



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)  
FACULTAD DE CIENCIAS

*“Producción de fotones en la presencia de un campo  
magnético en la dualidad AdS/CFT ”*

## T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

P R E S E N T A :

**Miriam Patricia Ortega Ramírez**

*Director de tesis:*

Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar (Facultad de Ciencias)

*Comité tutorial:*

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo (Instituto de Ciencias Nucleares)

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero (Facultad de Ciencias)



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D. F.

Febrero del 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Agradezco primero que nada a mi madre, María de la Luz Ramírez, por impulsarme siempre a salir adelante de las situaciones más adversas, entenderme, creer en mi, apoyarme en todas las ideas que decidido llevar a cabo y por descubrir conmigo que hay otra manera de ver el mundo.

A mi tutor Leonardo Patiño con quien enfrenté la realidad de la investigación, donde las cosas no siempre son lo que parecen. De él aprendí conceptos sumamente abstractos de la dualidad, así como a ser una física más independiente.

Agradezco a todos mis sinodales por sus comentarios y aportaciones a este trabajo. A Mariano Chernicoff, mi sinodal no oficial, por sus enriquecedoras discusiones sobre la dualidad. A Alberto Güijosa, por lo pedagógicos que resultaron ser sus cursos.

A Eduardo Barrios y Michelle Jiménez por haberme brindado su ayuda, principalmente cuando estaba perdida en un mar de ecuaciones.

A mis amigos que son un pilar fundamental en mi vida. En particular a Andy, Fabi y Marco con quienes además de llevar toda una vida de esgrima juntos, siempre estuvieron al tanto de mis avances en este posgrado, tanto así que hoy sin ser físicos ya saben qué es una brana (¿Cierto?). A los integrantes de mis equipos de estudio favoritos: Joss, Manuel, Adriana y Saúl, con quienes disfruté este posgrado, en gran medida debido a nuestro buen acoplamiento a la hora de estudiar. Juntos vivimos momentos de mucho estrés pero siempre tuvimos un afortunado final. A Juan Manuel y Mariana, que a pesar de la distancia los sigo sintiendo cerca. A Acapulco y Manelik los sobrevivientes. A Alex, quien me ayudó a levantarme en los peores momentos. A Ale P, Emily, Malu y Marled, porque sé que cuento con ustedes.

Y finalmente agradezco a Arturo Amor, quien sin duda le infundió emoción a mi cotidianidad desde el comienzo de este trabajo, emoción que se transformó en confianza y amor.

# Resumen

Hacemos uso de la correspondencia norma/gravedad para calcular la producción de fotones y conductividad eléctrica de un plasma, de SYM con  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones en presencia de un campo magnético. Para ello construimos en el lado de gravedad una solución numérica a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, que cumplen con ser asintóticamente  $\text{AdS}_5$ . El método empleado nos permitió considerar valores arbitrarios del campo magnético y el ángulo entre este campo con el momento de los fotones. Encontramos que la producción total de fotones es siempre mayor que la del caso en ausencia de campo magnético, independientemente de la frecuencia de los fotones y su dirección de propagación. Conforme mayor es el campo magnético, mayor es el brillo del plasma comprado con el caso sin campo magnético. La conductividad en la dirección perpendicular al campo del fondo prácticamente no se ve afectada por su presencia, a pesar de su intensidad, mientras que la conductividad en la dirección del campo aumenta linealmente con él. Hacemos notar que el efecto del campo magnético es distinguible de otro tipo de fuente que genere la anisotropía como se puede ver al comparar nuestro trabajo con [1].

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Correspondencia norma/gravedad . . . . .	9
1.1.1. Conceptos básicos de la teoría de campos . . . . .	9
1.1.2. Conceptos básicos de la teoría de cuerdas . . . . .	13
1.1.3. Correspondencia AdS/CFT . . . . .	20
1.1.4. El diccionario . . . . .	24
1.1.5. Funciones de dos puntos . . . . .	27
<b>2. Cálculos en el lado de la teoría de norma</b>	<b>29</b>
<b>3. Cálculos en el lado de la teoría gravitacional</b>	<b>33</b>
3.1. Fondo anisotrópico en la presencia de un campo magnético . . . . .	33
3.2. Campo de norma $A_\mu$ . . . . .	38
3.2.1. Corrección a la métrica debido al campo de fondo y sus perturbaciones	40
3.3. Cálculo de correladores en el lado de gravedad . . . . .	40
3.3.1. Límite $B=0$ . . . . .	41
3.3.2. Densidad espectral para la polarización $\epsilon_{(1)}$ . . . . .	43
3.3.3. Densidad espectral para la polarización $\epsilon_{(2)}$ . . . . .	46
<b>4. Producción total de fotones</b>	<b>55</b>
4.1. Discusión . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



# Introducción

El descubrimiento de la correspondencia AdS/CFT, representa una poderosa herramienta en el estudio de teorías de campo fuertemente acopladas. En los últimos años ha surgido un particular auge por emplear esta herramienta en el estudio de propiedades de la fase de plasma, de estas teorías a temperatura distinta de cero. Varios de estos estudios se han inspirado en la fenomenología de las colisiones de iones pesados ultra relativistas. El análisis de datos de los grandes aceleradores de partículas como lo son el acelerador relativista de iones pesados, RHIC [2,3], y el gran acelerador de hadrones, LHC [4], han enfatizado la importancia de desarrollar un modelo de acoplamiento fuerte que permita estudiar la fenomenología de colisiones relativistas de iones pesados.

Este trabajo de investigación está inspirado en el estudio del plasma de quarks y gluones (QGP) producido en RHIC o LHC, dicho plasma se dice que es ópticamente transparente, ya que las interacciones electromagnéticas son mucho más débiles que las interacciones fuertes. En esencia un sistema de hadrones debe de ser transparente para los fotones, dado el limitado tamaño del plasma formado en estos aceleradores, los fotones aquí emitidos escaparán del plasma prácticamente sin ser interrumpidos [5], portando información directa de las propiedades del plasma. Cuando un proceso ocurre en el rango en que el acoplamiento gluónico es débil, la cromodinámica cuántica (QCD) nos proporciona una forma de calcular esta producción. Contrario a ello, resultados de RHIC parecen indicar que el plasma ahí creado no se comporta como un gas de quarks y gluones libres, sino como un líquido fuertemente acoplado [6], en consecuencia el entendimiento de la producción de fotones requiere cálculos no perturbativos, tales como los que la correspondencia AdS/CFT promete ser capaz de estudiar.

Una forma de poner a prueba las capacidades de la correspondencia en el estudio del QGP, radica en hallar cantidades que no dependan de métodos perturbativos, estudiarlas vía la correspondencia AdS/CFT y compararlas con los resultados obtenidos experimen-

talmente. Un ejemplo de estas mediciones puede ser el aumento de la producción de fotones directos reportados en [7], donde se presenta un conteo del número de fotones directos con un momento transverso ( $p_T$ ) dado, en el espectro de las colisiones Pb-Pb a  $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$  TeV con datos tomados del experimento ALICE [7]. Otra medición interesante es [8] la segunda componente de Fourier  $v_2$  (ver definición en [9] o [10]) de la anisotropía azimutal con respecto al plano de reacción (la dirección del haz de iones con el vector del parámetro de impacto definen el plano de reacción). Esta medida fue hecha a fotones directos con momento transverso de 113 GeV/c en colisiones Au-Au a  $\sqrt{S_{NN}} = 200$  GeV en el detector PHENIX de RHIC. En la región  $p_T < 4$  GeV/c dominada por fotones térmicos, encontraron un valor de  $v_2$ , comparable con la de hadrones, y por encima de lo predicho por cálculos para fotones térmicos.

El objetivo de este trabajo es, a través de la correspondencia norma/gravedad, estudiar la producción de fotones en una teoría de campos en presencia de un campo magnético intenso. Trabajos previos con objetivos similares son [11], donde -haciendo uso de la correspondencia AdS/CFT-, calculan por primera vez la producción de fotones, acoplándoles a quarks sin masa en la representación adjunta. En [12, 13] se introducen quarks sin masa y masivos en la representación fundamental. La geometría usada en estos trabajos es espacialmente isotrópica en las direcciones de la teoría de norma, sin embargo, en el QGP real la presión a lo largo de la dirección del rayo y a lo largo de las direcciones transversales son distintas en los momentos iniciales de la evolución del plasma [14, 15], implicando que el plasma sí hace distinción de una de sus coordenadas espaciales y por ende, para mejorar su descripción se deba usar una geometría anisotrópica.

El cálculo de la producción de fotones en un plasma anisotrópico fuertemente acoplado de quarks sin masa fue estudiado en [1] usando el dual gravitacional en supergravedad IIB descubierto en [16, 17] para valores arbitrarios de la anisotropía en la dirección de propagación de los fotones. Encajando branas con carga de sabor en el mismo fondo de [16, 17], estudiaron el caso del plasma anisotrópico con quarks masivos en [18], donde se consideró a los fotones propagándose paralelos o perpendiculares a la dirección de la anisotropía. En [18] un campo magnético fue introducido, se consideró la retroacción en el encaje de las branas, pero no la retroacción del fondo. Sin embargo, la retroacción en la métrica del fondo, de un campo magnético intenso como el que se cree es responsable del aumento de la producción de fotones y la anisotropía  $v_2$ , debe de ser considerada, conduciendo a diferentes geometrías del dual a la teoría de campos en presencia de tal campo del fondo. En este trabajo hacemos uso del dual gravitacional encontrado en [19], y estudiamos la producción de fotones en direcciones genéricas (con respecto a la dirección del campo magnético). También calculamos la conductividad eléctrica, DC, y comparamos ésta con la correspondiente del plasma en la misma temperatura pero en ausencia de campo magnético.

Aunque el plasma real presenta una evolución temporal, asumirlo estático se motiva en el hecho que las escalas temporales son mucho más pequeñas que su escala de evolución característica, la cual es alrededor de pocos fm/c [20].

La geometría de [19] goza de varias cualidades que lo hacen un candidato ideal para ser un modelo de juguete, que a partir de primeros principios nos permite explorar los efectos en observables físicas en presencia de un campo magnético de fondo. Éstas incluyen regularidad en los campos fuera y en el horizonte, así como un comportamiento asintóticamente AdS en la frontera.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 presentamos los conceptos básicos para entender como realizar, haciendo uso de la correspondencia norma/gravedad, el cálculo de la producción de fotones. En los capítulos 2 y 3 realizamos los cálculos previos a la producción de fotones en el lado de campos y en el de gravedad, respectivamente. Finalmente en el capítulo 4 calculamos la producción de fotones así como la discusión acerca de nuestros resultados.

## 1.1. Correspondencia norma/gravedad

En términos generales se le conoce como dualidad o correspondencia norma/gravedad a una equivalencia entre una teoría conforme de campos en 4-dimensiones y ciertas teorías gravitacionales asintóticamente anti-de Sitter en  $d + 1$ -dimensiones. Es por ello que antes de enunciarla, presentaremos en las siguientes secciones los conceptos de teoría de campos y cuerdas necesarios para entender dicha correspondencia, así como entender su uso en el cálculo de la producción de fotones. En particular en presencia de un campo magnético.

### 1.1.1. Conceptos básicos de la teoría de campos

La teoría cuántica de campos es un lenguaje matemático mediante el cual podemos describir la física de las partículas elementales [21]. Siendo un campo una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo, en este lenguaje las partículas son el resultado de pequeñas excitaciones de un campo determinado, y es mediante las llamadas funciones de correlación que obtenemos la información física de la teoría. Si la teoría está débilmente acoplada es posible calcular las funciones de correlación mediante técnicas perturbativas. La teoría que en este trabajo nos interesa estudiar es la cromodinámica cuántica, o QCD por sus siglas en inglés, ésta es una teoría que dependiendo de la escala energética puede estar fuertemente acoplada haciendo inútil su estudio mediante expansiones perturbativas.

QCD es la teoría que describe las interacciones fuertes. Es una teoría de norma no abeliana con grupo de norma  $SU(3)$ <sup>1</sup>. Las partículas que actúan bajo esta interacción son los llamados quarks y gluones. Los quarks son partículas fermiónicas que tienen carga eléctrica y carga fuerte (que recibe el nombre de color). Estas partículas están descritas por campos de Dirac de espín 1/2 y transforman en la representación fundamental de  $SU(3)$ . Los gluones en cambio portan carga de color, pero no eléctrica, son las partículas mediadoras de la interacción fuerte, son bosones de norma sin masa, con espín 1 y transforman en la representación adjunta de  $SU(3)$  (para una mayor descripción de esta teoría ver por ejemplo [22]).

La acción de QCD está dada por la acción de Yang-Mills y la de Dirac:

$$S_{QCD} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q - g (\bar{q} \gamma^\mu T_a q) G_\mu^a \right], \quad (1.1.1)$$

donde  $q$  representa al campo de Dirac,  $T_a$  son los generadores del grupo de norma,  $G_\mu^a$  son los campos de norma con  $a = 1, 2, \dots, 8$  y  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte. Dado que esta constante figura desde la acción de Yang-Mills, es habitual denotarla como  $g_{YM}$ . Resulta que en algunas teorías cuánticas de campos la constante de acoplamiento depende de la escala energética  $\mu$ , es decir,  $g = g(\mu)$ . Esta dependencia está codificada en la función beta que en general para cualquier teoría está dada por:

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{dg}{d \ln \mu}, \quad (1.1.2)$$

es decir, si una teoría es invariante de escala entonces su función beta deberá ser igual a cero. Si la función beta es positiva, la constante de acoplamiento incrementaría con la energía hasta que la teoría se vuelva fuertemente acoplada, y lo opuesto si la función beta es negativa. Para el caso de una teoría de Yang-Mills arbitraria, con grupo de norma  $SU(N_c)$  y  $N_s$  sabores, se obtiene que a un lazo

$$\beta(g_{YM}) = \frac{-g_{YM}^3}{16\pi^2} \beta_0, \quad (1.1.3)$$

con

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_s. \quad (1.1.4)$$

En el caso de QCD  $N_c = 3$  y  $N_s = 6$ , lo que implica que la función beta es negativa y por ende, la constante de acoplamiento decrece con la energía. A este fenómeno se le llama libertad asintótica y fue descubierta por David Gross, Frank Wilczek y David Politzer [23] y [24]. Integrando dicha función encontramos que

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{QCD})}, \quad (1.1.5)$$

---

<sup>1</sup> $SU(N_c)$  es el grupo cuya representación matricial son matrices  $N_c \times N_c$  unitarias con determinante igual a 1.

donde

$$\alpha_{\text{YM}}(\mu) = \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi}. \quad (1.1.6)$$

$\Lambda_{QCD}$  (200≈300 MeV) define una escala característica de la teoría por debajo de la cual las interacciones se vuelven muy intensas a esa escala. La expansión perturbativa deja de ser válida y experimentalmente nos impide observar de manera aislada a las partículas elementales de la teoría. Lo que observamos entonces, son combinaciones neutras bajo la fuerza fuerte que llamamos hadrones. Ante escalas de energía mayores a  $\Lambda_{QCD}$  esperaríamos que el acoplamiento no sea lo suficientemente alto, como para inducir el confinamiento y podamos encontrar a las partículas desconfiadas, a esta fase llamamos plasma de quarks y gluones (QGP). Sin embargo, contrario a lo esperado, en los experimentos realizados en los grandes aceleradores de partículas como lo son RHIC y CERN, el plasma ahí producido resulta todavía estar fuertemente acoplado [6].

Hasta la fecha no tenemos un método analítico que explique mediante primeros principios el comportamiento de QCD en el régimen no perturbativo, es decir, cuando está fuertemente acoplado. Algunas propuestas han surgido, una de ellas son los cálculos en la red, que son útiles para determinar propiedades estáticas pero no dinámicas. La correspondencia norma/gravedad propone una herramienta de trabajo mediante la cual, podemos estudiar teorías parecidas (primas) a QCD. Dichas teorías, además de por si mismas ser interesantes de estudiar, también funcionan como modelos de juguete útiles para entender el comportamiento de QCD. En este trabajo la prima que nos interesará estudiar se llama Super-Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  o también conocida como Yang-Mills máximamente supersimétrico. Y dedicaremos la siguiente sección a presentarla.

### SYM con $\mathcal{N} = 4$

La búsqueda de un modelo de juguete para QCD tiene como objetivo encontrar una teoría lo más parecida posible a QCD, en la cual podamos hacer una expansión perturbativa confiable (en el acoplamiento fuerte). La primera propuesta es quitar los quarks, así nos quedamos sólo con la teoría conocida como Yang-Mills. Para tener un parámetro sobre el cual expandir perturbativamente, usamos la idea de t'Hooft que radica en suponer

$$N_c \longrightarrow \infty \quad \text{con} \quad \lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c \quad \text{fija.} \quad (1.1.7)$$

Ésto implica que, aunque la constante de acoplamiento tienda a cero, la teoría no se vuelve libre. Es decir, en el límite cuando  $N_c \rightarrow \infty$  la teoría presenta libertad asintótica y confinamiento. Con la novedad de que  $1/N_c$  actúa como un parámetro pequeño a partir del cual podemos hacer una expansión para  $N_c \gg 1$  tal que  $SU(N_c) \approx SU(\infty) + O(1/N_c^2)$ .

Haciendo una modificación más drástica llegamos a la prima de QCD que usaremos en este trabajo, se trata de Super Yang-Mills con  $\mathcal{N} = 4$  o Yang-Mills máximamente

supersimétrico (MSYM), con grupo de norma  $SU(N_c)$ . Esta es una teoría de campo máximamente supersimétrica con un campo de norma  $A_\mu$ ; seis campos escalares reales, sin masa,  $\Phi^I$ ,  $I = 1, \dots, 6$ ; y cuatro espinores de Weyl izquierdos sin masa  $\Psi_i$ . Todos transformando en la representación adjunta del grupo de norma  $SU(N_c)$  [25].

El hecho de que sea una teoría máximamente supersimétrica, se debe a que no es posible agregar más supercargas sin involucrar a la gravedad (lo cual requiere que la supersimetría sea una transformación local en vez de global, y da lugar a las teorías como supergravedad). Esta supersimetría relaciona todos los campos entre sí, de tal forma que no se encuentran en la teoría divergencias UV, es decir, la teoría es finita. Por esta razón al calcular la función beta de esta teoría, observamos que su constante de acoplamiento  $g_{\text{YM}}$  no corre con la energía, la teoría resulta ser invariante bajo reescalamiento incluso a nivel cuántico.

Al tratarse de una teoría de campos relativista, tiene como simetría al grupo de Poincaré (El grupo de Lorentz y el grupo de translaciones). Dado que también las transformaciones de escala o dilataciones son una simetría, MSYM es también invariante bajo las transformaciones conformes especiales y por lo tanto es una teoría de campos conforme (CFT) con grupo de simetría  $SO(4,2)$ . Además posee una simetría interna global  $SU(4)$  conocida como simetría  $R$  y una simetría discreta global conocida como dualidad  $S$  descrita por el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  [26].

Ahora bien, recordemos que nuestra motivación para estudiar SYM con  $\mathcal{N} = 4$  es que esta teoría funcione como un modelo de juguete para QCD sin embargo, a  $T = 0$  podemos enlistar algunas diferencias sustanciales entre ambas teorías en la tabla 1.1:

**Tabla 1.1:** Comparación entre QCD y MSYM ambas en Minkowski 3 + 1dimensional a  $T=0$ .

QCD	MSYM
Asintóticamente libre $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{\text{YM}}^2 < 0$ .	Conforme $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{\text{YM}}^2 = 0$ .
Confinada a bajas energías.	Siempre es desconfiada.
No es una teoría super simétrica.	Es máximamente super simétrica.
$N_c=3$ .	$N_c \rightarrow \infty$ .
Tiene quarks.	No tiene quarks.

Parece ser que SYM con  $\mathcal{N} = 4$  no resulta ser un buen modelo para entender QCD. Sin embargo, podemos hacer una lista similar a la tabla 1.2 considerando ambas teorías a

temperatura finita, en particular  $T > T_c$ <sup>2</sup>.

**Tabla 1.2:** Comparación entre QCD y MSYM ambas en Minkowski 3 + 1dimensional a  $T > T_c$ .

QCD	MSYM
Es desconfiada.	Es desconfiada.
No es teoría conforme.	Simetría conforme rota.
No es una teoría super simétrica.	Tiene super simetría rota.
Es fuertemente acoplado a $T_c < T < 2T_c$ .	Tiene constante de acoplamiento ajustable.

