UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Teoremas de rigidez de variedades riemannianas
en formas espaciales

TESIS

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A: JOSUÉ MELÉNDEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

COMITÉ TUTOR:

DR. FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

DRA. MARTHA ÁLVAREZ RAMÍREZ
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. 26 AGOSTO 2013

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Federico Sánchez Bringas, Eugenio Garnica Vigil, Gabriel Ruiz Hernández, Luis Hernández Lamoneda, y por supuesto a mi director de tesis Oscar Palmas Velasco, por todos sus comentarios, observaciones y sugerencias que hicieron acerca de la tesis y que me libraron de numerosos errores. No hace falta decir que los errores que resten son responsabilidad mía y solo mía.

Agradezco a mis padres, Carmela y Noé, que trabajaron tanto para darnos a mí y a mis hermanos la educación que ellos no tuvieron. No puedo concluir esta sección sin dar las gracias a mi hija y a mi esposa por su paciencia y apoyo a lo largo de este trabajo, sin los cuales no hubiera sido posible.

Esta tesis fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM con claves de proyecto IN 103110 bajo el nombre Teoría de hipersuperficies III e IN 113713 bajo el nombre Geometría de subvariedades IV. Agradezco a la DGAPA-UNAM los apoyos recibidos

Contenido

Introducción

Esta tesis está dividida en cuatro partes. La primera parte consiste de los preliminares de nuestro trabajo y resultados que ocuparemos posteriormente. La segunda parte y más extensa se refiere a resultados de hipersuperficies inmersas en una esfera unitaria. Nuestro principal objetivo es caracterizar los productos de esferas, también llamadas hipersuperficies de Clifford. Es conocido que toda hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con dos curvaturas principales constantes es una de estas. En general, las hipersuperficies con curvatura media o escalar constante en las formas espaciales se encuentran entre los objetos más estudiados en la geometría diferencial. Aunque se sabe que existe una infinidad de éstas, también se sabe que al imponer ciertas condiciones adicionales se puede obtener clases con pocas hipersuperficies, salvo isometrías del espacio ambiente. Por ejemplo, en el caso de las hipersuperficies con curvatura media constante en la esfera unitaria, los teoremas de rigidez datan de los trabajos clásicos de Simons [26], Lawson [13], así como Chern, do Carmo y Kobayashi [10]. Estos resultados se pueden agrupar de la manera siguiente: Si el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental $|A|^2$ de una variedad compacta M^n inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}$ de manera mínima satisface que $|A|^2 \leq n$, entonces $|A|^2 \equiv 0$ y la inmersión es totalmente geodésica, o bien $|A|^2 \equiv n$ y la imagen de la inmersión es el producto de esferas $M_{m,n-m} = \mathbb{S}^m(\sqrt{\frac{m}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{\frac{n-m}{n}})$, para algún entero m con $1 \leq m \leq n-1$.

Más de veinte años después, Alencar y do Carmo [1] extendieron este resultado al caso de inmersiones con curvatura media constante H, usando una fórmula tipo Simons para el laplaciano del cuadrado de la norma $|\phi|^2$ del operador $\phi = HI - A$, donde A es el operador asociado a la segunda forma fundamental. Demostraron que si $|\phi|^2$ está acotada por arriba por cierta constante B_H que depende sólo de H, entonces $|\phi|^2 \equiv 0$ y la inmersión es totalmente umbílica o $|\phi|^2 \equiv B_H$ y la imagen de la inmersión es $M_{m,n-m}$ cuando $H = 0$ o un $H(r)$-toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$ con $H \neq 0$. W. Santos [24] extendió este resultado al caso de codimensión arbitraria.

Bajo ciertas hipótesis análogas a las mencionadas arriba, caracterizamos los productos de esferas $S^k(r) \times S^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$, para un entero k dado, con $1 \leq k \leq n-1$. De este modo, nuestro objetivo es extender el teorema dado en [1]. Más precisamente, a continuación enunciaremos nuestros principales resultados.

En el caso en que la hipersuperficie es compacta tenemos (Teorema 2.3):

Sea M^n una hipersuperficie compacta orientada y conexa inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante H. Dado un entero k con $1 \leq k \leq n-1$, si se cumple que

$$|\phi|^2 \leq B_{H,k} \qquad y \qquad \operatorname{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3$$

donde $B_{H,k}$ y $C_{n,k}$ son constantes dadas por (2.3) y (2.4), respectivamente. Entonces $|\phi| \equiv 0$ y M^n es totalmente umbílica, o bien $|\phi|^2 \equiv B_{H,k}$ y M^n es un toro de Clifford mínimo ($H = 0$) o M^n es el producto $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ con $r^2 < \frac{n-k}{n}$ ($H \neq 0$).

Si se considera el resultado anterior para $k = 1$, la segunda desigualdad que se tiene como hipótesis no es necesaria y se tendría el teorema dado por Alencar y do Carmo, ver el Teorema 2.2.

Al analizar la demostración del resultado obtenido por Alencar y do Carmo, observamos que ellos utilizaron el llamado Lema de Okumura, ver la desigualdad (2.2) y, también ver [1] para más detalles. En nuestro caso, es importante mencionar que un punto clave para la demostración del Teorema 2.3 es hacer uso del Lema 2.7 para obtener los productos de esferas $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$, para $1 \leq k \leq n-1$.

Damos una caracterización sobre las hipersuperficies k-mínimas, es decir, $H_k = 0$ donde H_k es la k-ésima curvatura media, y con dos curvaturas principales de multiplicidad $n-1$ y 1 (Proposición 2.16):

Sea M^n una hipersuperficie k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con dos curvaturas principales tal que la multiplicidad de una de ellas es simple. Si

$$|A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \qquad o\ bien \qquad |A|^2 \leq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$$

entonces $|A|^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$ y M^n es isométrica a $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

De esta manera, con ayuda del principio del máximo de Omori y técnicas usadas en [4], demostramos el siguiente resultado (Teorema 2.17):

Sea M^n una hipersuperficie de rotación k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura escalar constante. Entonces, $|A|^2 \equiv 0$ y M es totalmente geodésica o bien,

$$\max_M |A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}.$$

Más aún, si se cumple la igualdad arriba, entonces M es $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Utilizando ideas de Alías y García-Martínez [3] y el principio del máximo clásico de Omori-Yau, en la tercera parte demostramos algunos resultados de rigidez similares a los mencionados anteriormente cuando el espacio ambiente es un espacio de curvatura constante, con el propósito de continuar caracterizando a las hipersuperficies con dos curvaturas principales de multiplicidades $k, n-k$ (Teorema 3.2):

Sea M^n una hipersuperficie completa orientada y conexa en una forma espacial M_c^{n+1}, con $c = 0, 1, -1$, $n \geq 3$ y curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$. Dado un entero $1 < k < \frac{n}{2}$, asumiendo que $\operatorname{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3$ en M^n. Entonces $\sup|\phi| = 0$ y M es totalmente umbílica, o bien $\sup|\phi|^2 \geq B_{H,k,c}$. Además, si $\sup|\phi|^2 = B_{H,k,c}$ y este supremo se alcanza en algún punto de M^n si y sólo si

(a) *$c = 0$ y M es un cilindro circular $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$,*

(b) *$c = 1$ y M es o bien un toro mínimo de Clifford o es el producto $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ con $r^2 < \frac{n-k}{n}$ si $H \neq 0$.*

(c) *$c = -1$ y M es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$.*

Para el caso $c = 1$, el resultado de arriba queda escrito de la siguiente manera: si M^n está inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante y $\operatorname{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3$. Supongamos además que $\sup|\phi|^2 = B_{H,k}$ y este supremo se alcanza en M. Entonces M es un producto de esferas.

Analizando el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de hipersuperficies de rotación, inmersas en la esfera unitaria, mostramos que la condición sobre la traza de ϕ^3 is necesaria en nuestros resultados (Proposición 3.6):

Para cada entero k con $1 < k < n$ y $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$, existe una hipersuperficie completa M^n en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media H tal que $\sup|\phi|^2 = B_{H,k}$ y este supremo se alcanza en algún punto de M, y el cual no es un producto de esferas.

Finalmente, utilizando resultados de [24], en la cuarta parte extendemos nuestro primer resultado (Teorema 2.3) al caso de codimensión arbitraria, reemplazando la condición de la curvatura media constante por la hipótesis natural de que el vector de curvatura media h sea paralelo (Teorema 4.1).

Capítulo 1

Preliminares

El laplaciano de un tensor simétrico

Sea $\{\omega_1, \ldots \omega_n\}$ el marco dual asociado a un marco ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ definido sobre una variedad riemanniana M^n. Entonces podemos escribir las ecuaciones de estructura de M como

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl}\, \omega_k \wedge \omega_l$$

y R_{ijkl} son las componentes del tensor de curvatura de M,

$$R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0.$$

Consideremos un tensor $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ simétrico definido en una variedad riemanniana M^n. Calcularemos el laplaciano de este tensor.

La primera y segunda derivada covariante de ϕ_{ij} están definidas respectivamente por

$$\sum_k \phi_{ijk}\omega_k = d\phi_{ij} + \sum_k \phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\omega_{kj}, \tag{1.2}$$

$$\sum_l \phi_{ijkl}\omega_l = d\phi_{ijk} + \sum_m \phi_{mjk}\omega_{mi} + \sum_m \phi_{imk}\omega_{mj} + \sum_m \phi_{ijm}\omega_{mk}.$$

A continuación, explicamos la notación de las derivadas covariantes. Primero, $d\phi_{ij}$ es la diferencial usual de ϕ_{ij} dada por $d\phi_{ij}(X) = X(\phi_{ij})$, donde X es cualquier campo vectorial tangente a M. En particular, también observemos que las componentes de la primera derivada covariante están dadas por

$$\phi_{ijk} = e_k(\phi_{ij}) + \sum_k \phi_{kj}\omega_{ki}(e_k) + \sum_k \phi_{ik}\omega_{kj}(e_k).$$

Si el marco $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es geodésico en un punto $p \in M$, tenemos que la primera derivada de la componente ϕ_{ij} con respecto al vector e_k es simplemente $\phi_{ijk}(p) = e_k(\phi_{ij})(p)$, puesto que $\omega_{ij}(e_k)(p) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle(p) = 0$.

Análogamente, $d\phi_{ijk}$ es la diferencial usual de la componente ϕ_{ijk}, así que $d\phi_{ijk}(X) = X(\phi_{ijk})$ y, la segunda derivada covariante en un marco geodésico está dado por $\phi_{ijkl}(p) = e_l(\phi_{ijk})(p)$.

Al calcular la derivada exterior de (1.2) con ayuda de la segunda ecuación de estructura se tiene

$$\sum_{l,k} \phi_{ijkl}\, \omega_l \wedge \omega_k = \sum_k \phi_{kl}\Omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik}\Omega_{kj}. \tag{1.3}$$

Al evaluar la ecuación anterior en (e_k, e_l) y utilizando nuevamente las ecuaciones (1.1) obtenemos

$$\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} = -\sum_m \phi_{mj} R_{milk} - \sum_m \phi_{im} R_{mjlk}.$$

El laplaciano del tensor ϕ_{ij} está definido por $\sum_k \phi_{ijkk}$,

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{ij} &= \sum_k \phi_{ijkk} \\
&= \sum_k (\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_k (\phi_{ikjk} - \phi_{ikkj}) + \sum_k (\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_k \phi_{kk}\right)_{ij} \\
&= \sum_k (\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_k (\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_k \phi_{kk}\right)_{ij} \\
&\quad - \sum_{m,k} \phi_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k} \phi_{im} R_{mkkj}.
\end{aligned}$$

Supongamos adicionalmente que ϕ satisface la ecuación de Codazzi: $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$. Tenemos que

$$\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk} = 0, \qquad \phi_{ikkj} - \phi_{kkij} = 0,$$

ya que ϕ_{ij} es simétrico. Por lo tanto,

$$\Delta\phi_{ij} = \left(\sum_k \phi_{kk}\right)_{ij} - \sum_{m,k} \phi_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k} \phi_{im} R_{mkkj}. \tag{1.4}$$

Si $|\phi|^2 = \sum_{i,j} \phi_{ij}^2$ y $\operatorname{tr}\phi = \sum_i \phi_{ii}$. Entonces de la ecuación (1.4) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \sum_{i,j,k} \phi_{ijk}^2 + \sum_{i,j} \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} \qquad (1.5)\\
&= \sum_{i,j,k} \phi_{ijk}^2 + \sum_{i,j} \phi_{ij}(\operatorname{tr}\phi)_{ij} - \sum_{i,j,m,k} \phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,m,k} \phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj}.
\end{aligned}$$

Eligiendo un marco $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tal que $\phi_{ij} = \mu_i\delta_{ij}$ entonces (1.5) se simplifica a

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_i \mu_i(\operatorname{tr}\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2, \tag{1.6}$$

donde $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i,j,k} \phi_{ijk}^2$.

Inmersiones con curvatura media constante

Consideremos una variedad orientada M^n inmersa en un espacio simplemente conexo y de curvatura constante c, es decir, una forma espacial. A partir de la ecuación (1.4), se puede calcular el laplaciano de las curvaturas principales $\Delta\lambda_i$. Para esto denotemos por H la curvatura media y por A el operador de forma de M, para alguna orientación. Por la ecuación de Gauss, $R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j$. Si la curvatura media es constante tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_i &= -\sum_k \lambda_i R_{kiki} - \sum_k \lambda_i R_{ikki}\\
&= -\sum_k \lambda_k(c + \lambda_k\lambda_i) + \sum_k \lambda_i(c + \lambda_k\lambda_i)\\
&= -cnH - |A|^2\lambda_i + cn\lambda_i + nH\lambda_i^2
\end{aligned}$$

donde $\phi_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$ y $|A|^2 = \sum_i \lambda_i^2$. Así,

$$\Delta\lambda_i = (cn - |A|^2)\lambda_i + nH(\lambda_i^2 - c).$$

En particular, si la hipersuperficie es mínima

$$\Delta\lambda_i = (cn - |A|^2)\lambda_i.$$

En esta tesis estamos considerando, como una de nuestras hipótesis, el hecho de que la norma del operador de forma $|A|^2$ está acotada. Es quizá una de las razones del por qué estaremos interesados en calcular el laplaciano $\Delta|A|^2$. De esta manera, usando la identidad $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = |\nabla f|^2 + f\Delta f$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= \frac{1}{2}\sum_i \Delta\lambda_i^2 \\ &= \sum_i |\nabla\lambda_i|^2 + \sum_i \lambda_i\Delta\lambda_i \\ &= \sum_i |\nabla\lambda_i|^2 + (cn - |A|^2)|A|^2. \end{aligned}$$

Observemos que, en este caso, el cuadrado de la norma de la derivada covariante del operador de forma A puede ser escrito como

$$|\nabla A|^2 = \sum_i |\nabla\lambda_i|^2.$$

De hecho, para el tensor ϕ la derivada covariante $\nabla\phi : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ se define como

$$\nabla\phi(X, Y) = (\nabla_Y\phi)X = \nabla_Y(\phi X) - \phi(\nabla_Y X).$$

Luego, $\frac{1}{2}\Delta|A|^2$ puede ser escrito como:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + (cn - |A|^2)|A|^2.$$

En el caso $H \neq 0$, es mejor considerar el operador lineal

$$\langle\phi X, Y\rangle = \langle HX, Y\rangle - \langle AX, Y\rangle,$$

y analizar $|\phi|^2$ en vez de $|A|^2$.

Notemos que los valores propios de ϕ son de la forma $\mu_i = H - \lambda_i$, donde λ_i son las curvaturas principales de M. Es fácil ver que ϕ es simétrico, con traza cero y que

$$|\phi|^2 = \sum_i (H - \lambda_i)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Observemos que $|\phi|^2 \equiv 0$ si y sólo si M^n es totalmente umbílica. Este operador ha sido utilizado por varios autores, [1], [19], [29], y también nos será de gran utilidad a lo largo de esta tesis. Para esto calcularemos el laplaciano $\Delta|\phi|^2$ de $|\phi|^2$ a partir de (1.6). Ver [1] y [19] para el caso $c = 1$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un marco ortonormal el cual diagonaliza a A y por lo tanto también diagonaliza a ϕ en cada punto de M^n. Como H es constante se sigue que ϕ satisface la ecuacion de Codazzi. De la ecuación (1.6), tenemos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2, \tag{1.7}$$

donde $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2$ con $\operatorname{tr}\phi = 0$.

Escribimos las curvaturas seccionales en términos de los valores propios μ_i's. Por definición de ϕ y por la ecuación de Gauss tenemos

$$R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j = c + \mu_i\mu_j - H(\mu_i + \mu_j) + H^2. \tag{1.8}$$

Puesto que la traza de ϕ es cero, es fácil ver que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(c + \mu_i\mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 = nc\sum_i \mu_i^2 - \left(\sum_i \mu_i^2\right)^2 \tag{1.9}$$

y también que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i + \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^3. \tag{1.10}$$

Usando (1.8)-(1.10) en (1.7) y como $2n|\phi|^2 = \sum_{i,j}(\mu_i - \mu_j)^2$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n(H^2 + c)|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3. \tag{1.11}$$

Lema 1.1. *Sea M^n una hipersuperficie inmersa en una forma espacial M_c^{n+1} $(n+1)$-dimensional con curvatura media constante H. Entonces, el laplaciano de $\frac{1}{2}|\phi|^2$ está dado por la expresión (1.11), donde $\phi = HI - A$ y μ_i son los valores propios de ϕ.*

Capítulo 2

Hipersuperficies en la esfera unitaria

Sea M^n una variedad orientable y conexa. Sea $f : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ una inmersión isométrica de M^n en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Nuestro objetivo es imponer condiciones sobre la traza de A, A^2 y A^3 para obtener algunos resultados de rigidez para hipersuperficies en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

2.1 Ejemplos

Puesto que en este capítulo consideraremos principalmente inmersiones isométricas con curvatura media constante, daremos algunos ejemplos de las hipersuperficies que nos interesan y que caracterizaremos en el Teorema 2.3.

