mejor que la otra o si es indiferente entre ellas.

Con base en ello, se pueden hacer una relación entre dos canastas cualesquiera, A y B, si A proporciona más satisfacción que B, se dice que A es estrictamente preferida a B; si ambas proporcionan la misma satisfacción, se dice que el consumidor es indiferente entre A y B; si un consumidor prefiere la canasta A o es indiferente entre las dos canastas se dice que A es débilmente preferida a B. Dichas relaciones se denotan de la siguiente manera:

$$A \succ B \quad \textbf{Relación de preferencia estricta}$$
$$A \sim B \quad \textbf{Relación de indiferencia}$$
$$A \succeq B \quad \textbf{Relación de preferencia débil}$$

Los supuestos sobre las relaciones de preferencia pueden consultarse en Varian [VA06][pp. 33-36] y en Pindyck [PI09][p. 59]. En general es conveniente poder describir las preferencias gráficamente, siguiendo la idea de que las canastas tienen dos bienes se pueden analizar en dos dimensiones los siguientes conceptos.

Definición 1.4.8 (**Línea de presupuesto**): conjunto de canastas, para las cuales, el dinero total gastado es igual a los ingresos de los que dispone el consumidor.

Dada la línea de presupuesto, el consumidor puede hacer la comparación entre las canastas que puede comprar para así decidir cuál de ellas le da un mayor nivel de satisfacción.

Definición 1.4.9 (**Curvas de indiferencia**): conjunto de todas las canastas de mercado que ofrecen el mismo nivel de satisfacción a una persona.

Siempre es útil fijarse en la pendiente de una curva de indiferencia en un punto particular. Es por ello que se define la tasa marginal de sustitución.

Definición 1.4.10 (**Tasa marginal de sustitución**): valor de la pendiente de una curva de indiferencia.

La tasa marginal de sustitución se puede ver como la cantidad de un bien que un consumidor está dispuesto a sacrificar para obtener más cantidad de otro bien.

La teoría de la utilidad tiene dos enfoques: ordinal y cardinal. Una jerarquización ordinal coloca a las canastas de mercado en el orden de la más a la menos preferida, sin considerar la magnitud de la preferencia de una canasta de mercado con respecto a la otra. En contraste, una jerarquización cardinal intenta cuantificar o medir en términos de unidades básicas las preferencias de los individuos. Edwards [ED92] realiza un análisis detallado de ambos enfoques así como el cambio que ha tenido la teoría a lo largo del tiempo.

Definición 1.4.11 (**Utilidad**): nivel de satisfacción que una persona obtiene por el consumo de un bien o por la realización de una actividad.

Las relaciones de preferencia están estrechamente relacionadas con la existencia de funciones de utilidad. Talluri y Van Ryzin [TV05][p. 659] enuncian el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1 Si X es un conjunto finito, una relación binaria $\succ$ es una relación de preferencia si y sólo si existe una función $u : X \to \mathbb{R}$, llamada función de utilidad, tal que $u \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$.[3]

En el ámbito empresarial se puede pensar en la utilidad como la ganancia que se obtiene después de realizar los descuentos correspondientes. Para ello se definen los conceptos de ingreso marginal y costo marginal.

Definición 1.4.12 (**Ingreso marginal**): incremento en los ingresos en relación con el incremento de la producción en una unidad.

El ingreso marginal se puede ver como la ganancia que se obtiene por unidad de producción. Para obtener la ganancia total es necesario considerar el ingreso marginal por las unidades producidas, bajo el supuesto de que se vende todo lo que se produce.

Definición 1.4.13 (**Costo marginal**): incremento en el costo en relación con el incremento de una unidad en la producción.

El costo marginal puede considerarse como el único descuento en el más sencillo, de modo que la utilidad de la empresa se puede calcular como el ingreso marginal menos el costo marginal. A partir de esta idea se puede decir que la condición para maximizar las utilidades es que el ingreso marginal sea igual al costo marginal en un punto en el que la curva de costos marginales sea creciente. Se puede consultar el por qué se debe dar dicha condición en el libro de Pindyck [PI09][pp. 277-320].

[3] La demostración del teorema se pueden encontrar en las notas de Kreps [KR88][pp. 7-22].

La teoría de utilidad esperada, que es probablemente la teoría normativa con mayor nivel de aceptación para la toma de decisiones bajo riesgo, requiere que se cumplan ciertas propiedades. Para los fines de este trabajo supondremos que se cumplen las siguientes:

Propiedades de la teoría de utilidad esperada

Sea p un número real en intervalo $[0, 1]$ y sean A, B dos canastas de bienes.

- Linealidad en probabilidad

  Si U es la función de utilidad entonces se cumple que

  $$U(pA + (1-p)B) = pU(A) + (1-p)U(B)$$

  Esta propiedad dice que la utilidad de una canasta compuesta por bienes de dos canastas es igual a la ponderación de las utilidades que se obtienen con cada canasta. Es decir, p representa la proporción de la canasta A y $1-p$ la propoción de la canasta B que componen la nueva canasta.

- Intermediación

  $$A \succ B \Rightarrow A \succ pA + (1-p)B \succ B$$

  La propiedad de intermediación implica curvas de indiferencia con forma de línea recta. Esta propiedad dice que la canasta compuesta por bienes de dos canastas se encuentra entra las canastas en el orden parcial de preferencias.

- Separabilidad

  Las preferencias pueden ser “separadas” en eventos mutuamente excluyentes. Se puede ver dicha separación de las siguientes maneras.
  • Separabilidad de reemplazo: La contribución de cada resultado x_i y su respectiva probabilidad p_i a la utilidad esperada total de una acción alternativa es independiente a las demás parejas de resultados y probabilidades.
  • Separabilidad como mezclas: La contribución de cada pareja de resultado y probabilidad a la utilidad esperada total puede ser desglosada en la utilidad de x_i multiplicada por p_i.

- Consistencia dinámica

Esta propiedad dice que cuando el problema se puede desglosar en un arreglo dinámico, las decisiones de cada etapa del arreglo son equivalentes a las del problema global de modo que puede obtenerse la utilidad óptima.

Se pueden consultar más propiedades de la teoría de utilidad esperada en el libro de Edwards [ED92][pp. 7-19], así como un análisis más detallado de las consecuencias de las propiedades y casos en los que no se cumplen.

Suponiendo que se logra resolver el problema de programación lineal mencionado anteriormente; matemáticamente no se puede objetar que dicha solución sea óptima ni que sea factible, sin embargo, económicamente dicha factibilidad es bastante cuestionable. Los consumidores normalmente solo están dispuestos a adquirir un producto si se les ofrece a un precio menor o igual al valor asignado por ellos mismos, determinando la cantidad del producto adquirido dependiendo del precio. De este modo, en función del precio, los consumidores en el mercado adquieren cierta cantidad del producto, considerándose normalmente que a menor precio los consumidores demandan mayor cantidad.

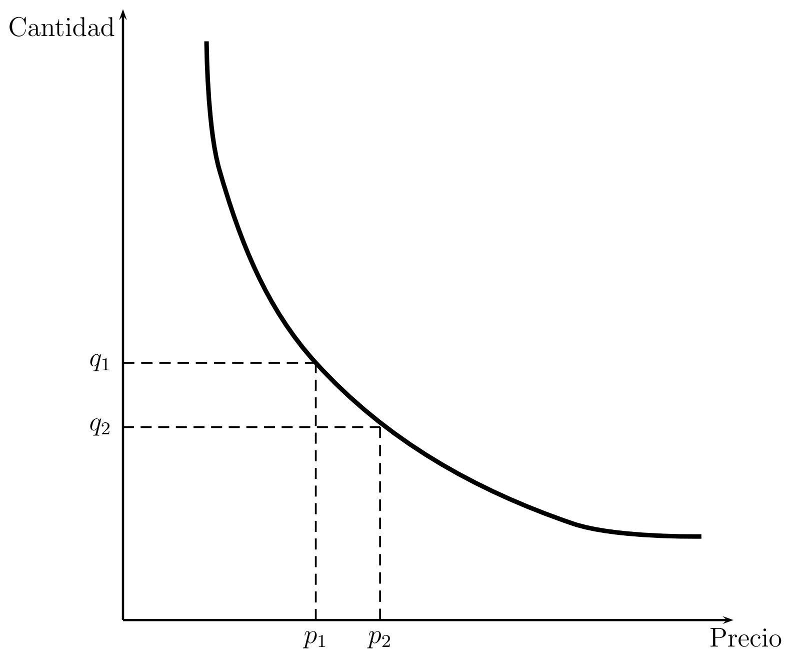

Figura 1.1: Curva de demanda del mercado

Por otra parte, no es conveniente producir grandes cantidades de un producto si el mercado lo demanda poco. De modo que dependiendo del precio el productor determina la cantidad que fabrica y oferta. Normalmente entre mayor sea el precio que paga el mercado por el producto mayor es la cantidad ofertada.

Tomando en cuenta ambas perspectivas el mercado "tiende" a un equilibrio donde todos los consumidores satisfacen sus necesidades y los productores venden todos sus productos.

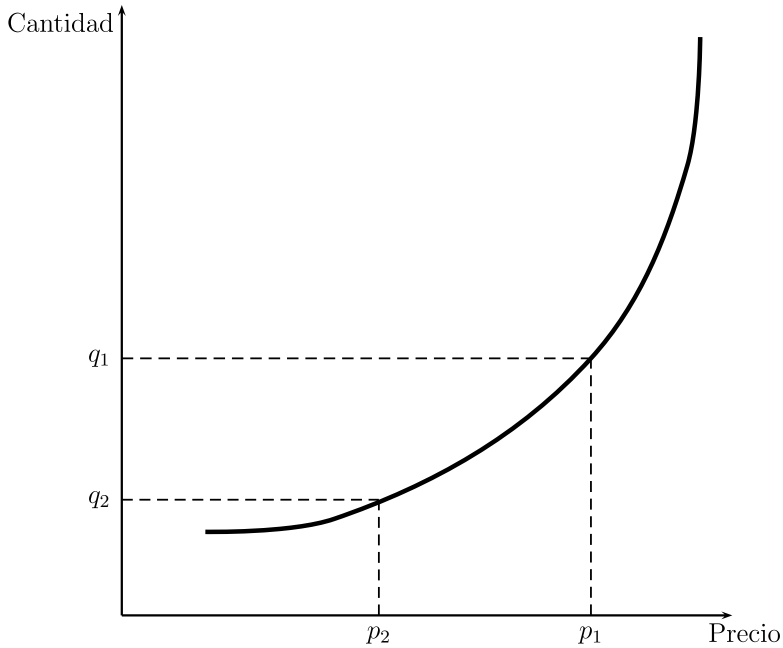

Figura 1.2: Curva de oferta del mercado

Se puede observar en las figuras 1.1 y 1.2 que al mismo precio p_1 la cantidad ofertada es diferente a la demandada q_1, también a un precio p_2 difieren las cantidades ofertadas y demandadas q_2. De esta manera si el precio es muy elevado los consumidores obligan al productor a bajarlo al no comprarle y análogamente si el precio es muy bajo el productor eleva el precio sabiendo que hay consumidores que le siguen comprando.

En la figura 1.3 se observa que el punto de intersección de la curva de oferta con la curva de demanda es el punto denotado como E, el cual es el punto de equilibrio. En dicho equilibrio, se produce y consume la misma cantidad q_E la cual se vende y compra a un precio p_E. En la figura 1.4 se puede ver que a un precio $p_1 < p_E$ se producen q_1^p unidades del producto pero el mercado demanda q_1^c unidades del mismo para $q_1^p < q_1^c$, lo que ocasiona que haya personas dispuestas a pagar un precio mayor a p_1 con tal de obtener el producto. Suponiendo que hay personas

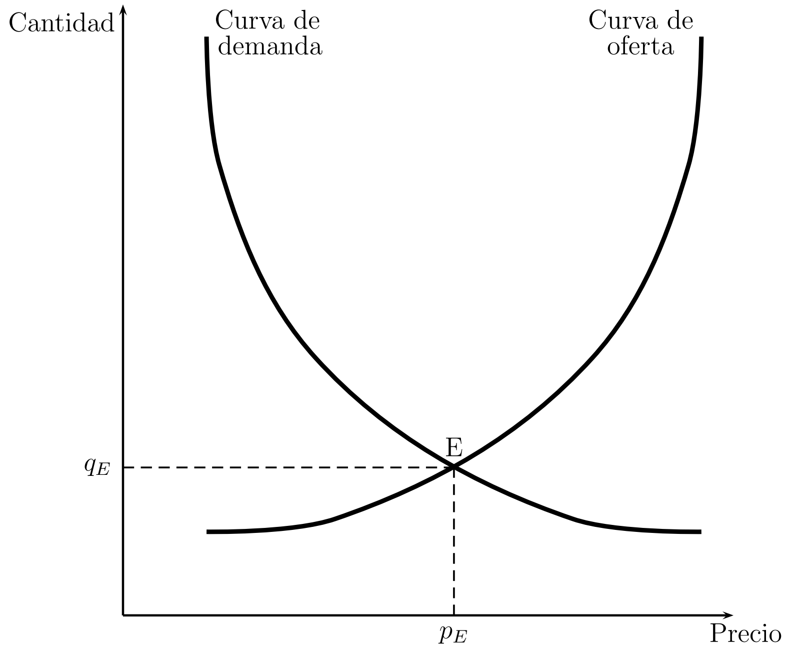

Figura 1.3: Equilibrio del mercado

dispuestas a pagar p_2 por el producto, el productor puede producir q_2^p unidades y venderlas a un precio p_2 pero la cantidad demandada por el mercado q_2^c es menor que la producida ocasionando "pérdidas" al no vender $q_2^p - q_2^c$ unidades, dichas pérdidas ocasionan que el precio baje junto con la cantidad ofertada. Así como hay períodos donde la cantidad ofertada es mayor que la demandada, hay periodos donde la cantidad demandada es mayor que la ofertada ocasionando que el precio se incremente junto con la cantidad ofertada. De este modo se va convergiendo al equilibrio en el largo plazo.

