



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ACATLÁN

SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA POR MEDIO DE  
FUNCIONES CÓPULA DE LOS ACTIVOS Y PASIVOS DE  
DOS CARTERAS DE SEGURO DE VIDA TEMPORAL A  
UN AÑO

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN ACTUARÍA

P R E S E N T A:

MARÍA QUETZALLI GARCÍA CRUZ

ASESOR: DR. ARTURO ERDELY RUÍZ

ENERO, 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Reírse a menudo y amar mucho, apreciar la belleza,  
encontrar lo mejor en los otros, entregarse uno mismo...  
Esto es tener éxito.*

***Ralph Waldo Emerson.***

*Hay una fuerza motriz mas poderosa que el vapor,  
la electricidad y la energía atómica:  
la voluntad.*

***Albert Einstein.***

### ***Agradecimientos:***

*A mis padres, Esther y Macedonio, por enseñarme que no hay límites  
cuando te comprometes a lograr un objetivo,  
por su cariño, su apoyo constante  
y su esfuerzo en la educación que me brindaron.*

*A mis hermanos por una infancia feliz a su lado.*

*A Luis y Lucy por brindarme un hogar y su confianza,  
sin ustedes, esto no sería posible.*

*A toda mi maravillosa familia.*

*A mis amigos, por tantas lecciones de vida,  
fueron mi refugio cuando perdía el rumbo.*

*Especialmente a José Manuel porque creyó en mí  
y me apoyó en todo momento; a Luisito por su comprensión  
y compañía. Infinitas gracias.*

*Al Dr. Arturo Erdely, por compartir conmigo su valioso tiempo  
y conocimiento en la revisión de este trabajo. Gracias.*

*A mi amada Universidad...*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Cópulas. Elementos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Notación y Conceptos . . . . .	2
1.2. Definición . . . . .	3
1.3. Cópulas y distribuciones bivariadas . . . . .	6
Simulación de vectores aleatorios . . . . .	10
Regresión vía cópula . . . . .	12
1.4. Modelos de Cópulas . . . . .	13
Cópulas Arquimedianas . . . . .	14
Cópula empírica . . . . .	18
Construcción de cópulas a partir de otras . . . . .	22
<b>2. Riesgo de Mortalidad</b>	<b>25</b>
2.1. Tablas de Mortalidad . . . . .	26
2.2. Modelando el pasivo . . . . .	28
Modelo: regresión logística. . . . .	29
Modelo: ley de Makeham. . . . .	33
Modelo para las tasas de mortalidad vía cópulas. . . . .	35
<b>3. Riesgo de Mercado</b>	<b>47</b>
3.1. CETES . . . . .	47
3.2. Modelando el activo . . . . .	50
Modelo: Normal Multivariada. . . . .	51
Modelo para los CETES vía cópulas. . . . .	52
<b>4. ALM Estocástico</b>	<b>61</b>
4.1. Simulación del ALM estocástico. . . . .	63

Características del activo . . . . .	63
Características del pasivo . . . . .	64
Procedimiento de simulación del ALM estocástico . . . . .	67
4.2. Análisis de Resultados. . . . .	70
<b>5. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>A. Información del pasivo.</b>	<b>77</b>
<b>B. Código en R</b>	<b>81</b>
B.1. Cópulas . . . . .	81
B.2. Distribución empírica. . . . .	83
B.3. Simular $q_x$ . . . . .	84
B.4. Simulación de trayectorias de rendimiento de los CETES. . . . .	85
B.5. Valuación de los CETES. . . . .	86
B.6. ALM estocástico . . . . .	88
B.7. Activo inicial para evitar descalce. . . . .	90
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Introducción

