UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
IVAN FERNANDO VILCHIS MONTALVO

DIRECTOR DE TESIS
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JOSÉ RÍOS MONTES (INSTITUTO DE MATEMÁTICAS)
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA (FACULTAD DE CIENCIAS)

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE DEL 2013.

A Hugo, otra vez.

Contenido

Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio de retículas de clases de módulos. El objetivo es utilizar las retículas de clases de módulos para obtener información acerca de la estructura interna del anillo y de la categoría de módulos asociada a éste. Algunas retículas de clases de módulos han sido ampliamente estudiadas. Por ejemplo, la retícula de clases naturales $R-$nat (Dauns, J., 2006) y la retícula de teorías de torsión hereditarias $R-$tors (Golan, J., 1986). En trabajos recientes han sido estudiadas otras retículas de clases de módulos, por ejemplo las retículas de clases hereditarias, cohereditarias y conaturales (Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. 2006). En este trabajo estudiamos retículas de clases de módulos cerradas bajo submódulos, cápsulas inyectivas, sumas directas, productos directos, extensiones, y cocientes. También estudiamos algunas relaciones entre ellas.

En el segundo capítulo desarrollamos la teoría general de retículas de clases de módulos. En la primera sección definimos algunas de las retículas de clases de módulos que vamos a usar a lo largo de nuestro trabajo. En la segunda sección describimos cómo generar clases de módulos bajo una propiedad de cerradura, es decir, dada una clase de módulos $\mathscr{C}$ describimos la menor clase cerrada bajo una propiedad y que contiene a $\mathscr{C}$. Por ejemplo: generar clases hereditarias, cerradas bajo cocientes, cápsulas inyectivas, sumas directas, productos directos. También describimos cómo generar clases de módulos bajo dos propiedades de cerradura como submódulos y cocientes, submódulos y cápsulas inyectivas, submódulos y sumas directas, cocientes y cápsulas inyectivas, cocientes y productos directos.

En la tercera sección describimos cómo cogenerar clases de módulos hereditarias, cerradas bajo cocientes y abiertas. Es decir, describimos la mayor clase cerrada bajo submódulos, cocientes, o submódulos y cocientes contenida en una clase dada. Todos los resultados en esta sección son originales.

En las secciones cuarta y quinta hacemos un estudio breve de dos retículas de clases de módulos muy importantes: R-tors (Golan, J., 1986) y R-nat (Dauns, J., 2006). Sólo agregamos la teoría necesaria para demostrar el teorema principal de nuestro trabajo. También damos una demostración distinta a la existente en la literatura de que toda clase natural es cerrada bajo extensiones de módulos. Aparte de una descripción completa de los seudocomplementos de una teoría de torsión.

En el tercer capítulo estudiamos algunas relaciones entre las retículas de clases de módulos cerradas bajo sumas directas, productos, cubiertas proyectivas, cápsulas inyectivas, submódulos y cápsulas inyectivas y submódulos y sumas directas. En esta sección se obtuvieron los siguientes resultados originales: La proposición 3.0.7 caracteriza aquellos anillos cuyas clases de módulos cerradas bajo cápsulas inyectivas son a su vez cerradas bajo sumas directas. El Teorema 3.0.2 caracteriza aquellos anillos cuyas clases de módulos cerradas bajo sumas directas son a su vez cerradas bajo cásulas inyectivas. El Teorema 3.0.3 caracteriza aquellos anillos cuyas clases de módulos cerradas bajo productos directos son a su vez cerradas bajo cubiertas proyectivas. El Teorema 3.0.4 nos dice cuando la retícula de clases de módulos cerradas bajo submódulos y sumas directas es booleana.

En el cuarto capítulo, agregamos dos caracterizaciones más de anillos de ideales principales a las existentes en la literatura (Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. 2006) y (Cejudo, C. 2013). Las últimas dos equivalencias del Teorema 4.0.8 son originales.

En el quinto capítulo, damos un morfismo de orden de $R-$nat en

$R-$nat para todo prerradical exacto izquierdo. Todo lo escrito en este capítulo es original.

Finalmente, en el sexto capítulo damos un morfismo de orden entre R-nat y R-tors. Desarrollamos la teoría necesaria para demostrar el Teorema 6.0.16 que caracteriza aquellos anillos para los que el morfismo de orden que dimos de R-nat a R-tors es un morfismo de retículas. Todo el contenido de este capítulo es original.

Capítulo 1

Notación y Resultados preliminares

1. En este trabajo todos los anillos son asociativos con uno. A lo largo de la tesis R es un anillo fijo. Por un ideal I de un anillo R entendemos un ideal izquierdo y derecho. Un ideal izquierdo J es máximo si $J \lneq K \Rightarrow K = R, \forall K \leq R$. Un ideal izquierdo J es mayor si para todo ideal izquierdo K de R se tiene que $K \leq J$.

2. Por un módulo M entendemos un $R-$módulo izquierdo con uno. La categoría de R-módulos izquierdos es denotada por $R-$mod. Si N es un submódulo de M, lo denotaremos por $N \leq M$. Un submódulo N de M es máximo si $N \lneq K \Rightarrow K = M, \forall K \leq M$.

Definimos el zoclo de un módulo M como la suma de todos sus submódulos simples.

3. Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ donde cada par de elementos a, b de L tiene un supremo y un ínfimo, a los que denotaremos respectivamente por $a \vee b$, $a \wedge b$. Se dice además que L es completa si todo subconjunto X de L tiene supremo e ínfimo denotado por $\vee X, \wedge X$ respectivamente. A los elementos mayor y menor de una retícula L, si existen, los denotaremos por $1 = \vee L = \wedge\emptyset$ y por $0 = \wedge L = \vee\emptyset$ respectivamente. Una función entre dos retículas $f : L \to L'$ es un morfismo de retículas si $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ para toda $a, b \in L$. Una retícula L es distributiva si para todos $a, b, c \in L$ se tiene $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Decimos que $b \in L$ es un seudocomplemento de $a \in L$ si $a \wedge b = 0$ y b es máximo con respecto a esta propiedad. Sea L una retícula con 0 y 1. Un elemento $a' \in L$ es un complemento de $a \in L$ si $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$. Una retícula L es complementada si todo elemento de L tiene complemento. Decimos que L es una retícula booleana si L es distributiva y complementada. Un elemento $a \in L$ es un átomo si $0 < a$ y si $b < a$ implica $b = 0$ para todo $b \in L$. Una retícula L es atómica si para todo elemento $b \in L$ existe un átomo $a \in L$

tal que $a \leq b$. Una clase propia $\mathscr{L}$ es una gran retícula si es una retícula excepto por el hecho de que $\mathscr{L}$ no es un conjunto.

4. R es un anillo semiartiniano izquierdo si el zoclo de de todo R-módulo izquierdo M es distinto de cero. Decimos que R es un V-anillo si todo R-módulo izquierdo simple es inyectivo.

5. Teorema: Son equivalentes las siguientes condiciones (ver Kasch, F. 1982):

   (a) Todo módulo proyectivo es inyectivo.

   (b) Todo módulo inyectivo es proyectivo.

   (c) Todo módulo se sumerge en un módulo libre.

   R es un anillo casi-Frobenius si se cumple alguna de las condiciones del teorema de arriba.

6. Teorema: Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R. (ver Kasch, F. 1982).

   (a) R es neteriano izquierdo.

   (b) Toda suma directa de R-módulos inyectivos es inyectivo.

   (c) Toda suma directa numerable de cápsulas inyectivas de R-módulos simples es inyectivo.

Capítulo 2

Retículas de clases de módulos

2.1 Definición de algunas de clases de módulos

En esta sección definimos algunas de las retículas de clases de módulos que vamos a usar a lo largo de nuestro trabajo. Consideraremos clases de R-módulos cerradas bajo isomorfismos.

Definición 2.1.1 *1. Una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ es una clase hereditaria si cada que un R-módulo M está en $\mathscr{C}$ todos sus submódulos están en $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 2.1.1 *La clase de los módulos semisimples es una clase hereditaria.*

Denotemos por $\mathscr{L}_{\leq}$ a la clase de clases de módulos hereditarias.

2. *Una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes si cada que un R-módulo M está en $\mathscr{C}$ todos sus cocientes están en $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 2.1.2 *La clase de los módulos artinianos es una clase cerrada bajo cocientes.*

Denotemos por $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$ a la clase de clases cerradas bajo cocientes.

3. *Una clase $\mathscr{C}$ es cerrada bajo sumas directas si para cada familia de módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ tal que $M_i \in \mathscr{C}$ para toda $i \in I$, se tiene que su suma directa está en $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 2.1.3 *La clase de los módulos proyectivos es una clase cerrada bajo sumas directas.*

Denotamos por $\mathscr{L}_{\oplus}$ a la clase de clases cerradas bajo sumas directas.

4. *Una clase $\mathscr{C}$ es cerrada bajo productos directos si para cada familia de módulos $\{M_i\}_{i\in I}$ tal que $M_i \in \mathscr{C}$ para toda $i \in I$, se tiene que su producto directo está en $\mathscr{C}$.*

   Ejemplo 2.1.4 *La clase de los módulos inyectivos es una clase cerrada bajo productos directos.*

   Denotemos por $\mathscr{L}_\pi$ a la clase de clases cerradas bajo productos directos.

5. *Una clase de R-módulos es cerrada bajo extensiones de módulos si para cada sucesión exacta de módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

   con extremos A, C en $\mathscr{C}$ se tiene que $B \in \mathscr{C}$.

   Ejemplo 2.1.5 *La clase de los módulos neterianos es una clase cerrada bajo extensiones de módulos.*

   Denotemos por $\mathscr{L}_{ext}$ a las clase de clases cerradas bajo extensiones de módulos.

6. *Una clase de $R-$módulos $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas si cada que un módulo M está en $\mathscr{C}$ su cápsula inyectiva pertenece a $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 2.1.6 *La clase de los módulos finitamente cogenerados es una clase de módulos cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Denotemos por $\mathscr{L}_E$ a la clase de clases cerradas bajo cápsulas inyectivas.

7. *Una clase R-módulos es abierta si es hereditaria y cerrada bajo cocientes.*

   Ejemplo 2.1.7 *La clase de los módulos simples es una clase abierta.*

Observación 2.1.1 *Las clases $\mathscr{L}_{\leq}$, $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathscr{L}_{\oplus}$, $\mathscr{L}_{\pi}$, $\mathscr{L}_{ext}$, $\mathscr{L}_E$ son grandes retículas con orden parcial $\leq$ dado por la inclusión de clases, e ínfimo dado por la intersección de clases.*

Por la observación anterior, las clases $\mathscr{L}_{\leq}$, $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$, $\mathscr{L}_{\oplus}$, $\mathscr{L}_{\pi}$, $\mathscr{L}_{ext}$, $\mathscr{L}_E$ tienen estructura de retícula. En lo que sigue, cuando quiera estudiar propiedades de ellas que no involucren su estructura de retícula las llamare sólo clases y les diré retículas cuando quiera destacar su estructura de retícula.

2.2 Generación de clases de módulos

En esta sección describimos cómo generar clases de módulos bajo una propiedad de cerradura, es decir, dada una clase de módulos $\mathscr{C}$ describimos la menor clase cerrada bajo una propiedad y que contiene a $\mathscr{C}$.

Proposición 2.2.1 *Dada una clase $\mathscr{C}$ de R-módulos, sea $\mathscr{A}$ la clase de los módulos M tales que existe un monomorfismo $M \to N$, con N un módulo en $\mathscr{C}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase hereditaria que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ a la menor clase hereditaria que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Consideremos $\mathscr{C}$ una clase de módulos y sea N un submódulo de un módulo $M \in \mathscr{A}$. Como existe un monomorfismo $M \to K$ con $K \in \mathscr{C}$ entonces existe un monomorfismo $N \to K$. Por lo tanto $N \in \mathscr{A}$. Así que $\mathscr{A}$ es un clase hereditaria y además claramente $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Sea $\mathscr{D}$ una clase hereditaria tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{A}$ entonces existe un monomorfismo $M \to K$, con $K \in \mathscr{C}$, por lo que $K \in \mathscr{D}$, luego $M \in \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.2.2 *Dada $\mathscr{C}$ una clase de R-módulos, sea $\mathscr{A}$ la clase de los módulos M tales que existe un epimorfismo $N \to M$, con $N \in$*

$\mathscr{C}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase cerrada bajo cocientes que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ a menor clase cerrada bajo cocientes que contiene a $\mathscr{C}$.

Demostración. Consideremos $\mathscr{C}$ una clase de módulos, $M \in \mathscr{A}$ y $M \to L$ un epimorfismo. Como existe un epimorfismo $N \to M$ con $\in \mathscr{C}$ entonces existe un epimorfismo $N \to L$. Por lo tanto $L \in \mathscr{A}$. Así que $\mathscr{A}$ es una clase cerrada bajo cocientes y además claramente $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo cocientes tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{A}$ entonces existe un epimorfismo $N \to M$, con $N \in \mathscr{C}$, por lo que $N \in \mathscr{D}$, luego $M \in \mathscr{D}$. □

Proposición 2.2.3 *Si $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ es una clase abierta.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.1 $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ es hereditaria. Sean $M \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$ y $M \to N$ un epimorfismo. Por hipótesis existe un monomorfismo $M \to L$ con $L \in \mathscr{C}$. Entonces obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & N \\ L & \end{tikzcd}$$

que se extiende al producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & P \end{array}$$

Donde $L \to P$ es un epimorfismo y $N \to P$ es un monomorfismo. Como $L \in \mathscr{C}$ entonces $P \in \mathscr{C}$, luego $N \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$. $\square$

Proposición 2.2.4 *Si $\mathscr{C}$ es una clase hereditaria entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es una clase abierta.*

Demostración. Se sigue dualmente de la demostración anterior usando la suma fibrada. $\square$

Proposición 2.2.5 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos entonces $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}))$ es la menor clase abierta que contiene a $\mathscr{C}$. Además $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq}(\mathscr{C}))$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.2 $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}))$ es una clase cerrada bajo cocientes que contiene a $\mathscr{C}$, luego $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}))$ es la menor clase hereditaria que contiene a $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Por la Proposiciones 2.2.1 y 2.2.3 $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}))$ es abierta y contiene a $\mathscr{C}$. Sea $\mathscr{D}$ una clase abierta tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, en particular $\mathscr{D}$ es cerrada bajo cocientes, por lo que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) \subseteq$

$\mathscr{D}$. Como $\mathscr{D}$ es hereditaria entonces $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{D}$. Análogamente se demuestra que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq}(\mathscr{C}))$ es la menor clase abierta que contiene a $\mathscr{C}$. Por lo tanto $\xi_{\leq}(\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq}(\mathscr{C}))$. $\square$

Proposición 2.2.6 *Dada $\mathscr{C}$ una clase de módulos, sea $\mathscr{A} = \mathscr{C} \cup \{E(C) \mid C \in \mathscr{C}\}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase cerrada bajo cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_E(\mathscr{C})$ a la menor clase cerrada bajo cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$ y que $\mathscr{A}$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{A}$, entonces $M \in \mathscr{C}$ o bien $M = E(C)$, con $C \in \mathscr{C}$. En cualquier caso $M \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{A}$ es la menor clase cerrada bajo cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$. $\square$

Proposición 2.2.7 *Si $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. Si $M \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$, entonces existe un monomorfismo $M \to C$, con $C \in \mathscr{C}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "es"] \arrow[d] & E(M) \arrow[dl] \\ E(C) & \end{tikzcd}$$

Donde $M \xrightarrow{es} E(M)$ es un monomorfismo esencial, $E(M) \to E(C)$ es un monomorfismo y $E(C) \in \mathscr{C}$. Por lo que $E(M) \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$. $\square$

Proposición 2.2.8 *Para una clase $\mathscr{C}$ de R-módulos, sea $\xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C})) = \{ M \mid existe\ un\ monomorfismo\ M \to E(C)\ para\ algún\ C \in \mathscr{C} \}$. Entonces $\xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C}))$ es la menor clase de R-módulos que es hereditaria y cerrada bajo cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración.