Ejemplo 1: Hipersuperficies de Clifford

Un toro de Clifford de dimensión n en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ es obtenido al considerar las inmersiones usuales $\mathbb{S}^{n-k}(r) \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$, $\mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$, $r \in (0,1)$, donde el valor entre paréntesis denota el radio de la esfera correspondiente, y tomando el producto de las inmersiones se tiene que $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Las curvaturas principales son

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \qquad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

para alguna orientación. Es conocido que las hipersuperficies de Clifford son las únicas hipersuperficies isoparamétricas[1] en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con dos curvaturas principales. En particular, si $k=1$ o $k=n-1$, tenemos el $H(r)$-toro y si $H=0$ tenemos el toro mínimo de Clifford:

$$\mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)\times\mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right)\subset\mathbb{S}^{n+1}(1).$$

Tenemos que la curvatura media y el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental están dados por

$$H=\frac{nr^2-k}{nr\sqrt{1-r^2}},\qquad |A|^2=\frac{k}{r^2}+\frac{n-k}{1-r^2}-n,$$

respectivamente. Puesto que $|\phi|^2=|A|^2-nH^2$, tenemos

$$\operatorname{tr}(\phi^3)=\frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi|^3. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2: Hipersuperficies totalmente umbílicas

Para cualquier vector unitario a y cualquier r, con $0\le r<1$, consideremos la hipersuperficie

$$M_r^n=\{p\in\mathbb{S}^{n+1}(1)\,:\,\langle p,a\rangle=r\}$$

Cuando $r=0$, M_r^n es una hiperesfera en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ de radio uno. Si $r>0$, M_r^n es una hiperesfera en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ de radio menor que uno. Es conocido que éstas son las únicas hipersuperficies completas totalmente umbílicas en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. En particular, si $r=0$, M_0^n es totalmente geodésica. Por un cálculo usual, la segunda forma fundamental y la curvatura media de M_r^n están dados por

$$A=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}I\qquad H=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

respectivamente, salvo un signo. Observemos que las hipersuperficies M_r^n satisfacen trivialmente la ecuación (2.1).

Demostraremos que estos dos ejemplos son las únicas hipersuperficies con curvatura media constante en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ que cumplen la ecuación (2.1), ver el Lema 2.7.

En los ejemplos 1 y 2 se describen todas las hipersuperficies isoparamétricas con a lo más dos curvaturas principales en la esfera unitaria.

[1] Cartan usó el término hipersuperficie isoparamétrica para referirse a las hipersuperficies que tienen todas sus curvaturas principales constantes cuando están inmersas en un espacio de curvatura constante. Por ejemplo, en $\mathbb{S}^3(1)$ las únicas superficies isoparamétricas son $\mathbb{S}^2(r)$ o bien, el toro $\mathbb{S}^1(r)\times\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$.

2.2 Algunos teoremas de rigidez conocidos

Cuando M es mínima ($H = 0$) el siguiente teorema es bien conocido:

Teorema 2.1 (Chern, do Carmo y Kobayashi [10], Lawson [13], Simons [26]). *Sea M^n una hipersuperficie compacta mínima en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Si se cumple que $|A|^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Entonces*

(i) $|A|^2 \equiv 0$ *y M es totalmente geodésica, o bien $|A|^2 \equiv n$.*

(ii) *Si $|A|^2 \equiv n$ si y sólo si M es un toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, es decir, M es un producto de esferas $\mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\right)$, para algún $m < n$.*

La parte (i) fue demostrada por J. Simons [26]. La caracterización de (ii) fue obtenida independientemente por Chern, do Carmo y Kobayashi [10], y por Lawson [13]. Observemos que m está ajeno a las hipótesis del Teorema 2.1 y es un entero desconocido en el conjunto $\{1, \ldots, n-1\}$.

Alencar y do Carmo [1] extendieron este resultado al caso de inmersiones con curvatura media constante H, para enunciar este teorema, consideremos el tensor $\phi = HI - A$ y denotemos por B_H el cuadrado de la raíz positiva del polinomio

$$p_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 + 1),$$

Notemos que para $H = 0$, $B_H = n$.

Teorema 2.2 (Alencar y do Carmo [1]). *Sea M^n una hipersuperficie compacta orientada con curvatura media constante en la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Supongamos que*

$$|\phi|^2 \leq B_H,$$

para todo $p \in M$. Entonces

(i) $|\phi|^2 \equiv 0$ *y M es totalmente umbílica, o bien $|\phi|^2 \equiv B_H$.*

(ii) $|\phi|^2 \equiv B_H$ *si y sólo si*

  (a) $H = 0$ *y M es un toro de Clifford en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$,*

  (b) $H \neq 0$, $n \geq 3$, *y M es un $H(r)$-toro,*

$$M = \mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{S}^{n+1}(1),$$

  con $r^2 < \frac{n-1}{n}$.

(c) *$H \neq 0$, $n = 2$, y M^2 es un $H(r)$-toro,*

$$M^2 = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{S}^3(1),$$

con $r^2 \neq \frac{1}{2}$.

Este resultado no caracteriza los otros productos $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ para $k \geq 2$, tampoco los productos $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ para $r^2 > \frac{n-1}{n}$.

Con respecto a la demostración, Alencar y do Carmo utilizan un lema debido a Okumura [19], el que establece que dados números reales $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tales que $\sum \mu_i = 0$ y $\sum \mu_i^2 = \beta^2$, entonces

$$\left| \sum_i \mu_i^3 \right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3. \tag{2.2}$$

Ellos refinan este resultado probando que en esta última expresión se cumple la igualdad si y sólo si $n-1$ de estos números son iguales. Más tarde analizaremos la desigualdad (2.2).

2.3 Resultados aportados

En esta sección presentamos nuestros primeros resultados. Análogamente, denotaremos por $B_{H,k}$ el cuadrado de la raíz positiva del polinomio

$$p_{H,k}(x) = x^2 + \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} Hx - n(H^2+1).$$

Por un cálculo directo obtenemos que

$$B_{H,k} = n + \frac{n(n^2-2nk+2k^2)}{2k(n-k)} H^2 - \frac{n(n-2k)}{2k(n-k)} \sqrt{n^2H^4 + 4k(n-k)H^2}. \tag{2.3}$$

Notemos que para $k = 1$, $B_{H,k} = B_H$. $p_{H,1}(x)$ es llamado en [2] el polinomio de Alencar-do Carmo y, el polinomio $p_{H,k}$ ha sido utilizado en [7] y [17].

A lo largo de este trabajo consideremos la constante

$$C_{n,k} = \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}. \tag{2.4}$$

Con las mismas técnicas utilizadas en [1], nosotros probamos el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea M^n una hipersuperficie compacta orientada inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante. Fijemos un entero k con $1 \leq k \leq n-1$. Si*

$$|\phi|^2 \leq B_{H,k} \qquad y \qquad \mathrm{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3 \tag{2.5}$$

para todo $p \in M$. Entonces

(i) $|\phi|^2 \equiv 0$ *y M es totalmente umbílica, o bien* $|\phi|^2 \equiv B_{H,k}$.

(ii) $|\phi|^2 \equiv B_{H,k}$ *si y sólo si*

(a) $H = 0$ *y M es un toro de Clifford en* $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

(b) $H \neq 0$, $n \geq 3$, $M = \mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{S}^{n+1}(1)$, *con* $r^2 < \frac{n-k}{n}$.

(c) $H \neq 0$, $n = 2$, *y M^2 es* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \subset \mathbb{S}^3(1)$, *con* $r^2 \neq \frac{1}{2}$.

Para $k = 1$, debido al Lema de Okumura, la segunda desigualdad que se tiene como hipótesis en el Teorema 2.3 no es necesaria, y se tendría el Teorema 2.2.

Podemos representar gráficamente nuestro resultado usando el plano $(\mathrm{tr}\, A^3, |A|^2)$ como se muestra en la Figura 2.1, observando que las desigualdades (2.5) pueden ser escritas como $nH^2 \leq |A|^2 \leq B_{H,k} + nH^2$ y $\mathrm{tr}\,(A^3) \geq F_{n,k}(H, |A|^2)$, respectivamente, donde

$$B_{H,k} + nH^2 = n + \frac{n^3}{2k(n-k)}H^2 - \frac{n(n-2k)}{2k(n-k)}\sqrt{n^2H^4 + 4k(n-k)H^2},$$

y

$$F_{n,k}(H, |A|^2) = 3H|A|^2 - 2nH^3 - C_{n,k}(|A|^2 - nH^2)^{3/2}. \tag{2.6}$$

En [28], Xu y Tian propusieron el siguiente problema: Para una hipersuperficie compacta M en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura escalar constante normalizada r y curvatura media constante $H \neq 0$. Supongamos que $\alpha(n, H) \leq |A|^2 \leq \beta(n, H)$, donde

$$\alpha(n, H) = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 - \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}$$

y

$$\beta(n, H) = n + \frac{n^3}{2(n-1)}H^2 + \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}.$$

¿Puede demostrarse que M es la hipersuperficie isoparamétrica $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$, para algún k entre $1 \leq k \leq n-1$?

Podemos imponer una condición sobre la 3-curvatura H_3, y dar una respuesta afirmativa parcial a la pregunta de arriba, para el caso $k = 1$ con $r^2 \geq (n-1)/n$. Para esto consideremos la función $C_n(r, H)$, que depende de r, H y n, definida en (2.8). Tenemos la siguiente consecuencia del Teorema 2.3:

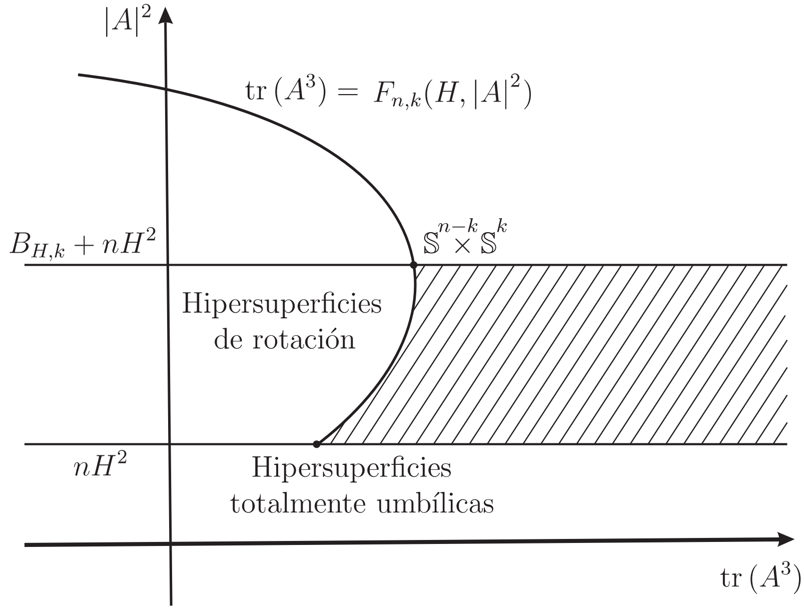

Figura 2.1: Plano coordenado $(\mathrm{tr}\, A^3, |A|^2)$ de hipersuperficies con curvatura media constante H en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ y $k > 1$. El Teorema 2.3 muestra que no existen hipersuperficies en la región sombreada, excepto en la intersección de la curva $\mathrm{tr}\,(A^3) = F_{n,k}(H, |A|^2)$ y las rectas $|A|^2 = B_{H,k} + nH^2$ y $|A|^2 = nH^2$. Por otro lado, en el Capítulo 3 probamos que para cada $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$ existe una hipersuperficie de rotación con $nH^2 < |A|^2 \leq B_{H,k} + nH^2$ y $\mathrm{tr}\,(A^3) < F_{n,k}(H, |A|^2)$, ver la Proposición 3.6.

Corolario 2.4. *Sea M una hipersuperficie compacta orientada inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante y $n \geq 3$. Supongamos que*

$$\alpha(n, H) \leq |A|^2 \leq \beta(n, H) \qquad y \qquad H_3 \geq C_n(r, H). \tag{2.7}$$

Entonces M es isométrica a $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$ con $r^2 \geq \frac{n-1}{n}$.

Demostración. Notemos que

$$S_1 = nH, \quad S_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - |A|^2), \quad S_3 = \frac{1}{3}(\sum_i \lambda_i^3 - S_1|A|^2 + S_1 S_2),$$

donde S_i es la i-ésima función simétrica elemental de las curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, es decir,

$$S_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n, \qquad S_2 = \sum_{i_1 < i_2} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}, \qquad S_3 = \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}.$$

Recordemos que H_3 está definida por $\binom{n}{3} H_3 = S_3$ y además que la curvatura escalar y la curvatura media pueden ser escritas como $n(n-1)(r-1) = 2S_2$ y $nH = S_1$, respectivamente. De donde

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A^3) &= 3S_3 + S_1|A|^2 - S_1S_2 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)H_3 + (nH)^3 - \frac{3}{2}n^2(n-1)(r-1)H. \end{aligned}$$

Hagamos

$$C_n(r,H) = \frac{2}{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{3}{2}n^2(n-1)(r-1)H - (nH)^3 + F_{n,n-1}(H,|A|^2)\right), \tag{2.8}$$

donde, por la ecuación de Gauss, $F_{n,n-1}$ puede ser escrito en términos de r y H. Por otro lado, observemos que $\alpha(n,H) = B_H + nH^2$ y $\beta(n,H) = B_{H,n-1} + nH^2$. De esta manera nuestras hipótesis (2.7) pueden ser escritas como

$$B_H \leq |\phi|^2 \leq B_{H,n-1}, \qquad \operatorname{tr}(\phi^3) \leq C_{n,n-1}|\phi|^3.$$

Así podemos aplicar el Teorema 2.3 con $k = n-1$ y $|\phi|^2 > 0$. $\square$

En particular, el Corolario 2.4 se cumple si la curvatura escalar es constante.

El siguiente corolario limita una región en el plano $(\operatorname{tr} A^3, |A|^2)$ donde están ubicadas las hipersuperficies isoparamétricas que no son totalmente umbílicas.

Corolario 2.5. *Si M es una hipersuperficie isoparamétrica en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media $H \geq \frac{n-2}{n}$ y distinta a cualquier hiperesfera, entonces*

$$|A|^2 \geq \alpha(n,H) \quad y \quad \operatorname{tr}(A^3) > nH.$$

Demostración. Si $|A|^2 < \alpha(n,H)$, M es isométrica a una hiperesfera, con $|A|^2 = nH^2$, de modo que $|A|^2 \geq \alpha(n,H)$. Observemos que $n < \alpha(n,H)$ si $H \geq (n-2)/n$, de donde, $|A|^2 > n$ y, de la ecuación (1.11) obtenemos que

$$-|A|^4 + n|A|^2 - n^2H^2 + nH\operatorname{tr}(A^3) = 0,$$

lo que implica que

$$nH\operatorname{tr}(A^3) = |A|^2(|A|^2 - n) + n^2H^2 > n^2H^2,$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Las hipersuperficies isoparamétricas fueron primero estudiadas por E. Cartan [6], Levi-Civita [14] y Segre [25]. Es conocido que en $\mathbb{R}^{n+1}$ estas hipersuperficies son las hiperesferas, hiperplanos o los cilindros generalizados $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. En el espacio hiperbólico sucede algo parecido. En la esfera es mucho más variada la situación, en este caso el número de curvaturas principales distintas que puede tener una hipersuperficie isoparamétrica es 1 (correspondientes a las hipersuperficies totalmente umbílicas), 2 (los productos de esferas), 3, 4 o 6, ver el Lema 5.1 en [16], por ejemplo. Los Teoremas 2.3 y 2.9 caracterizan algunas hipersuperficies de las primeras dos clases.

Enunciamos nuestro último corolario, ver la proposición 2.2 en [23] para una demostración diferente.

Corolario 2.6. *Sea M una hipersuperficie de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con dos curvaturas principales distintas. Entonces la multiplicidad de cada una es constante.*

Demostración. Sean k y $n-k$ las multiplicidades de λ y μ, en consecuencia se cumple que $\operatorname{tr}(A^3) = F_{n,k}(H, |A|^2)$, o bien $\operatorname{tr}(A^3) = F_{n,n-k}(H, |A|^2)$, de acuerdo a la orientación de M. Observemos que $F_{n,k}$ coincide con F_{n,k_1}, donde $k_1 \neq k$, sólo cuando $\lambda(p) = \mu(p)$ para algún $p \in M$, es decir, cuando existe un punto umbílico. De donde, por continuidad de $F_{n,k}$ y, por que λ y μ son distintas, tenemos que las multiplicidades son constantes. $\square$

Notemos que este útimo corolario es cierto si sustituimos a $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ por una forma espacial.

Finalmente, en lo que respecta a las hipersuperficies con curvatura media constante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $H \geq 0$, a lo largo de este trabajo.