En la actualidad el mundo aspira a un funcionamiento estable de los sistemas financieros y de seguros, esta estabilidad no puede concebirse de manera local por la fuerte interacción de los mercados financieros. En este entendido han surgido acuerdos internacionales para la administración del riesgo. Para el sector asegurador, estos acuerdos se conocen como *Solvency*, la primera versión, conocida como *Solvency 1*, comenzó a desarrollarse en 1997 por la primera directiva europea en margen de solvencia y entró en vigor en 2004. En 2001 comenzó a desarrollarse una segunda versión conocida como *Solvency 2* (Embrechts, Frey y McNeil (2005)). Actualmente en México, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, institución reguladora del sector asegurador, comenzó la publicación de las modificaciones a las leyes y metodologías mexicanas para implementar modelos de riesgo inspirados en *Solvency 2*.

El principal objetivo de estos acuerdos es proteger a los asegurados contra la insolvencia de las compañías aseguradoras y en particular, el corazón de *Solvency 2*, es la evaluación de la eficiencia general de los márgenes de solvencia. Una característica sobresaliente de *Solvency 2* es el impulso del desarrollo de modelos internos por parte de las compañías aseguradoras para cuantificar de forma más precisa los riesgos a los que se encuentran expuestas, y con ello, tomar decisiones adecuadas, así como garantizar el cumplimiento de sus obligaciones sin poner en riesgo su solvencia.

En este sentido, la hipótesis que motiva el presente trabajo es *determinar si es posible cuantificar, de manera más eficiente, los riesgos de mercado y de mortalidad a los que está expuesta una compañía aseguradora, respecto de la utilización de estimaciones puntuales. Mediante simulación estocástica daremos una aproximación del comportamiento de los riesgos de mortalidad y de mercado.* La principal herramienta teórica que utilizaremos es la modelación de dependencia estocástica por medio de la teoría de funciones cópula.



Como herramienta computacional, para llevar a cabo los cálculos se utiliza el lenguaje de programación R Development Core Team (2012).

En el primer capítulo se aborda la definición formal de cópula, se describen algunas propiedades de estas funciones y se explica la relación que guardan dichas funciones con las distribuciones bivariadas mediante el teorema de Sklar; se resumen algunos procedimientos para simular variables aleatorias y hacer regresiones vía cópulas; se estudia la familia paramétrica Arquimediana, la cópula Bernstein y distintos métodos para la construcción de cópulas.

En el segundo capítulo se presenta el modelo vía cópulas mediante el cual se simularán las tasas de mortalidad para posteriormente simular el pasivo de la compañía. Para estimar dicho modelo se hace uso de la experiencia mexicana vigente, publicada en el año 2000 por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas y se suponen dos carteras de seguros de vida temporal a un año. También se presentan los resultados obtenidos con regresión logística y la ley de Makeham.

Para el activo se determinará una política de inversión y se considerarán dos plazos de CETES; el modelo vía cópulas mediante el cual se simulará el riesgo de mercado se presenta en el capítulo 3.

En el capítulo 4 se hace la simulación estocástica de escenarios que afectan el valor en el tiempo tanto de activos como de pasivos y se establecen los niveles de reserva financiera con que debe contar una compañía de seguros que posea las carteras antes mencionadas, para garantizar el cumplimiento de sus obligaciones. En este capítulo también se obtiene la reserva por tipo de riesgo.

Finalmente, en el Apéndice A se presenta la información que se utilizó para modelar la mortalidad y se muestran los asegurados por edad para cada cartera. El Apéndice B contiene los programas en lenguaje de programación R desarrollados para los distintos análisis.

# Capítulo 1

## Cóputas. Elementos básicos

En sentido estricto la palabra *Cópula* proviene del latín y significa *liga, atadura o enlace*; en gramática por ejemplo es empleada para describir la parte del enunciado o preposición que conecta el sujeto con el predicado. En un contexto matemático esta palabra fue utilizada por primera vez en el teorema de Sklar, enunciado precisamente por Abe Sklar (1959), describiendo la función que *une* funciones de distribución unidimensional para formar una función de distribución multidimensional, aunque esta función ya había sido utilizada en trabajos anteriores sobre distribuciones multivariadas con marginales univariadas, como el de Fréchet (1951), Dall’Aglío (1956), Féron (1956), entre otros, destacando los trabajos de Hoeffding (1940, 1941) quien encontró una distribución bivariada estandarizada, con dominio en el intervalo  $[-1/2, 1/2]^2$  y cuyas marginales son uniformes en el intervalo  $[-1/2, 1/2]$ , aunque ninguno de ellos utilizó el concepto de cópula.