Esta es la idea que pone en tela de juicio la factibilidad de la solución obtenida mediante el algoritmo simplex. ¿Por qué pagar un precio elevado si venden el mismo producto a un menor precio y todavía hay capacidad disponible? Se puede no comprar el producto para que al siguiente período bajen los precios. Así mismo, ¿por qué vender a un precio bajo si hay gente dispuesta a comprar el mismo producto a un mayor precio? Se puede vender el producto a quien ofrezca más para obtener una mayor ganancia.

Aquí es donde las características de los problemas de *Revenue Management* entran en juego. Se puede aprovechar la heterogeneidad del mercado para implementar mecanismos que impidan que alguien compre a un precio más bajo del que esta dispuesto a pagar (*fencing*), como también se puede dar prioridad a los clientes que pagan más y posteriormente vender a menor precio lo que resta de la capacidad.

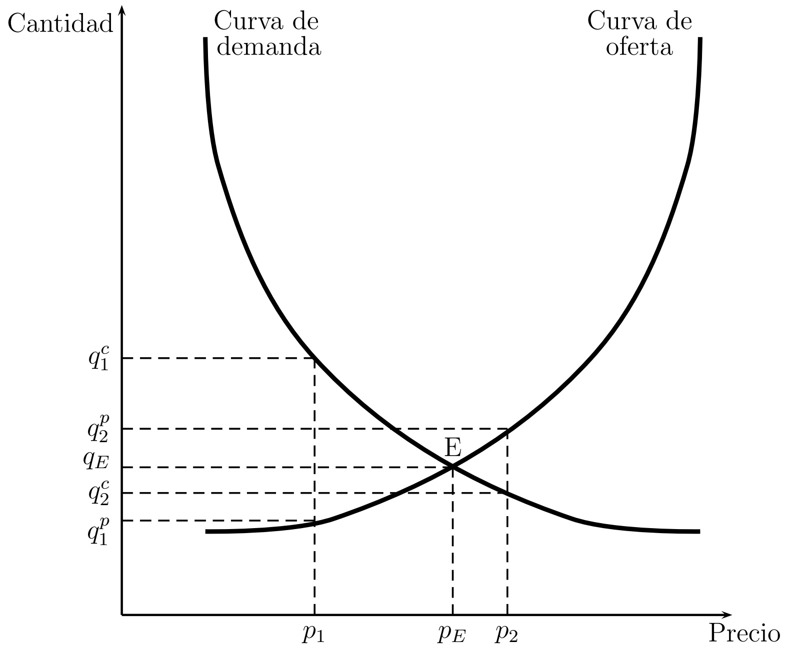

Figura 1.4: Convergencia al equilibrio

Se puede observar en la gráfica de la figura 1.4 que el precio p_1 determina de manera "única" la cantidad demandada q_1, por lo que se puede plantear el problema utilizando las cantidades que se venden a cada segmento para maximizar las ganancias. ¿Qué enfoque se debe utilizar?

En el equilibrio se venden q_E unidades a un precio p_E cada una, obteniendo una ganancia $G_E = p_E q_E$. Pero si existen $q_1 < q_E$ unidades de capacidad que pueden ser vendidas cada una a un precio p_1 obteniendo una ganancia parcial $G_1 = p_1 q_1$, se puede vender la capacidad sobrante $q_E - q_1$ a un precio $p_2 < p_1$ tal que se obtenga una ganancia total $G = G_1 + p_2(q_E - q_1)$ que sea mayor a la ganancia del equilibrio G_E.

Suponiendo que aún al precio p_2 no se vende toda la capacidad restante, es decir, la ganancia al momento es $G_2 = p_1 q_1 + p_2(q_2 - q_1)$ donde $0 \leq q_2 < q_E$ y se tiene todavía para vender $q_E - q_1 - q_2$ unidades. Entonces se puede buscar un precio $p_3 < p_2$ tal que se obtenga una ganancia total $G = G_1 + G_2 + p_3(q_E - q_1 - q_2)$ que sea mayor a la ganancia del equilibrio G_E.

Es sencillo ver que si se implementan los mecanismos necesarios para impedir que alguien compre a un precio menor del que valuaba el producto entonces se puede segmentar al mercado en distintas clases para obtener una ganancia mayor que la que se obtiene en el equilibrio. Esto se puede ver intuitivamente en la gráfica de la figura 1.5 de la siguiente manera: la ganancia obtenida al vender q_E unidades a un precio p_E es el área del cuadrado formado por los puntos (0,0), (p_E,0), (p_E,q_E) y (0,q_E). Al venderle a la "clase" i a un precio p_i, se abarca la parte del área del cuadrado correspondiente a los puntos (0,q_{i-1}), (p_E,q_{i-1}), (p_E,q_i) y (0,q_i) y además el área del rectángulo correspondiente a los puntos (p_E,q_{i-1}), (p_i,q_{i-1}), (p_i,q_i) y (p_E,q_i) considerando $q_0 = 0$. De esta manera se obtiene la ganancia del equilibrio más las ganancias de cada rectángulo. El razonamiento anterior nos lleva a la siguiente proposición:

Proposición 1.4.1

Dado el segmento de mercado que tiene un ofertante, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto de precios $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ con $p_E = p_n < \ldots < p_1$ tal que al implementar mecanismos adecuados para impedir que los consumidores compren los productos a un precio menor de su valuación se obtiene una ganancia G mayor a la obtenida en el equilibrio G_E.

Demostración:

Sea $n \in \mathbb{N}$, sean $p_E = p_n < \ldots < p_1$ los precios ofertados a cada clase y sean $q_E = q_n > \ldots > q_1$ las cantidades demandadas a esos precios. La capacidad consumida por la clase i a un precio p_i es $q_i - q_{i-1}$. Se define $q_0 = 0$, entonces la ganancia es igual a

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{i=1}^{n} p_i(q_i - q_{i-1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} p_n(q_i - q_{i-1}) \\
&= p_n \sum_{i=1}^{n} (q_i - q_{i-1}) \\
&= p_n(q_n - q_0) \\
&= p_E q_E \\
&= G_E \\
\therefore G &\geq G_E
\end{aligned}
$$

Se puede observar que la ganancia es mayor entre más fina es la partición (el número de clases es mayor). En el límite, cuando n tiende a infinito, la ganancia es máxima; pero dicho caso es cuando se sabe el precio que esta dispuesto a pagar cada consumidor, es decir, un caso utópico. La idea del *Revenue Management* es maximizar las ganancias al explotar lo mejor posible la heterogeneidad de los consumidores. Modificar los precios a voluntad no siempre es posible, dependiendo de la industria en donde se aplique por lo que conviene darle un enfoque de restricción de venta al problema. En otros casos la cantidad de producto ya está establecida, por lo que el problema se enfocará en los precios. Así, el problema puede enfocarse con base en los precios o en las restricciones de venta.

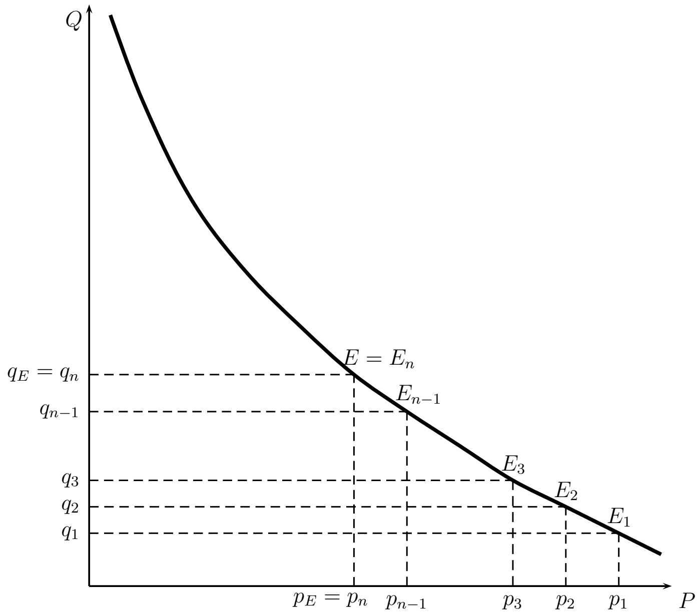

Figura 1.5: Motivación *Revenue Management*

Capítulo 2

Revenue Management

"La ciencia se compone de errores, que a su vez,
son los pasos hacia la verdad."
Julio Verne

Como ya se mencionó anteriormente, el *Revenue Management* surgió de la industria de la aviación comercial como consecuencia de la desregularización en Estados Unidos. Posteriormente se fue aplicando a otras industrias como los hoteles, cruceros, ferrocarriles, arrendadoras y otras industrias con problemas similares.

El *Revenue Management* está relacionado con decisiones de cómo administrar la demanda. La metodología y los sistemas requeridos para lograrlo forman parte de la disciplina. Talluri y Van Ryzin mencionan en su libro [TV05][p. 2] que el *Revenue Management* se puede pensar como el complemento del *Supply-chain Management*, incidiendo en los procesos de la empresa y el manejo de inventarios con el objetivo de reducir los costos de producción y entrega.

Existen otros términos que se utilizan para hacer referencia al *Revenue Management* en las diversas industrias, algunos de ellos son *pricing and revenue management, pricing and revenue optimization, revenue process optimization, demand management, demand-chain management* y *yield management.*

Michael Müller-Bungart [MB07][pp.7-15] resalta varias industrias en las se ha aplicado el *Revenue Management* y referencia trabajos sobre las distintas áreas en donde se ha desarrollado.

2.1. ¿Qué es el *Revenue Management*?

Se utiliza el término más general de ***Revenue Management*** para hacer referencia a la amplia gama de técnicas, decisiones, métodos, procesos y tecnologías involucradas en la administración de la demanda.

En general, se avoca a tres categorías básicas de las decisiones en la administración de la demanda: estructurales, respecto a los precios y respecto a la oferta.

Las decisiones estructurales comprenden el formato de venta a utilizar, el mecanismo a implementar para segmentar el mercado en el caso de ser necesario, las condiciones de venta a ofertar, la manera de agrupar los productos, etcétera.

Las decisiones de precio contemplan la asignación, publicación, promoción, segmentación, caducidad y políticas relacionadas con los precios. Por último, las decisiones respecto a la oferta reparan sobre aceptación o rechazo de solicitudes de compra, asignación de la capacidad de oferta a los distintos segmentos del mercado, productos o canales de venta, almacenaje de producción para venderse después y demás decisiones relacionadas con el control de la capacidad.

Talluri y Van Ryzin [TV05][p. 3] mencionan que cualquier empresa depende del contexto en el que se encuentre para determinar cuál de estas categorías es prioritaria. Normalmente estas decisiones se analizan repetidamente cada cierto tiempo de forma que se puede pensar en el problema de la administración de la demanda como un juego de tres etapas.

Los distintos productos pueden competir en capacidad de producción o compartir costos de producción. Adicionalmente a las restricciones de demanda, el comportamiento de los consumidores incide en dichas decisiones. Los consumidores pueden en cualquier momento formular estrategias sobre el tiempo de compra. Como consecuencia, las decisiones que las empresas toman respecto al precio o la cantidad de un producto pueden afectar la demanda de los productos relacionados o la demanda futura del producto mismo.

Por último, las decisiones de demanda para diferentes productos, consumidores y lapsos de tiempo pueden estar relacionadas de acuerdo a la información obtenida históricamente. Así, a través del tiempo, la demanda observada puede dar información sobre la demanda futura. De esta manera, una decisión sobre el precio el día de hoy puede afectar la información que se obtenga sobre la sensibilidad de la demanda, la cual afectará las decisiones futuras del precio.

2.2. Características de los problemas

En la sección anterior se mencionó el problema al que se enfrentó American Airlines y que salió avante gracias a los *Ultimate Super Savers*, que eran asientos excedentes que podían vender a precios bajos. Pero más que por dicho producto, el éxito de American Airlines se debió al sistema DINAMO (*Dynamic Inventory Allocation and Maintenance Optimizer*) que fue implementado en enero de 1985 luego de varios años de desarrollo y refinamiento, el cual fue el primer sistema de *Revenue Management* como tal.

Después de conocer la ingeniosa solución que encontró American Airlines a su problema, surge la pregunta inmediata: ¿Bajo qué condiciones se puede aplicar el *Revenue Management*? Müler-Bungart [MB07][pp. 2-6] expone los siguientes requisitos para poder aplicarlo:

1. Necesidad de factores externos.

2. Flexibilidad de operación limitada.

3. Heterogeneidad en las valuaciones y el comportamiento.

4. Rangos estándar de los productos.

Por su parte, Talluri y Van Ryzin [TV05][pp. 13-16] consideran que los problemas de *Revenue Management* requieren de:

1. Heterogeneidad de los consumidores.

2. Variabilidad e incertidumbre de la demanda.

3. Inflexibilidad de producción.

4. El precio como señal de calidad.

5. Existencia de información y bases de datos.

6. Cultura administrativa.

Como se mostró en la proposición 2.1, la heterogeneidad de la valuación de los consumidores bajo el supuesto de que el precio es señal de calidad se puede utilizar para obtener una ganancia mayor a la que se obtendría en el equilibrio al segmentar el mercado. La falta de flexibilidad en la producción es un factor importante pues en caso contrario se podría producir lo necesario cada período sin el problema de decidir a quién venderle, eliminando las pérdidas por mercancías no vendidas. Finalmente, se requiere de rangos estándar, cultura administrativa y acumulación de información para poder realizar estimaciones y previsiones de la demanda. Las bases de datos son importantes dado que conforme ha crecido la capacidad operacional de las computadoras se han podido analizar mayor cantidad de información, haciendo posible resolver problemas más complejos para obtener mejores resultados.