Lema clave

Al analizar la demostración del resultado obtenido por Alencar y do Carmo, observamos que ellos utilizan la desigualdad de Okumura (2.2) para que las curvaturas principales de una hipersuperficie sean todas iguales (y la hipersuperficie sea totalmente umbílica) o bien para que dichas curvaturas principales tengan multiplicidades $1, n-1$. Así, nosotros intentamos primero probar un lema tipo Okumura para obtener la multiplicidad deseada; es decir, para obtener que una hipersuperficie tuviera curvaturas principales con multiplicidades $k, n-k$. Sin embargo, observamos que en realidad debíamos imponer esto como una condición adicional en el Teorema 2.3. El siguiente lema será clave en nuestros primeros resultados.

Lema 2.7. *Sean μ_i números reales tales que $\sum_i \mu_i = 0$ y $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$, donde $\beta \geq 0$. Dado un entero k entre 1 y n, Entonces, la ecuación*

$$\sum_i \mu_i^3 = \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}\beta^3 \qquad \left(\sum_i \mu_i^3 = -\frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}\beta^3\right) \tag{2.9}$$

es cierta si y sólo si (k) de las μ_i's son no negativos (resp. no positivos) e iguales y los restantes $(n-k)$ μ_i's son no positivos (resp. no negativos) e iguales.

Demostración. Consideremos la función $g = \sum_i \mu_i^3$ sujeto a las condiciones: $\sum_i \mu_i = 0$, $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$. Usando los multiplicadores de Lagrange, es fácil ver que los puntos críticos están dados por

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{n-p} = -a < 0, \qquad \mu_{n-p+1} = \cdots = \mu_n = b > 0;$$

ver el Lema (2.6) en [1]. Nuestras condiciones pueden ser escritas como

$$-(n-p)a + pb = 0 \quad \text{y} \quad (n-p)a^2 + pb^2 = \beta^2,$$

de donde

$$a^2 = \frac{p}{n(n-p)}\beta^2, \qquad b^2 = \frac{n-p}{np}\beta^2.$$

Por un cálculo directo obtenemos

$$g = \frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}\beta^3.$$

Así, la función g es decreciente en p. Finalmente, la ecuación:

$$g = \frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}\beta^3 = \frac{n-2p}{\sqrt{nk(n-k)}}\beta^3$$

es verdadera si y sólo si $p = k$ con

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{n-k} = -\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}\beta, \qquad \mu_{n-k+1} = \cdots = \mu_n = \sqrt{\frac{n-k}{nk}}\beta.$$

Esto demuestra el Lema. □

Demostración del Teorema 2.3. Usando la fórmula del laplaciano $\Delta|\phi|^2$ obtenida en el Lema 1.1 con $c = 1$ y la hipótesis (2.5), obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n(H^2+1)|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}H|\phi|^3.$$

Integrando de ambos lados la desigualdad de arriba, y usando el teorema de Stokes, probamos que

$$0 \geq \int_M |\nabla\phi|^2 + \int_M |\phi|^2 \left(-|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} H|\phi| + n(H^2+1) \right) \geq 0$$

ya que $|\phi|^2 \leq B_{H,k}$. Así, $|\nabla\phi|^2 \equiv 0$ y $|\phi|^2 \equiv 0$ o bien $|\phi|^2 \equiv B_{H,k}$. Esto prueba la parte (i) del Teorema 2.3.

Ahora consideremos la parte (ii). Si $H = 0$, la condición $|\phi|^2 = B_{H,k}$ puede ser escrita como $|A|^2 = n$, y el teorema se reduce al resultado demostrado por Chern, do Carmo and Kobayashi [10] y Lawson [13], ver el Teorema 2.1. Si $H \neq 0$, ya que $\nabla\phi = 0$, tenemos que ϕ es constante, por lo tanto (1.11) es equivalente a

$$0 = -|\phi|^4 + n(H^2+1)|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3,$$

así

$$nH\sum_i \mu_i^3 = -|\phi|^4 + n(H^2+1)|\phi|^2. \tag{2.10}$$

Por otro lado, como $|\phi|^2 = B_{H,k}$ deducimos que

$$\frac{n(n-2k)}{\sqrt{n(n-k)}} H|\phi| = -|\phi|^2 + n(H^2+1),$$

lo cual junto con (2.10) implica que se cumple la igualdad en (2.5), es decir,

$$\sum_i \mu_i^3 = \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}} |\phi|^3. \tag{2.11}$$

Por el Lema 2.7, la hipersuperficie M tiene exactamente dos curvaturas principales constantes, de multiplicidades $n-k$ y k. Después de una renumeración si es necesaria, podemos suponer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k}$ y $\lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n$. Concluimos que M es el producto $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ encajado en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ donde $r = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}$.

Para identificar los valores que puede tomar r, observemos que

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{n-k} = -\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}|\phi|, \qquad \mu_{n-k+1} = \cdots = \mu_n = \sqrt{\frac{n-k}{nk}}|\phi|$$

Así

$$\lambda_1\lambda_n = \left(H + \sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}|\phi| \right) \left(H - \sqrt{\frac{n-k}{nk}}|\phi| \right),$$

de donde

$$n\lambda_1\lambda_n = -|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}H|\phi| + nH^2 = -n,$$

puesto que $|\phi|^2 = B_{H,k}$. Esto es, $\lambda_1\lambda_n = -1$. Por otro lado,

$$\lambda_1 = H - \mu_1 = \frac{(n-k)\lambda_1 + k\lambda_n}{n} - \mu_1;$$

esto es,

$$k(\lambda_n - \lambda_1) = n\mu_1 < 0.$$

Así $\lambda_n < \lambda_1$. Como $\lambda_1\lambda_n = -1$, se sigue que $\lambda_n < 0 < \lambda_1$.

Por lo tanto, las curvaturas principales y la curvatura media del producto $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ están dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

$$H = \frac{(n-k) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}$$

respectivamente. Puesto que supusimos que la curvatura media es positiva, tenemos que $r^2 < (n-k)/n$. Esto completa la demostración del Teorema 2.3. □

Otros resultados

En el artículo de Hou [12] se prueba que la imagen de una inmersión con curvatura media constante en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $|A|^2 \leq 2\sqrt{n-1}$ (es decir, una cota que sólo depende de la dimensión) debe ser una hiperesfera o un producto $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.8 (Hou [12]). *Sea M^n una hipersuperficie compacta orientable en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante. Entonces:*

(i) *Si $|A|^2 < 2\sqrt{n-1}$, M^n es una hiperesfera $\mathbb{S}^n(r)$, donde $r^2 = \frac{n}{n+|A|^2}$.*

(ii) *Si $|A|^2 = 2\sqrt{n-1}$, M^n es o bien, una hiperesfera $\mathbb{S}^n(r)$ con $r^2 = \frac{n}{n+2\sqrt{n-1}}$ o es un $H(r)$-toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$, donde $r^2 = \frac{1}{\sqrt{n-1}+1}$.*

Introduciendo nuestra función (2.6), podemos extender el resultado de Hou a productos de esferas:

Teorema 2.9. *Sea M^n una hipersuperficie compacta orientable en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante. Fijemos un entero k con $1 < k < \frac{n}{2}$. Supongamos que*

$$|A|^2 \leq 2\sqrt{k(n-k)} \qquad y \qquad \operatorname{tr}(A^3) \geq F_{n,k}(H, |A|^2)$$

para todo $p \in M^n$. Entonces $|A|^2$ es constante. Más aún:

(i) *Si $|A|^2 < 2\sqrt{k(n-k)}$, M^n es la hiperesfera $\mathbb{S}^n(r)$ donde $r^2 = \frac{n}{n+|A|^2}$.*

(ii) *Si $|A|^2 = 2\sqrt{k(n-k)}$, entonces*

  (A) *M^n es totalmente umbílica y es isométrica a $\mathbb{S}^n(r)$ donde $r^2 = \frac{n}{n+2\sqrt{k(n-k)}}$.*

  (B) *O bien,*

    (a) *$H = 0$, M^n es el toro de Clifford, con $n = 2k$,*
    (b) *$H \neq 0$, $M^n = \mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ donde $r^2 = \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{k}+\sqrt{n-k}}$.*

Demostración. Del Lema 1.1 obtenemos el laplaciano de $|\phi|^2$

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n(H^2+1)|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3.$$

Ahora, usamos nuestra segunda desigualdad de la hipótesis y obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n(H^2+1)|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}H|\phi|^3;$$

esto es,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\left(n + nH^2 - (n-2k)H\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}|\phi| - |\phi|^2\right). \tag{2.12}$$

Por otro lado, consideremos la forma cuadrática

$$Q(u,t) = u^2 - \frac{(n-2k)}{\sqrt{k(n-k)}}ut - t^2.$$

Por un cambio de coordenadas podemos escribirla como

$$Q(\tilde{u},\tilde{t}) = \frac{n}{2\sqrt{k(n-k)}}(\tilde{u}^2 - \tilde{t}^2)$$

donde $\pm\frac{n}{2\sqrt{k(n-k)}}$ son los valores propios de la matriz asociada a esta forma cuadrática con $u^2+t^2 = \tilde{u}^2+\tilde{t}^2$. Elijamos $u = \sqrt{n}H$ y $t = |\phi|$, así

$$\tilde{u}^2 + \tilde{t}^2 = nH^2 + |\phi|^2 = |A|^2,$$

esto es $\tilde{t}^2 = |A|^2 - \tilde{u}^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\left(n + \frac{n}{\sqrt{k(n-k)}}\tilde{u}^2 - \frac{n}{2\sqrt{k(n-k)}}|A|^2\right) \\
&\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\left(n - \frac{n}{2\sqrt{k(n-k)}}|A|^2\right)
\end{aligned}$$

Puesto que $|A|^2 \leq 2\sqrt{k(n-k)}$ y M^n es compacto, obtenemos que

$$0 \geq \int_M |\nabla\phi|^2 + \int_M |\phi|^2\left(n - \frac{n}{2\sqrt{k(n-k)}}|A|^2\right) \geq 0.$$

Por lo tanto $\nabla\phi = \nabla A = 0$, esto es, las curvaturas principales son constantes en M y $|A|^2$ es constante. Si $|A|^2 < 2\sqrt{k(n-k)}$, entonces $|\phi|^2 \equiv 0$, lo cual significa que M^n es totalmente umbílica con operador de forma

$$A = \left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right)I, \quad \text{con} \quad r^2 = \frac{n}{n+|A|^2} \in \left(\frac{n}{n+2\sqrt{k(n-k)}}, 1\right).$$

Esto demuestra la parte (i) del teorema.

Ahora consideremos la parte (ii): $|A|^2 = 2\sqrt{k(n-k)}$. Si $|\phi|^2 > 0$, tenemos dos casos. Primero, si $H = 0$ observemos que M es un toro de Clifford puesto que $|A|^2 = 2\sqrt{k(n-k)} \leq n$, ver [10] o [13]. En este caso $|A|^2 = n$, de donde $n = 2k$. Por otro lado, si $H \neq 0$, entonces podemos obtener la igualdad en (2.12) y por lo tanto $\mathrm{tr}(\phi^3) \equiv C_{n,k}|\phi|^3$. Por el Lema 2.7, concluimos que M^n es $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$. Sólo falta determinar el radio r. Por un cálculo elemental, tenemos que

$$|A|^2 = (n-k)\left(\frac{1-r^2}{r^2}\right) + k\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right) \geq 2\sqrt{k(n-k)}$$

y la igualdad se cumple si y sólo si

$$\frac{1-r^2}{r^2} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n-k}},$$

de donde

$$r^2 = \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n-k}+\sqrt{k}}.$$

Por hipótesis $k < \frac{n}{2}$, así que $r^2 < \frac{n-k}{k}$. Notemos que esto último es requerido al suponer que la curvatura media es positiva, ver el final de la demostración del Teorema

2.3. Finalmente, cuando $|A|^2 = 2\sqrt{k(n-k)}$ con $|\phi|^2 = 0$, M^n es totalmente umbílica y así es la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ donde

$$r^2 = \frac{n}{n + 2\sqrt{k(n-k)}}.$$

Con esto finalizamos la demostración del Teorema 2.9. $\square$

2.4 Hipersuperficies de rotación con $H_k = 0$

El objetivo de esta sección es la caracterización de las hipersuperficies

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right),$$

con $1 \leq k \leq n-1$, ver la Proposición 2.16 y el Teorema 2.17. Para este propósito recordemos que una hipersuperficie de rotación M^n en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ es una hipersuperficie $O(n)$-invariante, donde $O(n)$ es considerado como un subgrupo de isometrías de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Recordemos que estas hipersuperficies son construidas al tomar la órbita de una curva α, llamada *curva perfil*, bajo las transformaciones ortogonales $O(n)$, dejando fija a una geodésica γ. Denotemos por s la longitud de arco de α y por $r(s)$ a la distancia riemanniana de $\alpha(s)$ a γ. Sea $f(s) = \operatorname{sen} r(s)$. Las curvaturas principales de M^n están dadas por el siguiente resultado:

Teorema 2.10 (do Carmo and Dajczer [5]). *Sea M^n una hipersuperficie de rotación en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Entonces las curvaturas principales de M están dadas por*

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - f^2 - \dot{f}^2}}{f} \qquad y \qquad \mu = -\frac{\ddot{f} + f}{\sqrt{1 - f^2 - \dot{f}^2}} \tag{2.13}$$

de multiplicidad $n-1$ y 1, respectivamente, y donde el punto denota la derivada con respecto a s.

Por otro lado, la k-curvatura media H_k de una hipersuperficie M en la esfera unitaria está definida por

$$\binom{n}{k} H_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}$$

Notemos que $nH = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = nH_1$. Recordemos que la curvatura escalar de M puede ser escrita de la siguiente manera

$$r = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j + 1$$

La relación entre la curvatura media y escalar está dada por la ecuación de Gauss:

$$(nH)^2 - |A|^2 = n(n-1)(r-1).$$

También, la curvatura escalar y la 2-curvatura media se pueden relacionar como $H_2 = r - 1$.

Si M es una hipersuperficie de rotación k-mínima (esto es $H_k = 0$) entonces

$$\binom{n}{k} H_k = \binom{n-1}{k-1} \lambda^{k-1}\mu + \binom{n-1}{k} \lambda^k$$

así que

$$\lambda^{k-1}((n-k)\lambda + k\mu) = 0. \tag{2.14}$$

Ejemplo

Sea $M_{k,n-k} = \mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ con $1 \leq k \leq n-1$. Entonces $M_{k,n-k}$ es una hipersuperficie de rotación y sus curvaturas principales están dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \sqrt{\frac{k}{n-k}}, \quad \lambda_n = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}$$

salvo un signo. Observemos que $H_k = 0$ y además

$$|A|^2 = \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}.$$

Usaremos el siguiente resultado (no publicado) debido a Palmas, cuya demostración incluimos para que nuestro trabajo quede autocontenido:

Proposición 2.11 (Palmas)**.** *Sea M^n una hipersuperficie de rotación completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $H_k = 0$. Si*

$$|A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} \qquad \left(0 < |A|^2 \leq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}\right) \tag{2.15}$$

Entonces $|A|^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$ y M es isométrica a $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Para la demostración de esta proposición usaremos una primera integral introducida inicialmente en [21], la cual está asociada a cada hipersuperficie de rotación M con k-curvatura media constante. Para el caso cuando M es k-mínima el resultado es el siguiente:

Lema 2.12 (Palmas [21]). *Una hipersuperficie de rotación M^n en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ tiene $H_k = 0$ si y sólo si f satisface la siguiente ecuación diferencial*

$$(n-k)(1-f^2-\dot{f}^2)^{k/2} - k(1-f^2-\dot{f}^2)^{(k-2)/2}(\ddot{f}+f)f = 0. \tag{2.16}$$

Y ésta es equivalente a la siguiente primera integral

$$f^{n-k}(1-f^2-\dot{f}^2)^{k/2} = C, \tag{2.17}$$

donde C es una constante.

Demostración. Sustituyendo las expresiones de las curvaturas principales λ y μ del Teorema 2.10 en (2.14) obtenemos (2.16). Después, multiplicando a (2.16) por f^{n-k-1} e integrando con respecto al parámetro s obtenemos (2.17). □

Para una solución constante $f = f_0$ en (2.16), uno obtiene que

$$f_0^2 = \frac{n-k}{n}$$

y de (2.17) encontramos que

$$C_0 = \left(\frac{k}{n}\right)^{k/2} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{(n-k)/2}.$$

Del Teorema 2.10, se sigue que las curvaturas principales son

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-f_0^2}}{f_0}, \qquad \mu = -\frac{f_0}{\sqrt{1-f_0^2}}$$

de multiplicidad $n-1$ y 1, respectivamente. Por lo tanto, las soluciones constantes de la ecuación (2.16) corresponden al producto $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Consideraremos el caso $f > 0$. Un punto clave para la demostración de la Proposición 2.11 es la siguiente observación.

