UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Soluciones Simétricas a Problemas Elípticos Semilineales con Condición a la Frontera

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JUAN MANUEL DE LA HUERTA JIMÉNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ-LABORA

2014

Soluciones simétricas a problemas elípticos semilineales con condición a la frontera

Introducción

Resumen

Muchos problemas de análisis pueden ser vistos en forma de una ecuación funcional $F(u) = 0$, donde las soluciones u se buscan en una clase de funciones admisibles en un espacio de Banach V . Una clase particular de ecuaciones funcionales es la conformada por las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son de la forma

$$\mathrm{D}E(u) = 0,$$

definidas por un funcional E sobre un espacio de Banach V que es Fréchet diferenciable con derivada $\mathrm{D}E$. En este caso diremos que dicha ecuación está en forma variacional.

El objetivo de este trabajo es, haciendo uso de técnicas del cálculo de variaciones, encontrar soluciones no triviales al siguiente problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u &= |u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad\ \ \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

En la primera parte parte del trabajo se expondrán algunos resultados sobre espacios de Hilbert y convergencia débil. Finalizando la primera parte con el Teorema 1.19 que garantiza existencia de mínimos en conjuntos débilmente cerrados de funcionales coercitivas, débilmente semicontinuas inferiormente.

En la segunda parte introduciremos el concepto de derivada débil y los es-

pacios de Sobolev, y se demostrarán la desigualdad de Poincaré y el Teorema de Rellich-Kondrakov.

En la tercera parte se exponen los conceptos de diferenciabilidad en espacios de Banch y variedades de Hilbert. Se define el concepto de solución débil y se plantea el problema en forma variacional. Se demuestra el teorema principal de este trabajo (Teorema 3.18), haciendo uso de los teoremas de la segunda parte para garantizar que se cumplen las condiciones del Teorema 1.19. Usando dicho teorema, se muestra la existencia de al menos una solución débil no trivial si el dominio es acotado. Finalmente, apoyándose en el principio de criticalidad simétrica de Palais se demuestra que hay al menos una solución simétrica no trivial, si el dominio es acotado y simétrico, y se da un ejemplo de un dominio que admite una solución no radial.

Notas históricas

La importancia de las formas óptimas en culturas antiguas se manifiesta, por ejemplo, en el interés de los filósofos griegos en problemas de isoperimetría, como la cuadratura del círculo.

El primer tratamiento de un problema variacional es atribuido a Fermat, quien postuló que la luz sigue un camino en el menor tiempo posible y en 1622 fue capaz de derivar las leyes de refracción en términos que podríamos llamar analíticos. Gracias al desarrollo del cálculo por parte de Newton y Leibniz, el cálculo de variaciones tuvo un desarrollo más sistematizado .

En junio de 1696 Johann Bernoulli encontró una solución al problema de la braquistocrona, esto es a menudo visto como el nacimiento del cálculo de variaciones. En 1743 Leonard Euler, alumno de Johann Bernoulli, presentó el trabajo: «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti» publicado en 1744; donde expresa, en un apéndice, que: «todo en la naturaleza sigue algún principio de maximalidad o minimalidad». Así, los trabajos de

Johann y Jakob Bernoulli y Leonard Euler, todos de la ciudad de Basilea en Suiza, se convirtieron en fuente de inspiración para las siguientes generaciones de matemáticos.

Legendre, Lagrange, Jacobi y Hamilton hicieron importantes contribuciones. A ellos debemos lo que ahora llamamos «Ecuaciones de Euler- Lagrange», «Ecuaciones de Jacobi» o «Teoría de Hamilton Jacobi», por mencionar algunas.

En el siglo XIX los métodos variacionales fueron llevados a cabo sin un completo rigor y la mayoría de las veces el modelo era confundido con el fenómeno que se supone describe; así, el hecho de que por instancias naturales existiera un fenómeno físico era tomado como evidencia suficiente para que el correspondiente problema matemático tuviera solución. Sin embargo, a finales de ese mismo siglo, Weierstraß en un trabajo titulado «Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip» encontró un ejemplo de un problema variacional que no admite solución mínima. La crítica de Weirstraß al principio de Dirichlet precipitó al cálculo de variaciones en una crisis en sus fundamentos (Grundlagenkreise). Sin embargo, a través de los esfuerzos de varios matemáticos incluidos Weierstraß, Arzéla, Fréchet, Hilbert y Lebesgue, que no querían deshacerse de la herramienta que dicho principio representaba, el cálculo de variaciones fue revitalizado y emergió de su crisis con nueva fuerza.

Índice general

Capítulo 1

Un teorema de minimización

«Mis proposiciones se esclarecen porque quien las entiende las reconoce al final como absurdas, cuando a través de ellas -sobre ellas- ha salido fuera de ellas. (Tiene, por así decirlo, que arrojar la escalera después de haber subido por ella). Tiene que superar estas proposiciones; entonces ve correctamente el mundo.»

Ludwig Wittgenstein.[1]

1.1. Espacios de Hilbert

Recordemos que un espacio de Hilbert[2] es un espacio vectorial con producto interior, completo respecto a la métrica generada por dicho producto. Si H es un espacio de Hilbert, denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ y $\| \cdot \|_H$ a su producto interior y a su norma, respectivamente, o simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\| \cdot \|$ cuando sepamos a que espacio nos referimos. Recordemos también que en los espacios de Hilbert se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz, es decir,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

[1] Tractatus lógico-philosophicus, 6.54, 1922.

[2] Para propiedades sobre espacios de Hilbert puede consultarse [2, capítulo 2] [4, capítulo 6] y [3, capítulo 6].

para todos $u, v \in H$. En todo lo que sigue en el desarrollo de este trabajo H denotará un espacio de Hilbert.

Sabemos que los espacios euclidianos $\mathbb{R}^N$ de dimensión finita son completos y además que el producto punto es un producto interior. Igualmente, sabemos que los espacios de sucesiones l^p y los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$ son completos, y en particular, las métricas de los espacios $L^2(\mathbb{R}^N)$ y l^2 son generadas por un producto interior.

A continuación enunciaremos algunas definiciones y resultados importantes de los espacios de Hilbert.

De la misma manera que en los espacios euclidianos de dimensión finita tenemos la noción de ortogonalidad, generalizamos esta idea a los espacios de Hilbert de la siguiente manera.

Definición 1.1. *Sea V un subespacio vectorial de un espacio de Hilbert H. El espacio ortogonal a V en H se define como*

$$V^{\perp} := \{w \in H \,:\, \langle v, w \rangle = 0 \,\forall v \in V\}.$$

Ejemplo 1.2. *Consideremos el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^N)$ y el subespacio de funciones continuas de soporte compacto $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ entonces $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración. De las propiedades de la integral de Lebesgue[3] sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi = 0,$$

para todo $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, lo que implica que $u = 0$ para casi todo punto. □

Del ejemplo anterior podemos notar que no necesariamente $H = V \oplus V^{\perp}$, como sí ocurre en el caso de espacios de dimensión finita. El siguiente Teorema nos dice cuando podemos separar H en suma directa de un subespacio vectorial y su espacio ortogonal.

[3] [1][capítulo 14.5]

Definición 1.3. *Sean* $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1})$ *y* $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2})$ *dos espacios de Hilbert. Definimos el producto escalar en la suma directa como* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1\oplus H_2} : H_1 \oplus H_2 \to \mathbb{R}$

$$\langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle_{H_1\oplus H_2} := \langle u_1, u_2\rangle_{H_1} + \langle v_1, v_2\rangle_{H_2},$$

para todos $u_1, u_2 \in H_1$ *y* $v_1, v_2 \in H_2$.

Definido el producto escalar de esta manera, resulta que $H_1 \oplus H_2$ es, también, un espacio de Hilbert.

Teorema 1.4. *Si* V *es un subespacio vectorial que además es cerrado en* H*, entonces existe un isomorfismo lineal* $H \to V \oplus V^\perp$ *que además es una isometría.*

La importancia del siguiente resultado es que caracteriza las funciones continuas sobre los espacios de Hilbert que toman valores reales identificándolas con el espacio mismo.

Teorema 1.5 (de representación de Fréchet-Riesz[4]). *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $\eta : H \to \mathbb{R}$ *una función lineal y continua. Entonces existe un único* $w \in H$ *tal que*

$$\eta u = \langle w, u\rangle \quad \textit{para todo } u \in H.$$

1.1.1. Convergencia débil

Uno de los resultados más importantes en el Análisis Real es el teorema de Bolzano-Weirstraß el cual nos permite extraer sucesiones convergentes de sucesiones acotadas en $\mathbb{R}^N$, lo que en general no ocurre en espacios de dimensión infinita. Nuestro siguiente objetivo es definir un concepto de convergencia que nos permita hacer el análogo al Teorema de Bolzano-Weirstraß para los espacios de Hilbert en general.

[4]Para la demostración de este teorema puede consultarse [5][sección 5.7].

Definición 1.6. *Decimos que una sucesión* (u_k) *de elementos de* H *converge débilmente a* u *en* H *o que* u *es el límite débil de* (u_k) *en* H*, si para cada* $v \in H$ *se cumple que*

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Esta definición es una generalización del concepto de convergencia usual lo cual queda establecido en la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Si la sucesión* (u_k) *converge a* u *en* H *entonces* (u_k) *converge débilmente en* H*.*

Demostración. Para cada v en H, la función $L_v(w) := \langle w, v\rangle$ claramente es lineal y por la desigualdad de Cauchy-Schwartz es continua en H. Como (u_k) converge a u se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Por tanto la sucesión (u_k) converge débilmente a u. □

Definición 1.8. *Decimos que un subconjunto* M *de* H *es débilmente cerrado si para toda sucesión* (u_m) *en* M *débilmente convergente en* H *a un elemento* $u \in H$ *se cumple necesariamente que* $u \in M$*.*

Corolario 1.9. *Si un subconjunto* M *de* H *es débilmente cerrado en* H *entonces es cerrado en* H*.*

El siguiente ejemplo mostrará que la convergencia débil no implica la convergencia usual, en general.

Ejemplo 1.10. *Sea* (e_n) *la sucesión en el espacio de Hilbert* l^2 *definida como sigue,* $e_n(i) := \delta_{n,i}$*, donde*

$$\delta_{n,i} := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

es la delta de Kronecker. Entonces (e_n) no converge en l^2 pero sí converge débilmente en l^2.

Demostración. Sean n, m dos naturales distintos entonces

$$\|e_n - e_m\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |e_n(i) - e_m(i)|^2 = 2.$$

Así (e_n) no puede ser una sucesión de Cauchy. Por lo tanto (e_n) no converge.

Sea $s \in l^2$. De la definición del producto punto en l^2

$$\langle s, e_n \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} s(i) e_n(i) = s(n)$$

y del hecho que $s(n) \to 0$ se sigue que $\langle s, e_n \rangle \to 0 = \langle s, 0_{l^2} \rangle = 0$. Por lo tanto (e_n) converge débilmente a 0_{l^2} en l^2. □

Ejemplo 1.11. *Sea $M \subset l^2$ el conjunto formado por los elementos de la sucesión (e_n) del ejemplo anterior. Este conjunto no es débilmente cerrado, ya que tiene una subsucesión que converge a 0_{hitl^2}, el cual no está en el conjunto. Por otro lado M es cerrado en l^2 ya que es un conjunto de puntos aislados.*

Los siguientes resultados nos ayudarán a establecer un análogo al Teorema de Bolzano-Weierstraß .

