UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Las ecuaciones de Maxwell, el álgebra de Clifford del espaciotiempo de Minkowski y el operador de Dirac; con una generalización asociada al álgebra de Lie de las transformaciones de una métrica de Lorentz

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

Javier González Anaya

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Óscar Adolfo Sánchez Valenzuela
Cd. Universitaria, D. F. 2014

Índice

Introducción

En el presente trabajo exploraremos el isomorfismo de espacios vectoriales que hay entre cada álgebra de Clifford y su álgebra exterior subyacente. Las formas diferenciales de una variedad son, localmente, funciones con valores en un álgebra exterior; el mencionado isomorfismo permite establecer, localmente, una correspondencia biyectiva entre formas diferenciales y funciones con valores en un álgebra de Clifford. En esta tesis se busca evidenciar, a través de ejemplos sencillos y bien conocidos, las ventajas de escribir las ecuaciones geométricas básicas asociadas a una estructura ortogonal dada, o más generalmente, a una métrica pseudo-Riemanniana, a través de funciones valuadas en un álgebra de Clifford apropiada.

Por ejemplo, al hacer corresponder las formas diferenciales del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ con funciones valuadas en su álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(3,1)$, las ecuaciones de Maxwell adoptan exactamente la forma de la ecuación de Dirac (en el sentido que se explica en el capítulo 4) : $D(E+iB) = J$, siendo $(E+iB) : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathrm{Cl}(3,1)$, J las componentes de las fuentes del campo electromagnético debidamente identificadas dentro del álgebra de Clifford y D el operador de Dirac, o raíz cuadrada del operador D'Alambertiano; es decir, el Laplaciano en un espacio con geometría ortogonal de signatura $(3,1)$. Un propósito central de esta tesis es explicar con todo detalle lo que está detrás de poder escribir las ecuaciones de Maxwell de esta manera.

Para hacer autocontenida la exposición, dedicamos casi la primera mitad de la tesis a una detallada introducción algebraica del tema. En los primeros dos capítulos se definen los conceptos centrales a partir de los cuales se construye el resto del trabajo. El primer concepto importante que se define es el de una *geometría* en un espacio vectorial, que es el equivalente algebraico a la métrica en geometría diferencial y que sirve para definir los grupos y álgebras de Lie clásicos. El segundo capítulo está casi completamente dedicado al producto tensorial entre espacios vectoriales y al álgebra tensorial.

En el tercer capítulo entra en juego toda la herramienta que se desarrolló en los capítulos previos. Damos una introducción intuitiva y formal a la motivación de las propiedades universales de las álgebras exterior, simétrica, de Clifford y de Weyl y posteriormente a la construcción explícita de cada una de ellas. Se ponen de manifiesto algunas interesantes relaciones entre cada una de estas álgebras que, entre otras cosas, aclaran el por qué resulta natural presentar las cuatro álgebras y no sólo algunas de ellas.

Dado que las álgebras exterior y de Clifford constituyen el eje central del trabajo, dedicamos un capítulo completo a cada una de ellas. En el capítulo del álgebra exterior, además de estudiar sus propiedades básicas, damos una introducción a la geometría diferencial que culmina en la definición de las formas diferenciales -funciones con valores en un álgebra exterior- en un abierto de una variedad. Se proporcionan las definiciones y descripciones en coordenadas locales de los operadores derivada exterior, el operador de Hodge y el operador de Dirac. Estos están definidos a priori en formas diferenciales pero son transformables a operadores definidos en funciones con valores en un álgebra de Clifford.

Finalmente, en el capítulo sobre las álgebras de Clifford describimos los aspectos más importantes que las caracterizan y usando algunos isomorfismos elementales que se dan ahí mismo, es posible dar una clasificación completa de las álgebras de Clifford. En particular, quedan sintetizados los principales resultados de la sección en una tabla que recoge todas las álgebras de Clifford asociadas a un espacio vectorial real V con geometría ortogonal de signatura (p, q) con $0 \leq p, q \leq 5$. Asimismo, se hace especial énfasis en la importancia de un elemento especial que tiene cada álgebra de Clifford. Dicho elemento lo denotamos por Γ y es igual al producto de todos los elementos de la base de V. Parte de dicha importancia radica en que bajo ciertas condiciones, el elemento Γ define una estructura compleja de un espacio vectorial real W cuando se representa al álgebra $\mathrm{Cl}(p, q)$ en el espacio de endomorfismos de W. En particular, dicha estructura compleja permite descomponer la imagen de toda la representación en la suma directa de los endomorfismos de W que conmutan con la imagen de Γ y los que anticonmutan con ella. Esta estructura compleja permite, además, identificar un nuevo espacio vectorial complejo U y describir la representación original de $\mathrm{Cl}(p, q)$ en el espacio de endomorfismos de W, como pares de endomorfismos de U; a saber, los lineales y los antilineales.

Un punto muy importante a enfatizar en este trabajo es que las álgebras de Clifford derivadas de estructuras ortogonales con signaturas $(p + 2, p)$, $(p = 0, 1, 2, \dots)$, como es el caso del álgebra de Clifford del espacio-tiempo de Minkowski, tienen la propiedad de que su elemento Γ define una estructura compleja en un espacio vectorial W frente a cualquier representación de $\mathrm{Cl}(p+2, p)$ como endomorfismos W. Dicha estructura compleja definida por la imagen de Γ es muy natural, puesto que el elemento Γ mismo es invariante, hasta un signo, bajo los automorfismos del álgebra $\mathrm{Cl}(p + 2, p)$ inducidos por las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^{p+2,p}$. La naturalidad de la estructura compleja definida por la imagen de Γ en W, permite identificar, en el espacio complejo U, la acción de la imagen de Γ como *multiplicación por* $i = \sqrt{-1}$. En el ejemplo del campo electromagnético, $E + iB$, la $i = \sqrt{-1}$ que aparece en el campo complejificado es precisamente la representante de dicha estructura compleja natural. Para el ejemplo bidimensional de signatura $(2, 0)$, las aludidas ecuaciones geométricas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann y pueden escribirse en la forma $D(u + iv) = 0$, siendo nuevamente D el operador de Dirac e $i = \sqrt{-1}$, la estructura compleja natural en el álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(2, 0)$.

Finalmente, se consideran las ecuaciones geométricas $D(A + iB) = C$ en el álgebra de Clifford asociada a la estructura ortogonal de signatura $(4, 2)$. El valor teórico de ésta radica en que existe un isomorfismo de álgebras de Lie —y por lo tanto, un isomorfismo local de grupos de Lie— entre el álgebra de Lie del grupo $O(p + 1, q + 1)$ y el álgebra de Lie del grupo de las transformaciones conformes asociadas a una estructura ortogonal de signatura (p, q).

1. Geometrías en Espacios Vectoriales

En esta sección presentaremos los conceptos fundamentales para definir lo que vamos a entender como una *geometría* en un espacio vectorial de dimensión finita; nos restringiremos únicamente a espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definiremos también las estructuras algebraicas que preservan una geometría dada.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Una función $B : V \times V \to K$ es una forma bilineal si,

$$\begin{aligned} B(x+y,z) &= B(x,z)+B(y,z), \\ B(x,y+z) &= B(x,y)+B(x,z), \\ B(\lambda x,z) &= B(x,\lambda z) = \lambda B(x,z); \quad \lambda \in K \end{aligned} \tag{1}$$

Si $K = \mathbb{C}$ se tienen, además de formas bilineales, funciones sesquilineales. Éstas, en lugar de cumplir (1), satisfacen,

$$\begin{aligned} B(\lambda x,z) &= \bar{\lambda} B(x,z), \\ B(x,\lambda z) &= \lambda B(x,z). \end{aligned}$$

Definición 1.2. Si B es una función bilineal o sesquilineal, decimos que es no degenerada cuando cumple que, si $B(x,y) = 0$ para toda $x \in V$, entonces $y = 0$.

Definición 1.3. Decimos que una función bilineal B es simétrica (resp. anti-simétrica) si para todo $x, y \in V$ se tiene que,

$$B(x,y) = \begin{cases} B(y,x), \\ -B(y,x). \end{cases}$$

Una función sesquilineal H es hermitiana (resp. anti-hermitiana) si para todos $x, y \in V$, se tiene que,

$$H(x,y) = \begin{cases} \overline{H(y,x)}, \\ -\overline{H(y,x)}. \end{cases}$$

Las definiciones previas nos permiten definir una *geometría* en V.

Definición 1.4. Si B es una forma bilineal, no degenerada y simétrica (resp., anti-simétrica) definida en V, decimos que V está equipado con una geometría ortogonal (resp., simpléctica). Análogamente si $K = \mathbb{C}$ y H es una forma sesquilineal, no degenerada y simétrica (resp. anti-simétrica) en V, decimos que V está equipado con una geometría unitaria (resp., anti-unitaria).
En cualquier caso decimos que B (resp., H) define la geometría correspondiente en V.

Nota 1.5. Dada una geometría B (resp., H) en V y una base $\{e_1, \dots e_n\}$ de V, nos referimos a la matriz asociada a B (resp., H) en la base $\{e_i\}$ como la matriz $\mathbb{B} = (B_{ij})$ (resp., $\mathbb{H} = (H_{ij})$), cuyas entradas están definidas por $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ (resp., $H_{ij} = H(e_i, e_j)$). En particular, el determinante de estas matrices es distinto de cero como consecuencia de la no-degeneración; además serán también simétricas (resp. anti-simétricas) o hermitianas (resp. anti-hermitianas), según sea el caso.

Una vez dadas estas definiciones, vale la pena mencionar un teorema fundamental referente a la geometría de un espacio vectorial V. La demostración de dicho teorema es posible con herramientas elementales de álgebra lineal y por esta razón la omitimos, el lector interesado puede consultar [13].

Proposición 1.6. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre K, y B una geometría del mismo. Entonces, se obtiene la siguiente lista completa de formas canónicas para las posibles matrices asociadas a B:

(A) Suponer $K = \mathbb{C}$ y que B es una geometría ortogonal en V. Entonces, existe una base $\{e_i\}$ de V, con la que la matriz asociada a B es de la forma:

$$\mathbb{B} = 1_{n \times n}$$

(B) Suponer $K = \mathbb{R}$ (resp., $\mathbb{C}$) y que B es una geometría ortogonal en V (resp., H una geometría unitaria en V). Entonces, existe una base de V con la que la matriz asociada a B en dicha base es de la forma:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1_{p \times p} & 0 \\ 0 & -1_{q \times q} \end{pmatrix}, \quad p + q = n \tag{2}$$

resp.,

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1_{p \times p} & 0 \\ 0 & -1_{q \times q} \end{pmatrix}, \quad p + q = n. \tag{3}$$

En ambos casos decimos que la geometría tiene signatura (p, q). La notación usual es $\operatorname{sgn} B = (p, q)$ o $\operatorname{sgn} H = (p, q)$.

(C) Si B es una geometría simpléctica en V ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces $n = 2k$, y existe una base de V con la que la matriz asociada a B toma la forma:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1_{k \times k} \\ 1_{k \times k} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

1.1. Los Grupos Clásicos

Definición 1.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K. Denotamos como $GL(V)$ al grupo de transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial V en sí mismo. De igual manera, el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ lo denotamos como $GL_n(K)$.

Al subgrupo de transformaciones lineales (resp. matrices) con determinante igual a uno se le denota como $SL(V)$ (resp. $SL_n(K)$).

Proposición 1.8. Los conjuntos $GL(V)$ y $GL_n(K)$ son grupos isomorfos bajo la composición de transformaciones lineales y el producto de matrices, respectivamente.

Nota 1.9. Nos referiremos indistintamente a los grupos $GL(V)$ y $GL_n(K)$ como *el grupo general lineal*. Y a los subgrupos $SL(V)$ y $SL_n(K)$ como *el grupo especial lineal* indistintamente.

Los grupos actúan (ya sea por la derecha o por la izquierda) en diversos conjuntos.

Definición 1.10. Decimos que un grupo G actúa sobre un conjunto X (por la derecha) si existe una función, $\psi : X \times G \to X$, tal que satisface las siguientes dos propiedades:

$$(i) \quad \psi(x, e) = x, \qquad \forall\, x \in X; \, e \,\text{elemento neutro de } G \tag{5}$$

$$(ii) \quad \psi(\psi(x, g), h) = \psi(x, gh); \qquad \forall x \in X \text{ y } g, h \in G, \tag{6}$$

siendo gh la ley de composición en G.

Al conjunto de todas las formas bilineales de $V \times V$ en K se le denota por $Bil(V)$ y se le puede dar una estructura de espacio vectorial mediante las reglas $(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$ y $(\lambda f)(u,v) = \lambda f(u,v)$ para $f, g \in Bil(V)$, $\lambda \in K$. Observemos que el grupo $GL(V)$ actua por la derecha del conjunto $Bil(V)$. Es decir, hay una función,

$$\varphi : Bil(V) \times GL(V) \to Bil(V) \tag{7}$$

que satisface las propiedades (5) y (6). La función φ está definida por,

$$\varphi(B(\,\cdot\,,\,\cdot\,), g) = B(g(\,\cdot\,), g(\,\cdot\,)), \tag{8}$$

es fácil ver que φ así definida satisface (5) y (6).

Observamos que la acción (7), definida explícitamente en (8), junto con una forma bilineal fija B_0, da lugar a un subrgrupo $G_B(V)$ de $GL(V)$. En general, nos referimos a grupos de este tipo como el subgrupo de isotropía de $GL(V)$ del elemento B_0. En este caso, el grupo de isotropía en B es,

$$G_B = \{g \in GL(V) | B(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = B(g(\,\cdot\,), g(\,\cdot\,))\}$$

Es decir, el grupo de endomorfismos invertibles de V que preservan la geometría B.

Apovechando el isomorfismo que existe entre $Bil(V)$ (resp. $Sesq(V)$) y las matrices $Mat_n(K)$, la acción derecha de $GL(V)$ en $Bil(V)$ (resp. $Sesq(V)$) se puede traducir como la acción derecha de $GL_n(K)$ en $Mat_n(K)$ dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : Mat_n(K) \times GL_n(K) &\to Mat_n(K) \\ (\mathbb{B}, \mathbf{g}) &\mapsto \mathbf{g}^T \mathbb{B} \mathbf{g} \end{aligned}$$

respectivamente, la acción de $GL_n(\mathbb{C})$ sobre $Mat_n(\mathbb{C})$ es:

$$\begin{aligned}\varphi : Mat_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C}) &\to Mat_n(\mathbb{C})\\ (\mathbb{H}, \mathbf{g}) &\mapsto \overline{\mathbf{g}^T}\mathbb{H}\mathbf{g}\end{aligned}$$

Ahora, dependiendo de la geometría B, el grupo $G_B(V)$ se denota de formas diferentes:

Si V es real y tiene una geometría ortogonal con signatura (p, q), G_B se suele denotar por $O(p, q)$ u $O_B(V)$.

Si V es complejo y tiene geometría ortogonal, G_B se suele denotar por $O_n(V)$, siendo $n = \dim V$.

Si V tiene una geometría simpléctica (ya sea real o compleja), G_B se suele denotar por $Sp_{2k}(V)$, siendo $2k$ la dimensión de V.

Si V tiene una geometría unitaria de signatura (p, q), G_B se suele denotar por $U(p, q)$.

A su vez, los elementos de $O(p, q)$, $O_n(V)$, y $U(p, q)$ con determinante 1 forman subgrupos en sus respectivos grupos. Estos se denotan como $SO(p, q)$, $SO_n(V)$ y $SU(p, q)$, respectivamente. Cabe señalar que todos los elementos de un grupo simpléctico tienen determinante igual a 1.

Nota 1.11. Los grupos $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $O(p, q)$, $O_n(V)$, $Sp_{2k}(V)$, $U(p, q)$, $SO(p, q)$ y $SU(p, q)$ son los llamados *grupos clásicos*. Dichos grupos son a su vez ejemplos de *grupos de Lie*. Entrar en las definiciones géometro-diferenciales de lo que es un grupo de Lie está fuera de los objetivos de esta tesis. El lector interesado puede consultar [14]. Básicamente un grupo de Lie es un grupo que tiene estructura de variedad diferenciable (ver la Sección 4.2).

1.2. Álgebras de Lie

Definición 1.12. Un álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$, es un espacio vectorial sobre un campo K con una función bilineal anti-simétrica:

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

usualmente referida como el *corchete de Lie de* $\mathfrak{g}$, que además, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, satisface la identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Ejemplo 1.13. El espacio vectorial $\mathfrak{g} = \operatorname{End} V = \{T : V \to V \mid T \text{ es lineal}\}$, es un álgebra de Lie respecto al corchete definido de la siguiente manera:

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T$$

Esta álgebra de Lie suele denotarse por $\mathfrak{gl}(V)$.

Asimismo, a cada uno de los grupos G_B definidos al final de la sección anterior se les puede asociar un álgebra de Lie de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g}_B = \{X \in \operatorname{End} V | B(X(\,\cdot\,), \,\cdot\,) + B(\,\cdot\,, X(\,\cdot\,)) = 0\}$$

Es fácil probar la siguiente proposición.

Proposición 1.14. Si $X, Y \in \mathfrak{g}_B$, entonces $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{g}_B$.

Al igual que en la sección anterior, a las álgebras de Lie asociadas a geometrías ortogonal, unitaria y simpléctica se les conoce como *álgebras de Lie clásicas* y tienen una representación sencilla en términos de sus matrices asociadas. A saber:

Si B es ortogonal, real y su matriz asociada es de la forma (2),

$$\mathfrak{g}_B \simeq \mathfrak{o}_{p,q} := \left\{ \mathbb{X} \in Mat_n(\mathbb{R}) | \mathbb{X}^T \mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{X} = 0 \right\}$$

Si H es unitaria y su matriz asociada es de la forma (2),

$$\mathfrak{g}_H \simeq \mathfrak{u}_{p,q} := \left\{ \mathbb{X} \in Mat_n(\mathbb{C}) | \bar{\mathbb{X}}^T \mathbb{H} + \mathbb{H}\mathbb{X} = 0 \right\}$$

Si B es simpléctica y su matriz asociada es de la forma (4),

$$\mathfrak{g}_B \simeq \mathfrak{sp}_{2k}(K) := \left\{ \mathbb{X} \in Mat_n(K) | \mathbb{X}^T \mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{X} = 0 \right\}$$

Finalmente, los elementos $X, Y \in \mathfrak{g}_B$ con $trX = trY = 0$ satisfacen que $tr[X, Y] = 0$ y por lo tanto forman un subálgebra de Lie de,

$$\mathfrak{sl}(n) = \left\{ X \in Mat_n(K) | TrX = 0 \right\},$$

la cual a su vez es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$. Dichas subálgebras suelen denotarse por $\mathfrak{so}_{p,q}$ y $\mathfrak{su}_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, respectivamente. Por otra parte, todas las matrices de $\mathfrak{sp}_{2k}(K)$ satisfacen esta condición.

Definición 1.15. Una representación de un grupo G en un espacio vectorial V es una función $\rho : G \to GL(V)$ tal que,

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h); \quad \forall g, h \in G$$

De igual forma, una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V es una función $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que,

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x); \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Observar que el lado derecho se puede escribir en términos del corchete de $\mathfrak{gl}(V)$ como $[\rho(x), \rho(y)]$.

2. Álgebra Tensorial Asociada a un Espacio Vectorial

Proseguimos a definir el producto tensorial de dos o más espacios vectoriales. A partir de esto se construye explícitamente el álgebra tensorial asociada a un espacio vectorial V y se muestra que ésta satisface una propiedad universal. Esto nos permitirá definir más adelante de manera sencilla otras álgebras centrales para este trabajo.

Definición 2.1. Una K-álgebra asociativa, A, es un espacio vectorial sobre un campo K dotado con una función bilineal, $\mu : A \times A \to A$, llamada multiplicación y que satisface la propiedad asociativa,

$$\mu(\mu(u, v), w) = \mu(u, \mu(v, w)). \tag{9}$$

En esta tesis siempre supondremos también que existe un elemento $1_A \in A$ tal que $\mu(1_A, v) = \mu(v, 1_A) = v$ para todo $v \in A$.

Ahora definimos el producto tensorial de dos espacios vectoriales, que resulta ser a su vez un espacio vectorial.

Definición 2.2. Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K. El producto tensorial de U y V es una pareja (T, f) donde T es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : U \times V \to T$ es una función bilineal, tal que si W es un espacio vectorial de dimensión finita y $g : U \times V \to W$ una función bilineal arbitraria, entonces existe una función lineal única $h : T \to W$ tal que $g = h \circ f$. Es decir, que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Es inmediato comprobar que dados dos pares (T, f) y (T', f') con esta propiedad, existe un isomorfismo entre T y T'. Es decir que el producto tensorial es único hasta un isomorfismo. Esto nos permite hablar de *el producto tensorial* de U y V y se denota como $T = U \otimes_K V$ o $U \otimes V$ cuando no hay necesidad de especificar el campo K.

A la función f se le llama función bilineal universal y el diagrama de la definición implica que es suprayectiva. La notación usual para el elemento $f(u, v)$ es $u \otimes v$, para todos $u, v \in V$.

A continuación enunciamos algunas consecuencias inmediatas de la definición anterior. Omitimos las demostraciones pero referimos al lector interesado a [7].

Proposición 2.3. Sean U y V espacios vectoriales sobre K. Entonces,

$$U \otimes V \simeq V \otimes U$$

Proposición 2.4. Sean U,V y W espacios vectoriales sobre K. Entonces, el producto tensorial de espacios vectoriales es asociativo, es decir,

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W).$$

Proposición 2.5. Sean $\{u_1, \cdots, u_n\}$ y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de U y V, respectivamente ($\dim U = n$ y $\dim V = m$). Entonces, el conjunto $\{u_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es base de $U \otimes V$. En particular, $\dim(U \otimes V) = nm$.

Proposición 2.6. Sean U y V espacios vectoriales de dimensión finita sobre K y sea $U^* = \mathrm{Hom}_K(U, K)$; dicho espacio se llama el espacio dual de U. Entonces,

$$\mathrm{Hom}_K(U, V) \simeq U^* \otimes V,$$

siendo $\mathrm{Hom}_K(U, V) = \{T : U \to V \mid T \text{ es lineal}\}$ el espacio vectorial de todas las funciones K-lineales que van de U a V. En particular, observamos que,

$$\mathrm{End}\, V \simeq V^* \otimes V\,.$$

Para ver dicho isomorfismo utilizaremos la propiedad universal del álgebra tensorial. Consideremos las bases $\{u_i^*\}$ y $\{v_j\}$ de U^* y V, respectivamente. Definimos la base de $\mathrm{Hom}_K(U^*, V)$ para la cual sus elementos, $F_{ij} \in \mathrm{Hom}_K(U^*, V)$, satisfacen que $F_{ij}(u_i^*) = v_j$ y cero en cualquier otro caso.

Ahora definimos la función bilineal $g : U^* \times V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$, de forma que $g(u_i^*, v_j) = F_{ij}$. Entonces, la propiedad universal del álgebra tensorial nos garantiza que existe una función $h : U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$ que hace conmutar el diagrama, es decir, $h \circ f = g$, como se muestra a continuación.

$$\begin{tikzcd}
u_i^* \times v_j \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[dr, mapsto, "g"'] & u_i^* \otimes v_j \arrow[d, mapsto, "h"] \\
& F_{ij}
\end{tikzcd}$$

La función g es claramente suprayectiva, por lo que h también. Como la dimensión de ambos espacios es nm, se sigue que h es una biyección, es decir, $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}_K(U, V)$.