Observación 2.13. *Por el Lema 2.12, cada curva de nivel de la función $G_{n,k}$ definida por*

$$G_{n,k}(f,\dot{f}) = f^{n-k}(1-f^2-\dot{f}^2)^{k/2},$$

con $f > 0$ y $f^2+\dot{f}^2 \leq 1$, define una hipersuperficie de rotación con $H_k = 0$. Para $C = 0$, la curva de nivel $f^2+\dot{f}^2 = 1$ es un semicírculo. Es conocido que la hipersuperficie de rotación asociada a esta curva de nivel es una n-esfera totalmente geodésica. Para $0 < C < C_0$, las curvas de nivel son cerradas y contienen en su interior al punto crítico $f = f_0, \dot{f} = 0$. Por último, para $C = C_0$, la curva de nivel corresponde al

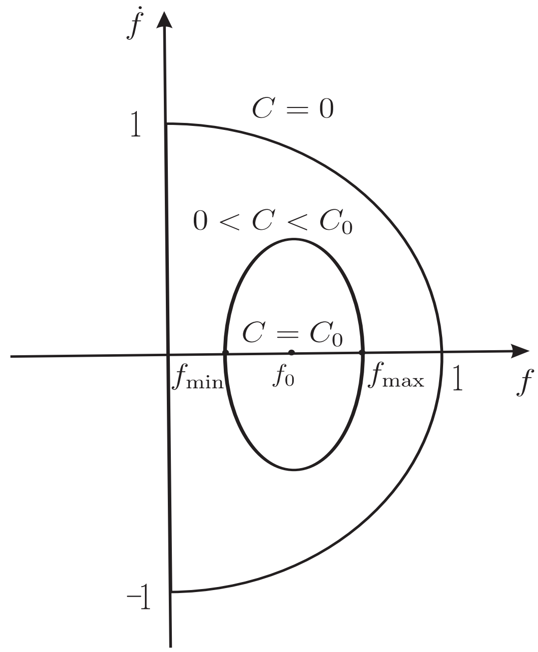

Figura 2.2: Tres tipos distintos de curvas de nivel de $G_{n,k}(f, \dot{f})$ con $H_k = 0$.

punto crítico $(f_0, 0)$ *situado sobre el eje* f *y está asociado a la hipersuperficie* $M_{k,n-k}$*, ver la Figura 2.2.*

Por lo tanto, cada curva cerrada interseca al eje f *en dos puntos, denotados por* $f_{\min}$ *y* $f_{\max}$*, con* $f_{\min} \leq f_0 \leq f_{\max}$.

Analizaremos el comportamiento de la función $|A|^2$ para cada hipersuperficie de rotación k-mínima:

Lema 2.14. *Dada una curva de nivel fija* $G_{n,k} \equiv C$*, entonces* $|A|^2(f, \dot{f})$ *restringida a esta curva de nivel es una función no creciente de* f*. Más aún, el cuadrado de la longitud de la segunda forma fundamental puede ser escrita como*

$$|A|^2 = \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k^2} \left(\frac{C}{f^n} \right)^{2/k}. \tag{2.18}$$

Demostración. De la ecuación (2.17) tenemos

$$f^{n-k}(1 - f^2 - \dot{f}^2)^{k/2} = C,$$

así

$$\sqrt{1 - f^2 - \dot{f}^2} = \left(\frac{C}{f^{n-k}} \right)^{1/k},$$

Sustituyendo esto en la expresión para λ dada en el Teorema 2.10 obtenemos

$$\lambda = \left(\frac{C}{f^n}\right)^{1/k} \tag{2.19}$$

Consideremos dos casos. Primero, si $\lambda = 0$ para algún punto en M^n, podemos tomar $C = 0$ y el lema queda demostrado. Por otro lado, si $\lambda \neq 0$ para todo punto en M^n y puesto que $H_k = 0$, de (2.14) tenemos

$$(n-k)\lambda + k\mu = 0.$$

De donde,

$$|A|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k^2}\lambda^2. \tag{2.20}$$

Sustituyendo (2.19) en (2.20) obtenemos el Lema. □

Demostración de la Proposición 2.11. Consideremos el caso $|A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$, el otro es completamente análogo. De (2.18) obtenemos

$$\frac{1}{k}\left(\frac{C}{f^n}\right)^{2/k} \geq \frac{1}{n-k}.$$

De la ecuación (2.17) tenemos que

$$\frac{1-f^2-\dot{f}^2}{f^2} \geq \frac{k}{n-k}.$$

Ahora, consideramos la intersección de la curva de nivel $G_{n,k} \equiv C$ con el eje f para el valor $f_{\max}$

$$\frac{1-f_{\max}^2}{f_{\max}^2} \geq \frac{k}{n-k},$$

de donde

$$f_{\max}^2 \leq \frac{n-k}{n} = f_0^2.$$

Puesto que $f_{\max} \geq f_0$, tenemos que $f_{\max} = f_0$, ver la Observación 2.13. Como la curva de nivel que consiste del punto f_0 sobre el eje f está asociada a $M_{n,n-k}$, concluimos que la hipersuperficie definida por $G_{n,k} \equiv C$ es $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ y por lo tanto, $|A|^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$. □

M. do Carmo y M. Dajczer dieron condiciones suficientes para que una hipersuperficie en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ sea de rotación. El resultado es el siguiente

Lema 2.15 (do Carmo y Dajczer [5]). *Sea M^n una hipersuperficie cualquiera en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, $n \geq 3$. Supongamos que las curvaturas principales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de M satisfacen*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda \neq 0, \quad \lambda_n = \mu(\lambda),$$

con $\lambda - \mu \neq 0$. Entonces M está contenida en una hipersuperficie de rotación.

Utilizando este lema y la Proposición 2.11 demostramos la siguiente caracterización.

Proposición 2.16. *Sea M una hipersuperficie k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $n \geq 3$ y dos curvaturas principales tal que la multiplicidad de una de ellas es simple. Si*

$$|A|^2 \geq \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)} \qquad \left(|A|^2 \leq \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}\right). \tag{2.21}$$

Entonces $|A|^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$ y M es isométrica a $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Demostración. Con la notación del lema de arriba, de $H_k = 0$ obtenemos que

$$\lambda^{k-1}((n-k)\lambda + k\mu) = 0.$$

Como M tiene dos curvaturas principales distintas, tenemos que $\lambda - \mu \neq 0$. Además $\lambda \neq 0$ y $(n-k)\lambda + k\mu = 0$, ver la demostración del Lema 2.19. Así, por el Lema 2.15, M es una hipersuperficie de rotación. De la Proposición 2.11, se cumple la igualdad en (2.15) y M es isométrica a $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$. $\square$

Guoxin Wei en [27] demuestra la Proposición 2.16 usando técnicas distintas. Ahora, usando ideas de [4] demostraremos el siguiente teorema de caracterización sobre las hipersuperficies de rotación k-mínimas.

Teorema 2.17. *Sea M^n una hipersuperficie de rotación k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura escalar constante. Entonces, $|A|^2 \equiv 0$ y M es totalmente geodésica o bien,*

$$\max_M |A|^2 \geq \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}. \tag{2.22}$$

Más aún, si se cumple la igualdad en (2.22), entonces M es $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

2.4.1 Operador L_1

Para la demostración del Teorema 2.17 utilizaremos el operador L_1 dado de la siguiente manera. Sea f una función de clase C^2 en un hipersuperficie M^n en una esfera unitaria, definimos el gradiente df y el hessiano (f_{ij}) como

$$df = \sum_i f_i \omega_i, \qquad \sum_j f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}$$

respectivamente. El operador L_1 definido sobre las funciones diferenciables en M^n está dado por

$$L_1(f) = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij}) f_{ij}$$

donde $A = (h_{ij})$ es el operador asociado a la segunda forma fundamental. El operador diferencial L_1 fue introducido por S. Y. Cheng y S. T. Yau en [9] y usado por varios autores, ver por ejemplo [3] [4], [15]. En particular, Cheng y Yau demostraron que L_1 es autoadjunto si M es compacta, es decir,

$$\int_M f L_1(g) = \int_M g L_1(f),$$

en particular, $\int_M L_1(f) = 0$.

Calculemos $L_1(nH)$. Localmente, eligiendo un marco $E_1, \ldots, E_n$ tal que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, obtenemos

$$\begin{aligned} L_1(nH) &= \sum_{i,j} (nH - \lambda_i)\delta_{ij}(nH)_{ij} \\ &= nH\Delta(nH) - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} \\ &= \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - |\nabla(nH)|^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii}. \end{aligned}$$

De la ecuación de Gauss escrita como $n(n-1)(r-1) = (nH)^2 - |A|^2$ obtenemos

$$L_1(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta r + \frac{1}{2}\Delta|A|^2 - |\nabla(nH)|^2 - \sum_i \lambda_i (nH)_{ii}.$$

Por otro lado, de (1.6) hacemos $\phi = A$,

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Juntamos las dos últimas ecuaciones y obtenemos que

$$L_1(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta r + |\nabla A|^2 - |\nabla(nH)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \tag{2.23}$$

2.4.2 Una aplicación del principio del máximo de Omori

Nosotros usaremos la versión clásica de Omori del principio del máximo para variedades completas.

Lema 2.18 (Omori [20])**.** *Sea M^n una variedad riemanniana completa con curvaturas seccionales acotadas por abajo. Sea f una función de clase C^2 acotada por arriba en M. Entonces existe una sucesión de puntos $p_j \in M$ tal que*

(a) $\lim_{j\to\infty} f(p_j) = \sup f$,

(b) $\lim_{j\to\infty} |\nabla f(p_j)| = 0$,

(c) $\limsup_{j\to\infty} \max_{|X|=1} \Delta f(p_j)(X,X) \leq 0$.

Por (2.18), una hipersuperficie de rotación M k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ que no sea totalmente geodésica no tiene puntos umbílicos: Si $\lambda(p) = \mu(p)$ para algún $p \in M$, por (2.14), $\lambda(p) = \mu(p) = 0$ y tendríamos que $|A|^2(p) = 0$. De donde M estaría asociada la curva de nivel $G_{n,k} \equiv C$ con $C = 0$ y sería totalmente geodésica. Así, todas las hipersuperficies asociadas a las curvas de nivel $G_{n,k} \equiv C$ con $0 < C \leq C_0$ tienen dos curvaturas principales distintas.

Lema 2.19. *Sea M^n una hipersuperficie k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con dos curvaturas principales tal que la multiplicidad de una de ellas es simple. Entonces*

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = \frac{n(n-1)}{k^2-2k+n}|A|^2\left(1 - \frac{k(n-k)}{n(k^2-2k+n)}|A|^2\right). \tag{2.24}$$

Demostración. De $H_k = 0$ deducimos que

$$\lambda^{k-1}((n-k)\lambda + k\mu) = 0 \tag{2.25}$$

donde λ y μ son las curvaturas principales de M con multiplicidad $(n-1)$ y 1, respectivamente, esto es,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda, \quad \lambda_n = \mu.$$

Si $\lambda = 0$ para algún punto p, puesto que las curvaturas principales λ y μ son continuas en M, podemos deducir de (2.25) que $\lambda = 0$ en M. En efecto, ver [27], sean

$$N = \{x \in M \,:\, \lambda(x) \neq 0\} \quad \text{y} \quad Q = \{y \in M \,:\, (n-k)\lambda(y) + k\mu(y) = 0\}.$$

Puesto que las curvaturas principales λ y μ son continuas en M, sabemos que N es un conjunto abierto, Q es un conjunto cerrado y $N \neq M$ ya que $\lambda(p) = 0$. Nosotros demostraremos que $N = Q$. Si $x \in N$, entonces $\lambda(x) \neq 0$. Por (2.25), obtenemos que $(n-k)\lambda(x) + k\mu(x) = 0$, esto es, $x \in Q$. Así $N \subset Q$. Por otro lado, si $y \in Q$, entonces $(n-k)\lambda(y) + k\mu(y) = 0$. Puesto que λ y μ son dos curvaturas principales distintas de M, tenemos que $\lambda(y) \neq \mu(y)$, y observamos de $(n-k)\lambda(y) + k\mu(y) = 0$ que $\lambda(y) \neq 0$ (si $\lambda(y) = 0$, entonces $\mu(y) = 0 = \lambda(y)$, pero esto es una contradicción.) Esto es $y \in N$, de donde $Q \subset N$, por lo tanto $N = Q$. Entonces N es un conjunto abierto y cerrado de M. Por la conexidad de M con $N \neq M$, obtenemos que N es un conjunto vacío. Se sigue que $\lambda \equiv 0$.

De la ecuación de Gauss, obtenemos

$$n(n-1)(r-1) = (nH)^2 - |A|^2 = 0$$

esto es $r = 1$ y las curvaturas seccionales de M, $R_{ijij} = 1 + \lambda_i\lambda_j$, no son menores que 1. Así, por el Teorema de Bonnet–Myers M es compacta, de donde L_1 es un operador autoadjunto y además como $r \geq 1$ tenemos que

$$|\nabla A|^2 \geq |\nabla(nH)|^2,$$

ver [9]. Integramos la ecuación (2.23) y obtenemos que

$$0 = \int_M (|\nabla A|^2 - |\nabla(nH)|^2) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_M R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq 0,$$

puesto que $\int_M L_1(nH) = 0$ y $\int_M \Delta r = 0$. Claramente $R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0$, de donde $\lambda_i = \lambda_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ y M^n es totalmente umbílica. Más aún, ya que $\lambda \equiv 0$, M^n es totalmente geodésica. Esto contradice la hipótesis de que M^n tiene dos curvaturas. Por lo tanto, tenemos que

$$\lambda \neq 0 \quad \text{y} \quad (n-k)\lambda + k\mu = 0. \tag{2.26}$$

De la ecuación de Gauss,

$$R_{inin} = 1 + \lambda\mu, \quad i = 1, \ldots, n-1;$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1}(1+\lambda\mu)(\lambda_i - \lambda_n)^2 \\ &= (n-1)(1+\lambda\mu)(\lambda-\mu)^2. \end{aligned}$$

De (2.26) tenemos

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left(1 - \frac{n-k}{k}\lambda^2\right)\lambda^2. \tag{2.27}$$

Por otro lado

$$|A|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k^2}\lambda^2,$$

esto es

$$\lambda^2 = \frac{k^2}{n(k^2-2k+n)}|A|^2.$$

Finalmente, sustituyendo esto en la expresión (2.27), obtenemos (2.24). □

Observemos que el Lema 2.19 se cumple en particular para las hipersuperficies de rotación k-mínimas.

Demostración del Teorema 2.17. Recordemos la expresión (2.23):

$$L_1(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta r + |\nabla A|^2 - |\nabla nH|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

donde r y R_{ijij} son la curvatura escalar y seccional respectivamente. Puesto que r es constante, la ecuación de arriba se reduce a

$$\begin{aligned} L_1(nH) &= |\nabla A|^2 - |\nabla nH|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &\geq -|\nabla nH|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Como M^n es una hipersuperficie de rotación y H_k es constante, entonces $|A|^2$ está acotada por arriba, digamos por L, ver la Observación 2.13 y el Lema 2.14. Afirmamos que las curvaturas seccionales también están acotadas. En efecto, observemos que

$$\lambda_i^2 \leq |A|^2 \leq L, \tag{2.29}$$

así que $|\lambda_i| \leq \sqrt{L}$ para toda i, j. De la ecuación de Gauss tenemos $R_{ijij} = 1 + \lambda_i\lambda_j$, de donde

$$1 - L \leq R_{ijij} \leq 1 + L.$$

Si $\lambda(p) = 0$ para algún $p \in M$, por (2.19), M es una hipersuperficie totalmente geodésica. Por lo tanto, concluimos la demostración del Teorema.

A partir de ahora podemos suponer que $\lambda \neq 0$. Observemos que $(n-k)\lambda + k\mu = 0$, de donde

$$\begin{aligned} H &= \frac{(n-1)\lambda + \mu}{n} \\ &= \frac{k-1}{k}\lambda. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Si $k = 1$ tenemos que $H = 0$ y por el Lema 2.19, la desigualdad (2.28) queda como

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= n|A|^2(1 - \frac{1}{n}|A|^2). \end{aligned}$$

Es decir, $|A|^2(|A|^2 - n) \geq 0$. Puesto que $\lambda \neq 0$, $|A|^2 \neq 0$ y $|A|^2 \geq n$. Por la Proposición 2.16 con $k = 1$, tenemos $|A|^2 = n$ y M es isométrica al toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$.

Consideremos el caso $k > 1$. Por (2.30), nH no cambia de signo en M^n, así podemos suponer que $H > 0$. Más aún, por la ecuación de Gauss y la condición $|A|^2 \leq L$ implica que $(nH)^2$ está acotada, así nH está acotada por arriba, de esta manera podemos aplicar el principio de Omori a la función $f = nH$, y obtener una sucesión de puntos p_j en M tal que se cumplen los siguientes límites

(a) $(nH)(p_j) \to \sup(nH)$,

(b) $|\nabla(nH)(p_j)| \to 0$,

(c) $\limsup_{j\to\infty} \max_{|X|=1} \Delta(nH)(p_j)(X, X) \leq 0$.