Durante el tiempo en que Sklar hizo el trabajo donde acuñó el término *cópula*, colaboró con Berthold Schweizer en el desarrollo de la teoría de espacios métricos probabilísticos, es en esta colaboración en la que surgieron muchos de los resultados de la teoría de cópulas; esto es entendible ya que como recordaremos un espacio métrico consiste de un conjunto  $S$  y una métrica  $d$  que mide distancias entre dos puntos que pertenecen a  $S$ , digamos  $p$  y  $q$ , análogamente en un espacio métrico probabilístico tenemos una función de distribución  $F_{p,q}$  en lugar de una distancia  $d(p, q)$ , cuyo valor  $F_{p,q}$  para cualquier real  $x$  es la probabilidad de que la distancia entre  $p$  y  $q$  sea menor a  $x$ ; como este ejemplo es posible identificar otros resultados análogos en ambos espacios.

El primer documento que trata explícitamente la relación entre la cópu-

la y el estudio de la dependencia entre variables aleatorias fue desarrollado por Schweizer y Wolf en 1981, en este trabajo discutieron y modificaron el criterio de Rényi (1959) para medir la dependencia entre un par de variables aleatorias, expusieron las propiedades invariantes que tiene la cópula ante transformaciones estrictamente monótonas de las variables aleatorias e introdujeron una medida de dependencia que ahora se conoce como  $\sigma$  de Schewizer-Wolff.

En este capítulo presentaremos algunos de los resultados básicos de la teoría de cópulas, para mayor detalle ver Nelsen (2006).

## 1.1. Notación y Conceptos

A continuación introduciremos notación importante.  $\overline{\mathbb{R}}$  representa a los reales extendidos  $[-\infty, \infty]$  y  $\overline{\mathbb{R}}^2$  al plano extendido  $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ . Un rectángulo en  $\overline{\mathbb{R}}^2$  es el producto cartesiano  $B$  de dos intervalos cerrados:  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ , los vértices del rectángulo  $B$  son los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_2, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , un caso particular es el *cuadrado unitario*  $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$  donde  $\mathbb{I} = [0, 1]$ . Una *función real de doble entrada*  $H$  tiene las siguientes características:  $DomH = S_1 \times S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}^2$  y  $RanH \subset \mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.1** *Sea  $H$  una función real de doble entrada y  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  un rectángulo cuyos vértices pertenecen al  $DomH$ . El  $H$ -volumen de  $B$  se define como:*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (1.1)$$

**Definición 1.1.2** *Una función real de doble entrada  $H$  es 2-creciente si  $V_H \geq 0$  para todo rectángulo  $B$  cuyos vértices están en el  $DomH$ .*

Los siguientes lemas serán de gran importancia para establecer las principales propiedades de las cópulas, cuyas demostraciones pueden consultarse en Nelsen (2006).

**Lema 1.1.3** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  subconjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $H$  una función 2-creciente con dominio en  $S_1 \times S_2$ . Sea  $x_1, x_2$  en  $S_1$  con  $x_1 \leq x_2$  y  $y_1, y_2$  en  $S_2$  con  $y_1 \leq y_2$ ; la función  $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$  es **no decreciente** en  $S_1$ , análogamente la función  $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$  es **no decreciente** en  $S_2$ .*

Con ayuda de este lema y otras hipótesis podemos mostrar que una función  $\mathbf{H}$  2-creciente es no decreciente en cada argumento. Supongamos que los subconjuntos  $S_1$  y  $S_2$  tienen ínfimo, digamos  $a_1$  y  $a_2$  respectivamente, decimos que una función  $H : S_1 \times S_2 \mapsto \mathbb{R}$  es *fijada* si  $H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0$  para todo  $(x, y)$  en  $S_1 \times S_2$ . Esto nos lleva al siguiente lema.