Una vez introducido el espacio vectorial dual V^* de un espacio vectorial V de dimensión finita observamos lo siguiente. Si V está equipado con una geometría $B : V \times V \to K$, proporcionaremos dos isomorfismos canónicos entre V y V^* inducidos por la geometría. Dichos isomorfismos nos serán de gran utilidad cuando hagamos la presentación del operador de Hodge del álgebra exterior generada por V y con la geometría inducida en ella a partir de B. El primero de estos isomorfismos es,

$$\begin{aligned} B^\flat : & V \to V^* \\ & v \to B(v, \cdot). \end{aligned}$$

Y efectivamente es fácil ver que se trata de un isomorfismo de espacios vectoriales. El segundo isomorfismo es su aplicación inversa, que denotamos como,

$$\begin{aligned} B^\sharp : & V^* \to V \\ & f \to B^\sharp(f), \end{aligned}$$

y que satisface,

$$B(B^\sharp(f), v) = f(v)\,, \qquad \forall\, v \in V\,.$$

En otras palabras, dada $f \in V^*$ existe un único $u \in V$ tal que $B(u, v) = f(v)$ para todo $v \in V$; a saber, $u = B^\sharp(f)$.

Definición 2.7. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y $k \in \mathbb{N}$, definimos la k-ésima potencia tensorial de V inductivamente, como:

$$\bigotimes{}^k V = V \otimes (\bigotimes{}^{k-1} V) \simeq (\bigotimes{}^{k-1} V) \otimes V$$

con $\bigotimes^1 V = V$. Usando la Proposición 2.5 se prueba fácilmente por inducción que $\dim \bigotimes^k V = n^k$.

Nota 2.8. A los elementos de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ se les llama descomponibles. Una consecuencia de la definición anterior es que éstos generan a $\bigotimes^k V$

Por convención, definimos $\bigotimes^0 V$ como un subespacio de dimensión 1 generado por un elemento, $1_\otimes$, de manera que $\bigotimes^0 V = \{\lambda 1_\otimes \mid \lambda \in K\} \simeq K$

Definición 2.9. El álgebra tensorial de un espacio vectorial V es la suma directa de todas sus potencias tensoriales, $\bigotimes^k V$ con $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\bigotimes V = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigotimes{}^k V$$

Definimos la multplicación en esta álgebra en los elementos descomponibles de tal forma que,

$$\begin{aligned} \mu(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) &= u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \\ \mu(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, 1_{\otimes V}) = \mu(1_{\otimes V}, u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) &= u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \\ \mu(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k, 0) = \mu(0, u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) &= 0, \end{aligned}$$

y la extendemos por bilinealidad.

Claramente la multiplicación μ satisface:

$$\mu(\bigotimes{}^k V, \bigotimes{}^l V) \subset \bigotimes{}^{k+l} V$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

2.1. La Propiedad Universal del Álgebra Tensorial

Es fácil ver que el álgebra tensorial de V posee la siguiente propiedad universal:

Proposición 2.10. Para toda K-álgebra asociativa, A, y una función lineal, $F : V \to A$, existe un único morfismo de álgebras, $\tilde{F} : \bigotimes V \to A$, que extiende a F; es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[dr, hook, "i"'] & A \\ & \bigotimes V \arrow[u, "\tilde{F}"'] \end{tikzcd}$$

donde $i(v) = v \in \bigotimes^1(V)$ para todo $v \in V$. La función lineal $\tilde{F}$ queda determinada de manera única al definir $\tilde{F}(1_\otimes) = 1_A$ y $\tilde{F}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = F(v_1) \cdots F(v_k)$.

Se puede probar que en general, cualquier K-álgebra asociativa, T, junto con una función inyectiva $i : V \to T$, que cumpla con esta misma propiedad, será isomorfa al álgebra tensorial de V; por lo tanto, ésta queda determinada de manera única salvo isomorfismo, [7] . Por esta razón estas propiedades suelen llamarse *universales*.

2.2. Álgebras G-graduadas y su Producto Tensorial

Definición 2.11. Sea G un grupo abeliano. Decimos que el espacio vectorial V (sobre un campo K) es un espacio vectorial G-graduado si, para cada $g \in G$, existe un subespacio, $V_g \subset V$, tal que:

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

Además, existe una aplicación $| \cdot | : \cup(V_g - \{0\}) \to G$ tal que $|v| = g \Leftrightarrow v \in V_g - \{0\}$.

Nota 2.12. A los elementos del dominio de $| \cdot |$ se les llama homogéneos y decimos que $|v| \in G$ es el grado de v.

Nota 2.13. A un espacio $\mathbb{Z}_2$-graduado se le llama súperespacio vectorial.

Definición 2.14. Sea A una K-álgebra asociativa con multiplicación μ_A. Decimos que A es una K-álgebra G-graduada si, como espacio vectorial, es G-graduada y su multiplicación satisface:

$$\mu_A(A_g, A_h) \subset A_{g+h}$$

Ejemplo 2.15. Como podemos ver, el álgebra tensorial de un espacio vectorial V es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada si se define $\bigotimes^{-k} V = \{0\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 2.16. Un factor de conmutación sobre un grupo abeliano G es una aplicación $\epsilon : G \times G \to K - \{0\}$ tal que,

$$\begin{aligned} \epsilon(g+g',h) &= \epsilon(g,h)\epsilon(g',h) \\ \epsilon(g,h+h') &= \epsilon(g,h)\epsilon(g,h') \\ \epsilon(g,h)\epsilon(h,g) &= 1 \end{aligned}$$

para todos $g,h,g',h' \in G$.

Definición 2.17. Sea A una K-álgebra asociativa G-graduada y sea ϵ un factor de conmutación sobre G. Decimos que A conmuta de acuerdo al factor de conmutación ϵ, si para cada par de elementos $a,b \in Dom|\cdot|$, se tiene que:

$$\mu_A(a,b) = \epsilon(|a|,|b|)\mu(b,a).$$

Nota 2.18. Es fácil convencerse de que, para $G = \mathbb{Z}$, hay sólamente dos factores de conmutación distintos,

$$\epsilon(k,l) = \begin{cases} 1 \\ (-1)^{kl} \end{cases}$$

para todos $k,l \in \mathbb{Z}$. Esta misma propiedad se hereda a los grupos cíclicos finitos $\mathbb{Z}_p$.

Ahora veremos que con estas definiciones es posible definir el producto tensorial de dos K-álgebras asociativas G-graduadas de dos maneras diferentes, dependiendo del factor de conmutación elegido.

Proposición 2.19. Sean A y B K-álgebras G-graduadas, asociativas, con unidades 1_A y 1_B y multiplicaciones μ_A y μ_B, respectivamente. Sea ϵ un factor de conmutación fijo. Entonces al espacio vectorial $A \otimes B$ se le puede dotar de un producto asociativo, $\mu_{A\otimes B} : A \otimes B \times A \otimes B \to A \otimes B$, que admite como unidad al elemento $1_A \otimes 1_B \in A \otimes B$, y que en elementos descomponibles homogéneos está dada por,

$$\mu^{\epsilon}_{A\otimes B}(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \epsilon(|b_1|,|a_2|)\mu_A(a_1,a_2) \otimes \mu_B(b_1,b_2)$$

para todos $a_1 \in A, a_2 \in Dom|\cdot|_A$ y $b_1 \in Dom|\cdot|_B, b_2 \in B$.

Es inmediato verificar que $\mu_{A\otimes B}$ es asociativa, distributiva y tiene como elemento neutro a $1_A \otimes 1_B$.

El producto tensorial $A \otimes B$ hereda la graduación sobre G definiendo los subespacios $(A \otimes B)_k = \bigoplus_{\{g,h\in G|g+h=k\}} A_g \otimes B_h$. Por lo tanto, $A \otimes B = \bigoplus_{k\in G}(A \otimes B)_k$.

Nota 2.20. Cuando las graduaciones sean sobre $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_2$ y el factor de conmutación ϵ no sea el trivial, denotaremos por $A\hat{\otimes}B$ al producto tensorial de las álgebras graduadas A y B definido en (2.19).

Veamos cómo, al introducir un factor de conmutación no trivial, cambian totalmente las propiedades algebraicas del álgebra resultante.

Ejemplo 2.21. El álgebra de los números complejos, $\mathbb{C}$, es de manera clara un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada sobre los reales, puesto que para todo $z \in \mathbb{C}$, existen únicos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $z = a + ib$. Entonces, podemos escribir $\mathbb{C} = \{a1 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \oplus \{bi \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ y es inmediato ver que satisface todas las propiedades de un álgebra graduada sobre $\mathbb{Z}_2$.

Vamos a hacer la comparación entre las álgebras $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ y $\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathbb{C}$, utilizando los dos factores de conmutación inducidos por la graduación sobre $\mathbb{Z}_2$.

Como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ está generado por los elementos $1 \otimes 1$, $1 \otimes i$, $i \otimes 1$ y $i \otimes i$. Así, basta calcular las tablas de multiplicación en los generadores para conocer cualquier producto en las álgebras. Cuando el factor de conmutación es el trivial, se tiene la siguiente tabla de multiplicación en los generadores (estamos considerando que $|1| = 0$ y $|i| = 1$):

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$	$1 \otimes 1$	$1 \otimes i$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$
$1 \otimes 1$	$1 \otimes 1$	$1 \otimes i$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$
$1 \otimes i$	$1 \otimes i$	$-1 \otimes 1$	$i \otimes i$	$-i \otimes 1$
$i \otimes 1$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$	$-1 \otimes 1$	$-1 \otimes i$
$i \otimes i$	$i \otimes i$	$-i \otimes 1$	$-1 \otimes i$	$1 \otimes 1$

Es claro de la tabla que se trata de un álgebra conmutativa. Si en cambio, consideramos el producto tensorial con la graduación no trivial, se obtiene que:

$\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathbb{C}$	$1 \otimes 1$	$1 \otimes i$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$
$1 \otimes 1$	$1 \otimes 1$	$1 \otimes i$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$
$1 \otimes i$	$1 \otimes i$	$-1 \otimes 1$	$-i \otimes i$	$i \otimes 1$
$i \otimes 1$	$i \otimes 1$	$i \otimes i$	$-1 \otimes 1$	$-1 \otimes i$
$i \otimes i$	$i \otimes i$	$-i \otimes 1$	$1 \otimes i$	$-1 \otimes 1$

En esta otra tabla observamos que el producto de los generadores entre sí obedece las mismas relaciones que el producto de los elementos de la base de los cuaternios. En otras palabras, ésta es un álgebra no conmutativa y $\mathbb{C}\hat{\otimes}\mathbb{C} \simeq \mathbb{H}$.

3. Construcción de K-álgebras a Partir del Álgebra Tensorial

En este capítulo definimos los conceptos necesarios para construir las principales álgebras que utilizaremos en la segunda parte de este trabajo. Para eso es necesario introducir el concepto de ideal bilateral y espacio cociente, que posteriormente se utilizan para motivar la construcción de dichas álgebras en términos de propiedades universales. Con ayuda del concepto de álgebra filtrada y la graduación natural que heredan algunas de éstas del álgebra tensorial, señalaremos las similitudes y las diferencias entre ellas.

Definición 3.1. Un subconjunto $I \subset A$ de una K-álgebra es un ideal bilateral si es un subgrupo aditivo de A y satisface que,

$$\forall r \in A \quad \text{e} \quad i \in I, \qquad ir \in I \quad \text{y} \quad ri \in I$$

Es inmediato comprobar que la intersección de ideales bilaterales es nuevamente un ideal bilateral. También es inmediato verificar que si F es un morfismo de álgebras, entonces $\ker F$ es un ideal bilateral. Además, es posible demostrar el recíproco de este resultado; es decir, todo ideal bilateral de una K-álgebra es el kernel de alguna función apropiadamente definida, como a continuación se explica.

Definición 3.2. Sea A una K-álgebra y sea $I \subset A$ un ideal bilateral. Entonces, para cada $a \in A$, a los conjuntos de la forma

$$[a] = \{a + i | i \in I\},$$

se les llama clases laterales de A módulo I. Dos elementos, $a, b \in A$, están en la misma clase lateral si, y sólo si, $a - b \in I$. Al conjunto de todas las clases laterales se le llama espacio cociente y se le denota como,

$$A/I = \{[a] | a \in A\}$$

Proposición 3.3. Sea A una K-álgebra e $I \subset A$ un ideal bilateral. Entonces,

(1) El conjunto A/I es una K-álgebra con las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$[a][b] = [ab] \quad \text{y} \quad [a] + [b] = [a + b], \quad \forall a, b \in A.$$

(2) La función $\pi : A \to A/I$ que asocia a cada $a \in A$ con su clase lateral, es decir $\pi(a) = [a]$, es un epimorfismo de K-álgebras tal que $\ker \pi = I$. A π se le conoce como proyección canónica de A en A/I.

Supongamos que $[a_1] = [a_2]$. Esto ocurre si, y sólo si $a_1 - a_2 \in I$. Luego, para todo $b \in A$, $a_1 b - a_2 b \in I$, $ba_1 - ba_2 \in I$ y $(a_1 + b) - (a_2 + b) \in I$. Por lo tanto, la suma y la multiplicación están bien definidas.

La segunda parte de la proposición es consecuencia inmediata de la primera parte.

Nota 3.4. Consideremos $0_A \in A$, entonces $[a]+[0_A] = [0_A]+[a] = [a+0_A] = [a]$, entonces $[0_A] \in A/I$ es el neutro aditivo de la K-álgebra, es decir, $[0_A] = I$. De la misma forma, la clase lateral de $1_A \in A$ es el neutro multiplicativo.

Este mismo resultado suele presentarse con un enfoque ligeramente distinto, como en la siguiente proposición donde se da por hecho que el kernel de un morfismo de K-álgebras es un ideal bilateral.

Proposición 3.5. Sean A y B dos K-álgebras asociativas y $\varphi : A \to B$ un morfismo de K-álgebras. Entonces $\operatorname{Im}\varphi$ es una K-álgebra asociativa y la función $\mu : A/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$, dada por $\mu([a]) = \varphi(a)$, es un isomorfismo. En otras palabras, en términos de la proyección canónica, π, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\ker\varphi \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Definición 3.6. El ideal generado por un conjunto X es la intersección de todos los ideales que lo contienen y se denota por $I(X)$.

La definición anterior supone probar que la intersección arbitraria de ideales es un ideal. Consideremos una familia $\{I_\alpha\}$ de ideales bilaterales con $\alpha \in \Lambda$ un conjunto arbitrario. Entonces, si $i \in \cap I_\alpha$, para todo $r \in A$, se tiene que $ir \in \cap I_\alpha$ y $ri \in \cap I_\alpha$, pues tanto ri como ir están en cada uno de los ideales. Por lo tanto $\cap I_\alpha$ es un ideal bilateral.

Nota 3.7. De la definición anterior es claro que $I(X)$ es el ideal más pequeño que contiene a X. Entonces, $I(X)$ debe consistir en todas las sumas finitas de los elementos de la forma rxs, donde r y s son elementos arbitrarios de la K-álgebra y $x \in X$.

Definición 3.8. Sea A una K-álgebra y V un espacio vectorial sobre el campo K. Entonces, una función lineal $F : V \to A$ es,

anti-simétrica si,

$$F(u)F(v) = -F(v)F(u), \tag{10}$$

simétrica si,

$$F(u)F(v) = F(v)F(u), \tag{11}$$

para todo $u, v \in V$. Si además V está equipado con una geometría B, entonces una función lineal $F : V \to A$ es,

de Clifford si,

$$F(u)F(v) = -F(v)F(u) + 2B(u,v)1_A, \quad B \text{ geometría ortogonal,} \tag{12}$$

de Weyl si,

$$F(u)F(v) = F(v)F(u) + 2B(u,v)1_A, \quad B \text{ geometría simpléctica}, \tag{13}$$

para todo $u, v \in V$.

Así como se vio que el álgebra tensorial se puede definir en términos de su propiedad universal, es posible definir el álgebra exterior, el álgebra simétrica, el álgebra de Clifford y el álgebra de Weyl de la misma forma, empleando una propiedad universal apropiada en cada caso.

Definición 3.9. Sea V un espacio vectorial sobre K. Entonces, para toda K-álgebra asociativa, A, y toda función $F : V \to A$ que satisfaga alguna de las condiciones enunciadas en la Definición 3.8, existe una K-álgebra asociativa, $A(V)$ (resp., $A(V,B)$ cuando V esté equipado con una geometría B), única hasta isomorfismo, y un único morfismo de álgebras $\tilde{F} : A(V) \to A$ (resp., $\tilde{F} : A(V,B) \to A$), que extiende a F; es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ A(V) \arrow[ur, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

resp.,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ A(V,B) \arrow[ur, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la función lineal $i : V \to A(V)$ (resp., $i : V \to A(V,B)$) es inyectiva y satisface la misma propiedad de la Definición 3.8 que F.

Si i y F son funciones anti-simétricas, escribimos $A(V) = \Lambda V$ y llamamos a ésta el *álgebra exterior* de V.

Si i y F son funciones simétricas, escribimos $A(V) = \mathrm{S}(V)$ y llamamos a ésta el *álgebra simétrica* de V.

Si V tiene una geometría ortogonal, B, e i y F son funciones de Clifford, escribimos $A(V,B) = \mathrm{Cl}(V,B)$ y llamamos a ésta el *álgebra de Clifford* de V con la geometría B.

Si V tiene una geometría simpléctica, B, e i y F son funciones de Weyl, escribimos $A(V,B) = \mathrm{W}(V,B)$ y llamamos a ésta el *álgebra de Weyl* de V con la geometría B.

Una manera de ver que estas K-álgebras existen es construyéndolas *ad-hoc*, a partir del álgebra tensorial, como cocientes de la forma $\otimes V/I$ por ideales bilaterales apropiados y luego verificar que satisfacen sus respectivas propiedades universales.

Consideremos el siguiente diagrama, en el que utilizamos la propiedad universal del álgebra tensorial asociada a V y la Proposición 3.5:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "F"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi\circ i"'] & \\
\otimes V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & A \\
\otimes V/\ker f \arrow[ur, "\tilde{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí f es el morfismo de álgebras que extiende a F y $\tilde{F}$ el inducido de acuerdo a 3.5. Entonces, si F es, por ejemplo, anti-simétrica, tendremos que,

$$F(u)F(v) + F(v)F(u) = f(i(u) \otimes i(v) + i(v) \otimes i(u)) = 0,$$

para todo $u, v \in V$. Dado que $\ker f$ es un ideal, éste contiene al ideal generado por todos los elementos de esta forma; es decir, $I(i(u)\otimes i(v)+i(v)\otimes i(u)) \subseteq \ker f$.

Esto ocurre para cualquier función anti-simétrica. Esto significa que la intersección de todos los ideales $\ker f$ asociados cada uno a alguna función F, será precisamente el ideal generado por los elementos de la forma $i(u) \otimes i(v) + i(v) \otimes i(u)$. De forma análoga, es posible encontrar los ideales que satisfacen propiedades equivalentes en los casos en que F satisfaga alguna de las otras propiedades en la Definición 3.9.

La similitud entre la parte externa del diagrama y las propiedades universales en la Definición 3.9 motivan la siguiente proposición.

Proposición 3.10. Sea V un espacio vectorial sobre K y $\bigotimes V$ su álgebra tensorial. Entonces, las K-álgebras,

$$\begin{aligned}
\Lambda V &= \bigotimes V/I(\{u \otimes v + v \otimes u | u, v \in V\}) \\
\mathrm{S}(V) &= \bigotimes V/I(\{u \otimes v - v \otimes u | u, v \in\}V) \\
\mathrm{Cl}(V, B) &= \bigotimes V/I(\{u \otimes v + v \otimes u - 2B(u, v)1_{\otimes} | u, v \in V\}) \\
\mathrm{W}(V, B) &= \bigotimes V/I(\{u \otimes v - v \otimes u - 2B(u, v)1_{\otimes} | u, v \in V\})
\end{aligned}$$

son soluciones de sus respectivos diagramas universales planteados en la Definición 3.9, donde los neutros multiplicativos $1_{A(V,B)}$ están definidos como la imagen de la unidad en el álgebra tensorial bajo las respectivas proyecciones canónicas, según sea el caso.

Es fácil verificar que cada una de estas álgebras es solución a su problema universal y que el morfismo que inducen está bien definido. Esto debido a que los ideales que se utilizan dependen únicamente de elementos en $\bigotimes^k V$ con $k = 0$ o $k = 2$.

Por esta misma razón, la correspondiente proyección canónica, $\pi : \bigotimes V \to \bigotimes V/I(X)$, transforma a $\bigotimes^1(V)$ en un subespacio de $\bigotimes V/I(X)$ isomorfo a V.

En consecuencia, escribiremos $\pi_{A(V)}(i(v)) = v$ o $\pi_{A(V,B)}(i(v)) = v$ para todo $v \in V$. De forma análoga K queda contenido en cada una de las K-álgebras como la proyección de $\bigotimes^0 V$.

Nota 3.11. Para simplificar la notación, de ahora en adelante escribiremos a los elementos generadores de cada una de estas K-álgebras utilizando únicamente sus subíndices, es decir,

$$\pi_{A(V)}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1 \cdots i_k}$$
$$\pi_{A(V,B)}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = e_{i_1 \cdots i_k}.$$

3.1. Graduaciones y Filtraciones

Dado que el álgebra tensorial de V es una K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, esta graduación se hereda al álgebra simétrica y al álgebra exterior usando sus respectivas proyecciones:

$$\Lambda^k V = \pi_\Lambda(\bigotimes{}^k V)$$
$$S^k(V) = \pi_{\mathrm{S}}(\bigotimes{}^k V)$$

y las llamamos k-ésima potencias exterior y simétrica respectivamente. Es inmediato comprobar que $S^0(V) \simeq \Lambda^0 V \simeq K$ y $S^1(V) \simeq \Lambda^1 V \simeq V$.

Proposición 3.12. Las álgebras exterior y simétrica asociadas a un espacio vectorial, V, son $\mathbb{Z}$-graduadas, y además,

$$\Lambda V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^k V \qquad \mathrm{S}(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S^k(V)$$

La razón por la cual esta graduación no se hereda a $\mathrm{Cl}(V,B)$ y $\mathrm{W}(V,B)$ es que no se cumple que $Cl^i(V,B)Cl^j(V,B) \subseteq Cl^{i+j}(V,B)$ ni $W^i(V,B)W^j(V,B) \subseteq W^{i+j}(V,B)$, debido a que al multiplicar dos elementos en éstas es posible que el grado disminuya. A pesar de esto, bajo ciertas restricciones, es posible garantizar que el producto de elementos de grados i y j, sí tenga por resultado un elemento de grado $i+j$. Entonces estas K-álgebras poseen una propiedad más débil que ser graduadas:

Definición 3.13. Una filtración de una K-álgebra, A, es una sucesión de subespacios $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A$, tal que, $A = \bigcup A_i$ y $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todos $0 \leq i, j$. En caso de que exista una filtración, decimos que A es una K-álgebra filtrada.

Nota 3.14. Claramente toda K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada tendrá una filtración natural dada por su graduación de la siguiente manera: $A_k = \bigoplus_{j \leq k} A^j$.

Ejemplo 3.15. Como ejemplo consideremos el álgebra de Clifford y de Weyl asociadas a un espacio vectorial V. En cada caso, pese a que éstas no heredan la graduación de $\bigotimes V$, es posible definir una filtración en ellas. Para esto consideremos la filtración que aparece naturalmente en el álgebra tensorial:

$$T_s = \bigoplus_{r \leq s} \bigotimes^r V.$$

Si definimos $\mathrm{Cl}_r = \pi_{\mathrm{Cl}}(T_r)$ y $\mathrm{W}_r = \pi_{\mathrm{W}}(T_r)$ obtenemos filtraciónes $\mathrm{Cl}_0 \subseteq \mathrm{Cl}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Cl}(V,B)$ y $\mathrm{W}_0 \subseteq \mathrm{W}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{W}(V,B)$ de ambas K-álgebras con la propiedad de que,

$$\mathrm{Cl}_r \cdot \mathrm{Cl}_s \subseteq \mathrm{Cl}_{r+s} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{W}_r \cdot \mathrm{W}_s \subseteq \mathrm{W}_{r+s}\,.$$

Es decir que $\mathrm{Cl}(V,B)$ y $\mathrm{W}(V,B)$ son K-álgebras filtradas.