El inciso (a) y la ecuación de Gauss implican que

$$|A|^2(p_j) \to \sup|A|^2.$$

Afirmamos que $\limsup_{j\to\infty} L_1(nH)(p_j) \leq 0$. En efecto, primero observemos que $nH(p_j) - \lambda_i(p_j)$ es positivo y convergente, de hecho por (2.30) tenemos que

$$nH - \lambda = \frac{n(k-1) - k}{k-1}H \qquad \text{y} \qquad nH - \mu = \frac{k(n-1)}{k-1}H;$$

de donde, por (a), existe el límite de la sucesión $nH(p_j) - \lambda_i(p_j)$. Por otro lado, de (c) se tiene que

$$\limsup_{j\to\infty}(nH)_{kk}(p_j) \leq \limsup_{j\to\infty} \max_{|X|=1} \Delta(nH)(p_j)(X, X) \leq 0. \tag{2.31}$$

Así, eligiendo una subsucesión si es necesario, evaluamos $L_1(nH)$ en p_j, tomamos el límite y por (2.31) tenemos que

$$\limsup_{j\to\infty} L_1(nH)(p_j) \leq \sum_{i=1}^{n} \limsup_{j\to\infty}(nH - \lambda_i)(nH)_{ii}(p_j) \leq 0. \tag{2.32}$$

Luego, tomando lim sup en (2.28) obtenemos

$$\limsup_{l\to\infty} L_1(nH)(p_j) \geq -\lim_{l\to\infty} |\nabla nH|^2(p_l) + \frac{1}{2}\limsup_{l\to\infty}\left(\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2\right)(p_l).$$

Por (b), tenemos que

$$\limsup_{l\to\infty} L_1(nH)(p_j) \geq \frac{1}{2}\limsup_{l\to\infty}\left(\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2\right)(p_l).$$

Por el Lema 2.19 y (2.32), finalmente obtenemos que

$$0 \geq \sup |A|^2 \left(1 - \frac{k(n-k)}{n(k^2-2k+n)}\sup |A|^2\right).$$

Entonces, o bien $\sup |A|^2 = 0$ y M es una hipersuperficie totalmente geodésica o

$$\sup |A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}.$$

Si $\sup |A|^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$, el Teorema se sigue de la Proposición 2.11. □

Consideremos una hipersuperficie M k-mínima completa inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $n \geq 3$ y con dos curvaturas principales λ y μ de multiplicidad $n-1$ y 1, respectivamente. Tenemos que $\lambda - \mu \neq 0$ en M. Además, por los mismos argumentos que se usaron en la demostración del Lema 2.19, tenemos que $\lambda \neq 0$. De donde, por $H_k = 0$, obtenemos que $\mu = \mu(\lambda)$. Ahora tenemos las condiciones que se requieren para aplicar el Teorema 2.15 y, concluir que M es una hipersuperficie de rotación. Tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.20. *Sea M^n una hipersuperficie k-mínima completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con $n \geq 3$, dos curvaturas principales tal que la multiplicidad de una de ellas es simple y curvatura escalar constante. Entonces, $|A|^2 \equiv 0$ y M es totalmente geodésica o bien,*

$$\max_M |A|^2 \geq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}. \tag{2.33}$$

Más aún, si se cumple la igualdad en (2.33), entonces M es $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\times\mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$.

Capítulo 3

Hipersuperficies en formas espaciales

3.1 Definiciones

Sea M_c^{n+1} una variedad completa simplemente conexa con curvatura c, $c = 0, -1, 1$. Esto es, M_c^{n+1} denota el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, para $c = 0$; la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^{n+1}(1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \, : \, |x|^2 = 1\},$$

para $c = 1$ y, para el espacio hiperbólico usaremos el modelo de Minkowski

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \, : \, \langle x, x \rangle_1 = -1, \, x_0 > 0\} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$$

para $c = -1$, donde $\langle \, , \rangle_1 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2$ es la métrica lorentziana. Para nuestros modelos usaremos la misma notación para el tensor métrico, de modo que $\langle \, , \rangle$ será la métrica riemanniana de M_c^{n+1}. M_c^{n+1} es llamada una *forma espacial*.

Recordemos que el tensor de Ricci de una variedad riemanniana M^n está definido por

$$\mathrm{Ric}\,(X, Y) = \mathrm{tr}\,(Z \mapsto R(Z, X)Y),$$

donde X, Y, Z son campos vectoriales en M y la curvatura de Ricci en la dirección de un vector unitario X es

$$\mathrm{Ric}\,(X) = \frac{1}{n-1} \mathrm{Ric}\,(X, X).$$

Si M está inmersa en una forma espacial M_c^{n+1} la ecuación de Gauss puede ser escrita como

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= c(X \wedge Y)Z + (AX \wedge AY)Z \qquad (3.1) \\ &= c\{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\} + \langle AY, Z\rangle AX - \langle AX, Z\rangle AY \end{aligned}$$

y la curvatura de Ricci queda como

$$\mathrm{Ric}\,(X) = \frac{1}{n-1}\{c(n-1)|X|^2 + nH\langle AX, Y\rangle - |AX|^2\}. \tag{3.2}$$

Para la demostración de nuestro siguiente resultado usaremos el principio dado por H. Omori [20] y S. T. Yau [29]:

Lema 3.1. *Sea M^n una variedad riemanniana completa con curvatura de Ricci acotada por abajo. Sea f una función de clase C^2 acotada por arriba en M. Entonces existe una sucesión de puntos $p_j \in M$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} f(p_j) = \sup f, \quad \lim_{j\to\infty} |\nabla f(p_j)| = 0, \quad \Delta u(p_j) < \frac{1}{j}.$$

3.2 Una caracterización en formas espaciales

Para extender el Teorema 2.3 a hipersuperficies completas inmersas en las formas espaciales utilizamos ideas de Alías y García-Martínez [3] las cuales están basadas principalmente en el principio del máximo débil. Nosotros utilizaremos el conocido principio del máximo de Omori-Yau. Para esto definimos el siguiente polinomio, como lo hemos estado haciendo anteriormente,

$$p_{H,k}(x) = x^2 + \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}Hx - n(H^2+c),$$

donde H es un número cualquiera. Observamos que, si $H^2 + c > 0$ entonces $p_{H,k}$ tiene una única raíz positiva dada por

$$\sqrt{B_{H,k,c}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{k(n-k)}}\left(\sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)c} - (n-2k)H\right). \tag{3.3}$$

Nuestro siguiente resultado es una generalización del Teorema 2.3.

Teorema 3.2. *Sea M^n una hipersuperficie completa en una forma espacial M_c^{n+1}, con $c = 0, 1, -1$, $n \geq 3$ y curvatura media constante H tal que $H^2 + c > 0$. Dado un entero k, con $1 < k < \frac{n}{2}$, asumiendo que $\mathrm{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3$ en M. Entonces*

(i) *O bien $\sup_M |\phi| = 0$ y M es totalmente umbílica o $\sup_M |\phi|^2 \geq B_{H,k,c}$.*

(ii) *$\sup_M |\phi|^2 = B_{H,k,c}$ y este supremo se alcanza en algún punto de M si y sólo si*

(a) *$c = 0$ y M es un cilindro circular $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$,*

(b) *$c = 1$ y M es o bien un toro mínimo de Clifford o es el producto $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ con $r^2 < (n-k)/n$ si $H \neq 0$.*

(c) *$c = -1$ y M es un cilindro hiperbólico $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$.*

De hecho,

$$B_{H,k,c} = n + \frac{n(n^2 - 2nk + 2k^2)}{2k(n-k)} H^2 - \frac{n(n-2k)}{2k(n-k)} \sqrt{n^2 H^4 + 4ck(n-k)H^2}.$$

Demostración. Usando el Lema 1.1 y la desigualdad que tenemos en las hipótesis podemos estimar $\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^2 \left(|\phi|^2 + \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} H|\phi| - n(H^2 + c) \right) \\ &\geq -|\phi|^2 p_{H,k}(|\phi|). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Observemos que, como $H^2 + c > 0$, el polinomio $p_{H,k}$ tiene una única raíz positiva $\sqrt{B_{H,k,c}}$.

Por otro lado, si $\sup_M |\phi| = +\infty$, entonces el teorema se cumple trivialmente y no hay nada que demostrar. Si $\sup_M |\phi| < +\infty$, entonces podemos estimar la curvatura de Ricci. Como es bien conocido la curvatura de Ricci de una hipersuperficie M es obtenida por la ecuación de Gauss, ver (3.1) y (3.2), la cual puede ser escrita fácilmente en términos de $\phi = HI - A$ como

$$(n-1)\mathrm{Ric}\,(X) = (n-1)(H^2 + c)|X|^2 - (n-2)H\langle \phi X, X\rangle - \langle \phi X, \phi X\rangle,$$

para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto,

$$(n-1)\mathrm{Ric}\,(X) \geq \left((n-1)(H^2 + c) - (n-2)H \sup_M |\phi| - (\sup_M |\phi|)^2 \right) |X|^2.$$

Puesto que H es constante y $\sup_M |\phi| < +\infty$, la curvatura de Ricci de M está acotada por abajo. Además, como M es completa, por el principio del máximo de Omori-Yau, existe una sucesión de puntos $\{x_l\}$ en M tal que

$$\lim_{l\to\infty} |\phi|(x_l) = \sup_M |\phi|, \qquad |\nabla|\phi|(x_l)| < \frac{1}{l}, \qquad \Delta|\phi|(x_l) < \frac{1}{l}.$$

De donde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2(x_l) &= |\phi|(x_l)\Delta|\phi|(x_l) + |\nabla|\phi|(x_l)|^2 \\ &< |\phi|(x_l)\frac{1}{l} + \frac{1}{l}, \end{aligned}$$

lo cual junto con (3.4) implica que

$$|\phi|(x_l)\frac{2}{l} + \frac{2}{l} > \Delta|\phi|^2(x_l) \geq -2|\phi|^2(x_l)p_{H,k}(|\phi|(x_l)).$$

Tomando el límite

$$0 \geq -2(\sup|\phi|)^2 p_{H,k}(\sup|\phi|)$$

esto es,

$$(\sup|\phi|)^2 p_{H,k}(\sup|\phi|) \geq 0.$$

Se sigue que, o bien $\sup|\phi| = 0$, lo cual significa que $|\phi| \equiv 0$ y M es una hipersuperficie totalmente umbílica, o $\sup|\phi| > 0$ y entonces $p_{H,k}(\sup|\phi|) \geq 0$, de donde $\sup|\phi| \geq \sqrt{B_{H,k,c}}$. Esto demuestra la primera parte del Teorema.

Para la segunda parte usaremos el Lema 2.7. Suponiendo que $\sup|\phi| = \sqrt{B_{H,k,c}}$, en este caso $p_{H,k}(|\phi|^2) \leq 0$, lo cual junto con (3.4) implica que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq -|\phi|^2 p_{H,k}(|\phi|) \geq 0,$$

esto es, $|\phi|^2$ es una función subarmónica en M. Puesto que el supremo es alcanzado en algún punto de M, tenemos que $|\phi|^2 \equiv B_{H,k,c}$. De (3.4) también obtenemos que $\nabla\phi = 0$, es decir las curvaturas principales de M son constantes. Consideremos dos casos para la curvatura media:

Si $H = 0$, lo cual puede ocurrir sólo para el caso $c = 1$, de la Proposición 1 en [13] obtenemos que M es isométrica a un toro de Clifford.

Si $H \neq 0$ entonces de $p_{H,k}(|\phi|) = 0$ y (1.11), obtenemos la igualdad en el Lema 2.7. Concluimos que M tiene exactamente dos curvaturas principales, con multiplicidad k y $n-k$. Entonces, por varios resultados clásicos de hipersuperficies isoparamétricas en las formas espaciales [6, 14, 25] concluimos que M es uno de los siguientes productos:

(a) $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ con $0 < r < 1$, si $c = 1$.

(b) $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ o $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{S}^k(r)$ con $r > 0$, si $c = 0$.

(c) $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ o $\mathbb{H}^{n-k}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^k(r)$ con $r > 0$, si $c = -1$.

En el caso esférico ($c = 1$), puesto que supusimos que la curvatura media es positiva, por un análisis similar al final de la demostración del Teorema 2.3, tenemos que $r^2 < \frac{n-k}{n}$. Esto demuestra el caso $c = 1$. De hecho, $|\phi|^2 = B_{H,k,1}$ when $r^2 < (n-k)/n$, y $|\phi|^2 > B_{H,k,1}$ cuando $r^2 > (n-k)/n$. En efecto, para un radio dado $r > 0$, $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ tiene curvaturas principales dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-k} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \qquad \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

salvo un signo. En este caso

$$H = \frac{(n-k) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} \quad \text{y} \quad |\phi| = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{r\sqrt{n(1-r^2)}},$$

así que

$$r^2 = \frac{2(n-k) + nH^2 \pm \sqrt{n^2H^4 + 4k(n-k)H^2}}{2n(1+H^2)}$$

donde elegimos el signo $-$ o $+$ de acuerdo a $r^2 < (n-k)/n$ o $r^2 > (n-k)/n$, respectivamente. Por lo tanto,

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{k(n-k)}} \left(\sqrt{n^2H^2 + 4k(n-k)} \pm (n-2k)|H| \right)$$

donde usamos el mismo criterio para el signo. En particular, $|\phi|^2 = B_{H,k,1}$ cuando $r^2 < (n-k)/n$, y $|\phi|^2 > B_{H,k,1}$ cuando $r^2 > (n-k)/n$.

Por otro lado, en el caso euclidiano ($c = 0$) y para cualquier radio $r > 0$, $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{S}^p(r)$ tiene curvaturas principales dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-p} = 0, \qquad \lambda_{n-p+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{r},$$

salvo un signo. Así que $nH = p/r$, $|A|^2 = p/r^2$ y

$$|\phi| = \sqrt{\frac{n(n-p)}{p}} H.$$

Por otro lado, de (3.3),

$$\sqrt{B_{H,k,c}} = \sqrt{\frac{nk}{n-k}} H.$$

Entonces, $|\phi|^2 = B_{H,k,0}$ si y sólo si $k = n-p$. Así, M es isométrica a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$, con $r > 0$. Esto prueba el caso $c = 0$.

En el caso hiperbólico ($c = -1$) y para un radio dado $r > 0$ tenemos que el producto

$$\mathbb{H}^{n-p}(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^p(r) \subset \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n-p+1} \times \mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}_1^{n+2}$$

tiene curvaturas principales

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-p} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad \lambda_{n-p+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r},$$

salvo un signo. En este caso,

$$H = \frac{nr^2 + p}{nr\sqrt{1+r^2}} \quad \text{y} \quad |\phi| = \frac{\sqrt{p(n-p)}}{r\sqrt{n(1+r^2)}}, \tag{3.5}$$

así que,

$$r^2 = \frac{2p - nH^2 + H\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(H^2-1)}. \tag{3.6}$$

Nosotros estamos interesados en los casos donde $p = k$ o $p = n - k$. Observemos que cuando $p = k$, $H^2 > 1$ si y sólo si $r < k/\sqrt{n(n-2k)}$, con $k < n/2$, y además, por (3.5) y (3.6),

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{k(n-k)}}\left(\sqrt{n^2H^2 - 4k(n-k)} + (n-2k)H\right) > \sqrt{B_{H,k,-1}}.$$

Por otro lado, cuando $p = n - k$, tenemos que $H^2 > 1$ para toda $r > 0$ y

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{k(n-k)}}\left(\sqrt{n^2H^2 - 4k(n-k)} - (n-2k)H\right) = \sqrt{B_{H,k,-1}}.$$

Por lo tanto, M es isométrica a $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$. Esto termina la prueba del Teorema 3.2. □

Nazareno en su tesis doctoral [17], obtiene un resultado similar al Teorema 3.2, básicamente la diferencia está en sustituir la hipótesis $\mathrm{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3$ por el hecho de que la hipersuperficie tenga dos curvaturas principales, sin embargo esta condición es equivalente, para una adecuada orientación de M, a suponer que $\mathrm{tr}(\phi^3) = C_{n,k}|\phi|^3$. El resultado es el siguiente.

Teorema 3.3 (Nazareno [17]). *Sea M^n una hipersuperficie completa en una forma espacial M_c^{n+1}, con $c = 0, 1, -1$ y con curvatura media constante H tal que $H^2 - 1 \geq 0$ si $c = -1$. Asumiendo que M tiene dos curvaturas principales de multiplicidad k y $n - k$ con $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Entonces $\sup_M |\phi|^2 \geq B_{H,k,c}$. En particular, la igualdad se cumple y este supremo se alcanza en algún punto de M si y sólo si*

(a) *$c = 0$ y M es isométrica a $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$,*

(b) *$c = 1$ y M es isométrica a $\mathbb{S}^{n-k}(r) \times \mathbb{S}^k(\sqrt{1-r^2})$ con $r^2 \leq (n-k)/n$, donde $r^2 = \frac{n-k}{n}$ si y sólo si $H = 0$.*

(c) *$c = -1$ y M es isométrica a $\mathbb{H}^k(-\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{S}^{n-k}(r)$ con $r > 0$.*

Terminamos esta sección observando que para el caso en que la hipersuperficie es compacta en el Teorema 3.2, y se encuentra inmersa en una esfera unitaria con la condición adicional de que $|\phi|^2 \leq B_{H,k,1}$, se obtiene como corolario el Teorema 2.3, con $n \geq 3$ y $1 < k < \frac{n}{2}$.

3.3 Hipersuperficies completas con $\sup|\phi|^2 = B_{H,k}$

Para el caso en que una hipersuperficie es completa y está inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, del Teorema 3.2 obtenemos que

Corolario 3.4. *Sea M^n una hipersuperficie completa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante H. Fijemos un entero k con $2 \leq k \leq n-1$ y supongamos que*

$$\operatorname{tr}(\phi^3) \leq C_{n,k}|\phi|^3 \tag{3.7}$$

para todo $p \in M$. Entonces $\sup_M |\phi|^2 = B_{H,k}$ y este supremo se alcanza en algún punto de M si y sólo si M es un producto de esferas.