En general el *Revenue Management* sigue los siguientes pasos:

1. Recolección de la información.
2. Estimación y predicción.
3. Optimización.
4. Control de ventas.

Los procesos de *Revenue Management* involucran estos cuatro pasos de manera cíclica cada cierto tiempo. La frecuencia con la que se inicia un nuevo ciclo puede ser función de varios factores como el volumen de la información, la velocidad con la que cambian las condiciones del negocio, el tipo de método utilizado para las estimaciones y predicciones y la importancia relativa de las decisiones resultantes.

2.3. Visiones del *Revenue Management*

Una vez que la empresa alcanza la fase de optimización puede abordar el problema desde dos enfoques distintos: de restricción de inventarios o de precios. En el enfoque de restricción de inventarios se decide el volumen de productos por vender a cada segmento del mercado para obtener la ganancia máxima posible, suponiendo precios fijos. Por otra parte, el enfoque de precios se avoca a determinar los precios para vender los productos a cada segmento de manera que se maximicen las ganancias bajo el supuesto de que el inventario total esta repartido entre los segmentos del mercado.

Es importante notar que existen industrias en donde no se puede modificar el precio fácilmente, por ejemplo la industria farmacéutica, y existen otras que aunque tienen flexibilidad en los precios no pueden modificar su inventario, por ejemplo la industria hotelera. De modo que dependiendo de las limitaciones o las ventajas que tenga la industria de que se trate conviene usar un enfoque u otro del *Revenue Management*.

2.3.1. Enfoque de restricción de inventarios

El problema del *Revenue Management* desde el enfoque de restricción de inventarios se puede pensar como sigue: se tiene un inventario C de cierto producto que se desea vender. El mercado para este producto está segmentado en n clases diferentes y a cada clase se le puede vender cada producto a un precio ya dado, siendo v_j el precio pactado para la clase $j = 1, \dots, n$. Por otra parte, se sabe que la demanda de la clase j tiene una distribución $F_j(\cdot)$. Con base en dicha información se desea determinar el inventario por vender a los distintos segmentos de consumidores. Es decir, el problema principal es determinar la cantidad que se debe vender a cada clase de modo que las ganancias de la empresa se maximicen. Dicha repartición debe hacerse dinámicamente conforme se materializa la demanda bajo incertidumbre sobre la cantidad o la composición futura de la demanda.

Se consideran los siguientes controles de la demanda:

- **Límite de venta**

  Los límites de venta son controles que restringen la cantidad de inventario asignado para venderse a una clase particular de consumidores en cualquier punto en el tiempo, se denota como b_j al límite de venta de la clase j.

  Se dice que son **particionados** si dividen el inventario disponible en bloques separados, uno para cada clase formando una partición, que sólo pueden venderse a la clase designada.

  Si la capacidad disponible para las distintas clases se traslapa de manera jerárquica, con la clase de mayor jerarquía teniendo acceso a toda la capacidad reservada para las clases de menor jerarquía, se dice que los límites de venta son **anidados**.

- **Nivel de protección**

  El nivel de protección es el inventario que se reserva para venderse a un conjunto de segmentos de consumidores. Los niveles de protección pueden ser anidados o particionados. Un nivel de protección particionado es equivalente a un límite de venta particionado. Para el caso anidado los niveles de protección son definidos por conjuntos de clases, ordenados de manera jerárquica de acuerdo al orden de las clases.

Generalmente, se supone que la clase 1 es la mayor y la clase n es la menor, de forma que el nivel de protección j se define como la cantidad de capacidad a resguardar para las clases $j, j-1, \ldots, 1$ en conjunto y se denota como y_j.

- **Precios umbral**

  El precio límite que sirve para determinar si se acepta una solicitud de compra de cierta clase con base en la ganancia que genera recibe el nombre de precio umbral.

  Dichos precios pueden depender de variables tales como la capacidad o tiempo restantes por lo que comúnmente se denotan como una función $\pi(x,t)$. Es importante actualizar con cada venta el precio umbral y de ser posible con el tiempo, ya que de no hacerlo se puede incurrir en vender un cantidad ilimitada del producto a cualquier clase que genere una ganancia mayor al precio umbral inicial.

Se puede observar que el límite de venta b_j que corresponde a la clase j, es simplemente el inventario menos el nivel de protección para las clases $j-1, \ldots, 1$. Esto es $b_j = C - y_{j-1}$ donde C es la capacidad y $j = 2, \ldots, n$. Por convención, se definen $b_1 = C$ y $y_n = C$. Con ayuda de esta relación, pueden obtenerse los límites de venta a través de los niveles de protección y viceversa. Además se puede definir una función de precios umbral $\pi(x)$ en función de cualquiera de ellos aunque no se considere el tiempo.

Existen dos tipos de anidamientos tanto para niveles de protección como para límites de venta: el estándar y el ladrón. A la fecha está abierta la discusión sobre cuál de los dos genera mejores ganancias. Müller-Bungart [MB07][pp. 39-43] ejemplifica la diferencia entre ambos anidamientos además de dar un algoritmo para calcular los límites de venta anidados para el caso en que la demanda llega en bloques.

Ya en el proceso de venta, si se tienen C unidades de capacidad, de manera dinámica, se acepta una solicitud de la clase j si se cumplen los siguientes requisitos:

i) Todavía hay capacidad.

ii) El número de ventas realizadas a la clase j actualmente es menor que su límite b_j o equivalentemente el inventario disponible es mayor que el nivel de protección y_{j-1}.

El anidamiento estándar reduce en uno y_j cuando se acepta una solicitud para la clase j mientras que el anidamiento ladrón además "roba" capacidad a todas las clases menores, es decir, se reducen en uno $y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n$.

Las dos maneras de anidar son equivalentes si la demanda arriba estrictamente de la clase con menor jerarquía a la de mayor jerarquía, es decir, si la demanda para la clase n llega primero, seguido de la demanda para la clase $n-1$ y así sucesivamente hasta que finalmente llega la demanda para la clase 1.

Una ventaja potencial del control mediante los precios umbral es su habilidad para discriminar basándose en las ganancias más que en las clases. Es común que un número de consumidores con valuaciones distintas de un producto sean agrupados en una sola clase y los sistemas de *Revenue Management* utilicen el precio promedio como el precio asociado a la clase. Sin embargo, si hay información disponible sobre las ganancias para cada periodo, un control mediante precios umbral puede aceptar selectivamente solo los pedidos que generen una mayor ganancia en cada clase, mientras que un control basado únicamente en la designación de clases puede aceptar o rechazar todos los pedidos de una clase. Por supuesto que si no es posible observar las ganancias exactas al momento del pedido entonces esa ventaja se pierde.

2.3.2. Enfoque de precios

El enfoque de control de inventarios del *Revenue Management* considera el fenómeno de la demanda como externo al ofertante pero de cierto modo controlable mediante ciertas decisiones y acciones. A diferencia de los controles de inventario, en este enfoque se van modificando los precios a lo largo de un período de acuerdo a lo que se necesite. Los principales controles mediante el cambio en los precios son:

- **Precios dinámicos**

  Se controla totalmente la demanda mediante cambios en los precios, los cuales pueden ser seleccionados ya sea de un conjunto finito de valores o de un intervalo real, con el fin de maximizar las ganancias. Es importante notar que el mecanismo de precios dinámicos pretende establecer precios de modo que en promedio se agote la capacidad al final de cada periodo y a diferencia de los controles de capacidad en este enfoque no se rechaza demanda alguna. De manera que lo ideal es vender la demanda conforme van llegando solicitudes y se modifican los precios para garantizar que la capacidad se venda en su totalidad.

- **Subastas**

  Las subastas son mecanismos que especifican la forma de revelar la información entre los compradores y los vendedores, otorgar bienes a los consumidores y con base en la información revelada advertir los pagos realizados por los consumidores. Binmore [BI07][pp. 593-624] expone distintos tipos de subastas y realiza un análisis sobre cómo la selección del tipo de subasta hace que los consumidores incrementen su valuación de los productos.

2.4. Modelos de control de inventario

En esta sección se presentan tres modelos para calcular límites de venta: el modelo determinista, el modelo no lineal probabilístico y el modelo lineal probabilístico, cabe mencionar que dichos modelos tienen un enfoque de control de inventario. Estos modelos consideran los siguientes supuestos:

i) La demanda de las diferentes clases está representada por intervalos disjuntos en orden creciente respecto a los precios que pagan.

ii) Las variables aleatorias correspondientes a la demanda de cada clase son independientes entre sí.

iii) La demanda para una clase dada no depende de los controles de inventario. En particular, la disponibilidad de cada clase es independiente de las otras.

iv) La demanda agregada llega en una sola exhibición y la decisión se reduce a la cantidad que se debe aceptar.

v) La demanda se considera desagregada. En caso de una solicitud grupal, ésta se puede aceptar parcialmente.

vi) Neutralidad al riesgo.

Así, un **producto** se considera como la combinación de una canasta de bienes con un precio.

Si el mercado puede segmentarse en n clases entonces el problema es determinar el número máximo a venderse del producto j, $j = 1, \ldots, n$. Es decir, si hay n productos y b_j es el límite de venta del producto $j = 1, \ldots, n$ entonces se aceptan pedidos del producto j hasta que la cantidad total solicitada sea mayor o igual a b_j. La contribución marginal a la ganancia del producto j se denota como $v_j > 0$ y representa el valor máximo que asigna el consumidor al producto. Sea m el número de bienes que conforman la canasta, c_i el inventario disponible del bien i y r_{ij} la cantidad del bien i que consume el producto j.

2.4.1. Modelo determinista

Este modelo supone una demanda determinista para el producto j dada por $d_j \geq 0$. Si la cantidad de un producto j se puede medir de manera continua entonces el límite de venta b_j puede ser cualquier número real no negativo. El modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllll} \max & \sum_{j=1}^{n} v_j b_j & & & \\ \text{s.a.} & & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} r_{ij} b_j \leq c_i & i & = & 1,\ldots,m \\ & 0 \leq b_j \leq d_j & j & = & 1,\ldots,n \end{array}$$

El modelo determinista es un problema de programación lineal por tanto se puede resolver de manera eficiente mediante el algoritmo simplex. De requerirse límites de venta discretos b_j la última restricción del modelo se debe reemplazar por $b_j \in \mathbb{N}_0$ y el problema se vuelve NP-difícil.[1]

En particular, para este modelo la variable aleatoria de la demanda del producto j toma un valor d_j con probabilidad 1; es decir, $\mathbb{P}(D_j = d_j) = 1$.

2.4.2. Modelo probabilístico no lineal

Suponiendo que la demanda D_j es una variable aleatoria discreta se obtiene el modelo siguiente:

$$\begin{array}{lllll} \max & \sum_{j=1}^{n} v_j \left[\sum_{k=1}^{b_j - 1} k\mathbb{P}(D_j = k) + b_j \mathbb{P}(D_j \geq b_j) \right] & & & \\ \text{s.a.} & & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} r_{ij} b_j \leq c_i & i & = & 1,\ldots,m \\ & b_j \in \mathbb{N}_0 & j & = & 1,\ldots,n \end{array}$$

[1]El problema contiene los problemas H tales que todo problema L no polinomial puede ser transformado polinomialmente en H. Esta clase puede ser descrita como aquella que contiene los problemas de decisión que son al menos tan difíciles como un problema de NP

Este segundo modelo maximiza la ganancia esperada al fijar los límites de venta b_j para la clase $j = 1, \ldots, n$. Como la función objetivo no es lineal respecto a las variables de decisión, deja de ser un problema de programación lineal. Sin embargo, se puede construir un problema de programación lineal equivalente al problema del modelo para poder hacer uso de herramientas ya conocidas: el algoritmo simplex o programación dinámica.

2.4.3. Modelo probabilístico lineal

Para obtener un modelo lineal con base en el modelo anterior se define:

$$\bar{b}_j = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{c_i}{r_{ij}}$$

Las variables $\bar{b}_j$ son una cota superior para los límites de venta, ya que si se venden más productos entonces se incurre en la insuficiencia de algún bien para satisfacer las solicitudes. Las variables de decisión se definen como:

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_j = k \qquad j = 1, \ldots, n \quad k = 1, \ldots, \bar{b}_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede ver que $\sum_{k=1}^{\bar{b}_j} x_{jk} \leq 1$ para cada j y que si $\sum_{k=1}^{\bar{b}_j} x_{jk} = 0$ entonces el límite de venta para la clase j también es cero. Se puede entonces expresar el límite de venta para la clase j como:

$$b_j = \sum_{k=1}^{\bar{b}_j} k x_{jk}$$

De esta forma la ganancia esperada obtenida si el límite de venta del producto j se fija en k es:

$$v_{jk} = v_j \left[\sum_{l=1}^{k-1} l\mathbb{P}(D_j = l) + k\mathbb{P}(D_j \geq k) \right]$$

Finalmente el problema de programación lineal se puede expresar como:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\bar{b}_j} v_{jk}x_{jk} \\
\text{s.a.} & \\
& \begin{array}{rclcrcl}
\displaystyle\sum_{k=1}^{\bar{b}_j} x_{jk} & \leq & 1 & & j & = & 1,\ldots,n \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\sum_{k=1}^{\bar{b}_j} kx_{jk} & \leq & c_i & & i & = & 1,\ldots,m \\
x_{jk} \in \{0,1\} & & & & j & = & 1,\ldots,n \quad k=1,\ldots,\bar{b}_j
\end{array}
\end{array}
$$

Nótese que las variables de decisión toman valores enteros {0,1}. De manera que el algoritmo simplex deja de ser adecuado para resolverlo. Para encontrar la solución óptima se emplea un algoritmo de programación dinámica.

2.5. Métodos de solución

Para el caso del modelo determinista el problema se reduce a uno de programación lineal y se puede resolver de manera sencilla y eficiente utilizando el Simplex. En el caso del modelo probabilístico lineal se mencionan dos métodos de solución: la regla de Littlewood en donde sólo hay dos clases y la formulación de programación dinámica de Bellman cuando hay n clases.