Observamos que a temperatura distinta de cero las similitudes entre las teorías aumenta<sup>3</sup>, permitiendo a MSYM ser un modelo de juguete para entender el QGP del mundo real. Por otro lado la correspondencia norma/gravedad propone que podremos entender a MSYM en términos de una teoría de cuerdas que vive en cierto espacio-tiempo curvo. Por lo que la siguiente sección la dedicaremos a presentar los conceptos necesarios de la teoría de cuerdas para entender la dualidad.

### 1.1.2. Conceptos básicos de la teoría de cuerdas

La teoría de cuerdas es una generalización a las teorías de campo que como ingredientes básicos propone a pequeños objetos 1-dimensionales llamados cuerdas. El movimiento de estas cuerdas en el espacio-tiempo describe una superficie bidimensional que llamamos hoja de mundo. Esta teoría está caracterizada por la tensión de la cuerda  $T_c$  y una constante de acoplamiento adimensional,  $g_c$ , que controla la intensidad de las interacciones. La tensión de la cuerda y el tamaño de la cuerda  $l_c$  están relacionados de la forma

$$T_c = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \text{con} \quad \alpha' = l_c^2. \quad (1.1.8)$$

Existen cuerdas cerradas y abiertas. Tratándose de una cuerda cerrada, su hoja de mundo no tiene frontera. A modo de una generalización de la acción de una partícula relativista, cuya acción es la longitud de su línea de mundo, para una cuerda postulamos entonces que la acción sea el área de su hoja de mundo. Si parametrizamos esta hoja de mundo con coordenadas locales  $\sigma^\alpha$  con  $\alpha = 0, 1$  y tomamos  $x^M$  las coordenadas del espacio-tiempo

<sup>2</sup>Cálculos hechos en la red sugieren que  $T_c \approx 100\text{MeV}$  o  $10\text{ K}$  [27].

<sup>3</sup>La función de partición térmica  $Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})$ , se calcula en el formalismo de cuantización por integral de trayectoria tomando al tiempo euclideo como un círculo de circunferencia  $\beta$  con condiciones de frontera periódicas/antiperiódicas para campos bosónicos/fermiónicos. La supersimetría se rompe por este trato distinto a bosones y fermiones.

D-dimensional con  $M = 0, 1, \dots, D - 1$ , la trayectoria de la cuerda estará descrita al definir  $x^M$  como una función de  $\sigma^\alpha$ . En términos de estas funciones, la métrica inducida en la hoja de mundo tiene las componentes:

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^M \partial_\beta x^N g_{MN}, \quad (1.1.9)$$

donde  $g_{MN}$  es la métrica del espacio-tiempo. Entonces la acción de la cuerda está dada por

$$S_c = -T_c \int d^2\sigma \sqrt{-\det g}. \quad (1.1.10)$$

A 1.1.10 se le conoce como la acción de Nambu-Goto. Para construir el espectro de la cuerda, es decir, sus estados cuánticos, necesitamos cuantizar dicha acción. Este proceso impone fuertes constricciones sobre el espacio-tiempo  $g_{MN}$ , implicando que no todos los espacio-tiempo permiten una propagación consistente de la cuerda. Por ejemplo, si estudiamos una teoría de cuerdas en un espacio-tiempo de Minkowski D-dimensional, para que la teoría de cuerdas sea consistente, ésta sólo podrá existir si  $D=26$ , de lo contrario el grupo de Lorentz se vuelve anómalo a un nivel cuántico y la teoría contendrá estados con norma negativa.

Físicamente, los diferentes estados del espectro corresponden a los diferentes modos de vibración de la cuerda. Desde el punto de vista del espacio-tiempo, cada una de estos modos resultan tener las propiedades básicas (espín y masa) de un tipo específico de partícula. El espectro típicamente contiene un número finito de modos no masivos y una torre infinita de modos masivos de orden  $m_c = l_c^{-1}$ . Por ejemplo, el espectro en una teoría de cuerdas cerradas sobre un fondo plano consta de una torre infinita de estados con masas progresivamente más altas dadas por

$$m^2 = \frac{4}{l_c^2}(n - a), \quad (1.1.11)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $a$  es una constante .

Un punto crucial sobre las cuerdas cerradas es que uno de los modos no masivos corresponde a una partícula de espín dos, es decir, el gravitón. Esta es la razón por la cual la teoría de cuerdas es, en particular, una teoría de gravedad cuántica. El gravitón describe pequeñas fluctuaciones de la métrica del espacio-tiempo, implicando que el espacio-tiempo fijo con el cual comenzamos es en realidad dinámico [10].

Podemos construir diferentes teorías de cuerdas al agregar grados de libertad a la hoja de mundo de la cuerda. En este trabajo será de nuestro interés, una teoría supersimétrica llamada teoría de supercuerdas tipo *IIB* donde  $a = 0$  (1.1.11), nueve dimensiones espaciales y una temporal,  $D = 9 + 1$ . Los estados no masivos del espectro de esta teoría son: el gravitón  $G_{MN}$ , un escalar conocido como el dilatón  $\Phi$ , un tensor de rango dos  $B_{MN}$  denominado campo de Kalb-Ramond, un campo escalar conocido como el axi3n  $\chi$ , un

tensor antisimétrico de rango dos  $C_{MN}$ , un tensor antisimétrico de rango cuatro  $C_{MNPR}$ , 2 dilatinos, 2 gravitinos. Todos estos estados están relacionados entre sí a través de la supersimetría  $N = 2$  (2 supercargas  $Q$  de Majorana-Weyl, de aquí el nombre de tipo II).

Las interacciones se pueden introducir geoméricamente postulando que cuerdas separadas se pueden unir y formar una sola cuerda, o a la inversa, una cuerda se puede dividir y formar varias cuerdas. La amplitud de probabilidad de las interacciones está controlada por la constante de acoplamiento de cuerda,  $g_c$ , que a su vez, resulta estar relacionada con el valor de fondo del campo del dilatón en infinito a través de

$$g_c = e^{\Phi_\infty}. \quad (1.1.12)$$

A bajas energías  $E \ll l_c^{-1}$ , uno puede utilizar una acción efectiva que sólo involucra a los campos no masivos:

$$S_{IIB,ef} = S_{SUGRA} + S_{\alpha'}, \quad (1.1.13)$$

donde  $S_{SUGRA}$  resulta ser la acción que define a la teoría de campos conocida como supergravedad, SUGRA, tipo IIB en  $D = (9 + 1)$  dimensiones y en el marco de Einstein está dada por:

$$S_{SUGRAE} = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left( \mathcal{R} - \frac{1}{2} (\partial_M \phi)_E^2 + \dots \right), \quad (1.1.14)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci para el espacio-tiempo con  $D$  dimensiones y los puntos suspensivos denotan los términos adicionales asociados al resto de los modos no masivos. La acción que denotamos como  $S_{\alpha'}$  contiene una serie infinita de correcciones a los campos de SUGRA, acompañados de potencias positivas de  $l_c$ , es decir, que a bajas energías, la teoría de cuerdas *IIB* se reduce a la supergravedad *IIB*.

Cada solución a las ecuaciones de movimiento de  $S_{IIB,ef}$  (1.1.13) representa un fondo distinto, es decir, una asignación específica de valores esperados para cada uno de los campos de la teoría. En estos términos, las cuerdas representan pequeñas fluctuaciones alrededor de los valores promedio de los campos. Cuando la escala de distancia tiempo a la cual varían los campos de fondo es grande comparada con el tamaño de la cuerda, la contribución de  $S_{\alpha'}$  resulta ser despreciable y los fondos pueden estudiarse como soluciones a las ecuaciones de movimiento de  $S_{SUGRA}$ . Para hacer uso de la dualidad norma/gravedad será de nuestro interés un tipo particular de fondo conocido como  $p$ -branas negras. La siguiente sección la dedicaremos a ahondar en este tipo de fondo.

### **$p$ -brana negra**

La teoría de cuerdas tiene una gran variedad de soluciones correspondientes a agujeros negros extendidos. En esta sección estudiaremos la teoría de cuerdas *IIB* en  $(9 + 1)$ -dimensiones y buscaremos una solución con agujero negro con carga eléctrica con respecto a la  $(p + 1)$ -forma de Ramond-Ramond (RR)  $C_{p+1}$  [28]. Para resolver las ecuaciones de

movimiento de la teoría de cuerdas IIB en (9+1)-dimensiones. Resulta conveniente trabajar en el llamado marco de cuerdas, por lo que la acción (1.1.14) queda dada por:

$$S_{\text{SUGRA}_c} = \frac{1}{(2\pi)^7 l_c^8} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left( e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{2}{(8-p)!} F_{p+2}^2 \right). \quad (1.1.15)$$

Para obtener soluciones correspondientes a una fuente R-R  $p$ -dimensional esféricamente simétrica y localizada en el origen, la solución más general es

$$ds^2 = e^A d\hat{s}^2 + e^B dy_i dy^i \quad (1.1.16)$$

donde  $d\hat{s}^2$  es una métrica en  $(p+1)$ -dimensiones con signatura lorentziana y  $y_i$  son las  $(9-p)$ -coordenadas restantes euclidianas. Asumimos también que la métrica es esféricamente simétrica en las  $(8-p)$ -dimensiones con la fuente de la carga R-R en el origen:

$$\int_{S^{8-p}} {}^*F_{p+2} = N_c, \quad (1.1.17)$$

donde  $S^{8-p}$  es la  $(8-p)$ -esfera que rodea la fuente. En [29] Horowitz y Strominger mostraron que sustituyendo la métrica (1.1.16) en la acción (1.1.15), la familia de soluciones que satisface las condiciones antes mencionadas tiene como métrica:

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + r^2 f_-(\rho)^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2, \quad (1.1.18)$$

y las ecuaciones para el dilatón y la  $p+1$  forma están dados por:

$$\begin{aligned} e^{-2\phi} &= g_c f_-(\rho)^{-\frac{p-3}{2}}, \\ C_{012\dots p} &= g_c^{-1} [1 - f_-(\rho)^{-1}], \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

donde

$$f_{\pm}(\rho) = 1 - \left( \frac{r_{\pm}}{\rho} \right)^{7-p}, \quad (1.1.20)$$

con  $g_c$  el valor asintótico de la constante de acoplamiento de cuerdas. Los parámetros  $r_-$  y  $r_+$  están relacionados con la masa  $M$  (por unidad de volumen) y la carga RR,  $N_c$ , de la solución mediante:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 d_p l_{Pl}^8} ((8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p}), \\ N_c &= \frac{1}{d_p g_c l_c^{7-p}} (r_+ r_-)^{(7-p)/2}, \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

donde  $l_p = g_c^{1/4} l_c$  es la longitud de Planck en 10 dimensiones y  $d_p$  es un factor numérico

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (1.1.22)$$

Podemos ver, que para  $p \leq 6$  la métrica tiene una singularidad en  $\rho = r_-$  y un horizonte en  $\rho = r_+$  (de ahí el adjetivo negro). Únicamente cuando  $r_+ \geq r_-$  la solución corresponde a una brana negra cargada [28].

De acuerdo con (1.1.21), para un valor fijo de  $N_c$ , la masa  $M$  es una función creciente de  $r_+$ . La condición  $r_+ \geq r_-$  que evita singularidades desnudas, se traduce en una relación entre la carga y la masa de la brana negra, dada por:

$$M \geq \frac{N_c}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}. \quad (1.1.23)$$

Esto se conoce como la cota BPS, nos indica que portar una carga R-R dada, implica una masa mínima. La solución que satura la cota se le llama brana negra extremal, en este caso  $r_+ = r_-$ , obteniendo una configuración BPS, que resulta preservar la mitad de las 32 supersimetrías de la teoría IIB. Si ahora añadimos energía al sistema dejando fija su carga, lo que obtenemos es lo que se conoce como una  $p$ -brana negra no extremal.

Para describir la geometría de la solución extremal fuera del horizonte, conviene definir una nueva coordenada  $r$  que coloca el horizonte en el origen

$$r^{7-p} = \rho^{7-p} - r_+^{7-p}, \quad (1.1.24)$$

e introducir una coordenada  $r^a = r \theta^a$  donde  $a = 1, \dots, 9-p$ , y  $\sum_a (\theta^a)^2 = 1$ . Con esta modificación la métrica resultante es:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left( -dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} \sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a \quad (1.1.25)$$

y las ecuaciones para el dilatón y la  $p+1$  forma son:

$$e^\phi = g_c H(r)^{\frac{3-p}{4}}, \quad C_{0,1,\dots,p} = g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}), \quad (1.1.26)$$

donde

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{1}{f_+(\rho)} = 1 + \frac{r_+^{7-p}}{r^{7-p}}, \\ r_+^{7-p} &= d_p g_c N l_c^{7-p}. \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Esta métrica describe a un objeto solitónico que se extiende en  $p$ -dimensiones. En particular nos interesará estudiar el caso cuando  $p = 3$  en cuyo caso el fondo toma la siguiente forma

$$ds^2 = H^{-1/2} \left( -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + H^{1/2} \left( dr^2 + r^2 d\Omega_5^2 \right), \quad (1.1.28)$$

$$\begin{aligned} e^\phi &= g_c, \\ C_{0123} &= g_c^{-1} (1 - H(r)^{-1}), \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

con  $H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}$ , donde  $L^4 = 4\pi N_c g_c l_c^4$ .

Vemos que cerca del horizonte, cuando  $r \ll L$ , podemos aproximar  $H(r)$  como  $H \approx L^4/r^4$  y la geometría se convierte en

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} \left( -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + L^2 \left( \frac{dr^2}{r^2} + d\Omega_5^2 \right),$$

es decir, la geometría generada por la  $D3$ -brana es  $AdS_5 \times S^5$ . Anti-de Sitter, AdS, es un espacio-tiempo maximamente simétrico con curvatura negativa.

Vemos entonces que lejos de las branas ( $r \gg L$ ) el espacio-tiempo es plano, Minkowski 10-dimensional y cerca de las branas ( $r \ll L$ ), en la “garganta”, la geometría es la de  $AdS_5 \times S^5$ .

Como veremos en la siguiente sección, la teoría de cuerdas incluye además de branas negras otros tipos de branas, en particular, sabemos que existen objetos  $p$ -dimensionales que al ser aplicados en cantidad suficiente, son responsables de generar branas negras extremales. Estos objetos son las llamadas  $D$ -branas (descubierto por Polchinski, Dai, Leigh [30] y Horava [31]) y dedicaremos la siguiente sección a estudiar estos objetos.

### $Dp$ -branas

Una  $Dp$ -brana es un objeto extendido con  $p$  dimensiones espaciales donde se anclan los extremos de las cuerdas abiertas [32]. Una  $Dp$ -brana traza un volumen de mundo  $(p+1)$ -dimensional [10]. Se dice está eléctricamente cargada si se acopla con campos tensoriales antisimétricos sin masa con  $(p+1)$  índices [33] (En la teoría de supercuerdas IIB encontramos en el sector R-R un tensor antisimétrico de rango 4  $C_{MNP R}$  que acopla con las  $D3$  branas). Cabe mencionar que en teoría de cuerdas no todos los objetos extendidos son  $D$ -branas. Por ejemplo una cuerda es una 1-brana, porque esta es un objeto extendido con una dimensión espacial, pero no son  $D1$ -branas. Branas con  $p$  dimensiones espaciales son genéricamente llamadas  $p$ -branas [33].

Para estudiar las  $Dp$ -branas, dividiremos las coordenadas del espacio-tiempo en dos grupos, el primero formado por las coordenadas tangentes al volumen de mundo de la  $Dp$ -brana, estas son, el tiempo y  $p$ -coordenadas espaciales,  $x^\mu$ . El segundo, formado por las restantes  $(9-p)$ -coordenadas normales a ésta,  $y^i$ . Los extremos de las cuerdas abiertas terminan en la  $D$ -brana, por lo que a lo largo de las coordenadas normales a ésta deben satisfacer condiciones de frontera de Dirichlet (de ahí su nombre). Por otro lado, las puntas se pueden mover sobre la brana así que a lo largo de las coordenadas tangentes a esta deben satisfacer condiciones de frontera de Neumann.

El espectro de una la cuerda abierta consiste en un número finito de modos no masivos y una torre infinita de modos con masa. Para una sola  $Dp$ -brana, el espectro no masivo consiste en un campo de norma Abeliano  $A_\mu(x)$  con  $\mu = 0, 1, \dots, p, 9 - p$ ;  $9 - p$  campos escalares  $\phi^i(x)$  con  $i = 1, \dots, 9 - p$  y sus super parejas. Ya que estos campos viven la  $Dp$ -brana, dependen solamente de las coordenadas  $x^\mu$  que se extienden a lo largo del volumen de mundo, pero no de las coordenadas transversales. Las  $9 - p$  excitaciones escalares  $\phi^i$  describe fluctuaciones de la  $Dp$ -brana en las direcciones transversales  $y^i$ , incluyendo deformaciones de la forma de la brana y movimientos lineales.

Recordemos que en el caso de cuerdas cerradas después de cuantizar el espectro resultó, uno de los estados corresponde a fluctuaciones dinámicas del espacio-tiempo. Una situación análoga ocurre en el caso de cuerdas abiertas que terminan en una  $Dp$ -brana. Después de cuantizar, obtenemos que el espectro de la cuerda abierta puede ser identificado con las fluctuaciones de la  $Dp$ -brana.

Ahora bien, veamos lo que sucede si colocamos dos  $Dp$ -branas paralelas, separadas una distancia  $r$ . Llamémoslas A y B. Existen 4 clases de cuerdas abiertas: las que tienen ambos extremos en A, las que tienen ambos extremos en B, las que van de A a B y como las cuerdas tienen orientación, son una clase distinta las que van de B a A. Se dice entonces que este sistema tiene 4 sectores distintos de excitaciones. Cada una de las dos clases de cuerdas cuyos extremos terminan en una misma brana, da origen (como lo mencionamos en el párrafo anterior) a un vector de norma no masivo. Mientras que la clase de cuerda que empieza en una brana y termina en otra, da origen, cada una a un campo vectorial cuya masa esta dada por  $m = r/2\pi\alpha'$ . Este campo se hace no masivo cuando hacemos coincidir las branas,  $r = 0$ . En este caso tenemos 4 campos vectoriales no masivos, que justamente corresponden a los campos de norma de un grupo de norma no abeliano  $U(2)$ . Similarmente encontramos que los  $9 - p$  campos escalares se convierten en matrices de  $2 \times 2$ , que transforman en la representación adjunta del grupo de norma  $U(2)$ . Análogamente en el caso de  $N_c$  branas paralelas coincidentes, encontramos un multiplete  $U(N_c)$  de campos de norma no Abelianos, con  $9 - p$  campos escalares que transforman en la representación adjunta de  $U(N_c)$ . La dinámica de estos modos a bajas energías, puede determinarse omitiendo los modos masivos de cuerdas abiertas, resultando estar gobernada por una teoría de norma no Abeliana [34].

Para ser más específicos, consideremos  $N_c$   $D3$ -branas en la teoría de cuerdas IIB en un espacio plano 10-dimensional de Minkowski. La teoría de cuerdas en este fondo contiene dos tipos de excitaciones perturbativas, cuerdas cerradas y abiertas. Las cuerdas cerradas son las excitaciones del espacio vacío y las cuerdas abiertas terminan en las  $D$ -branas, describen excitaciones de estas [28]. Si sólo consideramos el sistema a bajas energías, energías por debajo de la escala de cuerdas  $1/l_c$ , entonces sólo los estados no masivos de cuerdas pueden ser excitados y podemos escribir un Lagrangiano efectivo que describa sus interacciones. Los estados de cuerdas cerradas sin masa dan un supermultiplete de gravedad en diez

dimensiones, y su Lagrangiano efectivo es el de supergravedad tipo IIB. El espectro no masivo de la cuerda abierta consiste en un campo de norma  $A_\mu$ , seis campos escalares  $\phi^i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  y cuatro fermiones de Weyl, todos ellos en la representación adjunta de  $U(N_c)$  y pueden escribirse como matrices  $N_c \times N_c$ . A bajas energías la acción efectiva para estos modos resulta ser precisamente [34] la de Super Yang Mills con  $\mathcal{N} = 4$  con grupo de norma  $U(N_c)$  en  $(3 + 1)$ -dimensiones [35, 36] cuya constante de acoplamiento esta dada por

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_c. \quad (1.1.30)$$

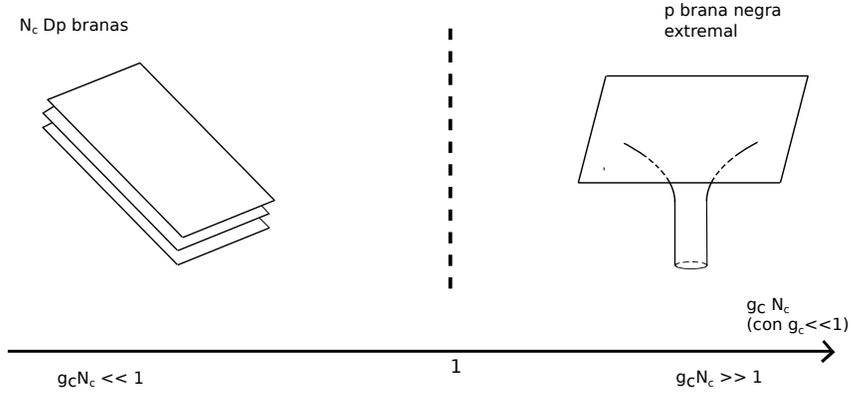
Habiendo presentado la teoría de SYM con  $\mathcal{N} = 4$ , la brana negra y el sistema de  $N_c$   $Dp$ -branas apiladas, estamos listos para en la siguiente sección motivar la correspondencia AdS/CFT.