Es claro que $\xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C}))$ es hereditaria. Además $\xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C}))$ es cerrada bajo cápsulas por la Proposición 2.2.7. También es claro que $\mathscr{C} \subseteq \xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C}))$. Supongamos que $\mathscr{D}$ es una clase hereditaria y cerrada bajo cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$. Si $M \in \xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C}))$ entonces existe un monomorfismo $M \to E(C)$ con $C \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ entonces $C \in \mathscr{D}$, por lo que $E(C) \in \mathscr{D}$ y así, $M \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\xi_{\leq}(\xi_E(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{D}$.

$\square$

Definición 2.2.1 *Sea $\eta = \xi_E \xi_{\twoheadrightarrow}$, entonces definimos $\eta^o = Id$ y $\eta^{n+1} = \eta\eta^n$. Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos, definimos $\eta^{\infty}(\mathscr{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \eta^n(\mathscr{C})$. Así que para toda $n \in \mathbb{N}$:*

$$\eta^{n+1}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C})) \cup \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^n(\mathscr{C}))\}.$$

Proposición 2.2.9 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos entonces $\eta^{\infty}(\mathscr{C})$ es la menor clase cerrada bajo cocientes y cápsulas inyectivas que contiene a $\mathscr{C}$. Denotamos por $\xi_{\twoheadrightarrow,E}(\mathscr{C})$ a la clase de módulos $\eta^{\infty}(\mathscr{C})$.*

Demostración. Claramente $\mathscr{C} \subseteq \eta^{\infty}(\mathscr{C})$. Sean $M \in \eta^{\infty}(\mathscr{C})$ y $M \to N$ un epimorfismo. Entonces $M \in \eta^{n}(\mathscr{C})$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Así que $N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n}(\mathscr{C})) \in \eta^{n+1}(\mathscr{C})$ y también $E(M) \in \eta^{n+1}(\mathscr{C})$. Por lo tanto $\eta^{\infty}(\mathscr{C})$ es una clase cerrada bajo cocientes y cápsulas inyectivas.

Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo cocientes y cápsulas inyectivas tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$.

Si $n = 0$. Entonces $\eta^{0}(\mathscr{C}) = Id(\mathscr{C}) = \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$.

Supongamos que $\eta^{n}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. Sea $M \in \eta^{n+1}(\mathscr{C}) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n}(\mathscr{C})) \cup \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n}(\mathscr{C}))\}$. Si $M \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n}(\mathscr{C}))$ entonces $M \in \mathscr{D}$, ya que $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo cocientes. Si $M \in \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n}(\mathscr{C}))\}$, entonces $M \in \mathscr{D}$ ya que $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo cápsulas inyectivas. Así que $\eta^{n+1}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y así $\eta^{\infty}(\mathscr{C}) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \eta^{n}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.2.10 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos cerrada bajo sumas directas entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$ es una clase cerrada bajo sumas directas.*

Demostración. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos contenida en $\xi_{\leq}(\mathscr{C})$. Como $M_i \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$ para todo $i \in I$, existe un monomorfismo $M_i \to C_i$

para cada $i \in I$ con $C_i \in \mathscr{C}$. Entonces existe un monomorfismo $\bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} C_i$. Como $\bigoplus_{i\in I} C_i \in \mathscr{C}$ entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \xi_{\leq}(\mathscr{C})$. $\square$

Proposición 2.2.11 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos, sea $\mathscr{A} = \{\bigoplus_{i\in I} C_i \mid I$ es un conjunto y $C_i \in \mathscr{C}$ para todo $i \in I\}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase cerrada bajo sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_{\oplus}(\mathscr{C})$ a la menor clase cerrada bajo sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Claramente $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Consideremos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos contenida en $\mathscr{A}$, entonces para cada M_i existe una familia $\{C_{ij}\}_{j\in J_i}$ de módulos en $\mathscr{C}$ tal que $M_i = \bigoplus_{j\in J_i} C_{ij}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I}\{\bigoplus_{j\in J_i} C_{ij}\} \in \mathscr{A}$. Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo sumas directas tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{A}$, entonces existe una familia de módulos $\{C_i\}_{i\in I}$ con $C_i \in \mathscr{C}$ para toda $i \in I$ tal que $M = \bigoplus_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $M \in \mathscr{D}$ ya que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo sumas directas. Así que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.2.12 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos entonces $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(\mathscr{C}))$ es la menor clase hereditaria cerrada bajo sumas directas que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Primero notemos que $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(\mathscr{C})) = \{M \mid existe\ un\ monomorfismo\ M \to \bigoplus_{i\in I} C_i, I\ es\ un\ conjunto\ y\ C_i \in \mathscr{C}\}$. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(\mathscr{C}))$ y por las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.10 $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(\mathscr{C}))$ es una clase hereditaria y cerrada bajo sumas directas. Sea $\mathscr{D}$ una clase hereditaria cerrada bajo sumas directas que contenga a $\mathscr{C}$. Entonces $\xi_{\oplus}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es hereditaria entonces $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.2.13 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos, sea $\mathscr{A} = \{\prod_{i\in I} C_i \mid I$ es un conjunto y $C_i \in \mathscr{C}$ para todo $i \in I\}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase cerrada bajo productos directos que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_{\pi}(\mathscr{C})$ a la menor clase cerrada bajo productos directos que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Claramente $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Consideremos $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos contenida en $\mathscr{A}$, entonces para cada M_i existe una familia $\{C_{ij}\}_{j\in J_i}$ de módulos en $\mathscr{C}$ tal que $M_i = \prod_{j\in J_i} C_{ij}$. Entonces $\prod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I}\{\prod_{j\in J_i} C_{ij}\} \in \mathscr{A}$. Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo productos directos tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $M \in \mathscr{A}$, entonces existe una familia de módulos $\{C_i\}_{i\in I}$ con $C_i \in \mathscr{C}$ para toda $i \in I$ tal que $M = \prod_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $M \in \mathscr{D}$ ya que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo productos directos. Así que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.2.14 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos cerrada bajo productos directos entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es una clase cerrada bajo productos directos.*

Demostración. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos contenida en $\xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Como $M_i \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ para todo $i \in I$, existe un epimorfismo $C_i \to M_i$ para cada $i \in I$ con $C_i \in \mathscr{C}$. Entonces existe un epimorfismo $\prod\limits_{i\in I} C_i \to \prod\limits_{i\in I} M_i$. Como $\prod\limits_{i\in I} C_i \in \mathscr{C}$ entonces $\prod\limits_{i\in I} M_i \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$.

Proposición 2.2.15 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_\pi(\mathscr{C}))$ es la menor clase cerrada bajo cocientes y productos directos que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Primero notemos que $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_\pi(\mathscr{C})) = \{M \mid existe\ un\ epimorfismo\ \prod\limits_{i\in I} C_i \to M,\ I\ un\, conjun to\ C_i \in \mathscr{C}\}$. Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_\pi(\mathscr{C}))$ y por las Proposiciones 2.2.2 y 2.2.14 $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_\pi(\mathscr{C}))$ es una clase cerrada bajo cocientes y productos directos. Sea $\mathscr{D}$ una clase cerrada bajo cocientes y productos directos que contiene a $\mathscr{C}$. Entonces $\xi_\pi(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_\oplus(\mathscr{C})) \subseteq \mathscr{D}$. $\square$

2.3 Cogeneración de clases de módulos

En esta sección describimos cómo cogenerar clases de módulos hereditarias, cerradas bajo cocientes y abiertas. Es decir, describimos la mayor clase cerrada bajo submódulos, cocientes, o submódulos y cocientes contenida en una clase dada. Todos los resultados en esta sección son originales.

Proposición 2.3.1 *Dada una clase $\mathscr{C}$ de R-módulos, sea $\mathscr{A}$ la clase de los módulos M en $\mathscr{C}$ tales que todo submódulo de M está en $\mathscr{C}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la mayor clase cerrada bajo submódulos contenida en $\mathscr{C}$. Denotemos por $\chi_{\leq}(\mathscr{C})$ a la mayor clase cerrada bajo submódulos contenida en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Todo submódulo de un submódulo de un R-módulo M de $\mathscr{A}$ es también un submódulo de M, así que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo submódulos. Si $\mathscr{D}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo submódulos contenida en $\mathscr{C}$ entonces todo submódulo de un R-módulo M de $\mathscr{D}$ está en $\mathscr{C}$, por lo que $\mathscr{D}$ esta contenida en $\mathscr{A}$. $\square$

Proposición 2.3.2 *Para una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. *Si $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $\chi_{\leq}(\mathscr{C})$ también es cerrada bajo cocientes.*

2. *Si $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones de módulos entonces $\chi_{\leq}(\mathscr{C})$ también es cerrada bajo extensiones de módulos.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos.

1. Supongamos que $M \in \chi_{\leq}(\mathscr{C})$ y que $M \to N$ es un epimorfismo. Demostraremos que $N \in \chi_{\leq}(\mathscr{C})$. Como $M \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $N \in \mathscr{C}$. Si $L \to N$ es un monomorfismo, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & N \end{tikzcd}$$

que se extiende a la suma fibrada:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & N \end{tikzcd}$$

Como $M \in \chi_{\leq}(\mathscr{C})$, entonces $P \in \mathscr{C}$ y por lo tanto $L \in \mathscr{C}$. Así $N \in \chi_{\leq}(\mathscr{C})$.

2. Supongamos que en la siguiente sucesión exacta A y C pertenecen a $\chi_{\leq}(\mathscr{C})$. Es claro que $B \in \mathscr{C}$. Ahora veremos que $N \in$

$\mathscr{C}$ para cada monomorfismo $N \to B$. Consideremos ahora, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & ker(\beta f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & N \arrow[r, "\beta f"] \arrow[d, "f"] & (\beta f)(N) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde i, j son inclusiones y $ker(\beta f) \to A$ está dada por la propiedad universal del núcleo. Como $fi = \alpha\gamma$ es un monomorfismo entonces γ también lo es. Así, $ker(\beta f) \in \mathscr{C}$ y $(\beta f)(N) \in \mathscr{C}$ por hipótesis. Por lo tanto $N \in \mathscr{C}$ ya que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones de módulos. Así $B \in \chi_{\leq}(\mathscr{C})$.

□

Proposición 2.3.3 *Dada una clase $\mathscr{C}$ de R-módulos, sea $\mathscr{A}$ la clase de módulos M en $\mathscr{C}$ tales que todo cociente de M está en $\mathscr{C}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la mayor clase cerrada bajo cocientes contenida en $\mathscr{C}$. Denotemos por $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ a la mayor clase cerrada bajo cocientes contenida en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Todo cociente de un cociente de un R-módulo M de $\mathscr{A}$ es un también un cociente de M, así que $\mathscr{A}$ es cerrada bajo cocientes. Si $\mathscr{D}$ es una clase de R-módulos cerrada bajo cocientes contenida en $\mathscr{C}$ entonces todo cociente de un R-módulo M de $\mathscr{D}$ está en $\mathscr{C}$, por lo que $\mathscr{D}$ está contenida en $\mathscr{A}$. □

Observación 2.3.1 *Sea $\mathscr{C}$ una clase hereditaria, cerrada bajo cápsulas inyectivas y sumas directas. Un R-módulo M está en $\mathscr{C}$ si y sólo si todo submódulo cíclico de M está en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $M \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}$ es hereditaria entonces todo submódulo de M pertenece a $\mathscr{C}$, en particular todo submódulo cíclico de M pertenece a $\mathscr{C}$. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia independiente máxima de submódulos cíclicos de M. Así que $\bigoplus_{i \in I} C_i \leq_{es} M$ lo que implica $E(\bigoplus_{i \in I} C_i) = E(M)$. Como cada $C_i \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ es natural se tiene que $\bigoplus_{i \in I} C_i \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $E(M) \in \mathscr{C}$ lo que implica $M \in \mathscr{C}$. $\square$

Proposición 2.3.4 *Para una clase de R-módulos $\mathscr{C}$, las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. *Si $\mathscr{C}$ es una clase hereditaria entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ también es hereditaria.*

2. *Si $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones de módulos entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ también es cerrada bajo extensiones de módulos.*

3. *Si $\mathscr{C}$ es una clase hereditaria, cerrada bajo cápsulas inyectivas y sumas directas entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo sumas directas.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos.

1. Supongamos que $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ y que $N \rightarrowtail M$ es un monomorfismo. Demostraremos que $N \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Como $M \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ es una clase hereditaria entonces $N \in \mathscr{C}$. Si $N \twoheadrightarrow L$ es un epimorfismo, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \\ L & \end{tikzcd}$$

que se extiende al producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & M \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & P \end{tikzcd}$$

Como $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$, entonces $P \in \mathscr{C}$ y por lo tanto $L \in \mathscr{C}$. Así $N \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$.