2.5.1. Regla de Littlewood

Talluri y Van Ryzin [TV05][p. 35] señalan que el primer modelo de Revenue Managament con enfoque de control de inventarios en donde sólo se consume un bien se debe a Littlewood. El modelo supone dos clases de consumidores por lo que sólo se consideran dos productos cuyos precios asociados son $v_1 > v_2$. C denota el volumen de inventario con el que se cuenta del bien. Adicionalmente, se supone un inventario de capacidad limitada sobre el cual todas las solicitudes de adquisición de la segunda clase se reciben con anterioridad a las solicitudes de la primer clase. El problema consiste en decidir el volumen de demanda cubierta para la segunda clase de consumidores con precio menor antes de recibir las solicitudes de la primer clase con mayor precio.

La solución que da Littlewood es una regla sencilla que se obtiene mediante el siguiente análisis marginal: suponer que quedan x unidades en el inventario cuando se recibe una solicitud de la clase 2. Si se acepta la solicitud se obtendría una ganancia segura de v_2, mientras que si no se acepta es porque se espera vender las x unidades restantes a la clase 1 a un precio mayor v_1 pero eso sólo pasará si la demanda de la clase 1 es mayor o igual a x; es decir, la ganancia esperada por reservar la x-ésima unidad de capacidad a la clase 1 es $v_1\mathbb{P}(D_1 \geq x)$.

Siguiendo el análisis conviene aceptar el pedido de la clase 2 mientras que $v_2 \geq v_1\mathbb{P}(D_1 \geq x)$. Como la función de supervivencia es decreciente, existe un nivel de protección óptimo y_1 tal que satisface que $v_2 < v_1\mathbb{P}(D_1 \geq y_1)$ y $v_2 \geq v_1\mathbb{P}(D_1 \geq y_1 + 1)$.

Si se utiliza una función de distribución continua $F_1(\cdot)$ el nivel de protección óptimo es $y_1 = F_1^{-1}(1 - \frac{v_2}{v_1})$ que se conoce como la regla de Littlewood.

La regla de Littlewood dice que es óptimo el nivel de protección y_1 y con base en los niveles de protección se pueden obtener los límites de venta con la ecuación $b_2 = C - y_1$ y la función de precios umbral $\pi(x) = v_1\mathbb{P}(D_1 > x)$.

2.5.2. Modelo de Bellman

Se puede formular un problema de programación dinámica que sea equivalente al modelo lineal probabilístico para el caso general con $n > 2$ clases de consumidores en el cual se supone que la demanda de las n clases arriba en n etapas: una para cada clase y en donde las clases solicitan en orden creciente respecto al valor superior que cada clase de consumidores le asigna al producto; es decir, se indexan las clases tal que $v_1 > v_2 > \ldots > v_n$. De este modo, la demanda de la clase n es la primera en llegar (en la etapa n), posteriormente la demanda de la clase $n-1$ y así sucesivamente hasta la demanda de la clase 1 en la primer etapa. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de estado del problema donde x_j es la capacidad restante al inicio de la etapa j. Sea D_j la variable aleatoria discreta que representa la demanda de la clase j.

Por conveniencia analítica, al inicio de cada etapa j se supone la siguiente secuencia de eventos:

1. Llega la solicitud de demanda de la clase j y se observa el valor D_j.

2. Se decide una cantidad u a aceptar de la demanda, la cual debe ser menor o igual a la capacidad restante x_j.

3. Se obtiene una ganancia de $v_j u$ y se procede a comenzar la etapa $j-1$ con una capacidad restante $x_{j-1} = x_j - u$.

Sea $G_j(x_j)$ la función de valor a inicio de la etapa j, el problema consiste en observar el valor D_j para escoger un valor u que maximice las ganancias de la etapa actual más las posteriores; es decir, $v_j u + G_{j-1}(x_j - u)$ sujeto a la restricción $0 \leq u \leq \text{mín}\{D_j, x_j\}$.

De este modo, la ecuación de Bellman es

$$G_j(x_j) = \mathbb{E}[\max_{0 \leq u \leq \text{mín}\{D_j, x_j\}} \{v_j u + G_{j-1}(x_j - u)\}]$$

con condiciones frontera $G_0(x) = 0$ para valores $x = 0, 1, \ldots, C$.

Se define el ingreso marginal esperado $\Delta G_j(x) = G_j(x) - G_j(x-1)$ con el cual obtienen los niveles de protección, en este caso el nivel de protección está dado por $y_j = \text{máx}\{x : v_{j+1} < \Delta G_j(x)\}$ para $j = 1, \ldots, C$. De esta manera se pueden obtener los límites de venta, niveles de protección y la función de precios umbral al resolver el problema de programación dinámica cuando la demanda tiene una distribución discreta.

En el capítulo 3 se incluyen ejemplos de casos particulares sencillos para ilustrar los modelos.

Capítulo 3

Aplicando el *Revenue Management*

"Dime y olvidaré,
muéstrame y podría recordar,
involúcrame y entenderé."
Proverbio Chino

A lo largo del capítulo se ejemplificará la aplicación de los modelos de control de inventario al siguiente problema: supóngase que se desea vender en el mercado cinco productos distintos compuestos por un único bien común del que se dispone un inventario de 50 unidades, es decir $C = 50$. Por simplicidad supóngase que cada consumidor consume solamente una unidad del producto. Si bien es cierto que un consumidor puede consumir más, esto no afecta el análisis ya que un consumidor que adquiere cinco unidades puede considerarse como cinco consumidores que desean una unidad. Durante el tiempo de observación del mercado se ha concluido que los consumidores asignan valores distintos al bien de modo que a cada consumidor se le asocia una "clase" relacionada con uno de los cinco productos. Los cinco valores asignados son $v_1 = 500$, $v_2 = 400$, $v_3 = 300$, $v_4 = 200$ y $v_5 = 100$, donde v_i es la valuación que le da al bien un consumidor de la clase i. Además se supone que la demanda de cada clase llega toda junta y que el orden de solicitud de los pedidos es decreciente respecto a las clases, es decir, primero arriban todos los pedidos de la clase cinco, después todos los de la clase cuatro y así sucesivamente hasta que finalmente se realizan todos los pedidos de la clase uno.

Primero se obtendrán los límites de venta, niveles de protección y función de precios umbral empleando el modelo determinista. Posteriormente se compararán los límites de venta y niveles de protección anidados con los particionados usando el modelo probabilístico lineal al ejemplificar la transformación del modelo probabilístico no lineal al modelo probabilístico lineal y mostrar el planteamiento del problema de programación dinámica. Finalmente se hará una comparación de los resultados obtenidos al emplear el *Revenue Management* al problema de optimización de ingresos mencionado. En cada modelo se harán los supuestos adicionales pertinentes.

3.1. Demanda conocida

En este primer análisis se hace el supuesto adicional de que la demanda de cada clase está determinada, es decir, la cantidad del bien que será demandada por cada clase es conocida y está dado por $d_1 = 8$, $d_2 = 9$, $d_3 = 9$, $d_4 = 12$ y $d_5 = 12$, d_i es la demanda de la clase i sobre el producto.

En este caso, la ganancia es igual a la suma del precio por el límite de venta de cada clase, esto condicionado a que el límite sea menor o igual que la demanda de su clase ya que se venderá una cantidad menor o igual a la capacidad disponible.

El problema se puede expresar como un problema de programación lineal en donde se buscan los límites de venta, niveles de protección y función de precios umbral que maximicen la ganancia. Sean $b_1, \ldots, b_5$ los límites de venta de cada clase, entonces el problema queda expresado de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & 500b_1 + 400b_2 + 300b_3 + 200b_4 + 100b_5 \\
\text{s.a.} \\
& b_1 + & b_2 + & b_3 + & b_4 + & b_5 & \leq & 50 \\
& b_1 & & & & & \leq & 8 \\
& & b_2 & & & & \leq & 9 \\
& & & b_3 & & & \leq & 9 \\
& & & & b_4 & & \leq & 12 \\
& & & & & b_5 & \leq & 12 \\
& b_j \geq 0 & & & & & & j = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

Para resolver el problema utilizando el algoritmo simplex, se transforma a su forma estándar utilizando las variables de holgura $b_6, \ldots, b_{11}$ quedando de la forma:

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\max & 500b_1 + 400b_2 + 300b_3 + 200b_4 + 100b_5 \\
\text{s.a} \\
& b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 & & & & & & = 50 \\
& b_1 & + b_7 & & & & & = 8 \\
& b_2 & & + b_8 & & & & = 9 \\
& b_3 & & & + b_9 & & & = 9 \\
& b_4 & & & & + b_{10} & & = 12 \\
& b_5 & & & & & + b_{11} & = 12 \\
& b_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, 11
\end{array}
$$

Como se puede apreciar, las variables de holgura forman una base inicial factible, lo que facilita el trabajo inicial del algoritmo utilizado para su resolución.

3.1.1. Límites de venta

En este caso la demanda y la capacidad determinadas son suficiente para satisfacer la demanda agregada. Es óptimo aceptar todos los pedidos obteniendo una ganancia de $13,900. Los límites de venta óptimos son $b_1 = 8$, $b_2 = 9$, $b_3 = 9$, $b_4 = 12$ y $b_5 = 12$. El límite óptimo es igual a la demanda de la clase, lo que tiene sentido ya que si se pone un límite menor entonces hay pedidos que no se satisfacen y a la vez sobra capacidad.

3.1.2. Niveles de protección

Dado que las clases forman una partición del mercado entonces los niveles de protección son iguales a los límites de venta, es decir, $y_1 = 8$, $y_2 = 9$, $y_3 = 9$, $y_4 = 12$ y $y_5 = 12$ donde y_i es la capacidad que se protege para la clase i.

3.1.3. Función umbral

La función de precios umbral queda dada por

$$
\pi(x) = \begin{cases} 500 & \text{si } 0 \leq x < 9 \\ 400 & \text{si } 9 \leq x < 18 \\ 300 & \text{si } 18 \leq x < 27 \\ 200 & \text{si } 27 \leq x < 39 \\ 100 & \text{si } 39 \leq x \leq 50 \end{cases}
$$

Donde x es la cantidad del producto disponible al momento.

3.1.4. Análisis del caso determinista

Para este primer análisis basta con ofertar un inventario igual a la demanda agregada del mercado, obteniendo la solución óptima de vender todo al precio que cada cliente esta dispuesto a pagar. Por otra parte, el anidamiento no tiene sentido ya que los límites particionados y los anidados son equivalentes.

3.2. Demanda Poisson con método Bellman

Para el segundo análisis se supone que la demanda de la clase i es una variable aleatoria que distribuye Poisson con media λ_i, para $i = 1, \ldots, 5$.

Para ejemplificar el método de Bellman se realizó una simulación para generar una base de datos del número de pedidos de cada clase en los últimos 50,000 ejercicios de una compañía en donde los datos tienen una distribución uniforme discreta, buscando que $\mathbb{E}[D_i] = d_i$ para poder mostrar que en el caso probabilista dejan de ser óptimos los límites de venta particionados. Se utilizarán los primeros 30,000 datos para ajustar los parámetros λ_j con los que se obtendrán los niveles de protección y posteriormente se analizará su efectividad con la información de los restantes 20,000. Es decir, se hará una comparación de la ganancia obtenida sin utilizar *Revenue Management* con la obtenida usando límites de venta particionados, límites de venta estándar y la ganancia máxima posible de cada ejercicio al suponer una distribución Poisson aún cuando se sabe que tiene una distribución distinta.

Para determinar los parámetros λ_i, $i = 1, \ldots, 5$, se calcula el estimador máximo verosímil de la media de una distribución Poisson cuando se cuenta con una muestra de tamaño n:

$$\begin{aligned}
L(\lambda|x) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
\Rightarrow log(L(\lambda|x)) &= -n\lambda + log(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}) \\
&= -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} log(\lambda^{x_i}) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i!) \\
&= -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i!)
\end{aligned}$$

Derivando de ambos lados de la ecuación con respecto a λ:

$$\frac{\partial logL}{\partial\lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda}$$

Finalmente, igualando a cero en el estimador máximo verosímil:

$$\begin{aligned} -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\hat{\lambda}} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\lambda} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

Es decir, el estimador máximo verosímil del parámetro λ es la media muestral. Calculando las medias muestrales de cada demanda se obtiene que $\hat{\lambda_1} = 8$, $\hat{\lambda_2} = 9$, $\hat{\lambda_3} = 9$, $\hat{\lambda_4} = 12$ y $\hat{\lambda_5} = 12$, es decir, se espera vender cincuenta unidades en total y $\hat{\lambda}_i$ unidades a la clase i para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

El problema ahora es bastante similar al anterior, solamente cambia el hecho de que no se conoce la demanda que se tendrá pero se espera en promedio la misma demanda que en el caso determinista. ¿Es óptimo conservar los límites de venta anteriores? ¿Conviene que sean particionados o anidados? En el caso de la demanda determinista eran equivalentes los límites particionados a los anidados. En este caso se compararán los resultados obtenidos con ambos.