### 1.1.3. Correspondencia AdS/CFT

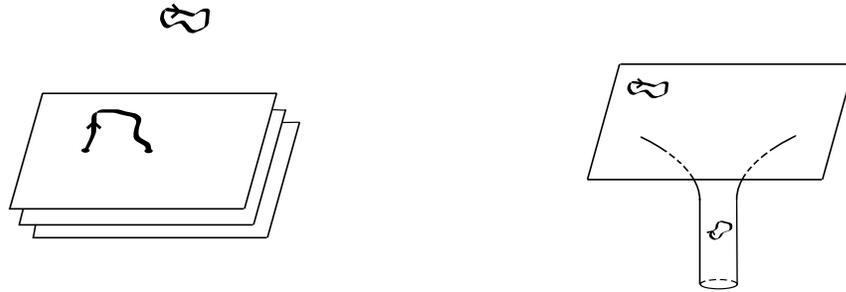
En las dos secciones anteriores estudiamos dos objetos solitónicos de la teoría de cuerdas. Las excitaciones de ambos sistemas están descritos a nivel perturbativo por cuerdas. En [37] se muestra que cuando la pila de  $N_c$   $Dp$ -branas no está excitada, tiene exactamente la misma masa y carga que la  $p$ -brana negra extremal, sugiriéndonos que estos dos sistemas han de ser equivalentes. Ahora bien, notemos que la  $p$ -brana negra con radio de curvatura  $L^{7-p} = c_p g_c N_c l_c^{7-p}$  es una solución confiable de SUGRA siempre y cuando  $g_c N_c \gg 1$  y la constante  $g_c e^\phi N_c \ll 1$ . En el sistema de  $N_c$   $D$ -branas apiladas, este mismo parámetro controla la expansión perturbativa de las cuerdas abiertas y la emisión de cuerdas cerradas, así que podemos hacer una expansión perturbativa siempre y cuando  $g_c N_c \ll 1$ . Se concluye entonces que la brana negra extremal y la pila de  $N_c$  branas en el fondo plano, son dos descripciones alternativas del mismo sistema físico, válidas en regímenes mutuamente excluyentes (ver figura 1.1). Parecería esto indicar que hemos obtenido una dualidad. Pero al tratarse de una equivalencia entre dos sistemas en regímenes excluyentes, aún no podemos decir que esto es una dualidad.

Para obtener una dualidad, el punto clave es suponer que si bien los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes, las dos teorías existen para cualquier valor de  $g_c N_c$ , y es esta la razón por la cual podemos hablar de una dualidad. Si hacemos esta extensión obtendremos ahora sí una dualidad a nivel de cuerdas (ver figura 1.2). En favor de esta deducción se mostró [38] que ambas descripciones conducen al mismo resultado para las amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas a bajas energías y en el caso de  $p = 3$  [39], para la amplitud de absorción de cuerdas cerradas entre otras propiedades.

La dualidad anterior es el punto de partida para enunciar, o motivar la correspondencia que formuló Maldacena. Tomando el límite de bajas energías en ambos dominios donde cada uno de los sistemas es confiable, es decir,  $E \ll 1/l_c$  para el sistema de D3 branas en el espacio plano y  $E \ll 1/L$  para la  $D3$ -brana negra, sucede que ambos sistemas se



**Figura 1.1:** Equivalencia entre el sistema de  $N_c$   $Dp$  branas y de la  $p$  brana negra extremal en regímenes mutuamente excluyentes.



**Figura 1.2:** Equivalencia entre sistemas

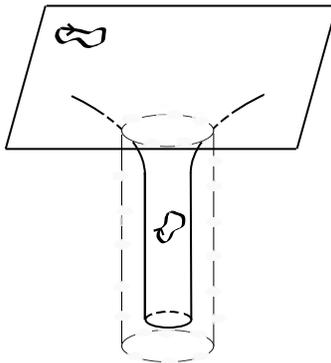
desacoplan de la forma que explicaremos a continuación.

Cuando estudiamos la brana negra extremal encontramos en la ecuación (1.1.28) que el término  $g_{tt}$  no es constante, es decir, la energía  $E_p$  de un objeto medido por un observador en una posición  $r$  fija, se relaciona con la energía  $E$  medida por un observador desde el infinito mediante un factor de corrimiento al rojo dado por:

$$E = H^{-1/4} E_p. \tag{1.1.31}$$

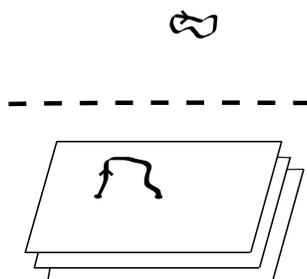
Esto significa que si traemos un objeto cada vez más cerca de  $r = 0$  éste parecería tener menos y menos energía para el observador que está en infinito. Ahora bien, al tomar el límite de bajas energías, en el fondo descrito en (1.1.28) notamos que hay dos clases de excitaciones (desde el punto de vista del observador en infinito), las correspondientes a partículas sin masa propagándose en el fondo con longitudes de onda que se hacen cada vez más grandes, o cualquier tipo de excitación cercanas a  $r = 0$ . En el límite de bajas energías estos dos tipos de excitaciones se desacoplan. Se entiende que las del primer tipo adquieren longitudes de onda mucho mayores que el radio de la brana. Similarmente las

excitaciones que viven cerca de  $r=0$ , no tendrían la energía necesaria para superar el potencial gravitacional y escapar a la región asintóticamente plana. Estas son las dos partes en que se desacopla el sistema de la brana negra: una es el fondo de supergravedad libre en el espacio de Minkowski 10-dimensional y el segundo es la parte cercana al horizonte correspondiente a la teoría de cuerdas tipo IIB (ver figura 1.3).



**Figura 1.3:** El sistema correspondiente a la brana negra se desacopla en: el fondo de supergravedad libre en el espacio de Minkowski 10-dimensional y en la teoría de cuerdas tipo IIB.

Cuando estudiamos la pila de  $D$ -branas en el límite de bajas energías, las cuerdas cerradas de IIB en el fondo plano 10-dimensional se reducen a los modos de SUGRA IIB libres (la gravedad es no renormalizable: fuertemente acoplada a altas energías y débilmente acoplada a bajas energías), y las cuerdas abiertas sobre las  $D3$ -branas se reducen a los modos no masivos, descritos por SYM con  $\mathcal{N} = 4$  propagándose en las 3+1 dimensiones de la brana (ver figura 1.4).



**Figura 1.4:**  $D$ -branas en espacio plano se desacopla en: SUGRA libre en Minkowski 9+1 y MSYM  $SU(N_c)$  en Minkowski 3+1.

Notamos entonces que en cada sistema tenemos dos teorías desacopladas en el límite de bajas energías y en ambos casos una de ellas es la teoría de supergravedad en espacio

plano. Entonces es natural identificar como una teoría equivalente a las otras dos que aparecen en cada uno de los sistemas [28]. Este es el argumento que nos motiva a postular la conjetura: *La teoría  $\mathcal{N} = 4$   $SU(N_c)$  <sup>4</sup> super Yang-Mills en 3+1 dimensiones, es equivalente (o dual) a la teoría de supercuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$  [41].*

La deducción de la correspondencia se obtuvo a partir de la aproximación a ultrabajas energías  $E \ll 1/l_c, 1/L$ , pero en los límites  $El_c, EL \rightarrow 0$  el enunciado se vuelve exacto. Si consideramos el límite de Maldacena  $l_c \rightarrow 0$  manteniendo  $g_c N_c$  fijo y  $L \rightarrow 0$  resulta que  $E$  puede tomar energías arbitrarias en MSYM sin implicar que regresemos al sistema de la D3 brana+SUGRA, o equivalentemente en la geometría de  $AdS_5$  tomar un  $r \gg L$  sin que ello implique regresar a la región asintóticamente plana (ver figura 1.5).

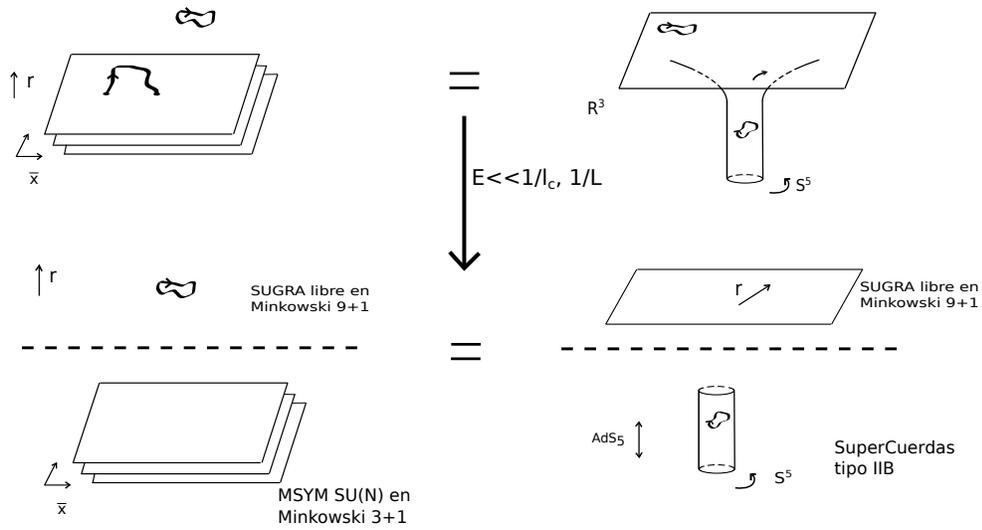


Figura 1.5: Deducción heurística de la correspondencia AdS/CFT.

Finalmente, en el acuerdo de que la física de MSYM es dual a la teoría de cuerdas IIB, incluyendo excitaciones con energía arbitrariamente grandes, en la teoría gravitacional además de considerar a la geometría  $AdS_5 \times S^5$  que obtuvimos a partir de la  $D3$ -brana extremal, podemos también considerar deformaciones arbitrariamente grandes de ella. Lo único que no podemos cambiar es el hecho de que el fondo en  $r$  infinito debe tender a  $AdS_5 \times S^5$ , pues modificar esto requeriría energía infinita. Por ello los fondos con los que trabajaremos deben cumplir con la condición de ser asintóticamente  $AdS_5 \times S^5$ .

<sup>4</sup> $U(N_c) = \frac{U(1) \times SU(N_c)}{Z_N}$ . El supermultiplete vectorial  $U(1)$  incluye seis escalares que se reacionan con el centro de masas de las  $N_c$ -branas [40]. Entonces la diferencia entre trabajar con MSYM  $U(N_c)$  ó  $SU(N_c)$  es incluir o dejar fuera a los grados de libertad correspondientes al centro de masas.

## Temperatura finita

En la sección 1.1.1 vimos que SYM con  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita es un modelo de juguete apropiado para estudiar a QCD en la fase de altas temperaturas. Ya que el enunciado de la correspondencia fue hecho para una teoría de norma a temperatura igual a cero, nos gustaría ahora conocer el dual correspondiente a SYM con  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita en el lado de gravedad. En el lado de la teoría de norma, introducir una temperatura,  $T$ , significa añadir energía al sistema sin modificar otros números cuánticos, de forma que la teoría no se modifica, pero el estado particular es diferente. Para lograr esto utilizando la correspondencia AdS/CFT, necesitamos regresar nuevamente al sistema de  $N_c$   $D3$ -branas, como solución solitónica a las ecuaciones de super gravedad. En la deducción original de la dualidad se consideró el caso de la 3-brana negra extremal,  $M = N/(2\pi)^3 g_c l_c^4$ , notemos que si se pone más energía al sistema dejando fija su carga lo que obtenemos es una  $D3$ -brana negra no extremal. Nuevamente podemos tomar el límite de Maldacena de dicho sistema y deducimos así que el dual gravitacional del sistema SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita corresponde [42, 43] a la solución de brana negra no extremal [29]. Cuya geometría (AdS-Schwarzschild) $_5 \times S^5$  está dada por la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H}} \left( -h dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + \frac{\sqrt{H}}{h} \left( dr^2 + L^2 d\Omega_5^2 \right),$$

$$H = \frac{L^4}{r^4},$$

$$h = 1 - \frac{r_h^4}{r^4}. \quad (1.1.32)$$

Esta métrica representa una brana negra en el espacio AdS con horizonte localizado en  $r = r_h$  que se extiende en las tres direcciones espaciales de la brana original.

La temperatura de Hawking de la brana negra se puede calcular vía el método estándar [44], pidiendo que la métrica Euclideana obtenida al reemplazar  $t$  por  $-it_E$  en 1.1.32, ( $t_E$  el tiempo euclideo) sea regular en  $r_h$ . Esto requiere que  $t_E$  este identificado con un periodo  $\beta$  dado por  $\beta = \frac{1}{T} = \frac{\pi}{r_h}$ . La temperatura  $T$  esta identificada con la temperatura de la teoría de super Yang Mills en la frontera.

### 1.1.4. El diccionario

En la sección 1.1.3 presentamos una deducción heurística de la dualidad, ésta nos afirma que dos teorías aparentemente muy distintas, son en efecto equivalentes. Para utilizar dicha equivalencia se ha desarrollado un diccionario que traduce elementos de una teoría a elementos de la otra. Conocemos ya las entradas de este diccionario que se refieren a los parámetros de ambas teorías:

- El parámetro  $N_c$  aparece en el lado de la teoría de cuerdas como el número de unidades de la carga R-R en la  $D3$ -brana y en el lado de la teoría de norma como el rango  $N_c$  del grupo de norma  $SU(N_c)$ .
- La constante de acoplamiento  $g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_c \equiv 4\pi e^\Phi|_{z=0}$  ver (1.1.30) y (1.1.12).
- El acoplamiento de 't hooft  $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c = 4\pi g_c N_c = \frac{L^4}{l_c^4} \equiv \frac{L^4}{\alpha'^2}$  ver (1.1.7) y (1.1.30).

Como primera prueba a favor de la correspondencia, ambas teorías tienen las mismas simetrías globales. Ahora bien, antes de describir algunas de las entradas del diccionario, notemos que éste involucra dos teorías con diferente número de dimensiones, debemos por lo tanto averiguar como se mapean las coordenadas espacio-temporales. Resulta que las coordenadas  $x^\mu$  de la geometría  $AdS_5$  coinciden con las coordenadas  $X^\mu$  de MSYM, las cinco coordenadas en la  $S^5$  de cuerdas tipo IIB, corresponden en MSYM a grados de libertad para el espacio interno sobre el cual actúa  $SU(4)$ , mientras que la coordenada radial,  $r$ , en la geometría  $AdS_5$  corresponde a una escala de energía en MSYM, es decir, un corte en  $r$  constante contiene información de lo que ocurre en la teoría de campos a una determinada escala de energía.

En ocasiones nos convendrá reescribir la métrica (1.1.30) usando una coordenada radial  $z = L^2/r$  de modo que la frontera de AdS esté en  $z = 0$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2 + z^2 d\Omega_5^2). \quad (1.1.33)$$

Por otro lado el principio holográfico dice que una teoría de gravedad cuántica en una región del espacio debe de ser descrita por una teoría no gravitacional que vive en la frontera de esa región [45, 46]. En nuestro caso esta teoría no gravitacional es la de campos que vive en el corte de  $z = 0$  ó  $r \rightarrow \infty$ , la frontera del espacio-tiempo. Si bien esta es una forma de visualizarlo, debemos aclarar que MSYM vive en un espacio aparte, que contiene información de todo el interior (el bulto) de  $AdS_5$ . Debido al factor de deformación  $L^2/z^2$  en (1.1.33), la escala de energía y longitud a lo largo de las direcciones de Minkowski en AdS, están relacionadas en la teoría de norma mediante un reescalamiento dependiente de  $z$ . Si consideramos un objeto con energía  $E_{\text{YM}}$  y tamaño  $d_{\text{YM}}$  en la teoría de norma, vemos entonces que la correspondiente energía propia  $E$  y tamaño propio  $d$  en el bulto son:

$$\begin{aligned} d &= \frac{R}{z} d_{\text{YM}}, \\ E &= \frac{z}{R} E_{\text{YM}}. \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

Vemos que un proceso físico en el bulto con la misma energía propia, pero ocurriendo a diferentes posiciones radiales corresponde a dos procesos distintos en la teoría de norma con energía que escala como  $E_{\text{YM}} \sim 1/z$ , es decir, un proceso con energía característica

$E_{\text{YM}}$  está asociado a un proceso en el bulto localizado en  $z \sim 1/E_{\text{YM}}$ . En particular el límite de altas energías (UV)  $E_{\text{YM}} \rightarrow \infty$  corresponde a  $z \rightarrow 0$ , (en la región cercana a la frontera) mientras que el límite de bajas energías (IR)  $E_{\text{YM}} \rightarrow 0$  corresponde a  $z \rightarrow \infty$  (en la región cercana al horizonte). Por lo que aunque será usual decir que la teoría de campos vive en la frontera de  $\text{AdS}_5$ , ésta describe la física que hay en todo el bulto. Diferentes regiones del espacio  $\text{AdS}_5$  que estén a diferentes cortes en la coordenada radial, corresponden a la teoría de campos a distintas escalas de energía.

## Campos/operadores

Consideremos ahora el mapeo entre el espectro de ambas teorías. Para motivar la idea principal, recordemos que de (1.1.30) sabemos que la constante de acoplamiento de MSYM está relacionada con la constante de acoplamiento de cuerdas, que a su vez está en términos del dilatón (1.1.12). Esto sugiere que deformar la teoría de norma a través de cambiar el valor de la constante de acoplamiento, corresponde a cambiar el valor en la frontera de un campo del bulto. En general podemos escribir la acción de la teoría de norma deformada como:

$$S \rightarrow S + \int d^4x \phi_0(\vec{x}) O(\vec{x}), \quad (1.1.35)$$

donde  $O(\vec{x})$  es un operador invariante de norma local y  $\phi_0(\vec{x})$  es un acoplamiento que llamaremos la fuente. El ejemplo anterior sugiere que para cada fuente  $\phi_0(\vec{x})$  asociada a un operador invariante de norma  $O(\vec{x})$  debe de corresponderle, en el bulto, un campo  $\phi(\vec{x}, z)$  tal que en la frontera de AdS cumpla con la siguiente relación

$$\phi_0(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, z)|_{z=0}. \quad (1.1.36)$$

De forma más precisa y tal como fue argumentado en [47] y [48] es natural proponer que las funciones de partición euclidianas de ambas teorías están dadas por

$$Z_{\text{CFT}}[\phi_0] = Z_{\text{cuerdas}}[\phi(\vec{x}, z)|_{z=0}], \quad (1.1.37)$$

donde el lado izquierdo es la función generatriz de la función de correlación en el lado de la teoría de campos, es decir,  $\phi_0$  es una función arbitraria (la fuente) y podemos calcular la función de correlación de  $O$ , haciendo derivadas funcionales con respecto a  $\phi_0$  e imponiendo que su valor sea nulo en la frontera. En el lado derecho de la ecuación tenemos la función de partición en la teoría de cuerdas con el valor del campo  $\phi$  evaluado en la frontera de AdS.