2. Supongamos que en la siguiente sucesión exacta A y C pertenecen $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Es claro que $B \in \mathscr{C}$. Ahora veremos que $N \in \mathscr{C}$ para cada epimorfismo $B \twoheadrightarrow N$. Consideremos ahora, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "h"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads, "\bar{h}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & h(f(A)) \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r, "\beta"] & \frac{N}{h(f(A))} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\bar{h}$ es el epimorfismo inducido por la propiedad del cokernel. Por hipótesis $h(f(A))$ y $\frac{N}{h(f(A))}$ pertenecen a $\mathscr{C}$, y siendo $\mathscr{C}$ cerrada bajo extensiones de módulos, obtenemos $N \in \mathscr{C}$.

3. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia tal que $M_i \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ para cada $i \in I$. Como $\mathscr{C}$ es una clase natural y dado que cada M_i pertenece a $\mathscr{C}$ entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathscr{C}$. Si $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \xrightarrow{f\neq 0} N$ es un epimorfismo con $N \neq 0$ y $0 \neq x \in N$, entonces existe un subconjunto finito J de I tal que $Rx \hookrightarrow f(\bigoplus\limits_{J} M_i)$. Una clase hereditaria, cerrada bajo cápsulas inyectivas y sumas directas es cerrada bajo extensiones de módulos por el Lema 1.1 de (Zhou, Y. 1997), entonces por (2) $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo extensiones de módulos. Entonces $\bigoplus\limits_{J} M_i \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Luego $f(\bigoplus\limits_{J} M_i) \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $Rx \in \mathscr{C}$. Así por la Observación 2.3.1, $N \in \mathscr{C}$.

□

Corolario 2.3.1 *Para toda clase de módulos* $\mathscr{C}$, $\chi_{\leq}(\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})) = \chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C}))$.

Demostración. Sea $\mathscr{C} \subseteq R-$mod. Entonces por definción $\chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C})) \subseteq \chi_{\leq}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C}$. Además $\chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C}))$ es cerrada bajo cocientes así que $\chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C})) \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. Por la Proposición 2.3.4, $\chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C}))$ es hereditaria. Así que por definición $\chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C})) \subseteq \chi_{\leq}(\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}))$.

De manera simétrica se tiene $\chi_{\leq}(\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})) \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\chi_{\leq}(\mathscr{C}))$. □

2.4 R-nat

Aquí describimos brevemente a la retícula de clases naturales y desarrollamos la teoría necesaria para nuestro último capítulo.

Definición 2.4.1 *Una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ es una clase natural si es hereditaria, cerrada bajo sumas directas y cápsulas inyectivas. Denotamos por $R-nat$ a la clase de clases naturales.*

Ejemplo 2.4.1 *La clase de todos los módulos no-singulares es una clase natural.*

Lema 2.4.1 *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos. Si $0 \neq N \leq \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ entonces existen $0 \neq K \leq N$ y $0 \neq L \leq M_j$ para alguna $j \in I$ tal que $K \simeq L$.*

Demostración. Sean $0 \neq N \leq \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ y $0 \neq x \in N$. Entonces $Rx \leq N \leq \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ y $x = m_{\alpha_1}+m_{\alpha_2}+\cdots+m_{\alpha_s}$, con $0 \neq m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$. Escojamos $x \in N$ con s mínimo posible, por la elección de x tenemos que los anuladores de cada uno de los sumandos son iguales, así $(0 : m_{\alpha_1}) = (0 : m_{\alpha_2}) = \cdots = (0 : m_{\alpha_s})$. De lo contrario existiría $t \in (0 : m_{\alpha_i})$ tal que $t \notin (0 : m_{\alpha_j})$ con $i \neq j$, por lo que $tx = tm_{\alpha_1} + \cdots + tm_{\alpha_{i-1}} + tm_{\alpha_{i+1}} + \cdots + tm_{\alpha_j} + \cdots + tm_{\alpha_s} \in N$, lo que es una contradicción.

Entonces $(0 : x) = (0 : m_{\alpha_1})$ $Rx \simeq \frac{R}{(0:x)} = \frac{R}{(0:m_{\alpha_1})} \simeq Rm_{\alpha_1}$. Haciendo $Rx = K$, $j = \alpha_1$ y $L = Rm_{\alpha_1} \leq M_j$ se tiene el resultado. □

Proposición 2.4.1 *Dada $\mathscr{C}$ un clase de módulos, sea $\mathscr{A} = \{N \mid \forall\, 0 \neq K \leq N, \exists\, 0 \neq L \leq K$ y existe un $monomorfismo$ $L \to C$ para algún $C \in \mathscr{C}\}$. Entonces $\mathscr{A}$ es la menor clase natural que contiene a $\mathscr{C}$. Denotemos por $\xi_{R-nat}(\mathscr{C})$ a la menor clase natural que contiene a $\mathscr{C}$.*

Demostración. Es claro que $\mathscr{A}$ es hereditaria. Sean $N \in \mathscr{A}$ y $0 \neq K \leq E(N)$. Como $0 \neq K \cap N \leq N$ y $N \in \mathscr{A}$ existen $0 \neq L \leq N$ y un monomorfismo $L \to C$ para algún $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathscr{A}$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas.Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $\mathscr{A}$. Si $0 \neq K \leq \bigoplus_{i \in I} M_i$, entonces por el Lema 2.4.1 existe $0 \neq Rx \leq K$ y un monomorfismo $Rx \to M_j$ con $j \in I$ y $M_j \in \mathscr{A}$. Entonces $Rx \simeq K'$ con $K' \leq M_j$ y por lo tanto existen $0 \neq L' \leq K'$ y un monomorfismo $L' \to C$ para algún $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathscr{A}$. Así $\mathscr{A}$ es una clase natural. Sean $\mathscr{C}$ una clase de módulos y $\mathscr{D}$ una clase natural tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Si $0 \neq M \in \mathscr{A}$ entonces para todo $0 \neq K \leq M$ existen $0 \neq L \leq K$ y un monomorfismo $L \to C$ para algún $C \in \mathscr{C}$. Usando el lema de Zorn, tenemos que existe una familia independiente máxima $\{L_i\}_{i \in I}$ de submódulos de M con la propiedad de que cada L_i pertenece a $\mathscr{D}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} L_i \in \mathscr{D}$ y $\bigoplus_{i \in I} L_i \leq_{es} M$, lo que implica

$E(\bigoplus_{i\in I} L_i) = E(M) \in \mathscr{D}$. Por lo que $M \in \mathscr{D}$. $\square$

Proposición 2.4.2 *Toda clase natural es cerrada bajo extensiones de módulos.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase natural. Supongamos que en la siguiente sucesión exacta A y C pertenecen a $\mathscr{C}$. Consideremos ahora el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "l"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[r, "\iota_1"] & E(A) \oplus E(C) \arrow[r, "\pi_2"] & E(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde l, k son inclusiones y $E(A), E(C)$ pertenecen a $\mathscr{C}$ y por lo tanto $E(A) \oplus E(C) \in \mathscr{C}$. Como $E(A)$ es un módulo inyectivo y l es una inclusión, existe $B \xrightarrow{f} E(A)$ tal que $f\alpha = l$. Así que tenemos el siguiente diagrama conmutativo por la propiedad universal del producto.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dr, "k\beta"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & E(C)
\end{tikzcd}$$

entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "l"'] \arrow[d, dashed, "g\alpha"] \arrow[dr, "k\beta\alpha"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & E(C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "l"'] \arrow[d, dashed, "\iota_1 l"] \arrow[dr, "k\beta\alpha"] & \\
E(A) & E(A) \oplus E(C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"] & E(C)
\end{tikzcd}$$

es decir $g\alpha = \iota_1 l$ por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "l"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, dashed, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E(A) \arrow[r, "\iota_1"] & E(A) \oplus E(C) \arrow[r, "\pi_2"] & E(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De esta manera g es monomorfismo y por lo tanto $B \in \mathscr{C}$. $\square$

Proposición 2.4.3 *Sea $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases naturales entonces $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{C}_i$ es una clase natural.*

Demostración. Es claro. $\square$

Definición 2.4.2 *Dadas dos clases naturales $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ definimos un orden parcial en R-nat mediante: $\mathscr{C} \leq \mathscr{D} \Leftrightarrow \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Para un familia $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ de clases naturales describimos el ínfimo y el supremo mediante:*

$$\bigwedge_{i\in I} \mathscr{C}_i = \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i, \bigvee_{i\in I} \mathscr{C}_i = \xi_{R-nat}(\bigcup_{i\in I} \mathscr{C}_i).$$

Ver (Dauns, J. 2006).

Lema 2.4.2 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos entonces* $\xi_{R-nat}(\mathscr{C}) = \{M \mid existe\ una\ familia\ \{P_j\}_{j\in J}\ y\ una\ familia\ de\ monomorfismos\ \{P_j \to N_j\}_{j\in J}, N_j \in \mathscr{C}, \forall j \in J\ y\ \bigoplus_{j\in J} P_j \leq_{es} M\}$.

Demostración. Sea $\mathscr{D}$ el lado derecho de la igualdad. Si $0 \neq M \in \xi_{R-nat}(\mathscr{C})$ entonces existe $0 \neq L \leq M$ y un monomorfismo $L \to C$, $C \in \mathscr{C}$. Sea $\{P_i\}_{i\in I}$ una familia independiente máxima de submódulos de M tales que $P_i \to C_i$ es un monomorfismo para toda $i \in I$, con $C_i \in \mathscr{C}$ $\forall i \in I$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} P_i \leq_{es} M$. Por lo tanto $M \in \mathscr{D}$.

Sean $M \in \mathscr{D}$ y $0 \neq N \leq M$. Entonces $0 \neq N \cap \bigoplus_{i\in I} P_i$. Así que existe $0 \neq Rx \leq N$ y $j \in J$ junto con monomorfismos $Rx \to P_j \to N_j$, con $N_j \in \mathscr{C}$. Por lo que $M \in \xi_{R-nat}(\mathscr{C})$. $\square$

Observación 2.4.1 *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases naturales entonces* $\bigvee_{i\in I} C_i = \{M \mid\ existe \bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{es} M,\ N_i \in \mathscr{C}\ \forall i \in I\}$.

Demostración. Se sigue por la descripción del supremo y por el Lema 2.4.2. $\square$

Proposición 2.4.4 *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos, sea* $\mathscr{C}^{\perp} = \{M \mid \forall 0 \neq N \leq M,\ no\ existe\ un\ monomorfismo\ N \to C,\ C \in \mathscr{C}\}$. *Entonces $\mathscr{C}^{\perp}$ es una clase natural.*

Demostración. Sean $M \in \mathscr{C}^{\perp}$ y $N \leq M$. Supongamos que existe un monomorfismo $K \to C$, con $C \in \mathscr{C}$ para algún $0 \neq K \leq N$. Entonces, dado que $K \leq M$, $M \notin \mathscr{C}^{\perp}$. Contradicción. Por lo tanto $N \in \mathscr{C}^{\perp}$.

Sean $M \in \mathscr{C}^{\perp}$ y $0 \neq N \leq E(M)$. Supongamos que existe un monomorfismo $N \to C$, $C \in \mathscr{C}$. Como $0 \neq N \cap M \leq M$ entonces existe un monomorfismo $N \cap M \to C$, con $C \in \mathscr{C}$. Contradicción. Por lo tanto $E(M) \in \mathscr{C}^{\perp}$.

Finalmente, consideremos una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de módulos en $\mathscr{C}^{\perp}$. Sea $0 \neq N \leq \bigoplus_{i\in I} M_i$ y supongamos que existe un monomorfismo $N \to C$, con $C \in \mathscr{C}$. Por el Lema 2.4.1 existe $0 \neq K \leq N$, $j \in I$ y $L \leq M_j$ con $K \cong L \leq M_j$, dando así un monomorfismo $K \to C$ con $C \in \mathscr{C}$ y $K \cong L \leq M_j$. Por lo tanto $M_j \notin \mathscr{C}^{\perp}$. Contradicción. Así que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathscr{C}^{\perp}$. Por lo que $\mathscr{C}^{\perp}$ es una clase natural. $\square$

Proposición 2.4.5 *Si $\mathscr{C}$ es una clase natural entonces $\mathscr{C}^{\perp}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp} = \{0\}$.
2. $(\mathscr{C}^{\perp})^{\perp} = \mathscr{C}$.
3. $\mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp} = R - mod$.

Demostración.

1. Es claro.

2. Sea $0 \neq M \in (\mathscr{C}^{\perp})^{\perp}$, entonces $M \notin \mathscr{C}^{\perp}$. Así que existe un submódulo distinto de cero $N \leq M$ tal que $N \in \mathscr{C}$. Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia independiente máxima de submódulos de M que pertenecen a $\mathscr{C}$, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathscr{C}$, además $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{es} M$. Por lo tanto $M \in \mathscr{C}$. Entonces $(\mathscr{C}^{\perp})^{\perp} \subseteq \mathscr{C}$.

   Sea $0 \neq M \in \mathscr{C} \setminus (\mathscr{C}^{\perp})^{\perp}$ entonces existen $0 \neq N \leq M$, $K \in \mathscr{C}^{\perp}$ y $N \to K$ un monomorfismo. Así que $N \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}^{\perp}$, Contradicción. Por lo tanto $(\mathscr{C}^{\perp})^{\perp} = \mathscr{C}$.

3. Sea $0 \neq M \in R$-mod. Si para todo submódulo $0 \neq N \leq M$ $N \notin \mathscr{C}$, entonces $M \in \mathscr{C}^{\perp}$. Por lo tanto $M \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp}$ y acabamos.

   Supongamos que existe $0 \neq N \leq M$ tal que $N \in \mathscr{C}$. Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia independiente máxima de submódulos distintos de cero de M que pertenecen a $\mathscr{C}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathscr{C}$. Consideremos L un seudocomplemento de $\bigoplus_{i\in I} N_i$ en M.

   Si $L = 0$, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq_{es} M$, por lo tanto $M \in \mathscr{C}$ y acabamos.

   Supongamos que $0 \neq L$. Entonces $L \in \mathscr{C}^{\perp}$, ya que si $L \notin \mathscr{C}^{\perp}$ tendríamos que existe $0 \neq K \leq L$ y un monomorfismo $K \to C$, $C \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $0 \neq K \leq M$, $K \in \mathscr{C}$, por lo que $\{N_i\}_{i\in I} \cup$

$\{K\}$ es una familia independiente, lo que es una contradicción. Por lo tanto $(\bigoplus_{i\in I} N_i) \bigoplus L \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp}$. Así que $M \in \mathscr{C} \vee \mathscr{C}^{\perp}$.