Definición 3.16. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y U un subespacio del mismo. Entonces, para todo $v \in V$, a los conjuntos de la forma,

$$[v] = \{v + u | u \in U\},$$

se les llama clases laterales de V módulo U. Al conjunto de todas las clases laterales se le llama espacio cociente y se denota como V/U. Al igual que en el caso del espacio cociente de una K-álgebra módulo un ideal bilateral, el espacio cociente hereda una estructura de espacio vectorial. Asimismo, existe un epimorfismo, $\pi : V \to V/U$, dado por $\pi(v) = [v]$ tal que $\ker \pi = U$.

En general, es posible construir una K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada a partir de una K-álgebra filtrada, A. Consideremos la filtración $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A$ y los espacios cociente de la forma,

$$\mathcal{G}_r = A_r / A_{r-1}$$

para $1 \leq r$ y $\mathcal{G}_0 = A_0$. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{G}(A) = \bigoplus \mathcal{G}_r$ obtiene estructura de K-álgebra definiendo la siguiente multiplicación en los espacios cociente:

$$[x][y] = [xy] \qquad \forall x \in A_r \text{ y } y \in A_s$$

Esta multiplicación está bien definida y dota a $\mathcal{G}(A)$ con estructura de K-álgebra. Además, es inmediato hacer de ésta una K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada definiendo $\mathcal{G}_r = \{0\}$ para $r < 0$.

Sintetizamos la construcción anterior en la siguiente proposición, que además nos da información valiosa sobre la conexión entre la K-álgebra filtrada, A, y su K-álgebra graduada asociada, $\mathcal{G}(A)$.

Proposición 3.17. Sea A una K-álgebra con filtración $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A$. Entonces,

$$\mathcal{G}(A) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_r$$

es una K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con los espacios $\mathcal{G}_r = A_r/A_{r-1}$. Además, $\mathcal{G}(A)$ es isomorfa como espacio vectorial, a A, bajo la proyección, $\pi(a) = [a] \in A_r/A_{r-1}$ con $a \in A_r$ y $a \notin A_{r-1}$, [1].

3.2. $\mathbb{Z}_2$-graduación de $\mathrm{W}(V,B)$ y $\mathrm{Cl}(V,B)$

Como ya explicamos, las álgebras de Weyl y de Clifford no son $\mathbb{Z}$-graduadas, sin embargo, como vamos a mostrar, poseen una graduación sobre un grupo abeliano más pequeño, a saber, $\mathbb{Z}_2$. En esta sección utilizaremos la notación $A(V,B)$ para denotar a cualquiera de las dos K-álgebras en cuestión.

Consideremos la función $\theta : V \to A(V,B)$, tal que $\theta(v) = -v$ para cualquier $v \in V$. Entonces existe un único automorfismo, $\Theta : A(V,B) \to A(V,B)$, que extiende a θ, es decir, que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, hook] & A(V,B) \\
A(V,B) \arrow[ur, "\Theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Es fácil verificar que $\Theta^2 = id$ y por lo tanto el polinomio mínimo de Θ, como endomorfismo del espacio vectorial subyacente a $A(V,B)$, es $x^2 - 1$. En particular, Θ tiene únicamente dos valores propios diferentes: $\lambda_{\pm} = \pm 1$. Entonces podemos descomponer a $A(V,B)$ como la suma directa de los dos espacios propios correspondientes a los dos valores propios. Denotaremos al subespacio correspondiente a $\lambda_{-} = -1 = (-1)^1$ con el subíndice 1, y al correspondiente a $\lambda_{+} = 1 = (-1)^0$ con el subíndice 0; es decir,

$$A(V,B) = A(V,B)_0 \oplus A(V,B)_1,$$

Considerando $i, j \in \mathbb{Z}_2$, se puede verificar que $A_i(V,B)A_j(V,B) \subseteq A_{i+j}(V,B)$. Además es claro que $K \subset A(V,B)_0$ y $V \subset A(V,B)_1$.

3.3. Relación entre $\mathrm{S}(V)$ y $\mathrm{W}(V,B)$

Al producto de elementos en las álgebras simétrica y de Weyl de un espacio vectorial V, se les llama producto simétrico y de Weyl respectivamente. En este trabajo ambos productos los escribiremos igual, pero el contexto hará claro con cuál de los dos estaremos trabajando sin riesgo a confusión. Así, escribiremos,

$$\begin{aligned}
uv &= \pi_{\mathrm{S}}(u)\pi_{\mathrm{S}}(v) = \pi_{\mathrm{S}}(u \otimes v) \\
uv &= \pi_{\mathrm{W}}(u)\pi_{\mathrm{W}}(v) = \pi_{\mathrm{W}}(u \otimes v),
\end{aligned}$$

para todos $u, v \in V$. Más generalmente,

$$\begin{aligned}
u_1 u_2 \cdots u_n &= \pi_{\mathrm{S}}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n) \\
u_1 u_2 \cdots u_n &= \pi_{\mathrm{W}}(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n),
\end{aligned}$$

para todos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$.

Nota 3.18. A partir de las observaciones anteriores es inmediato verificar que el álgebra simétrica posee un factor de conmutación trivial.

Comenzamos el estudio de algunas de las propiedades que tienen en común ambas K-álgebras.

Proposición 3.19. Los espacios vectoriales subyacentes del álgebra simétrica, $\mathrm{S}(V)$, y del álgebra de Weyl, $\mathrm{W}(V,B)$, son isomorfos. De hecho, la K-álgebra $\mathcal{G}(\mathrm{W}(V,B))$ es isomorfa a $\mathrm{S}(V)$.

Proposición 3.20. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K con $\dim V = n$. Entonces, cada una de las potencias simétricas, $S^k(V)$ de V, son un subespacio vectorial de $\mathrm{S}(V)$ y considerando una base $\{e_i\}$ de V, cada una de dichas potencias es de la forma:

$$S^k(V) = \mathrm{Span}\{\pi_{\mathrm{S}}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) | i_j = 1, \ldots, n\}$$

Dado que en el álgebra simétrica se tiene que $uv = vu$ para cualesquiera $u, v \in V$, se llega a que $\{\pi_{\mathrm{S}}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) | 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$ es una base de $S^k(V)$, por lo tanto,

$$\dim S^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$$

3.4. Relación entre ΛV y $\mathrm{Cl}(V,B)$

Antes de comenzar propiemante el estudio de las propiedades de dichas K-álgebras, es importante introducir un poco de notación. Al producto de elementos en el álgebra exterior de un espacio vectorial V, se le llama producto cuña, en generadores $u, v, \in V$, se denota como,

$$u \wedge v = \pi_\Lambda(u) \wedge \pi_\Lambda(v) = \pi_\Lambda(u \otimes v), \qquad \forall\, u, v \in V.$$

En el caso del álgebra de Clifford el producto lo escribiremos simplemente como,

$$uv = \pi_{\mathrm{Cl}}(u)\pi_{\mathrm{Cl}}(v) = \pi_{\mathrm{Cl}}(u \otimes v), \qquad \forall\, u, v \in V,$$

y, en general, para cualesquiera $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$,

$$\begin{aligned} u_1 \wedge \cdots \wedge u_n &= \pi_\Lambda(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \\ u_1 \cdots u_n &= \pi_{\mathrm{Cl}}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n). \end{aligned}$$

Nota 3.21. A partir de las observaciones anteriores es inmediato verificar que el álgebra exterior posee un factor de conmutación no trivial, a saber, $\epsilon(i,j) = (-1)^{ij}$.

Comenzamos el estudio de algunas de las propiedades que tienen en común ambas K-álgebras.

Proposición 3.22. Los espacios vectoriales subyacentes del álgebra exterior, ΛV, y el álgebra de Clifford, $\mathrm{Cl}(V,B)$, son isomorfos. De hecho, la K-álgebra $\mathcal{G}(\mathrm{Cl}(V,B))$ es isomorfa a ΛV.

Proposición 3.23. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K con $\dim V = n$. Entonces, las potencias exteriores, $\Lambda^k V$, de V, son un subespacio vectorial de ΛV y considerando una base $\{e_i\}$ de V, cada una de dichas potencias es de la forma:

$$\Lambda^k V = \mathrm{Span}\{\pi_\Lambda(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) | i_j = 1, \ldots, n\}$$

Sin embargo, observemos que en el caso del álgebra exterior, se tiene que $\pi(u \otimes v) = u \wedge v = -v \wedge u$ para todas $u, v \in V$, por lo tanto $u \wedge u = 0 \in \Lambda^0 V$ para todo vector $u \in V$. Esto implica que $\{\pi_{\Lambda V}(e_{i_1}) \cdots \pi_{\Lambda V}(e_{i_k}) | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k V$, por lo tanto,

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k},$$

Dado que ΛV y $\mathrm{Cl}(V, B)$ son espacios vectoriales isomorfos, si V $= n$, entonces, la dimensión de ambos espacios es 2^n.

Nota 3.24. Una parte fundamental del presente trabajo se basa en aprovechar el isomorfismo de espacios vectoriales que hay entre ΛV y $\mathrm{Cl}(V, B)$ para transformar operadores lineales del álgebra exterior al álgebra de Clifford, y más generalmente, operadores sobre funciones $V \to \Lambda V$ a operadores sobre funciones $V \to \mathrm{Cl}(V, B)$. Dos hechos importantes a tener en cuenta que resultan de las propiedades universales de las álgebras exterior y de Clifford, respectivamente, son los siguientes:

(a) Si $T \in GL(V)$, entonces T se extiende a un automorfismo $\hat{T}$ del álgebra ΛV que ,restringido al subespacio $\Lambda^n V$, corresponde a multiplicar por $\det T \neq 0$:

$$\hat{T}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = T(e_1) \wedge \cdots \wedge T(e_n) = \det T \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \, .$$

(b) Si B es una geometría ortogonal en V y $T \in O_B(V)$, entonces T se extiende a un automorfismo $\hat{T}$ del álgebra $\mathrm{Cl}(V, B)$ que, restringido al subespacio generado por 1_{Cl} y $\Gamma = e_1 \cdots e_n$, es multiplicar por por $\det T$, que en este caso es igual a ± 1. En particular, si ξ y ζ son elementos de $\mathrm{Cl}(V, B)$ y satisfacen que $\xi \, \zeta \in \mathrm{Span}\{\Gamma\}$ y $T \in O_B(V)$. Entonces,

$$\hat{T}(\xi \, \zeta) = \pm \xi \, \zeta \, .$$

En otras palabras, el producto permanece esencialmente invariante ante las transformaciones inducidas en $\mathrm{Cl}(V, B)$ por los elementos del grupo ortogonal $O_B(V)$.

4. El Álgebra Exterior

Los objetivos de esta sección son presentar algunas propiedades importantes del álgebra exterior y definir dos operadores fundamentales en su estudio: el operador de Hodge y la derivada exterior. Estos operadores convierten al álgeba exterior en una herramienta poderosa en diferentes áreas de la matemática y, sorprendentemente, sirven para obtener valiosa información geométrica del espacio vectorial asociado. Dicha información geométrica se traduce, como veremos en las secciones siguientes, en las ecuaciones de Cauchy-Riemann y un modelo clásico del electromagnetismo en el espacio tiempo de Minkowski, entre otros casos.

Primero, obsevemos que el álgebra exterior, como K-álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, tiene un factor de conmutación no trivial. Esto queda expresado en la siguiente proposición, cuya prueba es inmediata al considerar su construcción.

Proposición 4.1. Sean $\eta \in \Lambda^k V$ y $\xi \in \Lambda^l V$ tales que $|\eta| = k$ y $|\xi| = l$, entonces el factor de conmutación del álgebra, $\epsilon : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to K - \{0\}$, es el no trivial y $\eta \wedge \xi = (-1)^{kl} \xi \wedge \eta$.

La siguiente proposición será de gran importancia en los siguientes capítulos.

Proposición 4.2. Sea V un espacio vectorial con una geometría ortogonal $B : V \times V \to K$ de signatura $\operatorname{sgn} B = (p, q)$. Entonces, la función lineal $\Lambda^2 V \to \mathfrak{o}_{p,q}$ definida en elementos descomponibles como

$$v \wedge w \mapsto B(v, \cdot\,)w - B(w, \cdot\,)v,$$

para todos $v, w \in V$, es un isomorfismo.

Primero veamos que dicha función está bien definida; es decir, que $B(v, \cdot\,)w - B(w, \cdot\,)v$ es un elemento de $\mathfrak{o}_{p,q}$ para cualquier par de vectores $v, w \in V$. Consideremos dos vectores arbitrarios, $x, y \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} &B(B(v,x)w - B(w,x)v, y) + B(x, B(v,y)w - B(w,y)v) = \\ &B(B(v,x)w, y) - B(B(w,x)v, y) + B(x, B(v,y)w) - B(x, B(w,y)v) = \\ &B(v,x)B(w,y) - B(w,x)B(v,y) + B(v,y)B(x,w) - B(w,y)B(x,v) = 0 \end{aligned}$$

por la simetría de B.

Ahora, puesto que $\dim \Lambda^2 V = \frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathfrak{o}_{p,q}$, basta ver que la función que hemos definido es inyectiva para que sea un isomorfismo. Consideremos a $v, w \in V$ distintos de cero, entonces si $B(v, \cdot\,)w - B(w, \cdot\,)v = 0$, dado que B es no degenerada, existe por lo menos un $x \in V$ para el cual $B(v, x) \neq 0$. De forma que $w = \frac{B(w,x)}{B(v,x)} v$ y los vectores v y w son linealmente dependientes, o equivalentemente $v \wedge w = 0$.

A su vez este isomorfismo se traduce en un isomorfismo sobre el subespacio $\operatorname{Span}\{e_i e_j \mid e_i \wedge e_j \neq 0\} \subset \operatorname{Cl}(p, q)$, donde $\{e_i\}$ es la base de V que lleva a B a su forma canónica.

Observemos que si el espacio V está dotado de una geometría, B, ésta induce una geometría $\hat{B}$ en ΛV. Veamos los detalles.

Proposición 4.3. Sea V un espacio vectorial dotado de una geometría ortogonal B. Entonces, para todo $u_i, v_j \in V$, la función bilineal $\hat{B} : \Lambda V \times \Lambda V \to K$ definida de la siguiente manera:

$$\hat{B}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_l) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ \det(B(u_i, v_j)) & \text{si } k = l \end{cases} \tag{14}$$

es una geometría ortogonal de ΛV.

Nota 4.4. Si V tiene una geometría unitaria H, se puede hacer lo mismo para dotar a ΛV con una geometría unitaria $\hat{H}$. Sin embargo, esto no funciona igual en el caso simpléctico.

Ejemplo 4.5. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con una geometría ortogonal de signatura $\operatorname{sgn} B = (3, 1)$. En este caso $dim \Lambda \mathbb{R}^4 = 2^4 = 16$, entonces la matriz asociada a $\hat{B}$ será de dimensión 16×16 y un cálculo sencillo muestra que $\operatorname{sgn} \hat{B} = (8, 8)$.

Como último resultado, presentamos una proposición que será fundamental para la caracterización de las álgebras de Clifford.

Proposición 4.6. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre el mismo campo. Entonces,

$$\Lambda(V_1 \oplus V_2) \simeq \Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2$$

El resultado es inmediato utilizando la propiedad universal del álgebra exterior. Al considerar bases $\{u_i\}$ y $\{w_j\}$ de V_1 y V_2 respectivamente, la base de $V_1 \oplus V_2$ es $\{u_i\} \cup \{w_j\}$. Se define la función lineal $F : V_1 \oplus V_2 \to \Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2$ de tal forma que $F(u_i) = u_i \otimes 1$ y $F(w_j) = 1 \otimes w_j$. Se comprueba que el morfismo $\tilde{F} : \Lambda(V_1 \oplus V_2) \to \Lambda V_1 \otimes \Lambda V_2$ que extiende a F es un isomorfismo.

4.1. Operador de Hodge Asociado a una Geometría

Ahora proseguimos a definir un operador fundamental en el estudio del álgebra exterior de un espacio vectorial con una geometría ortogonal dada. Si fijamos un elemento $\alpha \in \Lambda^k V$, podemos definir una transformación lineal de $\Lambda^{n-k} V$ en $\Lambda^n V$ dada por $\mu \mapsto \alpha \wedge \mu$ con $\mu \in \Lambda^{n-k} V$.

Como $\Lambda^n V$ es un espacio unidimensional y estamos fijando $\alpha \in \Lambda^k V$, podemos escribir

$$\mu \mapsto \alpha \wedge \mu = f_\alpha(\mu) e,$$

con $f_\alpha(\mu) \in K$ y una elección, e, de base para $\Lambda^n V$. Una tal elección corresponde a una elección de orientación en V.

Es fácil ver que, en realidad, $f_\alpha \in (\Lambda^{n-k} V)^*$. Usando la geometría $\hat{B}$ inducida en el álgebra exterior de V, concluimos que existe un único elemento, $\hat{B}^\sharp(f_\alpha) \in \Lambda^{n-k} V$ que satisface,

$$\mu \mapsto \alpha \wedge \mu = \hat{B}(\hat{B}^\sharp(f_\alpha), \mu) e.$$

La notación usual para $\hat{B}^\sharp(f_\alpha)$ es $*\alpha$. En particular, esto define otra aplicación lineal, $\Lambda^k V \ni \alpha \mapsto *\alpha \in \Lambda^{n-k}V$, que se puede extender linealmente a un operador de ΛV en sí misma; a dicho operador se le conoce como operador (estrella) de Hodge.

Proposición 4.7. Sea V un espacio vectorial con una geometría ortogonal, B, con signatura (p, q). Entonces para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^k V$ se tiene que:

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \hat{B}(\alpha, \beta)e \tag{15}$$

$$* * \alpha = (-1)^q(-1)^{k(n-k)}\alpha \tag{16}$$

$$\hat{B}(\alpha, \beta) = (-1)^q \hat{B}(*\alpha, *\beta) \tag{17}$$

La ecuacion (15) de la proposición anterior nos da una forma de calcular explícitamente el operador de Hodge de cualquier elemento en ΛV, como veremos en el siguiente ejemplo. Asimismo, calcular el inverso del operador de Hodge, restringido a cada subespacio $\Lambda^k V$, es inmediato utilizando (16):

$$*^{-1} = (-1)^q(-1)^{k(n-k)}* \tag{18}$$

Ejemplo 4.8. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{3,1}$ (es decir, $\mathbb{R}^4$ con una geometría de signatura $(3, 1)$) y la base canónica del mismo, $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, para la cual $B(e_0, e_0) = -1$ y $B(e_i, e_i) = 1$ si $i = 1, 2$ o 3. Dado que el operador de Hodge es lineal, basta encontrar su valor en los elementos de la base de $\Lambda\mathbb{R}^{3,1}$. Fijamos la siguiente base:

$$\begin{aligned}
\Lambda^0\mathbb{R}^{3,1} &= \mathrm{Span}\{1_{\Lambda V}\}\\
\Lambda^1\mathbb{R}^{3,1} &= \mathrm{Span}\{e_0, e_1, e_2, e_3\}\\
\Lambda^2\mathbb{R}^{3,1} &= \mathrm{Span}\{e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2\}\\
\Lambda^3\mathbb{R}^{3,1} &= \mathrm{Span}\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_0 \wedge e_2 \wedge e_3, e_0 \wedge e_3 \wedge e_1, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\}\\
\Lambda^4\mathbb{R}^{3,1} &= \mathrm{Span}\{e = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}
\end{aligned}$$

Calculemos su operador de Hodge:

$$\begin{aligned}
1_{\Lambda V} \wedge *1_{\Lambda V} &= \hat{B}(1_{\Lambda V}, 1_{\Lambda V})e = e \Rightarrow *1_{\Lambda V} = e\\
e_0 \wedge *e_0 &= \hat{B}(e_0, e_0)e = -e \Rightarrow *e_0 = -e_{123}\\
e_1 \wedge *e_1 &= \hat{B}(e_1, e_1)e = e \Rightarrow *e_1 = -e_{023}\\
e_2 \wedge *e_2 &= \hat{B}(e_2, e_2)e = e \Rightarrow *e_0 = -e_{031}\\
e_3 \wedge *e_3 &= \hat{B}(e_3, e_3)e = e \Rightarrow *e_0 = -e_{012}\\
e_{0i} \wedge *e_{0i} &= \hat{B}(e_{0i}, e_{0i})e = -e \Rightarrow *e_{0i} = -e_{jk}\\
e_{jk} \wedge *e_{jk} &= \hat{B}(e_{jk}, e_{jk})e = e \Rightarrow *e_{jk} = e_{0i}
\end{aligned}$$

donde $(i, j, k) \in A_3 = S_3/\mathbb{Z}_2 = \{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\}$, el grupo de permutaciones pares de $(1, 2, 3)$.

Para calcular el operador de Hodge de los demás elementos utilizamos la ecuación (16):

$$\begin{aligned}
*e &= **1_{\Lambda V} = -(-1)^{0(4-0)}1_{\Lambda V} = -1_{\Lambda V} \\
*e_{123} &= -**e_0 = (-1)^{1(4-1)}e_0 = -e_0 \\
*e_{023} &= -**e_1 = (-1)^{1(4-1)}e_1 = -e_1 \\
*e_{031} &= -**e_2 = (-1)^{1(4-1)}e_2 = -e_2 \\
*e_{023} &= -**e_3 = (-1)^{1(4-1)}e_3 = -e_3
\end{aligned}$$

Más adelante se calculará el operador de Hodge en el álgebra exterior de diferentes espacios vectoriales, a saber, $\Lambda\mathbb{R}^{2,0}$ y $\Lambda\mathbb{R}^{4,2}$.

Proseguimos a definir la derivada exterior; sin embargo, definimos primero lo que es una derivación en términos algebraicos.

Definición 4.9. Sea $A = \bigoplus A_l$ una K-álgebra G-graduada y $\epsilon : G \times G \to K - \{0\}$ un factor de conmutación. Una derivación graduada de grado p de A es una es una aplicación lineal $D \in \mathrm{End}(A)$, tal que:

$$D(A_l) \subset A_{l+p} \qquad \text{para toda } l \in G \tag{19}$$

$$D(\mu(a,b)) = \mu(D(a),b) + \epsilon(p,|a|)\mu(a,D(b)), \tag{20}$$

Para todos a, $b \in A$ y a homogéneo. A la ecuación (20) se le conoce como regla de Leibniz graduada con respecto a ϵ.

Definimos el conjunto de derivaciones de A como $DerA = \bigoplus (DerA)_p$ donde $p \in G$ y $(DerA)_p$ es el conjunto de todas las derivaciones de grado p.

Proposición 4.10. Consideremos las K-álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas $\mathrm{S}(V)$ y ΛV junto con sus factores de conmutación descritos en 3.18 y 3.21, respectivamente. Toda derivación $D \in (Der\Lambda V)_k$ o $D \in (Der\,\mathrm{S}(V))_k$ está determinada por su restricción a V.

Para ver esto en ΛV, consideremos una base e_j de V y a un elemento de la base inducida en $\Lambda^k V$, $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$. Observemos que al aplicar una derivación, $D \in (Der\Lambda V)_p$, sobre dicho elemento se tiene que:

$$\begin{aligned}
D(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}) =& D(e_{j_1}) \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \\
&+ (-1)^p e_{j_1} \wedge D(e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k})
\end{aligned}$$

Repitiendo este proceso k veces se llega a que:

$$D(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} D(e_{j_i}) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{j_i} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$$

De igual forma, consideramos los elementos de la base $e_{j_1} \cdots e_{j_k} \in S^k(V)$ (recordando que en este caso e_{j_m} puede ser igual a e_{j_l} con l y m distintos). Se verifica que al evaluar una derivacion de grado p en este elemento:

$$D(e_{j_1}\cdots e_{j_k}) = \sum_{i=1}^{k} D(e_{j_i})e_{j_1}\cdots \hat{e}_{j_i}\cdots e_{j_k}$$

Es inmediato comprobar que $D(\Lambda^0 V) \simeq D(S^0(V)) \simeq \{0\}$, completando la prueba.