Lema 1.12. *Sea (u_k) una sucesión acotada en H de tal manera que la sucesión $(\langle u_k, v \rangle)$ converge en $\mathbb{R}$ para todo $v \in H$. Entonces existe una $u \in H$ tal que (u_k) converge débilmente a u en H.*

Demostración. La función $\eta : H \to \mathbb{R}$ definida como

$$\eta v := \lim_{k \to \infty} \langle u_k, v \rangle$$

es lineal. Sea C la constante que acota a (u_k). De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se sigue que para todo $v \in H$

$$|\langle u_k, v\rangle| \leq \|u_k\|\|v\| \leq C\|v\|,$$

es decir,

$$|\eta v| = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle \leq C\|v\|,$$

lo que demuestra la continuidad de η. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz existe una única $u \in H$ tal que

$$\langle u_k, v\rangle = \eta v = \langle u, v\rangle$$

para todo $v \in H$. Por lo tanto, (u_k) converge débilmente a u en H. □

Teorema 1.13. *Toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente en H.*

Demostración. Sean (u_k) una sucesión acotada en H y $c > 0$ una de sus cotas. De la desigualdad de Cachy-Schwarz se sigue que

$$|\langle u_k, u_1\rangle| \leq \|u_k\|\|u_1\| \leq c\|u_1\|.$$

Como la sucesión de números reales $\langle u_k, u_1\rangle$ está acotada, existe una subsucesión (u_k^1) de (u_k) tal que $(\langle u_k^1, u_1\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$. Continuando de manera recursiva obtenemos, para cada $m \in \mathbb{N}$, una subsucesión (u_k^m) de (u_k^{m-1}) tal que $(\langle u_k^m, u_m\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$. Por un argumento diagonal, es decir, considerando la subsucesión (u_k^k) obtenemos que $\langle u_k^k, u_m\rangle$ converge en $\mathbb{R}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, denotemos por V al conjunto de todos las combinaciones lineales de (u_k). De la bilinealidad del producto escalar se sigue que $(\langle u_k^k, v\rangle)$ converge para cada $v \in V$. Sea $z \in \overline{V}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe $v \in V$ tal que $\|z - v\| < \frac{\varepsilon}{4c}$ y existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k, j > K$ entonces

$|\langle u_k^k - u_j^j, v\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
|\langle u_k^k - u_j^j, v\rangle| &\leq |\langle u_k^k - u_j^j, z - v\rangle| + |\langle u_k^k - u_j^j, v\rangle| \\
&\leq \|u_k^k - u_j^j\|\|z - v\| + |\langle u_k^k - u_j^j, v\rangle| \\
&\leq (\|u_k^k\| + \|u_j^j\|)\|z - v\| + |\langle u_k^k - u_j^j, v\rangle| \\
&< 2c\frac{\varepsilon}{4c} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto para cada $z \in \overline{V}$, la sucesión $(\langle u_k^k, z\rangle)$ converge en $\mathbb{R}$. Finalmente, como $\overline{V}$ es un subespacio vectorial cerrado ocurre que cada $w \in H$ es de la forma $w = z + y$ con $z \in \overline{V}$ y $y \in \overline{V}^{\perp}$. Por lo tanto,

$$\langle u_k^k, w\rangle = \langle u_k^k, z\rangle + \langle u_k^k, y\rangle = \langle u_k^k, z\rangle$$

y, en consecuencia, $(\langle u_k^k, w\rangle)$ converge para todo $w \in H$. Finalmente, del lema anterior se sigue que (u_k^k) converge débilmente en H. $\square$

Continuando con las analogías de la convergencia débil con la convergencia usual probaremos que toda sucesión débilmente convergente es acotada. Para eso ocuparemos el siguiente resultado conocido como Teorema de Baire.

Lema 1.14 (de Baire). *Si X es un espacio métrico no vacío, completo y $X_1 \subset \cdots \subset X_m \subset \cdots$ es una sucesión de espacios cerrados de X tales que*

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m,$$

entonces $int(X_{m_0}) \neq \emptyset$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que X y (X_i) cumplen las hipótesis del Teorema y además que $int(X_{m_0}) = \emptyset$ para todo $m_0 \in \mathbb{N}$. Sean $x_1 \in X$ y $0 < r_1 < \frac{1}{2}$.Como $B_X(x_1, r_1) \cap (X - X_1)$ es abierto y no vacío existen $x_2 \in X$ y $0 < r_2 < \frac{1}{4}$ tal que $\bar{B}_X(x_2, r_2) \subset B_X(x_1, r_1) \cap (X - X_1)$. De manera recursiva, como para cada $m \in \mathbb{N}$, $int(X_{m-1}) = \emptyset$ entonces $B_X(x_{m-1}, r_{m-1}) \cap (X - X_{m-1})$ es no vacío, luego obtenemos $x_m \in X$ y $0 < r_m < \frac{1}{2^m}$ tales que

$$\bar{B}_X(x_m, r_m) \subset B_X(x_{m-1}, r_{m-1}) \cap (X - X_{m-1}).$$

Se tiene entonces que si $n \leq m$

$$d(x_n, x_m) < r_m < \frac{1}{2^m}.$$

Por lo tanto (x_n) es de Cauchy en X y así existe un punto $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Si en la desigualdad anterior hacemos $n \to \infty$ obtenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$d(x, x_m) \leq r_m.$$

Se sigue entonces que $x \notin X_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ lo que contradice el hecho de que X es la unión de los X_m. $\square$

Teorema 1.15. *Si (u_k) converge débilmente en H entonces (u_k) está acotada en H.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definamos el siguiente conjunto

$$X_m := \big\{ w \in H \,:\, |\langle u_k, w\rangle| \leq m \, \forall k \in \mathbb{N} \big\}.$$

Claramente,

$$X_m = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} L_{u_k}^{-1}[-m, m],$$

donde $L_u : H \to \mathbb{R}$ está dada por $L_u(w) = \langle u, w\rangle$ que es una función lineal y continua, por lo que cada X_m es cerrado. Además notemos que $X_m \subset X_{m+1}$ y que para cada $w \in H$ la sucesión $(\langle u_k, w\rangle)$ está acotada en $\mathbb{R}$, lo que implica que

$$H = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m.$$

Por el lema de Baire, existen $m_0 \in \mathbb{N}$, $w_0 \in X_{m_0}$ y $\delta > 0$ tales que $B_H(w_0, \delta) \subset$

X_{m_0}. En particular,

$$\left| \left\langle u_k, w_0 + \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\rangle \right| \leq m_0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\frac{\delta}{2}\|u_k\| = \left\langle u_k, \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\rangle \leq \left| \left\langle u_k, w_0 + \frac{\delta}{2} \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\rangle \right| + |\langle u_k, w_0 \rangle| \leq 2m_0,$$

es decir, $\|u_k\| \leq \frac{4}{\delta} m_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

1.2. Semicontinuidad inferior

En esta sección daremos condiciones para encontrar puntos mínimos de funciones reales sobre espacios de Hilbert.

En lo que sigue H será un espacio de Hilbert y M un subconjunto de H débilmente cerrado.

Definición 1.16. *Sea $I : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función, se dice que:*

1. *I es coercitiva en H si $I(u) \to \infty$ siempre que $\|u\| \to \infty$,*

2. *I es débilmente semicontinua inferiormente (d.s.c.i) en M con respecto a H, si para cada $u \in M$ y cada sucesión (u_m) en H que converge débilmente a u en M, ocurre que $I(u) \leq \liminf_m I(u_m)$.*

Ejemplo 1.17. *Las funciones constantes con valores reales son d.s.c.i. pero no son coercitivas.*

Ejemplo 1.18. *La función norma en cualquier espacio de Hilbert es d.s.c.i. y coercitiva.*

Demostración. Consideremos (u_k) una sucesión que converja débilmente a u en H. Si $u = 0$ se cumple la desigualdad $\|u\| = 0 \leq \liminf_k \|u_k\|$.

Supongamos que $u \neq 0$. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} \leq \|u_k\|.$$

Como $\langle u_k, u\rangle \to \|u\|^2$, tomando límites inferiores obtenemos que

$$\|u\| = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} = \liminf_k \frac{\langle u_k, u\rangle}{\|u\|} \leq \liminf_k \|u_k\|.$$

De donde concluimos que la norma es d.s.c.i. □

Teorema 1.19. *Sea $I : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función d.s.c.i. y coercitiva en M con respecto a H. Entonces I es acotada por abajo y alcanza su mínimo en M.*

Demostración. Denotemos por $\alpha_0 := inf_M I$. Si $I \equiv \infty$, entonces se cumple la conclusión. Supongamos que $I \not\equiv \infty$.

Sea (u_m) una sucesión minimizante en M, es decir, tal que $(I(u_m))$ sea una sucesión no creciente y convergente a $\alpha_0 < \infty$.

Notemos que (u_m) es acotada en H. Si no lo fuera habría una subsucesión de (u_{m_j}) tal que $\lim_{j\to\infty} \|u_{m_j}\| = \infty$. Por la coercitividad de I se tendría que $\lim_{j\to\infty} I(u_{m_j}) = \infty$, y por ser (u_{m_j}) subsucesión de (u_m) se tendría que $\alpha_0 = \infty$ lo que contradice que $I \not\equiv \infty$.

Como (u_m) es acotada en H, existe (u_{m_k}) una subsucesión de (u_m) débilmente convergente a algún elemento u en H. Por ser M débilmente cerrado, u está en M. Ya que I es d.s.c.i se tiene que $I(u) \leq \liminf_m I(u_m) = a_0$. Por lo tanto $I(u) = \alpha_0$, de donde se sigue la conclusión del teorema. □

Capítulo 2

Espacios de Sobolev

> «Nada se edifica sobre la piedra, todo sobre la arena, pero nuestro deber es edificar como si fuera piedra la arena.»

Los espacios de Sobolev, como veremos más adelante, son espacios de funciones importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales, ya que se puede definir ahí un concepto de derivada más laxo que el concepto usual.

2.1. Derivadas Débiles

En adelante Ω será un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$. Recordemos que el soporte de una función, que se denotará por $\mathrm{sop}(f)$, es la cerradura en $\mathbb{R}^N$ del conjunto donde la función no se hace cero. Además, denotemos por $C_c^k(\Omega)$ al espacio de las reales con soporte compacto contenido en Ω que tienen derivadas parciales de orden menor o igual a k, y por $C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_c^k(\Omega)$. El siguiente teorema motiva la definición de derivada débil.

Teorema 2.1 (Integración por partes). *Si $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Si además $f \in C^1(\Omega)$, sucede que

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Como φ tiene soporte compacto, la podemos extender por 0 fuera de Ω, y suponer que el soporte de φ está contenido en un cuadrado centrado en el origen y cuyos lados miden $2a > 0$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo ocurre que

$$\int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1 \ldots, x_i, \ldots x_n)\,\mathrm{d}x = \varphi((x_1 \cdots, a, \cdots x_n) - \varphi(x_1 \cdots, -a, \cdots x_n) = 0$$

e integrando esta igualdad obtenemos que

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x.$$

Ya que $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$, se sigue de la ecuación anterior que

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_i} = \int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega \varphi\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{2.1.1}$$

□

La definición de derivada débil estará dada en términos de la ecuación similar a (2.1.1).

Definición 2.2. *Decimos que un subconjunto abierto ω de $\mathbb{R}^N$ está compactamente contenido en Ω si su cerradura es compacta y está contenida en Ω.*

Definimos $L^1_{loc}(\Omega)$ *como el conjunto de funciones medibles tales que restringidas a* ω *son integrables para todo subconjunto* ω *compactamente contenido en* Ω.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Decimos que* u *es débilmente diferenciable en* Ω, *si existen funciones* $v_1, \dots, v_N \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tales que para todo* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i \varphi$$

y en tal caso, decimos que, v_i *es la* i*-ésima derivada débil de* u *y la denotaremos por*

$$\mathrm{D}_i u := v_i.$$

Definimos al gradiente débil de u *por*

$$\mathrm{D}u = (\mathrm{D}_1 u, \cdots, \mathrm{D}_N u).$$

El siguiente lema nos dice que, al igual que la derivada usual, la derivada débil, de existir, es única. Recordemos primero la siguiente proposición de teoría de la medida.

Proposición 2.3. *Si* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *cumple que*

$$\int_\Omega f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

entonces $f = 0$ *casi dondequiera en* Ω.