Por simplicidad del análisis se supone que toda la demanda de cada clase se obtiene al mismo tiempo, de este modo se puede usar el modelo lineal probabilístico para obtener los límites de venta definido en la sección anterior. En este caso, como el producto consta sólo de un bien y cada venta consume una unidad de inventario de éste independientemente de la clase, el límite superior $\bar{b_j}$ del límite de venta para la clase j es igual a 50 y $r_{1j} = 1$, $j = 1, \ldots, 5$. De modo que el modelo se simplifica como sigue:

$$\text{Max} \quad z = \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{50} v_{jk} x_{jk}$$

s.a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} x_{jk} &\leq 1 \qquad j = 1, \ldots, 5 \\ \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{50} k x_{jk} &\leq 50 \\ x_{jk} \in \{0, 1\} & \qquad j = 1, \ldots, 5,\ k = 1, \ldots, 50 \end{aligned}$$

Donde las variables de decisión son $x_{jk} = \mathbb{I}_{\{k\}}(b_j)$, $j = 1, \ldots, 5$ y $k = 1, \ldots, 50$, las cuales toman valor de cero o uno. Como se mencionó en la sección anterior, el algoritmo Simplex ya no es eficiente por ser un problema de programación lineal entera y es necesario construir un problema de programación dinámica equivalente. El problema de programación dinámica queda de la siguiente manera:

Las variables de estado son la cantidad de capacidad x_j disponible al inicio de cada etapa $j = 1, 2, 3, 4, 5$. La función de valor del estado j es

$$G_j(x) = \mathbb{E}\left[\max_{0 \leq u \leq \min\{D_j, x\}} \{v_j u + G_{j-1}(x-u)\}\right]$$

con condiciones frontera $G_0(x) = 0$ para $x = 0, 1, \ldots, 50$.

Al inicio de cada etapa j se supone que no han llegado las demandas $D_j, D_{j-1}, \ldots, D_1$; es decir, no se han recibido los pedidos de las clases $j, j-1, \ldots, 1$. Además se supone la siguiente secuencia de eventos:

1. Se reciben todos los pedidos de la clase j de modo que se observa el valor de D_j.

2. Se determina la demanda aceptada $u \leq x_j$ que maximice $G_j(x)$ obteniendo una ganancia $v_j u$.

3. Se procede a iniciar la etapa $j-1$ con una capacidad $x_{j-1} = x_j - u$.

Los niveles de protección óptimos son los valores de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que maximizan $G_5(50)$. Los límites de venta y la función de precios umbral óptimos pueden obtenerse a partir de los niveles de protección como en el caso anterior.

3.2.1. Límites de venta particionados

Con los valores de $V_j(x)$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y $x = 1, \ldots, 50$ que se pueden encontrar en el anexo B en los cuadros B.3 y B.4 se calculan los costos de desplazamiento $\Delta G_j(x) = G_j(x) - G_j(x-1)$ (éstos se muestran en los cuadros del anexo B B.5 y B.6), con los cuales se obtienen los niveles de protección y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Obsérvese que $y_j = \max\{x : x_{j+1} < \Delta G_j(x)\},\ j = 1, \ldots, 4$ y recuérdese que por convención $y_5 = 50$ para garantizar que se tenga acceso a todo el inventario.

j	y_j	b_j
1	6	6
2	15	9
3	26	11
4	42	16
5	50	8

Cuadro 3.1: Límites de venta particionados obtenidos mediante el método de Bellman.

Una vez que se obtienen los niveles de protección se pueden calcular los límites de venta particionado usando la relación $b_j = C - y_{j-1}$, $j = 2, 3, 4, 5$, recuérdese que $y_1 = b_1$. En resumen el modelo tiene los siguientes límites de venta y niveles de protección particionados:

3.2.2. Límites de venta anidados

Para obtener los límites de venta anidados se recuerda que se traslapan de manera jerárquica por lo que cada clase tiene acceso a toda la capacidad reservada para las clases de menor jerarquía de modo que $b_5^a = b_5$ y $b_i^a = \sum_{j=i}^{5} b_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, donde b_j^a es el límite de venta anidado para la clase j.

i	b_i^a
1	50
2	44
3	35
4	24
5	8

Cuadro 3.2: Límites de venta anidados obtenidos mediante el método de Bellman.

Es importante recordar que estos límites de venta anidados corresponden al tiempo inicial, es decir, cuando todavía no se ha recibido demanda alguna. Como se supone que la demanda llega en orden decreciente con respecto al precio entonces son equivalentes el anidamiento estándar y el ladrón; además como la demanda llega en bloques sólo es necesario reajustar los límites de venta después de cada arribo.

Finalmente como la demanda llega en orden decreciente con respecto a los precios, se puede calcular $b^a_{i|i+1,\ldots,n}$, la cantidad de demanda que se esta dispuesto a aceptar de la clase i luego de observar la demanda de las clases $i+1,\ldots,5$, mediante la fórmula siguiente:

$$b^a_{i|i+1,\ldots,n} = \max\left\{\sum_{j=i}^{5} b_j - \sum_{j=i+1}^{5} D_j, \sum_{j=i}^{5} b_j - b^a_{i+1}\right\} \quad \text{para} \quad i=1,2,3,4$$

Por ejemplo, véase en el Cuadro 3.3 tomando los datos 30001 a la 30010 de la muestra uniforme generada.

Simulación	D_1	$b^a_{1\|2,\ldots,5}$	D_2	$b^a_{2\|3,\ldots,5}$	D_3	$b^a_{3\|4,5}$	D_4	$b^a_{4\|5}$	D_5	b^a_5
30001	6	6	18	18	1	1	20	16	8	8
30002	8	6	11	9	13	11	21	16	14	8
30003	16	16	5	5	4	4	15	15	18	8
30004	8	8	9	9	4	4	9	9	19	8
30005	3	3	10	10	17	17	4	4	19	8
30006	15	15	0	0	14	14	20	20	1	1
30007	12	12	4	4	4	4	4	4	8	8
30008	1	1	15	15	1	1	18	18	3	3
30009	9	8	17	17	7	7	10	10	12	8
30010	9	9	14	14	8	8	10	10	11	8

Cuadro 3.3: Demanda de las clases y capacidad máxima a venderles.

3.2.3. Análisis de límites de venta

En comparación con el caso determinista, lo primero que se puede observar es que la ganancia obtenida al implementar los límites de venta particionados es en promedio menor a la obtenida al implementar los límites de venta anidados: 10243.615 y 12331.975 respectivamente. Más aún, las ganancias obtenidas con los límites de venta anidados son siempre mayores o iguales a las obtenidas con los límites de venta particionados. En el cuadro 3.4 se pueden observar algunas ganancias obtenidas con ambos modelos.

Simulación	Particionado	Anidado
31188	8600	9600
31688	8600	10600
34198	10900	12900
36242	8700	11700
38104	13100	16000
38314	8900	8900
40295	7200	7200
41314	10900	13900
42036	10000	11800
46794	6600	6600

Cuadro 3.4: Comparación ganancias obtenidas límites de venta particionados y anidados.

Capítulo 4

Análisis de riesgo para el control de inventarios

"¿Dónde está mi elefante?"
Bart Simpson

Este capítulo se propone revisar el proceso de asignación de límites de venta para el problema de optimización de ingresos desde un planteamiento de control de inventarios del *Revenue Management* utilizando un análisis con enfoque de modelos de riesgo con el objetivo de reducir el problema general y así poder aplicar una modificación de la regla de Littlewood.

Posteriormente se tomará el problema del capítulo anterior con los mismos supuestos de la demanda Poisson pero en este caso además de utilizar la base de datos uniforme, se realiza una simulación para generar una base de datos del número de pedidos de cada clase en los últimos 50,000 ejercicios de una compañía en donde los datos si tienen una distribución Poisson con los parámetros estimados de la base de datos uniforme, es decir, con parámetros $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = 12$ y $\lambda_5 = 12$. De la misma manera, se utilizarán los primeros 30,000 datos para ajustar los parámetros λ_j con los que se obtendrán los niveles de protección empleando el análisis de riesgo que se desarrollará en el capítulo y posteriormente se analizará su efectividad con la información de los restantes 20,000. Es decir, se hará una comparación de la ganancia obtenida sin utilizar *Revenue Management* con la obtenida usando los límites de venta obtenidos con el modelo de Bellman, los límites de venta obtenidos con el análisis de riesgo y la ganancia máxima posible de cada ejercicio.

4.1. Modelos de riesgo

En el ámbito de los seguros de vida existen dos modelos de pérdidas agregadas usados ampliamente: el modelo de riesgo colectivo y el modelo de riesgo individual. Dichos modelos intentan ajustar los montos que debe pagar la aseguradora en un período determinado para poder calcular las primas que debe cobrar a modo que pueda constituir reservas suficientes para hacer frente a sus obligaciones en dicho período.

El modelo de **riesgo individual** denota a la variable de pérdida de una compañía como S, al número de asegurados como m y a las variables aleatorias de pérdida por asegurado como X_i, $i = 1, \ldots, m$. Adicionalmente sigue los siguientes supuestos:

i) Se conoce el número de asegurados m.

i) $X_1, \ldots, X_m$ son independientes entre ellas tales que

$$X_i = \begin{cases} x_i & \text{c.p. } q_i \\ 0 & \text{c.p. } 1 - q_i \end{cases}$$

Es decir, se modelan las pérdidas agregadas como $S = X_1 + \ldots + X_m$. Hay que notar que las variables X_i no necesariamente son identicamente distribuidas, aunque pueden existir personas con un historial parecido cada asegurado es diferente. Dos valores de interés son la esperanza y la varianza de las pérdidas agregadas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{m} X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i q_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Var(S) &= Var(\sum_{i=1}^{m} X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} Var(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i^2 q_i (1 - q_i) \end{aligned}$$

Como su nombre lo indica, el modelo de riesgo individual se fija en las pérdidas individuales a diferencia del modelo de **riesgo colectivo** que supone lo siguiente:

i) El número de asegurados se considera una variable aleatoria de conteo N.

ii) $X_1, \ldots, X_N$ tienen la misma distribución que X.

iii) $N, X_1, \ldots, X_N$ son independientes entre sí.

En este modelo las pérdidas agregadas están dadas por $S = X_1 + \ldots + X_N$. Es decir, no se sabe cuántos asegurados se tienen pero se sabe que las pérdidas ocasionadas por cada uno se distribuyen de la misma manera. El modelo de riesgo colectivo se puede pensar como una aproximación al modelo de riesgo individual. Incluso se puede construir un modelo de riesgo colectivo con base en uno de riesgo individual de modo que las pérdidas esperadas sean las mismas [BO97][pp. 372-376]. Al ser una aproximación, la varianza de las pérdidas agregadas es mayor con relación al modelo de riesgo individual por lo que el valor de la prima se incrementa dando una mayor protección contra el riesgo de la empresa.

Para el modelo de riesgo colectivo N es la variable aleatoria de la frecuencia y X la de la severidad. Del mismo modo, son de interés la esperanza y la varianza de las pérdidas agregadas:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\ \mathbb{E}[S|N]\ ] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|N=n]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i|N=n]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}[X]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{E}[X] \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[N]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= \mathbb{E}[Var(S|N)] + Var(\mathbb{E}[S|N]) \\
&= \mathbb{E}[N\ Var(X)] + Var(N\mathbb{E}[X]) \\
&= Var(X)\mathbb{E}[N] + \mathbb{E}^2[X]Var(N)
\end{aligned}$$

Esto indica que en promedio se espera perder la media de la severidad por la de la frecuencia, algo que es bastante intuitivo dado que la severidad y la frecuencia son independientes entre sí. Por otra parte, debido a que también se considera la volatilidad de la frecuencia multiplicada por el cuadrado de la media de la severidad, factor que en el modelo de riesgo individual no se considera al tener éste una frecuencia constante, se puede ver que la varianza de las pérdidas agregadas en el modelo de riesgo colectivo es mayor.

Una opción para la distribución de N es la Poisson con parámetro λ, es decir, S tiene una distribución Poisson compuesta; en este caso $Var(S) = \lambda Var(X) + \mathbb{E}^2[X]\lambda = \lambda\mathbb{E}^2[X]$ y $E[S] = \lambda\mathbb{E}[X]$. Una distribución Poisson cumple con $\mathbb{E}[N] = Var(N)$. Así, si la varianza de la frecuencia de las reclamaciones excede a su media, la distribución Poisson Compuesta no es apropiada. Esta condición marca una fuerte restricción para que un modelo donde se ajuste a las pérdidas agregadas una distribución Poisson compuesta sea realista, sin embargo como aproximación es bastante buena y tiene sus beneficios.

Si S_1 son las pérdidas agregadas de un modelo de riesgo individual con $\mathbb{E}[S_1] = \mu$ se puede construir un modelo de riesgo colectivo con pérdidas agregadas S_2 con $N \sim$ Poisson(λ) tal que $\mathbb{E}[S_2] = \mu$; es decir, se puede construir un modelo de riesgo colectivo tal que $\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[S_2]$. En otras palabras, aún cuando se cuente con toda la información para utilizar el modelo de riesgo individual, se puede construir un modelo de riesgo colectivo en el cual las pérdidas esperadas sean las mismas.

Teorema 4.1

Sean $S_1, \ldots, S_n$ variables aleatorias independientes tales que S_i tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro λ_i y función de masa de probabilidad para la severidad $P_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ tiene una distribución Poisson compuesta con $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $\mathbb{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x)$.

Demostración:

Sean S' y S variables aleatorias distintas tales que $S' = S_1 + \ldots + S_n$ con $S_1, \ldots, S_n$ variables aleatorias independientes tales que S_i tiene una distribución Poisson Compuesta con parámetro λ_i y función de masa de probabilidad para la severidad $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y S tiene distribución Poisson Compuesta, con parámetro λ y función de masa de probabilidad para la severidad $P(x)$.

Calculando la función generadora de momentos de la variable aleatoria S que tiene una distribución Poisson compuesta:

$$\begin{aligned}
M_S(t) = \mathbb{E}[e^{St}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{St}|N]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{St}|N=n]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^{n} X_i t}|N=n]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{\sum_{i=1}^{n} X_i t}]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} e^{X_i t}]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{X_i t}]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} M_X(t)\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n\mathbb{P}(N=n) \\
&= \mathbb{E}[(M_X(t))^N] \\
&= \mathbb{E}[e^{N\log M_X(t)}] \\
&= M_N(\log M_X(t)) \\
&= \exp\{\lambda[M_X(t)-1]\}
\end{aligned}$$

Calculando la función generadora de $S' = S_1 + \ldots + S_n$:

$$\begin{aligned}
M_{S'}(t) &= \prod_{i=1}^{n} M_{S_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i[M_{X_i}(t)-1]} \\
&= \exp\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i[M_{X_i}(t)-1]\} \\
&= \exp\{\lambda[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda}[M_{X_i}(t)-1]]\} \\
&= \exp\{\lambda[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{X_i}(t)-1]\}
\end{aligned}$$

Como la función generadora de momentos de S' es la de una distribución Poisson compuesta queda demostrado el teorema.