□

Teorema 2.4.1 *R-nat es distributiva.*

Demostración. Sean $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$ tres clases naturales. Basta demostrar que :

$$\mathscr{C}_1 \wedge (\mathscr{C}_2 \vee \mathscr{C}_3) \leq (\mathscr{C}_1 \wedge \mathscr{C}_2) \vee (\mathscr{C}_1 \wedge \mathscr{C}_3).$$

Sea $0 \neq M \in \mathscr{C}_1 \wedge (\mathscr{C}_2 \vee \mathscr{C}_3)$. Dado que $M \in R-$mod, por la Proposición 2.4.5 (3) existen $N, L \leq M$ tales que $N \oplus L \leq_{es} M$ con $N \in \mathscr{C}_2$ y $L \in \mathscr{C}_2^{\perp}$. Entonces $N \in \mathscr{C}_1 \wedge \mathscr{C}_2$. También $L \in \mathscr{C}_2 \vee \mathscr{C}_3$ por hipótesis. Sea $0 \neq K \leq L$, entonces existe $0 \neq X \leq K$ y un monomorfismo $X \to C$ con $C \in \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3$. Pero $L \in \mathscr{C}_2^{\perp}$. Por lo que $C \notin \mathscr{C}_2$ y en consecuencia $C \in \mathscr{C}_3$. Por lo tanto $L \in \xi_{R-nat}(\mathscr{C}_3) = \mathscr{C}_3$. Por lo tanto $L \in \mathscr{C}_1 \wedge \mathscr{C}_3$. □

Denotemos por $.[0, R]$ a la retícula de ideales izquierdos de R.

Definición 2.4.3 *Si* $\mathscr{C} \in R-nat$, *definimos:* $Nat_{\mathscr{C}}(R) = \{I \leq R \mid \frac{R}{I} \in \mathscr{C}\}$.

Proposición 2.4.6 *La asignación*

$$R\text{−}nat \xrightarrow{f} \wp(.[0,R])$$

$$\mathscr{C} \longmapsto Nat_{\mathscr{C}}(R)$$

es inyectiva.

Demostración. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos clase naturales tales que $Nat_{\mathscr{C}}(R) = Nat_{\mathscr{D}}(R)$. Sea Rx un módulo cíclico en $\mathscr{C}$, entonces $Rx \cong \frac{R}{(0:x)} \in \mathscr{C}$ por lo que $(0 : x) \in Nat_{\mathscr{C}}(R) = Nat_{\mathscr{D}}(R)$. Por lo tanto $Rx \in \mathscr{D}$. Así que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ tienen los mismos módulos cíclicos. Entonces por la Observación 2.3.1 $\mathscr{C} = \mathscr{D}$. □

Definición 2.4.4 *Sea $\mathscr{A} \subseteq .[0,R]$ es un conjunto natural si:*

1. $(I \in \mathscr{A}, J \in \mathscr{A}) \Rightarrow I \cap J \in \mathscr{A}$.

2. $I \in \mathscr{A} \Rightarrow (\forall a \in R, (I : a) \in \mathscr{A})$

3. $I \notin \mathscr{A} \Rightarrow (\exists J \leq R,$ *tal que* $I \lneqq J \wedge (I : a) \notin \mathscr{A} \forall a \in J \setminus I)$.

Proposición 2.4.7 *Son equivalentes para $\mathscr{A} \subseteq .[0,R]$.*

1. $\mathscr{A} = Nat_{\mathscr{C}}(R)$ *para alguna* $\mathscr{C} \in R\text{−}nat$.

2. $\mathscr{A}$ es un conjunto natural.

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$. Sean $I, J \in Nat_{\mathscr{C}}(R)$. Como $\frac{R}{I\cap J} \to \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J}$ es un monomorfismo entonces $\frac{R}{I\cap J} \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $I \cap J \in Nat_{\mathscr{C}}(R)$. Ahora, como $\frac{R}{(I:a)} \cong \frac{Ra+I}{I} \leq \frac{R}{I}$ entonces $(I : a) \in Nat_{\mathscr{C}}(R)$. Si $I \notin Nat_{\mathscr{C}}(R)$, entonces $\frac{R}{I} \notin \mathscr{C}$. Por la Proposición 2.4.5 (2) podemos hacer $\mathscr{C} = \mathscr{D}^{\perp}$ donde $\mathscr{D} = \mathscr{C}^{\perp}$. Entonces existe $0 \neq \frac{J}{I} \leq \frac{R}{I}$ tal que $\frac{J}{I} \in \mathscr{D}$. Sea $a \in J \setminus I$,, como $\frac{Ra+I}{I} \leq \frac{J}{I}$ entonces $\frac{R}{(I:a)} \cong \frac{Ra+I}{I} \in \mathscr{D}$. Así que $(I : a) \notin Nat_{\mathscr{C}}(R)$.

$[2 \Rightarrow 1]$. Sea $\mathscr{B} = \{M \mid (0 : x) \in \mathscr{A}, \forall x \in M\}$. Demostraremos que $\mathscr{B}$ es una clase natural. Es claro que $\mathscr{B}$ es una clase hereditaria. Sean $M \in \mathscr{B}$ y $x \in E(M)$ tal que $(0 : x) \notin \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ es un conjunto natural, entonces existe $J \leq R$ tal que $(0 : x) \lneq J$ y $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$ $\forall a \in J \setminus (0 : x)$. Sea $N \leq Rx$ tal que $0 \neq N \cong \frac{J}{(0:x)}$ y como $0 \neq N \cap M$ existe $0 \neq y \in N \cap M$ tal que $\frac{R}{(0:y)} \cong Ry \cong \frac{Ra+(0:x)}{(0:x)} \cong \frac{R}{((0:x):a)}$. Para alguna $a \in J \setminus (0 : x))$. Ya que $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$ entonces $(0 : y) \notin \mathscr{A}$. Por lo tanto $N \cap M \notin \mathscr{B}$ lo que implica $M \notin \mathscr{B}$. Contradicción, por lo tanto $E(M) \in \mathscr{B}$. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en $\mathscr{B}$. Si $x \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces $x = x_1 + \cdots + x_n$ con $x_i \in M_i$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$. Entonces $(0 : x) = \bigcap_{i\in I}(0 : x_i)$ donde $(0 : x_i) \in \mathscr{A}$ para cada $i \in \{1, \ldots n\}$. Así que $(0 : x) \in \mathscr{A}$, ya que $\mathscr{A}$ es un conjunto natural. Por lo tanto $\mathscr{B}$ es una clase natural.

De esta manera:

$$I \in Nat_{\mathscr{B}}(R) \Leftrightarrow \frac{R}{I} \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall \bar{x} \in \frac{R}{I}, (\bar{0} : \bar{x}) \in \mathscr{A} \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in R, (I : x) \in \mathscr{A} \Leftrightarrow I \in \mathscr{A}.$$

$\square$

Proposición 2.4.8 *$R-nat$ es cardinable.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4.7. $\square$

2.5 R-tors

Aquí describimos brevemente a la retícula de teorías de torsión hereditarias y desarrollamos la teoría necesaria para nuestro último capítulo.

Definición 2.5.1 *Una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria si además de ser hereditaria es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones de módulos.*

Ejemplo 2.5.1 *La clase de los grupos abelianos de torsión es una clase de torsión hereditaria.*

Definición 2.5.2 *Una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ es una clase libre de torsión si es hereditaria, cerrada bajo cápsulas inyectivas, productos directos y extensiones de módulos.*

Ejemplo 2.5.2 *La clase de los módulos no singulares es una clase libre de torsión hereditaria.*

Observación 2.5.1 *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos. La clase $\mathbb{F}_{\mathscr{C}} = \{N \mid Hom(M, E(N)) = 0 \, para \, todo \, M \in \mathscr{C}\}$ es una clase libre de torsión hereditaria.*

Demostración. Claramente $\mathbb{F}_{\mathscr{C}}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea L un submódulo de $N \in \mathbb{F}_{\mathscr{C}}$. Entonces $E(L) \leq E(N)$, por lo que $E(L) \oplus E = E(N)$ para algún módulo inyectivo E. Luego $0 = Hom(M, E(N)) = Hom(M, E(L) \oplus E) = Hom(M, E(L)) \oplus Hom(M, E)$ para todo $M \in \mathscr{C}$, lo que implica $Hom(M, E(L)) = 0$ para todo $M \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathbb{F}_{\mathscr{C}}$ es hereditara. Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en $\mathbb{F}_{\mathscr{C}}$. Sabemos que $E(\prod\limits_{i\in I} N_i) \leq \prod\limits_{i\in I} E(N_i)$ y que $Hom(M, \ )$ es un funtor exacto izquierdo. Entonces $Hom(M, E(\prod\limits_{i\in I} N_i) \leq Hom(M, \prod\limits_{i\in I} E(N_i)) = \prod\limits_{i\in I} Hom(M, E(N_i)) = 0$. Así que $\mathbb{F}_{\mathscr{C}}$ es cerrada bajo productos y por lo tanto una clase natural. Por la Proposición 2.4.2, $\mathbb{F}_{\mathscr{C}}$ es una clase libre de torsión hereditaria. □

Dada $\mathscr{C}$ una clase de módulos, podemos definir:

$$\mathbb{T}_{\mathscr{C}} = \{M \mid Hom(M, E(N)) = 0 \ para\, todo \ N \in \mathscr{C}\}.$$

Proposición 2.5.1 *Sea $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditara. Entonces $\mathscr{C} = \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathscr{C}}}$.*

Demostración. Sean $M \in \mathscr{C}$ y $N \in \mathbb{F}_{\mathscr{C}}$. Entonces $Hom(M, E(N)) = 0$, por lo que $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathscr{C}}}$. Así $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathscr{C}}}$. Sea $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathscr{C}}}$. Supongamos que $M \notin \mathscr{C}$. Consideremos $\mathscr{A} = \{N \mid N \leq M, N \in \mathscr{C}\}$, es claro que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Como $\bigoplus \mathscr{A} \in \mathscr{C}$ y existe un epimorfismo $\bigoplus \mathscr{A} \to \sum \mathscr{A}$, tenemos que $t(M) = \sum \mathscr{A} \in \mathscr{C}$. Así $t(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathscr{C}$. Por hipótesis $\frac{M}{t(M)} \neq 0$. Sea $N \in \mathscr{C}$ y $N \xrightarrow{f} \frac{M}{t(M)}$ un morfismo. Luego existe $K \leq M$ tal que $f(N) = \frac{K}{t(M)} \in \mathscr{C}$ ya que $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes. Consideremos la siguiente sucesión exacta con extremos en $\mathscr{C}$:

$$0 \longrightarrow t(M) \longrightarrow K \longrightarrow \frac{K}{t(M)} \longrightarrow 0\,.$$

Como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones de módulos se sigue que $K \in \mathscr{C}$. Lo que implica que $K = t(M)$, así $f = 0$, por lo que ningún submódulo de $\frac{M}{t(M)}$ distinto de cero pertenece a $\mathscr{C}$. Por lo tanto $Hom(N, E(\frac{M}{t(M)})) = 0$ para todo $N \in \mathscr{C}$, es decir, $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_{\mathscr{C}}$ pero también $\frac{M}{t(M)} \in \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathscr{C}}}$ por hipótesis. Entonces $Hom(\frac{M}{t(M)}, E(\frac{M}{t(M)})) = 0$, lo que implica que $\frac{M}{t(M)} = 0$. Así $M = t(M) \in \mathscr{C}$, lo que es una contradicción. $\square$

Definición 2.5.3 *Una teoría de torsión es una pareja $\tau = (\mathbb{T}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}})$ donde $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\mathbb{T}}}$ es una clase de torsión hereditaria y $\mathbb{F}_{\mathbb{T}}$ es la clase libre de torsión hereditara correspondiente a $\mathbb{T}$. Denotamos por R-tors a la clase de todas las teorías de torsión en R-mod. Si $\tau \in$ R-tors denotamos $\mathbb{T}_{\tau}$ ($\mathbb{F}_{\tau}$) a la clase de torsión (libre) hereditaria correspondiente a la teoría de torsión τ.*

Observación 2.5.2 *Si* $\tau, \sigma \in R$*-tors se tiene que* $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{F}_\sigma$. Entonces $Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $M \in \mathbb{T}_\sigma$, en particular para todo $M \in \mathbb{T}_\tau$. Luego $N \in \mathbb{F}_\tau$. Supongamos ahora que $M \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces $Hom(M, E(N)) = 0$ para todo $N \in \mathbb{F}_\tau$, en particular para todo $N \in \mathbb{F}_\sigma$. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\sigma$. $\square$

Si $\tau, \sigma \in R$-tors entonces $\tau \leq \sigma$ si y sólo si $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$. Es fácil notar que intersección de clases libres de torsión hereditaria es una clase libre de torsión hereditara. También la intersección de clases de torsión hereditaria es una clase de torsión hereditaria. Por lo tanto, si $\{\tau_i\}_{i\in I} \subseteq R$-tors, el ínfimo $\wedge\{\tau_i\}_{i\in I}$ está dado por $\mathbb{T}_{\wedge\{\tau_i\}_{i\in I}} = \bigcap\{\mathbb{T}_{\tau_i}\}_{i\in I}$. El supremo está dado por $\mathbb{F}_{\vee\{\tau_i\}_{i\in I}} = \bigcap\{\mathbb{F}_{\tau_i}\}_{i\in I}$.

Proposición 2.5.2 *Sean* $\mathscr{C}$ *una clase de módulos y*

$$\chi(\mathscr{C}) = (\mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})}, \mathbb{F}_{\mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})}})$$

la teoría de torsión tal que:

$$\mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})} = \{M \mid Hom(M, E(C)) = 0\, para\, todo\, C \in \mathscr{C}\}.$$

Entonces $\chi(\mathscr{C})$ *es la mayor teoría de torsión tal que* $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})}$.