Lema 2.4 (Unicidad de la derivada débil.)**.** *Si* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *es débilmente diferenciable entonces la derivada débil es única salvo un conjunto de medida cero.*

Demostración. Supongamos que existen dos funciones v y $\tilde{v}$ que satisfacen la condición de ser la i-ésima derivada débil, es decir,

$$-\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \tilde{v}\varphi$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\varphi = 0,$$

lo que implica que $v = \tilde{v}$ casi siempre en Ω. □

Podemos observar del teorema anterior que toda función derivable en Ω es débilmente derivable en Ω. Pero observemos que no toda función es débilmente diferenciable. Consideremos el siguiente ejemplo en la recta real.

Ejemplo 2.5. *Sean u, $v : (0,2) \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas de la siguiente manera*

$$u(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x \leq 1, \\ 1 & si\ 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x \leq 1, \\ 0 & si\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Entonces v es la derivada débil de u.

Demostración. Para comprobar esta afirmación, sea $\varphi \in C_c^1((0,2))$ entonces

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u(x)\mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1\varphi(1) - 0\varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de donde, se verifica la definición. Además ésta función no es diferenciable en uno por ende no es diferenciable. □

En el siguiente ejemplo mostraremos que no toda función es débilmente diferenciable.

Ejemplo 2.6. *La función v, definida como en el ejemplo anterior, no es débilmente diferenciable.*

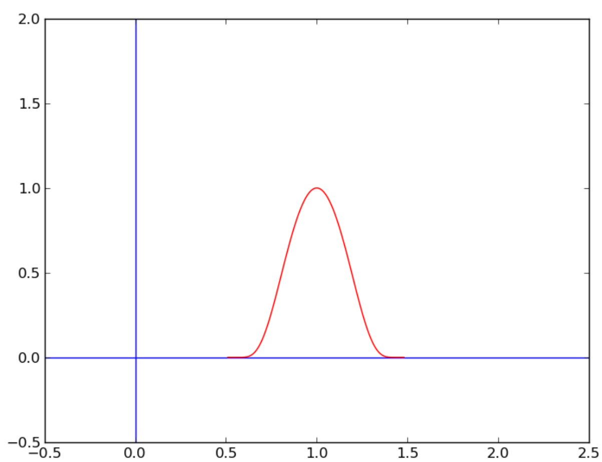
Demostración. Supongamos que sí lo es. Entonces, por definición, existe una función $w \in L^1_{loc}(0,2)$ tal que, para toda $\varphi \in C_c^\infty((0,2))$,

$$\begin{aligned} -\int_0^2 w(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 v(x)\mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{D}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(1). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Definamos

$$\eta(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-1)^2-\frac{1}{4}} + 4\right) & \text{si } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \text{ o } \frac{3}{2} \leq x. \end{cases}$$

Notemos que el soporte de η es el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ que esta contenido en $(0,2)$.



Consideremos la sucesión de funciones $\varphi_m(x) := \eta(m(x-1)+1)$. Sea

$m \in \mathbb{N}$ entonces φ_m es infinitamente diferenciable y su soporte es el intervalo $[1 - \frac{1}{2m}, 1 + \frac{1}{2m}]$ que está contenido en $(0, 2)$, además $\varphi_m(1) = 1$ y $\varphi \leq 1$ para todo $x \in (0, 2)$ y si $x \neq 1$ se cumple que $\varphi_m(x) \to 0$; por consiguiente, usando la igualdad (2.1.2) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, llegamos a la siguiente contradicción

$$1 = \lim_{m \to \infty} \varphi(1) = \lim_{m \to \infty} \left(- \int_0^2 w \varphi_m \, \mathrm{d}x \right) = 0.$$

Por lo tanto, no puede existir dicha función w, es decir, u no es débilmente diferenciable en $(0, 2)$. $\square$

Teorema 2.7 (de las derivada débiles)**.** *Sean dos funciones u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ débilmente diferenciables en Ω, entonces:*

I. *$u + v$ y λu son débilmente diferenciables en Ω para todo número real λ, además para cada i, se cumple que, $\mathrm{D}_i(u + v) = \mathrm{D}_i u + \mathrm{D}_i v$ y $\mathrm{D}_i \lambda u = \lambda \mathrm{D}_i u$.*

II. *Si U es un subconjunto abierto de Ω entonces u es débilmente diferenciable en U y $\mathrm{D}_i(u|_U) = (D_i u)|_U$.*

III. *Si $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces ζu es débilmente diferenciable en Ω y*

$$\mathrm{D}_i(u\zeta) = (\mathrm{D}_i u)\zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

para todo $i = 1, \ldots, N$.

Demostración. Sean u y v como en las hipótesis del teorema.

I. Sean $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\mathrm{D}_i u + \mathrm{D}_i v)\varphi &= \int_\Omega (\mathrm{D}_i u)\varphi + \int_\Omega (\mathrm{D}_i v)\varphi \\ &= -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= -\int_\Omega (u+v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\end{aligned}$$

de donde se sigue que $u+v$ es débilmente diferenciable y su i-ésima derivada débil es $\mathrm{D}_i u + \mathrm{D}_i v$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda(\mathrm{D}_i u)\varphi &= \lambda\int_\Omega (\mathrm{D}_i u)\varphi \\ &= -\lambda\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= -\int_\Omega \lambda u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Por lo tanto λu es débilmente diferenciable y su i-ésima derivada débil es $\lambda \mathrm{D}_i u$.

II. Sea una función $\varphi \in C_c^\infty(U)$ y la extendemos como cero en $\Omega - U$. Entonces $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_U u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= -\int_\Omega (\mathrm{D}_i u)\varphi \\ &= -\int_U (\mathrm{D}_i u)\varphi.\end{aligned}$$

En consecuencia u es débilmente diferenciable en U y además $\mathrm{D}_i(u|_U) = (D_i u)|_U$

III. Sean $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega u \left(\frac{\partial(\zeta\varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\varphi \right) \\ &= -\int_\Omega \left((\mathrm{D}_i u)\zeta + u\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \varphi.\end{aligned}$$

Esto demuestre que

$$\mathrm{D}_i(u\zeta) = (\mathrm{D}_i u)\zeta + u\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}.$$

□

2.2. Espacios de Sobolev

En lo que sigue $p \in [1, \infty)$.

Definición 2.8. *Se define el espacio de Sobolev* $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ *como*

1. *el conjunto* $W^{1,p}(\Omega)$ *de las funciones* $u \in L^p(\Omega)$ *que son débilmente diferenciables y* $\mathrm{D}_i u \in L^p(\Omega)$ *para cada* $i = 1, \ldots, N$ *;*

2. *con la norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^N \|\mathrm{D}_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 2.9. *El espacio de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio vectorial y* $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ *es efectivamente una norma.*

Demostración. Tomemos dos funciones $u, v \in W^{1,p}$ y un número real λ, entonces $u, v, \mathrm{D}_i u$ y $\mathrm{D}_i v \in L^p(\Omega)$ $i = 1, \ldots, N$. Por tanto, $u + \lambda v \in L^p(\Omega)$ y $\mathrm{D}_i(u + \lambda v) = \mathrm{D}_i u + \lambda \mathrm{D}_i v \in L^p(\Omega)$, de donde se sigue que $u + \lambda v \in W^{1,p}(\Omega)$. Del Teorema 2.7 se sigue que $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para probar que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ es norma, notemos primeramente que, si $u = 0$ entonces $\mathrm{D}_i u = 0$ para todo $i = 1, \ldots, N$, con lo que $\|u\|_{W^{1,p}} = 0$. Por otro lado, si $\|u\|_{W^{1,p}} = 0$ entonces $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, de donde se sigue que $u = 0$ casi para todo punto. Claramente , de la linealidad de D_i y la homogeneidad de la norma, ocurre que

$$\left(\|\lambda u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i(\lambda u)\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para probar la desigualdad del triángulo para $W^{1,p}(\Omega)$, usaremos la desiguldad del triángulo en $L^p(\Omega)$ y en $\mathbb{R}^{N+1}$ con la norma $|(x_1, \ldots, x_{N+1})|_p = \left(\sum_{i=1}^{N+1} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \\
\left(\|u+v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i(u+v)\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\
\left(\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p + \sum_{i=1}^{N} \left(\|\mathrm{D}_i u\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathrm{D}_i v\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\
\left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\|v\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i v\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \\
\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)},
\end{aligned}$$

obteniendo así, la desigualdad del triangulo.

□

Lema 2.10. *Sea una sucesión (u_k) en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\mathrm{D}_i u_k \to v_i$ en $L^p(\Omega)$. Entonces u es débilmente diferenciable en Ω y $v_i = \mathrm{D}_i u$.*

Demostración. Consideremos una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Al escoger $q = \frac{p}{p-1}$ si

$p \in (0,\infty)$ o $q = \infty$ si $p = 1$, ocurre que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$, para $i = 1, \ldots, N$, y al aplicar la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| &\leq \|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \to 0, \\
\left| \int_\Omega v_i \varphi - \int_\Omega (\mathrm{D}_i u_k) \varphi \right| &\leq \|v_i - \mathrm{D}_i u_k\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \to 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\mathrm{D}_i u_k)\varphi = -\int_\Omega v_i \varphi.$$

Lo que muestra que, u es débilmente diferenciable en Ω y que $\mathrm{D}_i u = v_i$ y además

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \left(\|u_k - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|\mathrm{D}_i u_k - \mathrm{D}_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

□

Teorema 2.11. $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea (u_k) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$, por lo tanto, las sucesiones u_k y $(\mathrm{D}_i u_k)$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$, por consiguiente, existen elementos u, v_i en $L^p(\Omega)$ tales que $u_k \to u$ y $\mathrm{D}_i u_k \to v_i$. Por el Lema 2.10, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_k \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Por lo tanto, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial normado completo, como se quería demostrar. □

Notación 2.12. *Denotaremos a la cerradura de* $C_c^\infty(\Omega)$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$ *como* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *y también como* $H^1(\Omega)$ *a* $W^{1,2}(\Omega)$*. Definimos un producto interior, en este último espacio, como*

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \langle \mathrm{D}_i u, \mathrm{D}_i v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

que induce la norma en $H^1(\Omega)$, y por el teorema anterior $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Por último, denotamos la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ como $H_0^1(\Omega)$.

2.3. Teorema de encaje de Sobolev

Para una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $p \geq 1$ denotemos la norma en $L^p(\Omega)$ de $\mathrm{D}u$, el gradiente débil de u, por

$$\|\mathrm{D}u\|_p := \left(\sum_{i=1}^{N} \|\mathrm{D}_i u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es fácil ver que

$$\|\mathrm{D}u\|_p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Definición 2.13. *Si $1 \leq p < N$ definimos el conjugado de Sobolev de p para N como*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

En adelante consideraremos $1 \leq p < N$.