Este mapeo uno a uno entre los campos del bulto en AdS y operadores invariante de norma locales, en la teoría de campos, es conocido como la correspondencia campo/operador [10]. El campo y el operador deben tener los mismos números cuánticos bajo las simetrías globales de la teoría. Aunque hasta la fecha no tenemos una receta para

identificar los campos duales a un operador dado, conocemos una condición adicional para un conjunto importante de operadores de cualquier teoría de norma, y esta es que estos operadores son las corrientes conservadas que corresponden a simetrías globales.

Un ejemplo importante de corrientes conservadas en cualquier teoría que tenga invariancia traslacional son las contenidas en el tensor de energía momento  $T^{\mu\nu}$ . La fuente  $g_{\mu\nu}(x)$  acoplada con  $T^{\mu\nu}$  de la forma:

$$\int d^4x g_{\mu\nu}(x)T^{\mu\nu}(x), \quad (1.1.38)$$

se interpreta como una deformación externa de la métrica del espacio-tiempo. De acuerdo con (1.1.36) podemos asociarla con el valor en la frontera de la métrica  $g_{\mu\nu}(x, z)$  en el bulto. Esto conduce a la importante conclusión de que el dual a una teoría de norma invariante bajo traslaciones, en la que el tensor de energía momento se conserva, debe involucrar gravedad dinámica.

### 1.1.5. Funciones de dos puntos

Una vez establecida la correspondencia entre campos y operadores, nos interesará saber como calcular funciones de correlación (correladores) retardados en tiempo real. Antes de seguir notemos que utilizando una signatura Lorentziana no podemos recurrir a las derivadas funcionales respecto a las fuentes que describimos en la sección anterior, ya que existen dos complicaciones inmediatas a dicho procedimiento. Primero, un agujero negro en un espacio-tiempo Lorentziano contiene un horizonte de eventos, haciendo necesaria la imposición de condiciones de frontera apropiadas al resolver la ecuación clásica de movimiento para  $\phi$ . Segundo, dado que las funciones de partición están definidas en términos de integrales de trayectoria, las funciones de correlación deben de estar temporalmente ordenadas.

En principio uno podría evitar hacer una formulación en Lorentziana de la correspondencia norma/gravedad, trabajando en una versión euclideana y usando propiedades de las funciones de Green para encontrar propagadores en tiempo real. Sin embargo, en la práctica no es tan sencillo por lo que en [49] y [50] desarrollaron un método para calcular funciones de correlación retardado de dos puntos en una signatura lorentziana.

En esta sección resumiremos la receta [49, 50]. Para ello tengamos en mente la ecuación (1.1.37) en la frontera en el espacio euclidiano podemos aproximar la función de partición de cuerdas como

$$Z_{cuerdas} = e^{-S_{SUGRA}[\phi(\vec{x}, z)|_{z=0}]}, \quad (1.1.39)$$

donde  $S_{SUGRA}$  es la acción de super gravedad evaluada en  $AdS_5 \times S^5$ . Se puede mostrar que el cálculo de la función de dos puntos la podemos reducir a los siguientes tres pasos (donde por simplicidad diremos que la frontera esta en  $r = r_f$ ):

1. De la acción en la teoría de cuerdas para  $\phi$  extraemos la función,  $M(r)$ , que es la función multiplicando al término cinético  $(\partial_r \phi)^2$

$$S = \frac{1}{2} \int du d^4x M(r) (\partial_r \phi)^2 + \dots \quad (1.1.40)$$

2. Después de resolver la ecuación linealizada para  $\phi$ , expresamos el campo en el bulto a través de su valor en la frontera  $\phi_f$

$$\phi(r, k) = f_k(r) \phi_f(k), \quad (1.1.41)$$

donde trabajamos en el espacio de momento. Por definición  $f_k(r)$  es igual a 1 en  $r = r_f$

3. La función de Green es

$$G_E(k) = -M(r) f_{-k}(r) \partial_r f_k(r) |_{r \rightarrow r_f}. \quad (1.1.42)$$

Podemos ver como estos tres pasos funcionan recordando que la acción clásica (1.1.40), para soluciones clásicas, se reduce al término en la frontera  $\sim M \phi \phi'$ . Notemos que tomando el límite  $r \rightarrow r_f$  en (1.1.42) uno debe eliminar los términos de contacto.

Ahora calcularemos funciones de correlación retardada de dos puntos en una signatura lorentziana a partir de pasos análogos a los anteriores.

1. Análogo al caso euclideo, debemos encontrar la función  $M(r)$ .
2. En el espacio de Minkowski uno debe dar además de la condición en la frontera, una condición en el horizonte. Vamos a imponer la condición de onda entrante (ya que en el horizonte solo podrán ser absorbidas y no emitidas las ondas) para todas las componentes de Fourier  $\phi_k$  con  $k$  tipo tiempo y para  $k'$ s tipo espacio pediremos regularidad en el horizonte.
3. La función retardada térmica de Green es

$$G_E^R(k) = M(r) f_{-k}(r) \partial_r f_k(r) |_{r \rightarrow r_f}. \quad (1.1.43)$$

Eligiendo la condición de onda saliente en el horizonte, uno obtiene la función de Green avanzada. El signo en la ecuación anterior corresponde a la convención estándar de funciones de Green retardada o avanzada:

$$\begin{aligned} G^R(k) &= -i \int d^4x e^{-ik \cdot x} \theta(t) \langle [\hat{O}(x), \hat{O}(0)] \rangle, \\ G^A(k) &= i \int d^4x e^{-ik \cdot x} \theta(-t) \langle [\hat{O}(x), \hat{O}(0)] \rangle. \end{aligned} \quad (1.1.44)$$

En [49] verifican que la receta aquí dada funciona para varios casos de la función de Green retardada.

## Cálculos en el lado de la teoría de norma

En el capítulo anterior hemos presentado los fundamentos teóricos necesarios, que nos permitirá en los siguientes capítulos entender como mediante la dualidad norma/gravedad, podemos calcular la producción de fotones en un plasma fuertemente acoplado en presencia de un campo magnético. En este capítulo explicamos los ingredientes necesarios correspondientes al lado de la teoría de campos para dicho cálculo. Sin pérdida de generalidad, para simplificar los cálculos supondremos que este campo apunta en la dirección  $z$ . La teoría de norma en la cual trabajaremos será Super-Yang-Mills (SYM) con  $\mathcal{N} = 4$  en  $3+1$  dimensiones. El grupo de norma es  $SU(N_c)$  para  $N_c$  y constante de acoplamiento de 't Hooft  $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c$  grande.

Como mencionamos en la sección 1.1.1 los campos de materia de esta teoría transforman en la representación adjunta del grupo de norma y son no masivos. A pesar de ello, en este trabajo, haremos un abuso del lenguaje y nos referiremos a ellos como quarks.

Para modelar interacciones electromagnéticas, introduciremos un campo dinámico de norma abeliano que se acopla con los campos con carga electromagnética  $e^2$ . La teoría resultante debe de ser construida añadiendo un término cinético para el fotón y reemplazando la derivada covariante de  $SU(N_c)$ ,  $D_\mu$ , por  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$  cuando actúa sobre los campos, con  $\mu = 0, \dots, d$ . La teoría de norma que obtenemos es  $SU(N_c) \times U(1)$  con acción:

$$S = S_{SU(N_c)} - \frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu}^2 - 4eA^\mu J_\mu^{\text{EM}}), \quad (2.0.1)$$

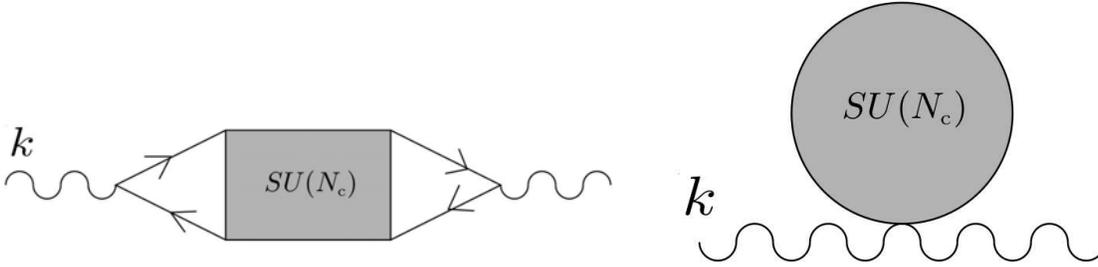
donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es la intensidad de campo y la corriente electromagnética  $J_\mu^{\text{EM}}$  que puede elegirse como:

$$J_\mu^{\text{EM}} = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi + \frac{i}{2} \Phi^* (\mathcal{D}_\mu \Phi) - \frac{i}{2} (\mathcal{D}_\mu \Phi)^* \Phi, \quad (2.0.2)$$

con suma de índices de sabor implícita, invariante bajo el generador  $t^3 \equiv \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$  de la simetría R.

El estudio de la producción de fotones (como veremos en esta sección) requiere calcular la función de dos puntos (2.0.5) en la teoría  $SU(N_c) \times U(1)_{\text{EM}}$  cuyo dual en el lado de gravedad desconocemos. Sin embargo, en [11] se argumenta que para calcular la función de correlación de dos puntos de la corriente electromagnética (2.0.2) a orden dominante en la constante de acoplamiento electromagnética,  $\alpha_{\text{EM}} \sim e^2$ , basta con considerar la teoría  $SU(N_c)$ , cuyo dual en presencia de un campo magnético constante (como requeriremos en este trabajo) fue estudiado en [19].

La observación de [11] radica en que los términos proporcionales al campo del fotón en la corriente (2.0.2), generan contribuciones de orden superior a  $e$  en el término de interacción de la acción ( $\sim A^\mu J_\mu^{\text{EM}}$ ) y con ello en el correlador, por lo tanto serán despreciables a orden dominante en  $e$ . Con los términos remanentes en la corriente, el correlador se puede calcular en la teoría  $SU(N_c)$ , ya que nuevamente los efectos de incluir un fotón dinámico a orden dominante vuelven a ser despreciables. Nuestro cálculo será a orden dominante en  $e$ , pero exacto en la teoría  $SU(N_c)$ . En diagramas, esto significa que no hay campos del fotón presentes en la parte sombreada de la figura 2.1.



**Figura 2.1:** Diagramas que contribuyen a la función de dos puntos de las corrientes electromagnéticas. Las líneas externas, onduladas, corresponden a fotones con momento  $k$ . A orden dominante en  $e$ , sólo los campos  $SU(N_c)$  corren en los lazos representados en las áreas sombreadas.

En equilibrio térmico, la razón diferencial de emisión de fotones por unidad de tiempo y de volumen a orden dominante en  $e$  está dado por [51]:

$$\frac{d\Gamma}{d^d\vec{k}} = \frac{e^2}{(2\pi)^{d-2} |\vec{k}|} n_B(k^0) \sum_{s=1}^{d-1} \epsilon_{(s)}^\mu(\vec{k}) \epsilon_{(s)}^\nu(\vec{k}) \chi_{\mu\nu}(k) \Big|_{k^0=\vec{k}}, \quad (2.0.3)$$

donde  $k = (k^0, \vec{k})$  es el momento nulo del fotón,

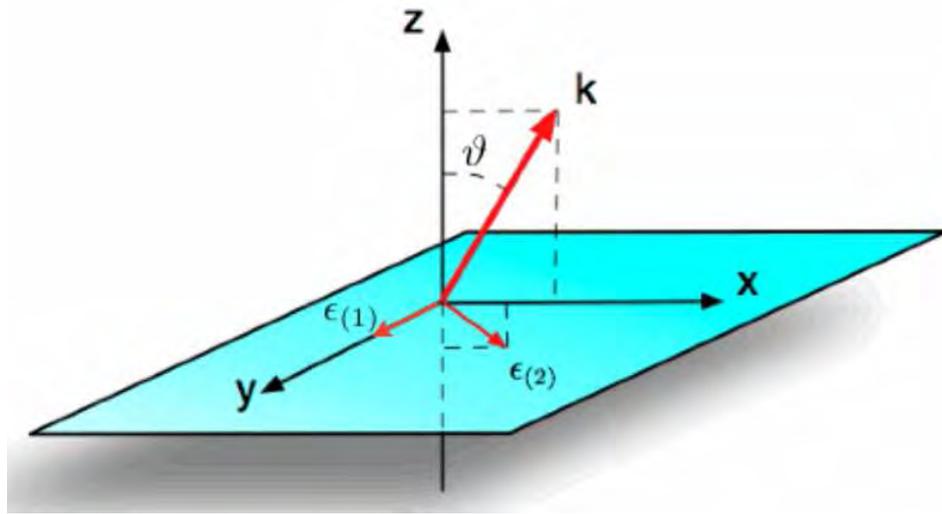
$$\chi_{\mu\nu}(k) = -2 \operatorname{Im} G_{\mu\nu}^R(k) \quad (2.0.4)$$

es la densidad espectral,

$$G_{\mu\nu}^R(k) = -i \int d^{d+1}x e^{-ik \cdot x} \Theta(x^0) \langle [J_\mu^{\text{EM}}(x), J_\nu^{\text{EM}}(0)] \rangle \quad (2.0.5)$$

es el correlador retardado de dos corrientes electromagnéticas y  $n_B(k^0) = \frac{1}{e^{k^0/T} - 1}$  es la distribución estándar de Bose-Einstein.

Cada término de la suma en la ecuación (2.0.3) se refiere a el número de fotones emitidos con vector de polarización  $\vec{\epsilon}_s$ . Estos vectores son mutuamente ortogonales y ortogonales a  $\vec{k}$ . Dado que no hay una dirección preferencial en el plano  $xy$ , podemos elegir sin pérdida de generalidad (con el fin de simplificar los cálculos) que el momento del fotón yace en el plano  $xz$  formando un ángulo  $\vartheta$  con la dirección  $z$  dejando así nula la componente del momento del fotón  $k_y$  (ver figura 2.2).



**Figura 2.2:** Vectores de polarización y momento del fotón.

En la siguiente sección presentaremos el cálculo correspondiente al lado de gravedad. Para ello usaremos y describiremos la métrica [19]. Sin embargo, en esta sección es importante adelantar que dicha métrica asintóticamente es de la forma

$$ds^2_{r \rightarrow \infty} = r^2 [-C_1 dt^2 + C_2 (dx^2 + dy^2) + C_3 dz^2] + \frac{dr^2}{C_1 r^2}, \quad (2.0.6)$$

es decir, salvo constantes cumple con ser una métrica asintóticamente AdS y le asigna a la teoría de norma (TN) un elemento de línea de la forma:

$$ds^2_{\text{TN}} = -C_1 dt^2 + C_2 (dx^2 + dy^2) + C_3 dz^2, \quad (2.0.7)$$

que es la métrica de Minkowski con un reescalamiento de las coordenadas. Aunque éste no tendrá consecuencia en las expresiones finales, nos convendrá conocer los factores  $C_1, C_2, C_3$  y mantener la pista de la naturaleza de los diversos índices, ya sean covariantes o contravariantes, aún en expresiones donde esta distinción podía parecer irrelevante.

Bajo la condición de que el 4-momento del fotón sea nulo, definimos sus componentes covariantes como:

$$k_\mu = k_0(\sqrt{C_1}, \sqrt{C_2} \sin \vartheta, 0, \sqrt{C_3} \cos \vartheta). \quad (2.0.8)$$

Y similarmente para los vectores de polarización, sabiendo que deben de ser ortogonales y eligiendo que sean unitarios, sus componentes contravariantes deben de estar dadas por:

$$\epsilon_{(1)}^\mu = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{C_2}}, 0), \quad \epsilon_{(2)}^\mu = (0, \frac{1}{\sqrt{C_2}} \cos \vartheta, 0, \frac{-1}{\sqrt{C_3}} \sin \vartheta). \quad (2.0.9)$$

La producción de fotones con polarización  $\vec{\epsilon}_{(1)}$  es entonces proporcional a

$$\epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_{(1)}^\nu \chi_{\mu\nu} = \frac{\chi_{yy}}{C_2} \sim \frac{\text{Im} \langle J_y^{\text{EM}} J_y^{\text{EM}} \rangle}{C_2}, \quad (2.0.10)$$

mientras que para la polarización  $\vec{\epsilon}_{(2)}$  es proporcional <sup>1</sup> a

$$\epsilon_{(2)}^\mu \epsilon_{(2)}^\nu \chi_{\mu\nu} = \left( \frac{1}{C_2} \cos^2 \vartheta \chi_{xx} + \frac{1}{C_3} \sin^2 \vartheta \chi_{zz} - \frac{2}{\sqrt{C_2 C_3}} \cos \vartheta \sin \vartheta \chi_{xz} \right). \quad (2.0.11)$$

Lo que debemos hacer entonces, es calcular los distintos correladores  $G_{\mu\nu}^{\text{R}} \sim \langle J_\mu^{\text{EM}} J_\nu^{\text{EM}} \rangle$  y sumarlos de acuerdo a las expresiones anteriores. En la siguiente sección, veremos como obtener esos correladores en el lado de gravedad.

---

<sup>1</sup>Notese que  $\chi_{xz} = \chi_{zx}$ , ver. [11].

# Cálculos en el lado de la teoría gravitacional

Nuestro propósito es estudiar la producción de fotones en el plasma de quarks y gluones en presencia de un campo magnético a través de la correspondencia norma/gravedad. Una vez entendidos los elementos necesarios para el cálculo en el lado de la teoría de campos, en este capítulo presentamos el cálculo en la teoría de gravedad, para ello comenzaremos estableciendo el fondo sobre el cual vamos a trabajar y luego calcularemos las densidades espectrales.

## 3.1. Fondo anisotrópico en la presencia de un campo magnético

En [19] se construyó una solución numérica a las ecuaciones de Einstein-Maxwell que, es asintóticamente  $\text{AdS}_5$  y dual a una teoría SYM con  $\mathcal{N} = 4$  en  $R^{3,1}$  bajo la presencia de un campo magnético. La solución interpola entre el producto de un hoyo negro BTZ con un  $T^2$  cerca del horizonte y  $\text{AdS}_5$  cerca de la frontera.

La acción a considerar corresponde a una teoría 5-dimensional de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa<sup>1</sup>

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} (R + F^{mn} F_{mn} - \frac{12}{L^2}) + S_{\text{Bdry}}, \quad (3.1.1)$$

---

<sup>1</sup>Podemos hacer una reducción dimensional a la teoría de supergravedad tipo IIB en (9+1)-dimensiones siendo la teoría 5-dimensional de Einstein-Maxwell con constante cosmológica negativa una de las posibles teorías resultantes.

donde  $G_5 = \frac{\pi}{2N_c^2}$  y por conveniencia fijaremos  $L = 1$ . La intensidad de campo  $F = dA$  que aparece en esta sección no es la misma que aparece en (2.0.1), ésta última habita en la teoría de campos, mientras que la que aparece en (3.1.1) es el campo de norma que habita en la teoría gravitacional cuyas perturbaciones son  $A_\mu$ , que resultarán ser el dual a la corriente  $J_\mu^{\text{EM}}$  en la teoría de campos. Dado que el potencial que aparece en (2.0.1) no lo volveremos a mencionar, utilizaremos la misma letra para ambos.