Demostración. Sabemos que:

$$\mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})} = \{N \mid Hom(M, E(N)) = 0 \, para \, todo \, M \in \mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})}\}.$$

Sean $N \in \mathscr{C}$ y $M \in \mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})}$. Entonces $Hom(M, E(N)) = 0$, por lo que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})}$. Supongamos que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_\tau$ con $\tau \in R$-tors. Sea $N \in \mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})}$. Supongamos que existe un morfismo distinto de cero $M \xrightarrow{f \neq 0} E(N)$ con $M \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})}$, tenemos que $0 \neq f(M) \cap N \in \mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})} \cap \mathbb{T}_{\chi(\mathscr{C})} = \{0\}$. Contradicción. Por lo tanto $\mathbb{F}_{\chi(\mathscr{C})} \subseteq \mathbb{F}_\tau$. $\square$

Proposición 2.5.3 *Sean $\mathscr{C}$ una clase de módulos y*

$$\xi(\mathscr{C}) = (\mathbb{T}_{\mathbb{F}_{\xi(\mathscr{C})}}, \mathbb{F}_{\xi(\mathscr{C})})$$

la teoría de torsión tal que:

$$\mathbb{F}_{\xi(\mathscr{C})} = \{N \mid Hom(M, E(N)) = 0 \, para \, todo \, M \in \mathscr{C}\}.$$

Entonces $\xi(\mathscr{C})$ es la menor teoría de torsión tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{T}_{\xi(\mathscr{C})}$.

Demostración. La demostración es análoga a la anterior. $\square$

Dada $\mathscr{C}$ una clase de módulos, a la teoría de torsión $\xi(\mathscr{C})$ se le llama la teoría de torsión generada por $\mathscr{C}$ y a la teoría de torsión $\chi(\mathscr{C})$ se le llama la teoría de torsión cogenerada por $\mathscr{C}$. Por lo anterior para toda teoría de torsión τ se tiene que $\xi(0) \leq \tau \leq \chi(0)$. Es decir R-tors es una retícula completa con 1 y 0. Denotemos por ξ a la menor teoría de torsión y por χ a la mayor teoría de torsión en R-mod.

Proposición 2.5.4 *Sea $\tau = (\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión. Entonces existe un módulo inyectivo E tal que $\mathbb{T}_\tau = \{M \mid Hom(M,E) = 0\}$. Escribimos $\tau = \chi(E)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{M \mid Hom(M,E) = 0\}$ donde $E = \prod\{E(\frac{R}{I}) \mid \frac{R}{I} \in \mathbb{F}_\tau\}$, claramente E es un módulo inyectivo. Supongamos que $M \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\frac{R}{I} \in \mathbb{F}_\tau$, luego $E(\frac{R}{I}) \in \mathbb{F}_\tau$, así $E \in \mathbb{F}_\tau$. Por lo tanto $Hom(M,E) = 0$, lo que demuestra que $M \in \mathscr{A}$. Supongamos ahora que $M \in \mathscr{A}$ pero que $M \notin \mathbb{T}_\tau$. Consideremos $t(M)$ el mayor submódulo de M que pertence a $\mathbb{T}_\tau$. Sabemos que $0 \neq \frac{M}{t(M)} \in \mathbb{F}_\tau$. Sea $0 \neq Rx \in \frac{M}{t(M)}$ un módulo cíclico. Es claro que $Rx \in \mathbb{F}_\tau$, además Rx es isomorfo a $\frac{R}{(0:x)}$ donde $(0 : x)$ es el anulador de x. Consideremos $M \xrightarrow{\pi \neq 0} \frac{M}{t(M)}$ el epimorfismo canónico. Entonces tenemos el siguiente epimorfismo $\pi^{-1}(Rx) \xrightarrow{\pi} Rx \cong \frac{R}{(0:x)}$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo debido a que E es un módulo inyectivo:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(Rx) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & M \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
\frac{R}{(0:x)} \arrow[r, hook, "\iota_1"] & E(\frac{R}{(0:x)}) \arrow[r, hook, "\iota_2"] & E
\end{tikzcd}$$

Como $\iota_2\iota_1\pi \neq 0$ entonces $f \neq 0$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\tau$. $\square$

Proposición 2.5.5 *Son equivalentes para $\tau \in R$-tors:*

1. *$\tau^\perp \in R$-tors es un seudocomplemento de τ, es decir, $\tau \wedge \tau^\perp = \xi$ y además $\tau^\perp$ es máximo con esa propiedad.*

2. $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \mid Hom(M, E(T)) = 0\, \forall T \in \mathbb{T}_\tau\}$

3. $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \mid Hom(M, E(C)) = 0\, \forall C \in \mathbb{T}_\tau, C\, \textit{cíclico}\}$

4. $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \mid Hom(M, E(S)) = 0\, \forall S \in \mathbb{T}_\tau, S\, \textit{simple}\}$

5. $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \mid M\, \textit{no tiene subcocientes distintos de cero en}\, \mathbb{T}_\tau\}$

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{M \mid Hom(M, E(T)) = 0\, \forall T \in \mathbb{T}_\tau\}$. Primero vamos a demostrar que $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \mathscr{A}$. Sean $M \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$ y $M \xrightarrow{f \neq 0} E(T)$ con $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces $0 \neq f(M) \cap T \in \mathbb{T}_{\tau^\perp} \cap \mathbb{T}_\tau = \{0\}$. Contradicción. Por lo tanto $\mathbb{T}_{\tau^\perp} \subseteq \mathscr{A}$. Si $M \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathscr{A}$, entonces $Hom(M, E(M)) = 0$, es decir, $M = 0$. Por lo tanto $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \mathscr{A}$ ya que $\mathbb{T}_{\tau^\perp}$ es máximo con la propiedad de intersectar a $\mathbb{T}_\tau$ en cero.

Sea $\mathscr{B} = \{M \mid Hom(M, E(C)) = 0\, \forall C \in \mathbb{T}_\tau, C\, \textit{cíclico}\}$. Es claro que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$. Sea $\mathscr{C} = \{M \mid Hom(M, E(C)) = 0\, \forall S \in \mathbb{T}_\tau, S\, \textit{simple}\}$. Del hecho de que todo módulo simple es cíclico se sigue $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$. Sea

$\mathscr{D} = \{M \mid M\, no\, tiene\, subcocientes\, distintos\, de\, cero\, en\, \mathbb{T}_\tau\}$. Supongamos que $M \in \mathscr{C}$ y que M tiene un subcociente $0 \neq N \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria $N \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathscr{C}$. Sea $0 \neq Rx \leq N$, entonces $Rx \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathscr{C}$ tiene un cociente simple $S \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathscr{C}$. Entonces $Hom(Rx, E(S)) \neq 0$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Finalmente vamos a demostrar que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}$. Sean $M \in \mathscr{D}$ y $M \xrightarrow{f \neq 0} E(T)$ con $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces $0 \neq f(M) \cap T \in \mathbb{T}_\tau$ y es un subcociente de M. Contradicción. Por lo que $M \in \mathscr{A}$. $\square$

Por el apartado 4 de la proposición anterior tenemos que $\tau^\perp = \chi(R - simp \cap \mathbb{T}_\tau)$. Donde R-simp denota al conjunto de clases de isomorfismos de módulos simples y $\mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{M \mid Hom(M, E(S)) = 0\, \forall S \in \mathbb{T}_\tau, S\, simple\}$. Ahora daremos una descripción útil de $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$.

Observación 2.5.3 *Si τ es una teoría de torsión entonces* $\mathbb{F}_{\tau^\perp} = \{M \mid \exists\, un\, monomorfismo\, M \to \prod_{i \in I} E(S_i)\, con\, S_i \in \mathbb{T}_\tau,\, S_i\, simple$ *para cada* $i \in I\}$.

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{M \mid \exists\, un\, monomorfismo\, M \to \prod_{i \in I} E(S_i)$ $con\, S_i \in \mathbb{T}_\tau \cap R - simp\}$. $\mathscr{A}$ es claramente hereditaria y cerrada bajo productos directos. Consideremos $M \in \mathscr{A}$, entonces podemos extender a $M \to \prod_{i \in I} E(S_i)$ mediante la cápsula inyectiva de M, ya que $\prod_{i \in I} E(S_i)$ es un módulo inyectivo. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{i\in I} E(S_i) \\ E(M) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Donde $E(M) \to \prod\limits_{i\in I} E(S_i)$ es un monomorfismo ya que $M \to E(M)$ es un monomorfismo esencial. Por lo tanto $E(M) \in \mathscr{A}$. Entonces $\mathscr{A}$ es hereditaria, cerrada bajo cápsulas inyectivas y productos directos, por lo que se deduce que $\mathscr{A}$ es una clase natural y por la Proposición 2.4.2 tenemos que $\mathscr{A}$ es una clase libre de torsión hereditaria tal que $R-simp \cap \mathbb{T}_\tau \subseteq \mathscr{A}$. Por otro lado sabemos que $\tau^\perp = \chi(R-simp \cap \mathbb{T}_\tau)$ es la mayor teoría de torsión tal que $R - simp \cap \mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Por lo que $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \subseteq \mathscr{A}$. Por otro lado, si $M \in \mathscr{A}$, entonces $M \to \prod\limits_{i\in I} E(S_i)$ con cada $S_i \in \mathbb{T}_\tau \cap R - simp \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Entonces $E(S_i) \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \forall i \in I$, así $\prod\limits_{i\in I} E(S_i) \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$, luego $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Por lo tanto $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. $\square$

Observación 2.5.4 *Sean $\tau \in R$-tors y S un módulo simple. Entonces $S \in \mathbb{T}_\tau$ ó $S \in \mathbb{F}_\tau$.*

Demostración. Sea S un módulo simple. Consideremos $t_\tau(S)$, el mayor submódulo de S que pertenece a $\mathbb{T}_\tau$. Como S es simple, tenemos que $t_\tau(S) = 0$ ó $t_\tau(S) = S$. Supongamos que $t_\tau(S) = 0$ entonces $S = \frac{S}{t_\tau(S)} \in \mathbb{F}_\tau$. $\square$

Observación 2.5.5 *Sea S un módulo simple y $\tau \in R$-tors. Son equivalentes:*

1. $S \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$.

2. $S \in \mathbb{F}_\tau$.

Demostración. [1 ⇒ 2] Sea S un módulo simple. Por la observación anterior, podemos suponer que $S \in \mathbb{T}_\tau$. Pero entonces $S \in \mathbb{T}_\tau \cap \mathbb{T}_{\tau^\perp} = \{0\}$. Contradicción. Por lo tanto $S \in \mathbb{F}_\tau$.

[2 ⇒ 1] Sea $S \in \mathbb{F}_\tau$. Cualquier subcociente de S es isomorfo a S. Así, S no tiene subcocientes distintos de cero en $\mathbb{T}_\tau$. Por la Proposición 2.5.5(5), $S \in \mathbb{T}_{\tau^\perp}$. □

Teorema 2.5.1 *Son equivalentes para un anillo R.*

1. *R es semiartiniano.*

2. *R-tors es booleana.*

3. *Para toda $\tau \in R$-tors $\tau = \tau^{\perp\perp}$.*

4. *Para toda $\tau \in R$-tors $\tau = \xi(\mathscr{A})$, con $\mathscr{A} \subseteq R - simp$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.5.5(5), que $\mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}} = \{M \mid M \textit{ no tiene subcocientes distintos de cero en } \mathbb{T}_{\tau^\perp}\}$. Pero esto es lo mismo que decir que $\mathbb{T}_{\tau^{\perp\perp}} = \{M \mid \textit{todo subcociente distinto de cero de } M \textit{ tiene un subcociente distinto de cero en } \mathbb{T}_\tau\}$.

[4 ⇒ 2] Hay que demostrar que $\chi = \tau \vee \tau^\perp$, es decir, hay que demostrar que $\mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_{\tau^\perp} = \{0\}$. Sea $0 \neq M \in \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Consideremos la teoría de torsión generada por M. Por hipótesis $\xi(M) = \xi(\mathscr{A})$, con $\mathscr{A} \subseteq R - \mathit{simp}$. Afirmamos que existe un módulo simple $S \in \mathscr{A}$ y un monomorfismo $S \to M$ pues de lo contrario, $Hom(S, E(M)) = 0$ para todo $S \in \mathscr{A}$, es decir, $M \in \mathbb{F}_{\xi(\mathscr{A})}$, entonces $M \in \mathbb{T}_{\xi(\mathscr{A})} \cap \mathbb{F}_{\xi(\mathscr{A})} = \{0\}$. Lo que es una contradicción. Entonces M contiene un módulo simple S. Por lo que $S \in \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Por la Observación 2.5.3, existe un monomorfismo $M \to \prod_{i\in I} E(T_i)$, con $T_i \in R - \mathit{simp} \cap \mathbb{T}_\tau \, \forall i \in I$. Entonces existe un monomorfismo $S \to E(T_j)$, para alguna $j \in I$. Así $S \cong T_j \in \mathbb{T}_\tau$. Por lo que $S \in \mathbb{F}_\tau \cap \mathbb{T}_\tau = \{0\}$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto $M = 0$.

[2 ⇒ 3] Sean $\tau \in R$-tors y $\tau^c \in R$-tors su complemento. Es decir, $\tau \wedge \tau^c = \xi$ y $\tau \vee \tau^c = \chi$. Ahora, $\tau^\perp = \tau^\perp \wedge (\tau \vee \tau^c) = (\tau^\perp \wedge \tau) \vee (\tau^\perp \wedge \tau^c) = \xi \vee (\tau^\perp \wedge \tau^c) = \tau^\perp \wedge \tau^c \leq \tau^c$. Pero $\tau^\perp$ es máximo con la propiedad $\tau^\perp \wedge \tau = \xi$. Por lo tanto $\tau^\perp = \tau^c$, lo que implica $\tau = \tau^{cc} = \tau^{\perp\perp}$.

[$3 \Rightarrow 1$] Sea $M \neq 0$ tal que $zoc(M) = 0$. Consideremos la teoría de torsión cogenerada por M, entonces por hipótesis $\chi(M) = \chi(M)^{\perp\perp}$. Además

$$\mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp\perp}} = \{N \mid Hom(N, E(S)) = 0 \, \forall S \in R - simp \cap \mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp}}\}.$$

Por la Observación 2.5.5:

$$\mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp\perp}} = \{N \mid Hom(N, E(S)) = 0 \, \forall S \in R - simp \cap \mathbb{F}_{\chi(M)}\}.$$

Si $S \in \mathbb{F}_{\chi(M)} \cap R{-}simp$ entonces existe un monomorfismo $S \to E(M)^X$ para algún conjunto X. Luego existe un monomorfismo $S \xrightarrow{f \neq 0} E(M)$. Por lo tanto $f(S) \leq M$ y $f(M) \in R - simp$. Lo que es una contradicción, ya que $zoc(M) = 0$ por hipótesis. De modo que no hay módulos simples en $\mathbb{F}_{\chi(M)}$. Por lo que $\mathbb{T}_{\chi(M)^{\perp\perp}} = R{-}mod= \mathbb{T}_{\chi}$. Así $\chi(M) = \chi(M)^{\perp\perp} = \chi$. Por lo tanto $M \in \mathbb{F}_{\chi(M)} = \mathbb{F}_{\chi}$. Entonces $0 \neq M \in \mathbb{T}_{\chi} \cap \mathbb{F}_{\chi}$, lo que es absurdo. Luego todo módulo izquierdo distinto de cero tiene zoclo distinto de cero. Por lo tanto R es semiartiniano izquierdo.