Dados $v_1, \ldots, v_n$ números distintos y $D_1, \ldots, D_n$ variables aleatorias independientes con distribución Poisson(λ_i), $i = 1, \ldots, n$. Se puede interpretar $v_i D_i$ como una distribución Poisson compuesta con parámetro de frecuencia λ_i y distribución de severidad degenerada en x_i, de modo que utilizando el teorema anterior se puede concluir que $v_1 D_1 + \ldots + v_n D_n$ tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

y función de distribución de severidad:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} & x = v_i, \ i = 1, \ldots, n. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se puede entonces ver a $S_1 = X_1 + \ldots + X_m$ como

$$S_1 = \sum_{i:X_i=v_1} X_i + \ldots + \sum_{i:X_i=v_n} X_i$$

calculando la esperanza de ambos lados se obtiene

$$\mathbb{E}[S_1] = v_1 \sum_{i:X_i=v_1} q_i + \ldots + v_n \sum_{i:X_i=v_n} q_i$$

De esta manera se puede construir un modelo de riesgo colectivo $S_2 = v_1 D_1 + \ldots + v_n D_n$ de forma que S_2 tiene una distribución Poisson compuesta, donde $D_1, \ldots, D_n$ son variables aleatorias independientes tales que $D_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$ con $\lambda_j = \sum_{i:X_i=v_j} q_i$, que cumpla que $\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[S_2]$ donde $S_1 = X_1 + \ldots + X_m$, análogamente al modelo de riesgo individual en el que X_i es una variable aleatoria degenerada en v_i.

4.2. Reducción del problema mediante análisis de riesgo

La proposición 1.4.1 muestra que las ganancias se maximizan cuando se sabe el precio que esta dispuesto a pagar cada consumidor del mercado. Suponiendo que el mercado tiene m consumidores el problema puede concebirse como el riesgo de compra para ajustarse a un modelo de riesgo individual $S_1 = X_1 + \ldots + X_m$ en donde para $i = 1, \ldots, m$, X_i es la variable aleatoria de la "pérdida" por consumidor. De este modo cuando m tienda a infinito la ganancia es máxima, es decir, $E[S_1]$ se maximiza cuando se consideran todos los consumidores del mercado.

Nótese que un bien se puede vender a n precios distintos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en el mercado y el número de consumidores D_i que lo compran a precio v_i con $i = 1, \ldots, n$, se distribuye Poisson con parámetro λ_i. Entonces, se puede construir el modelo de riesgo colectivo $S_2 = v_1D_1 + \ldots + v_nD_n$ tal que $\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{E}[S_2]$ con una distribución Poisson compuesta con parámetros como los descritos en el teorema 5.1.

Considerando que la capacidad del bien es limitada y se desea maximizar el valor esperado de S_1, suponiendo que $v_1 > v_2 > \ldots > v_n$ y que las solicitudes de compra van llegando en orden creciente respecto al precio que pagan los consumidores, se puede realizar un análisis similar al de Littlewood para poder determinar los límites de venta sin necesidad de recurrir a las ecuaciones de Bellman.

Para llevar a cabo el análisis es necesario observar que $S_j = v_1D_1 + \ldots + v_jD_j$ con $j = 1, \ldots, n$, tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson

$$\lambda_{N_j} = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i$$

y función de distribución de severidad

$$P_{X_j}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{N_j}} & x = v_i, \; i = 1, \ldots, j. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Donde N_j es la variable aleatoria de la frecuencia y X_j la variable aleatoria de la severidad de S_j.

Sea C el inventario del bien en cuestión y sea x las unidades de dicho inventario que restan de haber vendido "ciertas" unidades del mismo a la clase n. Si se desea determinar la conveniencia de vender la x-ésima unidad a un consumidor de la clase n o reservarla para las clases siguientes, nótese que si acepta la solicitud de compra se obtiene una ganancia segura inmediatamente. En caso contrario se obtendrá una ganancia sólo si la demanda del resto del mercado es mayor o igual a x. De este modo se puede reducir el problema al caso donde sólo hay dos clases: la clase n y el resto del mercado.

Así, la ganancia esperada al no venderle a la clase n es la esperanza de X_{n-1}:

$$\mathbb{E}[X_{n-1}] = \sum_{i=1}^{n-1} v_i P_{X_{n-1}}(v_i) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \frac{\lambda_i}{\lambda_{N_{n-1}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} v_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j}$$

Es decir que conviene vender la unidad si $v_n \geq \mathbb{E}[X_{n-1}]\mathbb{P}(N_{n-1} \geq x)$. Como la función de supervivencia es decreciente entonces existe $y_{n-1} \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$v_n < \mathbb{E}[X_{n-1}]\mathbb{P}(N_{n-1} \geq y_{n-1}) \text{ y } v_n \geq \mathbb{E}[X_{n-1}]\mathbb{P}(N_{n-1} \geq y_{n-1} + 1)$$

Donde la cantidad y_{n-1} es la cantidad de capacidad que se reserva para las clases $1, \ldots, n-1$, es decir, el nivel de protección. La fórmula $b_n = C - y_{n-1}$ determina el límite de venta de la clase n.

En general dada una capacidad restante x conviene vender a la clase j si $v_j \geq \mathbb{E}[X_{j-1}]\mathbb{P}(N_{j-1} \geq x)$ determinando así el nivel de protección para las clases $1, \ldots, j-1$. De este modo, los niveles de protección y_j satisfacen que

$$v_{j+1} < \mathbb{E}[X_j]\mathbb{P}(N_j \geq y_j) \text{ y } v_{j+1} \geq \mathbb{E}[X_j]\mathbb{P}(N_j \geq y_j + 1)$$

para $j = 1, \ldots, n-1$.

Finalmente, con base en los niveles de protección se pueden obtener los límites de venta mediante $b_j = y_j - y_{j-1}$ para $j = 2, \ldots, n$, siendo $b_1 = y_1$ y $y_n = C$.

4.3. Límites de venta con análisis de riesgo

Es importante notar que al tratarse de una aproximación, las ganancias obtenidas no son óptimas pero es interesante ver qué tan bien lo hace. Para ello considérese la base de datos uniformes del ejemplo que se manejó en el capítulo anterior y los mismos supuestos.

Con base en los precios $v_1 = 500$, $v_2 = 400$, $v_3 = 300$, $v_4 = 200$, $v_5 = 100$ y los parámetros de la de la distribución de la demanda $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 9$, $\lambda_4 = 12$ y $\lambda_5 = 12$ se calculan los niveles de protección anidados con ayuda del análisis del modelo de riesgo.

Por definición se tiene $y_5 = 50$ por lo que primero se busca y_4 el cual debe satisfacer que

$$100 < \mathbb{E}[X_4]\mathbb{P}(N_4 \geq y_4) \text{ y } 100 \geq \mathbb{E}[X_4]\mathbb{P}(N_4 \geq y_4)$$

Obsérvese que $N_4 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda_{N_4} = 8 + 9 + 9 + 12 = 38$ y

$$\mathbb{E}[X_4] = \frac{\sum_{i=1}^{4} v_i \lambda_i}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i} = \frac{500(8) + 400(9) + 300(9) + 200(12)}{38} = 334.2105$$

De manera similar se calculan los niveles de protección restantes, con los que se obtienen los límites de venta y se pueden consultar en el cuadro 4.1.

i	$\mathbb{E}[X_i]$	y_i	b_i
1	500	6	6
2	447.06	15	9
3	396.15	26	11
4	334.21	41	15
5	278	50	9

Cuadro 4.1: Límites de venta particionados obtenidos mediante el análisis de riesgo.

Se puede observar lo siguiente:

1. La $\mathbb{E}[X_i]$ va decreciendo conforme el valor de i aumenta lo que ocasiona que y_i también sea decreciente con respecto a i, garantizando que los niveles de protección estén bien definidos.

2. Se cumple que $b_1 = y_1$ satisfaciendo la relación entre límites de venta y niveles de protección.

3. Los límites de venta forman una partición del mercado ya que

$$\sum_{i=1}^{5} b_i = C$$

Con base en los límites de venta particionados se calculan los anidados, los cuales se pueden ver en el Cuadro 4.2.

i	1	2	3	4	5
b_i^a	50	44	35	24	9

Cuadro 4.2: Límites de venta anidados obtenidos mediante el análisis de riesgo.

La ganancia promedio que se obtiene al implementar los límites de venta particionados y anidados es de 10236.995 y 12305.415 respectivamente. Se puede ver que en ambos casos las ganancias promedio son menores a 10243.615 y 12331.975, obtenidas respectivamente con el método de Bellman, pero se aproximan bastante bien. En el Cuadro 4.3 se comparan algunas ganancias obtenidas con ambos métodos.

Simulación	Método de Bellman		Análisis riesgo	
	Particionado	Anidado	Particionado	Anidado
31188	8600	9600	8600	9600
31688	8600	10600	8600	10600
34198	10900	12900	10800	12800
36242	8700	11700	8800	11800
38104	13100	16000	12900	16000
38314	8900	8900	8800	8800
40295	7200	7200	7300	7300
41314	10900	13900	11000	14000
42036	10000	11800	10000	11800
46794	6600	6600	6600	6600

Cuadro 4.3: Comparación de ganancias obtenidas con ambos modelos.

Revisando el Cuadro 4.3, se pueden apreciar casos en donde la ganancia obtenida con la aproximación es mayor a la obtenida con el método de Bellman (por ejemplo la simulación número 36242), así como donde es menor la diferencia no es muy grande. En el Cuadro 4.4 se comparan las ganancias promedio obtenidas con ambos métodos tanto para límites de venta particionados como anidados y además se compara con la ganancia promedio al no implementar ningún control de capacidad y la ganancia promedio máxima posible.

Método	Ganancia Promedio
Análisis Riesgo Particionado	10236.995
Método de Bellman Particionado	10243.615
Sin *Revenue Management*	11496.89
Análisis Riesgo Anidado	12305.415
Método de Bellman Anidado	12331.975
Ganancia máxima posible	13316.75

Cuadro 4.4: Ganancias promedio obtenidas con los distintos métodos de *Revenue Management*

4.4. Comparación de modelos Poisson

Con los mismos parámetros estimados utilizados para la distribución uniforme se analiza el caso en el que la demanda tiene una distribución Poisson. Los límites de venta tanto con el método de Bellman como con el análisis de riesgo son los mismos ya que se utilizó la distribución Poisson. En el Cuadro 4.5 se resumen los límites anidados y particionados obtenidos con ambos métodos.

Límite de venta clase	Método de Bellman		Análisis riesgo	
	Particionado	Anidado	Particionado	Anidado
1	6	50	6	50
2	9	44	9	44
3	11	35	11	35
4	16	24	15	24
5	8	8	9	9

Cuadro 4.5: Límites de venta obtenidos con ambos modelos.

El Cuadro 4.6 muestra algunas de las ganancias obtenidas con todos los métodos en donde se observa que de nuevo las ganancias obtenidas con ambos métodos son similares e incluso hay casos donde las ganancias obtenidas al implementar los límites calculados con el análisis de riesgo son mayores que los hallados con el método de Bellman.

Simulación	Método de Bellman		Análisis riesgo	
	Particionado	Anidado	Particionado	Anidado
31000	11100	11100	11000	11000
33000	11100	15000	11200	15100
35000	12400	13900	12500	14000
37000	10700	10700	10600	10600
39000	12400	14500	12300	14400
41000	13100	14500	13200	14200
43000	12100	14800	12200	14900
45000	12100	14200	12200	14300
47000	12100	14500	12200	14600
49000	12300	15400	12400	15000

Cuadro 4.6: Comparación de ganancias obtenidas cuando la demanda distribuye Poisson.

Las ganancias promedio obtenidas con ambos métodos tampoco difieren tanto en este caso como se puede apreciar en el Cuadro 4.7.

Modelo	Ganancia Promedio
Poisson Particionado	11695.19
Bellman Particionado	11641.21
Sin RM	12537.615
Poisson Anidado	13045.685
Bellman Anidado	13057.675
Ganancia máxima posible	13610.1

Cuadro 4.7: Ganancias promedio obtenidas cuando la demanda distribuye Poisson

Si se desea recrear la simulación, en el anexo C se pueden consultar el código en R utilizado para generar la base de datos, obtener los límites de venta y todo lo necesario para el análisis.

Conclusiones

Estudiar el tema del *Revenue Management* fue a su vez muy gratificante y frustrante; si bien no se pudo implementar el sistema a la clínica para observar los alcances de aplicar la teoría, se logró realizar la compilación y ejemplificación de la metodología del *Revenue Management* observando resultados favorables en ambas simulaciones.

Además, al ejemplificar la implementación de controles de inventario para el problema de optimización de ingresos se mostró que se puede obener una mayor ganancia al aplicar los controles de capacidad.

También, al implementar los límites de venta particionados en el caso de demanda Poisson, se exhibió que un mal uso de sistemas de *Revenue Management* puede resultar contraproducente.

Fue interesante observar que las ganancias obtenidas con el análisis de riesgo no son tan lejanas que las del método de Bellman aún cuando la distribución de la demanda no era Poisson como se suponía. Además, fue consistente en el sentido de que no importó la distribución de las demandas.

El *Revenue Management*, aunque tiene un auge en el sector empresarial, no ha permeado como un tema de estudio académico por lo que quedan muchos análisis por realizar. Por ejemplo, se podría reflexionar sobre el impacto del ajuste de distribución de la demanda y estimación de parámetros. Otro aspecto interesante que se podría estudiar es la selección de los mecanismos para la segmentación del mercado.