Junto con la identidad de Bianchi, a partir de la acción (3.1.1) obtenemos las ecuaciones de campo:

$$R_{MN} = \frac{4}{L^2}g_{MN} + \frac{1}{3}F^{PQ}F_{PQ}g_{MN} - 2F_{MP}F_N^P, \quad (3.1.2)$$

$$\nabla^M F_{MN} = 0. \quad (3.1.3)$$

Dado que estamos interesados en soluciones asintóticamente AdS<sub>5</sub> con un campo magnético tangente a las direcciones en la frontera, proponemos un ansatz donde la intensidad de campo y la métrica sean invariantes bajo traslaciones espaciales y rotaciones en el plano  $x^{1,2}$  y tenga inversión temporal. El ansatz que cumple dichas simetrías es

$$ds^2 = -U(r)dt^2 + \frac{1}{U(r)}dr^2 + V(r)(dx^2 + dy^2) + W(r)dz^2, \quad (3.1.4)$$

para la métrica y

$$F_{\text{fondo}} = B dx \wedge dy, \quad (3.1.5)$$

para la intensidad de campo, con  $B$  una constante. Las ecuaciones de Maxwell (3.1.3) se satisfacen automáticamente y después de calcular los tensores de Ricci correspondientes<sup>2</sup>, las ecuaciones de Einstein (3.1.2) se reducen a

$$\begin{aligned} 0 &= 2W(r)^2 \left[ 4B^2 + V(r) \left( U'(r)V'(r) + U(r)V''(r) \right) \right] + U(r)V(r)^2W'(r)^2 \\ &\quad - V(r)W(r) \left[ 2V(r) \left( U'(r)W'(r) + U(r)W''(r) \right) + U(r)V'(r)W'(r) \right], \\ 0 &= 4V(r)W(r)^2V''(r) - 2W(r)^2V'(r)^2 - V(r)^2 \left( W'(r)^2 - 2W(r)W''(r) \right), \\ 0 &= W(r) \left[ -8B^2 + 6V(r)^2 \left( U''(r) - 8 \right) + 6V(r)U'(r)V'(r) \right] + 3V(r)^2U'(r)W'(r), \\ 0 &= W(r) \left( 4B^2 + 2V(r)U'(r)V'(r) + U(r)V'(r)^2 - 24V(r)^2 \right) \\ &\quad + V(r)W'(r) \left( V(r)U'(r) + 2U(r)V'(r) \right), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

---

<sup>2</sup>con la convención  $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda$  y  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$

la cuarta ecuación es una restricción para los valores iniciales. Antes de comenzar el análisis numérico para encontrar la solución a estas ecuaciones desde  $r \rightarrow r_h$  hasta  $r \rightarrow r_\infty$  (todo el intervalo), notemos que existen dos soluciones analíticas para (3.1.6). Una de ellas es

$$\begin{aligned} U_{BTZ}(r) &= 3(r^2 - r_h^2), \\ V_{BTZ}(r) &= \frac{B}{\sqrt{3}}, \\ W_{BTZ}(r) &= 3r^2, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

y representa el ya mencionado producto entre un agujero negro BTZ con horizonte en  $r_h$  y un espacio que en [19] eligen sea  $T^2$ .

La otra solución ocurre cuando  $B=0$  y es dada por

$$\begin{aligned} U_{BN}(r) &= \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2}r_h\right)^4}{\left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4}\right), \\ V_{BN}(r) &= \frac{4V_0}{9r_h^2} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2, \\ W_{BN}(r) &= \frac{4}{3} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Esto es la solución a una D3 brana negra (1.1.32) con coordenada radial  $\tilde{r}$  bajo el cambio de coordenada  $\tilde{r} = r + \frac{r_h}{2}$ , con  $\tilde{r}_h = \frac{3}{2}r_h$  y un reescalamiento en las coordenadas  $x, y, z$ .

Notamos que al hacer una expansión en series alrededor del horizonte en series de  $r - r_h$  de las soluciones (3.1.7) y (3.1.8) (después de hacer el cambio de variable arriba mencionado) las funciones métricas  $U(r)$  y  $W(r)$  coinciden en su primer término.

$$\begin{aligned} U_{BTZ}(r) &= 6rh(r - r_h) + 3(r - r_h)^2, \\ V_{BTZ}(r) &= \frac{B}{\sqrt{3}}, \\ W_{BTZ}(r) &= 3r_h^2 + 6r_h(r - r_h) + 3(r - r_h)^2, \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

y

$$\begin{aligned}
U_{BN}(r) &= 6r_h(r - r_h) - 2(r - r_h)^2 + \frac{8}{3r_h}(r - r_h)^3 + \mathcal{O}(4), \\
V_{BN}(r) &= V_0 + \frac{4V_0}{3r_h}(r - r_h) + \frac{4V_0}{9r_h^2}(r - r_h)^2, \\
W_{BN}(r) &= 3r_h^2 + 4r_h(r - r_h) + \frac{4}{3}(r - r_h)^2,
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

donde  $\mathcal{O}(4)$  indica términos de cuarto orden o mayores y el resto de las expresiones terminan tal como se muestra arriba.

Ahora bien, nuestro objetivo es encontrar soluciones asintóticamente  $\text{AdS}_5$  duales a una teoría de MSYM en presencia de un campo magnético. Dado que, al igual que en [19] no nos fue posible encontrar una solución analítica que cumpliera estas características, procedimos a buscar una solución numérica introduciendo una pequeña perturbación a la solución exacta (3.1.9) de la forma <sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
U_P(r) &= U_{BTZ} + \sum_{i=2}^{\infty} U_i(r - r_h)^i, \\
V_P(r) &= V_{BTZ} + \sum_{i=0}^{\infty} V_i(r - r_h)^i, \\
W_P(r) &= W_{BTZ} + \sum_{i=1}^{\infty} W_i(r - r_h)^i.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Notemos que el sistema de ecuaciones (3.1.6) indica que el espacio de soluciones es de cuatro dimensiones, y por lo tanto al hacer una expansión en series de potencias, esta deberá admitir cuatro coeficientes independientes. Si mantenemos los dos primeros coeficientes en la serie de  $U$  y el primer coeficiente de la serie de  $W$  idénticos a los de (3.1.7) y (3.1.8), estaremos especificando tres de los cuatro parámetros libres, dejando así libre sólo a un parámetro que consideraremos sea  $V_0$ .

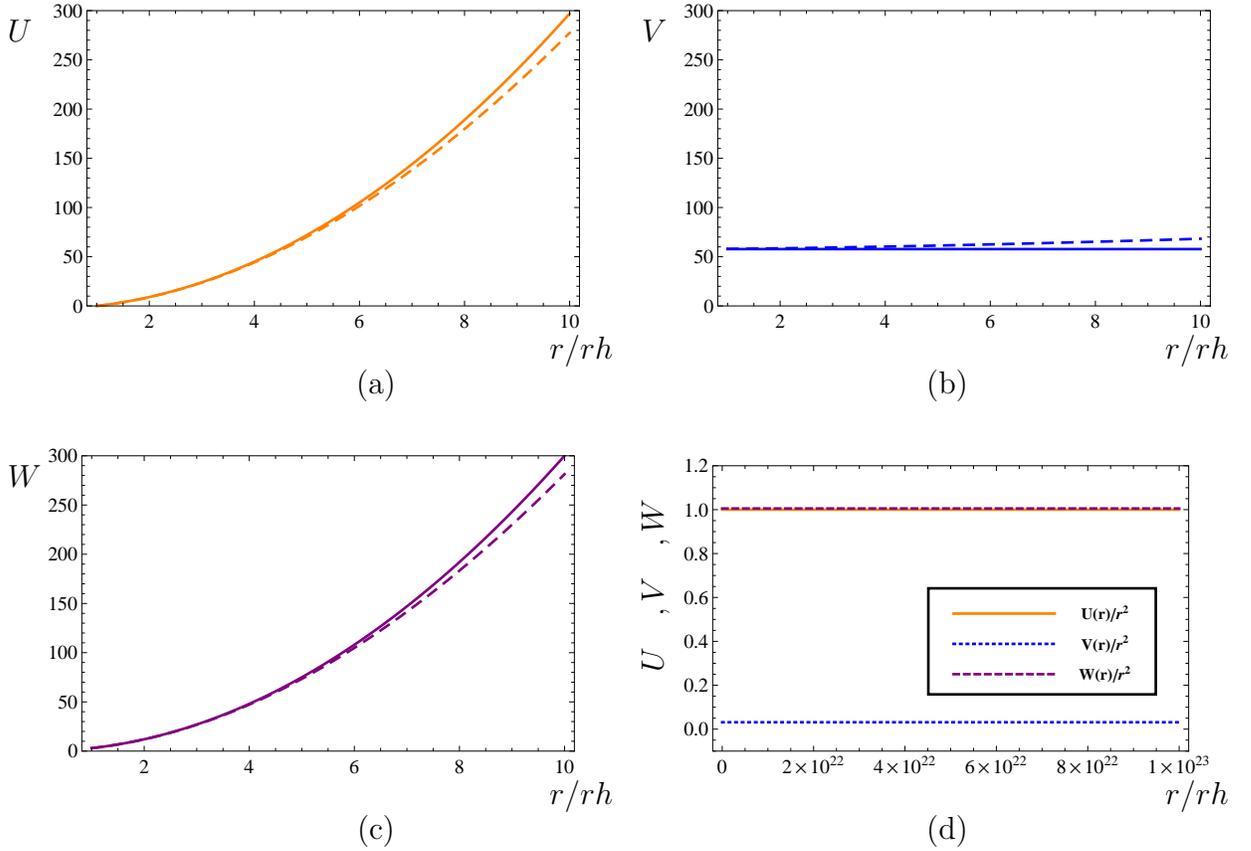
De esta forma al introducir una perturbación cerca del horizonte a la solución (3.1.7), hemos introducido el parámetro  $V_0$  que nos permitirá construir una familia de soluciones, cuyos elementos tienden a la solución de brana negra (3.1.8) cuando  $B \rightarrow 0$  siempre que  $V_0$  no tienda a cero. Mientras que para  $B$  diferente de cero cuando  $V_0 = 0$  recuperamos la solución exacta (3.1.7). Los casos intermedios proporcionan soluciones interesantes, pero las que satisfacen  $\frac{B}{V_0} \gg 0$  interpolan, como deseábamos, de forma correcta entre (3.1.7) para  $r \rightarrow r_h$  y (2.0.6) para  $r \rightarrow \infty$ . Un hecho importante de esta familia de soluciones es que todos sus miembros tienen la misma temperatura  $T = \frac{\tilde{r}_h}{\pi} = \frac{3r_h}{2\pi}$  en común con la asociada a (3.1.8).

---

<sup>3</sup>Este tratamiento tiene implicaciones que discutiremos en la sección (3.2.1).

Al poder llevar nuestros resultados de forma continua al límite de  $B = 0$ , es que obtenemos una forma de comparar y revisar nuestros resultados de la producción de fotones con los resultados obtenidos en [11, 13].

Dado el carácter singular de (3.1.6), para obtener una solución numérica que vaya desde  $r$  cercana al horizonte hasta  $r \rightarrow \infty$  sustituimos (3.1.11) en (3.1.6) para calcular los coeficientes  $U_i$ ,  $V_i$  y  $W_i$  en términos de  $V_0$  y con ello obtener una solución perturbativa a (3.1.11) cerca del horizonte. Hecho lo anterior, podemos utilizar estas soluciones como datos iniciales para hacer el cálculo numérico de (3.1.6) desde  $r = r_h$  hasta  $r \rightarrow \infty$ . En la figura 3.1 a, b, c, podemos notar que el comportamiento de la solución numérica genérica con  $\frac{B}{V_0} \gg 1$  va como la solución BTZ cerca del horizonte y en la figura (3.1 d), mostramos que el comportamiento de esta solución numérica asintóticamente es  $\text{AdS}_5$ .



**Figura 3.1:** En líneas punteadas presentamos las gráficas de las soluciones numéricas de (3.1.6) y comparamos con la solución BTZ en líneas continuas, cerca del horizonte en (a) para  $U$ , (b) para  $V$  y (c) para  $W$ , y en (d) comparamos con la solución  $\text{AdS}_5$  para valores grandes de  $r$ .

Una vez obtenida una familia de fondos gravitacionales con campo magnético constante, cuyo dual en la teoría de campos describimos en la sección 2 estamos listos para calcular la producción de fotones para varios valores del campo B en estas teorías.

### 3.2. Campo de norma $A_\mu$

Recordemos que la dualidad establece que: a corrientes conservadas en la teoría de campos les corresponde un campo de norma en el lado de gravedad. Requerimos entonces estudiar las perturbaciones  $(A_\mu, A_r)$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ) del campo de norma U(1) que aparece en (3.1.1) sobre el fondo (3.1.4) y (3.1.5). Debemos variar (3.1.1) con respecto a estas perturbaciones, con  $F = F_{fondo} + dA$  donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica que obtenemos de (3.1.4). Dado que  $F_{fondo}$ , la intensidad de campo de fondo, apunta en la dirección  $dx \wedge dy$ , es constante y la métrica no depende de  $x$  o  $y$ , podemos omitir a  $F_{fondo}$  del cálculo de la variación de (3.1.1). Manteniendo  $dA$  chico mientras resolvemos las ecuaciones de movimiento permite considerarlo como una perturbación que no modifica el fondo <sup>4</sup> (3.1.4) y (3.1.5), es decir, ni los modos de la métrica o el fondo se verán excitados. Por lo tanto basta con considerar el término  $F^{mn}F_{mn}$  dado sólo por:

$$\begin{aligned}
F^{mn}F_{mn} &= g^{ma}g^{nb}F_{ab}F_{mn} = g^{ma}g^{nb}(\partial_a A_b - \partial_b A_a)(\partial_m A_n - \partial_n A_m) \\
&= 2\left[g^{00}g^{xx}(\partial_0 A_x - \partial_x A_0)^2 + g^{00}g^{yy}(\partial_0 A_y - \partial_y A_0)^2 + g^{00}g^{zz}(\partial_0 A_z - \partial_z A_0)^2\right. \\
&\quad + g^{00}g^{rr}(\partial_0 A_r - \partial_r A_0)^2 g^{xx}g^{yy}(\partial_x A_y - \partial_y A_x)^2 + g^{xx}g^{zz}(\partial_x A_z - \partial_z A_x)^2 \\
&\quad + g^{xx}g^{rr}(\partial_x A_r - \partial_r A_x)^2 + g^{yy}g^{zz}(\partial_y A_z - \partial_z A_y)^2 + g^{yy}g^{rr}(\partial_y A_r - \partial_r A_y)^2 \\
&\quad \left. + g^{zz}g^{rr}(\partial_z A_r - \partial_r A_z)^2\right]. \tag{3.2.1}
\end{aligned}$$

Ya que en lo posterior calcularemos cantidades invariantes de norma, elegimos para simplificar los cálculos, trabajar en la norma  $A_r = 0$ , haciendo que  $A_\mu$  sea el campo norma dual a la corriente electromagnética  $J_\mu^{EM}$ . La ecuación anterior se simplifica a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F^{mn}F_{mn} &= g^{00}g^{xx}(\partial_0 A_x - \partial_x A_0)^2 + g^{00}g^{yy}(\partial_0 A_y)^2 + g^{00}g^{zz}(\partial_0 A_z - \partial_z A_0)^2 \\
&\quad + g^{00}g^{rr}(-\partial_r A_0)^2 + g^{xx}g^{yy}(\partial_x A_y)^2 + g^{xx}g^{zz}(\partial_x A_z - \partial_z A_x)^2 \\
&\quad + g^{xx}g^{rr}(-\partial_r A_x)^2 + g^{yy}g^{zz}(-\partial_z A_y)^2 + g^{yy}g^{rr}(-\partial_r A_y)^2 \\
&\quad + g^{zz}g^{rr}(-\partial_r A_z)^2. \tag{3.2.2}
\end{aligned}$$

A pesar de que la teoría que estamos considerando es anisotrópica debido a la presencia del campo magnético  $F_{fondo}$ , ésta es invariante bajo traslaciones a lo largo de las coordenadas de la teoría de norma. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente descomposición de

---

<sup>4</sup>ver sección 3.2.1

Fourier

$$A_\mu(x^\nu, r) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-itk^0 + i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} A_\mu(k_\nu, r),$$

$$k_\mu = k_0(\sqrt{C_1}, \sqrt{C_2} \sin \vartheta, 0, \sqrt{C_3} \cos \vartheta), \quad (3.2.3)$$

donde las constantes que aparecen en las componentes de  $k_\mu$  son las definidas en la sección 2. Usando (3.2.3) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos una ecuación desacoplada para  $A_y$

$$\left(\sqrt{-g} g^{rr} g^{yy} A'_y\right)' - \sqrt{-g} g^{yy} \left(g^{tt} k_0^2 + g^{xx} k_x^2 + g^{zz} k_z^2\right) A_y = 0, \quad (3.2.4)$$

un sistema de ecuaciones acopladas para las componentes  $A_{t,x,z}$

$$\left(\sqrt{-g} g^{rr} g^{tt} A'_t\right)' - \sqrt{-g} g^{tt} \left[g^{xx} k_x (k_x A_t + k_0 A_x) + g^{zz} k_z (k_z A_t + k_0 A_z)\right] = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\left(\sqrt{-g} g^{rr} g^{xx} A'_x\right)' - \sqrt{-g} g^{xx} \left[g^{tt} k_0 (k_0 A_x + k_x A_t) + g^{zz} k_z (k_z A_x - k_x A_z)\right] = 0, \quad (3.2.6)$$

$$\left(\sqrt{-g} g^{rr} g^{zz} A'_z\right)' - \sqrt{-g} g^{zz} \left[g^{tt} k_0 (k_0 A_z + k_z A_t) + g^{xx} k_x (k_x A_z - k_z A_x)\right] = 0 \quad (3.2.7)$$

y una constricción que se obtiene de variar la acción con respecto a  $A_r$  antes de fijar la norma.

$$k_0 g^{tt} A'_t - k_x g^{xx} A'_x - k_z g^{zz} A'_z = 0. \quad (3.2.8)$$

Las funciones primadas aquí y en el resto del texto representan funciones derivadas con respecto a  $r$ . Después de sustituir (3.1.4) y (3.2.3) en (3.2.4-3.2.7) obtenemos el sistema:

$$-k_0^2 \sqrt{W(r)} \left(-\frac{1}{U(r)} + \frac{\sqrt{C_2} \sin \vartheta}{V(r)} + \frac{\sqrt{C_3} \cos \vartheta}{W(r)}\right) A_y + \left(\sqrt{W(r)} U(r) A'_y\right)' = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{k_0^2 V(r) \sqrt{W(r)}}{U(r)} \times$$

$$\left(\frac{\sqrt{C_2} \sin \vartheta}{V(r)} \left(\sqrt{C_2} \sin \vartheta A_t + A_x\right) + \frac{\sqrt{C_3} \cos \vartheta}{W(r)} \left(\sqrt{C_3} \cos \vartheta A_t + A_z\right)\right) -$$

$$\left(V(r) \sqrt{W(r)} A'_t\right)' = 0, \quad (3.2.10)$$

$$-k_0^2 \sqrt{W(r)} \left(-\frac{1}{U(r)} + \frac{C_3 \cos^2 \vartheta}{W(r)}\right) A_x + k_0^2 \sqrt{W(r)} \frac{\sqrt{C_2} \sin \vartheta}{U(r)} A_t$$

$$k_0^2 \left(\frac{\sqrt{C_2 C_3}}{\sqrt{W(r)}} \sin \vartheta \cos \vartheta A_z\right) + \left(\sqrt{W(r)} U(r) A'_x\right)' = 0, \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_0^2 V(r)}{\sqrt{W(r)}} \left( -\frac{1}{U(r)} \left( A_z + \sqrt{C_3} \cos \vartheta A_t \right) \right) - \\
& \frac{k_0^2}{\sqrt{W(r)}} \sqrt{C_2} \sin \vartheta \left( \sqrt{C_2} \sin \vartheta A_z - \sqrt{C_3} \cos \vartheta A_x \right) + \\
& \left( \frac{V(r)U(r)}{\sqrt{W(r)}} A'_z \right)' = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

### 3.2.1. Corrección a la métrica debido al campo de fondo y sus perturbaciones

En la sección 3.1 propusimos el ansatz (3.1.4) y (3.1.5) para resolver las ecuaciones de movimiento (3.1.2) y (3.1.3). Posteriormente, al estudiar la perturbación de la intensidad de campo,  $F$ , reescribimos este campo como:

$$F = F_{fondo} + dA. \tag{3.2.13}$$

Por lo tanto, a orden cero en  $dA$  como vimos en la sección (3.1), las ecuaciones de Maxwell (3.1.3) se satisfacen automáticamente y de (3.1.2), obtenemos la métrica del fondo.

A orden lineal en  $dA$ , en la sección 3.2 resolvimos las ecuaciones de Maxwell (3.1.3) asumiendo que la ecuación (3.1.2) no tenía términos lineales en  $dA$ . Sin embargo, notemos que escribiendo  $F$  de la forma (3.2.13), sí aparecen en (3.1.2) términos lineales en  $dA$ , que modifican la geometría del fondo y por ende, las ecuaciones de Maxwell, generando un sistema de ecuaciones acoplado. Este sistema está siendo estudiado por nuestro grupo de investigación pero, en este trabajo asumiremos que la geometría no adquiere modificaciones a orden lineal en  $dA$ .