4.2. Formas Diferenciales y Derivada Exterior

Para definir las formas diferenciales y la derivada exterior, es necesario partir de ciertos conceptos elementales de geometría diferencial. Esbozamos dicha construcción y referimos al lector interesado en los detalles a [4]. Consideremos una variedad diferenciable M^n y una carta particular de la misma, $(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n)$. Dicha carta define un sistema de coordenadas local en la variedad.

Definición 4.11. Decimos que $f : U_\alpha \to \mathbb{R}$ es suave en el abierto U_α de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, si $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es una función C^∞ en el sentido usual.

Si $U \subset M^n$ es un abierto arbitrario de la variedad (pudiendo ser $U = M^n$), lo que hacemos es cubrir a U con los abiertos U_α de las cartas coordenadas, de manera que $U \subset \cup_\alpha U_\alpha$, y entonces decimos que $f : U \to \mathbb{R}$ es suave en el abierto U, si es suave en cada intersección $U \cap U_\alpha$ y si para cada par (α, β) con $U \cap (U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$, las restricciones $(f|_{U\cap U_\alpha})\,|_{U_\beta}$ y $\left(f|_{U\cap U_\beta}\right)|_{U_\alpha}$, coinciden.

Sea $\rho_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función que nos da la k-ésima componente de un vector en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\rho_k(v) = v_k$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ (las funciones ρ_k constituyen precisamente la base dual a la base $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$). Entonces, definimos las funciones $x^k : U_\alpha \to \mathbb{R}$ como $x^k = \rho_k \circ \varphi_\alpha$. Dichas funciones se llaman las coordenadas locales de la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Si ahora elegimos un punto $p \in U_\alpha$ cualquiera, *intuitivamente* "el espacio tangente a la variedad en p", se define como el conjunto de clases de equivalencia de curvas $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U_\alpha$ que pasan por p cuando el valor de su parámetro es $t = 0$ y que tienen el mismo vector tangente v en p; es decir, cada clase de equivalencia es,

$$[\gamma]_\alpha = \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \mid \gamma(0) = p \text{ y } (\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = v_\alpha\ \} \quad \leftrightarrow \quad v_\alpha.$$

Se puede introducir, en el conjunto de estas clases de equivalencia, una estructura de espacio vectorial, de la siguiente manera:

$$[\gamma]_\alpha + [\tilde{\gamma}]_\alpha = v_\alpha + \tilde{v}_\alpha, \qquad \text{siempre que,} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = \tilde{\gamma}(0), \\ (\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = v, \quad \text{y} \\ (\varphi_\alpha \circ \tilde{\gamma})'(0) = \tilde{v}. \end{array} \right.$$

La multiplicación por escalares, se define, igualmente, de tal manera que $c[\gamma]_\alpha = [c\gamma]_\alpha = cv_\alpha$. Se puede comprobar que estas definiciones no dependen de los representantes elegidos dentro de cada clase de equivalencia. Entonces el conjunto

$\{v_\alpha \leftrightarrow [\gamma]_\alpha\}$ es un espacio vectorial real de dimensión n. Ahora, si $v_\alpha \leftrightarrow [\gamma]_\alpha$, mientras que $v_\beta \leftrightarrow [\gamma]_\beta$, definimos una relación de equivalencia en el conjunto de pares (α, v_α) diciendo que $(\alpha, v_\alpha) \sim (\beta, v_\beta)$ si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y,

$$D\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}\right)_p ([\gamma]_\alpha) = [\gamma]_\beta$$

siendo $D\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}\right)_p : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ la derivada del difeomorfismo local $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ de $\mathbb{R}^n$ evaluada en el punto $\varphi_\alpha(p)$. Finalmente, definimos el espacio tangente T_pM^n a la variedad en el punto p como el conjunto de clases de equivalencia $[\alpha, v_\alpha]$, entendiendo que p está fijo. La estructura de espacio vectorial es la heredada de cualquiera de los conjuntos $\{v_\alpha \leftrightarrow [\gamma]_\alpha\}$ para una α fija.

Podemos ahora considerar las curvas $\gamma_i(t) = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + te_i)$, definidas en una vecindad de $p \in U_\alpha$, de forma que sus vectores tangentes son $(\varphi_\alpha \circ \gamma_i)'(0) = (\varphi_\alpha(p) + te_i)'(0) = e_i$, es decir, cada uno de los vectores tangentes corresponde a un elemento de la base de $\mathbb{R}^n$. Es más, el hecho de que $\{e_i\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ implica que $\{[\gamma_i]\}$ es una base de T_pM. La independencia lineal se sigue de la siguiente implicación:

$$a_1[\gamma_1] + a_2[\gamma_2] + \cdots + a_n[\gamma_n] = 0 \Leftrightarrow a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = 0.$$

Si ahora consideramos un elemento arbitrario $[\gamma] \in T_pM$, entonces,

$$(\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = a_1(\varphi_\alpha \circ \gamma_1)'(0) + \cdots + a_n(\varphi_\alpha \circ \gamma_n)'(0),$$

es decir, $[\gamma] = a_1[\gamma_1] + a_2[\gamma_2] + \cdots + a_n[\gamma_n]$.

Dado un vector tangente arbitrario, $[\gamma]$, podemos calcular sus coeficientes en términos de la base $\{[\gamma_i]\}$ utilizando la base dual, $\{\rho_k\}$, de la siguiente manera:

$$a_k = \rho_k\left((\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0)\right) = (\rho_k \circ \varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = (x^k \circ \gamma)'(0).$$

Así obtenemos que la forma general de cualquier vector en T_pM es

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^{n} (x^k \circ \gamma)'(0)[\gamma_i],$$

expresión en la que se exhibe de manera clara su interpretación geométrica en términos de las coordenadas locales.

Si ahora consideramos una funcion $f : M \to \mathbb{R}$ arbitraria, es inmediato verificar que $(f \circ \gamma_i)'(0)$ es precisamente la derivada direccional de f en la dirección e_i. Resulta entonces *natural* definir el símbolo $\partial/\partial x^i$ a través de la siguiente relación:

$$(f \circ \gamma_i)'(0) = ((f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p) + te_i))'(0) = \frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)).$$

Observemos que en general, si consideramos una curva arbitraria γ, entonces $(f \circ \gamma)'(0)$ representa la tasa de cambio de f a lo largo del vector tangente a γ.

Además, si $[\gamma] = \sum a_i[\gamma_i]$, se tiene que

$$(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^i}(\varphi_\alpha(p)).$$

Esto nos dice que es posible identificar a T_pM con el espacio vectorial de funciones lineales $\mathfrak{X}_p(U) = \{X_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid X_p(fg) = X_p(f)(p)g(p) + f(p)X_p(g)(p)\}$ en una vecindad U del punto p. Para hacerlo, definimos el operador $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ como

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = (f \circ \gamma_i)'(0),$$

De esta manera se establece la siguiente identificación natural,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \quad \leftrightarrow \quad [\gamma_i]$$

Con esta identificación podemos definir cómo actúa un vector tangente en una función, teniendo en mente que dicha acción debe representar la tasa de cambio de la función en la dirección de la curva; es decir, si $[\gamma] = \sum a_i[\gamma_i]$, definimos

$$[\gamma]f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f$$

y de ahora en adelante escribiremos $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ en lugar de $[\gamma_i]$ para referirnos a la base de T_pM. En general escribiremos a un elemento arbitrario $\xi \in T_pM$ como $\xi = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

Ahora definimos la diferencial de una función $f : M \to \mathbb{R}$ en el punto p como la transformación lineal $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$, tal que $df_p(\xi) = \xi f$, para cualquier $\xi \in T_pM$. Es inmediato verificar que $d(fg)_p = g(p)df_p + f(p)dg_p$. Obviamente, df_p es un elemento del espacio vectorial dual $(T_pM)^*$ de T_pM. A dicho espacio dual de T_pM se le conoce como *espacio cotangente a la variedad en el punto* p y se denota por T_p^*M. Es fácil ver que los elementos dx_p^i son en realidad la base dual a la base $\frac{\partial}{\partial xi}\Big|_p$ de T_pM.

Hasta ahora únicamente hemos trabajado a nivel local en la variedad (*i.e.,* en vecindades), sin embargo, es posible deshacerse de esta limitación con los conceptos de campos vectoriales y formas diferenciales. Un campo vectorial en la carta U_α es una función $X : U_\alpha \to \cup_{p \in U_\alpha} T_pM$, de tal forma que, para cada $p \in U_\alpha$, $X(p) = v \in T_pM$. En este caso podemos escribir

$$X = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \varphi_n \frac{\partial}{\partial x^n}, \tag{21}$$

entendiendo que para toda $f \in C^\infty(U_\alpha)$ y cada $p \in U_\alpha$,

$$X_p\, f = \varphi_1(p) \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p f + \cdots + \varphi_n(p) \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p f\,.$$

Decimos que un campo X es suave si cada una de las funciones $\varphi_i : U_\alpha \to \mathbb{R}$ es suave. La correspondencia (21) hace que podamos identificar campos vectoriales con aplicaciones lineales $X : C^\infty(U_\alpha) \to C^\infty(U_\alpha)$ que satisfacen $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. Asimismo, se puede extender dicha definicion a toda la variedad siempre y cuando los campos coincidan en la intersección de las cartas en las que están definidos. Esto permite identificar campos vectoriales en un abierto arbitrario $U \subseteq M$ con el conjunto $\mathfrak{X}(U) = \{X : C^\infty(U) \to C^\infty(U) \,|\, X(fg) = (Xf)g + f(Xg)\}$.

Es posible seguir el mismo procedimiento para definir los *campos de funcionales en* T_p^*M; los elementos de dichos campos son funciones que a cada $p \in M$ le asocian un funcional $\eta_p \in T_p^*M$ y escribimos

$$\eta = \psi_1 dx^1 + \cdots + \psi_n dx^n \,, \tag{22}$$

entendiendo que para toda $f \in C^\infty(U_\alpha)$ y cada $p \in U_\alpha$,

$$\eta_p(X_p) = \psi_1(p) dx_p^1(X_p) + \cdots + \psi_n(p) dx_p^n(X_p) \,,$$

para cada $X_p \in T_P M$. Las expresiones del tipo (22) se conocen como 1-formas diferenciales en U_α cuando todas las ψ_i son suaves.

Asimismo, se puede extender dicha definicion a toda la variedad siempre y cuando las 1-formas coincidan en la intersección de las cartas en las que están definidas.

A partir de ahora trabajaremos únicamente con campos vectoriales y 1-formas diferenciales, por lo que nos olvidaremos del subíndice p. Con estas convenciones, escribimos, para toda $f \in C^\infty(U_\alpha)$, $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Existe otra manera de entender a los campos vectoriales y 1-formas diferenciales de tal manera que estos objetos puedan entenderse como funciones suaves entre variedades diferenciables. Definimos el haz tangente a una variedad M como la unión disjunta de todos los espacios tangentes; es decir,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

cuyos elementos son de la forma (p, ξ) con $p \in M$ y $\xi \in T_p M$. Dicha construcción viene acompañada de una proyección canónica $\pi : TM \to M$ de tal forma que $\pi(p, \xi) = p$ siempre que $\xi \in T_p M$.

Es posible darle a este conjunto una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ a partir de las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M. Para cada $p \in U_\alpha$ definimos la carta $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2n}$ como

$$\Phi_\alpha \left(p, a_1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), a_1, \ldots, a_n)$$

La función Φ_α es claramente un homeomorfismo entre su dominio y el abierto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ahora supongamos que tenemos dos cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) de M y sean $(\pi^{-1}(U_\alpha), \Phi_\alpha)$ y $(\pi^{-1}(U_\beta), \Phi_\beta)$ las cartas correspondientes en TM. Entonces los conjuntos $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n$ y $\Phi_\beta(\pi^{-1}(U_\alpha)\cap\pi^{-1}(U_\beta)) = \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n$ son abiertos de $\mathbb{R}^{2n}$ y podemos escribir la función de transición, $\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}$, de forma explícita como:

$$\Phi_\beta\circ\Phi_\alpha^{-1}(t_1,\ldots,t_n,a_1,\ldots,a_n) = \left(y^1(\varphi_\alpha^{-1}(t)),\cdots,y^n(\varphi_\alpha^{-1}(t)),\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(t)}y^1,\ldots,\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(t)}y^n\right),$$

donde $y^i = \rho_i\circ\varphi_\beta$ y $t = (t_1,\ldots,t_n) = (x^1(p),\ldots,x^n(p))$. Las funciones de transición son suaves ya que las funciones de transición de la variedad original lo son.

Observemos que respecto a las cartas $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ y $(\pi^{-1}(U_\alpha),\Phi_\alpha)$, la proyección canónica es suave.

Con esta estructura definida en TM, definimos los campos vectoriales de M como *secciones suaves* de TM: una tal sección suave es una función suave, $X : M\to TM$, tal que que $\pi\circ X = id_M$. Es fácil convencerse de que esta construcción coincide con la que hicimos previamente, es decir, localmente podemos ver una sección suave del haz tangente en la forma $X = \varphi_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\varphi_n\frac{\partial}{\partial x^n}$, donde cada una de las funciones φ_i es suave y $X_p = \varphi_1(p)\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p+\cdots+\varphi_n(p)\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$.

De forma análoga al caso anterior, se define el haz cotagente a una variedad, como la unión disjunta de los espacios cotagentes en cada punto; es decir,

$$T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M,$$

y sus elementos son de la forma (p,η) con $p\in M$ y $\eta\in T_p^*M$. El haz cotangente también viene acompañado de una proyección canónica $\pi : T^*M\to M$ de tal forma que $\pi(p,\eta) = p$ siempre que $\eta\in T_pM$. Siguiendo un procedimiento similar al que seguimos en el caso del haz tangente, es posible dotar al haz cotangente de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$. Por brevedad omitimos esta construcción, sin embargo la idea es esencialmente la misma. Al igual que en el haz tangente, la proyección canónica π es una función suave.

Definimos las 1-formas diferenciales como secciones suaves, $\eta : M\to T^*M$, de tal forma que $\pi\circ\eta = id_M$. Nuevamente, las construccion que acabamos de hacer coincide con la que hicimos antes, es decir, localmente podemos ver una sección suave del haz cotangente en la forma $\eta = \psi_1dx^1+\cdots+\psi_ndx^n$ donde cada una de las funciones ψ_i es suave y $\eta_p = \psi_1(p)dx_p^1+\cdots+\psi_n(p)dx_p^n$.

Siguiendo el mismo espíritu que en los dos ejemplos anteriores, definimos el haz exterior de M como

$$\Lambda T^*M = \bigsqcup_{p\in M}\Lambda T_p^*M.$$

Es posible definir una estructura de variedad suave de dimensión $n+2^n$ en ΛT^*M, con una proyección canónica suave, π. De esta forma, *el espacio de* *formas diferenciales de* M, es el conjunto de secciones suaves $\omega : M \to \Lambda T^*M$ tales que $\pi \circ \omega = id_M$. Localmente una tal sección se puede expresar en la forma $\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_n$, con $\omega_k = \sum \psi_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, donde cada función $\psi_{i_1 \cdots i_k}$ es suave y $\omega_p = \omega_1|_p + \cdots \omega_n|_p$ y en cada caso $\omega_k|_p = \sum \psi_{i_1 \cdots i_k}(p) dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k}$ que, claramente, es un elemento de $\Lambda^k T_p^* M$.

Observamos que en este caso, cada $\Lambda T_p^* M$ no solamente es un espacio vectorial, sino que además es un álgebra asociativa. Por lo tanto, las secciones suaves pueden multiplicarse punto a punto. En consecuencia, las formas diferenciales tienen estructura de álgebra asociativa. Al álgebra de formas diferenciales definidas en un abierto U de M se le denota como $\Omega(U)$. Dado que además, punto a punto, el álgebra $T_p^* M$ tiene una $\mathbb{Z}$-graduación, es posible extender ésta a una $\mathbb{Z}$-graduación de $\Omega(U)$:

$$\Omega(U) = \sum_{k=0}^{n} \Omega^k(U)\,,$$

siendo $\Omega^k(U)$ las secciones suaves que toman valores en los subespacios $\Lambda^k T_p^* M$. A los $\Omega^k(U)$'s se les conoce como subespacios de k-formas diferenciales en U, o simplemente, k-formas en U. Así, $\Omega(U)$ se vuelve un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada y podemos escribir $\Omega(U) = \oplus \Omega^k(U)$. En particular, observamos que $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$.

Dentro del conjunto de formas diferenciales existe una derivación de grado uno de suma importancia, a saber, la derivada exterior.

Definición 4.12. La derivada exterior es la derivación, $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$, de grado uno (*i.e.,* $d|_{\Omega^k(U)} : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$), que satisface las siguientes dos propiedades:

(i) Si $f \in \Omega^0(U)$ entonces $df \in \Omega^1(U)$ con la propiedad de que, para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$, $df(X) = Xf$.

(ii) $d \circ d = 0$.

Nota 4.13. Las propiedades demandadas en la definición caracterizan de manera única a la derivada exterior.

Se sigue inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 4.14. Sean $\eta \in \Omega^k(U)$ y $\xi \in \Omega^l(U)$. Entonces,

$$d(\eta \wedge \xi) = (d\eta) \wedge \xi + (-1)^k \eta \wedge (d\xi)$$

Llamamos a una k-forma, ω, *cerrada* si $d\omega = 0$, y la llamamos *exacta* si existe una $(k-1)$-forma, ν, tal que $\omega = d\nu$. Además tenemos que $d\omega = 0$ para toda $\omega \in \Omega^n(U)$.

Definición 4.15. La codiferencial, δ, de una k-forma diferencial, es el operador que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(U) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "*"'] & \Omega^{k-1}(U) \arrow[d, "*"] \\ \Omega^{n-k}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-k+1}(U), \end{tikzcd}$$

entendiendo que el operador de Hodge tiene sentido punto a punto en $\cup_{p\in U}\Lambda T_p^*M$.

Dado que el operador de Hodge está directamente relacionado con la geometría del espacio vectorial, la codiferencial también lo está. Es inmediato comprobar que $\delta^2 = *^{-1}\circ d\circ d\circ * = 0$ y también que $\delta\omega = 0$ si $\omega\in\Omega^0(U)$.

Definición 4.16. Al operador $D = d+\delta$ se le conoce como operador de Dirac, y a su cuadrado, $\Delta = D^2 = d\delta + \delta d$, como operador de Laplace.

El operador de Laplace lleva este nombre ya que al aplicarlo a una 0-forma en un espacio vectorial de dimensión 3 con la geometría ortogonal usual, se reduce al Laplaciano. Mostramos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.17. Una variedad riemanniana es una variedad equipada con una función suave, $M\ni p\mapsto B_p$, siendo $B_p : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica y definida positiva. En este caso, cada T_pM es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con su producto escalar usual.

Sea $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\right\}$ la base ortonormal de $T_pM\simeq\mathbb{R}^3$ respecto a B_p. Por comodidad, de ahora en adelante escribiremos únicamente el símbolo ∂ con el subíndice correspondiente para referirnos a los vectores base de T_pM y nos olvidamos del punto de la variedad en el que está anclado. Así, la base de T_pM en este ejemplo es $\{\partial_x,\partial_y,\partial_z\}$. Consideremos una 0-forma f. Entonces,

$$\begin{aligned} df &= (\partial_x f)dx + (\partial_y f)dy + (\partial_z f)dz \\ \delta f &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

por lo tanto, $\Delta f = \delta df$. La codiferencial de la ecuación (23) es,

$$\begin{aligned} \Delta f &= *^{-1}d(\partial_x f dy\wedge dz + \partial_y f dz\wedge dx + \partial_z f dx\wedge dy) \\ &= *^{-1}(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2)e \\ &= (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f) \end{aligned}$$

donde utilizamos que $*dx = dy\wedge dz$, $*dy = dz\wedge dx$, $*dz = dx\wedge dy$ y $*^{-1}e = 1_{\Lambda\mathbb{R}^3}$.

Otro ejemplo se obtiene al considerar $\mathbb{R}^4$ con la geometría de Minkowski, es decir, equipado con una forma bilineal B de signatura $(3,1)$.

Ejemplo 4.18. Una variedad de Lorentz es una variedad de dimensión cuatro equipada con una función suave, $M\ni p\mapsto B_p$, siendo $B_p : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ una forma bilineal, simétrica y no degenerada de signatura $(3,1)$. En este caso cada T_pM es isomorfo a $\mathbb{R}^{3,1}$.

Consideremos la base $\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\right\}$ de T_pM que lleva a B_p a su forma canónica y para la cual

$$B_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_p\right) = -1$$

y sea f una 0-forma en $\Omega(U)$. Nuevamente se tiene que $\delta f = 0$, entonces,

$$df = (\partial_t f)dt + (\partial_x f)dx + (\partial_y f)dy + (\partial_z f)dz$$

Ahora calculamos la codiferencial de este elemento,

$$\begin{aligned}\delta df =& - *^{-1} d((\partial_t f)dx \wedge dy \wedge dz + (\partial_x f)dt \wedge dy \wedge dz \\ &+ (\partial_y f)dt \wedge dz \wedge dx + (\partial_z f)dt \wedge dx \wedge dy) \\ =& *^{-1} (-(\partial_t^2 f) + (\partial_x^2 f) + (\partial_y^2 f) + (\partial_z^2 f))e \\ =&((\partial_t^2 f) - (\partial_x^2 f) - (\partial_y^2 f) - (\partial_z^2 f))\end{aligned}$$

utilizando el Ejemplo 4.8. A este operador en el espacio-tiempo de Minkowski se le conoce como operador D'Alambertiano.

Si un espacio vectorial está dotado de una geometría, es posible, mediante el isomorfimso que existe entre el álgebra exterior y el álgebra de Clifford, definir operadores lineales equivalentes al de Hodge, la derivada exterior y codiferencial en operadores de la última. Esto lo haremos explícitamente en diferentes casos a partir de la Sección 6.

5. El Álgebra de Clifford

Las álgebras de Clifford son anillos que en general no son conmutativos bajo su multiplicación, y mucho menos es cierto que todo elemento no nulo del álgebra tenga un inverso multiplicativo; esto es que, dado $c \in \mathrm{Cl}(V,B)$, exista un elemento, $c^{-1} \in \mathrm{Cl}(V,B)$, tal que $cc^{-1} = c^{-1}c = 1_{\mathrm{Cl}}$.

Denotamos como $\mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$ al subconjunto de $\mathrm{Cl}(V,B)$ definido de la siguiente manera,

$$\mathrm{Cl}^{\times}(V,B) = \{c \in \mathrm{Cl}(V,B) \,|\, \exists c^{-1} \in \mathrm{Cl}(V,B) \text{ tal que } cc^{-1} = c^{-1}c = 1_{\mathrm{Cl}}\}.$$

Es inmediato ver que $\mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$ es un grupo bajo la multiplicación del álgebra. A este grupo se le llama *grupo de Clifford* y contiene varios subgrupos interesantes con mucha información geométrica del espacio vectorial V. En particular, este grupo contiene a todos los elementos $v \in V$ tales que $B(v,v) \neq 0$, porque es fácil ver que en ese caso, $v^{-1} = B(v,v)^{-1}v$.