2.3.1. Desigualdad Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Teorema 2.14 (Desigualdad Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.)**.** *Existe una constante C tal que para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración. Primero demostraremos el caso $p = 1$. Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, entonces como u tiene soporte compacto, existe un número real a tal que

$$u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N) = 0$$

para todo $y_i \leq a$. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x) - u(x_1, \ldots, a, \ldots, x_N) \\
&= \int_a^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}y_i \\
&= \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}y_i.
\end{aligned}$$

Entonces, para $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N)\, \mathrm{d}y_i \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N) \right| \mathrm{d}y_i \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N) \right| \mathrm{d}y_i
\end{aligned}$$

Usando esta desigualdad notemos que

$$\begin{aligned}
|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} &= \prod_{i=1}^{N} |u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \\
&\leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \mathrm{d}y_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Integrando respecto a la primera variable obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}}\, \mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \mathrm{d}x_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \mathrm{d}x_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{i=2}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Integrando esta desigualdad con respecto a la segunda variable y usando la desigualdad generalizada de Hölder[2]vemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \leq\ & \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{i=2}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_2 \\ =\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \mathrm{d}x_2 \\ =\ & \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \\ &\cdot \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \end{aligned}$$

[2]La desigualdad generalizada de Hölder afirma que si $1 \leq p_1, \ldots, p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{P_m} = 1$ y $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para cada k entonces $\int_\Omega |u_1 \cdots u_m| \leq \prod_{k=1}^{m}\left(\int_\Omega |u_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}$.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{2}{N-1}} \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}
$$

Continuando de manera recursiva el argumento anterior obtenemos,finalmente,que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N &\leq \prod_{i=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\right)^{\frac{1}{N-1}} \\
&\leq \|\mathrm{D}u\|_1^{\frac{N}{N-1}}
\end{aligned}
$$

y así, la desigualdad para $p = 1$

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \|\mathrm{D}u\|_1. \tag{2.3.2}
$$

Supongamos, ahora, que $1 < p < N$; aplicamos la desigualdad anterior a u^γ, donde $\gamma > 1$, y la desigualdad de Hölder vemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u^\gamma}{\partial x_i}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{N}\gamma\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^{\gamma-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \\
&\leq \gamma\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\sum_{i=1}^{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Escogemos a γ de tal manera que $\frac{\gamma N}{N-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, es decir, $\gamma = \frac{p(N-1)}{N-p}$.

Por lo tanto, de las igualdades anteriores notamos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\mathrm{D}u\|_p \\
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\right)^{\frac{N-1}{N}-\frac{p-1}{p}} &\leq \gamma \|\mathrm{D}u\|_p.
\end{aligned}$$

Obteniendo finalmente que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p}\|\mathrm{D}u\|_p.$$

□

2.3.2. Desigualdad de Poincaré

Teorema 2.15. *Supongamos que* $1 \leq p < N$. *Entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo* $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\mathrm{D}u\|_p.$$

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces existe una sucesión (u_m) en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que converge a u en $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 2.14 a cada una de estas funciones obtenemos que

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\mathrm{D}u_m\|_p. \tag{2.3.3}$$

Observemos primero que

$$\begin{aligned}
|\|\mathrm{D}u_m\|_p - \|\mathrm{D}u\|_p| &\leq \|\mathrm{D}(u_m - u)\|_p \\
&\leq \|u_m - u\|_{W_0^{1,p}} \to 0,
\end{aligned}$$

es decir, $\|\mathrm{D}u_m\|_p \to \|\mathrm{D}u\|_p$. De nuevo, por la desigualdad de Gagliardo-

Nirenberg-Sobolev tenemos que

$$\|u_m - u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\mathrm{D}(u_m - u_n)\|_p \leq C\|u_m - u_n\|_{W_0^{1,p}}$$

y ya que (u_m) converge en $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quiere decir que ahí es de Cauchy, por lo tanto lo es en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ entonces converge a una función v en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Sea U un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$ entonces $(u_k|_U)$ converge a $v|_U$ en $L^{p^*}(U)$ entonces converge en $L^p(U)$; pero (u_k) converge a u en $L^p(\mathbb{R}^N)$ entonces $(u_k|_U)$ converge a $u|_U$ en $L^p(U)$. Así $u = v$ para casi todo punto en U, pero este U fue un conjunto abierto y acotado de R^N arbitrario, por lo tanto $u = v$ para casi todo punto en $\mathbb{R}^N$, es decir, $u_k \to u$ en L^{p^*}. Tomando límite a la desigualdad (2.3.3) obtenemos que para todo $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N} \leq C\|\mathrm{D}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

Como queríamos demostrar. □

Corolario 2.16 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Supongamos Ω acotado y $1 \leq p < N$. Entonces para cada $1 \leq q \leq p^*$ existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\mathrm{D}u\|_p$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existe una sucesión de funciones $(\varphi_k) \in C_c^0(\Omega)$ tales que $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Extendemos tanto a u como las funciones φ_k como cero en $\mathbb{R}^N - \bar{\Omega}$, entonces $\varphi_k \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, por lo tanto, u está en $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando el teorema anterior obtenemos que existe una constante C tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\mathrm{D}u\|_p \quad \text{para toda} \quad u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, como la medida de Ω es finita y $1 \leq q < p^*$ entonces

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

De donde se sigue que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{p^*-q}{p^*q}} C\|\mathrm{D}u\|_p.$$

□

Corolario 2.17. *Si Ω es acotado entonces en el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ las normas $\|\mathrm{D}\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ son equivalentes.*

Demostración. Se sigue de la desigualdad anterior haciendo $q = p$. □

2.4. Teorema de Rellich-Kondrachov

Definición 2.18. *Un subconjunto X de un espacio métrico Y es relativamente compacto en Y si para todo $\varepsilon > 0$ existen un $k \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tales que*

$$X \subset B_Y(y_1, \varepsilon) \cup, \ldots, \cup B_Y(y_k, \varepsilon).$$

Esta propiedad es equivalente a decir que la cerradura de X en Y es compacta. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C^0(K)$ se dice equicontinuo en $z_0 \in K$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una δ tal que para todo $f \in H$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $d(z, z_0) < \delta$. Y decimos que es equicontinuo si lo es en cada punto.

A continuación enunciaremos, sin dar su demostración,[3] el Teorema de Arzela-Ascoli.

Teorema 2.19 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea K un espacio métrico compacto. Un subconjunto $\mathcal{H}$ de $C^0(K)$ es relativamente compacto en $C^0(K)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y acotado en $C^0(K, \mathbb{R})$.*

[3]Para la demostración de este teorema puede consultarse [2][teorema 23 capítulo 2].

Definición 2.20. *Sean $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. La convolución de f y g es la función*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

.

Los siguientes resultados sobre la convolución son clásicos.

Proposición 2.21.

- *Si $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ entonces*

$$f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$$

- *Si $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^1_{loc}$ entonces $(f * g)$ es de clase C^1 y además se cumple que*

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \qquad\qquad \forall 1 \leq i \leq N$$

- *Si $f \in C_c^0$, $g \in L^p$ y $1 < p$ entonces $f * g \in L^p$ y además*

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Definición 2.22. *Una sucesión de funciones (ρ_k) se llama sucesión regularizante si para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\rho_k \in C_c^\infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad \mathrm{sop}(\rho_k) \subset \bar{B}(0, \tfrac{1}{k}), \quad \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k = 1$$

Ejemplo 2.23 (sucesión regularizante estándar)**.** *Sea*

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

y $c := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho\right)^{-1}$. *Definiendo*

$$\rho_k(x) := ck^N \rho(kx)$$

notamos que (ρ_k) *es una sucesión regularizante ya que* ρ *es de clase* C^∞ *y por definición* $\operatorname{sop}(\rho_k) = B(0, \frac{1}{k})$, $\rho_k \geq 0$, *y* $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k = 1$.

Observación 2.24. *Si* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *y* (ρ_k) *es una sucesión regularizante entonces*

$$\operatorname{sop}(\rho_k * f) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Definición 2.25. *Sean* A *un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^N$ *y* $x \in \mathbb{R}^N$ *definimos la distancia de* x *a* A *como*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \text{ínf} \left\{ \|x - y\|_{\mathbb{R}^N} \ : \ y \in A \right\}$$

Daremos ahora un criterio de compacidad en los espacios $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.26 (Fréchet-Kolmogorov)**.** *Sean* Ω *y* ω *subconjuntos abiertos y acotados de* $\mathbb{R}^N$ *con* ω *compactamente contenido en* Ω *y* $\mathcal{K}$ *un subconjunto acotado de* $L^p(\Omega)$ *con la siguiente propiedad: Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta \in (0, \operatorname{dist}(w, \mathbb{R}^N - \Omega))$ *tal que*

$$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \text{si} \ \ \xi \in \mathbb{R}^N, \ \ \|\xi\| < \delta \ \ \text{y} \ \ f \in \mathcal{K}. \tag{2.4.1}$$

Entonces $\mathcal{K}_\omega := \{f 1_\omega : f \in \mathcal{K}\}$ *es relativamente compacto en* $L^p(\omega)$, *donde* $T_\xi f(x) := f(x - \xi)$.

Demostración. La demostración se hará probando las siguientes tres afirmaciones.

Afirmación 1: Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces el conjunto $\mathcal{K}_{\rho,\omega} := \{(\rho * f)1_{\overline{\omega}} : f \in \mathcal{K}\}$ es relativamente compacto en $C^0(\overline{\omega})$. En efecto, como $\mathcal{K}$ es un subconjunto acotado de $L^1(\Omega)$ se tiene que

$$|(\rho * f)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho(x-y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}\|f\|_{L^1} \leq C_0$$

si $f \in \mathcal{K}$ y $x \in \mathbb{R}^N$.

Como ρ es Lipschitz continua, para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ se cumple que

$$\begin{aligned} |(\rho * f)(x_1) - (\rho * f)(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho(x_1-y) - \rho(x_2-y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq C_1|x_1-x_2|\|f\|_{L^1} \leq C_2|x_1-x_2| \end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es un subconjunto acotado y equicontinuo de $C^0(\omega)$. Como ω es compacto, el teorema de Arzelà-Ascoli asegura que $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es relativamente compacto en $C^0(\Omega)$.

Afirmación 2: Sean $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N - \Omega))$ tal que cumple (2.4.1), y (ρ_k) una sucesión regularizante. Si $k > \frac{1}{\delta}$, entonces

$$\|\rho_k * f - f\| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{K}\ .$$

En efecto: para cada $x \in \mathbb{R}^N$ hacemos el cambio de variable $z := x - y$ y aplicamos la desigualdad de Hölder, obteniendo así

$$\begin{aligned} |(\rho_k * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\int_{\mathbb{R}^N} \rho(z)\,\mathrm{d}z \right| \\ &\leq \int_{B(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)|f(x-z) - f(x)|\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{B(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)^{\frac{p-1}{p}} \left(\rho_k(z)^{\frac{1}{p}} |f(x-z) - f(x)| \right) \mathrm{d}z \\ &\leq \left(\int_{B(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z)|f(x-z) - f(x)|^p\,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

De (2.4.1) concluimos que, para todo $f \in \mathcal{K}$ se cumple

$$\int_\omega |(\rho_k * f)(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \le \int_{B(0,\frac{1}{k})} \rho_k(z) \int_\omega |f(x-z) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z < \varepsilon^p \quad \text{si } k > \frac{1}{\delta}$$

Afirmación 3: $\mathcal{K}_\omega$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos una $\delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N - \Omega))$ para la que se cumpla (2.4.1) y una sucesión regularizante. Fijamos una $k > \frac{1}{\delta}$ y denotamos por $\rho := \rho_k$. Como ω es acotado, la inclusión $C^0(\overline{\omega}) \hookrightarrow L^p(\omega)$ es continua, y de la afirmación 1 se sigue que $\mathcal{K}_{\rho,\omega}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. Por lo tanto, existen $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{K}$ tales que

$$\mathcal{K}_{\rho,\omega} \subset B_{L^p(\omega)}((\rho * g_1 1_{\overline{\omega}}, \varepsilon) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}((\rho * g_m 1_{\overline{\omega}}, \varepsilon),$$

es decir, para cada $f \in \mathcal{K}$ existe un $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|\rho * f - \rho g_i\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$. De la afirmación 2 se sigue que

$$\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} \le \|f - \rho * f\|_{L^p(\omega)} + \|\rho * g_i - g_i\|_{L^p(\omega)} < 3\varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{K}_\omega \subset B_{L^p(\omega)}(g_1 1_\omega) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}(g_m 1_\omega, 3\varepsilon).$$

Esto prueba que $\mathcal{K}_\omega$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. □

Corolario 2.27. *Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $\mathcal{K}$ un subconjunto acotado de $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, \infty)$ y se cumplen las siguientes propiedades:*