## 3.3. Cálculo de correladores en el lado de gravedad

En la sección 1.1.5 describimos la forma en que se pueden calcular las funciones de dos puntos. En esta sección aplicaremos dicha receta para el caso de la corriente electromagnética. Comenzamos aislando de la acción (3.1.1) los términos con dos derivadas radiales. De acuerdo con (3.2.1) esa acción es

$$S_{aislada} = -\frac{1}{8\pi G_5} \int dt d\vec{x} dr \left[ \sqrt{-g} g^{rr} \left( g^{tt} (A'_t)^2 + g^{xx} (A'_x)^2 + g^{yy} (A'_y)^2 + g^{zz} (A'_z)^2 \right) \right], \tag{3.3.1}$$

después de integrar por partes con respecto a  $r$  y evaluar en la frontera,  $\partial S$ , obtenemos,

$$S_{\partial S} = -\frac{1}{8\pi G_5} \int dt d\vec{x} \left[ \sqrt{-g} g^{rr} \left( g^{tt} A_t A'_t + g^{xx} A_x A'_x + g^{yy} A_y A'_y + g^{zz} A_z A'_z \right) \right] \Big|_{\partial S}. \quad (3.3.2)$$

Esta es la acción que variaremos con respecto a el valore de  $A_\mu$  en la frontera, que es la fuente de la corriente de la teoría de campos. De ella y las ecuaciones de movimiento (3.2.4)-(3.2.7) observamos que podemos realizar el cálculo para la densidad espectral  $\chi_{yy}$  de forma independiente de las otras. Estos cálculos son análogos a los realizados en [13], mientras que las densidades espectrales (2.0.11), al estar acopladas, requerirán una estrategia diferente para resolverlas (desarrollada en [52] y aplicada en [1]).

### 3.3.1. Límite $B=0$

Con el objetivo de tener un punto de partida al comparar los efectos del campo magnético de fondo en nuestros resultados, en esta sección vamos a calcular la densidad espectral en el límite de  $B = 0$ . Este cálculo es análogo al mostrado en [11, 13].

Obtenemos el límite  $B = 0$  sustituyendo (3.1.8) en (3.2.4)-(3.2.7). Ya que en ausencia de campo magnético el fondo es isotrópico, somos libres de alinear el momento del fotón en cualquier dirección y en particular tomamos  $\vartheta = 0$ . De acuerdo con (2.0.11) y (2.0.10) parece ser que basta con calcular  $G_{yy}^R$  y  $G_{xx}^R$ . Sin embargo, en este límite el cálculo se simplifica aún más ya que tanto (3.2.4) como (3.2.6) son iguales a

$$\left[ \left( r + \frac{r_h}{2} \right)^3 \left( 1 - \frac{\left( \frac{3}{2} r_h \right)^4}{\left( r + \frac{r_h}{2} \right)^4} \right) A'_{B=0}(w, r) \right]' + \frac{k_0^2}{\left( r + \frac{r_h}{2} \right)} \left[ \left( 1 - \frac{\left( \frac{3}{2} r_h \right)^4}{\left( r + \frac{r_h}{2} \right)^4} \right)^{-1} - 1 \right] A_{B=0}(w, r) = 0. \quad (3.3.3)$$

Tenemos dos soluciones a esta ecuación, ambas resultan ser analíticas, pero utilizando la condición de onda entrante nos quedamos con:

$$A_{B=0} = \left( 1 - \frac{9r_h^2}{(2r + r_h)^2} \right)^{-\frac{iw}{2}} \left( \frac{9r_h^2}{(2r + r_h)^2} + 1 \right)^{\frac{w}{2}} \times {}_2F_1 \left( \frac{(1-i)w}{2} + 1, \frac{(1-i)w}{2}; 1 - iw; \frac{2(r^2 + r_h r - 2r_h^2)}{(2r + r_h)^2} \right), \quad (3.3.4)$$

donde  ${}_2F_1$  es una función hipergeométrica. Usando la temperatura  $T = \frac{3r_h}{2\pi}$ , hemos introducido una frecuencia adimensional dada por:

$$w = \frac{k_0}{2\pi T} = \frac{k_0}{3r_h}. \quad (3.3.5)$$

Para el ángulo escogido, la suma sobre polarizaciones en (2.0.11) está dada por:

$$\chi_{B=0} = -2 \operatorname{Im} \frac{4V_0}{9r_h} (G^{\text{R}yy} + G^{\text{R}xx})_{B=0} = -4 \operatorname{Im} \frac{4V_0}{9r_h} G_{B=0}^{\text{R}}. \quad (3.3.6)$$

El resultado para la función de Green es:

$$G_{B=0}^{\text{R}} = -\frac{1}{8\pi G_5 |A_{B=0}(w, \infty)|^2} \times \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2}r_h\right)^4}{\left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4}\right) A_{B=0}^*(w, r) A'_{B=0}(w, r), \quad (3.3.7)$$

donde

$$A_{B=0}(w, \infty) = \left(1 - \frac{9r_h^2}{(2r + r_h)^2}\right)^{-\frac{iw}{2}} \left(\frac{9r_h^2}{(2r + r_h)^2} + 1\right)^{\frac{w}{2}} \times {}_2F_1\left(\frac{(1-i)w}{2} + 1, \frac{(1-i)w}{2}; 1 - iw; \frac{1}{2}\right), \quad (3.3.8)$$

es el valor que  $A_{B=0}$  toma cuando  $r \rightarrow \infty$ .

El hecho de que los índices en (3.3.6) sean contravariantes es entendido dada la forma en que obtenemos (3.3.7) de la correspondencia norma/gravedad, esto es, a través de variar dos veces la acción en la frontera con respecto al valor del campo en la frontera, cuyo índice es covariante, por lo tanto, para que los índices estén correctamente contraídos, el resultado de esta variación debe de tener dos índices contravariantes. La misma anotación se aplica a variaciones con respecto a los valores en la frontera de otros campos necesarios para calcular los correladores en los cálculos posteriores.

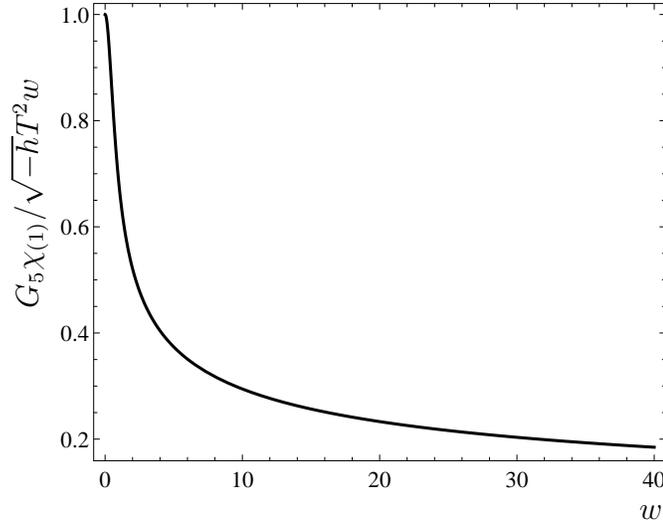
Siguiendo el procedimiento de [49] y resumido en la sección 1.1.5, observemos que si multiplicamos la ecuación (3.3.3) por  $A_{B=0}^*(w, r)$ , la parte imaginaria del límite de la expresión (3.3.7) se hace independiente de  $r$ . Elegimos entonces por conveniencia evaluar este límite en el horizonte

$$\lim_{r \rightarrow r_h} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(r + \frac{r_h}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{\left(\frac{3}{2}r_h\right)^4}{\left(r + \frac{r_h}{2}\right)^4}\right) A_{B=0}^*(w, r) A'_{B=0}(w, r) = -i \frac{w 2^w (2\pi T)^2}{\sqrt{3}}. \quad (3.3.9)$$

Un punto más a notar es que estamos calculando densidades con respecto a la métrica (2.0.7) en la teoría de campos, así que para tener en cuenta el escalamiento necesario para convertir la métrica en un elemento de línea de Minkowski, nuestros resultados deberán de ser divididos por  $\sqrt{-h}$  con  $h$  el determinante de la métrica asociada (2.0.7). Finalmente uno obtiene la densidad espectral dada por:

$$\chi_{B=0} = \frac{T^2 w 2^w}{G_5 \left| {}_2F_1 \left( 1 + \frac{1-i}{2}w, \frac{1-i}{2}w, 1 - iw; \frac{1}{2} \right) \right|^2}, \quad (3.3.10)$$

expresión idéntica a (4.21) de [13] excepto que aquí los campos de materia están en la representación adjunta. Los resultados por lo tanto son proporcionales a  $N_c^2$  a través de  $G_5 = \frac{\pi}{2N_c^2}$ , mientras que en (4.21) de [13] los resultados son proporcionales a  $N_c N_f$ , como se observa en la constante  $\tilde{\mathcal{N}}_{D7} = \frac{1}{4} N_c N_f T^2$ . Notemos también que el cambio en el signo al cual esta elevado el 2, se compensa con el cambio de signo dentro del argumento de la función hipergeométrica. La cantidad adimensional  $G_5 \chi_{(1)}/T^2 w$  está graficada en la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Gráfica de la cantidad adimensional  $G_5 \chi_{(1)}/\sqrt{-\hbar} T^2 w$  como función de  $w$  para  $B = 0$ .

En las secciones siguientes usaremos esta expresión como una referencia para los resultados obtenidos con  $B \neq 0$

### 3.3.2. Densidad espectral para la polarización $\epsilon_{(1)}$

En esta sección calcularemos la densidad espectral  $\chi_{yy}$  con  $B \neq 0$ . Esta densidad la podemos calcular separada de las otras dado que (3.2.4) no está acoplada a las demás ecuaciones de movimiento y en la acción (3.3.2) no hay términos mezclados entre  $A_y$  y otros campos de norma. Nuevamente siguiendo la receta de la sección (1.1.5) la función de correlación esta dada por

$$G^{\text{R}yy} = -\frac{1}{8G_5 |A_y(k_0, \infty)|^2} \lim_{r \rightarrow r_h} U(r) \sqrt{W(r)} A_y^*(k_0, r) A_y'(k_0, r), \quad (3.3.11)$$

donde hemos usado la observación de la sección anterior acerca del término independiente de  $r$ , dejando toda la información de la frontera contenida en  $|A_y(k_0, \infty)|$ . De acuerdo con (2.0.4) la densidad espectral  $\chi^{yy}$  es menos dos veces la parte imaginaria de este resultado.

Como ya habíamos mencionado, para  $B/V_0$  arbitrario sólo nos fue posible resolver las funciones métricas de forma numérica, lo que significa que en esta sección debemos recurrir a cálculos numéricos para obtener la solución de  $A_y$ , a través de una integración numérica de (3.2.4). Esta integración utiliza condiciones a la frontera adecuadas, que obtenemos a partir de usar la expansión (3.1.11) (cuyos coeficientes los obtendremos de resolver de forma perturbativa (3.1.6)) y de  $A_y$ , ambas cerca del horizonte. Dada la naturaleza de la ecuación, diferencial, de segundo grado y con singularidad no regular (3.2.4), utilizamos el método de Frobenius y proponemos  $A_y$  como:

$$A_y = (r - r_h)^\nu a_y(r), \quad (3.3.12)$$

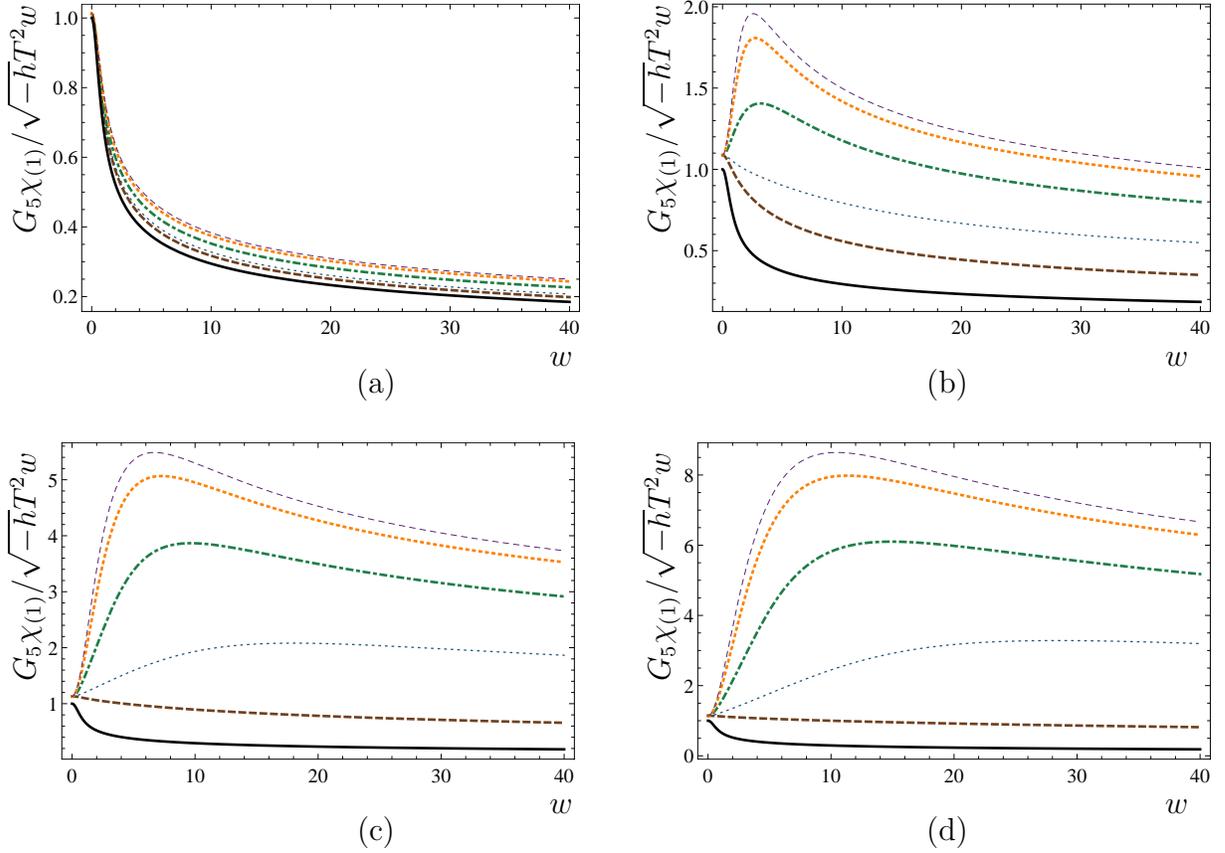
donde  $a_y(r)$  es alguna función regular en  $r_h$ . El exponente  $\nu$  resulta ser:

$$\nu = \pm i \frac{w}{2}, \quad w = \frac{\tilde{k}_0}{2\pi T}, \quad (3.3.13)$$

donde  $T$  es la temperatura asociada a todos los miembros de nuestra familia de fondos, y  $\tilde{k}_0 = C_1 k_0$  es la componente temporal del vector momento del fotón. Para imponer la condición de onda entrante en el horizonte y por lo tanto obtener el correlador retardado, elegimos el signo negativo para  $\nu$ . Una vez que la solución entrante ha sido escogida la expansión es única salvo por un factor que multiplica toda la expresión. Obtenemos así la condición a la frontera necesaria para hacer la integración numérica de (3.2.4) para varios valores de  $B/V_0$  y del ángulo  $\vartheta$ . El límite de (3.3.11) puede obtenerse analíticamente usando la misma expansión para  $A_y$ , dejando solo a  $|A_y(k_0, \infty)|$  como la cantidad a calcularse numéricamente. Graficamos la densidad espectral  $\chi_{yy}$  en la figura 3.3 junto con el resultado obtenido para el plasma en ausencia de campo magnético a la misma temperatura. Debemos notar que dado que  $F$  está definida como  $B dx \wedge dy$ , la intensidad del campo físico debe escalar como  $b = B/C_2$ .

Notemos que para  $k_0 \gg b$  la densidad espectral no converge a la misma constante que en el caso cuando  $B = 0$ , vemos que es una consecuencia de que no es lo mismo mandar  $k_0 \rightarrow \infty$  manteniendo  $b$  y  $T$  fijo, que mandar  $b \rightarrow 0$  dejando fijos  $k_0$  y  $T$ .

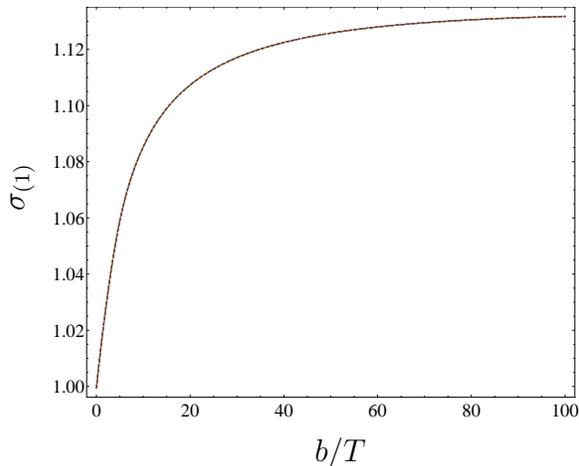
El límite de frecuencia cero de la densidad espectral nos da la conductividad eléctrica DC. Para fotones con polarización  $\epsilon_{(1)}$  esta es la conductividad a lo largo de la dirección transversal  $y$ . En la figura 3.4 hemos graficado la cantidad



**Figura 3.3:** Gráficas de la densidad espectral  $\chi_{(1)}$  asociada a la polarización  $\epsilon_{(1)}$ . Las curvas corresponden de abajo a arriba a los ángulos  $\vartheta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . Las cuatro gráficas corresponden a los casos  $b/T = 2,09$  (a),  $20,9$  (b),  $10,5$  (c),  $209$  (d), en todas ellas graficamos a modo de comparación en líneas sólidas el resultado de  $\chi_{B=0}$  para  $B = 0$ .

$$\sigma_{(1)} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{\chi_{(1)}}{\chi_{(1), B=0}} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} 2 \frac{\chi_{(1)}}{\chi_{B=0}}, \quad (3.3.14)$$

que es una función de  $b/T$ , normalizada con respecto al resultado con la misma polarización en el caso  $B = 0$ , en este caso  $\lim_{b \rightarrow 0} \chi_{(1)} \equiv \chi_{(1), B=0}$ . Como era esperado la conductividad no depende del ángulo  $\vartheta$ , ya que la dirección  $y$  en la cual la conductividad está determinada es también independiente del ángulo.



**Figura 3.4:** Gráfica de la conductividad  $\sigma_{(1)}$  correspondiente a la polarización  $\epsilon_{(1)}$  como función de  $b/T$ . La gráfica está normalizada con respecto al resultado del caso  $B=0$ .

### 3.3.3. Densidad espectral para la polarización $\epsilon_{(2)}$

Habiendo encontrado ya el correlador correspondiente a la polarización  $\vec{\epsilon}_{(1)}$ , en esta sección vamos a calcular los correladores correspondientes a la polarización  $\vec{\epsilon}_{(2)}$ .

El procedimiento a seguir es más claro si lo hacemos en términos de los campos invariantes de norma

$$E_i \equiv \partial_i A_t - \partial_t A_i. \quad (3.3.15)$$

Con este fin notamos que la constricción (3.2.8) la podemos reescribir como:

$$A'_t = \frac{g^{xx} q_x E'_x + g^{zz} q_z E'_z}{i \bar{k}^2}, \quad (3.3.16)$$

con  $\bar{k}^2 = g^{00} q_0^2 + g^{xx} q_x^2 + g^{zz} q_z^2$ .

A partir de (3.3.15) y (3.3.16) podemos reescribir la acción (3.3.2) en términos de los campos invariantes de norma  $E_i$

$$S_{\partial S} = -\frac{1}{8\pi G_5} \int d^4 \bar{x} (M_{xx} E_x E'_x + M_{zz} E_z E'_z + 2M_{xz} E'_x E'_z)|_{\partial S}, \quad (3.3.17)$$

donde

$$M_{xx} = 2V(r) \sqrt{W(r)} (-g^{tt} k_0^2 - g^{zz} k_z^2) \frac{g^{xx}}{k^2 k_0^2}, \quad (3.3.18)$$

$$M_{zz} = 2V(r) \sqrt{W(r)} (-g^{tt} k_0^2 - g^{xx} k_x^2) \frac{g^{zz}}{k^2 k_0^2}, \quad (3.3.19)$$

$$M_{xz} = M_{zx} = 4V(r) \sqrt{W(r)} \frac{g^{xx} g^{zz} k_x k_z}{k^2 k_0^2}. \quad (3.3.20)$$

Para calcular las variaciones de la acción es importante notar que, diferenciar con respecto a  $A_{i=x,y,z}$ , es  $k_0$  veces el resultado de diferenciar con respecto a  $E_i$  y al diferenciar con respecto a  $A_t$ , debemos de sumar  $\sum_i k_i \frac{\delta}{\delta E_i}$ .