Podemos considerar entonces la transformación

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad} : \mathrm{Cl}^{\times}(V,B) &\to GL(\mathrm{Cl}(V,B)) \\ c &\mapsto \widetilde{Ad}_c \end{aligned}$$

dada por $\widetilde{Ad}_c(x) = \Theta(c)xc^{-1}$, siendo Θ el morfismo definido en la Sección 3.2. Es inmediato comprobar que $\widetilde{Ad}_{c_1} \circ \widetilde{Ad}_{c_2} = \widetilde{Ad}_{c_1c_2}$ para todos $c_1, c_2 \in \mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$. Observar que el grupo $\mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$ hereda la $\mathbb{Z}_2$-graduación de $\mathrm{Cl}(V,B)$ vía $\mathrm{Cl}_i^{\times}(V,B) = \mathrm{Cl}^{\times}(V,B) \cap \mathrm{Cl}_i(V,B)$ $(i = 0,1)$. En particular, si $c \in \mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$, podemos escribir $c = c_0 + c_1$ con $c_i \in \mathrm{Cl}_i^{\times}(V,B)$ $(i = 0,1)$ y claramente $\Theta(c) = c_0 - c_1$.

Como ya hemos visto, $V \subset \mathrm{Cl}_1(V,B)$ y todo $v \in V$ con $B(v,v) \neq 0$ pertenece a $\mathrm{Cl}_1^{\times}(V,B)$. En particular, para todo $u \in V$ se tiene que,

$$\widetilde{Ad}_v(u) = u - 2\frac{B(u,v)}{B(v,v)}v$$

Esto es, las transformaciones $\widetilde{Ad}_v$ con $B(v,v) \neq 0$, dejan al subespacio $V \subset \mathrm{Cl}(V,B)$ invariante y, de hecho, $\widetilde{Ad}_v|_V$ es la reflexión generada por el vector v, que denotaremos como ρ_v.

Este preámbulo motiva la siguiente proposición.

Proposición 5.1. Sea $\Gamma(V,B) \subset \mathrm{Cl}^{\times}(V,B)$ el subgrupo que estabiliza al subespacio $V \subset \mathrm{Cl}(V,B)$; es decir,

$$\Gamma(V,B) = \{a \in \mathrm{Cl}^{\times}(V,B) \,|\, \widetilde{Ad}_a|_V \in GL(V)\}$$

Entonces, existe un epimorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} R : \Gamma(V,B) &\to O(V,B) \\ a &\mapsto \widetilde{Ad}_a|_V \end{aligned}$$

cuyo kernel es $\mathbb{R}^{\times}1_{\mathrm{Cl}} = \{\lambda 1_{\mathrm{Cl}} | 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$.

La suprayectividad de R es inmediata utilizando el Teorema de Cartan-Dieudonné [5] que dice que todo elemento del grupo ortogonal, $g \in O(V,B)$, puede escribirse como la composición de $r \leq dimV$ reflexiones, esto es, $g = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}$.

Para ver que en efecto $kerR = R^{\times}1_{\mathrm{Cl}}$, consideremos $a \in kerR$, entonces $\widetilde{Ad}_a(x) = \Theta(a)xa^{-1} = x$, es decir, $\Theta(a)x = xa$ para toda $x \in V$. Si $a = a_0 + a_1$, entonces,

$$a_0 x = x a_0 \tag{24}$$

$$a_1 x = -x a_1. \tag{25}$$

Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de V, entonces podemos escribir $a_0 = b_0 + e_1 c_1$, donde $b_0 \in \mathrm{Cl}_0(V,B)$ y $c_1 \in \mathrm{Cl}_1(V,B)$ no tienen como factor a e_1. Si hacemos $x = e_1$ en (24), se llega a que $b_0 + e_1 c_1 = e_1 b_0 e_1^{-1} + e_1^2 c_1 e_1^{-1} = b_0 - e_1 c_1$. Por lo tanto, $c_1 = 0$. Utilizando el mismo argumento para el resto de la base, se llega a que $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$. Se puede aplicar el mismo argumento a a_1, sin embargo, dado que $a_1 \in \mathrm{Cl}_1(V,B)$, se llega a que $a_1 = 0$. Se sigue que, por ser $a = a_0$ invertible, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, es decir, $kerR = \mathbb{R}^{\times}1_{\mathrm{Cl}}$.

Nota 5.2. La proposición anterior es equivalente a decir que la siguiente sucesión de morfismos de grupos es exacta,

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times}1_{\mathrm{Cl}} \longrightarrow \Gamma(V,B) \xrightarrow{R} O(V,B) \longrightarrow \{1\}$$

5.1. Los Grupos Pin y Spin

Definición 5.3. El subgrupo $Pin(V,B) \subset \Gamma(V,B)$ es el conjunto,

$$Pin(V,B) = \{v_1 \cdots v_r \in \mathrm{Cl}^{\times}(V,B) | v_i \in V \text{ y } B(v_i,v_i) = \pm 1 \,\forall\, 1 \leq i \leq r\}$$

Dado que cada $v_i \in V$ con $B(v_i,v_i) \neq 0$ está en el grupo de Clifford y $\widetilde{Ad}_{v_i} = \rho_{v_i}$, entonces $Pin(V,B) \subset \Gamma(V,B)$.

Definimos el grupo espinorial como, $Spin(V,B) = Pin(V,B) \cap \mathrm{Cl}_0(V,B)$.

Al restringir el dominio del epimorfismo R de la sección anterior a los subrupos $Pin(V,B)$ y $Spin(V,B)$, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 5.4. Sea V un espacio vectorial real dotado de una geometría B con signatura (p,q). Entonces,

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Pin(V,B) \xrightarrow{R} O(V,B) \longrightarrow \{1\}$$

es una sucesión exacta de grupos y también lo es,

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin(V,B) \xrightarrow{R} SO(V,B) \longrightarrow \{1\}$$

Esta proposición nos dice que en el caso real, los grupos $Pin(V, B)$ y $Spin(V, B)$ son cubiertas dobles de los grupos $O(V, B)$ y $SO(V, B)$, respectivamente, donde la función cubriente es R restringida a los dominios correspondientes.

Que en la segunda sucesión la imagen de R esté contenida en el subgrupo $SO(V, B)$ de $O(V, B)$ resulta del hecho que la imagen es una composición de un número par de reflexiones. En ambas sucesiones, $ker R = \mathbb{Z}_2$ porque en general $R(a) = R(-a)$ para todo $a \in \Gamma(V, B)$.

Nota 5.5. Cuando la geometría B tenga signatura (p, q), escribiremos al grupo $Pin(V, B)$ simplemente como $Pin(p, q)$ y al grupo espinorial como $Spin(p, q)$.

5.2. Clasificación de las Álgebras de Clifford

Es posible dar, constructiva e inductivamente, una lista de todas las álgebras de Clifford reales en términos de álgebras de matrices sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Dado que $\Lambda V \simeq \mathrm{Cl}(V, B)$ como espacios vectoriales, esto permite traducir al lenguaje de matrices toda información del álgebra exterior. Por ejemplo, el operador de Hodge y la derivada exteror pueden representarse en términos de matrices y sus endomorfismos.

Además, es fácil comprobar que si $n = dim V$, el tamaño de las matrices que se necesitan para obtener una representación inyectiva de ΛV es al menos $2^n \times 2^n$, mientras que, como veremos en breve, las álgebras de Clifford quedan realizadas fielmente en matrices de, a lo más, $n \times n$.

Comenzamos nuestra clasificación de las álgebras de Clifford con la siguiente proposición, que es una consecuencia inmediata de la propiedad universal de dichas álgebras.

Proposición 5.6. Sea $V = V_1 \oplus V_2$ un espacio vectorial real con geometría B tal que, para todos $v, w \in V$,

$$B(v, w) = B_1(v_1, w_1) + B_2(v_2, w_2), \qquad v = v_1 + v_2,\ w = w_1 + w_2$$

y para todos $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ se tiene que $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1) = 0$. Entonces, existe un isomorfismo graduado de $\mathbb{R}$-álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas,

$$\mathrm{Cl}(V, B) \simeq \mathrm{Cl}(V_1, B_1) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}(V_2, B_2)$$

Para ver el resultado anterior consideremos $v = v_1 + v_2 \in V$ y la tranformación lineal tal que $v_1 + v_2 \mapsto v_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_2} + 1_{\mathrm{Cl}_1} \otimes v_2 \in \mathrm{Cl}_1(V, B) \hat{\otimes} \mathrm{Cl}_2(V, B)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (v_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes v_2)\,&(w_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes w_2) \\ &= v_1 w_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + v_1 \otimes w_2 - w_1 \otimes v_2 + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes v_2 w_2 \\ (w_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes w_2)\,&(v_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes v_2) \\ &= w_1 v_1 \otimes 1_{\mathrm{Cl}_1} + w_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes w_2 + 1_{\mathrm{Cl}_2} \otimes w_2 v_2, \end{aligned}$$

para todo $w = w_1 + w_2 \in V$. Al sumar los miembros del lado izquierdo, obtenemos en el lado derecho el múltiplo $(B_1(v_1, w_1) + B_2(v_2, w_2))1_{\mathrm{Cl}_1} \hat{\otimes} 1_{\mathrm{Cl}_2} =$

$B(v,w)1_{\mathrm{Cl}_1}\hat{\otimes}1_{\mathrm{Cl}_2}$. Por lo tanto la transformación lineal es de Clifford y se factoriza a través de un isomorfismo entre $\mathrm{Cl}(V,B)$ y $\mathrm{Cl}(V_1,B_1)\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(V_2,B_2)$.

De esta manera, cualquier álgebra de Clifford queda definida por productos de este tipo de las álgebras $\mathrm{Cl}(1,0)$ y $\mathrm{Cl}(0,1)$.

Corolario 5.7. Sea $\mathrm{Cl}(p,q)$ el álgebra de Clifford asociada al espacio vectorial $\mathbb{R}^{p+q}$ equipado con una forma bilineal de signatura (p,q). Entonces,

$$\mathrm{Cl}(p,q) \simeq \underbrace{\mathrm{Cl}(1,0)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(1,0)}_{p\text{ veces}}\hat{\otimes}\underbrace{\mathrm{Cl}(0,1)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\,\mathrm{Cl}(0,1)}_{q\text{ veces}}$$

Es fácil probar que $\mathrm{Cl}(1,0)\simeq\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ y $\mathrm{Cl}(0,1)\simeq\mathbb{C}$.

Sin embargo, el producto tensorial $\mathbb{Z}_2$-graduado no es la mejor manera de calcular dichas álgebras para dimensiones más grandes. En la siguiente proposición se muestran isomorfismos no graduados que, nuevamente, permiten escribir cualquier álgebra de Clifford inductivamente.

Proposición 5.8. Sea $\mathrm{Cl}(p,q)$ como en la proposición anterior. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(p+1,q+1) &\simeq \mathrm{Cl}(p,q)\otimes\mathrm{Cl}(1,1)\\ \mathrm{Cl}(n+2,0) &\simeq \mathrm{Cl}(0,n)\otimes\mathrm{Cl}(2,0)\\ \mathrm{Cl}(0,n+2) &\simeq \mathrm{Cl}(n,0)\otimes\mathrm{Cl}(0,2)\end{aligned}$$

para todos $p,q,n\geq 0$.

Esta proposición nos permite escribir todas las álgebras de Clifford de manera recursiva conociendo $\mathrm{Cl}(1,1)$, $\mathrm{Cl}(2,0)$ y $\mathrm{Cl}(0,2)$. Sin embargo, es fácil demostrar que,

$$\mathrm{Cl}(1,1)\simeq\mathrm{Cl}(2,0)\simeq\mathbb{R}(2) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Cl}(0,2)\simeq\mathbb{H}$$

donde $\mathbb{R}(2)$ son las matrices reales de 2×2.

Nota 5.9. En general, escribiremos $K(n)$ para referirnos a las matrices de $n\times n$ con entradas en K.

Para utilizar la proposición anterior, necesitamos la siguiente proposición acerca de algunas propiedades de los productos tensoriales reales.

Proposición 5.10. Sea $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Entonces,

$$\begin{aligned}&K(n)\otimes_{\mathbb{R}}K(m)\simeq K(nm), &&\forall\, n,m\in\mathbb{N}\\ &\mathbb{R}(n)\otimes_{\mathbb{R}}K\simeq K(n), &&\forall\, n\in\mathbb{N}\\ &\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\\ &\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\simeq\mathbb{C}(2)\\ &\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\simeq\mathbb{R}(4)\end{aligned}$$

Para concluir la clasificación, enunciamos una importante proposición (Periodicidad de Bott) [10] sobre la periodicidad de las álgebras de Clifford.

Proposición 5.11. Para toda $n \geq 0$, existen los siguientes isomorfismos de periodicidad,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(n+8,0) &\simeq \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Cl}(8,0) \\ \mathrm{Cl}(0,n+8) &\simeq \mathrm{Cl}(0,n) \otimes \mathrm{Cl}(0,8) \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Cl}(8,0) \simeq \mathrm{Cl}(0,8) \simeq \mathbb{R}(16)$.

Entonces, utilizando las proposiciones (5.8), (5.10) y (5.11), podemos construir la siguiente tabla donde se muestran las álgebras de Clifford con diferentes signaturas hasta $p = q = 5$, aunque, de acuerdo a la proposición anterior, la tabla debería completarse hasta $p = q = 8$.

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$

Tabla de isomorfismos de $\mathrm{Cl}(p,q)$.

5.3. El Elemento $\Gamma \in \mathrm{Cl}(p,q)$

Proposición 5.12. Sea V un espacio vectorial real equipado con la geometría ortogonal de signatura (p,q) dada por $B : V \times V \to \mathbb{R}$ y sea $\mathrm{Cl}(p,q)$ su álgebra de Clifford. Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal para V y sea,

$$\Gamma = e_1 e_2 \cdots e_{dimV} \in \mathrm{Cl}(p,q)\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &v\,\Gamma = (-1)^{n-1}\Gamma\, v\,, \qquad \forall v \in V \subset \mathrm{Cl}(p,q), \qquad \text{y,} \\ &\Gamma^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^q 1_{\mathrm{Cl}} \end{aligned}$$

La demostración es casi inmediata usando las propiedades del álgebra de Clifford.

Definición 5.13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una *estructura compleja* en V es un endomorfismo, $J \in \mathrm{End}\, V$, tal que $J \circ J = -id$.

Se puede demostrar que en espacios vectoriales reales de dimensión impar, *no existe estructura compleja alguna*. Y por otra parte, que en espacios vectoriales reales de dimensión par, *siempre existe una estructura compleja*.

Una estructura compleja en un espacio vectorial permite redefinir a éste como un espacio vectorial complejo. Para esto se define la multiplicación por escalares complejos de la siguiente manera, sean $v \in V$, $a + ib \in \mathbb{C}$ y J una estructura compleja en V. Entonces,

$$(a + ib)v := av + bJ(v).$$

Al espacio vectorial complejo que se obtiene de V y su estructura compleja J lo denotaremos como V_J. Claramente si la dimensón de V es $2n$, entonces la dimensión de V_J será n. Claramente, como espacios vectoriales reales, V y V_J son isomorfos.

Por otro lado, si W es un espacio vectorial complejo de dimensión compleja n y consideramos el endomorfismo J de W definido como $J(w) = iw$, para todo $w \in W$, entonces, viendo a W como un espacio vectorial real de dimensión $2n$, J será precisamente una estructura compleja en W.

Ejemplo 5.14. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con su base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ respecto a la geometría ortogonal usual de signatura $(2, 0)$. Sea $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$\begin{aligned} Je_1 &= e_2 \\ Je_2 &= -e_1 \end{aligned}$$

Es inmediato ver que $J \circ J = -\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Por lo tanto, esta J es un ejemplo de estructura compleja en $\mathbb{R}^2$. También es inmediato ver que, bajo la correspondencia $v = xe_1 + ye_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que,

$$iv := Jv \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} .$$

De hecho, bajo esta correspondencia se puede establecer un isomorfismo de espacios vectoriales reales entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ en el que aplicar J a los vectores de $\mathbb{R}^2$ corresponda exactamente a multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ *en el álgebra de los números complejos*. En este ejemplo, es muy difícil no darse cuenta que dicho isomorfismo está dado por la correspondencia,

$$\mathbb{C} \ni x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Si consideramos a los endomorfismos de V y a los de V_J sobre los reales, claramente la esctructura de ambos espacios de funciones es la misma y se tiene que $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V_J$. Analicemos qué ocurre con este isomorfismo al considerar la evaluación en un vector multiplicado por un número complejo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$ y $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V$, entonces,

$$F((a + bJ)(v)) = aF(v) + bF(J(v)).$$

Podemos descomponer a F de forma única en la forma $F = T + S$, donde T es una transformación que conmuta con J y S una que anticonmuta. Es fácil verificar que,

$$T = \frac{F - J \circ F \circ J}{2} \quad \text{y} \quad S = \frac{F + J \circ F \circ J}{2},$$

y con esta descomposición llegamos a que

$$F((a+bJ)(v)) = T((a+bJ)(v)) + S((a+bJ)(v)) = (a+bJ)(T(v)) + (a-bJ)(S(v)).$$

Utilizando el isomorfismo con $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V_J$ podemos reescribir este endomorfismo como,

$$F((a+ib)(v)) = T((a+ib)(v)) + S((a+ib)(v)) = (a+ib)T(v) + (a-ib)S(v).$$

Observemos que la funcion T no sólo es una función lineal en $\mathbb{R}$, sino que, como elemento de $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V_J$, es lineal en $\mathbb{C}$. De igual forma la función $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V_J$ es una función $\mathbb{C}$-antilineal. Resumimos estos resultados en la siguiente proposición.

Proposición 5.15. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión par $2n$ y sea J una estructura compleja en V. Entonces:

$$\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V = \left\{ T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \middle| T \circ J - J \circ T = 0 \right\} \oplus \left\{ S \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \middle| S \circ J + J \circ S = 0 \right\}.$$

Además, existe un espacio vectorial complejo W de dimensión n, isomorfo a V como espacio vectorial real, y en el cual multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ corresponde exactamente a aplicar la transformación lineal J en V. De hecho,

$$\begin{aligned} \left\{ T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \middle| T \circ J - J \circ T = 0 \right\} &\leftrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W \\ \left\{ S \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \middle| S \circ J + J \circ S = 0 \right\} &\leftrightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{C}} W \circ K \end{aligned}$$

siendo $K : W \to W$ una transformación $\mathbb{C}$-antilineal invertible fija.

Es inmeadiato convencerse de que bajo las identificaciones que hemos discutido, $\mathbb{C}^n$, pensado como espacio vectorial real, es precisamente $\mathbb{R}^{2n}$ con la estructura compleja inducida por multiplicar por $i = \sqrt{-1}$. En este trabajo seguiremos la convención de identificar a $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ con $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ y de esta forma, la acción de la estructura compleja en $\mathbb{R}^{2n}$ es precisamente

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n).$$

Es decir, siempre podemos elegir una base de $\mathbb{R}^{2n}$ respecto a la cual J se escribe como,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 5.16. Sea V un espacio vectorial real con dimensión par, $dimV = 2m$ y sea $\gamma : \mathrm{Cl}(p,q) \to \mathrm{End}\, W$ una representación de $\mathrm{Cl}(p,q)$ (es decir, un morfismo de álgebras asociativas). Entonces,

(1) Si $\Gamma^2 = 1$ y $\gamma(\Gamma) \neq id_W$, entonces, $\gamma(\Gamma)$ induce una descomposición en W de la forma $W_+ \oplus W_-$ correspondiente a los valores propios ± 1 del polinomio mínimo de $\gamma(\Gamma)$. Además, dado que para todo $v \in V$, $v\Gamma = -\Gamma v$, entonces $\gamma(v)$ actúa en W intercambiando $W_\pm$ por $W_\mp$.

(2) Si $(p-q)/2$ es un entero impar, entonces $\Gamma^2 = -1_{\mathrm{Cl}}$ y $\gamma(\Gamma)^2 = -id_W$. Por lo tanto, $\gamma(\Gamma)$ define una *estructura compleja* en W. Además, dado que para todo $v \in V$, $v\Gamma = -\Gamma v$, se sigue que, para cada $v \in V \subset \mathrm{Cl}(p,q)$, $\gamma(v) : W \to W$ es una transformación $\mathbb{R}$-lineal que anticonmuta con $\gamma(\Gamma)$.

6. El Álgebra $\mathrm{Cl}(2,0)$

Recordamos de la sección anterior que existe un isomorfismo de álgebras entre $\mathrm{Cl}(2,0)$ y $\mathbb{R}(2) \simeq \mathrm{End}\,\mathbb{R}^2$; dicho isomorfismo es en realidad la *representación de definición* $\mathrm{Cl}(2,0)$ en $\mathbb{R}^2$. Para realizar explícitamente esta representación primero observemos que, por la Proposición 5.16, $\Gamma^2 = -1_{\mathrm{Cl}}$. Es decir, nuestra representación $\gamma : \mathrm{Cl}(2,0) \to \mathrm{End}\,\mathbb{R}^2$, debe cumplir que $\gamma(\Gamma)^2 = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. En otras palabras, $\gamma(\Gamma)$ define una estructura compleja en $\mathbb{R}^2$. Elegimos la base de $\mathbb{R}^2$ para la cual $\gamma(\Gamma)$ toma la forma

$$\gamma(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En términos de dicha base podemos escribir,

$$\gamma(e_i) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

Debe ahora cumplirse que $\gamma(\Gamma) \circ \gamma(e_i) = -\gamma(e_i) \circ \gamma(\Gamma)$ para $i = 1, 2$, y ésta se traduce en,

$$\begin{pmatrix} b_i & -a_i \\ d_i & -c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ -a_i & -b_i \end{pmatrix}.$$

Entonces, $a_i = -d_i$ y $b_i = c_i$. Es inmediato verificar que la condición $e_i^2 = 1_{\mathrm{Cl}}$, que a su vez dice que $\gamma(e_i) \circ \gamma(e_i) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, implica que $a_i^2 + b_i^2 = 1$, o dicho de otra forma, $a_i = \cos\theta_i$ y $b_i = \operatorname{sen}\theta_i$, para algún ángulo θ_i. Es decir,

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Necesitamos ahora que se cumpla la relación $\gamma(e_1) \circ \gamma(e_2) = \gamma(\Gamma)$. Cálculos elementales muestran que esta condición se traduce en $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$ y $\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = -1$. Para ángulos en el intervalo $[0, 2\pi]$, estas condiciones se satisfacen únicamente si $\theta_2 - \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ o, de forma equivalente, $\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$. Queda claro que al fijar uno de los dos ángulos, se fija automáticamente el otro, en virtud de que $\gamma(\Gamma)$ se había fijado a priori. Fijemos entonces $\theta_2 \leq 3\pi/2$, de manera que $\theta_1 = \theta_2 + \pi/2$. Se comprueba directamente que $\gamma(e_1) \circ \gamma(e_2) = -\gamma(e_2) \circ \gamma(e_1)$.

Resulta interesante concluir de estos cálculos que cada punto del círculo unitario determina una γ compatible con la elección de $\gamma(\Gamma)$. Por simplicidad tomemos $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ y $\theta_1 = 0$. Entonces,

$$\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la forma en la que la construimos es claro que γ es una representación y es de Clifford.

Nota 6.1. Observemos que, mientras $\gamma(\Gamma)$ es en realidad una rotación de noventa grados en sentido horario, las transformaciones $\gamma(e_1)$ y $\gamma(e_2)$ son reflexiones; la primera respecto al eje x y la segunda respecto a la recta $x = -y$.