[$1 \Rightarrow 4$] Sea $\tau \in R{-}$tors. Consideremos $\mathscr{A} = \{S \in R - simp \mid S \in \mathbb{T}_{\tau}\}$. Es claro que $\xi(\mathscr{A}) \leq \tau$. Supongamos que $M \in \mathbb{T}_{\tau}$ y que $M \notin \mathbb{T}_{\xi(\mathscr{A})}$. Entonces $0 \neq N = \frac{M}{t_{\xi(\mathscr{A})}(M)} \in \mathbb{T}_{\tau} \cap \mathbb{F}_{\xi(\mathscr{A})}$. Como R es semiartiniano izquierdo entonces N tiene un submódulo simple $S \in \mathbb{T}_{\tau}$, es decir $S \in \mathscr{A}$. Luego $Hom(S, E(N)) \neq 0$ y $N \in \mathbb{F}_{\xi(\mathscr{A})}$. Contradicción. Por lo tanto $\xi(\mathscr{A}) = \tau$.

$\square$

Capítulo 3

Hipótesis fuertes.

En este capítulo estudiamos algunas relaciones entre las retículas de clases de módulos cerradas bajo sumas directas, productos, cubiertas proyectivas, cápsulas inyectivas, submódulos y cápsulas inyectivas y submódulos y sumas directas. El nombre de este capítulo obedece a que las hipótesis que escogemos obligan a que los anillos sean muy especiales, tales como: el anillo trivial o anillos semisimples.

Proposición 3.0.6 *Supongamos que toda clase de R-módulos $\mathscr{C}$ hereditaria y cerrada bajo sumas directas es una clase natural. Entonces R es V-anillo neteriano izquierdo.*

Demostración. Por la hipótesis, la clase de los R-módulos semisimples es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Es decir, todo semisimple es inyectivo. Por lo tanto R es V-anillo neteriano izquierdo. $\square$

Definición 3.0.4 *Una clase de torsión es estable si es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Definición 3.0.5 *Un anillo R es estable izquierdo si toda clase de torsión hereditaria en R-mod es estable.*

Ejemplo 3.0.3 *Todo anillo neteriano conmutativo es estable. (Golan, J.)*

La hipótesis de que toda clase hereditaria y cerrada bajo sumas directas sea una clase natural implica que toda teoría de torsión es estable, es decir, implica que R es estable. Además en vista de la proposición anterior R es V-anillo neteriano izquierdo, pero no se tiene el recíproco, ya que $\mathbb{Z}$ es estable pero no es V-anillo.

Proposición 3.0.7 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathscr{L}_E \subseteq \mathscr{L}_\oplus$.
2. $\mathscr{L}_{\leq,E} \subseteq \mathscr{L}_\oplus$.

3. $R = \{0\}$.

Demostración. [1 $\Rightarrow$ 3]. Sea S un módulo simple, entonces $\xi_E(S) = \{S, E(S)\}$ es una clase cerrada bajo sumas directas por hipótesis, lo que no puede pasar a menos que $R = \{0\}$.

[2 $\Rightarrow$ 3]. Consideremos $\mathscr{C} = \{M \mid M es\ finitamente\ cogenerado\}$. Como $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo submódulos y cápsulas inyectivas, entonces $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\oplus}$. Lo que es absurdo a menos que $R = \{0\}$.

[3 $\Rightarrow$ 1] y [3 $\Rightarrow$ 2]. Son claras.

□

Teorema 3.0.2 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathscr{L}_{\oplus} \subseteq \mathscr{L}_E$

2. *R es semisimple.*

Demostración. [1 $\Rightarrow$ 2]. Sea M un $R-$módulo, entonces $\xi_{\oplus}(M) = \{M^{(X)} \mid X es\ un\ conjunto\} \in \mathscr{L}_E$. Por lo tanto $E(M) = M^{(X)}$ para algún conjunto X. Entonces M es un sumando directo de $E(M)$ y por lo tanto M es inyectivo. Así, todo módulo es inyectivo. Lo que implica que R es semisimple.

[2 $\Rightarrow$ 1]. Es claro.

□

Definición 3.0.6 *Una clase $\mathscr{C}$ de módulos es cerrada bajo cubiertas proyectivas, si cada que un módulo esté en la clase $\mathscr{C}$, su cubierta proyectiva está en la clase $\mathscr{C}$. Nótese que al considerar clases cerradas bajo cubiertas proyectivas estamos pidiendo que todo módulo tenga cubierta proyectiva, es decir, estamos pidiendo que el anillo sea perfecto izquierdo. Denotamos por $\mathscr{L}_P$ a la clase de clases cerradas bajo cubiertas proyectivas.*

Teorema 3.0.3 *Supongamos que R es perfecto izquierdo. Son equivalentes:*

1. $\mathscr{L}_\pi \subseteq \mathscr{L}_P$
2. *R es semisimple.*

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$. Sea M un $R-$módulo, entonces

$$\xi_\pi(M) = \{M^X \mid es\ un\ conjunto\} \in \mathscr{L}_P.$$

Por lo tanto $P(M) = M^X$ para algún conjunto X. Entonces M es un sumando directo de $P(M)$ y por lo tanto M es un módulo proyectivo.

$[2 \Rightarrow 1]$. Es claro.

□

Teorema 3.0.4 *Son equivalentes:*

1. $\mathscr{L}_{\leq,\oplus} \subseteq \mathscr{L}_E$.

2. *R es neteriano izquierdo y (M uniforme en* $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus} \Rightarrow E(M) \in \mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus}$*).*

3. *R es neteriano izquierdo, $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ es atómica y cada clase $\mathscr{C}$ en $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ contiene un módulo inyectivo.*

4. *$\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ es booleana.*

Demostración. $[1 \Rightarrow 4]$. Sea $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus}$. Por hipótesis $\mathscr{C}$ es una clase natural. Entonces por la Proposición 2.4.5 $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ es booleana.

$[4 \Rightarrow 1]$. Si $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus}$. Por hipótesis $\mathscr{C}$ tiene complemento. Pero por la Proposición 2.4.5 y la Proposición 2.4.4 $\mathscr{C}^{\perp} = \{M \mid \forall 0 \neq N \leq M,\ no\ existe\ un\ monomorfismo\ N \to C,\ C \in \mathscr{C}\}$ es una clase natural y $\mathscr{C} = (\mathscr{C}^{\perp})^{\perp}$. Por lo que $\mathscr{C}$ es una clase natural y por lo tanto $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_E$.

$[1 \Rightarrow 2]$. Sea $\mathscr{C} = \{M \mid M es\ semisimple\}$. Como $\mathscr{C}$ es hereditaria y cerrada bajo sumas directas entonces $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas por hipótesis. Por tanto, todo módulo semisimple es inyectivo. Es decir, R es un V-anillo neteriano. Si M es un módulo uniforme en $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus}$, es claro que $E(M) \in \mathscr{C}$.

$[2 \Rightarrow 3]$. Sea $0 \neq M \in \mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,\oplus}$. Como R es neteriano, entonces $E(M) = \bigoplus_{j \in I} I_j$, con I_j inyectivo inescindible para toda $j \in I$. Sea $0 \neq Rx \leq E(M)$, por el Lema 2.4.1 existe un monomorfismo $Rx \to I_j$ para alguna $j \in I$. Entonces $Rx \in \mathscr{C}$ y es uniforme, así que $E(Rx) \in \mathscr{C}$ por hipótesis. Por lo tanto cada clase en $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ contiene a un módulo inyectivo.

Sea I un inyectivo inescindible. Afirmamos que $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(I))$ es un átomo en $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$. Sean $\{0\} \neq \mathscr{C} \subseteq \xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(I))$ y $M \in \mathscr{C}$. Nótese que podemos escoger M inyectivo inescindible por hipótesis. Entonces existe un monomorfismo $M \to I^{(X)}$, luego por el teorema de Krull-Remak-Schmidt (Kasch, F, 1982) $M \cong I \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(I)) = \mathscr{C}$.

$[3 \Rightarrow 1]$. Sea $M \in \mathscr{C}$. Como R es neteriano, entonces $E(M) = \bigoplus_{j \in I} I_j$ con I_j inyectivo inescindible para todo $j \in I$. Entonces $0 \neq I_j \cap M \in \mathscr{C}$ para toda $j \in I$. Así que $\xi_{\leq,\oplus}(I_j \cap M) \subseteq \mathscr{C}$. Como cada clase en $\mathscr{L}_{\leq,\oplus}$ contiene un módulo inyectivo y R es neteriano, podemos suponer que existe $I \in \xi_{\leq,\oplus}(I_j \cap M)$, donde I es un módulo inyectivo inescindible. Entonces existe un monomorfismo $I \to (I_j \cap M)^{(X)} \to I_j^{(X)}$ para algún conjunto X. Por lo tanto por el Teorema de Krull-Remak-Schmidt (Kasch, F, 1982) $I \cong I_j$. Así que $I_j \in \mathscr{C}$ para toda $j \in I$. Por lo tanto $E(M) = \bigoplus_{j \in I} I_j \in \mathscr{C}$.

$\square$

Capítulo 4

Anillos de ideales principales.

En este capítulo agregamos dos caracterizaciones más de anillos de ideales principales a las existentes en la literatura (Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. 2006) y (Cejudo, C. 2013). Las últimas dos equivalencias del Teorema 4.0.8 son originales.

El siguiente teorema caracteriza cuándo un anillo R es artiniano de ideales principales sin usar clases de módulos.

Teorema 4.0.5 *Las siguientes condiciones para un anillo R son equivalentes:*

1. *R es un anillo artiniano de ideales principales.*

2. *R es un anillo casi-Frobenius de ideales principales izquierdos.*

3. *La cápsula inyectiva y la cubierta proyectiva de cada R-módulo (izquierdo o derecho) finitamente generado son isomorfas.*

4. *Para cada módulo izquierdo M, $soc(M) \cong \frac{M}{JM}$ y para cada módulo derecho N, $soc(N) \cong \frac{N}{NJ}$, donde J denota el radical de Jacobson del anillo R.*

5. *Para todo $I \leq R, \frac{R}{I}$ es casi-Frobenius.*

Demostración. $[1 \Leftrightarrow 2]$ (Faith, C. 1966), $[1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4]$,(Boyle, A. 1973), $[1 \Leftrightarrow 5]$ (Faith, C. 1976) □

El siguiente teorema puede ser consultado en (Alvarado,A., Rincón, H., Ríos, J. 2011).

Teorema 4.0.6 *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathscr{L}_{\leq} = \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$.

2. *R es isomorfo a un producto directo finito de anillos artinianos de ideales principales.*

3. Para cada módulo M se tiene que $\xi_{\leq}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$.

Lema 4.0.1 *Si $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E} \subseteq \mathscr{L}_{\leq}$ entonces R es un anillo casi-Frobenius.*

Demostración. Mostraremos que todo módulo proyectivo es inyectivo. Sea P un módulo proyectivo. Entonces $\xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(P)) \in \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$ por hipótesis. Así que $P \in \xi_{\twoheadrightarrow,E}(E(P))$. Por la Proposición 2.2.9 $P \in \eta^{\infty}(E(P)) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta^{n}(E(P))$. Sea $n \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que $P \in \eta^{n}(E(P))$. Si $n = 0$ entonces $P \in \eta^{0}(E(P)) = \{E(P)\}$, es decir, P es inyectivo. Si $n > 0$ entonces $P \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}(E(P))) \cup \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}(E(P)))\}$. Si $P \notin \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}(E(P)))$ entonces P es inyectivo. Supongamos que $P \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-1}(E(P)))$, entonces existen

$$M_1 \in \eta^{n-1}(E(P)) = \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}(E(P))) \cup \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}(E(P)))\}$$

y un epimorfismo $M_1 \xrightarrow{\pi_1} P$. Si M_1 es inyectivo entonces P es inyectivo y acabamos. Así que podemos suponer que $M_1 \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-2}(E(P)))$, entonces existen $M_2 \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-3}(E(P))) \cup \{E(N) \mid N \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-3}(E(P)))\}$ y un epimorfismo $M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_1$, entonces P es un cociente de M_2. Si M_2 es inyectivo acabamos. Repitiendo el argumento tenemos una sucesión finita de módulos $M_1, \ldots, M_n$ tales que $M_{i+1} \xrightarrow{\pi_2} M_i$ es un epimorfismo con $M_{i+1} \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\eta^{n-i+1}(E(P)))$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y con $M_i \in \eta^{n-i}(E(P))$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces tenemos la siguiente sucesión

$$M_n \xrightarrow{\pi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} P\ .$$

Donde $M_n \in \eta^{n-n}(E(P)) = \eta^0(E(P)) = \{E(P)\}$. Por lo tanto P es inyectivo. Así que R es un anillo casi-Frobenius. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a los anillos de ideales principales usando clases de módulos. (Cejudo, C. 2013).

Teorema 4.0.7 *Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *Para todo módulo inyectivo I, si existe un monomorfismo $K \to I$ entonces existe un epimorfismo $I \to K$;*

2. *R es artiniano de ideales principales;*

3. $\mathscr{L}_{\leq,E} = \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E}$;

4. $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,E}$;

5. $\mathscr{L}_{\leq} \subseteq \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$;

6. $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow} \subseteq \mathscr{L}_{\leq}$.

Demostración. [$1 \Rightarrow 2$]. Consideremos $R \to E(R)$ un monomorfismo esencial. Entonces existe un epimorfismo $E(R) \to R$, pero R es proyectivo y por lo tanto es isomorfo a un sumando directo de $E(R)$. Así que R es autoinyectivo. Si $I \leq R$ es un ideal de R, entonces existe un epimorfismo $R \to I$ por hipótesis. Por lo tanto I es cíclico. Por lo que R es neteriano de ideales principales izquierdos y autoinyectivo, así que R es un anillo casi-Frobenius de ideales principales izquierdos. Por el Teorema 4.0.5(2), R es artiniano de ideales principales.