El método para calcular la densidad espectral para la polarización  $\epsilon_{(2)}$  que emplearemos en esta sección [53], es una extensión del método presentado en la sección 1.1.5 adaptada a un sistema de ecuaciones acoplado. Resulta conveniente escribir las soluciones de  $E_x$  y  $E_z$  como un vector

$$\mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} E_x \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (3.3.21)$$

Las ecuaciones de movimiento son lineales en  $E_i$ , por lo tanto podemos escribir su solución como una combinación de dos soluciones linealmente independientes  $\mathbf{E}_1 = (E_{x1}, E_{z1})^T$ ,  $\mathbf{E}_2 = (E_{x2}, E_{z2})^T$ . Ya que nos interesa saber como se comporta la solución con respecto a sus valores en la frontera,  $r \rightarrow r_f$ , nos es útil ver que la solución con valores a la frontera  $E_{xf}$  y  $E_{zf}$  está dada por la combinación

$$c_1 \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{z1} \end{pmatrix} \Big|_{r \rightarrow r_f} + c_2 \begin{pmatrix} E_{x2} \\ E_{z2} \end{pmatrix} \Big|_{r \rightarrow r_f} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_z \end{pmatrix} \Big|_{r \rightarrow r_f} = \begin{pmatrix} E_{xf} \\ E_{zf} \end{pmatrix}, \quad (3.3.22)$$

siempre y cuando el valor de  $c_1$  y  $c_2$  este dado por

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{E_{zf}E_{x2}(r_f) - E_{xf}E_{z2}(r_f)}{\Delta}, \\ c_2 &= \frac{E_{xf}E_{z1}(r_f) - E_{zf}E_{x1}(r_f)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

donde  $\Delta = E_{x2}(r_f)E_{z1}(r_f) - E_{z2}(r_f)E_{x1}(r_f)$ . A partir de (3.3.22), su derivada y (3.3.23) notamos que la variación con respecto al valor en la frontera del campo  $E_{xf}$  o  $E_{zf}$ , está involucrado tanto en la expresión para  $E_x^{(,')}(r)$ , como para  $E_z^{(,')}(r)$ <sup>5</sup>, es decir, para calcular las densidades espectrales de (2.0.11) requerimos hacer el cálculo de

$$\frac{\delta E_x^{(,)}}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad \frac{\delta E_z^{(,)}}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad \frac{\delta E_z^{(,)}}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad \frac{\delta E_x^{(,)}}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad (3.3.24)$$

Es fácil notar que las variaciones de  $E_x$  y  $E_z$  evaluados en la frontera están dados por:

$$\frac{\delta E_x}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} = 1, \quad \frac{\delta E_z}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} = 1, \quad \frac{\delta E_z}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} = 0, \quad \frac{\delta E_x}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} = 0, \quad (3.3.25)$$

mientras que las expresiones para las variaciones de las derivadas de  $E_x$  y  $E_z$  evaluados en la frontera, requieren conocer los resultados numéricos de los campos  $E_i$  y sus derivadas

<sup>5</sup>Donde el super índice (,') indica dos posibilidades, la función sin derivar, o la función derivada con respecto de  $r$ .

evaluados en la frontera están dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E'_x}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} &= \frac{-E_{z2}(f_f)E'_{x1}(r) + E_{z1}(f_f)E'_{x2}(r)}{\Delta} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \\ \frac{\delta E'_z}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} &= \frac{E_{x2}(f_f)E'_{z1}(r) - E_{x1}(f_f)E'_{z2}(r)}{\Delta} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \\ \frac{\delta E'_z}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} &= \frac{-E_{z2}(f_f)E'_{z1}(r) + E_{z1}(f_f)E'_{z2}(r)}{\Delta} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \\ \frac{\delta E'_x}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} &= \frac{E_{x2}(f_f)E'_{x1}(r) - E_{x1}(f_f)E'_{x2}(r)}{\Delta} \Big|_{r \rightarrow r_f}. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Hecho lo anterior estamos listos para calcular los correladores dados por:

$$G_{xx}(k) = M_{xx} \frac{\delta E'_x}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} + M_{xz} \frac{\delta E'_z}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad (3.3.27)$$

$$G_{zz}(k) = M_{zz} \frac{\delta E'_z}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} + M_{zx} \frac{\delta E'_x}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad (3.3.28)$$

$$G_{xz}(k) = M_{xx} \frac{\delta E'_z}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} + M_{xz} \frac{\delta E'_x}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}, \quad (3.3.29)$$

$$G_{zx}(k) = M_{zz} \frac{\delta E'_x}{\delta E_{xf}} \Big|_{r \rightarrow r_f} + M_{zx} \frac{\delta E'_z}{\delta E_{zf}} \Big|_{r \rightarrow r_f}. \quad (3.3.30)$$

Para obtener la densidad espectral correspondiente (2.0.4), basta con extraer la parte imaginaria de los correladores anteriores, multiplicarla por dos y sumarlos de acuerdo con (2.0.11), para así obtener  $\chi_2 = \epsilon_2^\mu \epsilon_2^\nu \chi_{\mu\nu}$ .

Siguiendo este procedimiento, sólo falta hacer el cálculo numérico para encontrar  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$ . Recordemos que ambas soluciones son combinaciones de  $A_{i=x,z,t}$ . Por lo que análogo al cálculo hecho en la sección anterior calcularemos una solución numérica para  $A_x$ ,  $A_z$  y  $A_t$ . En esta ocasión debemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado con singularidades no regulares acoplado, por lo tanto cerca del horizonte hacemos una propuesta análoga a la correspondiente a  $A_{y_{r \rightarrow r_h}}$

$$A_x = (r - r_h)^{\nu_x} a_x(r), \quad A_z = (r - r_h)^{\nu_z} a_z(r), \quad A_t = (r - r_h)^{\nu_t} a_t(r), \quad (3.3.31)$$

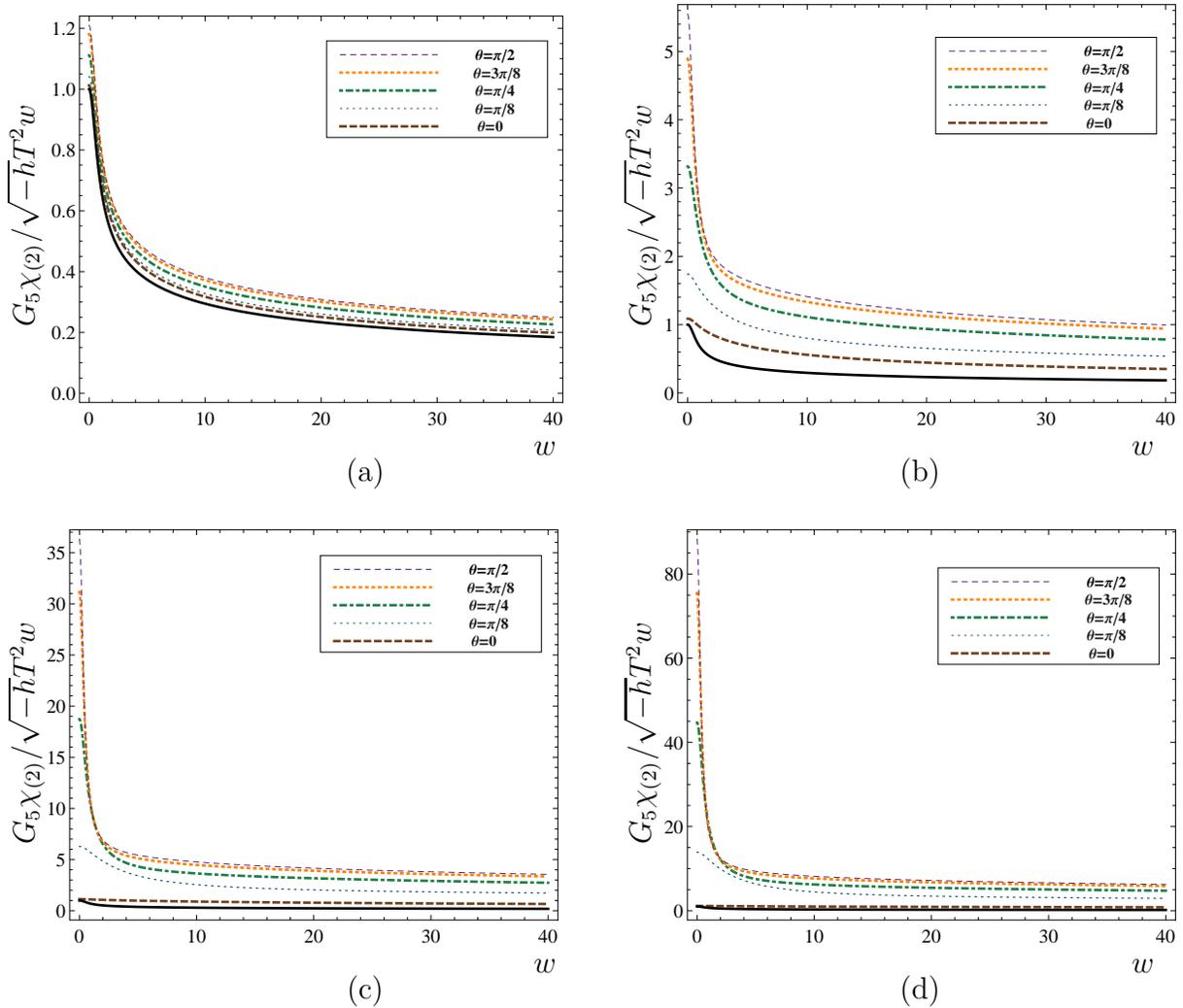
donde  $\nu_i$  resulta ser:

$$\nu_x = \nu_z = \nu_y; \quad \nu_t = 0, 1. \quad (3.3.32)$$

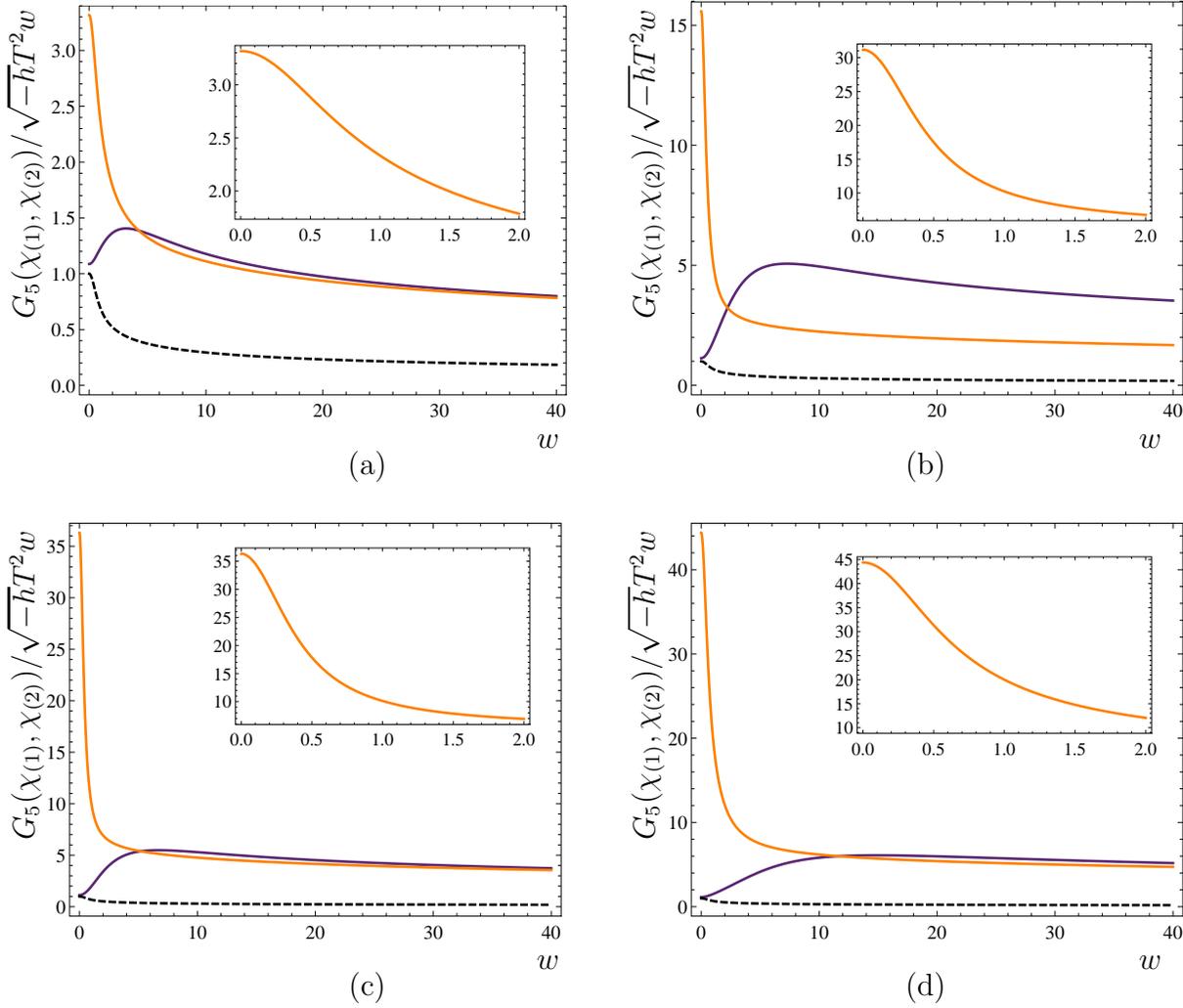
La solución de  $A_t$  cerca del horizonte muestra un comportamiento polinómico y elegir cualquiera de sus soluciones genera la misma expresión. Para el caso de  $A_x$  y  $A_z$  volvemos a elegir el signo negativo como solución de onda entrante. Hecha esta elección podemos

hacer la integración numérica para todo el rango de  $r$ , que será única salvo factores multiplicativos.

Los resultados para  $\chi_2$  están graficados en la figura 3.5, donde comparamos la producción de fotones con polarización  $\epsilon_{(2)}$ , para distintos ángulos  $\vartheta$  con los resultados del caso  $B = 0$ , todos con la misma temperatura.



**Figura 3.5:** Gráficas de la densidad espectral  $\chi_{(2)}$  asociada a la polarización  $\epsilon_{(2)}$ . Las curvas corresponden de arriba a abajo a los ángulos  $\vartheta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . Las cuatro gráficas corresponden a los casos  $b/T = 2,09$  (a),  $20,9$  (b),  $10,5$  (c),  $209$  (d) y todas en todas ellas graficamos a modo de comparación en líneas sólidas el resultado de  $\chi_{B=0}$  para  $B = 0$ .



**Figura 3.6:** Gráficas de la densidad espectral  $\chi(1)$  y  $\chi(2)$  asociada a la polarización  $\epsilon(1)$  y  $\epsilon(2)$  respectivamente junto con  $\chi_B$  para el caso  $B = 0$ . Las cuatro gráficas corresponden respectivamente a los casos:  $b/T = 2,091$  y  $\vartheta = \pi/4$ (a),  $b/T = 20,9$  y  $\vartheta = 3\pi/8$ (b),  $b/T = 10,5$  y  $\vartheta = \pi/2$  (c),  $b/T = 209$  y  $\vartheta = \pi/4$  (d).

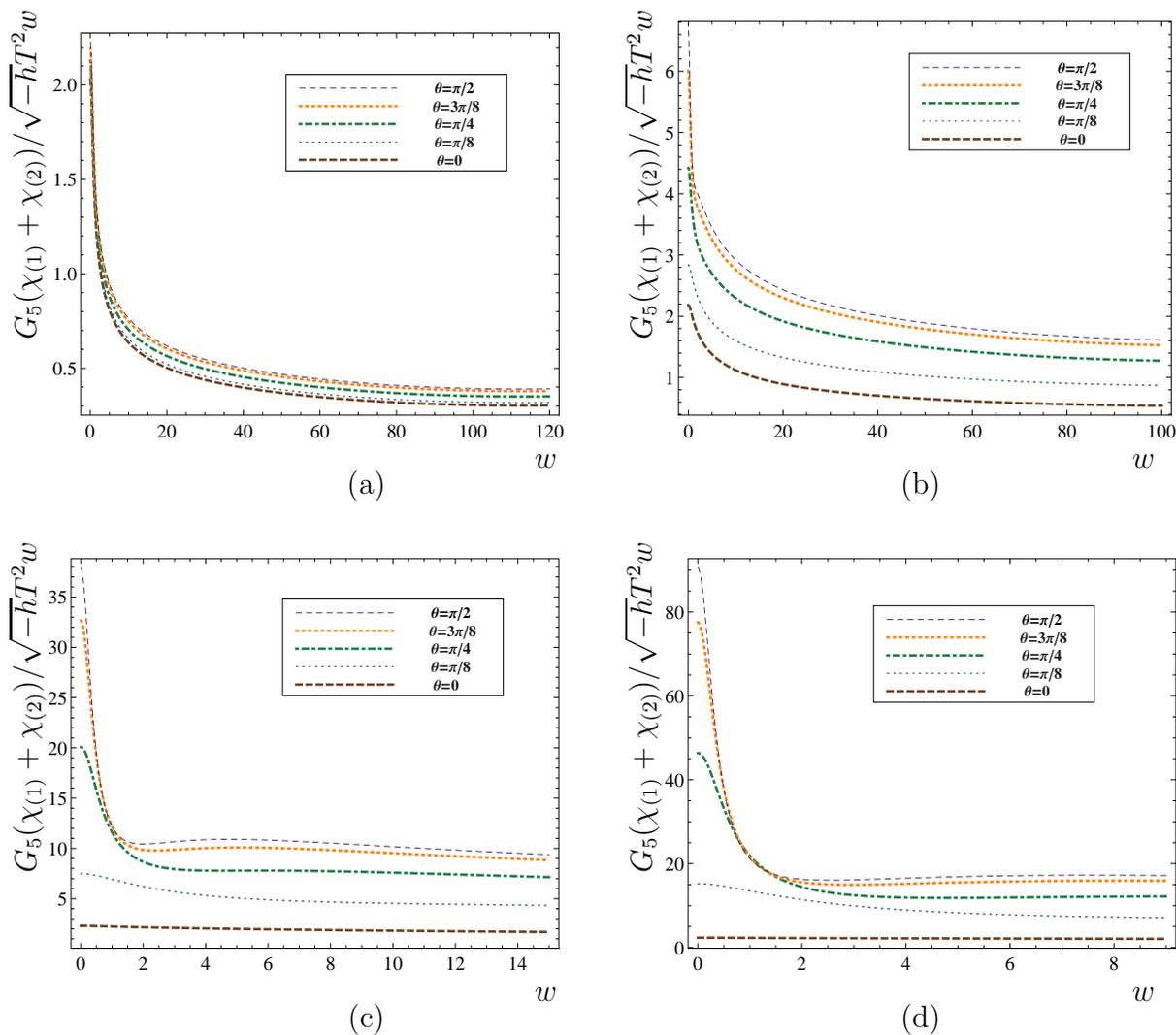
Tal como esperábamos, la curva correspondiente al ángulo  $\vartheta = 0$  en la polarización  $\chi_1$  y  $\chi_2$  es la misma, ya que en este caso las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.6) son las mismas, pues  $g^{xx} = g^{yy}$ . Por otro lado no esperaríamos, ni obtuvimos un comportamiento similar cuando  $\vartheta = \pi/2$  ya que (3.2.4) y (3.2.7) son diferentes pues  $g^{yy}$  y  $g^{zz}$  también lo son. Para apreciar esta diferencia y el comportamiento a bajas y altas frecuencias, graficamos  $\chi_{(1)}$  y  $\chi_{(2)}$  junto con la densidad en el caso  $B = 0$  en la figura (3.6).

Para apreciar los efectos del fondo en la función espectral no polarizada ( $\chi_{(1)} + \chi_{(2)}$ ), graficamos esta cantidad en la figura 3.7. Podemos notar que la sensibilidad a la intensidad del campo magnético y al ángulo  $\vartheta$  decrece conforme la energía del fotón aumenta.