I *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada abierto ω compactamente encajado en Ω existe $\delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N - \Omega))$ tal que*

$$\|T_\xi f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

si $\xi \in \mathbb{R}^N$ con $\|\xi\| < \delta$ y $f \in \mathcal{K}$

II *Para cada ε existe un abierto ω compactamente encajado en Ω tal que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega-\omega)} < \varepsilon \quad \text{si } f \in \mathcal{K}.$$

Entonces $\mathcal{K}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos un abierto ω compactamente contenido en Ω tal que

$$\|f\|_{L^p(\Omega-\omega)} < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{si } f \in \mathcal{K}.$$

Por el Teorema 2.4.1 $\mathcal{K}_\omega := \{f 1_\omega : f \in \mathcal{K}\}$ es relativamente compacto en $L^p(\omega)$. De este modo existen $g_1 \ldots, g_m \in \mathcal{K}$ tales que

$$\mathcal{K}_\omega \subset B_{L^p(\omega)}(g_1 1_\omega, \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_{L^p(\omega)}(g_m 1_\omega, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Es decir, para cada $f \in \mathcal{K}$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|f - g_i\|_{L^p(\omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f-g_i|^p &= \int_\omega |f-g_i|^p + \int_{\Omega-\omega} |f-g_i|^p \\
&\leq \int_\omega |f-g_i|^p + 2^p \int_{\Omega-\omega} (|f|^p + |g_i|^p) < \frac{\varepsilon^p}{3^{p-1}}.
\end{aligned}$$

O sea

$$\mathcal{K} \subset B_{L^p(\Omega)}(g_1, \frac{\varepsilon}{3}) \cup \cdots \cup B_{L^p(\Omega)}(g_m, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Esto prueba que $\mathcal{K}$ es relativamente compacto en $L^p(\Omega)$. □

Lema 2.28. *Si $u \in W_0^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$ entonces*

$$\|T_\xi u - u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\mathrm{D}u\|_1 \|\xi\|.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $x, \xi \in \mathbb{R}^N$. Aplicamos el teorema fundamental del Cálculo a la función $f(t) := \varphi(x - t\xi)$, $t \in \mathbb{R}$ y obtenemos

$$\varphi(x-\xi) - \varphi(x) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 (\mathrm{D}\varphi(x-t\xi)) \cdot \xi\,\mathrm{d}t.$$

Por lo tanto,

$$|\varphi(x-\xi)-\varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x-t\xi)\right| |\xi_i|\,\mathrm{d}t \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x-t\xi)\right|\,\mathrm{d}t\right) \|\xi\|.$$

Integrando esta desigualdad respecto a x concluimos que

$$\begin{aligned} \|T_\xi\varphi - \varphi\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x-\xi) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x-t\xi)\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right) \|\xi\| = \|\mathrm{D}\varphi\|_1 \|\xi\|. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.29 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, N)$ y $q \in [1, p^*)$ entonces la inclusión de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de acotado de $W_0^{1,p}(\Omega)$. La desigualdad de Poincaré 2.16 implica que $\mathcal{A}$ es un subconjunto acotado de $L^q(\Omega)$. para todo $1 \leq q \leq p^*$. Extendemos a las funciones definidas en Ω como cero fuera del mismo conjunto. Sean $\varepsilon > 0$, ω un subconjunto compactamente encajado en Ω y $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^{p^*}} \leq C$ para todo $u \in \mathcal{A}$. Como la integral es invariante bajo traslaciones, tenemos que $\|T_\xi u\|_{L^{p^*}} \leq C$ para todo $u \in \mathcal{A}$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$. Definamos un número α de tal manera que $\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$. Se tiene que $0 < \alpha < 1$ ya que $1 \leq q \leq p^*$. Usando la desigualdad de interpolación[4],

[4] Sean $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ tales que

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1-\alpha}{t}.$$

el Teorema 2.17 y el Lema 2.28 vemos que, para todo $u \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\|T_\xi u - u\|_{L^q} &\leq \|T_\xi u - u\|_{L^1}^{\alpha} \|T_\xi u - u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha} \\
&\leq \|T_\xi u - u\|_{L^1}^{\alpha} \left(\|T_\xi u\|_{L^{p^*}} + \|u\|_{L^{p^*}}\right)^{1-\alpha} \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \|T_\xi u - u\|_{L^1}^{\alpha} \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \|\mathrm{D}u\|_1^{\alpha} \|\xi\|^{\alpha} \\
&\leq (2C)^{1-\alpha} \left(N|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\alpha} \|\mathrm{D}u\|_p^{\alpha} \|\xi\|^{\alpha} \\
&\leq C_1 \|\xi\|^{\alpha}
\end{aligned}$$

Tomando $\delta > 0$ menor que $\operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N - \Omega)$ y $\left(\frac{\varepsilon}{C_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ se tiene que si $\|\xi\| < \delta$, entonces

$$\|T_\xi u - u\|_{L^q} < \varepsilon$$

para todo $u \in \mathcal{A}$, Por lo tanto, $\mathcal{A}$ satisface (I) del Corolario 2.27.

Por otra parte para cualquier abierto $\omega \subset \Omega$ se satisface que

$$\|u\|_{L^q(\Omega-\omega)} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega-\omega)} |\Omega - \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}} \leq C|\Omega - \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}}$$

para todo $u \in \mathcal{A}$. Definimos $\beta := \frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}$ y elegimos un abierto ω compactamente encajado en Ω tal que $|\Omega - \omega| < \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Entonces

$$\|u\|_{L^q(\Omega-\omega)} < \varepsilon.$$

Es decir, $\mathcal{A}$ satisface (II) del Corolario 2.27. Por lo que $\mathcal{A}$ es relativamente compacto en L^q. □

Proposición 2.30. *Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $1 \leq p < n$. Entonces la inclusión de $W_0^{1,p}(\Omega)$ en $L^{p^*}(\Omega)$ no es compacta.*

Si $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$ entonces $u \in L^r(\Omega)$ y

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^s(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}$$

.

Demostración. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $0 \in \Omega$. Elegimos $r > 0$ de modo que $B(0,r) \subset \Omega$ y escogemos $\varphi \in C_c^\infty(B(0,r))$ tal que $\varphi \neq 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_k(x) := k^{\frac{N-p}{p}}\varphi(kx)$. Entonces el soporte de φ_k está contenido en $B(0,\frac{r}{k})$ y, en consecuencia, $\varphi_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Haciendo el cambio de variable $kx = y$ obtenemos

$$\|\varphi_k\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} = \int_\Omega k^N|\varphi(kx)|^{p^*}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\varphi(y)|^{p^*}\,\mathrm{d}y = \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}$$

y

$$\|\mathrm{D}\varphi_k\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{i=1}^N \int_\Omega k^N \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(kx)\right|^p \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N \int_\Omega k^N \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y = \|\mathrm{D}\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p$$

Del Teorema 2.17 tenemos que (φ_k) es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si una subsucesión de (φ_k) convergiese a una función en $L^p(\Omega)$, entonces $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^{p^*}(\Omega)} \neq 0$ y una subsucesión de ella convergería puntualmente a u para casi todo punto en Ω. Pero $\varphi_k(x) \to 0$ para todo $x \neq 0$. Por lo tanto, $u = 0$ para casi todo punto en Ω. Lo que es una contradicción; de donde, concluimos que (φ_k) no contiene una subsucesión convergente en $L^{p^*}(\Omega)$. $\square$

2.5. Valores propios del laplaciano

El operador laplaciano de una función $u \in C^2(U)$ donde U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ se define como

$$\triangle u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Como primera aplicación del teorema de Rellich-Kondrakov mostraremos la existencia de valores propios del operador laplaciano.

Definición 2.31. *Decimos que un vector $v \in H_0^1(\Omega)$ no cero es un vector* *propio de* $-\triangle$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *si existe un número real* λ *tal que*

$$\int_\Omega \mathrm{D}v\mathrm{D}\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega v\varphi \, \mathrm{d}x \quad \textit{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

y en tal caso decimos que λ *es un valor propio de* $-\triangle$.

Proposición 2.32. *Existe un valor propio del operador laplaciano.*

Demostración. Definamos

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)-\{0\}} \frac{\|\mathrm{D}u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Por la desigualdad de Poincaré existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathrm{D}v\|_{L^2(\Omega)},$$

esto implica que $0 < \frac{1}{C^2} \leq \lambda_1(\Omega)$. Consideremos ahora una sucesión (u_n) en $H_0^1(\Omega) - \{0\}$ minimizante, es decir, que cumple

$$\frac{\|\mathrm{D}u_m\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2} \to \lambda_1(\Omega).$$

Por la homogeneidad de la norma y la linealidad de la derivada podemos suponer que $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Entonces la sucesión $\|\mathrm{D}u_m\|_{L^2(\Omega)}$ es acotada, ya que es convergente. Por el Corolario 2.17 tenemos que (u_m) es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por el Teorema 2.29, (u_m) tiene una subsucesión (u_{m_k}) que converge a v_1 en $L^2(\Omega)$ y además $\|v_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$, por lo que v_1 no es cero. Además del Corolario 2.17 y la semicontinuidad inferior de la norma obtenemos que

$$\lambda_1(\Omega) \leq \|\mathrm{D}v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|\mathrm{D}u_{m_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda_1(\Omega).$$

Por lo tanto

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\|\mathrm{D}v_1\|_{L^2(\Omega)}^2}{\| \, v_1\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Por otro lado, para cada función $\varphi \in C_c^0(\Omega)$ definamos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(t) := \frac{\|\mathrm{D}(v_1 + t\varphi)\|_{L(\Omega)}^2}{\|(v_1 + t\varphi)\|_{L(\Omega)}^2}.$$

Es claro que $g(t) \geq \lambda_1(\Omega)$ y que $g(0) = \lambda_1(\Omega)$.

Observemos que la funcion g es diferenciable y su derivada es

$$g'(t) = 2\left(\frac{\langle \mathrm{D}(v_1 + t\varphi), \mathrm{D}\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|v + t\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2} - \frac{\|\mathrm{D}(v_1 + t\varphi)\|_{L^2(\Omega)}}{\|v + t\varphi\|_{L^2(\Omega)}^4}\langle v_1 + t\varphi, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)}\right).$$

Como cero es un mínimo de g entonces la derivada ahí vale cero

$$0 = g'(0) = 2\left(\langle \mathrm{D}v_1, \mathrm{D}\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} - \|\mathrm{D}v_1\|_{L^2(\Omega)}\langle v_1, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)}\right).$$

De donde se sigue que

$$\langle \mathrm{D}v_1, \mathrm{D}\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_1(\Omega)\langle v_1, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto, $\lambda_1(\Omega)$ y v_1 son un valor propio y un vector propio asociado, respectivamente. $\square$

Capítulo 3

Soluciones simétricas

> «El hombre que cuestiona la suprema certeza de las matemáticas alimenta la confusión, y nunca puede silenciar las contradicciones de las ciencias sofísticas que conducen a la eterna charlatanería.»
>
> Leonardo Da Vinci[1]

En esta sección supondremos que Ω es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ y $-\lambda_1(\Omega) < \lambda$. Nuestro objetivo es estudiar la existencia de soluciones al problema

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u &= |u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Definición 3.1. *Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de (3.0.1) si $u : \Omega \to \mathbb{R}$, además de satisfacer las dos condiciones anteriores, es de clase C^2 y continua hasta la frontera.*

Si u es una solución clásica al problema (3.0.1) entonces para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se satisface que

$$\int_\Omega \mathrm{D}u \cdot \mathrm{D}\varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi. \tag{3.0.2}$$

[1] Da Vinci, Leonardo (1970), vol. 2, p. 289, § 1157.

Motivando la siguiente definición.

Definición 3.2. *Una función* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *es una solución (débil) al problema (3.0.1) si* $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$ *para casi todo punto en* Ω *y además satisface (3.0.2) para todo* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

3.1. Formulación variacional del problema

Empezaremos esta sección recordando la definición y algunos resultados sobre derivación en espacios de Banach.