Interpretaremos ahora las transformaciones $\gamma(1_{\mathrm{Cl}})$, $\gamma(e_1)$, $\gamma(e_2)$ y $\gamma(\Gamma)$ bajo la óptica del isomorfismo,

$$\begin{gathered} g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ xe_1 + ye_2 \mapsto x + iy = z \end{gathered}$$

Este isomorfismo induce un isomorfismo entre $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ y $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mediante $g \circ (\,\cdot\,) \circ g^{-1}$. En concreto, se tiene que,

$$\begin{gathered} g \circ \gamma(1_{\mathrm{Cl}}) \circ g^{-1}(z) = g \circ \gamma(1_{\mathrm{Cl}})(x,y) = g(x,y) = z \\ \text{es decir, } \gamma(1_{\mathrm{Cl}}) \leftrightarrow z \mapsto z \\ g \circ \gamma(e_1) \circ g^{-1}(z) = g \circ \gamma(e_1)(x,y) = g(x,-y) = \bar{z} \\ \text{es decir, } \gamma(e_1) \leftrightarrow z \mapsto \bar{z} \\ g \circ \gamma(e_2) \circ g^{-1}(z) = g \circ \gamma(e_2)(x,y) = g(-y,-x) = -i\bar{z} \\ \text{es decir, } \gamma(e_2) \leftrightarrow z \mapsto -i\bar{z} \\ g \circ \gamma(\Gamma) \circ g^{-1}(z) = g \circ \gamma(\Gamma)(x,y) = g(-y,x) = iz \\ \text{es decir, } \gamma(\Gamma) \leftrightarrow z \mapsto iz \end{gathered}$$

Consideremos la transformación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que bajo el isomorfismo g se obtiene de la transformación $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $z \mapsto A(z) = \alpha z$, con $\alpha = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$. Es fácil ver que en esta caso,

$$g^{-1} \circ A \circ\ g = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

Por otra parte, dada una tranformación lineal $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$, ésta se transforma de acuerdo a

$$g \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ g^{-1}(z) = (ax+by) + i(cx+dy), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

y es posible escribir el lado derecho en la forma $\alpha z + \beta\bar{z}$, siendo $\alpha = \frac{a+d}{2} + i\frac{c-b}{2}$ y $\beta = \frac{a-d}{2} + i\frac{c+b}{2}$. En otras palabras, estamos escribiendo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho & -\sigma \\ \sigma & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $a = \lambda + \rho$, $b = -\mu + \sigma$, $c = \mu + \sigma$ y $d = \lambda - \rho$.

Con lo cual, $\operatorname{End} \mathbb{R}^2 \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \circ \kappa$. Siendo κ la función que conjuga números complejos.

Proposición 6.2. En términos de esta descomposición, las transformaciones $\gamma(1_{\mathrm{Cl}})$, $\gamma(e_1)$, $\gamma(e_2)$ y $\gamma(\Gamma)$ que son imágenes de la base del álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(2,0)$, se corresponden con,

$$\begin{array}{ll} 1_{\mathrm{Cl}} \mapsto (1, 0 \circ \kappa) & e_1 \mapsto (0, 1 \circ \kappa) \\ e_2 \mapsto (0, -i \circ \kappa) & \Gamma \mapsto (i, 0 \circ \kappa) \end{array}$$

En lo que resta de la sección trabajaremos tanto con el isomorfismo de $\mathrm{Cl}(2,0)$ con $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^2$ así como con el isomorfismo de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^2$ con $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C} \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C} \circ \kappa$.

6.1. Operador de Hodge en $\mathrm{Cl}(2,0)$

Utilizando la definición del operador de Hodge que se dio, se obtiene la siguiente tabla de su acción en los elementos de la base de $\Lambda\mathbb{R}^2$:

$\Lambda^0 \oplus \Lambda^2$	Λ^1
$*1_\Lambda = \Gamma$	$*e_1 = e_2$
$*\Gamma = 1_\Lambda$	$*e_2 = -e_1$

Una vez calculados los valores del operador de Hodge en la base de $\Lambda\mathbb{R}^2$, empleamos el isomorfismo de $\Lambda\mathbb{R}^2$ con $\mathrm{Cl}(2,0)$, para realizar el operador de Hodge en términos de la representación $\gamma : \mathrm{Cl}(2,0) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^2$. Lo que resulta es la transformación,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{2\times 2} \mapsto *1_{2\times 2} = \gamma(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma(e_1) \mapsto *\gamma(e_1) = \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma(e_2) \mapsto *\gamma(e_2) = -\gamma(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma(\Gamma) \mapsto *\gamma(\Gamma) = \gamma(1_{Cl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que esta transformación puede escribirse en la forma,

$$*X = \gamma(\Gamma) \circ X^a,$$

y a continuación definimos X^a:

Definición 6.3. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K(2) \simeq \mathrm{End}_K\,K^2$, con $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Entonces,

$$X^a = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

denotará a la matriz adjunta clásica de X derivada de la regla de Cramer.

La propiedad fundamental de la matriz adjunta clásica asociada a una matriz X por vía de la regla de Cramer, en cualquier dimensión n, es la siguiente:

$$XX^a = X^aX = (\det X)\,1_{n\times n}.$$

Además, esta propiedad resulta ser independiente de la base elegida para escribir las entradas matriciales de X y de X^a, de manera que la misma tiene sentido como una propiedad de los elementos de $\mathrm{End}_K K^n$ y no solamente de sus matrices, dando lugar a,

$$X \circ X^a = X^a \circ X = (\det X)\,\mathrm{Id}_{K^n}.$$

Nosotros nos restringiremos en éste y el siguiente capítulo al caso $n = 2$ y usaremos indistintamente esta propiedad tanto para los endomorfismos, como para las matrices que los representan, según sea necesario. Para consultar la definición general y la elaboración de los detalles que dan lugar a esta propiedad fundamental, referimos al lector a [11].

En términos de la descomposición $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^2 \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C} \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C} \circ \kappa$, el operador de Hodge actúa en la base de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} *1 &= *(1, 0 \circ \kappa) = (i, 0 \circ \kappa) & \qquad *\Gamma &= *(i, 0 \circ \kappa) = (1, 0 \circ \kappa) \\ *e_1 &= *(0, 1 \circ \kappa) = (0, -i \circ \kappa) & \qquad *e_2 &= *(0, -i \circ \kappa) = (0, -1 \circ \kappa) \end{aligned}$$

En general,

$$(\alpha, \beta \circ \kappa) \;\mapsto\; *(\alpha, \beta \circ \kappa) = (-i\kappa(\alpha), \beta \circ (-i\kappa)).$$

6.2. Correspondencia con la Derivada Exterior, la Codiferencial y el Operador de Dirac

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto y consideremos las funciones diferenciables $\omega : U \to \mathrm{Cl}(2,0)$. Una tal función se corresponde con 4 funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$, digamos ω_0, ω_1, ω_2 y ω_{12}, de manera que,

$$\omega = \omega_0\, 1_{\mathrm{Cl}} + \omega_1\, e_1 + \omega_2\, e_2 + \omega_{12}\, \Gamma.$$

Sea $C^\infty(U; \mathrm{Cl}(2,0))$ el conjunto de todas estas funciones diferenciables. Bajo la correspondencia de $\Lambda\mathbb{R}^2$ con $\mathrm{Cl}(2,0)$, podemos, por un lado, identificar a $C^\infty(U; \mathrm{Cl}(2,0))$ con $\Omega(U)$; por otro lado, podemos determinar el efecto de la derivada exterior y de la codiferencial y verlas como operadores en $C^\infty(U; \mathrm{Cl}(2,0))$. Concretamente, la identificación $\Lambda\mathbb{R}^2 \simeq \mathrm{Cl}(2,0)$ la llevamos a $\Omega(U) \simeq C^\infty(U; \mathrm{Cl}(2,0))$, de manera $C^\infty(U)$-lineal, de tal forma que,

$$\varphi_0 + \varphi_1 dx^1 + \varphi_2 dx^2 + \varphi_{12} dx^1 \wedge dx^2 \quad \leftrightarrow \quad \varphi_0 1_{\mathrm{Cl}} + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_{12}\Gamma \tag{26}$$

Procedemos a calcular la derivada exterior y codiferencial de los distintos elementos de los subespacios de las formas diferenciales.

Si $\omega_0 = \varphi \in \Omega^0(U)$, entonces,

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= \partial_1\varphi_1 dx^1 + \partial_2\varphi_2 dx^2 \\ \delta\omega_0 &= 0 \end{aligned}$$

Si ahora $\omega_1 = \sum \varphi_i\, dx^i \in \Omega^1(U)$, entonces,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= (\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1)\, dx^1 \wedge dx^2 \\ \delta\omega_1 &= (\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2)\, 1_\Omega \end{aligned}$$

Finalmente, si $\omega_2 = \varphi_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \varphi_{12}\Gamma \in \Omega^2(U)$, entonces,

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= 0 \\ \delta\omega_2 &= \partial_2\varphi_{12}\, dx^1 - \partial_1\varphi_{12}\, dx^2 \end{aligned}$$

A continuación veremos cómo actúan la derivada exterior y la codiferencial bajo el isomorfismo (26) y la representación de $\mathrm{Cl}(2,0)$. Entonces, en $\Omega^0(U)$ se tiene que,

$$d\omega_0 = \partial_1\varphi_1 dx^1 + \partial_2\varphi_2 dx^2 \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} \partial_1\varphi & -\partial_2\varphi \\ -\partial_2\varphi & -\partial_1\varphi \end{pmatrix} \\ (0, (\partial_1\varphi - i\partial_2\varphi) \circ \kappa) \end{cases}$$

$$\delta\omega_0 = 0$$

Para $\omega_1 = \sum \varphi_i dxi \in \Omega^1(U)$, se tiene que,

$$d\omega_1 = (\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1)\, dx^1 \wedge dx^2 \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -(\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1) \\ (\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1) & 0 \end{pmatrix} \\ (i\,(\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1)\,, 0 \circ \kappa) \end{cases}$$

$$\delta\omega_1 = (\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2)\, 1_\Omega \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^2 \partial_i\varphi_i\right) & 0 \\ 0 & \left(\sum_{i=1}^2 \partial_i\varphi_i\right) \end{pmatrix} \\ \left(\left(\sum_{i=1}^{2} \partial_i\varphi_i\right), 0 \circ \kappa\right) \end{cases}$$

Para $\omega_2 = \varphi_{12}\Gamma \in \Omega^2(U)$, se tiene que,

$$d\omega_2 = 0$$

$$\delta\omega_2 = \partial_2\varphi_{12} dx^1 - \partial_1\varphi_{12} dx^2 \qquad \mapsto \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} \partial_2\varphi_{12} & \partial_1\varphi_{12} \\ \partial_1\varphi_{12} & \partial_2\varphi_{12} \end{pmatrix} \\ (0, \partial_2\varphi_{12} + i\partial_1\varphi_{12} \circ \kappa) \end{cases}$$

Proseguimos a calcular el operador de Dirac y ver su relación con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones complejas.

6.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

A partir de las ecuaciones anteriores es inmediato obtener el operador de Dirac $D = d + \delta$ y el Laplaciano $\Delta = D^2$. Consideremos el conjunto de ecuaciones $D\omega = 0$,

$$\begin{aligned} D\omega = & (\partial_1\varphi_1 + \partial_2\varphi_2)\, 1_\Omega + (\partial_1\varphi + \partial_2\varphi_{12})\, dx^1 + (\partial_2\varphi - \partial_1\varphi_{12})\, dx^2 + \\ & + (\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1)\, dx^1 \wedge dx^2 = 0\,, \end{aligned}$$

con,

$$\omega \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \varphi+\varphi_1 & -\varphi_{12}-\varphi_2 \\ \varphi_{12}-\varphi_2 & \varphi-\varphi_1 \end{pmatrix} \\ (\varphi+i\varphi_{12}, (\varphi_1-i\varphi_2)\circ\kappa) \end{cases}$$

Entonces,

$$D\omega \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \partial_1 & -\partial_2 \\ -\partial_2 & -\partial_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi+\varphi_1 & -\varphi_{12}-\varphi_2 \\ \varphi_{12}-\varphi_2 & \varphi-\varphi_1 \end{pmatrix}^T \\ \kappa(\partial_1+i\partial_2)\circ(\kappa(\varphi+i\varphi_{12})\,,\,(\varphi_1-i\varphi_2)\circ\kappa) \end{cases}$$

Nota 6.4. Observemos que el operador de Dirac queda representado como $\gamma(e_1)\,\partial_1+\gamma(e_2)\,\partial_2$ actuando sobre la forma diferencial $\hat{\omega}=\omega_0+\omega_1-\omega_{12}$.

Dado que el operador de Dirac es lineal, al igualar estas últimas ecuaciones a cero se obtienen 4 ecuaciones linealmente independientes que corresponden a dos juegos de ecuaciones de Cauchy-Riemann, una para $\Phi=\varphi_{12}+i\varphi$ y la otra para $\Psi=\varphi_2+i\varphi_1$. Un juego de ecuaciones corresponde a la parte que conmuta con la estructura compleja y la otra a la que anticonmuta. Es decir,

$$D\omega=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_1\varphi_1=-\partial_2\varphi_2 & \text{y} \quad \partial_2\varphi_1=\partial_1\varphi_2 \\ \partial_1\varphi=-\partial_2\varphi_{12} & \text{y} \quad \partial_2\varphi=\partial_1\varphi_{12} \end{cases}.$$

7. El Álgebra $\mathrm{Cl}(3,1)$

En esta sección se presenta una representación del álgebra de Clifford para un espacio de 4 dimensiones con la geometría de Minkowski ($\operatorname{sgn} B = (3,1)$).

Dicha representación está fuertemente ligada al álgebra de Lie real $\mathfrak{u}_2$ y nos permite interpretar de manera clara la geometría que está detrás de $\mathrm{Cl}(3,1)$.

En la sección anterior usamos el hecho de que $\mathrm{Cl}(2,0) \simeq \mathbb{R}(2) \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$. Después, bajo el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ para el que multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ en $\mathbb{C}$ correspondía a la transformación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada al elemento $\Gamma = e_1 e_2$ de $\mathrm{Cl}(2,0)$, conseguimos primero descomponer a $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ en la forma $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \circ \kappa$, siendo $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugación compleja. Para completar la realización de $\mathrm{Cl}(2,0)$ en $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \circ \kappa$ observamos que la aplicación de Clifford $\mathbb{R}^2 \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \circ \kappa$ tenía que contener a su imagen en el sumando directo $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \circ \kappa$ porque todo vector v de $\mathbb{R}^2$ satisface la ecuación $\Gamma\, v = -v\, \Gamma$ en $\mathrm{Cl}(2,0)$.

En esta sección vamos a representar al álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(3,1)$ en la forma $\operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \alpha$, para una aplicación α antilineal e invertible fija. La manera de hacerlo será completamente análoga.

Comenzamos por recordar que si $B : \mathbb{R}^{3,1} \times \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R}$ es la geometría del espacio-tiempo de Minkowski, podemos encontrar una base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ que diagonaliza a B en la forma $\operatorname{diag}\{-1,1,1,1\}$. Sabemos también que en el álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(3,1)$ del par $(\mathbb{R}^{3,1}, B)$, el elemento $\Gamma = e_0 e_1 e_2 e_3$ está definido, hasta un signo, de manera invariante ante las transfromaciones inducidas en $\mathrm{Cl}(3,1)$ por el grupo de Lorentz $\mathrm{O}(3,1)$ y tiene la propiedad de que $\Gamma^2 = -1$. En particular, si $\rho : \mathrm{Cl}(3,1) \to \operatorname{End} W$ fuera cualquier representación del álgebra de Clifford en un espacio vectorial W, la imagen de Γ define una estructura compleja en W. Esto es, $\rho(\Gamma)^2 = -\operatorname{Id}_W$. Además, para cualquier elemento e_j de la base de $\mathbb{R}^{3,1}$, se tiene que $e_j \Gamma = -\Gamma\, e_j$ y por lo tanto, para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^{3,1} \subset \mathrm{Cl}(3,1)$, se tiene que $v\, \Gamma = -\Gamma\, v$; en consecuencia, para cualquier representación $\rho : \mathrm{Cl}(3,1) \to \operatorname{End} W$ se tendrá que,

$$\rho(v) \circ \rho(\Gamma) = -\rho(\Gamma) \circ \rho(v).$$

En otras palabras, los elementos de $\mathbb{R}^{3,1} \subset \mathrm{Cl}(3,1)$ deben anticonmutar con la estructura compleja definida por $\rho(\Gamma)$. Si usamos $\rho(\Gamma)$ para definir una multpilicación por $i = \sqrt{-1}$ en W, entonces los elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{3,1}$ deben definir transformaciones *antilineales* . Buscaremos entonces una aplicación de Clifford que produzca un isomorfismo de álgebras,

$$\mathrm{Cl}(3,1) \simeq \mathbb{R}(4) \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 \simeq \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \alpha\,,$$

de tal forma que el ismorfismo entre $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{C}^2$ haga que la imagen de $\Gamma = e_0 e_1 e_2 e_3$ corresponda a multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ en $\mathbb{C}^2$. Esto fija que

$$\Gamma \;\mapsto\; i\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} \simeq i\, 1_{2\times 2}\,,$$

quedando obviamente en el sumando directo de las transformaciones lineales $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Luego, habremos de definir una aplicación de Clifford $\gamma : \mathbb{R}^{3,1} \to$

$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$, que, como hemos mencionado, tendrá su imagen en el sumando directo $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$, de las transformaciones antilineales $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Lo que queremos conseguir es un diagrama como el siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{3,1} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, hook] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha \\ & \mathrm{Cl}(3,1) \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

A continuación vamos entonces a fijar α en términos de una base $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ que mantendremos fija a lo largo de esta sección. La definición de α es:

$$\alpha(u_1) = u_2, \qquad \text{y} \qquad \alpha(u_2) = -u_1.$$

Al ser α antilineal, $\alpha(z\,u_j) = \bar{z}\,\alpha(u_j)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$ y cualquier $j \in \{1,2\}$. En particular, la versión matricial de α es,

$$\alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Esta elección de α guarda una interesante relación con los elementos de $\mathbb{C}(2) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2$.

Proposición 7.1. Sea $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación antilineal e invertible descrita anteriormente y sea $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$, una transformación lineal arbitraria. Entonces,

$$\alpha \circ X \circ \alpha = (-X^*)^a\,.$$

A continuación vamos a escribir una matriz arbitraria $Z \in \mathbb{C}(2)$ en la forma $Z = X + iY$ siendo X y Y elementos del álgebra de Lie real $\mathfrak{u}_2$. Recordamos entonces que,

$$\mathfrak{u}_2 = \{X \in \mathbb{C}(2) | X^* = -X\} = \left\{ X \in \mathbb{C}(2) \middle| X = i \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \right\},$$

de manera que si $X, Y \in \mathfrak{u}_2 \;\Rightarrow\; \alpha\,X\,\alpha = X^a$ y $\alpha\,(iY)\,\alpha = -iY^a$. Claramente, la descomposición $Z = X + iY \in \mathbb{C}(2)$ con X y Y en $\mathfrak{u}_2$, da lugar a una descomposición similar en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ y cualquier elemento Z de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ se puede escribir de manera única en esta forma.

Observamos también que $\mathfrak{u}_2$ como espacio vectorial real, es isomorfo al espacio-tiempo de Minkowski. Claramente las dimensiones coinciden, pero el determinante, $\det(X)$, para $X \in \mathfrak{u}_2$ coincide con la forma cuadrática asociada B cuando X lo vemos como el cuadrivector $t\,e_0 + x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$; ambas expresiones dan por resultado $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. En otras palabras, $\det(\,\cdot\,)$ en $\mathfrak{u}_2$ es la forma cuadrática que coincide con la forma cuadrática $B(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R}$, cuando B es la geometría asociada al espacio-tiempo. Luego, sus álgebras de Clifford son isomorfas.

A continuación vamos a dar una base conveniente de $\mathfrak{u}_2$ que evidencie el isomorfismo con $\mathbb{R}^{3,1}$; a saber, la base que consiste de las matrices de Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, si $X \in \mathfrak{u}_2$, podemos escribir,

$$X = t\,\sigma_0 + x\,\sigma_1 + y\,\sigma_2 + z\,\sigma_3,$$

con x, y, z y t reales. O bien, siguiendo la notación usual, escribiremos $X = x^\mu \sigma_\mu$, con la suma desde $\mu = 0$ hasta $\mu = 3$. Igualmente, seguiremos la convención estándar de que los índices griegos toman valores entre 0 y 3, mientras que si usamos índices latinos, éstos toman valores entre 1 y 3, de manera que $X = x^0\sigma_0 + x^i\sigma_i$. Queda claro entonces que el isomorfismo con el espacio-tiempo de Minkowski es simplemente,

$$\mathfrak{u}_2 \ \ni \ t\,\sigma_0 + x\,\sigma_1 + y\,\sigma_2 + z\,\sigma_3 \ \leftrightarrow \ t\,e_0 + x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 \ \in \ \mathbb{R}^{3,1}\,.$$

Podemos ahora dar el primer resultado fuerte de esta sección:

Proposición 7.2. La función lineal $\gamma : \mathfrak{u}_2 \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$, definida por $\gamma(X) = X \circ \alpha$, es de Clifford y se extiende a un isomorfismo de álgebras $\mathrm{Cl}(3,1) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$.

Para ver que es de Clifford, observamos que,

$$(X \circ \alpha)^2 = X \circ (\alpha \circ X \circ \alpha) = X \circ X^a = (\det\,X)\ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}\ .$$

El siguiente resultado será útil para hacer cálculos y mostrar que, en efecto, la función γ se extiende a un isomorfismo de $\mathrm{Cl}(3,1)$ en $\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)\,\alpha$.

Proposición 7.3. Para las matrices de Pauli, se tiene que,

$$\begin{aligned} \sigma_0^a &= \sigma_0 & \qquad \sigma_j^a &= -\sigma_j \\ (i\sigma_0)^a &= i\sigma_0 & \qquad (i\sigma_j)^a &= -i\sigma_j \end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, si consideramos la base de $\mathfrak{u}_2$ descrita previamente, tendremos que,

$$\begin{aligned} e_0e_1e_2e_3 \mapsto\ & (i\sigma_0\alpha)(i\sigma_1\alpha)(i\sigma_2\alpha)(i\sigma_3\alpha) \\ =\ & i\sigma_0(\alpha\, i\sigma_1\alpha)i\sigma_2(\alpha\, i\sigma_3\alpha) \\ =\ & \sigma_0\sigma_1^a\sigma_2\sigma_3^a \\ =\ & \sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \\ =\ & i\sigma_0 \end{aligned}$$

Observamos que ésta era justamente la condición que buscábamos: que el elemento $\Gamma = e_0e_1e_2e_3$, bajo la representación del álgebra de Clifford, se tranformara en multiplicar por i. A continuación es fácil comprobar que los elementos de la base de Cl$(3,1)$ se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1_{Cl} &\mapsto \sigma_0 \\
e_\mu &\mapsto i\sigma_\mu \alpha \\
e_{0i} &\mapsto \sigma_i \\
e_{ij} &\mapsto i\sigma_k\,, \qquad (i,j,k) \in A_3 \\
e_{123} &\mapsto -\sigma_0 \alpha \\
e_{0ij} &\mapsto -\sigma_k \alpha\,, \qquad (i,j,k) \in A_3 \\
\Gamma &\mapsto i\sigma_0
\end{aligned}$$

Observamos que los elementos cuadráticos del álgebra de Clifford Cl$(3,1)$, $\{e_{0i}, e_{ij}\}$ se transforman en los generadores de las matrices complejas de 2×2 sin traza; éstas son, las generadas por $\{\sigma_i, i\sigma_k\}$; en otras palabras, un subespacio de dimensión real 6 de $\mathbb{C}(2)$, que inmediatamente reconocemos como $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, y que, como veremos, es isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Lorentz. El subespacio complementario a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}(2)$, es el subespacio real de dimensión 2 generado por $\{\sigma_0, i\sigma_0\}$. Queda claro que esto genera completamente las transformaciones $\mathbb{C}$-lineales $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}(2)$.