Si $H = 0$, la desigualdad (3.7) en el Corolario 3.4 no es necesaria y tenemos una caracterización de los toros de Clifford mínimos, para el caso en que M es completa:

Corolario 3.5. *Sea M^n una hipersuperficie completa mínima en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Supongamos que $\sup|A|^2 = n$ y este supremo se alcanza en algún punto de M. Entonces, M es isométrica a $\mathbb{S}^m(\sqrt{\frac{m}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-m}(\sqrt{\frac{n-m}{n}})$, para algún entero m con $1 \leq m \leq [\frac{n}{2}]$.*

El objetivo de esta sección es investigar la existencia de hipersuperficies completas M en la esfera unitaria tal que cumplan las siguientes propiedades:

(i) M tenga curvatura media H constante, de hecho distinta de cero.

(ii) $\sup_M |\phi|^2 = B_{H,k}$ para algún entero k dado con $2 \leq k \leq n-1$, y además este supremo se alcance en algún punto de M.

(iv) M sea distinta de los productos de esferas, es decir, de las hipersuperficies de Clifford.

Nosotros demostramos el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *Dados $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$ y k un entero tal que $2 \leq k \leq n-1$. Entonces existe una hipersuperficie completa M^n en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante H, tal que*

(a) *$\sup_M |\phi|^2 = B_{H,k}$ y este supremo se alcanza en algún punto de M,*

(b) *M es distinta a cualquier producto de esferas.*

Por la Proposición 3.6, notamos que la hipótesis (3.7) en el Corolario 3.4 es una condición necesaria.

Para la demostración de la Proposición 3.6, consideraremos hipersuperficies de rotación en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante. Sabemos que las curvaturas principales, denotadas por λ y μ, pueden ser escritas en términos de la curva perfil f y sus primeras dos derivadas, ver el Teorema 2.10. Sustituyendo las expresiones para λ y μ en la curvatura media, obtenemos una ecuación diferencial para la curva perfil que tiene una primera integral, y la escribimos como

$$G(f, \dot{f}) = f^{n-1}[(1 - f^2 - \dot{f}^2)^{1/2} - Hf] \tag{3.8}$$

si y sólo si H es constante, ver [21]. Así cada curva de nivel $G \equiv C$ está relacionada con una hipersuperficie de rotación, la cual es completa, si cada curva de nivel permanece dentro del círculo unitario $f^2 + \dot{f}^2 \leq 1$, ver la Figura 3.1.

Los puntos críticos de G son obtenidos al resolver las ecuaciones

$$\frac{\partial G}{\partial f} = f^{n-2}\Big((1 - f^2 - \dot{f}^2)^{-1/2}((n-1)(1-\dot{f}^2) - nf^2) - nHf\Big) = 0 \tag{3.9}$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{f}} = -\frac{f^{n-1}\dot{f}}{(1 - f^2 - \dot{f}^2)^{1/2}} = 0. \tag{3.10}$$

Si $f = 0$, el conjunto de puntos críticos de G consiste del eje $\dot{f}$. Por otro lado, si $f \neq 0$, de (3.10) nosotros tenemos $\dot{f} = 0$ y la ecuación (3.9) puede ser escrita como

$$nHf = \frac{(n-1) - nf^2}{\sqrt{1 - f^2}}.$$

Resolviendo la ecuación de arriba, obtenemos que

$$f_0^2 = \frac{2(n-1) + nH^2 \pm \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}}{2n(H^2+1)}, \tag{3.11}$$

son los puntos críticos de G sobre el eje f con $f \neq 0$, donde elegimos el signo $-$ o $+$ de acuerdo a $f_0^2 < (n-1)/n$ o $f_0^2 \geq (n-1)/n$, respectivamente. Las hipersuperficies asociadas a estos puntos críticos son los $H(f_0)$-toros. Para nuestro propósito, basta estudiar las curvas de nivel de G para el caso $f > 0$ con $f^2 + \dot{f}^2 \leq 1$. Por otro lado, notemos que $H > 0$ si y sólo si $f_0^2 < (n-1)/n$.

A continuación calcularemos el valor de $|\phi|^2$ para las hipersuperficies de rotación con curvatura media constante.

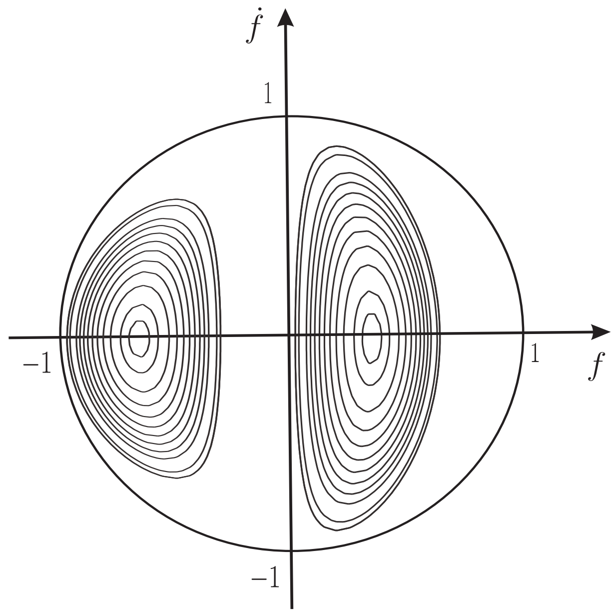

Figura 3.1: Curvas de nivel de $G(f, \dot f)$ con curvatura media constante.

Lema 3.7. *Dada una curva de nivel $G(f, \dot f) \equiv C$, entonces*

$$|A|^2(f, \dot f) = \frac{n(n-1)C^2}{f^{2n}} + nH^2. \tag{3.12}$$

En particular, $|A|^2(f, \dot f)$ restringido a esta curva de nivel es decreciente en f, con $f > 0$.

Demostración. De (2.13) y (3.8), tenemos que

$$\lambda = \frac{\sqrt{1 - f^2 - \dot f^2}}{f} = \frac{C}{f^n} + H. \tag{3.13}$$

Por otro lado, puesto que $nH = (n-1)\lambda + \mu$,

$$|A|^2 = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = (n-1)\lambda^2 + (nH - (n-1)\lambda)^2. \tag{3.14}$$

Sustituyendo (3.13) en (3.14), obtenemos (3.12). □

Como $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$, (3.12) puede ser escrito como

$$|\phi|^2(f, \dot f) = \frac{n(n-1)C^2}{f^{2n}}. \tag{3.15}$$

Por consiguiente, recordemos que $p \in M$ es un punto umbílico de M si se cumple que $|\phi|_p = 0$. En este caso, la curva de nivel asociada a M es $G \equiv 0$, de donde, la hipersuperficie es totalmente umbílica. Por lo tanto, tenemos nuestro siguiente resultado:

Corolario 3.8. *Toda hipersuperficie de rotación completa inmersa en $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ con curvatura media constante y distinta de las hiperesferas, no tiene puntos umbílicos.*

Por otro lado, para $H > 0$, consideremos dos valores de C. El primero es $C = 0$, el cual da una hiperesfera. El segundo es C_0, el cual es el valor máximo de G en el único punto crítico dado por (3.11), esto es, $G(f_0, 0) = C_0$ donde M es el $H(f_0)$-toro.

Es fácil ver que $C_{n,k} = (n-2k)/\sqrt{nk(n-k)}$ es decreciente en k y las hipersuperficies de rotación satisfacen que $\operatorname{tr}(\phi^3) = \pm C_{n,1}|\phi|^3$ donde elegimos el signo $+$ o $-$ de acuerdo a $\lambda - \mu \geq 0$ o $\lambda - \mu < 0$, respectivamente. Cuando se consideran hipersuperficies de rotación, asociadas a la curva de nivel en el intervalo $(0, C_0)$, es posible demostrar que se cumple el primer caso, de donde, $\operatorname{tr}(\phi^3) = C_{n,1}|\phi|^3$ y, por lo tanto, $\operatorname{tr}(\phi^3) > C_{n,k}|\phi|^3$ para cualquier k con $2 \leq k \leq n-1$. En consecuencia $\operatorname{tr}(A^3) < F_{n,k}(H, |A|^2)$, donde $F_{n,k}$ está dado por (2.6). Notemos que esta última desigualdad es coherente con la Figura 2.1.

Nuevamente, consideremos el comportamiento de los conjuntos de nivel correspondientes a los valores de C en el intervalo $(0, C_0)$. Para toda tal C, la curva de nivel $G = C$ es una curva cerrada contenida en la región dada por $f^2 + \dot{f}^2 \leq 1$. Por Lema 3.7, $|\phi|^2$ restringido a esta curva de nivel alcanza su máximo y, también su mínimo, en la intersección de la curva con el eje f:

$$\max_M |\phi|^2 = |\phi|(f_{\min}, 0), \qquad \min_M |\phi|^2 = |\phi|(f_{\max}, 0),$$

donde $f_{\min}$ y $f_{\max}$ son puntos en el dominio de f, con $0 < f_{\min} < f_0 < f_{\max}$.

Ahora tenemos los elementos para probar la Proposición 3.6.

Demostración de la Proposición 3.6. Dada H tal que $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$, de (3.8) tenemos que

$$C = G(f_{\min}, 0) = f_{\min}^{n-1}\left(\sqrt{1 - f_{\min}^2} - Hf_{\min}\right),$$

para algún $0 < f_{\min} < f_0$. Sustituyendo esto en (3.15) obtenemos que

$$\max_M |\phi|^2 = \frac{n(n-1)(\sqrt{1 - f_{\min}^2} - Hf_{\min})^2}{f_{\min}^2}.$$

De donde, es suficiente demostrar que la función

$$g(x) = \frac{n(n-1)(\sqrt{1-x^2} - Hx)^2}{x^2} \tag{3.16}$$

alcanza el valor $B_{H,k}$ para algún x con $0 < x < f_0$. Puesto que $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$, $g(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, f_0)$. En efecto, la derivada de $g(x)$ puede ser escrita como

$$g'(x) = -2n(n-1)\frac{\sqrt{1-x^2} - Hx}{x^3\sqrt{1-x^2}}.$$

Así, claramente $g(x)$ tiene un mínimo en $x_0 = 1/\sqrt{1+H^2}$ y es decreciente en el intervalo $(0, x_0)$. Puesto que $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$, por (3.11), obtenemos que $f_0 \leq x_0$. En particular, $g(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, f_0)$.

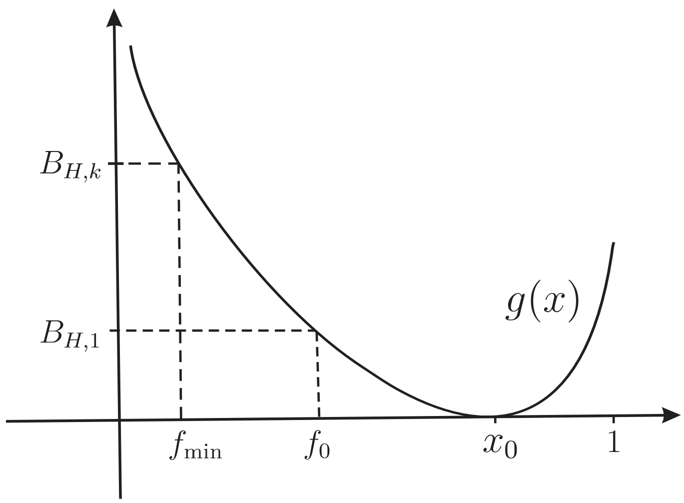

Figura 3.2: Gráfica de la función $g(x)$. Notemos que los valores de g coinciden con los de $|\phi|^2$, cuando ésta es evaluada en los puntos sobre el eje f, esto es, $g(x) = |\phi|^2(x, 0)$.

Por otro lado, probaremos que $B_{H,k}$ es creciente en k. Observemos que $B_{H,k}$ es creciente en k si y sólo si la función

$$h(x) = \frac{-(n-2x)H + \sqrt{n^2H^2 + 4x(n-x)}}{\sqrt{x(n-x)}}$$

es creciente en el intervalo $(0, n)$, ver (3.3) con $c = 1$. Por un cálculo directo, obtenemos que

$$h'(x) = \frac{n^2H(\sqrt{n^2H^2 + 4x(n-x)} - (n-2x)H)}{2(nx - x^2)^{3/2}(n^2H^2 + 4x(n-x))^{1/2}}.$$

Así $h'(x)$ es positiva si $(n^2H^2 + 4x(n-x))^{1/2} - (n-2x)H > 0$, o equivalentemente si $H^2 > (n-x)/(x-n)$. Notemos que esto último se cumple trivialmente, de donde obtenemos que $B_{H,k}$ es creciente en k con $0 < k < n$.

Afirmamos que $g(f_0) = B_{H,1}$. En efecto, observemos que los valores de $|\phi|^2$ en los puntos sobre el eje f están dados por la función $g(x)$. En particular, para $f = f_0$,

$$|\phi|^2(f_0, 0) = \frac{n(n-1)(\sqrt{1-f_0^2} - Hf_0)^2}{f_0^2} = g(f_0);$$

donde las hipersuperficies asociadas a $f = f_0$ son los $H(f_0)$-toros. Por otro lado, puesto que $f_0^2 < (n-1)/n$, obtenemos que $|\phi|^2(f_0, 0) = B_{H,1}$, ver el Teorema 2.2 donde $B_{H,1} = B_H$ o el Corolario 4 en [3], para el caso de hipersuperficies completas. Así $g(f_0) = B_{H,1}$.

Por continuidad de g, se sigue de lo de arriba que para cada $H \geq 1/\sqrt{2n-1}$ y k un entero con $2 \leq k \leq n-1$, existe $f_{\min}$ con $0 < f_{\min} < f_0$ tal que $g(f_{\min}) = B_{H,k}$. Este hecho implica la existencia de una hipersuperficie M, asociada a la curva de nivel $G = G(f_{\min}, 0)$ con curvatura media constante H. Lo que nos dice que $\sup |\phi|^2 = B_{H,k}$ y este supremo es alcanzado en algún de M, cuando $f = f_{\min}$. Finalmente, notemos que $0 < |\phi|^2 \leq B_{H,k}$, de donde, $nH^2 < |A|^2 \leq F_{n,k}(H, |A|^2)$. Con esto concluimos la demostración de la Proposición 3.6.

Capítulo 4

Subvariedades con curvatura media paralela

En este capítulo utilizamos los resultados de W. Santos [24], para extender el Teorema 2.3 al caso de codimensión arbitraria, reemplazando la condición de la curvatura media constante por la hipótesis natural de que el vector de curvatura media h sea paralelo.

4.1 Enunciado del Teorema Principal

Sea M^n una variedad de dimensión n, orientada y cerrada. Consideremos una inmersión isométrica $f : M \to \mathbb{S}_c^{n+p}$, donde $\mathbb{S}_c^{n+p}$ es una $(n+p)$-esfera de curvatura seccional c. Consideremos un punto $p \in M$ y un marco local $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ de $\mathbb{S}_c^{n+p}$ tal que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son campos tangentes a M. El cuadrado $|A|^2$ de la norma de la segunda forma fundamental y el vector de curvatura media h están definidos por

$$|A|^2 = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \operatorname{tr}(A_\alpha^2), \qquad h = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \operatorname{tr}(A_\alpha) e_\alpha$$

donde $A_\alpha : T_pM \to T_pM$ está definido por la conexión riemanniana $\overline{\nabla}$ de $\mathbb{S}_c^{n+p}$,

$$\langle A_\alpha X, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, e_\alpha\rangle.$$

El propósito de este capítulo es extender el Teorema 2.3 para el caso $p > 1$. Para esto definiremos p operadores similares a ϕ, considerado anteriormente, pero esta vez uno por cada dirección normal, es decir, para cada α, definimos las funciones lineales $\phi_\alpha : T_pM \to T_pM$ por

$$\phi_\alpha = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A_\alpha) I - A_\alpha$$

y la función bilineal $\phi : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp$ por

$$\phi(X,Y) = \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \langle \phi_\alpha X, Y\rangle e_\alpha$$

y $\phi_h : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_h(X,Y) = \langle \phi(X,Y), h\rangle. \tag{4.1}$$

Es fácil ver que cada función ϕ_α es libre de traza y que $|\phi|^2 := \sum_\alpha \mathrm{tr}\,(\phi_\alpha^2) = |A|^2 - nH^2$, donde $H = |h|$. Observemos que $|\phi|^2 = 0$ si y sólo si M es una subvariedad totalmente umbílica de $\mathbb{S}_c^{n+p}$.

Reemplazaremos la condición de curvatura media constante de hipersuperficies por la hipótesis de que el vector de curvatura media h sea paralelo. Para ver que esto es una generalización, supongamos que $p = 1$, de donde $h = He_{n+1}$, con $\nabla^\perp h = 0$. Para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$, tenemos que

$$\nabla_X^\perp(He_{n+1}) = X(H)e_{n+1} + H\nabla_X^\perp(e_{n+1}),$$

puesto que $\langle \nabla_X^\perp e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = \frac{1}{2}X\langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = 0$, se sigue que

$$\nabla_X^\perp(He_{n+1}) = X(H)e_{n+1} = 0,$$

de donde H es constante en M. De esta manera, si $p = 1$ la condición de vector de curvatura media paralelo es equivalente a la de curvatura media constante.

Es conocido que si el vector de curvatura media es paralelo, se sigue que H es constante. En efecto, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$X(|H|^2) = X\langle h, h\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X h, h\rangle = 2\langle \nabla_X^\perp h, h\rangle = 0.$$

Sea (x, y, z) un sistema de coordenadas naturales en $\mathbb{R}^3$ y $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ un sistema de coordenadas naturales en $\mathbb{R}^5$. Consideremos la función definida por

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy$$
$$u_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u_5 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Esta función define una inmersión mínima de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ en $\mathbb{S}^4(1)$, llamada superficie de Veronese.