3.1.1. Diferenciabilidad

En lo que sigue del capítulo, V y W son espacios de Banach y U es un subconjunto abierto de V a menos que se indique lo contrario.

Definición 3.3. *Denotemos por*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \to W \ : T \ \textit{ es lineal y continua}\}$$

y definimos para cada T

$$\|T\|_{\mathcal{L}(V,W)} := \sup_{v \in V} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Definición 3.4. *Una función* $\varphi : U \to W$ *es (Fréchet-)diferenciable en el punto* $u_0 \in U$ *si existe* $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *tal que*

$$\lim_{v \to u_0} \frac{\|\varphi(u_0) - \varphi(v) - T(u_0 - v)\|_W}{\|u_0 - v\|_V} = 0.$$

T *se llama la derivada (de Fréchet) de* φ *en* v_0 *y se denota por* $\mathrm{D}\varphi(u_0)$. *Además se dice que es diferenciable en* U *si lo es en cada punto de* U. *Finalmente se dice que es de clase* C^1 *o continuamente diferenciable en* U *si es* *diferenciable en U y su derivada*

$$\mathrm{D}\varphi : U \to \mathcal{L}(U, V)$$

es continua.

Se puede probar[2] que, así definida, la derivada es única, lineal y se satisface la regla de la cadena.

Definición 3.5. *Una función $\varphi : U \to W$ es Gâteaux-diferenciable en el punto $u_0 \in U$ si, para cada $v \in V$, existe la derivada direccional de φ en u_0 en la dirección de v, es decir, existe*

$$\mathcal{G}\varphi(u_0)v := \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t}$$

y la función $\mathcal{G}\varphi(u_0) : V \to W$ es lineal y continua. Igualmente φ es Gâteaux-diferenciable en U si lo es en todo punto de U

Cabe destacar que la existencia de la derivada de Gâteaux no garantiza la existencia de la derivada de Fréchet, pero el siguiente teorema nos da un criterio de diferenciabilidad.

Teorema 3.6. *La función $\varphi : U \to W$ es de clase C^1 en U si y sólo si φ es Gâteaux-diferenciable en U y $\mathcal{G}\varphi : U \to \mathcal{L}(V, W)$ es continua. En tal caso $\mathrm{D}\varphi = \mathcal{G}\varphi$*

Ejemplo 3.7. *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espacio de Hilbert entonces el funcional*

$$I(u) := \|u\|_H^2$$

es diferenciable y

$$\mathrm{D}I(u)v = 2 \langle u, v \rangle_H .$$

[2] Para la demostración de estas afirmaciones puede consultarse [1].

Demostración. Tenemos que

$$\|u\|_H^2 - \|v\|_H^2 - 2\langle u, u-v\rangle_H = \langle u+v, u-v\rangle_H - 2\langle u, u-v\rangle_H = -\|u-v\|_H^2.$$

Por lo tanto, por la linealidad del producto interior y la igualdad anterior se cumple que I es diferenciable. $\square$

Ejemplo 3.8. *El funcional*

$$J(u) := \int_\Omega |u|^p$$

es de clase $C^1(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ y

$$\mathrm{D}J(u)v = p\int_\Omega |u|^{p-2}uv$$

Demostración. Definamos la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(s) := |s|^p$. La derivada de esta función es $f'(s) = p|s|^{p-2}s$ y su segunda derivada es $f''(s) = p(p-1)|s|^{p-2}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Sean $z_1, z_2, \in \mathbb{R}$ entonces por el teorema del valor medio existe $r \in [0,1]$ tal que

$$f'(z_1) - f'(z_2) \leq f''\big(rz_1 + (1-r)z_2\big)(z_1 - z_2),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} |f'(z_1) - f'(z_2)| &\leq |f''\big(rz_1 + (1-r)z_2\big)||z_1 - z_2| \\ &= p(p-1)\big|rz_1 + (1-r)z_2\big|^{p-2}|z_1 - z_2| \qquad (3.1.1) \\ &\leq p(p-1)\big(|z_1| + |z_2|\big)^{p-2}|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\big||z_1|^{p-2}z_1 - |z_2|^{p-2}z_2\big| \leq (p-1)\big(|z_1| + |z_2|\big)^{p-2}|z_1 - z_2|, \qquad (3.1.2)$$

para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, sean $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, aplicando el teorema del valor medio obtenemos que exite $t \in [0,1]$ tal que,

$$f(s_1) - f(s_2) = f'\big(ts_1 + (1-t)s_2\big)(s_1 - s_2). \tag{3.1.3}$$

De la desigualdad (3.1.1) vemos que

$$\begin{aligned}
\big|f'\big(ts_1 + (1-t)s_2\big) - f'(s_1)\big| &\leq p(p-1)\big|r(ts_1 + (1-t)s_2) + (1-r)s_1\big|^{p-2}|1-t||s_1 - s_2| \\
&\leq p(p-1)\big(|s_2| + |s_1|\big)^{p-2}|s_1 - s_2|,
\end{aligned}$$

donde $r \in [0,1]$ está determinada por el teorema del valor medio. Por lo tanto, para todos $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\big|f(s_1) - f(s_2) - f'(s_1)(s_1 - s_2)\big| \leq p(p-1)(|s_1| + |s_2|)^{p-2}|s_1 - s_2|^2.$$

Sean $u, w \in L^p(\Omega)$. De la desigualdad anterior tenemos que para todo $x \in \Omega$ ocurre que

$$\big|f(u(x)) - f(w(x)) - f'(u(x))(u(x) - w(x))\big| \leq p(p-1)(|u(x)| + |w(x)|)^{p-2}|u(x) - w(x)|^2.$$

Integrando esta desigualdad y usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big|f(u) - f(w) - f'(u)(u-w)\big| \\
\leq\ & p(p-1)\int_\Omega (|u| + |w|)^{p-2}|u-w|^2 \\
\leq\ & p(p-1)\left(\int_\Omega (|u| + |w|)^p\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_\Omega |u-w|^p\right)^{\frac{2}{p}} \\
=\ & p(p-1)\big\||u| + |w|\big\|_{L^p(\Omega)}^{p-2}\|u-w\|_{L^p(\Omega)}^2 \\
\leq\ & p(p-1)\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-2}\|u-w\|_{L^p(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, $u \in L^p(\Omega)$ y $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{p(p-1)(2\|u\|_{L^p(\Omega)}+1)^{p-2}}, 1\right\}$ entonces para cada $w \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u-w\|_{L^p(\Omega)} < \delta$ se cumple que

$$\frac{\left|\int_\Omega (f(u) - f(w) - f'(u)(u-w))\right|}{\|u-w\|_{L^p(\Omega)}} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{w\to 0} \frac{J(u) - J(w) - \mathrm{D}J(u)(v-w)}{\|u-w\|_{L^p(\Omega)}},$$

Además aplicando la desigualdad de Hölder observamos que

$$\left|\int_\Omega |u|^{p-1}uv\right| \leq \|u\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}$$

Por lo tanto, J es diferenciable en $L^p(\Omega)$.

Sean $u, w, v \in L^p(\Omega)$ entonces aplicando la desigualdad de Hölder y la desigualdad (3.1.2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{D}J(u)v - \mathrm{D}J(w)v| &= \left|p\int_\Omega |u|^{p-2}uv - p\int_\Omega |w|^{p-2}w)v\right| \\
&\leq p\int_\Omega \left|(|u|^{p-2}u - |w|^{p-2}w)v\right| \\
&\leq p(p-1)\int_\Omega ||u| + |w||^{p-2}\,|u-w||v| \\
&\leq p(p-1)\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-2}\|u-w\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

esto implica que, si $\varepsilon > 0$ y $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{p(p-1)(1+\|u\|_{L^p(\Omega)})^{p-2}}\right\}$, J es continuamente diferenciable. □

Observación 3.9. *Si H es un espacio de Hilbert y $J : H \to R$ es diferenciable entonces por el Teorema de representación de Fréchet-Riesz, existe un único $w \in H$ tal que*

$$\mathrm{D}J(u)v = \langle w, v\rangle \quad \forall v \in H.\ .$$

A este vector $w \in H$ lo llamaremos el gradiente de J en u y lo representaremos por $\nabla J(u)$

Ejemplo 3.10. *El gradiente del funcional definido en el Ejemplo 3.7 es*

$$\nabla I(u) = 2u \quad \forall u \in H$$

3.1.2. Variedades de Hilbert

Recordemos las siguientes definiciones, y resultados[3]

Definición 3.11. *Sea V es un espacio de Banach, un punto $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de una función diferenciable $\Phi : V \to \mathbb{R}$ si $\mathrm{D}\Phi(u) : V \to \mathbb{R}$ es suprayectiva para todo $u \in M := \Phi^{-1}(c)$. Tenemos que un valor c es regular si y sólo si $\mathrm{D}\Phi(u)$ no es cero para todo $u \in M$. Un subconjunto M de V se llama subvariedad de clase C^k y de codimensión 1 si existen una función $\Phi : V \to \mathbb{R}$ de clase C^k y un valor regular $c \in \mathbb{R}$ de Φ es tal que $M = \Phi^{-1}(c)$. El espacio tangente a M en el punto $u \in M$ se define como*

$$T_u M := \ker(\mathrm{D}\Phi(u)).$$

Proposición 3.12. *Si $L : V \to \mathbb{R}$ es una función lineal, continua y suprayectiva entonces existe un subespacio vectorial cerrado W en V de dimensión 1 tal que $V = \ker(L) \oplus W$. En particular si V es un espacio de Hilbert, entonces $W = (\ker L)^{\perp}$. Observemos que la dimensión de $(\ker(L))^{\perp}$ es 1.*

Definición 3.13. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que ξ es un mínimo local de $J : X \to \mathbb{R}$ en A si existe una vecindad B de ξ en X de tal manera que*

$$J(\xi) \leq J(x) \quad \forall x \in A \cap B.$$

[3] Los teoremas y definiciones pueden consultarse en [1, Capítulo 10 Sección 2].

Proposición 3.14. *Sean M una subvariedad de V y $J : V \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Si u es un mínimo local de J en M entonces*

$$\mathrm{D}J(u)v = 0$$

siempre que $v \in T_uM$.

Definición 3.15. *Sean M una subvariedad de un espacio de Banach V y $J : V \to \mathbb{R}$ diferenciable. Un punto crítico u de J en M si*

$$\mathrm{D}J(u)v = 0 \quad \forall v \in T_uM.$$

Teorema 3.16 (multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean H un espacio de Hilbert, $\Phi : H \to \mathbb{R}$ y $J : H \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1, $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de Φ y $M := \Phi^{-1}(c)$. Entonces u es un punto crítico de J en M si y sólo si existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla J(u) = \mu \nabla \Phi(u).$$

Demostración. Por definición del espacio tangente $\mathrm{D}\Phi(u)v = 0$ para todo $v \in T_uM$ entonces $\nabla\Phi(u) \in (T_uM)^{\perp}$. Como c es valor regular de Φ entonces $\nabla\Phi(u) \neq 0$ por lo que genera a $(T_uM)^{\perp}$. Si u es un punto crítico de J en M entonces

$$\mathrm{D}J(u)v = 0$$

si $v \in T_uM$, pero esto sucede si y sólo si $\nabla J(u) \in (T_uM)^{\perp}$, lo cual ocurre si y sólo si existe un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{D}J(u) = \mu \mathrm{D}\Phi(u).$$

□

3.2. Soluciones positivas

Teorema 3.17. *Si $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, entonces la funcional definida en $H_0^1(\Omega)$ como*

$$\langle u, v\rangle_\lambda := \int_\Omega \mathrm{D}u\mathrm{D}v + \lambda\int_\Omega uv$$

es un producto interior definido positivamente y es equivalente[4] *al producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)}$.*

Demostración. Claramente $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ es bilineal. Para ver que es positivo definido, notemos que de la Proposición (2.32) tenemos que