Este trabajo examinó el caso más sencillo del problema de la optimización de ingresos pero valdría la pena realizar un trabajo donde se estudien y ejemplifiquen todas las generalizaciones posibles del *Revenue Management*.

Finalmente, en lo personal encuentro muy satisfactorio el resultado obtenido. No sólo aprendí de un tema bastante interesante y complejo, también pude hacer uso del criterio formado a lo largo de la carrera para emplear los conocimientos de diversas áreas y así poder resolver un problema con su dificultad de una manera simple. En mi opinión, cuando dos modelos arrojan resultados muy parecidos, puede ser conveniente utilizar el modelo más sencillo.

Apéndices

Apéndice A

Conceptos básicos de probabilidad

Sea E un evento de un espacio muestral S, en el cual se realiza un experimento repetidamente bajo las exactas mismas condiciones, y sea $n(E)$ el número de veces en las primeras n repeticiones del experimento en las que ocurre el evento E. Se define $P(E)$, la **probabilidad** del evento E, como la frecuencia límite de E. Es decir,

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

Se puede pensar a la probabilidad como la proporción de casos en los que se obtuvo el resultado esperado entre el total de veces que se repitió el experimento. Cuando se desea estudiar un fenómeno en particular, se le asigna una **variable aleatoria** la cual es una función valuada en los reales definida sobre el espacio muestral del experimento.

La **distribución** de una variable aleatoria X es la colección de todas las probabilidades de la forma $P(X \in C)$ para todos los conjuntos C de números reales tales que $\{X \in C\}$ es un evento. De este modo se puede estudiar el comportamiento mediante la distribución de la variable aleatoria asociada.

Una variable aleatoria X tiene una distribución discreta si puede tomar solo un número finito k de diferentes valores $x_1, \ldots, x_k$ o a lo más una secuencia infinita de valores diferentes $x_1, x_2, \ldots$.

Para una variable aleatoria discreta X se define la función de masa de probabilidad $p(a)$ de X como $p(a) = P(X = a)$.
La función de masa de probabilidad $p(a)$ es positiva para a lo más una cantidad contable de valores a. Es decir, si X puede tomar uno de los valores $x_1, x_2, \ldots$, entonces $p(x_i) \geq 0$ para

$i = 1, 2, \ldots$ y $p(x) = 0$ para todos los demas valores x. Además, como X debe tomar uno de los valores x_i entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Definición A.1 (**Función de distribución acumulada**): para una variable aleatoria discreta X que puede tomar los posibles valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$, donde $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, se define la función de distribución acumulada F de X como

$$F(a) = \sum_{x_i \leq a} p(x_i)$$

En ocasiones se desea estudiar más de un fenómeno al mismo tiempo. Las variables aleatorias asociadas a ciertos fenómenos, X y Y, se dice que son independientes si para cualquier par de conjuntos de números reales A y B, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Para una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x)$ se define la **esperanza**, media o el valor esperado de X como el promedio ponderado de los posibles valores que puede tomar X y se denota por $\mathbb{E}[X]$, es decir

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$$

Además de la media, un valor de interés es la **varianza**. Si X es una variable aleatoria con media μ entonces la varianza de X, denotada por $Var(X)$, se define como

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

Definición A.2 (**Función generadora de momentos**): la función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como

$$M_X(z) = \mathbb{E}[e^{zN}] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)e^{zk}$$

La función generadora de momentos cumple con la propiedad de ser única. Es decir, si dos variables aleatorias tienen la misma función generadora de momentos entonces tienen la misma distribución con parámetros que pueden ser los mismos o diferentes.

En este trabajo se mencionaron solamente las variables aleatorias discretas y lo básico de probabilidad, se puede consultar sobre los axiomas probabilidad, las variables aleatorias continuas, propiedades de la esperanza y distribuciones para variables aleatorias en [RO06][pp. 1-231], en [KL08][pp. 9-19] y en [DE02][pp. 1-345].

Una variable aleatoria de interés para este trabajo es X que toma uno de los valores $0, 1, 2, \ldots$ con función de masa de probabilidad

$$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

para algún valor $\lambda > 0$. Se dice que es una variable aleatoria Poisson con parametro λ. La media y la varianza son iguales al parámetro λ, es decir, $\mathbb{E}[X] = \lambda = Var(X)$. La función generadora de momentos es

$$M_X(z) = e^{\lambda(e^y - 1)},\ \lambda > 0.$$

Otra función que se utilizará es la **función generadora de probabilidades** de una variable aleatoria discreta N con función de masa de probabilidad $p_k = P(N = k)$, la cual se esta dada por

$$P(z) = P_N(z) = \mathbb{E}[z^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

Se puede crear una clase más grande de distribuciones mediante el proceso de componer dos distribuciones discretas cualesquiera. El término componer refleja la idea de que la función generadora de probabilidades de la nueva distribución $P_S(z)$ esta dada por $P_S(z) = P_N[P_M(z)]$, donde $P_N(z)$ y $P_M(z)$ son llamadas distribución primaria y secundaria respectivamente. En [KL08][p. 126] se muestra cómo surge la idea de distribución compuesta y da un ejemplo de cuando se puede ajustar una distribución compuesta.

Definición A.3 (**Distribución Poisson compuesta**): una distribución es Poisson compuesta si es una distribución compuesta y la distribución primaria es Poisson. Es decir, S tiene una distribución Poisson compuesta si $S = X_1 + \ldots + X_N$ y N tiene una distribución Poisson.

Uno de los objetivos principales de realizar un experimento es poder realizar conclusiones del fenómeno estudiado. Frecuentemente la información recolectada con un experimento consiste de varias observaciones de la variable de interés.

George Casella [CA02][p. 207] define el concepto de **muestra aleatoria** de tamaño n como las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una población $f(x)$ en donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias mutuamente independientes y la función de densidad de probabilidad marginal de cada X_i es la misma función $f(x)$.

A la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ también se le conoce como variables aleatorias independiente identicamente distribuídas con función de masa de probabilidad o función de densidad de probabilidad $f(x)$ y es comúnmente abreviado como v.a.i.i.d.

Definición A.4 (**Función de distribución empírica**): sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores observados de una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$. Para cada número $x(-\infty < x < \infty)$, se define la función de distribución empírica $F_n(x)$ como la proporción de valores observados en la muestra que son menores o iguales que x. En otras palabras, si exactamente k de los valores observados en la muestra son menores o iguales que x entonces $F_n(x) = k/n$.

En ocasiones, es de interés algún valor que se pueda obtener mediante la muestra aleatoria. A la variable aleatoria $Y = T(X_1, \ldots, X_n)$ se le conoce como **estadística**.

Definición A.5 (**Media muestral**): promedio aritmético de los valores de una muestra aleatoria.

La media muestral se denota normalmente como

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definición A.6 (**Función de verosimilitud**) Sea $f(x|\theta)$ la función de masa de probabilidad o función de densidad de la muestra $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Dada una muestra aleatoria $X = x$, la función de θ definida como $L(\theta|x) = f(x|\theta)$ se conoce como función de verosimilitud.

Es importante notar que en la función de verosimilitud, son fijos los valores de la muestra aleatoria y la variable es el parámetro de la función de masa de probabilidad θ. Finalmente, el **estimador máximo verosímil** es aquel que maximiza la función de verosimilitud dada una muestra aleatoria.

Apéndice B

Cuadros de interés

Simulación	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
0	926	867	813	596	605
1	1874	1666	1693	1295	1286
2	1907	1658	1630	1350	1245
3	1830	1614	1634	1226	1206
4	1878	1627	1747	1225	1267
5	1868	1733	1684	1254	1267
6	1919	1673	1692	1218	1294
7	1829	1681	1627	1208	1201
8	1913	1689	1646	1266	1241
9	1923	1598	1700	1214	1223
10	1818	1662	1600	1216	1262
11	1863	1657	1698	1263	1230
12	1860	1679	1657	1207	1258
13	1889	1672	1666	1279	1279
14	1952	1686	1665	1288	1236
15	1852	1687	1703	1221	1272
16	899	1729	1666	1242	1272
17	0	1596	1625	1252	1254
18	0	826	854	1286	1233
19	0	0	0	1308	1278
20	0	0	0	1222	1245
21	0	0	0	1243	1265
22	0	0	0	1266	1258
23	0	0	0	1243	1199
24	0	0	0	612	624

Cuadro B.1: Frecuencia relativa de la demanda en las primeras 30,000 simulaciones

Simulación	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
0	636	576	545	430	419
1	1292	1051	1114	813	816
2	1277	1123	1131	826	828
3	1234	1140	1058	796	842
4	1196	1034	1146	874	848
5	1191	1104	1071	838	843
6	1227	1150	1149	819	800
7	1268	1076	1156	803	884
8	1253	1125	1070	778	828
9	1302	1076	1116	828	838
10	1283	1126	1064	816	887
11	1243	1184	1088	862	850
12	1224	1127	1100	811	806
13	1264	1077	1149	864	854
14	1260	1122	1095	873	819
15	1235	1107	1118	861	837
16	615	1120	1112	843	810
17	0	1122	1103	870	807
18	0	560	615	839	814
19	0	0	0	826	788
20	0	0	0	824	857
21	0	0	0	821	828
22	0	0	0	845	814
23	0	0	0	810	838
24	0	0	0	430	445

Cuadro B.2: Frecuencia relativa de la demanda en las últimas 20,000 simulaciones

x	$G_1(x)$	$G_2(x)$	$G_3(x)$	$G_4(x)$	$G_5(x)$
1	0	4000	7600	10300	12700
2	499.83	4399.95	7899.96	10500	12800
3	998.32	4799.46	8199.59	10699.98	12899.99
4	1491.45	5196.96	8497.72	10899.88	12999.94
5	1970.26	5588.47	8791.36	11099.42	13099.71
6	2420.44	5966.49	9074.87	11297.9	13198.95
7	2824.82	6320.21	9340.16	11493.83	13296.92
8	3168.13	6637.5	9578.12	11684.67	13392.33
9	3441.65	6907.94	9780.96	11866.77	13483.38
10	3645.38	7125.68	9944.26	12035.76	13567.88
11	3787.07	7290.72	10068.04	12187.28	13643.64
12	3879.13	7408.32	10156.24	12317.84	13708.92
13	3935.09	7487.12	10215.34	12425.52	13762.76
14	3966.99	7536.81	10252.61	12510.32	13805.16
15	3984.08	7566.35	10274.76	12574.02	13837.01
16	3992.7	7582.94	10287.2	12619.61	13859.81
17	3996.82	7591.75	10293.81	12650.73	13875.36
18	3998.68	7596.19	10297.14	12670.99	13885.49
19	3999.48	7598.32	10298.74	12683.58	13891.79
20	3999.8	7599.29	10299.47	12691.06	13895.53
21	3999.93	7599.71	10299.78	12695.32	13897.66
22	3999.97	7599.89	10299.92	12697.64	13898.82
23	3999.99	7599.96	10299.97	12698.85	13899.43
24	4000	7599.98	10299.99	12699.46	13899.73
25	4000	7599.99	10300	12699.76	13899.88

Cuadro B.3: Valores de $G_j(x)$ pt. 1

x	$G_1(x)$	$G_2(x)$	$G_3(x)$	$G_4(x)$	$G_5(x)$
26	4000	7600	10300	12699.89	13899.95
27	4000	7600	10300	12699.95	13899.98
28	4000	7600	10300	12699.98	13899.99
29	4000	7600	10300	12699.99	13900
30	4000	7600	10300	12700	13900
31	4000	7600	10300	12700	13900
32	4000	7600	10300	12700	13900
33	4000	7600	10300	12700	13900
34	4000	7600	10300	12700	13900
35	4000	7600	10300	12700	13900
36	4000	7600	10300	12700	13900
37	4000	7600	10300	12700	13900
38	4000	7600	10300	12700	13900
39	4000	7600	10300	12700	13900
40	4000	7600	10300	12700	13900
41	4000	7600	10300	12700	13900
42	4000	7600	10300	12700	13900
43	4000	7600	10300	12700	13900
44	4000	7600	10300	12700	13900
45	4000	7600	10300	12700	13900
46	4000	7600	10300	12700	13900
47	4000	7600	10300	12700	13900
48	4000	7600	10300	12700	13900
49	4000	7600	10300	12700	13900
50	4000	7600	10300	12700	13900
51	4000	7600	10300	12700	13900

Cuadro B.4: Valores de $G_j(x)$ pt. 2

x	$\Delta G_1(x)$	$\Delta G_2(x)$	$\Delta G_3(x)$	$\Delta G_4(x)$	$\Delta G_5(x)$
0	0	0	0	0	0
1	499.83	499.83	499.83	499.83	499.83
2	498.49	498.49	498.49	498.49	498.49
3	493.13	493.13	493.13	493.13	493.13
4	478.81	478.81	478.81	478.81	478.81
5	450.18	450.18	450.18	450.18	450.18
6	404.38	404.38	404.38	404.38	404.38
7	343.31	399.99	399.99	399.99	399.99
8	273.52	399.93	399.93	399.93	399.93
9	203.73	399.55	399.55	399.55	399.55
10	141.69	398.27	398.27	398.27	398.27
11	92.06	394.88	394.88	394.88	394.88
12	55.96	387.67	387.67	387.67	387.67
13	31.9	374.7	374.7	374.7	374.7
14	17.09	354.41	354.41	354.41	354.41
15	8.62	326.29	326.29	326.29	326.29
16	4.12	291.13	300	300	300
17	1.86	250.95	299.98	299.98	299.98
18	0.8	208.59	299.89	299.89	299.89
19	0.32	167.03	299.51	299.51	299.51
20	0.13	128.79	298.34	298.34	298.34
21	0.04	95.66	295.55	295.55	295.55
22	0.02	68.47	290.03	290.03	290.03
23	0.01	47.26	280.58	280.58	280.58
24	0	31.47	266.37	266.37	266.37
25	0	20.25	247.19	247.19	247.19