[$2 \Rightarrow 1$]. Por el Teorema 4.0.6 sabemos que $\xi_{\leq}(M) = \xi_{\twoheadrightarrow}(M)$ para todo módulo M, en particular para los módulos inyectivos.

[$2 \Rightarrow 3$]. Por el Teorema 4.0.6 se tiene que $\mathscr{L}_{\leq} = \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$. Por lo tanto $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,E}$.

[$3 \Rightarrow 4$]. Es claro.

[$4 \Rightarrow 2$]. Si $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,E}$ entonces R es un anillo casi-Frobenius por el Lema 4.0.1. Como la hipótesis se cumple para los cocientes del anillo, entonces por el Teorema 4.0.5, R es un anillo artiniano de ideales principales.

[$2 \Rightarrow 5$]. Se sigue del Teorema 4.0.6.

[$2 \Rightarrow 6$]. Se sigue del Teorema 4.0.6.

[$5 \Rightarrow 2$]. Supongamos que $\mathscr{C} = \{M \mid M = R^{(X)} con\ X\ un\ conjunto\}$. Entonces $\xi_{\leq}(\mathscr{C}) = \{M \mid existe\ un\ monomorfismo\ M \to R^{(X)}\ con\ X$

un conjunto$\} \in \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$ por hipótesis. Pero sabemos que todo módulo es cociente de un módulo libre. Por lo tanto $\xi_{\leq}(\mathscr{C}) = R-$mod. Lo que implica R es un anillo casi-Frobenius (Ver Kasch,F 1982). Como la hipótesis se cumple para los cocientes del anillo, entonces por el Teorema 4.0.5, R es un anillo artiniano de ideales principales.

[6 $\Rightarrow$ 4]. Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos en $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E}$, en particular $\mathscr{C}$ es un clase cerrada bajo cocientes, así que $\mathscr{C}$ una clase hereditaria por hipótesis. Por lo tanto $\mathscr{C} \in \mathscr{L}_{\leq,E}$. $\square$

Aquí se agregan dos caracterizaciones más de anillos de ideales principales usando clases de módulos.

Teorema 4.0.8 *Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *Para todo módulo inyectivo I, si existe un monomorfismo $K \to I$ entonces existe un epimorfismo $I \to K$;*

2. *R es artiniano de ideales principales;*

3. $\mathscr{L}_{\leq,E} = \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E}$;

4. $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,E} \subseteq \mathscr{L}_{\leq,E}$;

5. $\mathscr{L}_{\leq} \subseteq \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$;

6. $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow} \subseteq \mathscr{L}_{\leq}$;

7. $\mathscr{L}_{\leq,\oplus} \subseteq \mathscr{L}_{\twoheadrightarrow}$;

8. $\mathscr{L}_{\twoheadrightarrow,\pi} \subseteq \mathscr{L}_{\leq}$.

Demostración.

[7 ⇒ 2]. Consideremos $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(R)) = \{M \mid existe\ un\ monomorfismo\ M \to R^{(X)}\ con\ X un\ conjunto\}$. Por hipótesis $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(R))$ es una clase cerrada bajo cocientes. Además $R \in \xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(R))$, lo que implica que $R^{(X)} \in \xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(R))$ para todo conjunto X. Como todo módulo es cociente de un módulo libre entonces $\xi_{\leq}(\xi_{\oplus}(R)) = R-$mod. Por lo tanto todo módulo se sumerje en un módulo libre. Es decir, R es un anillo casi-Frobenius (ver Kasch, F, 1982). Como la hipótesis se cumple para los cocientes del anillo, entonces por el Teorema 4.0.5, R es un anillo artiniano de ideales principales.

[8 ⇒ 2]. Sea E un cogenerador inyectivo mínimo. Consideremos: $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R)) = \{M \mid \exists\ un\ epimorfismo\ E^X \to M\ con\ X un\ conjunto\}$. Por hipótesis $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R))$ es un clase hereditaria. Como $E \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R))$ entonces $E^X \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R))$ para todo conjunto X. Por otro lado, para todo módulo M existe un monomorfismo $M \to E^X$ para algún conjunto X, ya que E es un cogenerador. Por lo tanto $\xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R)) = R-$mod. En particular todo módulo proyectivo $P \in \xi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\pi}(R))$, es decir, existe un epimorfismo $E^X \to P$. Así que P es un sumando directo de E^X. Por lo tanto P es inyectivo. Así que R es un anillo casi-Frobenius.(ver Kasch, F, 1982). Como la hipótesis se cumple para los cocientes del anillo, entonces por el Teorema 4.0.5, R es un anillo artiniano de ideales principales.

[$2 \Rightarrow 7$] y [$2 \Rightarrow 8$] son claras.

$\square$

Capítulo 5

Una función de R-nat en R-nat

En este capítulo, damos un morfismo de orden de $R-$nat en $R-$nat para todo prerradical exacto izquierdo. Todo lo escrito en este capítulo es original.

Definición 5.0.7 *Un prerradical r es un subfuntor del funtor identidad, es decir, r asigna a cada módulo M su submódulo $r(M)$ de tal forma que todo morfismo $M \to N$ induce un morfismo $r(M) \to r(N)$ por restricción.*

Ejemplo 5.0.4 *El zoclo de un módulo es un prerradical.*

Sean r un prerradical en R-mod y $\mathscr{C}$ una clase de módulos. Definimos $r^{-1}(\mathscr{C}) = \{M \mid r(M) \in \mathscr{C}\}$. Si $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ entonces claramente $r^{-1}(\mathscr{C}) \subseteq r^{-1}(\mathscr{D})$ para cualquier prerradical r.

Observación 5.0.6 *Si $\mathscr{C}$ es un clase de módulos cerrada bajo submódulos y sumas directas entonces $r^{-1}(\mathscr{C})$ también es una clase cerrada bajo submódulos y sumas directas para cualquier prerradical r.*

Demostración. Consideremos un prerradical r y sean $M \in r^{-1}(\mathscr{C})$ y N un submódulo de M. Entonces $r(N) \subseteq r(M)$ con $r(M) \in \mathscr{C}$, como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo submódulos entonces $r(N) \in \mathscr{C}$. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos en $r^{-1}(C)$, entonces $r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i) = \bigoplus\limits_{i \in I} r(M_i)$ donde $r(M_i) \in \mathscr{C}$ para cada $i \in I$. Por lo que $r(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i) \in \mathscr{C}$ al ser $\mathscr{C}$ una clase cerrada bajo sumas directas, luego $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in r^{-1}(\mathscr{C})$. $\square$

Definición 5.0.8 *Un prerradical r es un t-radical si r preserva epimorfismos.*

Proposición 5.0.8 *Si r es t-radical y $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $r^{-1}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo cocientes.*

Demostración. Consideremos r un t-radical y $\mathscr{C}$ una clase cerrada bajo cocientes. Sea $M \twoheadrightarrow N$ un epimorfismo con $M \in r^{-1}(\mathscr{C})$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads] & N \\ r(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & r(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $r(M) \twoheadrightarrow r(N)$ es un epimorfismo por ser r t-radical. Como $r(M) \in \mathscr{C}$ y $\mathscr{C}$ es una clase cerrada bajo cocientes entonces $r(N) \in \mathscr{C}$.

□

Proposición 5.0.9 *Sea r un prerradical exacto izquierdo. Si $\mathscr{C}$ es una clase de módulos hereditaria y cerrada bajo cápsulas inyectivas entonces $r^{-1}(\mathscr{C})$ es hereditaria y cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. Por la Observación 5.0.6 $r^{-1}(\mathscr{C})$ es hereditaria. Sea $M \in r^{-1}(\mathscr{C})$ y $M \to E(M)$ un monomorfismo esencial. Como r es un prerradical exacto izquierdo entonces el monomorfismo restringido $r(M) \to r(E(M))$ también es esencial. Por lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[r, "es"] \arrow[d, "es"] & r(E(M)) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ E(r(M))) & \end{tikzcd}$$

Donde $r(E(M)) \to E(r(M))$ es un monomorfismo. Como $\mathscr{C}$ es hereditaria, tenemos que $r(E(M)) \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $E(M) \in r^{-1}(\mathscr{C})$.

□

Teorema 5.0.9 *Si r es un prerradical exacto izquierdo entonces*

$$R{-}nat \xrightarrow{r^{-1}(\,)} R{-}nat$$

$$\mathscr{C} \longmapsto r^{-1}(\mathscr{C})$$

es un morfismo de orden.

Demostración. Se sigue de la Observación 5.0.6 y de la Proposición 5.0.9. □

Capítulo 6

Un isomorfismo de R-nat a R-tors.

En este capítulo damos un morfismo de orden entre R-nat y R-tors. Desarrollamos la teoría necesaria para demostrar el Teorema 6.0.16 que caracteriza aquellos anillos para los que el morfismo de orden que dimos de R-nat a R-tors es un morfismo de retículas. Todo el contenido de este capítulo es original.

Proposición 6.0.10 *Si $\mathscr{C} \in$ R-nat entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es la mayor clase de torsión hereditaria contenida en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.4 $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión hereditaria contenida en $\mathscr{C}$. Si $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria, entonces en particular $\mathbb{T}_\tau$ es una clase cerrada bajo cocientes. Por lo tanto $\mathbb{T}_\tau \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$. $\square$

Ejemplo 6.0.5 *Existe una clase de R-módulos $\mathscr{C}$ hereditaria, cerrada bajo sumas directas y extensiones de módulos tal que $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$ no es cerrada bajo sumas directas.*

Demostración. Recordemos que un grupo abeliano es reducido si su subgrupo divisible es el trivial. Denotemos $\mathbb{F}_{div}$ la clase de los grupos abelianos reducidos. Claramente $\mathbb{F}_{div}$ es hereditaria, cerrada bajo sumas directas y extensiones de módulos, y no contiene grupos abelianos divisibles distintos de cero. Para cualquier primo p y para cualquier número natural n tenemos que $\mathbb{Z}_{p^n} \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{div})$. Como $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un cociente de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$, es claro que $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{div})$ no es cerrado bajo sumas directas. $\square$

Proposición 6.0.11 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$ es una clase natural.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.8 es suficiente demostrar que $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos $M_i \in \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$ $\forall i \in I$. Entonces obtenemos un familia $\{M_i \rightarrowtail E(C_i)\}_{i\in I}$ de monomorfismos con $C_i \in \mathscr{C}$ para cada $i \in I$. Entonces tenemos los monomorfismos

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \rightarrowtail \bigoplus_{i\in I} E(C_i) \rightarrowtail E(\bigoplus_{i\in I} C_i),$$

con $\bigoplus\limits_{i\in I} C_i \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$. $\square$

Obtenemos funciones

$$R\text{-}nat \xrightarrow{\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )} R\text{-}tors$$

$$\mathscr{C} \longmapsto \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C})$$

y

$$R\text{-}tors \xrightarrow{\xi_{\leq,E}(\ )} R\text{-}nat$$

$$\mathscr{C} \longmapsto \xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$$

Teorema 6.0.10 *Si $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq,E}(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una clase de torsión hereditaria.

Como $\mathscr{C}$ está contenida en $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$ y como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo cocientes entonces se sigue que $\mathscr{C} \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}))$.

Si $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}))$, entonces cada cociente de M pertenece a $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C})$. Por contradicción, supongamos que $M \notin \mathscr{C}$. Denotemos $c(M)$ el mayor submódulo de M perteneciente a $\mathscr{C}$, entonces $M/c(M)$ es un módulo libre de $\mathscr{C}-$torsión distinto de cero. Por hipótesis existe un monorfismo $M/c(M) \overset{f}{\rightarrowtail} E(C)$ con $C \in \mathscr{C}$, entonces $0 \neq C \cap f((M/c(M)))$ pertenece a $\mathscr{C}$ y es libre de $\mathscr{C}-$torsión. Lo que es una contradicción. $\square$

Observación 6.0.7 *Observemos del Teorema 6.0.10 que $\xi_{\leq,E}(\ )$ es una función inyectiva y $\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )$ una función suprayectiva. Así R-tors $\leq$ R-nat.*

Proposición 6.0.12 *Si $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases de módulos entonces*

$$\chi_{\twoheadrightarrow}(\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i) = \bigcap_{i\in I} \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}_i)\,.$$

Demostración. $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i) \Leftrightarrow M \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i$ y $(M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i) \Leftrightarrow M \in \bigcap_{i\in I} \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}_i)$. $\square$

La siguiente proposición es clara.

Proposición 6.0.13 *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos clases de R-módulos tales que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{D})$ y $\xi_{\leq,E}(\mathscr{C}) \subseteq \xi_{\leq,E}(\mathscr{D})$.*

Ejemplo 6.0.6 *Para el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros, $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau_G}) = \{0\}$, donde $\mathbb{F}_{\tau_G}$ denota la clase de los grupos abelianos libres de torsión.*

Demostración. Como $\mathbb{F}_{\tau_G}$ es una clase hereditaria entonces por la Proposición 2.3.4 $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau_G})$ es también hereditaria. Para obtener una contradicción, supongamos $0 \neq M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau_G})$. Si $0 \neq x \in M$, entonces $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}x \hookrightarrow M$, así $\mathbb{Z} \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau_G})$, pero $\mathbb{Z}$ tiene cocientes de torsión distintos de cero. Lo que es una contradicción. $\square$

Ejemplo 6.0.7 *En general, $R{-}nat \xrightarrow{\chi_{\twoheadrightarrow}(\,)} R{-}tors$ no preserva supremos.*

Demostración. Sea $R = \mathbb{Z}$ el anillo de los enteros y $\mathbb{T}_{\tau_G}$ la clase de torsión de grupos abelianos. Entonces $\mathbb{T}_{\tau_G}$ y $\mathbb{F}_{\tau_G}$ son complementos el uno del otro en la retícula *R-nat*.

Por un lado

$$R{-}Mod = \chi_{\twoheadrightarrow}(R{-}Mod) = \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{T}_{\tau_G} \vee \mathbb{F}_{\tau_G}).$$

Por el otro

$$\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{T}_{\tau_G}) \vee \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau_G}) = \mathbb{T}_{\tau_G} \vee \{0\} = \mathbb{T}_{\tau_G}.$$

Claramente $\mathbb{T}_{\tau_G} \neq R\text{−}Mod$. □

Proposición 6.0.14 *Dada un clase de torsión hereditaria* $\mathbb{T}_\tau$, $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ *es cerrada bajo intersecciones.*

Demostración. Sea $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases naturales tales que $\mathscr{C}_i \in \chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ para cada $i \in I$, entonces por la Proposición 6.0.12

$$\chi_{\twoheadrightarrow}(\bigcap_{i\in I} \mathscr{C}_i) = \bigcap_{i\in I} \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}_i) = \bigcap_{i\in I} \mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_\tau.$$

□

Proposición 6.0.15 *Si* $\mathbb{T}_\tau$ *es una clase de torsión hereditaria entonces entonces el menor elemento de* $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ *es* $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$.