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)-\{0\}} \frac{\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Por tanto si $u \in H_0^1(\Omega)$ y $u \neq 0$, entonces

$$\lambda > -\frac{\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

así,

$$\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} > 0.$$

Además, si $\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ y $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \neq 0$, entonces $\lambda_1(\Omega) \leq -\lambda$. Lo que es una contradicción, por lo tanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ es definido positivo. Por otro lado, haciendo $C = \min\{1, 1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\}$ tenemos que $0 \leq C - 1 \leq \frac{\lambda}{\lambda_1}$. Por lo que si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\frac{\lambda}{C-1} \leq \lambda_1 \leq \frac{\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

[4]Decimos que dos productos interiores son equivalentes, si las normas generadas son equivalentes.

de donde se tiene que

$$\lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq (C-1)\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

y se sigue la siguiente desigualdad

$$\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Del Corolario (2.17) tenemos que existe una constante K tal que $\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq K\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$. Por lo tanto,

$$\langle u, u\rangle \geq CK|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \tag{3.2.1}$$

Por otro lado, si $\hat{C} = \text{máx}\{1, \lambda\}$ entonces

$$\hat{C}(\|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}) \geq \|\mathrm{D}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

De donde, concluimos que los productos interiores son equivalentes. $\square$

Teorema 3.18. *Sea $H \neq 0$ un subespacio de Hilbert de $H^1_0(\Omega)$ y $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$. Entonces el siguiente funcional es diferenciable en $H^1_0(\Omega)$ y su restricción a H tiene un punto crítico no idénticamente cero.*

$$\mathcal{J}(w) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\|\mathrm{D}w\|^2 + \lambda|w|^2\right)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |w|^p\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.2}$$

Demostración. Consideramos el producto interior definido en el Teorema (3.17) asociado a λ para $H^1_0(\Omega)$. Si definimos $I(u) := \langle u, u\rangle_\lambda$ entonces los ejemplos 3.7 y 3.8 aseguran que I es diferenciable en $H^1_0(\Omega)$ y que la función $J : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por $J(u) = \int_\Omega |u|^p$, es diferenciable en L^p. Como $H^1_0(\Omega)$ está contenido en $L^p(\Omega)$ se sigue que J es diferenciable en $H^1_0(\Omega)$. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es diferenciable en $H_0^1(\Omega)$. Consideremos siguiente conjunto

$$M := \left\{ w \in H \,:\, \|w\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Verifiquemos que M es un subconjunto débilmente cerrado de H. Sea una sucesión (u_m) en M que converge débilmente a u en H. Entonces por el Teorema (1.15), (u_m) es una sucesión acotada en H, por lo que lo está en $H_0^1(\Omega)$. El Teorema (2.29) asegura que que (u_m) contiene una subsucesión (u_{m_k}) que converge a una función v en L^p. Por la continuidad de la norma tenemos que $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ ya que $\|u_{m_k}\|_{L^p(\Omega)} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, notemos que la función $L_\varphi(w) = \int_\Omega \varphi w$ es lineal y continua tanto en $L^p(\Omega)$, como en $H_0^1(\Omega)$. Como $u_{m_k} \to v$ en $L^p(\Omega)$, ocurre que $L_\varphi(u_{m_k}) \to L_\varphi(v)$ en $\mathbb{R}$. Por otro lado (u_m) converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$, entonces $L_\varphi(u_m) \to L_\varphi(u)$ en $\mathbb{R}$ y en particular se da la convergencia para la subsucesión $(u_{_k})$. De donde se concluye que $L_\varphi(v) = L_\varphi(u)$ para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Por lo tanto $v = u$ casi siempre en Ω, es decir, $u \in M$. Esto prueba que M es débilmente cerrado.

Del Ejemplo (1.18) notamos que I es coercitiva y d.s.c.i. en H. El Teorema (1.19) asegura que I alcanza su mínimo en M, que denotaremos por $\bar{u}$. Como $\|\bar{u}\|_{L^p(\Omega)} = 1$ entonces $\bar{u} \neq 0$ casi siempre en Ω.

Notemos que $M = J^{-1}(1)$. Por el Ejemplo 3.8 la derivada de J en $H_0^1(\Omega)$ es

$$\mathrm{D}J(u) \cdot w = p \textstyle\int_\Omega |u|^{p-2} u w \qquad \text{si} \quad w \in H_0^1(\Omega).\ .$$

Además, como $u \in M$ se tiene que $\mathrm{D}J(u)u = p \neq 0$ entonces $\mathrm{D}J(u)$ no es cero, con lo cual 1 es un valor regular de J. Por lo tanto, M es una subvariedad de codimensión 1 de H y , ya que, $\bar{u}$ es un mínimo en M, la Proposición 3.14 asegura que es un punto critico de I en M. Por el Teorema de los multiplicadores de Lagrange 3.16 existe un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{D}I(\bar{u}) - \mu \mathrm{D}J(\bar{u}) = 0.$$

Por lo tanto,

$$2\int_\Omega (\mathrm{D}\bar{u}\mathrm{D}w + \lambda \bar{u}w) - \mu p \int_\Omega (\bar{u}|\bar{u}|^{p-2}w) \;=\; 0 \tag{3.2.3}$$

para todo $w \in H$. En particular para $\bar{u}$ obtenemos que

$$2\int_\Omega (\|\mathrm{D}\bar{u}\|^2_{\mathbb{R}^N} + \lambda|\bar{u}|^2) - \mu p \int_\Omega |\bar{u}|^p = 0.$$

Además, como

$$\begin{aligned} 0 < 2\int_\Omega (|\mathrm{D}\bar{u}|^2 + \lambda|\bar{u}|^2) \;&=\; \mu p \int_\Omega |\bar{u}|^p \\ &=\; \mu p \end{aligned}$$

se tiene que $\mu > 0$. Por último, haciendo $u^* := (\frac{\mu p}{2})^{\frac{1}{p-2}}\bar{u} \in H$ y usando la igualdad (3.2.3) tenemos que, para todo $v \in H$ se cumple que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\mathrm{D}u^*\mathrm{D}v + \lambda u^* v - |u^*|^{p-2}u^* v\right) \;&= \quad (3.2.4) \\ \int_\Omega \left(\left(\frac{\mu p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} (\mathrm{D}\bar{u}\mathrm{D}v + \lambda\bar{u}v\right) - \left(\left(\frac{\mu p}{2}\right)^{\frac{p-2}{p-2}} |\bar{u}|^{p-2} \left(\frac{\mu p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \bar{u}v\right) \;&= \\ \left(\frac{\mu p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \int_\Omega \left(2\left(\mathrm{D}\bar{u}\mathrm{D}v + \lambda\bar{u}v\right) - \mu p|\bar{u}|^{p-2}\bar{u}v\right) \;&=\; 0. \end{aligned}$$

Que es la definición de ser valor crítico para el funcional $\mathcal{J}|_H$. □

Corolario 3.19. *El problema (3.0.1) tiene una solución (débil) no trivial* Ω.

Demostración. El Teorema 3.18 nos garantiza la existencia de un punto crítico $u^* \in H_0^1(\Omega)$ del funcional definido por (3.18) y la ecuación (3.2.4) nos dice que es solución débil del problema (3.0.1). □

3.3. Soluciones simétricas

En esta sección mostraremos que el problema (3.0.1) tiene tanto soluciones simétricas como no simétricas, que dependen del dominio Ω.

3.3.1. Dominios simétricos

El espacio vectorial de las funciones lineales de $\mathbb{R}^N$ en si mismo es un espacio de Banach, el cual denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ con la norma

$$\|g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^N\\ x\neq 0}} \frac{\|gx\|}{\|x\|}.$$

Este espacio se puede identificar con el espacio de matrices de $N\times N$. Denotemos por $O(N)$ al grupo de todos las isometrías lineales de $\mathbb{R}^N$, es decir,

$$O(N) := \{g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N) \,:\, \|gx\| = \|x\| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N\}$$

Observación 3.20. *Si $g \in O(N)$, entonces*

$$(gx)\cdot(gy) = x\cdot y \quad si \quad x,y \in \mathbb{R}^N$$

Demostración. Sean $g \in O(N)$, $x,y\in\mathbb{R}^N$. Por un lado

$$\begin{aligned}
\|g(x+y)\|^2 &= \|gx\|^2 + 2(gx)\cdot(gy) + \|gy\|^2 \\
&= \|x+y\|^2 + 2(gx)\cdot(gy) - 2x\cdot y \\
&= \|g(x+y)\|^2 + 2(gx)\cdot(gy) - 2x\cdot y
\end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$(gx)\cdot(gy) = x\cdot y.$$

□

Proposición 3.21. *El conjunto $O(N)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$.*

La función composición

$$\begin{array}{ccc} O(N)\times O(N) & \to & O(N) \\ (g,h) & \to & gh \end{array}$$

y la función inversa

$$\begin{array}{ccc} O(N) & \to & O(N) \\ g & \to & g^{-1} \end{array}$$

son continuas.

Demostración. Sea (g_k) una sucesión en $O(N)$ tal que $g_k \to g$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\|g_k x - gx\| \leq \|g_k - g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} \|x\| \to 0.$$

Por lo tanto,

$$\|gx\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k(x)\| = \|x\|,$$

en consecuencia $g \in O(N)$, es decir $O(N)$ es cerrado. Por otra parte $\|g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} = 1$ para todo $g \in O(N)$ lo que implica que es acotado. Puesto que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ es de dimensión finita, entonces $O(N)$ es compacto.

Para probar la continuidad consideremos $\varepsilon > 0$, $h_0, g_0 \in O(N)$ y $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ entonces, si $h, g \in O(N)$ y

$$\max\{\|h_0 - h\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}, \|g_0 - g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\} < \delta,$$

ocurre que para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
\|(h_0g_0 - hg)x\| &\leq \|((h_0 - h)g_0)x\| + \|(h(g_0 - g))x\| \\
&\leq \|h_0 - h\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|g_0\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|x\| \\
&\quad +\|h\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|g_0 - g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|x\| \\
&\leq \|h_0 - h\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|x\| \\
&\quad +\|g_0 - g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|x\| \\
&< \frac{2}{3}\varepsilon\|x\|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|(h_0g_0 - hg)\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. Lo que prueba que la composición es continua.

Por otra parte si hacemos $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, observamos que $\|g - g_0\|_B < \delta$ implica

$$\begin{aligned}
\|(g_0^{-1} - g^{-1})x\| &= \|(g^{-1}(g - g_0)g_0^{-1})x\| \\
&\leq \|g^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|g - g_0\|_B\|g_0\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}\|x\| \\
&\leq \|g - g_0\|_B\|x\| < \frac{\varepsilon}{2}\|x\|
\end{aligned}$$

Así $\|(g_0^{-1} - g^{-1})\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. Por lo tanto la función inversa es continua. □

Definición 3.22. *Dado un grupo G de $O(N)$ y un punto $x \in \mathbb{R}^N$ definimos la órbita de x como*

$$Gx := \{gx \,:\, g \in G\}.$$

Un subconjunto Z de $\mathbb{R}^N$ es $G-$invariante si $Gx \subset Z$ para todo $x \in Z$. Una función $f : Z \to \mathbb{R}$ es $G-$invariante si es constante en cada $G-$órbita de Z, es decir,

$$f(gz) = f(z)$$

para toda $g \in G$ y $z \in Z$. A una función $O(N)-$invariante se le llama radial.