Por otro lado, el subespacio de las transformaciones $\mathbb{C}$-antilineales $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\circ \alpha \simeq \mathbb{C}(2)\alpha$ está generado por $\{i\sigma_\mu\alpha\}$ que es la imagen de $\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathfrak{u}_2$ y por $\{\sigma_\mu\alpha\}$ que es la imagen de los elementos cúbicos $\{e_{123}, e_{0ij}\}$ en Cl$(3,1)$.

En resumen, *hemos demostrado que* Cl$(3,1)$ es un álgebra isomorfa a $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}^2 \circ \alpha$ bajo la extensión canónica de la aplicación de Clifford γ.

Hemos mencionado en la demostración que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, el álgebra de Lie de matrices complejas de 2×2 sin traza, es isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Lorentz $\mathfrak{o}_{3,1}$. A continuación veremos cómo es que, ambos espacios de dimensión 6 sobre los números reales, son efectivamente isomorfos como álgebras de Lie; es decir, que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{o}_{3,1}$.

Podemos definir, para toda $a \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, una transformación $\mathbb{R}$-lineal $T_a : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R}^{3,1}$. Lo hacemos dentro de $Cl(3,1)$ de la siguiente manera:

$$Cl(3,1) \supset \mathbb{R}^{3,1} \ni X\alpha \to [a, X\alpha] \in \mathbb{R}^{3,1} \subset Cl(3,1), \quad \forall X \in \mathfrak{u}_2.$$

Observamos que, como $\alpha a = (a^*)^a \alpha$ para toda a, en particular se obtiene que

$$[a, X\alpha] = aX\alpha - X\alpha a = (aX + Xa^*)\alpha$$

Es inmediato ver que $aX + Xa^* \in \mathfrak{u}_2$, siempre que $X \in \mathfrak{u}_2$. La aplicación

$$X\alpha \mapsto (aX + Xa^*)\alpha, \qquad \forall a \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \tag{27}$$

puede verse como la versión *infinitesimal* (es decir, la que resulta de tomar la derivada a nivel del grupo de Lie $SL_2(\mathbb{C})$ en la identidad) de la aplicación

$$X\alpha \to A(X\alpha)A^{-1}, \qquad \forall A \in SL_2(\mathbb{C}).$$

Vamos a verlo. Nuevamente

$$A(X\alpha)A^{-1} = AX((A^{-1})^*)^a\alpha,$$

pero como $detA = 1$, entonces $((A^{-1})^*)^a = A^*$. Por lo tanto, obtenemos la transformación

$$Cl(3,1) \supset \mathbb{R}^{3,1} \ni X\alpha \mapsto (AXA^*)\alpha \in \mathbb{R}^{3,1} \subset Cl(3,1), \qquad A \in SL_2(\mathbb{C}). \quad (28)$$

De donde es inmediato comprobar que $AXA^* \in \mathfrak{u}_2$, siempre que $X \in \mathfrak{u}_2$. Para ver que (27) es la versión infinitesimal de (28) vamos a suponer que

$$\mathbb{R} \supset (-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto A_t \in SL_2(\mathbb{C})$$

es una curva diferenciable tal que

$$A_0 = 1_{2\times 2} \quad \text{y que} \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t = a \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

Claramente $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A_t X A_t^*) = aX + Xa^*$. Lo cual demuestra la afirmación. De paso, hemos conseguido ver que hay un morfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \rho : SL_2(\mathbb{C}) &\to O(3,1) \\ A &\mapsto \rho(A) \end{aligned}$$

definido mediante la condición $\rho(A)X = AXA^*$ para toda $X \in \mathfrak{u}_2 \simeq \mathbb{R}^{3,1}$.

Esto es claro porque $\det(AXA^*) = \det X$, puesto que detA $= 1$ y es fácil ver que $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$. Enunciamos ahora la afirmación más fuerte relacionada con este morfismo en la siguiente proposición.

Proposición 7.4. El morfismo $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to (SO(3,1))_e$ es suprayectivo y su kernel consta de los elementos $\{\pm 1_{2\times 2}\}$.

Es fácil ver que $\rho(A) = \rho(-A)$ a partir de $X \mapsto AXA^*$. Lo dificil es ver que ρ es suprayectiva en la forma enunciada y que realmente $\ker = \rho\{\pm 1_{2\times 2}\}$. Referimos al lector a [10] para ver la demostración.

Nota 7.5. Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que los grupos de Lie $SL_2(\mathbb{C})$ y $O(3,1)$ son localmente isomorfos y que el morfismo $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \to (SO(3,1))_e$ es una aplicación cubriente 2 a 1. Por definición esto hace de $SL_2(\mathbb{C})$ el grupo espinorial de $(SO(3,1)_e)$ porque ρ es una función continua y $SL_2(\mathbb{C})$ es conexo.

7.1. Operador de Hodge en $\mathrm{Cl}(3,1)$

Ya calculamos en una sección anterior como actua el operador de Hodge en $\Lambda\mathbb{R}^{3,1}$. Dichos cálculos quedan sintetizados en la siguiente tabla:

$\Lambda^0 \oplus \Lambda^4$	$\Lambda^1 \oplus \Lambda^3$		Λ^2
$*1_\Lambda = \Gamma$	$*e_0 = -e_{123}$	$*\,e_{123} = -e_0$	$*e_{0i} = -e_{jk}$
$*\Gamma = -1_\Lambda$	$*e_i = -e_{0jk}$	$*\,e_{0ij} = -e_k$	$*e_{ij} = e_k$

Como ya sabemos, $\mathrm{Cl}(3,1)$ y $\Lambda\mathbb{R}^{3,1}$ son espacios vectoriales isomorfos, de manera que el operador de Hodge puede verse como un operador en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$, de la misma manera en que lo hicimos en el capítulo anterior. Es inmediato comprobar que,

$$*\sigma_0 = i\sigma_0 \qquad *\,(i\sigma_0) = -\sigma_0 \qquad *\,\sigma_j = -i\sigma_j \qquad *\,(i\sigma_j) = \sigma_j.$$

Y en general se tiene que,

$$\begin{aligned} * : \Lambda^0\mathbb{R}^{3,1} \oplus \Lambda^4\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathrm{Span}\{\sigma_0, i\sigma_0\} &\to \mathrm{Span}\{\sigma_0, i\sigma_0\} \simeq \Lambda^0\mathbb{R}^{3,1} \oplus \Lambda^4\mathbb{R}^{3,1} \\ \xi &\mapsto i\xi \\ * : \Lambda^2\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathrm{Span}\{\sigma_j, i\sigma_j\} &\to \mathrm{Span}\{\sigma_j, i\sigma_j\} \simeq \Lambda^2\mathbb{R}^{3,1} \\ \eta &\mapsto -i\eta \end{aligned}$$

Similarmente, en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2 \circ \alpha$ se comprueba que,

$$\begin{aligned} * : \Lambda^1\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathrm{Span}\{i\sigma_\mu\alpha\} &\to \mathrm{Span}\{\sigma_\mu\alpha\} \simeq \Lambda^3\mathbb{R}^{3,1} \\ \xi &\mapsto -i\xi \\ * : \Lambda^3\mathbb{R}^{3,1} \simeq \mathrm{Span}\{\sigma_\mu\alpha\} &\to \mathrm{Span}\{i\sigma_\mu\alpha\} \simeq \Lambda^1\mathbb{R}^{3,1} \\ \eta &\mapsto i\eta \end{aligned}$$

Podemos sintetizar los resultados anteriores en la siguiente proposición.

Proposición 7.6. Sea $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} *X &= iX^a \\ *X\alpha &= iX^*\alpha \end{aligned}$$

7.2. Correspondencia con la Derivada Exterior, la Codiferencial y el Operador de Dirac. Las Ecuaciones de Maxwell

Es bien sabido que el álgebra exterior asociada al espacio-tiempo de Minkowski constituye un espacio bastante natural para modelar el electromagnetismo clásico desde una perspectiva relativista, [12]. A partir de esta sección y hasta el final del capítulo explotaremos algunas de estas propiedades como las ecuaciones de Maxwell y la contrucción de las magnitudes invariantes de los campos electromagnéticos bajo transformaciones de Lorentz.

Comenzamos por calcular la derivada exterior y codiferencial en los elementos de la base de $\Omega\mathbb{R}^{3,1}$ que haremos corresponder con sus respectivos elementos el álgebra de Clifford $\mathrm{Cl}(3,1)$.

Para simplificar la notación, definimos los siguientes conjuntos de pares ordenados:

$$
\begin{aligned}
P &= \{(2,3),(3,1),(1,2)\} \\
Q &= \{(0,1),(0,2),(0,3)\} \\
R &= P \cup Q
\end{aligned}
$$

Sea $\omega_0 = \varphi \in \Omega^0\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial se pueden hacer corresponder, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 &= \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \varphi \, e_\mu \\
\delta\omega_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Si $A = \sum A_\mu dx^\mu \in \Omega^1\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
dA &= \sum_{(\nu,\mu)\in R} \left[\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right] e_{\nu\mu} \qquad (29) \\
\delta A &= \left(-\partial_0 A_0 + \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i\right) 1_{\mathrm{Cl}}
\end{aligned}
$$

Vale la pena observar que δA corresponde precisamente a la divergencia en el espacio-tiempo de Minkoski. De esta forma podemos escribir la ecuación de continuidad de cualquier cuadrivector como $\delta A = 0$.

Si $F = \sum_{(i,j,k)\in A_3} \left[-E_i dx^0 \wedge dx^i + B_i dx^j \wedge dx^k\right] \in \Omega^2\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial corresponden a:

$$
dF = \sum_{(i,j,k)\in A_3} \left[\partial_0 B_k - \partial_j E_i + \partial_i E_j\right] e_{0ij} + \left(\sum_{k=1}^{3} \partial_k B_k\right) e_{123} \qquad (30)
$$

$$
\delta F = \sum_{(i,j,k)\in A_3} \left[-\partial_0 E_k + \partial_i B_j - \partial_j B_i\right] e_k - \left(\sum_{i=1}^{3} \partial_i E_i\right) e_0 \qquad (31)
$$

Nota 7.7. El signo negativo que aparece en la definición de la 2-forma F es fundamental para hacer la identificación usual con las ecuaciones de Maxwell, como veremos más adelante.

Si $\omega_3 = \sum_{(i,j)\in P} \varphi_{0ij} dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j + \varphi_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^3\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
d\omega_3 &= \left(\partial_0 \varphi_{123} - \sum_{(i,j,k)\in A_3} \partial_k \varphi_{0ij}\right) \Gamma \\
\delta\omega_3 &= \sum_{(i,j,k)\in A_3} \left(\left(\partial_i \varphi_{123} - \partial_0 \varphi_{0jk}\right) e_{jk} + \left(\partial_i \varphi_{0ki} - \partial_j \varphi_{0jk}\right) e_{0k}\right)
\end{aligned}
$$

Sea $\omega_4 = \varphi_{0123}\Gamma \in \Omega^4\mathbb{R}^{3,1}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$\begin{aligned} d\omega_4 &= 0 \\ \delta\omega_4 &= \partial_0\varphi_{0123}e_{123} + \sum_{(i,j,k)\in A_3} \partial_i\varphi_{0123}e_{0jk} \end{aligned}$$

Una vez calculados estos operadores, es inmediato reconocer los componentes principales del electromagnetismo clásico. Primero, recordemos las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético en términos del potencial escalar, φ, y del potencial vectorial, $\vec{A}$.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} \\ \vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \end{aligned} \tag{32}$$

Notemos que al elegir la 1-forma $A = -\varphi dx^0 + \sum A_i dx^i$ la ecuación (29) toma la forma

$$dA = \sum \left(\partial_0 A_i + \partial_i\varphi\right) e_{0i} + \sum_{(i,j)\in P} \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) e_{ij}.$$

De esta manera es clara la correspondencia entre dA y las ecuaciones (32) al definir la 2-forma $F = \sum(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = \sum\left(-E_i dx^0\wedge dx^i + B_i dx^j\wedge dx^k\right)$ como lo hicimos. A la 2-forma F se le conoce como tensor de Faraday.

Las ecuaciones de Maxwell en unidades naturales son:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{B} &= 4\pi\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Donde ρ es la densidad de carga y $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ la densidad de corriente.

Entonces, si definimos la 1-forma de fuentes, $J = -\rho e_0 + \sum J_i e_i$, es inmediato verificar que al igualar las ecuaciones (30) y (31) a ésta se obtienen precisamente las ecuaciones de Maxwell; es decir, las ecuaciones de Maxwell toman la forma,

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ \delta F &= 4\pi J \end{aligned}$$

Y en términos del operador de Dirac,

$$DF = (d+\delta)F = 4\pi J.$$

Nota 7.8. Si volvemos a aplicar δ en ambos lados de la ecuación de fuentes se llega a que $\delta J = 0$. Entonces, como notamos anteriormente, las fuentes del campo electromagnético satisfacen la ecuación de continuidad:

$$\delta J = 0 \Rightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Proseguimos a obtener el equivalente de los operadores derivada exterior y codiferencial en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 \circ \alpha$.

Sea $A \in \Omega^1 \mathbb{R}^{3,1}$ una 1-forma cualquiera. Ésta se corresponde con,

$$A = i \begin{pmatrix} -\varphi + A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & -\varphi - A_3 \end{pmatrix} \circ \alpha$$

Y al caclular su derivada exterior y codiferencial, obtenemos,

$$\begin{aligned} dA &\mapsto \sum_{(i,j,k) \in A_3} \left[(\partial_0 A_k - \partial_k A_0) + i \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i \right) \right] \sigma_k \\ \delta A &\mapsto \left(-\partial_0 A_0 + \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i \right) \sigma_0 \end{aligned}$$

Consideremos $F \in \Omega^2 \mathbb{R}^{3,1}$. Ésta se corresponde con,

$$\begin{aligned} F &= \sum (-E_k + iB_k) \sigma_k \\ &= \begin{pmatrix} -E_3 + iB_3 & (-E_1 + iB_1) - i(-E_2 + iB_2) \\ (-E_1 + iB_1) + i(-E_2 + iB_2) & E_3 - iB_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y al calcular su derivada exterior y codiferencial, obtenemos la correspondencia,

$$\begin{aligned} dF &\mapsto - \left(\sum_{k=1}^{3} \left(\partial_0 B_k + (\nabla \times \vec{E})_k \right) \sigma_k + \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) \sigma_0 \right) \circ \alpha \\ \delta F &\mapsto \left(\sum_{k=1}^{3} \left(-\partial_0 E_k + (\nabla \times \vec{B})_k \right) i\sigma_k - \left(\nabla \cdot \vec{E} \right) i\sigma_0 \right) \circ \alpha \end{aligned}$$

Consideremos $\omega_3 \in \Omega^3 \mathbb{R}^{3,1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d\omega_3 &\mapsto \left(\partial_0 \varphi_{123} - \sum_{(i,j,k) \in S} \partial_k \varphi_{0ij} \right) i\sigma_0 \\ \delta\omega_3 &\mapsto \sum_{(i,j,k) \in A_3} \left(\partial_i \varphi_{0ki} - \partial_j \varphi_{0jk} \right) \sigma_k + \left(\partial_k \varphi_{123} - \partial_0 \varphi_{0ij} \right) i\sigma_k \end{aligned}$$

Finalmente consideremos $\omega_4 \in \Omega^4 \mathbb{R}^{3,1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d\omega_4 &\mapsto 0_{2\times 2} \\ \delta\omega_4 &\mapsto - \left(\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \varphi_{0123} \right) \sigma_\mu \circ \alpha \end{aligned}$$

Nota 7.9. Observar que al escribir $dA = F = (-E + iB)$, las ecuaciones Maxwell toman la forma,

$$D(-E + iB) = 4\pi\, J\,,$$

siendo D el operador de Dirac, y J identificada con la 1-forma de fuentes del campo que, en el álgebra de Clifford, está contenida en el sumando directo $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}^2 \circ \alpha$.

7.3. Invariantes Relativistas del Electromagnetismo Clásico

Como ya demostramos, al aplicar la transformación que extiende a un elemento de $O(3,1)$ consiste únicamente en multiplicar por ± 1 en el subespacio de $\Lambda\mathbb{R}^{3,1}$ generado por Γ. De esta forma, cualesquiera dos elementos de $\Lambda\mathbb{R}^{3,1}$ tales que su producto pertenezca a dicho subespacio, producirá una cantidad esencialmente *invariante* bajo transformaciones ortogonales. Es más, si nos restringimos a transformaciones de $SO(3,1)_e$, tendremos que dichos elementos son estrictamente invariantes.

Bajo esta óptica podemos darnos cuenta que, ante transformaciones de Lorentz en la componente de la identidad, los siguientes elementos del álgebra de Clifford son *invariantes*:

$$Y \wedge *Y, \qquad F \wedge F, \qquad F \wedge *F \qquad \Gamma$$

siendo $Y = \sum y_\mu dx^\mu$ una 1-forma cualquiera y $F = -E + iB$.

El primer caso corresponde a la invarianza de la norma de los 4-vectores, ya que $Y \wedge *Y = -y_0^2 + \sum y_i^2$; es decir, únicamente nos dice que las transfomaciones de $SO(3,1)_e$ no cambian distancias.

Por otra parte, es fácil verificar que las cantidades asociadas al tensor de Faraday que son invariantes bajo transformaciones de Lorentz en la componente de la identidad son:

$$|E|^2 - |B|^2 \qquad \text{y} \qquad E \cdot B.$$

8. El Álgebra $\mathrm{Cl}(4,2)$

En las secciones anteriores estudiamos detenidamente la forma de obtener las respectivas realizaciones de $\mathrm{Cl}(2+p,p)$, con $p=0$ y $p=1$, en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^{2^p} \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^{2^p} \circ K_p$, con funciones $K_p : \mathbb{C}^{2^p} \to \mathbb{C}^{2^p}$ antilineales e invertibles que elegimos convenientemente en cada caso. El procedimiento que seguimos en dichos casos fue esencialmente el mismo y, de hecho, en este caso seguiremos la misma línea de razonamiento. Por este motivo omitiremos algunos de los pasos con los que ya estamos familiarizados y que desarrollamos con suficiente detalle en las secciones anteriores.

Sabemos que $\mathrm{Cl}(4,2) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^8$, y al igual que en los casos anteriores, $\Gamma \in \mathrm{Cl}(4,2)$ induce una estructura compleja en $\mathbb{R}^8$, que nos permitirá después identificarlo con $\mathbb{C}^4$. Entonces, $Cl(4,2) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^8 \simeq End_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^4 \oplus End_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^4 \circ \beta$, para alguna función $\beta : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ antilineal e invertible fija. Nuevamente, lo primero que hacemos en nuestra realización, $\gamma : \mathrm{Cl}(4,2) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \circ \beta$, es ver que $\gamma(\Gamma) = i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}$.

A continuación vamos a fijar a $\beta : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ en términos de la función $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ del capítulo anterior, utilizando una base $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ de $\mathbb{C}^4$ para la cual

$$\begin{array}{ccc} \alpha(u_1) = u_2 & & \alpha(v_1) = v_2 \\ & \text{y} & \\ \alpha(u_2) = -u_1 & & \alpha(v_2) = -v_1. \end{array}$$

Entonces, definimos β como el operador antilineal diagonal:

$$\beta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$\beta \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \\ -\bar{z}_4 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix}$$

Para obtener el resto de la realización, observemos que $\mathbb{R}^{3,1}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{4,2}$, es más, podemos completar la base canónica del espacio-tiempo de Minkowski a una base canónica de $\mathbb{R}^{4,2}$, a saber $\{e_-, e_+, e_\mu\}$, donde $B(e_\pm, e_\pm) = \pm 1$. De esta forma tenemos que $\mathbb{R}^{4,2} \simeq \mathrm{Span}\{e_-\} \oplus \mathbb{R}^{3,1} \oplus \mathrm{Span}\{e_+\}$, que a su vez podemos identificar con $\mathrm{Span}\{e_-\} \oplus \mathfrak{u}_2 \oplus \mathrm{Span}\{e_+\}$

Proposición 8.1. Sea $\gamma : \mathrm{Cl}(4,2) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \circ \beta$ el mnorfismo $\mathbb{R}$-lineal de álgebras que extiende a la aplicación de Clifford $\mathrm{Span}\{e_-\} \oplus \mathfrak{u}_2 \oplus \mathrm{Span}\{e_+\} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \oplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\,\mathbb{C}^4 \circ \beta$ dada por:

$$\gamma(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^a \end{pmatrix} \circ \beta\,, \qquad X \in \mathfrak{u}_2 \subset \mathbb{R}^{4,2}\,,$$

y

$$\gamma(e_\pm) = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2\times 2} \\ \mp 1_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix} \circ \beta.$$

Mostrar que dicha realización es de Clifford es inmediato. Sin embargo, para calcular explícitamente la imagen de los elementos de la base de $\mathrm{Cl}(4,2)$ y verificar que $\gamma(\Gamma)$ es la multiplicación por $i = \sqrt{-1}$, nos será útil la siguiente proposición.

Proposición 8.2. Sean $X \in \mathfrak{u}_2$ y β la transformación antilineal invertible que definimos anteriormente. Entonces,

$$\beta \circ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^a \end{pmatrix} \circ \beta = \begin{pmatrix} X^a & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se tiene que $\beta \circ \gamma(e_\pm) \circ \beta = -\gamma(e_\pm)$.

Ahora consideremos al elemento $\Gamma = e_0 e_1 e_2 e_3 e_- e_+$. Calculemos su realización por partes utilizando la Proposición anterior se tiene que,

$$\gamma(e_0 e_1 e_2 e_3) = \begin{pmatrix} \sigma_0 \sigma_1^a \sigma_2 \sigma_3^a & 0 \\ 0 & \sigma_0^a \sigma_1 \sigma_2^a \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix},$$

y

$$\gamma(e_- e_+) = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

Entonces, recordando que $\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i 1_{2\times 2}$, llegamos a que:

$$\gamma(\Gamma) = i 1_{4\times 4}.$$

Mediante una serie de cálculos sencillos (pero laboriosos), es posible comprobar que la representación elegida transforma a los elementos de la base de

Cl(4, 2) de la siguiente manera:

$$1_{Cl} \mapsto 1_{4\times 4} \qquad \Gamma \mapsto i1_{4\times 4}$$

$$e_\mu \mapsto \begin{pmatrix} i\sigma_\mu & 0 \\ 0 & i\sigma_\mu^a \end{pmatrix} \circ \beta \qquad e_\pm \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \mp\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$e_{\mu\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu \\ -i\sigma_\mu^a & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{ij} \mapsto \begin{pmatrix} i\sigma_k & 0 \\ 0 & i\sigma_k \end{pmatrix}$$

$$e_{0i} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \qquad e_{-+} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$e_{0ij} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} \circ \beta \qquad e_{123} \mapsto \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$e_{0i\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \pm\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \circ \beta \qquad e_{ij\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_k \\ \mp i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$e_{\mu-+} \mapsto \begin{pmatrix} i\sigma_\mu & 0 \\ 0 & -i\sigma_\mu^a \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$e_{0ij\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \mp\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{0123} \mapsto \begin{pmatrix} i\sigma_0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_0 \end{pmatrix} \qquad e_{0i-+} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$e_{123\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \pm\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{ij-+} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}$$

$$e_{0123\pm} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_0 \\ \pm i\sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \circ \beta \qquad e_{0ij-+} \mapsto \begin{pmatrix} -\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \circ \beta$$

$$e_{123-+} \mapsto \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \circ \beta$$

8.1. Operador de Hodge en Cl(4, 2)

Proseguimos a calcular el operador de Hodge en los elementos de la base. El resultado se muestra en la tabla siguiente:

$\Lambda^0 \oplus \Lambda^6$	Λ^1	Λ^2	Λ^3
$*1_\Lambda = \Gamma$	$*e_0 = -e_{123-+}$	$*e_{0-} = -e_{123+}$	$*e_{0i-} = e_{jk+}$
$*\Gamma = 1_\Lambda$	$*e_i = -e_{0jk-+}$	$*e_{i-} = -e_{0jk+}$	$*e_{0-+} = e_{123}$
	$*e_- = -e_{0123+}$	$*e_{-+} = -e_{0123}$	$*e_{0i+} = e_{jk-}$
	$*e_+ = -e_{0123-}$	$*e_{0i} = -e_{jk-+}$	$*e_{i-+} = e_{0jk}$
		$*e_{ij} = e_{0k-+}$	$*e_{jk+} = -e_{0i-}$
		$*e_{0+} = -e_{123-}$	$*e_{123} = -e_{0-+}$
		$*e_{i+} = -e_{0jk-}$	$*e_{ij-} = -e_{0k+}$
			$*e_{0jk} = -e_{i-+}$

Λ^4	Λ^5
$*e_{123+} = -e_{0-}$	$*e_{123-+} = e_0$
$*e_{0jk+} = -e_{i-}$	$*e_{0jk-+} = e_i$
$*e_{0123} = -e_{-+}$	$*e_{0123+} = e_-$
$*e_{jk-+} = -e_{0i}$	$*e_{0123-} = e_+$
$*e_{0i-+} = e_{jk}$	
$*e_{0jk-} = -e_{i+}$	
$*e_{123-} = -e_{0+}$	

Al igual que en los casos anteriores, en nuestra representación el operador de Hodge consiste en multiplicar por $\pm i$ al elemento al cual se le aplica, donde el signo depende del grado del elemento. En general se tiene que,

$$*\Big|_{\Lambda^0\oplus\Lambda^3\oplus\Lambda^4} \mapsto i \qquad\qquad *\Big|_{\Lambda^1\oplus\Lambda^2\oplus\Lambda^5\oplus\Lambda^6} \mapsto -i$$

8.2. Derivada Exterior y Codiferencial

Recordemos los conjuntos de índices que definimos en la sección anterior,

$$P = \{(2,3),(3,1),(1,2)\}$$
$$R = \{(0,1),(0,2),(0,3),(2,3),(3,1),(1,2)\}.$$

Siempre que escribamos una suma con dos índices griegos, entenderemos que el par (ν,μ) está en R, y por otro lado, siempre que escribamos pares de índices latinos, entenderemos que están en P.