Cuadro B.5: Valores de $\Delta G_j(x)$ pt. 1

x	$\Delta G_1(x)$	$\Delta G_2(x)$	$\Delta G_3(x)$	$\Delta G_4(x)$	$\Delta G_5(x)$
26	0	12.59	223.58	223.58	223.58
27	0	7.58	196.73	200	200
28	0	4.41	168.26	200	200
29	0	2.49	139.84	199.99	199.99
30	0	1.36	112.99	199.98	199.98
31	0	0.73	88.77	199.89	199.89
32	0	0.37	67.88	199.64	199.64
33	0	0.19	50.53	198.98	198.98
34	0	0.09	36.67	197.55	197.55
35	0	0.04	25.93	194.85	194.85
36	0	0.02	17.89	190.32	190.32
37	0	0.01	12.05	183.45	183.45
38	0	0.01	7.93	173.95	173.95
39	0	0	5.09	161.79	161.79
40	0	0	3.19	147.34	147.34
41	0	0	1.96	131.19	131.19
42	0	0	1.18	114.15	114.15
43	0	0	0.69	97.05	100
44	0	0	0.4	80.62	100
45	0	0	0.23	65.5	100
46	0	0	0.12	52.07	99.98
47	0	0	0.07	40.53	99.93
48	0	0	0.03	30.91	99.78
49	0	0	0.02	23.12	99.38
50	0	0	0.01	16.96	98.54

Cuadro B.6: Valores de $\Delta G_j(x)$ pt. 2

Apéndice C

Códigos utilizados

Para generar las bases de datos Uniforme y Poisson así como para estimar los parámetros λ_i, $i = 1, \ldots, 5$ se implementó el siguiente código en el software estadístico R:

Librerías necesarias para la creación de las bases de datos y la estimación de los parámetros:
library(stats4)
library(MASS)
library(vcd)

Semillas para la base de datos uniforme:
u1 ← 1121
u2 ← 1406
u3 ← 2202
u4 ← 4791
u5 ← 5147

Creación de la demanda de la clase 1:
set.seed(u1)
datosu1 ← round(runif(50000,0,16))
lambdau1 ← fitdistr(datosu1[1:30000],"poisson")$estimate

Creación de la demanda de la clase 2:
set.seed(u2)
datosu2 ← round(runif(50000,0,18))
lambdau2 ← fitdistr(datosu2[1:30000],"poisson")$estimate

Creación de la demanda de la clase 3:

```
set.seed(u3)
datosu3 ← round(runif(50000,0,18))
lambdau3 ← fitdistr(datosu3[1:30000],"poisson")$estimate
```

Creación de la demanda de la clase 4:

```
set.seed(u4)
datosu4 ← round(runif(50000,0,24))
lambdau4 ← fitdistr(datosu4[1:30000],"poisson")$estimate
```

Creación de la demanda de la clase 5:

```
set.seed(u5)
datosu5 ← round(runif(50000,0,24))
lambdau5 ← fitdistr(datosu5[1:30000],"poisson")$estimate
```

Creación del archivo en Excel con la base de datos uniforme:

```
datosuniformes ← as.data.frame(cbind(datosu1,datosu2,datosu3,datosu4,datosu5))
write.table(datosuniformes,file = "Base_datos_uniformes.csv",sep=",")
```

Semillas para la base de datos Poisson:

```
p1 ← 1723
p2 ← 4403
p3 ← 9239
p4 ← 7223
p5 ← 1331
```

Creación de la demanda de la clase 1:

```
set.seed(p1)
datosp1 ← round(rpois(50000,lambda = lambdau1))
lambdap1 ← fitdistr(datosp1[1:30000],"poisson")$estimate
```

Creación de la demanda de la clase 2:

```
set.seed(p2)
```

datosp2 ← round(rpois(50000,lambda = lambdau2))
lambdap2 ← fitdistr(datosp2[1:30000],"poisson")$estimate

Creación de la demanda de la clase 3:
set.seed(p3)
datosp3 ← round(rpois(50000,lambda = lambdau3))
lambdap3 ← fitdistr(datosp3[1:30000],"poisson")$estimate

Creación de la demanda de la clase 4:
set.seed(p4)
datosp4 ← round(rpois(50000,lambda = lambdau4))
lambdap4 ← fitdistr(datosp4[1:30000],"poisson")$estimate

Creación de la demanda de la clase 5:
set.seed(p5)
datosp5 ← round(rpois(50000,lambda = lambdau5))
lambdap5 ← fitdistr(datosp5[1:30000],"poisson")$estimate

Creación del archivo en Excel con la base de datos Poisson:
datospoisson ← as.data.frame(cbind(datosp1,datosp2,datosp3,datosp4,datosp5))
write.table(datospoisson,file = "Base_datos_poisson.csv",sep=",")

Para calcular los valores de $G_j(x)$ y $\Delta G_j(x)$ de las tablas B.3, B.4, B.5 y B.6 así como los niveles de protección y límites de venta mediante el método de Bellman se utilizó el siguiente código:

Datos del ejemplo:
C ← 50
x ← 0:C
v1 ← 500
v2 ← 400
v3 ← 300
v4 ← 200
v5 ← 100

```
lambda1 ← 8
lambda2 ← 9
lambda3 ← 9
lambda4 ← 12
lambda5 ← 12
```

Condiciones frontera del problema de programación dinámica:

```
G0 ← rep(0,length(x))
```

Primer etapa del problema:

```
G1aux ← matrix(ncol = length(x), nrow = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
if(j <= i)
{
G1aux[i,j] ← ((j-1)*v1) + G0[i-j+1]
}
else{G1aux[i,j] ← 0} }
}
maximos1 ← matrix(nrow = length(x), ncol = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
maximos1[i,j] ← max(G1aux[i,1:j])
}
}
densidad1 ← dpois(x,lambda = lambda1)
supervivencia1 ← 1 - ppois(x,lambda = lambda1) + dpois(x,lambda = lambda1)
G1 ← vector()
for(i in 1:length(x))
{
```

```
if(i == 1)
{
G1[i] <- maximos1[i,i]*supervivencia1[i]
}
else
{
G1[i] <- sum(maximos1[i,1:(i-1)]*densidad1[1:(i-1)]) + (maximos1[i,i]*supervivencia1[i])
}
}
```

Segunda etapa del problema:

```
G2aux <- matrix(ncol = length(x), nrow = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
if(j <= i)
{
G2aux[i,j] <- ((j-1)*v2) + G1[i-j+1]
}
else{G2aux[i,j] <- 0}
}
}
maximos2 <- matrix(nrow = length(x), ncol = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
maximos2[i,j] <- max(G2aux[i,1:j])
}
}
densidad2 <- dpois(x,lambda = lambda2)
supervivencia2 <- 1 - ppois(x,lambda = lambda2) + dpois(x,lambda = lambda2)
G2 <- vector()
```

```
for(i in 1:length(x))
{
if(i == 1)
{
G2[i] ← maximos2[i,i]*supervivencia2[i]
}
else
{
G2[i] ← sum(maximos2[i,1:(i-1)]*densidad2[1:(i-1)]) + (maximos2[i,i]*supervivencia2[i])
}
}
```

Tercera etapa del problema:

```
G3aux ← matrix(ncol = length(x), nrow = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
if(j <= i)
{
G3aux[i,j] ← ((j-1)*v3) + G2[i-j+1]
}
else{G3aux[i,j] ← 0}
}
}
maximos3 ← matrix(nrow = length(x), ncol = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
maximos3[i,j] ← max(G3aux[i,1:j])
}
}
densidad3 ← dpois(x,lambda = lambda3)
```

```
supervivencia3 ← 1 - ppois(x,lambda = lambda3) + dpois(x,lambda = lambda3)
G3 ← vector()
for(i in 1:length(x))
{
if(i == 1)
{
G3[i] ← maximos3[i,i]*supervivencia3[i]
}
else
{
G3[i] ← sum(maximos3[i,1:(i-1)]*densidad3[1:(i-1)]) + (maximos3[i,i]*supervivencia3[i])
}
}
```

Cuarta etapa del problema:

```
G4aux ← matrix(ncol = length(x), nrow = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
if(j <= i)
{
G4aux[i,j] ← ((j-1)*v4) + G3[i-j+1]
}
else{G4aux[i,j] ← 0}
}
}
maximos4 ← matrix(nrow = length(x), ncol = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
maximos4[i,j] ← max(G4aux[i,1:j])
}
```

```
}
densidad4 ← dpois(x,lambda = lambda4)
supervivencia4 ← 1 - ppois(x,lambda = lambda4) + dpois(x,lambda = lambda4)
G4 ← vector()
for(i in 1:length(x))
{
if(i == 1)
{
G4[i] ← maximos4[i,i]*supervivencia4[i]
}
else
{
G4[i] ← sum(maximos4[i,1:(i-1)]*densidad4[1:(i-1)]) + (maximos4[i,i]*supervivencia4[i])
}
}
```

Quinta etapa del problema:

```
G5aux ← matrix(ncol = length(x), nrow = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
if(j <= i)
{
G5aux[i,j] ← ((j-1)*v5) + G4[i-j+1]
}
else{G5aux[i,j] ← 0}
}
}
maximos5 ← matrix(nrow = length(x), ncol = length(x))
for(i in 1:length(x))
{
for(j in 1:length(x))
{
```

```
maximos5[i,j] ← max(G5aux[i,1:j])
}
}
densidad5 ← dpois(x,lambda = lambda5)
supervivencia5 ← 1 - ppois(x,lambda = lambda5) + dpois(x,lambda = lambda5)
G5 ← vector()
for(i in 1:length(x))
{
if(i == 1)
{
G5[i] ← maximos5[i,i]*supervivencia5[i]
}
else
{
G5[i] ← sum(maximos5[i,1:(i-1)]*densidad5[1:(i-1)]) + (maximos5[i,i]*supervivencia5[i])
}
}
```

Tabla resumen de los valores Gj(x):

```
valores_Gj ← as.data.frame(cbind(G1,G2,G3,G4,G5))
write.table(valores_Gj,file = “Valores_Gj_Bellman.csv”,sep=“,”)
```

Cálculo de los niveles de protección:

```
y ← vector()
```

Nivel 1:

```
delta1 ← vector()
for(i in 2:length(x))
{
delta1[i] ← G1[i] - G1[i-1]
}
y[1] ← max(which(v2 ¡delta1)) - 1
```

Nivel 2:

```
delta2 ← vector()
for(i in 2:length(x))
{
delta2[i-1] ← G2[i] - G2[i-1]
}
y[2] ← max(which(v3 ¡delta2))
```

Nivel 3:

```
delta3 ← vector()
for(i in 2:length(x))
{
delta3[i-1] ← G3[i] - G3[i-1]
}
y[3] ← max(which(v4 ¡delta3))
```

Nivel 4:

```
delta4 ← vector()
for(i in 2:length(x))
{
delta4[i-1] ← G4[i] - G4[i-1]
}
y[4] ← max(which(v5 ¡delta4))
```

Nivel 5:

```
y[5] ← C
```

Cálculo de los límites de venta:

```
b ← vector()
b[5] ← C - y[4]
b[4] ← C - y[3] - b[5]
b[3] ← C - y[2] - b[5] - b[4]
b[2] ← C - y[1] - b[5] - b[4] - b[3]
b[1] ← C - b[5] - b[4] - b[3] - b[2]
```

Tabla condensada:

```
tabla ← as.data.frame(cbind(y,b))
write.table(tabla,file = "Tabla_Resumen_Bellman.csv",sep=",")
```

Bibliografía

[BI07] Binmore, Ken G. *Playing for real : a text on game theory*, (England : Oxford University Press, 2007).

[BO97] Bowers, Newton L. *Actuarial mathematics*, (United States of America : Society of Actuaries, c1997).

[CA02] Casella, George. y Berger, Roger L. *Statistical inference*, (United States of America : Thomson Learning, c2002).

[DA97] Dantzig, George B. y Thapa, Mukund N. *Linear programming*, (United States of America : Springer Verlag, c2003).

[DE02] DeGroot, Morris H. *Probability and Statistics*, (United States of America : Pearson Education, Inc, 2002).

[ED92] Edwards, Ward. *Utility theories : Measurements and applications*, (United States of America: Kluwer Academic, c1992).

[GA05] Gass, Saul I. *An annotated timeline of operations research : an informal history*, (United States of America : Springer, c2005).

[GO00] Gould, John P. *Microeconomic theory*, (México : Fondo de Cultura Económica, 2000).

[HE07] Hernández Ayuso, María del Carmen. *Introducción a la programación lineal*, (México: Facultad de Ciencias UNAM, 2007).

[HU06] Hurwicz, Leonid. *Designing economic mechanisms*, (England : Cambridge University Press, 2006).

[KL08] Klugman, Stuart A., Panjer, Harry H. y Willmot, Gordon E. *Loss models: from data to decisions*, (United States of America : Wiley, c2008).

[KR88] Kreps, David M. *Notes on the Theory of Choice*, (England : Westview Press, c1988).

[LE80] LeRoy Miller, Roger. *Intermediate microeconomics: theories, issues and applicatons*, trans. De Calvo, Stella. (México: McGraw-Hill, 1980).

[MB07] Müller-Bungart, Michael *Revenue management with flexible products: models and methods for the broadcasting industry*, (Germany : Springer-Verlag, c2007).

[PI09] Pindyck, Robert S. *Microeconomía*, (México : Pearson Educación, 2009).

[RO06] Ross, Sheldon M. *A first course in probability*, (United States of America : Pearson/Prentice Hall, c2006).

[TV05] Talluri, Kalyan T. y Van Ryzin, Garrett J. *The theory and practice of revenue management*, (United States of America : Springer, c2005).

[VA06] Varian, Hal R. *Microeconomía intermedia : un enfoque actual*, (España : Antoni Bosch Editor, 2011).

[WI94] Winston, Wayne L., *Operations research : applications and algorithms*, (United States of America : Duxbury, c1994).