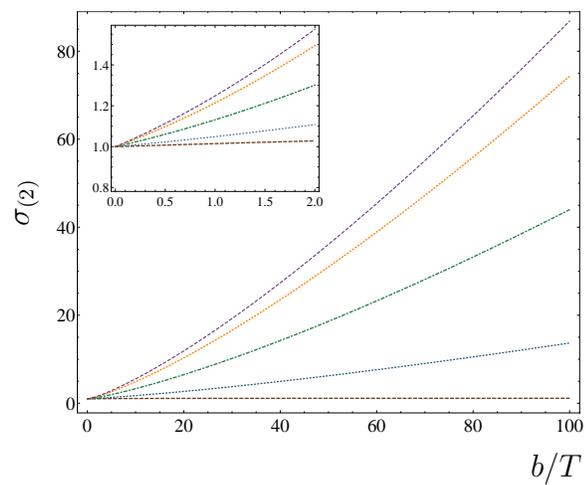
En lo que respecta a la conductividad para fotones con la polarización a lo largo de  $\epsilon_2$  tenemos la expresión

$$\sigma_{(2)} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{\chi_{(2)}}{\chi_{(2), B=0}} = \lim_{k_0 \rightarrow 0} 2 \frac{\chi_{(2)}}{\chi_{B=0}}, \quad (3.3.33)$$

cuyo valor depende no sólo de  $b$ , como fue en el caso de la polarización en la dirección  $y$ , sino que también del ángulo  $\vartheta$ . Las gráficas de  $\sigma_{(2)}$  como una función de  $b/T$  para 5 ángulos diferentes se muestra en la figura 3.8. La conductividad reportada es a lo largo de la dirección del vector de polarización  $\epsilon_{(2)}$ , que para  $\vartheta = 0$  apunta en la dirección transversa  $x$ , y recuperamos el mismo resultado que en (3.3.14). Para  $\vartheta = \pi/2$  la conductividad esta a lo largo de la dirección  $z$  y observamos que su comportamiento es el que más difiere de (3.3.14).



**Figura 3.7:** Gráficas de la densidad espectral no polarizada  $(\chi_{(1)} + \chi_{(2)})/w$  para los mismos cinco ángulos de las previas gráficas con  $b/T = 2,09$  (a),  $20,9$  (b),  $10,5$  (c),  $209$  (d)



**Figura 3.8:** Gráfica de la conductividad  $\sigma_{(2)}$  correspondiente con la polarización  $\epsilon_{(2)}$  como función de  $b/T$  para valores constantes que van de arriba a abajo como  $\vartheta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . La gráfica es normalizada con respecto al resultado obtenido en el caso  $B = 0$ .



## Producción total de fotones

Tenemos ya todos los ingredientes necesarios para calcular la tasa de la producción de fotones (2.0.3). Haciendo uso de que el momento del fotón es nulo, podemos convertir esta cantidad en la tasa de emisión por unidad de energía en un ángulo infinitesimal alrededor de  $\vartheta$  y obtener

$$\frac{-16G_5}{2\alpha_{\text{EM}}T^3} \frac{d\Gamma}{d(\cos \vartheta) dk^0} = \frac{16G_5 w}{2T^2} \frac{1}{e^{2\pi w} - 1} (\chi_{(1)} + \chi_{(2)}) . \quad (4.0.1)$$

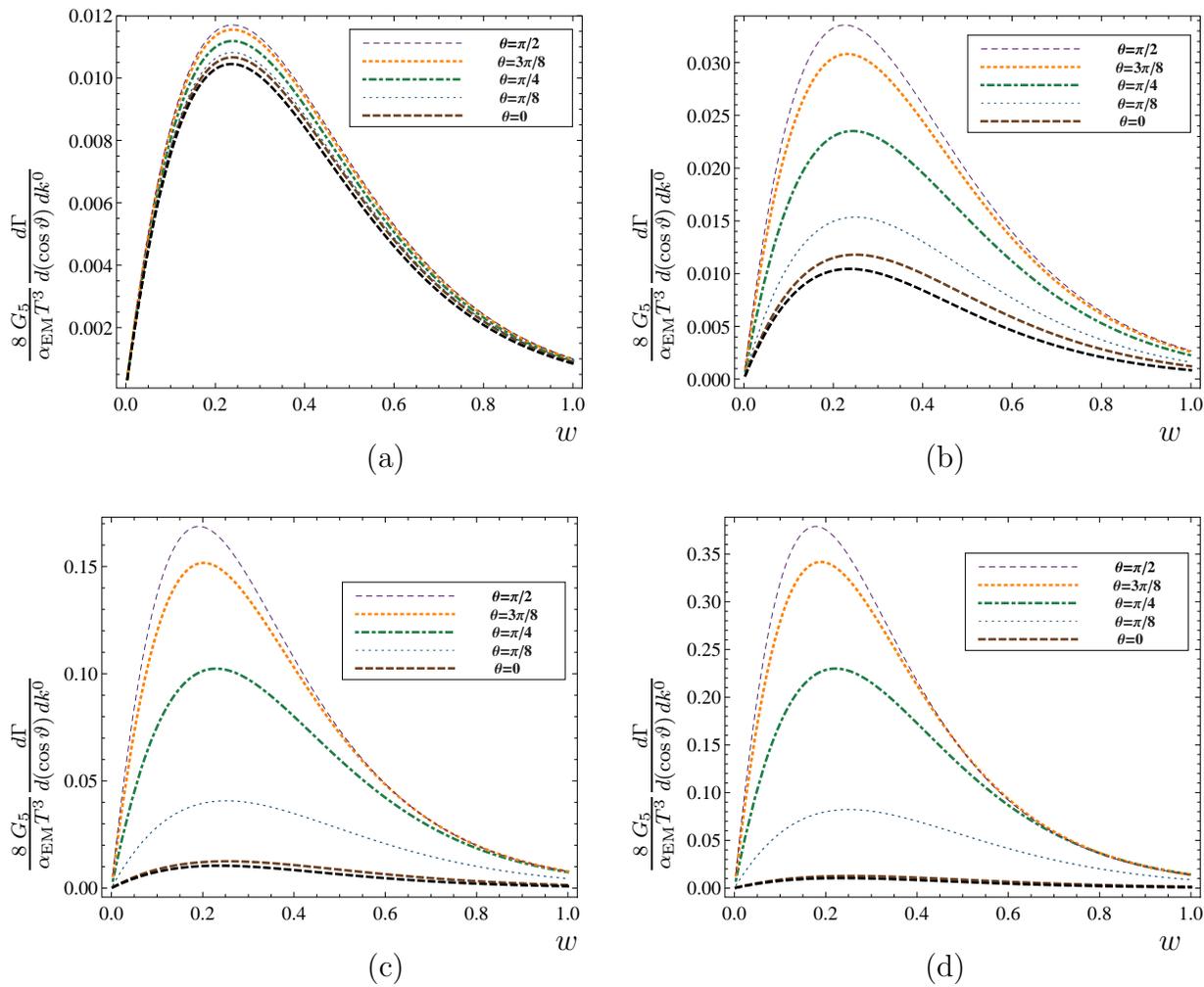
Graficamos esta cantidad para diferentes valores de  $b/T$  y diferentes valores de  $\vartheta$  en la figura 4.1. Podemos hacer uso de (3.3.10) para obtener el resultado para  $B = 0$  para la misma temperatura,

$$\frac{-16G_5}{2\alpha_{\text{EM}}T^3} \frac{d\Gamma_{\text{iso}}}{d(\cos \vartheta) dk^0} = \frac{w^2 2^w}{(e^{2\pi w} - 1) \left| {}_2F_1 \left( 1 + \frac{1-i}{2} w_s, \frac{1-i}{2} w_s, 1 - iw_s; \frac{1}{2} \right) \right|^2} , \quad (4.0.2)$$

que es idéntico al resultado reportado en [13]. Nosotros lo hemos graficado en la figura 4.1 como una curva negra punteada.

### 4.1. Discusión

En este trabajo calculamos la producción de fotones y la conductividad eléctrica de un plasma de SYM con  $\mathcal{N} = 4$  en la presencia de un campo magnético intenso, modelado mediante técnicas holográficas usando la geometría estudiada en [19]. Consideramos que el plasma se extiende infinitamente, está en equilibrio térmico, está fuertemente acoplado y tiene un número muy grande de colores. Dada la introducción de un campo de fondo en



**Figura 4.1:** Gráficas de la producción total de fotones. Las líneas corresponden a los ángulos  $\vartheta = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . Las cuatro gráficas corresponden a los casos  $b/T = 2,09$  (a),  $20,9$  (b),  $10,5$  (c),  $209$  (d). Los resultados para el caso  $B = 0$  esta representado en líneas punteadas negras.

la dirección  $z$ , el plasma es invariante bajo rotaciones en el plano  $xy$ , pero no invariante ante rotaciones que involucren a la dirección  $z$ , a quien hemos llamado la dirección anisotrópica. Nuestro estudio intenta ser lo más parecido posible al plasma de quarks y gluones que se genera en un experimento de colisión de iones pesados, en el que la dirección del campo magnético de fondo apunta en dirección perpendicular a la del rayo de iones. Para estudiar la distribución de la producción de fotones, hemos considerado orientaciones arbitrarias del momento del fotón con respecto a la dirección anisotrópica. Encontramos que la producción total de fotones es siempre mayor que la del caso en ausencia de campo magnético, independientemente de la frecuencia de los fotones y su dirección de propagación.

Como ya hemos dicho, en [1] estudian también la producción de fotones para ángulos genéricos en un plasma que resulta también ser anisotrópico. Sin embargo, en ese trabajo a diferencia del nuestro, el plasma resulta ser anisotrópico debido a que en el lado de gravedad el axión en el fondo gravitacional [16, 17] es dependiente de la posición.

En [1] los autores plantearon la pregunta de que tan universal es el comportamiento que habían encontrado. En nuestro trabajo concluimos que la fuente de la anisotropía es relevante. Si comparamos la producción de fotones calculada en [1] mediante un fondo con la anisotropía estudiada en [16, 17] y la calculada en este trabajo, podemos notar varias diferencias. En particular encontramos tres resultados con comportamiento opuesto respecto a los encontrados en [1]:

- En este trabajo reportamos que la sensibilidad a la intensidad de la fuente de la anisotropía y al ángulo entre el momento del fotón y la dirección de la anisotropía,  $\vartheta$ , decrece conforme la energía del fotón aumenta (figura. 3.7).

Tanto en [1] como en este trabajo, observamos que en el límite de altas energías del fotón, la función espectral dividida entre la energía del fotón tiende a una constante.

- Aquí reportamos que dicha constante es independiente de la polarización y medianamente sensible a la dirección de propagación del fotón (figura 3.6).
- En la presencia del campo magnético de fondo, la conductividad en la dirección perpendicular siempre aumenta, aunque comparado con el aumento de la fuente de la anisotropía, éste es menor (figura. 3.4).

Es importante notar que así como en [1] se observa un aumento en la producción de fotones, este aumento con respecto al caso sin campo magnético (el caso isotrópico) consiste únicamente en una diferencia entre la pendiente constante de la función espectral con respecto a la energía del fotón a altas energías, que es considerablemente más suave que la correspondiente a bajas energías del fotón.

En particular las primeras dos observaciones son de relevancia para los reportes de los experimentos ALICE y PHENIX, ya que la primera observación indica que tanto el aumento de la producción de fotones como la anisotropía en el espectro será más significativa para  $p_T$  bajo, siendo éste un hecho cualitativamente consistente con los experimentos. Además la segunda observación implica que la anisotropía en el espectro debería desaparecer para  $p_T$  alto, nuevamente esto es consistente con los experimentos.

Debemos recordar que hemos trabajado en una teoría de campos que no es QCD, por lo tanto la comparación con los datos experimentales puede sólo ser hecha a nivel cualitativo.

Como trabajo a futuro tenemos al menos dos propuestas. Una de ellas es considerar materia en la representación fundamental, y la otra es hacer que los campos de materia tengan masa distinta de cero. Ambos cambios los podemos hacer usando una teoría 10-dimensional en la cual introducimos D7 branas con carga de sabor. Introducir estas D7 branas añade por sí mismo la materia en la representación fundamental, y si las encajamos en el fondo de forma no ecuatorial, entonces esta materia tendría masa distinta de cero.

El efecto de la masa de los campos de materia en la producción de fotones se ha reportado en el estudio de distintos fondos [13, 18], por lo tanto esperaríamos ese parámetro sea relevante también en presencia de un campo en el fondo. En particular, conforme la masa aumenta comparada con la temperatura, debería de ser posible identificar la aparición de resonancias altamente localizadas en las funciones espectrales indicando la reconstrucción de mesones que se han derretido en el plasma [13]. Entender el papel jugado por el fondo magnético en esta transición ciertamente es algo que sería interesante estudiar.

Vale la pena mencionar que el incluir quarks masivos, es importante al hacer una estimación cuantitativa del aumento de luz producida en las estrellas de quarks, que es un sistema donde se ha sugerido [54], que la producción de fotones aumenta debido a la presencia de un campo magnético, haciendo visibles a este tipo de estrellas. La materia de quarks tiene frecuencias altas  $\simeq 20$  MeV, por lo tanto una estrella compacta compuesta homogéneamente hasta la superficie por esta materia, sería incapaz de emitir radiación térmica. En [54] haciendo uso del modelo de la bolsa de MIT, estudiaron los modos de propagación de fotones en estos objetos en presencia de un campo magnético  $B > 10^{12}$  G. En ese trabajo se mostró que para campos magnéticos muy intensos, se generan ventanas de emisión en el visible que se presentan en las funciones espectrales. Una de las claves para poder hacer esta predicción radica en que al incluir materia extraña, la energía de Fermi disminuye. Nuestros resultados particularmente el primer y el último punto, cualitativamente apuntan en favor de la posibilidad de que las estrellas de materia de quarks, emitan fotones visibles, por lo que se está preparando una comparación cualitativa de este hecho.

# Bibliografía

- [1] Leonardo Patino and Diego Trancanelli. Thermal photon production in a strongly coupled anisotropic plasma. *JHEP*, 1302:154, 2013.
- [2] John Adams et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nucl.Phys.*, A757:102–183, 2005.
- [3] K. Adcox et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl.Phys.*, A757:184–283, 2005.
- [4] K. Adcox et al. Proceedings of quark matter 2011. *22nd international conference on ultra-relativistic nucleus -nucleus collisions*, 12, december 2011.
- [5] P. Stankus. Direct photon production in relativistic heavy-ion collisions. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 55:517–554, 2005.
- [6] Edward Shuryak. Why does the quark gluon plasma at RHIC behave as a nearly ideal fluid? *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 53:273–303, 2004.
- [7] Martin Wilde. Measurement of Direct Photons in pp and Pb-Pb Collisions with ALICE. *Nucl.Phys.A904-905*, 2013:573c–576c, 2013.
- [8] A. Adare et al. Observation of direct-photon collective flow in  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV Au+Au collisions. *Phys.Rev.Lett.*, 109:122302, 2012.
- [9] Charles Gale. Photon Production in Hot and Dense Strongly Interacting Matter. 2009.
- [10] Jorge Casalderrey-Solana, Hong Liu, David Mateos, Krishna Rajagopal, and Urs Achim Wiedemann. Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions. 2011.

- 
- [11] Simon Caron-Huot, Pavel Kovtun, Guy D. Moore, Andrei Starinets, and Laurence G. Yaffe. Photon and dilepton production in supersymmetric Yang-Mills plasma. *JHEP*, 0612:015, 2006.
- [12] Andrei Parnachev and David A. Sahakyan. Photoemission with Chemical Potential from QCD Gravity Dual. *Nucl.Phys.*, B768:177–192, 2007.
- [13] David Mateos and Leonardo Patino. Bright branes for strongly coupled plasmas. *JHEP*, 0711:025, 2007.
- [14] Mauricio Martinez and Michael Strickland. Dissipative Dynamics of Highly Anisotropic Systems. *Nucl.Phys.*, A848:183–197, 2010.
- [15] Mauricio Martinez and Michael Strickland. Non-boost-invariant anisotropic dynamics. *Nucl.Phys.*, A856:68–87, 2011.
- [16] David Mateos and Diego Trancanelli. The anisotropic N=4 super Yang-Mills plasma and its instabilities. *Phys.Rev.Lett.*, 107:101601, 2011.
- [17] David Mateos and Diego Trancanelli. Thermodynamics and Instabilities of a Strongly Coupled Anisotropic Plasma. *JHEP*, 1107:054, 2011.
- [18] Shang-Yu Wu and Di-Lun Yang. Holographic Photon Production with Magnetic Field in Anisotropic Plasmas. *JHEP*, 1308:032, 2013.
- [19] Eric D’Hoker and Per Kraus. Magnetic Brane Solutions in AdS. *JHEP*, 0910:088, 2009.
- [20] Matthew Luzum and Paul Romatschke. Conformal Relativistic Viscous Hydrodynamics: Applications to RHIC results at  $s(\text{NN})^{1/2} = 200\text{-GeV}$ . *Phys.Rev.*, C78:034915, 2008.
- [21] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1 edition, February 2007.
- [22] Francis Halzen and Alan Martin. *Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1984.
- [23] D.J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. 1. *Phys.Rev.*, D8:3633–3652, 1973.
- [24] H. David Politzer. Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions. *Phys.Rept.*, 14:129–180, 1974.
- [25] R. Grimm, M. Sohnius, and J. Wess. Extended Supersymmetry and Gauge Theories. *Nucl.Phys.*, B133:275, 1978.

- [26] Alberto Güijosa. *Notas del Curso de posgrado en ciencias (física) UNAM: Correspondencia Norma/Gravedad*. 2012.
- [27] Akira Ukawa. Finite temperature QCD on the lattice. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 53:106–119, 1997.
- [28] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys.Rept.*, 323:183–386, 2000.
- [29] Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Black strings and p-branes. *Nuclear Physics B*, 360(1):197 – 209, 1991.
- [30] Jin Dai, R.G. Leigh, and Joseph Polchinski. New Connections Between String Theories. *Mod.Phys.Lett.*, A4:2073–2083, 1989.
- [31] Petr Horava. Background Duality of Open String Models. *Phys.Lett.*, B231:251, 1989.
- [32] Joseph Polchinski. Tasi lectures on D-branes. pages 293–356, 1996.
- [33] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. A First Course in String Theory. Cambridge University Press, 2004.
- [34] Edward Witten. Bound states of strings and p-branes. *Nucl.Phys.*, B460:335–350, 1996.
- [35] Lars Brink, John H. Schwarz, and J. Scherk. Supersymmetric yang-mills theories. *Nuclear Physics B*, 121(1):77 – 92, 1977.
- [36] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. Olive. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. *Nuclear Physics B*, 122(2):253 – 290, 1977.
- [37] Joseph Polchinski. Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges. *Phys.Rev.Lett.*, 75:4724–4727, 1995.
- [38] A Hashimoto and Igor R Klebanov. Scattering of Strings from D-branes. *Nucl. Phys. B, Proc. Suppl.*, 55(hep-th/9611214. PUPT-1669):118–133. 16 p, Nov 1996.
- [39] Igor R. Klebanov. World volume approach to absorption by nondilatonic branes. *Nucl.Phys.*, B496:231–242, 1997.
- [40] G.W. Gibbons and P.K. Townsend. Vacuum interpolation in supergravity via super p-branes. *Phys.Rev.Lett.*, 71:3754–3757, 1993.
- [41] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *AIP Conf.Proc.*, 484:51–63, 1999.
- [42] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. W. Peet. Entropy and temperature of black 3-branes. *Phys. Rev. D*, 54:3915–3919, Sep 1996.

- 
- [43] Edward Witten. Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 2:505–532, 1998.
- [44] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, May 1977.
- [45] Gerard 't Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. 1993.
- [46] Leonard Susskind. The World as a hologram. *J.Math.Phys.*, 36:6377–6396, 1995.
- [47] S.S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys.Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [48] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv.Theor.Math.Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [49] Dam T. Son and Andrei O. Starinets. Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications. *JHEP*, 0209:042, 2002.
- [50] Giuseppe Policastro, Dam T. Son, and Andrei O. Starinets. From AdS / CFT correspondence to hydrodynamics. *JHEP*, 0209:043, 2002.
- [51] M.L. Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000.
- [52] Matthias Kaminski, Karl Landsteiner, Javier Mas, Jonathan P. Shock, and Javier Tarrio. Holographic Operator Mixing and Quasinormal Modes on the Brane. *JHEP*, 1002:021, 2010.
- [53] Matthias Kaminski, Karl Landsteiner, Javier Mas, Jonathan P. Shock, and Javier Tarrio. Holographic Operator Mixing and Quasinormal Modes on the Brane. *JHEP*, 1002:021, 2010.
- [54] Enrique Moreno Méndez, Dany Page, Leonardo Patiño, and Patricia Ortega. Thermal Photons From Magnetized Bare Strange Stars. 2013.