Si $\omega_0 = \varphi \in \Omega^0\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y su codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$\begin{aligned} d\omega_0 =& \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \varphi e_\mu + \partial_- \varphi e_- + \partial_+ \varphi e_+ \\ \delta\omega_0 =& \quad 0 \end{aligned}$$

Sean $\alpha_1 \in \Omega^1\mathbb{R}^{3,1}$ y $\omega_1 = \alpha_1 + \sum_{\pm} A_{\pm} dx^{\pm} \in \Omega^1\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$\begin{aligned} d\omega_1 = \quad & \left(d\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_1\right) + \sum_{\pm}\sum_{\mu=0}^{3}\left(\left[\partial_\mu A_{\pm} - \partial_{\pm}A_\mu\right] e_{\mu\pm}\right) + \\ & + \left(\partial_- A_+ - \partial_+ A_-\right) e_{-+} \\ \delta\omega_1 = \quad & \left(\left(\delta\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_1\right) + \left[\partial_+ A_+ - \partial_- A_-\right]\right) 1_{\mathrm{Cl}} \end{aligned}$$

Con la finalidad de simplificar las ecuaciones obtenidas en $\Lambda^2\mathbb{R}^{4,2}$ definimos los 4-vectores:

$$W_{\pm} := (W_{0\pm}, W_{1\pm}, W_{2\pm}, W_{3\pm})$$

Sean $\alpha_2 \in \Lambda^2\mathbb{R}^{3,1}$ y $\omega_2 = \alpha_2 + \sum W_{\mu\pm} dx^{\mu\pm} + \varphi_{-+} dx^{-+} \in \Omega^2\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$\begin{aligned} d\omega_2 = \quad & \left(d\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_2\right) + \sum_{\mu=0}^{3}\left[\partial_\mu \varphi_{-+} + \partial_+ W_{\mu-} - \partial_- W_{\mu+}\right] e_{\mu-+} + \\ & + \sum_{\pm}\sum_{(\nu,\mu)\in R}\left[\partial_{\pm}\varphi_{\nu\mu} + \partial_\nu W_{\mu\pm} - \partial_\mu W_{\nu\pm}\right] e_{\nu\mu\pm} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_2 = \quad & \left(\delta\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_2\right) + \sum_{\mu=0}^{3}\left[\partial_+ W_{\mu+} - \partial_- W_{\mu-}\right] e_\mu + \\ & + \sum_{\pm}\left[\partial_0 W_{0\pm} + \partial_{\mp}\varphi_{-+} - \sum_{i=1}^{3}\partial_i W_{i\pm}\right] e_{\pm} \end{aligned} \tag{34}$$

Si $\alpha_3 \in \Omega^3\mathbb{R}^{3,1}$ y $\omega_3 = \alpha_3 + \sum \varphi_{\nu\mu\pm} dx^{\nu\mu\pm} + \sum \varphi_{\mu-+} dx^{\mu-+} \in \Omega^3\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
d\omega_3 = \quad & \left(d\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_3\right) + \sum_{\pm}\left(\left(\sum_{(i,j,k)\in A_3}\partial_k\varphi_{ij\pm}\right) - \partial_\pm\varphi_{123}\right)e_{123\pm} + \\
& + \sum_{\pm}\sum_{(i,j)\in P}\left(\partial_0\varphi_{ij\pm} - \partial_\pm\varphi_{0ij} + \partial_j\varphi_{0i\pm} - \partial_i\varphi_{0j\pm}\right)e_{0ij\pm} + \\
& + \sum_{(i,j)\in P}\left(\partial_-\varphi_{ij+} - \partial_+\varphi_{ij-} + \partial_i\varphi_{j-+} - \partial_j\varphi_{i-+}\right)e_{ij-+} + \\
& + \sum_{i=1}^{3}\left(\partial_-\varphi_{0i+} - \partial_+\varphi_{0i-} + \partial_0\varphi_{i-+} - \partial_i\varphi_{0-+}\right)e_{0i-+} \\
\delta\omega_3 = \quad & \left(\delta\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_3\right) + \sum_{\pm}\left[\partial_\mp\varphi_{0-+} - \sum_{i=1}^{3}\partial_k\varphi_{0k\pm}\right]e_{0\pm} \\
& \sum_{(\nu,\mu)\in R}\left[\partial_+\varphi_{\nu\mu+} - \partial_-\varphi_{\nu\mu-}\right]e_{\nu\mu} + \sum_{i=1}^{3}\left[\partial_k\varphi_{k-+} - \partial_0\varphi_{0-+}\right]e_{-+} \\
& + \sum_{\pm}\sum_{(i,j,k)\in A_3}\left[\partial_\mp\varphi_{k-+} - \partial_0\varphi_{0k\pm} + \left(\partial_j\varphi_{jk\pm} - \partial_i\varphi_{ki\pm}\right)\right]e_{k\pm}
\end{aligned}
$$

Sean $\alpha_4 \in \Omega^4\mathbb{R}^{3,1}$ y $\omega_4 = \alpha_4 + \sum\left(\varphi_{123\pm}dx^{123\pm}\right) + \sum\left(\varphi_{\nu\mu-+}dx^{\nu\mu-+}\right) \in \Omega^4\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
d\omega_4 = \quad & \sum_{(i,j)\in P}\left(\partial_+\varphi_{0ij-} - \partial_-\varphi_{0ij+} + \partial_0\varphi_{ij-+} + \partial_j\varphi_{0i-+} - \partial_i\varphi_{0j-+}\right)e_{0ij-+} \\
& + \sum_{\pm}\Big(\partial_0\varphi_{123\pm} + \partial_\pm\varphi_{0123} - \sum_{(i,j,k)\in A_3}\partial_i\varphi_{0jk\pm}\Big)e_{0123\pm} \\
& + \Big(\partial_+\varphi_{123-} - \partial_-\varphi_{123+} + \sum_{(i,j,k)\in A_3}\partial_i\varphi_{jk-+}\Big)e_{123-+} \\
\delta\omega_4 = \quad & \left(\delta\big|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_4\right) + \left[\partial_+\varphi_{123+} - \partial_-\varphi_{123-}\right]e_{123} + \left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i\varphi_{0i-+}\right)e_{0-+} \\
& + \sum_{\pm}\sum_{(i,j,k)\in A_3}\Big(\left[\partial_\mp\varphi_{ij-+} + \partial_0\varphi_{0ij\pm} - \partial_k\varphi_{123\pm}\right]e_{ij\pm} + \\
& \qquad\qquad + \left[\partial_\mp\varphi_{0i-+} + \partial_k\varphi_{0ki\pm} - \partial_j\varphi_{0ij\pm}\right]e_{0i\pm}\Big) \\
& + \sum_{(i,j,k)\in A_3}\left[\partial_0\varphi_{0k-+} + \partial_i\varphi_{ki-+} - \partial_j\varphi_{jk-+}\right]e_{k-+} + \\
& + \sum_{(i,j)\in P}\left[\partial_+\varphi_{0ij+} - \partial_-\varphi_{0ij-}\right]e_{0ij}
\end{aligned}
$$

Sea $\omega_5 = \varphi_{123-+}dx^{123-+} + \sum \varphi_{0ij-+}dx^{0ij-+} + \sum \varphi_{0123\pm}dx0123\pm \in \Omega^5\mathbb{R}^{4,2}$. Entonces, su derivada exterior y codiferencial se corresponden, respectivamente, con:

$$
\begin{aligned}
d\omega_5 = & \left(\partial_0\varphi_{123-+} - \sum_{(i,j,k)\in A_3} \partial_i\varphi_{0jk-+} + \sum_{\pm} \left(\pm\partial_{\mp}\varphi_{0123\pm}\right)\right)\Gamma \\
\delta\omega_5 = & \left(\partial_+\varphi_{0123} - \partial_-\varphi_{0123-}\right)e_{0123} + \sum_{\pm}\left[\partial_{\mp}\varphi_{123-+} - \partial_0\varphi_{0123\pm}\right]e_{123\pm} + \\
& + \sum_{(i,j,k)\in A_3}\Bigg(\left[\partial_i\varphi_{123-+} - \partial_0\varphi_{0jk-+}\right]e_{jk-+} \\
& \qquad + \left[\partial_i\varphi_{0ki-+} - \partial_j\varphi_{0jk-+}\right]e_{0k-+}\Bigg) + \\
& + \sum_{\pm}\sum_{i=1}^{3}\left[\partial_{\mp}\varphi_{0jk-+} - \partial_i\varphi_{0123\pm}\right]e_{0jk\pm}
\end{aligned}
$$

Finalmente consideremos $\omega_6 = \varphi_{0123-+}\Gamma \in \Omega^6\mathbb{R}^{4,2}$, su derivada exterior y codiferencial corresponden, respectivamente, a:

$$
\begin{aligned}
d\omega_6 = & \ 0 \\
\delta\omega_6 = & \ (\partial_0\varphi_{0123-+})e_{123-+} + \sum_{(i,j,k)\in A_3}\left(\partial_i\varphi_{0jk-+}\right)e_{0jk-+} + \\
& + \sum_{\pm}\left(\partial_{\mp}\varphi_{0123-+}\right)e_{\pm}
\end{aligned}
$$

8.3. Recorrido desde las Ecuaciones Maxwell en $\mathrm{Cl}(4,2)$ hasta el Grupo de Transformaciones Conformes del Espacio-tiempo de Minkowski

Como vemos de los cálculos anteriores, cuando están definidas, la derivada exterior y la codiferencial en $\Omega\mathbb{R}^{3,1}$ quedan claramente identificadas dentro de sus contrapartes en $\Omega\mathbb{R}^{4,2}$. Esto quiere decir que las ecuaciones de Maxwell que obtuvimos con el operador de Dirac aplicado a una 2-forma, también quedan contenidas como un subconjunto de ecuaciones dentro de un caso más general.

Consideremos la ecuación de Dirac para una 2-forma de $\Omega\mathbb{R}^{4,2}$. Observemos que la ecuación $d\omega_2 = 0$ implica que, por un lado $d|_{\Omega\mathbb{R}^{3,1}}\alpha_2 = 0$, es decir, la parte correspondiente a $\Omega\mathbb{R}^{3,1}$ satisface las ecuaciones de Maxwell homogéneas. Por otra parte, en el resto de las componentes, $d\omega_2 = 0$ implica que,

$$
\begin{aligned}
\partial_{\pm}\vec{E} + \partial_0\vec{W}_{\pm} - \nabla W_{0\pm} = 0 \\
-\partial_{\pm}\vec{B} + \nabla\times\vec{W}_{\pm} = 0 \\
\partial_\mu\varphi_{-+} + \partial_+W_{\mu-} - \partial_-W_{\mu+} = 0
\end{aligned}
$$

Si ahora consideramos la ecuación $\delta\omega_2 = 0$, vemos que no ocurre lo mismo. En este caso las ecuaciones correspondientes al subespacio $\Omega\mathbb{R}^{3,1}$ se mezclan con las del resto. La forma explícita de las ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
&\partial_0 W_{0\pm} + \partial_\pm \varphi_{-+} - \nabla \cdot \vec{W}_\pm = 0\\
&\partial_+ W_{0+} - \partial_- W_{0-} + \nabla \cdot \vec{E} = 0\\
&\partial_+ \vec{W}_+ - \partial_- \vec{W}_- + \partial_0 \vec{E} - \nabla \times \vec{B} = 0
\end{aligned}$$

El análisis de la posible relevancia física o matemática de estas ecuaciones parece ser suficiente, por sí mismo, para un trabajo independiente. Por esta razón no profundizamos más en estos resultados y dejamos al lector que forme sus propias conclusiones. Sin embargo, la importancia de considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^{4,2}$ con su geometría B de signatura $\operatorname{sgn} B = (4,2)$ queda puesta de manifiesto en el siguiente resultado general:

Proposición 8.3. Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 3$ equipado con una geometría ortogonal $B : V \times V \to K$ de signatura $\operatorname{sgn} B = (p,q)$. Sea U el espacio vectorial aumentado, $\operatorname{Span}\{e_-\} \oplus V \oplus \operatorname{Span}\{e_+\}$, de dimensión $n+2$ y equipado con una geometría ortogonal B_U de signatura $\operatorname{sgn} B_U = (p+1, q+1)$ de tal forma que el complemento ortogonal de V en U es $\operatorname{Span}\{e_-\} \oplus \operatorname{Span}\{e_+\}$ y de forma que $B_U(e_\pm, e_\pm) = \pm 1$ y $B_U(e_-, e_+) = 0$. Entonces, el álgebra de Lie del grupo,

$$\operatorname{Conf}(V,B) = \{\ f \text{ difeomorfismo local de } V \mid B(Df(u), Df(v)) = e^{\delta(f)} B(u,v)\ \}$$

es isomorfa al álgebra de Lie del grupo $O_{B_U}(U)$. En otras palabras,

$$\mathfrak{co}_{p,q} \simeq \mathfrak{o}_{p+1,q+1} \simeq \Lambda^2 U.$$

El caso que aquí nos interesa es $\mathfrak{co}_{3,1} \simeq \mathfrak{o}_{4,2} \simeq \Lambda^2\mathbb{R}^{4,2}$ y vamos a probar que esta álgebra de Lie es isomorfa al álgebra de Lie del grupo $SU(2,2)$.

Nota 8.4. En 1910, Bateman [3] demostró que el grupo de transformaciones que dejan invariantes a las ecuaciones de Maxwell es precisamente el grupo de transformaciones conformes del espacio-tiempo de Minkowski, es decir, $\operatorname{Conf}(3,1)$.

Comencemos con el isomorfismo

$$\mathfrak{o}_{4,2} \simeq \Lambda^2\mathbb{R}^{4,2} \simeq \Lambda^2\left\{\operatorname{Span}\{e_-\} \oplus \mathbb{R}^{3,1} \oplus \operatorname{Span}\{e_+\}\right\}$$

Se sigue de la Proposición 4.6 que $\Lambda^k(U \oplus V) \simeq \bigoplus \Lambda^g U \otimes \Lambda^h V$ para todas los enteros g y h tales que $g + h = k$. Entonces, se tiene que,

$$\mathfrak{o}_{4,2} \simeq \{e_- \wedge X | X \in \mathfrak{u}_2\} \oplus \Lambda^2\mathbb{R}^{3,1} \oplus \{Y \wedge e_+ | Y \in \mathfrak{u}_2\} \oplus \operatorname{Span}\{e_- \wedge e_+\}.$$

Usando la realización de $\operatorname{Cl}(4,2)$ que presentamos es inmediato que,

$$\Lambda^2\mathbb{R}^{3,1} \simeq \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^a & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathfrak{u}_2 \text{ tales que } X \wedge Y \neq 0 \right\}.$$

Mientras que los otros dos sumandos no triviales tendremos que:

$$\{e_- \wedge X | X \in \mathfrak{u}_2\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^a & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in \mathfrak{u}_2 \right\}$$

y

$$\{Y \wedge e_+ | X \in \mathfrak{u}_2\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -Y \\ Y^a & 0 \end{pmatrix} \middle| Y \in \mathfrak{u}_2 \right\}$$

Por lo tanto, con un poco de álgebra lineal es posible demostrar que

$$\{e_- \wedge X | X \in \mathfrak{u}_2\} \oplus \{Y \wedge e_+ | Y \in \mathfrak{u}_2\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathfrak{u}_2 \right\}.$$

Observemos que si X es un elemento de $\mathfrak{u}_2$, también X^a lo es. Con esto, es posible verificar que,

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} XY^a & 0 \\ 0 & X^aY \end{pmatrix} \middle| X, Y \in \mathfrak{u}_2 \,\mathrm{y}\, X \wedge Y \neq 0 \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & -\xi^* \end{pmatrix} \middle| \xi \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \right\}$$

Finalmente, se tiene que $\mathrm{Span}\{e_- \wedge e_+\} \simeq \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Vemos entonces que la dimensión de $\Lambda^2 \mathbb{R}^{4,2}$ es $6 + 4 + 4 + 1 = 15$, que es precisamente la dimensión de $SU(2,2)$. Entonces, si consideramos el álgebra de Lie de $SU(2,2)$, por definición se tiene que,

$$\mathfrak{su}_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(4) \middle| \begin{matrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{y} \quad \mathrm{Tr}(\alpha + \delta) = 0 \end{matrix} \right\},$$

Es decir, $\alpha^* + \delta = 0$, $\gamma = -\gamma^*$ y $\beta = -\beta^*$. Entonces $\delta = -\alpha^*$ y $\beta, \gamma \in \mathfrak{u}_2$. Observemos que, aunque $\mathrm{Tr}(\alpha - \alpha^*) = 0$, el elemento $\alpha \in \mathbb{C}(2)$ por sí mismo puede tener traza distinta a cero. De hecho, lo único que nos dice la condición $\mathrm{Tr}(\alpha - \alpha^*) = 0$ es que la traza de α es un número real.

Se sigue inmediatamente el isomorfismo:

$$\mathfrak{su}_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(4) \middle| \beta, \gamma \in \mathfrak{u}_2 \text{ y } \mathrm{Tr}(\alpha) \in \mathbb{R} \right\} \simeq \Lambda^2 \mathbb{R}^{4,2}$$

O de forma equivalente, $\mathfrak{co}_{3,1} \simeq \mathfrak{su}_{2,2}$.

9. Conclusiones

Siempre es posible, en cualquier variedad que admita una métrica ortogonal de alguna signatura fija, definir localmente un *haz de Clifford* con dicha signatura, en el mismo sentido en el que definimos el haz exterior y en el que se trabajó a lo largo de la tesis. Si además la signatura de la métrica es de la forma $(p+2,p)$, dicho haz viene equipado con la estructura compleja que se obtiene del elemento Γ. Sabemos que hay obstrucciones geométricas y topológicas para que las construcciones locales tengan sentido globalmente y analíticas para que la estructura compleja resulte *integrable.* Este trabajo nos da motivación para incursionar en estos planteamientos de tipo global en variedades.

De cualquier manera, en el análisis local desarrollado en este trabajo, resultó evidente el importante papel que juega la estructura compleja definida por Γ en cualquier representación de Clifford. Dicha estructura compleja es la que nos permitió entender a la forma diferencial $\omega \in \mathrm{Cl}(2,0)$ como una pareja de funciones complejas y además, interpretar la ecuación de Dirac, $D\omega = 0$, como dos juegos de ecuaciones de Cauchy-Riemann, uno por cada pareja. Bajo ese mismo espíritu, la estructura compleja en $\mathrm{Cl}(3,1)$ juega un papel crucial al dar una representación del tensor electromagnético clásico, como una función definida en el espacio-tiempo que toma valores en $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y permite escribir las ecuaciones de Maxwell en la forma $D(-E+iB) = J$, con $i = \sqrt{-1}$, utilizando el operador de Dirac.

De esta forma, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las ecuaciones de Maxwell son esencialmente equivalentes en sus respectivos espacios.

La Proposición 8.3 sirve como motivación para el estudio del álgebra $\mathrm{Cl}(4,2)$, y junto con los resultados anteriores nos lleva a considerar las ecuaciones geométricas correspondientes, $D(A+iB) = C$. Dichas ecuaciones constituyen una generalizacion natural al espacio de tranformaciones conformes del espacio-tiempo de Minkowski y están estrechamente relacionadas con las ecuaciones de Maxwell. En dichas ecuaciones los nuevos términos de las 2-formas que no pertenecen al campo eléctrico o magnético aparecen únicamente en las ecuacióness de fuentes, lo que sugiere una posible relación entre éstas y las nuevas componentes del campo.

Aunado a los ejemplos ya vistos, el operador de Dirac siempre constituye la *raiz cuadrada* del operador Laplaciano asociado a una variedad con una geometría dada. De esta forma, su estudio se extiende a muchas otras áreas de la matemática; por ejemplo, la ecuación de Dirac en mecánica cuántica no es más que la descomposición de la ecuación de Klein-Gordon.

En conclusión, hay ventajas evidentes que resultan de trabajar con en el álgebra de Clifford en lugar de con el álgebra exterior, y, aunque el estudio de las álgebras de Clifford se extiende mucho más allá de lo que se presentó en este trabajo, lo que aquí se ha presentado resulta un compendio autocontenido para familiarizar al lector con los conceptos fundamentales del tema y además se mostró que las álgebras de Clifford constituyen un ambiente *natural* para el estudio de las ecuaciones geométricas en los espacios que hemos estudiado.

Referencias

[1] M. Atiyah. *Introduction to Commutative Algebra.* Westview Press, 1994.

[2] M. Atiyah, R. Bott, and A. Shapiro. Clifford modules. *Topology*, 3:3–38, 1964.

[3] H. Bateman. The transformation of the electrodynamical equations. *Proceedings of the London Mathematical Society*, pages 223–264, 1910.

[4] W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, 2 edition, 2002.

[5] E. Cartan. *Theory of Spinors.* Dover, 1966.

[6] H. Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Academiuc Press, 1963.

[7] W. H. Greub. *Linear Algebra.* Springer, 4 edition, 1981.

[8] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics.* Prentice Hall, 3 edition, 1998.

[9] K. Kobayashi and S. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Vol. 2.* John Wiley and Sons, 1996.

[10] H. B. Lawson and M.-L. Michelson. *Spin Geometry.* Princeton University Press, 1990.

[11] E. Lluis Puebla. *Algebra Lineal, Multilineal y K-teoría Algebráica.* Sociedad Matemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, 2 edition, 2008.

[12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W.H. Freeman and Co., 1973.

[13] R. Shaw. *Linear Algebra and Group Representations, Vol. 1 y 2.* Academic Press, 1983.

[14] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer, 1983.