Si Ω es un conjunto $G-$invariante, para cada $g \in G$ y cada función

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ *definimos por* $gu : \Omega \to \mathbb{R}$ *como*

$$(gu)(x) := u(g^{-1}x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Observación 3.23. *Para todo* $u, v \in H_0^1(\Omega)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $g \in G$ *ocurre que*

$$g(u+v) = gu + gv \quad \text{y} \quad g(\lambda u) = \lambda(gu).$$

Proposición 3.24. *Si* G *es un grupo de* $O(N)$ *y* Ω *es un dominio* $G-$*invariante, entonces se cumple lo siguiente*

(a) Si $u \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in G$ *entonces* $gu \in L^p(\Omega)$ *y* $\|gu\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

(b) Si $u \in H_0^1(\Omega)$ *y* $g \in G$, *entonces* $gu \in H_0^1(\Omega)$, $\mathrm{D}(gu)(x) = g\mathrm{D}u(g^{-1}x)$ *para todo* $x \in \Omega$ *y* $\|gu\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Demostración. (a) Como $g(\Omega) = \Omega$ y $|\det g| = 1$, usando el teorema de cambio de variable se tiene que

$$\|gu\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |gu|^p = \int_\Omega |u(g^{-1}x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(y)|^p \,\mathrm{d}y = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

(b) Sean $g \in G$, $x \in \Omega$. Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ la regla de la cadena asegura que

$$\mathrm{D}(g\varphi)(x) \cdot y = (\mathrm{D}\varphi(g^{-1}x)) \cdot (g^{-1}y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Como g es una isometría, $\mathrm{D}\varphi(g^{-1}x) \cdot g^{-1}y = g\mathrm{D}\varphi(g^{-1}x) \cdot y$. En consecuencia,

$$\mathrm{D}(g\varphi)(x) \cdot y = g\mathrm{D}\varphi(g^{-1}x) \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Esto prueba que $\mathrm{D}(g\varphi)(x) = g\mathrm{D}\varphi(g^{-1}x)$. Escribiendo a g en forma matricial como $g = (g_{ij})$ esta última identidad se escribe como

$$\frac{\partial(g\varphi)}{\partial xi}(x) = \sum_{j=1}^N g_{ij} \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)(x), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ tomamos una sucesión $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $H_0^1(\Omega)$. Por tanto, $\varphi_k \to u$ y $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \to \mathrm{D}_j u$ en $L^2(\Omega)$. Entonces

$$g\varphi_k \to gu \quad \text{y} \quad g\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \to \mathrm{D}_j u \quad \text{en} \quad L^2(\Omega).$$

En consecuencia, $gu \in H_0^1(\Omega)$ y $\mathrm{D}_i(gu) = \sum_{j=1}^N g_{i,j}(g\mathrm{D}_j u)$, es decir,

$$\mathrm{D}(gu)(x) = g\mathrm{D}u(g^{-1}x) \qquad \text{si } \; x \in \Omega$$

Finalmente, el teorema de cambio de variable asegura que

$$\int_\Omega |\mathrm{D}(gu)|^2 = \int_\Omega |\mathrm{D}u(g^{-1}x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\mathrm{D}u(y)|^2 \,\mathrm{d}y.$$

De donde, se sigue que $\|gu\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.

$\square$

3.3.2. Principio de criticalidad simétrica

Sea H un espacio de Hilbert. Igual que en el caso de $\mathbb{R}^N$ denotaremos por $\mathcal{B}(H,H)$ al conjunto de funciones lineales y continuas de H en sí mismo y al conjunto de las isometrías lineales de H como

$$\mathcal{I}(H) := \{T \in \mathcal{B}(H,H) \,:\, T \text{ es biyectiva y } \|Tu\| = \|u\| \quad \text{si} \quad u \in H\}.$$

Definición 3.25. *Sea G un grupo. Una acción (isométrica) de G en H es un homomorfismo de grupos $G \to \mathcal{I}(H)$. Denotaremos a la imagen de $g \in G$ también como la isometría $g : H \to H$ y escribiremos gu en lugar de $g(u)$.*

Un espacio de Hilbert con una acción G se llama $G-$espacio de Hilbert. El espacio de $G-$puntos fijos de H es el subespacio

$$H^G := \{u \in H \,:\, gu = u \ \forall g \in G\}.$$

Una funcional $\mathcal{J} : H \to \mathbb{R}$ se llama $G-$invariante si

$$\mathcal{J}(gu) = \mathcal{J}(u)$$

para todo $g \in G$ y $u \in H$.

Observación 3.26. *El subespacio H^G es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Probaremos que H^G es un espacio cerrado de H. Sean (u_k) una sucesión en H^G tal que $u_k \to u$ y $g \in G$ entonces $u_k = gu_k \to gu$ por lo tanto, $gu = u$, de donde se sigue que $u \in H^G$. □

Ejemplo 3.27. *Si G es un subgrupo del $O(N)$ y Ω es un grupo $G-$invariante, la Proposición 3.24 asegura que $H_0^1(\Omega)$ con la acción $g : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ dada por $gu := u \circ g^{-1}$ es un $G-$espacio de Hilbert y que el funcional $\mathcal{J} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en el Teorema 3.18 es $G-$invariante*

Teorema 3.28 (Principio de criticalidad simétrica, Palais 1979)**.** *Si H es un $G-$espacio de Hilbert y $\mathcal{J} : H \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal $G-$invariante de clase C^1, entonces*

(a) $\mathrm{D}\mathcal{J} : H \to H$ *es $G-$equivariante, es decir,*

$$\mathrm{D}\mathcal{J}(gu) = g\mathrm{D}\mathcal{J}(u) \quad \forall u \in H \, \forall g \in G.$$

En consecuencia, si $u \in H^G$, entonces $\mathrm{D}\mathcal{J}(u) \in H^G$.

(b) Si $u \in H^G$ es un punto crítico de la restricción $\mathcal{J}|_{H^G} : H^G \to \mathbb{R}$, entonces u es un punto crítico de $\mathcal{J}$.

Demostración. (a) Como $\mathcal{J}$ es $G-$invariante ocurre que $\mathcal{J} \circ g = \mathcal{J}$ para todo $g \in G$. Sean $u \in H$, $g \in G$. Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{D}\mathcal{J}(u), v \rangle &= \langle \mathrm{D}(\mathcal{J} \circ g)(u), v \rangle \\ &= \langle \mathrm{D}\mathcal{J}(gu), gv \rangle = \langle g^{-1}\mathrm{D}\mathcal{J}(gu), v \rangle \end{aligned}$$

para todo $v \in H$. Por lo tanto

$$\mathrm{D}\mathcal{J}(gu) = g\mathrm{D}\mathcal{J}(u) \qquad \forall u \in H \forall g \in G,$$

es decir, $\mathrm{D}\mathcal{J}(u) \in H^G$ para todo $u \in H^G$.

(b) Si $u \in H^G$ entonces $\mathrm{D}(\mathcal{J}|_{H^G})(u) = \mathrm{D}\mathcal{J}(u)$ por lo que los puntos críticos de $\mathcal{J}|_{H^G}$ son los de $\mathcal{J}$ como se quería demostrar.

$\square$

Corolario 3.29. *Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un conjunto abierto, acotado y $G-$invariante, el problema (3.0.1) tiene al menos una solucion $G-$invariante.*

Demostración. El Teorema 3.18 nos garantiza la existencia de un punto crítico de $\mathcal{J}|_{H_0^1(\Omega)^G}$ en $H_0^1(\Omega)^G$ y el teorema anterior nos dice que dicho punto es crítico de $\mathcal{J}$ en $H_0^1(\Omega)$, es decir, es solución (débil) $G-$invariante no trivial. $\square$

3.3.3. Soluciones no radiales

Definición 3.30. *Sean G un subgrupo de $O(N)$, $\tau : G \to \mathbb{Z}/2 := \{1, -1\}$ un homomorfismo de grupos, y Ω un conjunto $G-$invariante. Definimos la siguiente acción de G en $H_0^1(\Omega)$, a la que denotaremos como $g\cdot_\tau : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, de la siguiente manera $g \cdot_\tau u := \tau(g)gu$, es decir,*

$$(g \cdot_\tau u)(x) := \tau(g)u(g^{-1}x)$$

si $x \in \Omega$ y $g \in G$.

Observación 3.31. *La Proposición 3.24 nos permite concluir que $(g \cdot_\tau u)(x) \in H_0^1(\Omega)$*

y

$$\begin{aligned} \|g \cdot_\tau u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \|g \cdot_\tau u\|_{L^p(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Entonces G actúa en $H_0^1(\Omega)$ bajo esta acción. Denotemos por

$$H_0^1(\Omega)^\tau := \{u \in H_0^1(\Omega) \, : \, g \cdot_\tau u = u \; \forall g \in G\}.$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)^\tau$ y $K := \ker \tau$, entonces u es $K-$invariante, es decir, $H_0^1(\Omega)^\tau \subset H_0^1(\Omega)^K$. Por otra parte, $u(gx) = -u(x)$ si $\tau(g) = -1$.

Concluimos este trabajo con este ejemplo.

Ejemplo 3.32. *Sean B la bola unitaria de $\mathbb{R}^2$ y $\Omega = B \times B \subset \mathbb{R}^4$, definimos la acción de $O(2) \times O(2)$ sobre $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera, para cada $(g, h) \in O(2) \times O(2)$ y cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $(g, h)(x, y) := (gx, hy)$, definamos también $\varrho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ como $\varrho(x, y) = (y, x)$; y sea G el grupo generado por $O(2) \times O(2)$ y ϱ. Además, definamos $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ en los generadores como*

$$\tau(g) := \begin{cases} 1 & si \; g \in O(2) \times O(2) \\ -1 & si \; g = \rho. \end{cases}$$

Entonces G es un subgrupo de $O(N)$, Ω es $G-$invariante, τ está bien definida, $K := \ker \tau = O(2) \times O(2)$ y el problema (3.0.1) tiene soluciones no radiales.

Demostración. Primero probaremos que G es un subgrupo de $O(4)$; para eso, notemos que $O(2) \times O(2)$ y ϱ estan contenidos $O(4)$, en efecto, si $(g, h) \in$

$O(2) \times O(2)$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^N$ entonces

$$\begin{aligned}
\|(g,h)(x,y)\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} &= \sqrt{\|gx\|^2_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} + \|gy\|^2_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}} \\
&= \sqrt{\|x\|^2_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} + \|y\|^2_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}} \\
&= \|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

y se cumple claramente que

$$\|\varrho(x,y)\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} = \|(y,x)\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} = \|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}.$$

Estas dos ultimas igualdades nos permite afirmar que G está contenido en $O(4)$, y además, si $(x,y) \in B \times B$ entonces $\bar{g}(x,y) \in B \times B$ para todo $\bar{g} \in G$. Por lo tanto Ω es G invariante.

Supongamos que existieran $g, h \in O(2)\times O(2)$ tales que $\varrho(x,y) = (gx, hy)$ entonces $\varrho(1,0,0,0) = (0,0,1,0) = (g(1,0), h(0,0))$ lo que implica que $g(1,0) = (0,0)$ y $h(0,0) = (1,0)$ que es una contradicción pues h y g preservan la norma, por lo tanto $\varrho \notin O(2) \times O(2)$ y esto implica que τ está bien definido. Observemos que $\varrho\varrho = Id$ y además que $\varrho(g,h) = (h,g)\varrho$, en efecto, sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ y $g, k \in O(2)$ entonces $\rho(g,h)(x,y) = \rho(gx,hy) = (hy,gx) = (h,g)(y,x) = (h,g)\varrho(x,y)$. Por lo que, cada $\bar{g} \in G$ puede verse como $\bar{g} = \rho^k \bar{g}_1 \cdots \bar{g}_k$, donde $g_i \in O(2) \times O(2)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $\tau(\bar{g}) = 1$ entonces ϱ sólo un numero par de veces y ya que $\varrho^2 = id$ entonces $\bar{g} \in O(2) \times O(2)$, es decir, $Ker(\tau) = O(2) \times O(2)$.

Finalmente, aplicando el Corolario 3.29 podemos concluir que existen soluciones al problema (3.0.1) no radiales, dado que τ es suprayectivo y $H^1_0(\Omega)^\tau \neq 0$.

□

Bibliografía

[1] Mónica Clapp. Introducción al análisis real. Instituto de Matemáticas, UNAM.

[2] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2006.

[3] Jürgen Jost. *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag, 2005.

[4] I. Maddox. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, 1970.

[5] David Gilbrarg y Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 2001.