Definimos la función $B_{p,h}$ por

$$B_{p,h} = \begin{cases} 1/(2 - 1/p) & \text{si } p = 1 \text{ o } h = 0, \\ (p-1)/(2p-3) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 2.3.

Teorema 4.1. *Sea M^n una subvariedad compacta orientable de $\mathbb{S}_c^{n+p}$. Supongamos que el vector de curvatura media h es paralelo con respecto a la conexión normal. Si $|\phi|^2$ satisface*

$$|\phi|^2 \leq B_{p,h}\left\{n(c+H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h|\right\} \tag{4.2}$$

y

$$\operatorname{tr}(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_{n+1}||\phi_\alpha|^2 \tag{4.3}$$

para toda $\alpha = n+1, \ldots, n+p$. Entonces, o bien

(i) $|\phi|^2 \equiv 0$ *y M es totalmente umbílica o*

(ii) *la igualdad se cumple en* (4.2) *y* (4.3), *y uno de los siguientes casos ocurre:*

(a) *$H = 0$, $p = 1$ y M es una hipersuperficie de Clifford mínima*

$$M = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{nc}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{nc}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}_c^{n+1}$$

(b) *$H = 0$, $n = p = 2$ y M^2 es una superficie de Veronese, $M^2 \to \mathbb{S}_c^4$.*

(c) *$H \neq 0$, $p = 1$ y M es un producto de esferas*

$$M = \mathbb{S}^k(r_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(r_2) \hookrightarrow \mathbb{S}_c^{n+1}$$

con $r_2^2 < (n-k)/n$, donde $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{c}$.

(d) *$H \neq 0$, $n = 2$, $p = 3$ y M^2 es una superficie de Veronese en una esfera*

$$M^2 \subset \mathbb{S}_{c+H^2}^4 \hookrightarrow \mathbb{S}_c^5$$

(e) *$H \neq 0$, $p = 2$ y M es una hipersuperficie de Clifford mínima en una esfera*

$$M = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{n(c+H^2)}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{n(c+H^2)}}\right) \subset \mathbb{S}_{c+H^2}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}_c^{n+2}$$

(f) *$H \neq 0$, $p = 2$ y para toda H_2, $0 \leq H_2 < H$, M es un producto de esferas*

$$M = \mathbb{S}^k(r_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(r_2) \subset \mathbb{S}_{c+H_2^2}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}_c^{n+2}$$

con $r_2^2 < (n-k)/n$ y curvatura media H_1 de M en $\mathbb{S}_{c+H_2^2}^{n+1}$ donde $H^2 = H_1^2 + H_2^2$ y $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{c+H_2^2}$.

Observación 4.2. *Si $H = 0$, la condición* (4.2) *se reduce a*

$$|A|^2 \leq \frac{nc}{2 - 1/p}. \tag{4.4}$$

En este caso la hipótesis (4.3) *no es necesaria y el teorema se reduce al caso analizado por S. S. Chern, M. do Carmo y S. Kobayashi en* [10], *quienes mostraron que la superficie de Veronese en $\mathbb{S}_c^4$ y el toro de Clifford en $\mathbb{S}_c^{n+1}$ son las únicas subvariedades mínimas compactas de dimensión n en $\mathbb{S}_c^{n+p}$ que cumplen la igualdad en* (4.4), *ver el Teorema 4.5. Para $p = 1$ y $H = 0$, el resultado fue probado independientemente por B. Lawson in* [13].

Para $p = 1$ y $H \neq 0$, (4.2) *y* (4.3) *pueden ser escritos como*

$$|\phi|^2 \leq n(c + H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} H|\phi|, \qquad \operatorname{tr}(\phi^3) \leq \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} |\phi|^3$$

respectivamente. Con estas dos desigualdades en el primer capítulo demostramos que $|\phi|^2 \equiv 0$ o bien $|\phi|^2 \equiv B_{H,n,k}$, y caracterizamos todas las hipersuperficies con $|\phi|^2 \equiv B_{H,n,k}$, donde $B_{H,n,k}$ es el cuadrado de la raíz positiva del polinomio

$$p_H = x^2 + \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} Hx - n(c + H^2).$$

Finalmente, para $p > 1$ y $H \neq 0$, la hipótesis (4.3) *no es necesaria y el Teorema 4.1 fue probado por W. Santos en* [24] *para el caso $k = 1$.*

Demostración del Teorema Principal. Parte (i)

Comenzaremos con la demostración de la primera parte del Teorema 4.1. Consideremos el caso donde $H \neq 0$ y $p > 1$. Primero obtenemos el laplaciano $\Delta|\phi|^2$. Para este propósito, elegimos un marco local $\{e_1, \ldots, e_{n+p}\}$ tal que $e_{n+1} = h/H$. Con esta elección

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= HI - A_{n+1}, \\ \phi_\alpha &= -A_\alpha, \qquad n+2 \leq \alpha \leq n+p \end{aligned} \tag{4.5}$$

Proposición 4.3. *Sea M^n una subvariedad compacta orientable de $\mathbb{S}_c^{n+p}$. Supongamos que el vector de curvatura media h es paralelo. Si $|\phi|^2$ satisface*

$$|\phi|^2 \leq \frac{p-1}{2p-3} \left\{ n(c + H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}} |\phi_h| \right\} \tag{4.6}$$

y

$$\mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_\alpha|^2|\phi_{n+1}| \tag{4.7}$$

para toda $\alpha = n+1, \ldots, n+p$, *entonces* $|\phi|$ *es constante y, o bien* $|\phi|^2 = 0$ *o la igualdad se cumple en* (4.6) *y* (4.7).

Demostración. Por un cálculo similar al realizado en [24], obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} |\nabla\phi_\alpha|^2 + n(H^2+c)|\phi|^2 - nH\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \\ &- \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p} (\mathrm{tr}\,\phi_\alpha\phi_\beta)^2 + \sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,([\phi_\alpha,\phi_\beta])^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

El objetivo es demostrar que $\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq n(c+H^2)|\phi|^2 - nH\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \\ &- \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p} (\mathrm{tr}\,\phi_\alpha\phi_\beta)^2 + \sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,([\phi_\alpha,\phi_\beta])^2. \end{aligned}$$

Estimaremos cada término de la desigualdad de arriba. Primero observemos que

$$\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p} (\mathrm{tr}\,\phi_\alpha\phi_\beta)^2 = |\phi_{n+1}|^2(2|\phi|^2 - |\phi_{n+1}|^2) + \sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p} (\mathrm{tr}\,\phi_\alpha\phi_\beta)^2.$$

Por otro lado, por la hipótesis (4.7),

$$\mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_{n+1}||\phi_\alpha|^2,$$

sumando de $\alpha = n+1$ a $n+p$, tenemos que

$$\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_{n+1}||\phi|^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y usando (3.7) a (3.8) de [10], obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p} \operatorname{tr}([\phi_\alpha,\phi_\beta])^2 &- \sum_{\alpha,\beta>n+1}^{n+p} (\operatorname{tr}\phi_\alpha\phi_\beta)^2 \\ &\geq -2\sum_{\alpha,\beta>n+1\ \alpha\neq\beta} (\operatorname{tr}\phi_\alpha^2)(\operatorname{tr}\phi_\beta^2) - \sum_{\alpha,\beta>n+1} (\operatorname{tr}\phi_\alpha^2)^2 \\ &\geq -\left(2-\frac{1}{p-1}\right)(|\phi|^2-|\phi_{n+1}|^2)^2.\end{aligned}$$

En consecuencia, juntando las desigualdades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq n(H^2+c)|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h||\phi|^2 - |\phi_{n+1}|^2(2|\phi|^2-|\phi_{n+1}|^2) \\ &- \left(2-\frac{1}{p-1}\right)(|\phi|^2-|\phi_{n+1}|^2)^2 \\ &\geq n(H^2+c)|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h||\phi|^2 - \left(2-\frac{1}{p-1}\right)|\phi|^4 \\ &+ \left(1-\frac{1}{p-1}\right)|\phi_{n+1}|^2(2|\phi|^2-|\phi_{n+1}|^2).\end{aligned}$$

Puesto que

$$\left(1-\frac{1}{p-1}\right)|\phi_{n+1}|^2(2|\phi|^2-|\phi_{n+1}|^2)\geq 0,$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2\left\{n(H^2+c) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h| - \left(\frac{2p-3}{p-1}\right)|\phi|^2\right\}. \tag{4.9}$$

Así, la hipótesis (4.6) implica que

$$\Delta|\phi|^2\geq 0.$$

Se sigue, por el principio del máximo de Hopf, que $|\phi|^2$ es constante. Entonces, por (4.9), $|\phi|^2\equiv 0$, o bien la igualdad se cumple en (4.6) y también (4.7). Esto demuestra la primera parte del Teorema 4.1. □

4.2 Subvariedades pseudo-umbílicas

En esta sección clasificaremos las subvariedades de $\mathbb{S}_c^{n+p}$ tal que $|\phi|^2$ satisface la igualdad en (4.2). Para esto, recordemos que una subvariedad M es pseudo-umbílica si el vector de curvatura media es distinto de cero y pertenece a una dirección umbílica, esto es, si existe una función λ en M tal que

$$\langle \overline{\nabla}_X Y, h\rangle = \lambda \langle X, Y\rangle$$

para cualesquiera vectores X, Y en M o, equivalentemente si $A_h = \lambda I$.

Puesto que $h = He_{n+1}$, se obtiene la relación $HA_{n+1} = \lambda I$. Luego, al tomar la traza en ambos lados de la igualdad tenemos que $\lambda = H^2$ y $A_{n+1} = HI$, de donde $|\phi_{n+1}|^2 = |A_{n+1}|^2 - nH^2 = 0$.

Por otro lado, ya que $h = He_{n+1}$, podemos escribir a (4.1) como $\phi_h(X,Y) = \langle \phi_{n+1}X, Y\rangle H$, de esta manera obtenemos

$$|\phi_h| = H|\phi_{n+1}| = 0.$$

La siguiente clasificación se debe a [8], ver también [24].

Proposición 4.4. *Sea M^n una subvariedad compacta pseudo-umbílica de $\mathbb{S}_c^{n+p}$, $p \geq 2$, con vector de curvatura media paralelo h, $H = |h|$. Si ϕ satisface*

$$|\phi|^2 \leq \frac{n(c+H^2)}{2 - 1/(p-1)}, \tag{4.10}$$

entonces, o bien

(i) *$|\phi|^2 \equiv 0$ y M es totalmente umbílica o*

(ii) *la igualdad se cumple en (4.10) y M es una hipersuperficie de Clifford mínima en $\mathbb{S}^{n+1}_{c+H^2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+2}_c$ o M^2 es una superficie de Veronese en $\mathbb{S}^4_{c+H^2} \hookrightarrow \mathbb{S}^5_c$*

La demostración de la Proposición 4.4 requiere hacer uso del Teorema 2.1 demostrado por Chern, Carmo y Kobayashi en [10] para el caso de codimensión arbitraria:

Teorema 4.5 (Chern, Carmo y Kobayashi [10])**.** *Sea M^n una variedad compacta y sea $f : M \to \mathbb{S}_c^{n+p}$ una inmersión mínima. Si se cumple que*

$$|A|^2 \leq \frac{nc}{2 - 1/p}.$$

Entonces, o bien

(i) *$|A|^2 \equiv 0$ y M es totalmente geodésica o*

(ii) *$|A|^2 \equiv \frac{nc}{2-1/p}$ y uno de los siguientes casos ocurre:*

(a) *$p = 1$ y M es un toro mínimo de Clifford en $\mathbb{S}_c^{n+1}$, es decir, $M = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{nc}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{nc}}\right)$.*

(b) *$n = p = 2$ y M^2 es una superficie de Veronese en $\mathbb{S}_c^4$.*

Demostración de la Proposición 4.4. Afirmamos primero que si la inmersión f tiene una dirección paralela umbílica, entonces existe una descomposición de la forma $f = g_1 \circ g_2$ donde $g_2 : M^n \to \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+p-1}$ es una inmersión isométrica y $g_1 : \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+p-1} \to \mathbb{S}_c^{n+p}$ es una inmersión umbílica:

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g_2"'] & \mathbb{S}_c^{n+p} \\ & \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+p-1} \arrow[u, "g_1"'] \end{tikzcd}$$

Basta mostrar que la imagen de M bajo la inmersión f está contenida en la intersección de $\mathbb{S}_c^{n+p}$ con un hiperplano. Así, hay que encontrar un vector normal a $f(M)$ que sea constante. Para esto sabemos que la inmersión $f : M^n \to \mathbb{S}_c^{n+p}$ tiene una dirección paralela umbílica, dada por el vector de curvatura media h[1]. Si D denota la conexión en $\mathbb{R}^{n+p+1}$,

$$D_X h = \overline{\nabla}_X h + \alpha(X, \xi);$$

donde X es cualquier vector tangente a M. Como la esfera $\mathbb{S}_c^{n+p}$ es umbílica, es fácil ver que $\alpha(X, \xi) = 0$. Por otro lado, si descomponemos el espacio tangente a la esfera como la suma del tangente a M y el normal a M (relativo a la esfera), tenemos

$$\overline{\nabla}_X h = -A_h X + \nabla_X^{\perp} h,$$

donde A es el operador de forma y $\nabla^{\perp}$ es la conexión normal. Como h es paralelo, $\nabla_X^{\perp} h = 0$, mientras que como h es una dirección umbílica, entonces $A_h X = \lambda X$. Sabemos que $\lambda = H^2$ y H es constante, de donde la conexión en $\mathbb{R}^{n+p+1}$ queda como $D_X h = -H^2 X$. Entonces el vector $\lambda f + h$ es normal a M y constante, pues

$$D_X(\lambda f + h) = \lambda D_X f - \lambda X = \lambda X - \lambda X = 0,$$

lo que quiere decir que M está contenida en el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+p+1}$ ortogonal a este vector, ya que h es normal a $f(M)$ y

$$\frac{d}{dt}\langle(\lambda f + h) \circ \gamma(t), f \circ \gamma(t)\rangle = \langle \lambda f(\gamma(t)) + h(\gamma(t)), f_* \gamma'(t)\rangle = 0$$

[1] Este razonamiento es clásico y no es necesario que el vector de curvatura media esté en una dirección paralela umbílica. Nosotros usamos este hecho para simplificar los cálculos.

para cualquier curva diferenciable $\gamma : [0,1] \to M$, pues $f(p) \in f(M) \subset \mathbb{S}_c^{n+p}$, y $f_*\gamma'(t) \in T_{f(p)}\mathbb{S}_c^{n+p}$ con $\gamma(t) = p$.

Por otro lado, como la dirección umbílica es la dirección de la curvatura media, g_2 es mínima. Denotemos por α_i la segunda forma fundamental de g_i, $|A_i|$ la norma de α_i.

Puesto que $|\phi_h| = 0$ (h es una dirección umbílica) tenemos que $|A_2| = |\phi|$. Puesto que $|\phi_{n+1}| = 0$ y por (4.5), tenemos

$$|\phi|^2 = \sum_{\alpha > n+1} \operatorname{tr} \phi_\alpha^2 = \sum_{\alpha > n+1} \operatorname{tr} A_\alpha^2 = |A_2|^2.$$

De donde, en términos de $|A_2|$, la hipótesis (4.10) queda como

$$|A_2|^2 \leq \frac{n(c + H^2)}{2 - 1/(p-1)}.$$

El resultado se sigue del teorema 4.5 si demostramos que $\tilde{c} = c + H^2$. Para ver que esto se cumple, observemos que

$$\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2,$$

donde α es la segunda forma fundamental de f. Puesto que g_2 es una inmersión mínima,

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_1(e_i, e_i) \right| = |\operatorname{tr}(\alpha_1 \oplus \alpha_2)| = nH,$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ es un marco de M. Por otro lado, como g_1 es una inmersión umbílica,

$$H_1 = \langle A_1 e_i, e_i \rangle = \langle \alpha_1(e_i, e_i), e_{n+p} \rangle,$$

donde H_1 es la curvatura media de g_1 (g_1 es una hipersuperficie). En consecuencia, $|\sum_{i=1}^n \alpha_1(e_i, e_i)| = nH_1$,

$$H_1 = H \qquad \text{y} \qquad |A_1|^2 = nH^2. \tag{4.11}$$

De la ecuación de Gauss para la inmersión g_1 tenemos que $R_{ijij} = c + \lambda_i \lambda_j = \tilde{c}$, así $H_1^2 = \lambda_i^2 = \tilde{c} - c$. También

$$\begin{aligned} n(n-1)(r-c) &= (nH_1)^2 - |A_1|^2 \\ &= n(n-1)H_1^2, \end{aligned}$$

implica que $r = \tilde{c}$, donde r es la curvatura escalar normalizada. Nuevamente, por la ecuación de Gauss y (4.11), es claro que

$$\begin{aligned} n(n-1)(\tilde{c}-c) &= (nH_1)^2 - |A_1|^2 \\ &= n^2(\tilde{c}-c) - nH^2, \end{aligned}$$

lo que implica que $\tilde{c} = c + H^2$, esto demuestra la Proposición 4.4. $\square$

4.3 Subvariedades con $R^{\perp} \equiv 0$

Ahora consideremos subvariedades con curvatura media paralela y $R^{\perp} \equiv 0$. Recordemos que el tensor de curvatura del haz normal $TM^{\perp}$ está dado por

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

para toda $X, Y \in TM$, $\xi \in TM^{\perp}$ y donde $\nabla^{\perp}$ es la componente normal (conexión normal) de $\overline{\nabla}$ definida en $TM^{\perp}$.