Demostración. Por el Teorema 6.0.10 $\chi_{\twoheadrightarrow}(\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)) = \mathbb{T}_\tau$. Así $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$ pertenece a $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$. Si $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\tau$ para $\mathscr{C}$ en R-nat, entonces $\mathbb{T}_\tau = \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{C}$, por la Proposición 6.0.13 obtenemos

$$\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \xi_{\leq,E}(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$$

dado que $\mathscr{C}$ es una clase natural. □

Proposición 6.0.16 $\mathbb{F}_{zoc}$ *es el mayor elemento en* $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\xi)$, *donde zoc denota el zoclo.*

Demostración. Si $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{zoc}) \neq \mathbb{T}_\xi = \{0\}$, escojemos un R-módulo simple S en $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{zoc})$ (cada clase de torsión hereditaria no trivial tiene un módulo simple, (Golan, J. 1986) lo que es imposible, entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{zoc}) = \mathbb{T}_\xi$. Ahora demostraremos que $\mathbb{F}_{zoc}$ es el mayor elemento en $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\xi)$. Sea $\mathscr{C} \in$ *R-nat* tal que $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\xi$. Si hubiera un módulo simple $S \in \mathscr{C}$, denotemos $\mathscr{D}$ la clase natural generada por S, ver (Dauns, J., Zhou, Y. 2006), entonces $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$. Por la Proposición 2.4

$$S \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{D}) \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\xi,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{zoc}$. □

Ejemplo 6.0.8 *Si R es un anillo semiartiniano izquierdo entonces $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\xi) = \{\{0\}\}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 6.0.16 al observar que si R es semiartiniano izquierdo entonces $\mathbb{F}_{zoc} = \{0\}$. □

Denotemos por $\tau^\perp$ el seudocomplemento de τ en *R-tors*. Recordamos la siguiente observación en (Golan, J. 1986).

Observación 6.0.8 *$\tau^\perp$ está dada por $\mathbb{F}_{\tau^\perp} = \{\ M \mid$ existe un monomor− fismo $M \rightarrowtail \prod_{i\in I} E(S_i)$ con $S_i \in \mathbb{T}_\tau,\ S_i$ simple para cada $i \in I\}$.*

Demostración. La Observación 2.5.3. □

Proposición 6.0.17 *Si $\mathbb{T}_\tau$ es una clase de torsión hereditaria entonces $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$.*

Demostración. Note que $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$ es una clase natural que contiene a $\mathbb{T}_\tau$. Como $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$ es la menor clase natural que contiene a $\mathbb{T}_\tau$, entonces $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. □

Observación 6.0.9 *Como R-nat es una retícula booleana completa, es fácil ver que para dos clases naturales $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ podemos describir su supremo en R-nat como*

$$\mathscr{C} \vee \mathscr{D} = \{M \mid \text{existe } K \in \mathscr{C} \text{ y } L \in \mathscr{D} \text{ tal que } K \oplus L \leq_{es} M\}.$$

Teorema 6.0.11 *Para $\tau \in$ R-tors las siguientes condiciones se cumplen.*

1. *Si $\mathscr{C} \in \chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ entonces $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$, el supremo tomado en R-nat.*
2. *Si $\tau \in$ R-tors tiene complemento, el mayor elemento en $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ es $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$.*

Demostración. (1) Supongamos que $\mathscr{C}$ es una clase natural tal que $\chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\tau$. Si $M \in \mathscr{C}$ podemos escoger $K \leq M$ máximo en $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$, (ver Dauns, J., Zhou, Y. 2006). Ahora consideramos L un submódulo de

M máximo tal que $L \cap K = 0$. Es suficiente demostrar que $zoc(L) = 0$. Si $S \leq L$ es un módulo simple entonces $S \notin \mathbb{F}_{\tau^\perp}$. Luego $S \in \mathbb{T}_\tau$ por la elección de K. Como S es un subcociente de M entonces $S \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\tau$, lo que es una contradicción.

(2) Por (1) es suficiente demostrar $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc} \in \chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$.

Como $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp}$ entonces $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Así por la Proposición 6.0.13 $\mathbb{T}_\tau = \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{T}_\tau) \subseteq \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$.

Recíprocamente, si $M \in \chi_{\twoheadrightarrow}(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$ entonces cada subcociente de M pertenece a $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Para obtener una contradicción, supongamos $M \notin \mathbb{T}_\tau$. Denotemos $t_\tau(M)$ el submódulo de M de τ-torsión. Cambiando M por $M/t_\tau(M) \neq 0$ si es necesario, podemos suponer $M \in \mathbb{F}_\tau$. Podemos considerar un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "f"'] \arrow[dr, "\pi_i f"'] & \prod_{i \in I} E(S_i) \arrow[d, two heads, "\pi_i"'] \\ & E(S_j) \end{tikzcd} ,$$

con $\pi_i f \neq 0$, $\forall i \in I$, donde π_i denota la $i-$ésima proyección. Claramente S_j es un subcociente de M para cada $j \in I$, por lo que $S_j \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$ para cada $j \in J$. Así $S_j \in \mathbb{F}_{\tau^\perp}$, implicando $S_j \in \mathbb{T}_\tau$ para cada $j \in I$, (ver la Observación 2.5.3). Por lo tanto $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \cap \mathbb{F}_\tau = \mathbb{F}_{\tau \vee_{R-tors} \tau^\perp} = \{0\}$, lo que es una contradicción. $\square$

El siguiente corolario es claro.

Corolario 6.0.12 *Si $\tau \in$ R-tors tiene un complemento en R-tors entonces* $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau) = [\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$.

Teorema 6.0.13 *Para $\tau \in$ R-tors las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$.

2. $zoc(M) = 0 \Rightarrow t_\tau(M) \leq_{es} M$.

Demostración. Por el Teorema 6.0.11 tenemos $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) \leq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si $M \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $M \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$. Entonces existe un monomorfismo $M \rightarrowtail E(T)$ para algún $T \in \mathbb{T}_\tau$. Entonces cada submódulo distinto de cero de M tiene un submódulo distinto de cero de τ-torsión. Por lo tanto $t_\tau(M) \leq_{es} M$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Como se señaló desde el principio, es suficiente demostrar que $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau) \geq \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Si $M \in \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$, consideramos dos casos.

Si $M \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces por hipótesis $t_\tau(M) \leq_{es} M$, por lo que $M \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$.

Si $M \notin \mathbb{F}_{zoc}$ entonces $zoc(M) \neq 0$, más aun $zoc(M) \in \mathbb{T}_\tau$ ya que cada submódulo simple de M pertenece a $\mathbb{F}_{\tau^\perp}$ (y por lo tanto también a $\mathbb{T}_\tau$). Consideremos $L \leq M$ un submódulo máximo tal que $zoc(L) = 0$ entonces $zoc(M) \oplus L \leq_{es} M$. Como $zoc(L) = 0$ entonces $t_\tau(L) \leq_{es} L$, por lo tanto $L \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$. Así $zoc(M) \oplus L \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)$, entonces $M \in \xi_{\leq}(\mathbb{T}_\tau)$. $\square$

En lo que sigue, supremos e ínfimos son considerados en *R-nat*. Sean $\tau \leq \sigma$ dos teorías de torsión hereditarias. Definimos funciones α y β entre los intervalos $[\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$ y $[\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$ en *R-nat*.

$$[\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}] \xrightarrow{\alpha} [\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$$

$$\mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C} \vee \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma)$$

y

$$[\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}] \xrightarrow{\beta} [\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$$

$$\mathscr{D} \longmapsto \mathscr{D} \wedge (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})$$

Teorema 6.0.14 *Supongamos que tenemos la situación descrita arriba. Entonces*
$\alpha\beta = 1_{[\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]}$.

Demostración. Consideramos $D \in [\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma), \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}]$. Como *R-nat* es una retícula distributiva entonces

$$(\mathscr{D} \wedge (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc})) \vee \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathscr{D} \wedge ((\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma)) \leq \mathscr{D}.$$

Para la otra desigualdad, es suficiente demostrar

$$(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}.$$

Por el Teorema 2.4 $\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma) \leq \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$, además $\mathbb{F}_{\tau^\perp} \subseteq \mathbb{F}_{\sigma^\perp}$ porque $\tau \leq \sigma$. Así

$$(\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \xi_{\leq}(\mathbb{T}_\sigma) \leq \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}.$$

Recíprocamente, si $M \in \mathbb{F}_{\sigma^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}$ entonces existen módulos $K \in \mathbb{F}_{\sigma^\perp}$ y $L \in \mathbb{F}_{zoc}$ tal que $K \oplus L \leq_{es} M$, (ver Observación 6.0.9). Si $K \in \mathbb{F}_{zoc}$ entonces también $M \in \mathbb{F}_{zoc}$, y ya acabamos. Entonces, supongamos $zoc(K) \neq 0$. Como un módulo simple en $\mathbb{F}_{\sigma^\perp}$ pertenece a $\mathbb{T}_\sigma$, entonces $zoc(K)$ también pertenece a $\mathbb{T}_\sigma$. Sea $L' \leq K$ máximo tal que $L' \cap zoc(K) = 0$, entonces $zoc(K) \oplus L' \leq_{es} K$ con $zoc(K) \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma)$ y $L' \in \mathbb{F}_{zoc}$. Entonces $K \in \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma) \vee \mathbb{F}_{zoc}$. Por lo tanto $M \in (\mathbb{F}_{\tau^\perp} \vee \mathbb{F}_{zoc}) \vee \xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\sigma)$. □

Corolario 6.0.15 *Si R un anillo semiartiniano izquierdo entonces* $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ *tiene un único elemento para cada* $\tau \in$ *R-tors.*

Demostración. Se sigue del Ejemplo 6.0.8, Teorema 6.0.11 y Teorema 6.0.14. $\square$

Ejemplo 6.0.9 *Existe un anillo que no es semiartiniano izquierdo con una teoría de torsión hereditaria propia tal que* $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ *consiste de un solo elemento.*

Demostración. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ no es un anillo semiartiniano izquierdo. Para este anillo $\mathbb{T}_{\xi(\mathbb{F}_{zoc})} = \mathbb{Z}\text{-}Mod \times \{0\}$, donde $\xi(\mathbb{F}_{zoc})$ denota la teoría de torsión hereditaria generada por $\mathbb{F}_{zoc}$. Es claro que esta teoría de torsión hereditaria satisface la condición 2 del Teorema 6.0.13, así $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_{\xi(\mathbb{F}_{zoc})}) = \{\xi_{\leq,E}(\mathbb{T}_\tau)\}$. También es claro que $\xi(\mathbb{F}_{zoc}) < \chi$. $\square$

Teorema 6.0.16 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R.*

1. $R\text{−}nat \xrightarrow{\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )} R\text{−}tors$ *es un isomorfismo de retículas.*

2. $R\text{−}nat \xrightarrow{\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )} R\text{−}tors$ *es un morfismo de retículas.*

3. *R-tors es una retícula Booleana.*

4. *R es un anillo semiartiniano izquierdo.*

Demostración. 3) $\Leftrightarrow$ 4) Teorema 2.5.1.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $R{-}nat \xrightarrow{\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )} R{-}tors$ es un morfismo de retículas entonces manda complementos a complementos. Como *R-nat* es una retícula Booleana entonces por (2), *R-tors* es también una retícula complementada. Consecuentemente *R-tors* es una retícula Boolena.

4) $\Rightarrow$ 1) Como R es un anillo semiartiniano izquierdo entonces por el Corolario 6.0.15 cada $\chi_{\twoheadrightarrow}^{-1}(\mathbb{T}_\tau)$ tiene un único elemento. Así $\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )$ es una función inyectiva, por lo tanto es una biyección. Entonces $\xi_{\leq,E}(\ )$ y $\chi_{\twoheadrightarrow}(\ )$ isomorfismos de orden, y por lo tanto son inversas la una de la otra. Por lo tanto son isomorfismos de retículas. $\square$

Bibliografía

[1] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2001). On the lattices of natural and conatural classes in R-mod *Comm. Algebra* 29(2):541-556.

[2] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2006). On Some Lattice of Module Classes, *Journal of Algebra and its Applications* 5(1):105-117.

[3] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2010). On big lattices of clases of R-modules defined by closure properties, *Advances in Ring Theory, Trends Math., Birkhauser/Springer Basel, AG, Basel, 2010* 19-36.

[4] Alvarado, A., Cejudo, C., Rincón, H., Vilchis, F. (2013). Rings for which the lattice of hereditary torsion theories

and the lattice of natural classes are isomorphic, *Comm. Algebra.* 41: 4089-4097.

[5] Boyle. A. (1973) When projective covers and injective hulls are isomorphic. *Bull.Austral.Math.Soc.* 8:471-476.

[6] Bronowitz R., Teply, J (1973) Torsion theories of simple type. *J.Pure and Appl.Algebra.* 329-336.

[7] Cejudo, C. (2013) Un estudio de retículas estables de módulos y caracterizaciones de anillos. *Tesis Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM.* .

[8] Dauns, J., Zhou, Y. (2006). *Classes of modules.* Vol. 281, Boca Raton, FL: Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall /CRC.

[9] Faith, C. (1966) On Kothe rings. *Math. Annalen.* 164:207-212.

[10] Faith, C. (1976) Algebra II Ring Theory. *Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, Springer-Verlag.*

[11] Golan, J. (1986). *Torsion Theories.* Vol. 29, New York: Pitman Monographs and Survays in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific and Technical, Harlow; John Wiley and Sons.

[12] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings.* London: Academic Press Inc.

[13] Page, S., Zhou, Y. (1994) On direct sums of injective modules and chain conditions. *Canad. J. Math.* 46(3):634-647.

[14] Stenström, B. (1975). *Rings of Quotients.* New York: Springer-Verlag.

[15] Zhou, Y. (1996). The Lattice of natural classes of modules. *Comm. Algebra* 24(5):1637-1648.

[16] Zhou, Y. (1997). Relative chain conditions and module classes. *Comm. Algebra* 25(2):543-557.

[17] Zhou, Y. (1999). The Lattice of pre-natural classes of modules. *J. Pure Appl. Algebra* 140(2):191-207.