Siguiendo las ideas para la demostración de la Proposición 3.3 en [24], para el caso $k = 1$, tenemos nuestro siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Sea M^n una subvariedad compacta orientada de $\mathbb{S}^{n+p}_c$, $p \geq 2$. Supongamos que el vector de curvatura media h es paralelo y $R^{\perp} \equiv 0$. Si ϕ satisface*

$$|\phi|^2 \leq n(c + H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h| \tag{4.12}$$

y

$$\operatorname{tr}(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_\alpha|^2|\phi_{n+1}| \tag{4.13}$$

para toda $\alpha = n+1, \ldots, n+p$, entonces

(i) $|\phi|^2 \equiv 0$ *y M es totalmente umbílica, o bien*

(ii) *la igualdad se cumple en* (4.12) *y* (4.13), *y uno de los siguientes casos ocurre:*

(a) *M es una hipersuperficie de Clifford mínima en una esfera,*

$$M = \mathbb{S}^m\left(\sqrt{\frac{m}{nc}}\right) \times \mathbb{S}^{n-m}\left(\sqrt{\frac{n-m}{nc}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}_c \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+2}_c$$

para algún entero $m < n$.

(b) *Para toda* H_2, $0 \leq H_2 < H$, M *es un producto de esferas*

$$M = \mathbb{S}^k(r_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(r_2) \subset \mathbb{S}^{n+1}_{c+H_2^2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+2}_c$$

con $r_2^2 < (n-k)/n(c+H_2^2)$ *y curvatura media* H_1 *de* M *en* $\mathbb{S}^{n+1}_{c+H_2^2}$ *donde* $H^2 = H_1^2 + H_2^2$ *y* $r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{c+H_2^2}$.

Para la demostración de la Proposición 4.6 necesitamos los siguientes lemas algebraicos.

Lema 4.7. *Sean* x_i *números reales tales que* $\sum_i x_i = 0$ *y* $\sum_i x_i^2 = 1$. *Supongamos que la siguiente desigualdad se cumple*

$$\sum_i x_i^4 \leq \frac{(n-2k)^2}{nk(n-k)} + \frac{1}{n} \tag{4.14}$$

Entonces, la igualdad se cumple si y sólo si $n-k$ *de los números* x_i *son iguales a* $\pm\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}$ *y el resto de los* k *números* x_i *son iguales a* $\mp\sqrt{\frac{n-k}{nk}}$.

Demostración. Primero observemos que por un cálculo directo, podemos probar el lema para los casos $n = 2k$ y $n = 3k$. Supongamos que $n \neq 2k$ y $n \neq 3k$ y estudiemos el comportamiento de las raíces del polinomio (ver [24], pág. 408)

$$p(x) = x^4 - \frac{6}{n(n-k)}x^2 + \frac{8\sqrt{k}\sum_i x_i^3}{n(n-k)(n-2k)}x + \frac{3(1-2k\sum_i x_i^4)}{n(n-k)(n-2k)(n-3k)}, \tag{4.15}$$

Para esto, observamos primero que nuestra hipótesis (4.14) puede ser escrito como

$$\frac{3(1-2k\sum_i x_i^4)}{n(n-k)(n-2k)(n-3k)} + \frac{3}{n^2(n-k)^2} \geq 0.$$

Por otra parte, tenemos que para cualquier polinomio de la forma $x^4 + 6Ax^2 + 4Bx + C = 0$ tiene raíces reales si los coeficientes A y C satisfacen $C + 3A^2 \geq 0$. Puesto que nuestra desigualdad anterior es exactamente esta condición para el polinomio $p(x)$, tenemos que todas sus raíces son reales. Más aún, si en (4.14) la igualdad se cumple, esto es si $C + 3A^2 = 0$, entonces (4.15) tiene (al menos) tres raíces iguales. De donde, al tomar la derivada de $p(x)$ e igualar a cero obtenemos que la ecuación

$$x^3 - \frac{3}{n(n-k)}x + \frac{2\sqrt{k}\sum_i x_i^3}{n(n-k)(n-2k)} = 0$$

tiene al menos dos raíces iguales, de donde

$$\left(\sum_i x_i^3\right)^2 = \frac{(n-2k)^2}{nk(n-k)}.$$

Ya que un polinomio de la forma $x^3-3Ax+B$ que tiene una raíz real y de multiplicidad 2 cumple que $4A^3 = B^2$. Por el Lema 2.7, concluimos la demostración del Lema 4.7. □

Lema 4.8. *Sean $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matrices simétricas tal que $[A, B] = AB - BA = 0$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$ y la siguiente desigualdad se cumple*

$$\operatorname{tr}(A^2B) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}(\operatorname{tr} A^2)(\operatorname{tr} B^2)^{1/2}. \tag{4.16}$$

Entonces, la igualdad se cumple si y sólo si $n-k$ de los valores propios x_i de A y los correspondientes valores propios y_i de B satisfacen

$$x_i = \pm\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}(\operatorname{tr} A^2)^{1/2} \qquad y_i = \pm\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}(\operatorname{tr} B^2)^{1/2}$$

y el resto de los k valores propios de A y B satisfacen

$$x_i = \mp\sqrt{\frac{n-k}{nk}}(\operatorname{tr} A^2)^{1/2} \qquad y_i = \mp\sqrt{\frac{n-k}{nk}}(\operatorname{tr} B^2)^{1/2}$$

Demostración. Puesto que $[A, B] = 0$, podemos elegir una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ que diagonalice simultáneamente a A y B. Por otro lado, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = 1$, donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ son los valores propios de A y B, respectivamente. Entonces, (4.16) queda como

$$\sum_i x_i^2 y_i \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}. \tag{4.17}$$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g(x_i, y_i) = \sum_i x_i^2 y_i$ sujeto a las condiciones $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 0$ y $\sum_i x_i^2 = \sum_i y_i^2 = 1$. Por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos están dados por las ecuaciones

$$x_i y_i = Cx_i + D, \qquad x_i^2 = Cy_i + \frac{1}{n}, \tag{4.18}$$

para algunas constantes C y D. Si elevamos al cuadrado la segunda ecuación y tomamos la suma, obtenemos que

$$\sum_i x_i^4 = C^2 + \frac{1}{n},$$

ya que $\sum_i y_i = 0$ y $\sum_i y^2 = 1$. Análogamente, de la primera ecuación en (4.18) podemos multiplicarla por x_i y luego tomar la suma, para obtener que $C = \sum_i x_i^2 y_i$. En consecuencia, por (4.17),

$$\sum_i x_i^4 \leq \frac{(n-2k)^2}{nk(n-k)} + \frac{1}{n}.$$

Usando el lema 4.7 y las ecuaciones (4.18), concluimos la demostración del Lema 4.8. □

Demostración de la Proposición 4.6. La primera parte de la demostración es parecida a la demostración de la Proposición 4.3, observando que si $R^{\perp} \equiv 0$, entonces $[\phi_\alpha, \phi_\beta] = 0$ para toda α, β. En efecto, usando la ecuación de Ricci para subvariedades en un espacio de curvatura constante se tiene que

$$0 = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle,$$

de esta manera, $[A_\xi, A_\eta] = 0$ para cualesquiera vectores $\xi, \eta \in TM^{\perp}$. Por (4.8), tenemos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq n(c+H^2)|\phi|^2 - nH\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) - \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p} (\mathrm{tr}\,\phi_\alpha\phi_\beta)^2,$$

puesto que $[\phi_\xi, \phi_\eta] = [A_\xi, A_\eta] = 0$, para toda $\xi, \eta \in TM^{\perp}$. Ahora, por nuestra hipótesis (4.13) y puesto que $\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2 = |\phi|^2$, obtenemos

$$\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} \mathrm{tr}\,(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) \leq \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi|^2|\phi_{n+1}|.$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy y ya que $|\phi_h| = H|\phi_{n+1}|$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq n(c+H^2)|\phi|^2 - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi|^2|\phi_h| - |\phi|^4 \\ &\geq |\phi|^2\left(n(c+H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_h| - |\phi|^2\right) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

A continuación analizaremos el caso cuando se tiene la igualdad en (4.12) y posteriormente efectuamos la reducción de la codimensión. Tenemos que

$$\sum_{\alpha=n+1}^{n+p} |\nabla\phi_\alpha|^2 = 0, \tag{4.19}$$

y

$$\sum_{\alpha\geq n+1} \operatorname{tr}(\phi_{n+1}\phi_\alpha^2) = \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}}|\phi_\alpha|^2|\phi_{n+1}|.$$

Sean (ϕ_α) las matrices que definen las funciones ϕ_α's. Por el Lema 4.8, existe un marco ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ en TM^n tal que las ϕ's son de la forma:

$$(\phi_\alpha) = a_\alpha \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{n-k}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\frac{n-k}{k} \end{pmatrix},$$

donde $a_\alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}\operatorname{tr}(\phi_\alpha^2)^{1/2}$. De (4.19) se sigue que a_α es constante para cada α. Esto implica que el primer espacio normal de f, es decir, el subhaz de $TM^\perp$ dado como

$$N_1(x) = \{\xi \in TM^\perp \,:\, A_\xi = 0\}^\perp = \operatorname{span}\left\{\sum_{\alpha\geq n+1}\langle A_\alpha X, Y\rangle e_\alpha \,:\, X, Y \in T_xM\right\},$$

tiene dimensión constante. En efecto, por un simple cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \operatorname{span}\left\{\sum_{\alpha\geq n+1}\langle A_\alpha e_i, e_i\rangle e_\alpha \,:\, e_i \in T_xM\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(H - (\phi_{n+1})_{ii})e_{n+1}, -\sum_{\alpha>n+1}(\phi_\alpha)_{ii}e_\alpha\right\}, \end{aligned}$$

ya que

$$\langle A_\alpha e_i, e_i\rangle = \begin{cases} H - (\phi_{n+1})_{ii} & \alpha = n+1 \\ -(\phi_\alpha)_{ii} & \alpha > n+1. \end{cases}$$

En consecuencia, $N_1(x)$ está generado por los vectores

$$\left\{He_{n+1}, \sum_{\alpha\geq n+1}(\phi_\alpha)_{ii}e_\alpha \,:\, i = 1, \ldots, n\right\}$$

y la dimensión es a lo más 2, para toda $x \in M$. Por hipótesis $R^\perp \equiv 0$ y $\nabla^\perp h = 0$, así N_1 es un haz normal paralelo y, de esta manera es posible reducir la codimensión de la inmersión a 2, esto es consecuencia directa del Teorema 4.4 y la Proposición 4.1 en [11]. Consideremos dos casos.

Primer caso: $H = 0$. En este caso $\phi_\alpha = -A_\alpha$ para toda α y $\dim N_1(x) \equiv 1$. Así reducimos la codimensión a uno. Puesto que $|\phi|^2 = |A|^2$ y $|\phi_h| = 0$, (4.12) se puede escribir como $|A|^2 = nc$. Por el Teorema 4.5, M es una hipersuperficie mínima de Clifford en $\mathbb{S}_c^{n+1} \subset \mathbb{S}_c^{n+p}$.

Segundo caso: $H \neq 0$. Después de reducir la codimensión, podemos suponer que $M^n \subset \mathbb{S}_c^{n+2}$. Primero demostraremos que M tiene una dirección paralela umbílica. Para este propósito elegimos un nuevo marco ortonormal ξ_1, ξ_2 en $T^{\perp}M$ por

$$\xi_i = \frac{1}{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2}(a_{n+2}e_{n+1} + (-1)^{i+1}a_{n+1}e_{n+2}).$$

Sabemos que $\nabla^{\perp}e_{n+1} = 0$, ya que por hipótesis $h = He_{n+1}$ es paralelo. Además, puesto que sólo tenemos dos direcciones normales independientes, dados inicialmente por $\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$, tenemos que $\nabla^{\perp}e_{n+2} = 0$, de donde, ξ_i son campos vectoriales paralelos. Es fácil ver que ξ_2 es una dirección umbílica.

Puesto que tenemos una dirección umbílica, la inmersión f se puede descomponer como $f = g_1 \circ g_2$ donde $g_2 : M^n \to \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+1}$ es una inmersión isométrica y $g_1 : \mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+1} \to \mathbb{S}_c^{n+2}$ es una inmersión umbílica.

Si definimos las nuevas funciones lineales $\phi_i : T_xM \to T_xM$ por

$$\langle \phi_i X, Y\rangle = \langle \phi(X,Y), \xi_i\rangle, \qquad i = 1, 2$$

entonces $|\phi|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$. Como ξ_2 tiene una dirección umbílica, $|\phi_2| = 0$. Así

$$|\phi|^2 = |\phi_1|$$

y también

$$|\phi_h| = |H_1||\phi_1|$$

donde $H_1 = \langle h, \xi_1\rangle$. De las tres últimas ecuaciones tenemos que (4.12) se puede escribir como

$$|\phi_1| = n(c + H^2) - \frac{n(n-2k)}{\sqrt{nk(n-k)}}|H_1||\phi_1|.$$

Ahora el resultado se sigue del Teorema 2.3 aplicado a g_2, ya que de la ecuación de Gauss para la inmersión umbílica de $\mathbb{S}_{\tilde{c}}^{n+1}$ en $\mathbb{S}_c^{n+2}$ implica que $\tilde{c} = c + H_2^2$. $\square$

Demostración del Teorema Principal. Parte (ii)

Si la igualdad se cumple en (4.2), entonces $\Delta|\phi|^2 \equiv 0$, y esto implica que todas las estimaciones usadas arriba son igualdades. Así,

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)|\phi_{n+1}|^2(2|\phi|^2 - |\phi_{n+1}|^2) = 0.$$

Puesto que $H \neq 0$ y $p > 1$, tenemos que $2|\phi|^2 - |\phi_{n+1}|^2 > 0$, de donde $p = 2$ o $|\phi_{n+1}| \equiv 0$.

Primer caso: $p = 2$. Como M tiene una dirección normal paralela, por hipótesis, es fácil ver que $R^{\perp} \equiv 0$. Entonces el Teorema es una consecuencia directa de la Proposición 4.6, (i)-(b).

Segundo caso: $|\phi_{n+1}| = 0$. Notemos que en este caso la inmersión es pseudo-umbílica, puesto que $|\phi_\alpha| = 0$ implica que e_α es caracterizado como una dirección umbílica. De donde, por la Proposición 4.4, (ii) implica el resultado.

Bibliografía

[1] H. Alencar y M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 1223-1229.

[2] L. J. Alías, S.C.D. Almeida y A. Brasil Jr., *Hypersurfaces with constant mean curvature and two principal curvatures in* $\mathbb{S}^{n+1}$, An. Acad. Bras. Cienc. **76**, (2004), 489-497.

[3] L. J. Alías y S.C. García-Martínez, *On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms*, J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 579-587.

[4] A. Brasil Jr., A.G. Colares y O. Palmas, *Complete hypersurfaces with constant scalar curvature in spheres.* Monatsh. Math. **161** (2010), 369-380.

[5] M. do Carmo y M. Dajczer *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. of the Amer. Math. Soc. **277** (2) (1983), 685-709.

[6] E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938) 177-191.

[7] Y. C. Chang, *Constant mean curvature hypersurfaces with two principal curvatures in a sphere*, Monatsh. Math. **158** (2009), 1-22.

[8] S. P. Chen, *Pseudo-umbilical submanifolds in space of constant curvature*, (In Chinese with English Summary), J. East China Norm. Univ. Natur. Sci. **1** (1989), 59-65.

[9] S. Y. Cheng y S. T. Yau *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195-204.

[10] S. S. Chern, M. do Carmo, y S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (F. Browder, ed.), Springer-Verlag, Berlin (1970), 59-75.

[11] M. Dajczer con la colaboración de M. Antonucci, P. Lima, G. Oliveira y R. Tojeiro, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Houston, TX, 1990.

[12] Zh. H. Hou, *Hypersurfaces in a sphere with constant mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1193-1196.

[13] B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 187-197.

[14] T. Levi-Civita, *Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **26** (1937) 355-362.

[15] H. Li, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Mat., **35** (1997), 327-351.

[16] H. Li, *Willmore hypersurfaces in a sphere*, Asian J. Math. **5** (2001), 365-378.

[17] J. Nazareno, *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um Campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial*, Tesis Doctoral, Universidade Federal do Ceará, 2012.

[18] K. Nomizu y B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Diff. Geom. **3** (1969), 367-377.

[19] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. **96** (1974), 207-213.

[20] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205-213.

[21] O. Palmas, *Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms*, Bol. Soc. Bras. Mat. **30** (2) (1999), 139-161.

[22] O. Palmas, *Variation of $|A|^2$ for rotational hypersurfaces with H_k constant in spheres*, Manuscrito no publicado.

[23] P. Ryan, *Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoku Math. J. **21** (1969), 363-388.

[24] W. Santos, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tohoku Math. J. **46** (1994), 403-415.

[25] B. Segre, *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. **27** (1938) 203-207.

[26] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968) 62-105.

[27] G. Wei, *Rigidity Theorem for Hypersurfaces in a Unit Sphere*, Monatsh. Math. **149** (2006) 343-350.

[28] H. W. Xu and L. Tian, *A New Pinching Theorem for Closed Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in* $\mathbb{S}^{n+1}$, Asian J. Math. **15** (2011), 611-630.

[29] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201-228.