**Lema 1.1.4** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  subconjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$ ; si  $\mathbf{H}$  es una función fijada 2-creciente con dominio en  $S_1 \times S_2$ , entonces  $\mathbf{H}$  es no decreciente en cada argumento.*

Ahora supongamos que los subconjuntos  $S_1$  y  $S_2$  tienen también un supremo  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente, decimos que la función  $\mathbf{H}$ , con la que hemos venido trabajando, *tiene marginales* y estas son funciones  $F$  y  $G$  definidas como:

$$\begin{aligned} \text{Dom}F &= S_1; & F(x) &= H(x, b_2) \quad \forall x \in S_1; \\ \text{Dom}G &= S_2; & G(y) &= H(b_1, y) \quad \forall y \in S_2. \end{aligned}$$

A continuación enunciaremos un lema que relaciona a la función fijada 2-creciente con las marginales.

**Lema 1.1.5** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  subconjuntos no vacíos de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $\mathbf{H}$  una función fijada 2-creciente, con marginales y dominio en  $S_1 \times S_2$ . Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  puntos en  $\text{Dom}H$ , tenemos que:*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_1) - G(y_2)|.$$

Con los resultados que hemos enunciado podemos ahora definir las funciones cópula y sus propiedades.

## 1.2. Definición

**Definición 1.2.1** *Una cópula bivariada es una función  $C : \mathbb{I}^2 \mapsto \mathbb{I}$  que cumple las siguientes propiedades:*

1. Para cada  $u, v$  en  $\mathbb{I}$ :

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v); \tag{1.2}$$

$$C(u, 1) = u \quad y \quad C(1, v) = v; \tag{1.3}$$

2. Para cada  $u_1, u_2, v_1, v_2$  en  $\mathbb{I}$ , tal que  $u_1 \leq u_2$  y  $v_1 \leq v_2$ :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.4)$$

De la definición anterior resulta que las cópulas, al ser funciones fijadas 2-crecientes, son no decrecientes en sus argumentos y por lo tanto  $\forall u, v$  en  $\mathbb{I}$ ,

$$0 \leq C(u, v) \leq 1.$$

**Teorema 1.2.2** *Sea  $C$  una cópula. Entonces para cada  $u_1, u_2, v_1, v_2$  que pertenecen a  $\mathbb{I}$  tenemos que:*

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (1.5)$$

y por tanto  $C$  es continua en su dominio.

El teorema anterior garantiza que las cópulas cumplen la condición de Lipschitz y en consecuencia, también son *uniformemente continuas*.

**Teorema 1.2.3** *Sea  $C$  una cópula, entonces para cada  $(u, v) \in \mathbb{I}^2$ :*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v). \quad (1.6)$$

Además, las funciones  $\max(u + v - 1, 0)$  y  $\min(u, v)$  son también cópulas.

La desigualdad (1.6) es la versión de las cotas de *Fréchet-Hoeffding* para las cópulas. La cópula  $\max(u + v - 1, 0)$  se denota como  $W(u, v)$  y se le conoce como **cota inferior de Fréchet-Hoeffding**, al igual que  $\min(u, v)$  se denota como  $M(u, v)$  y es conocida como la **cota superior de Fréchet-Hoeffding**. Otra cópula muy frecuente de encontrar es la *cópula producto*  $\Pi(u, v) = uv$ , también conocida como *cópula independencia*. (Ver Corolario 1.3.6 más adelante).

**Definición 1.2.4** *Sea  $C$  una cópula y  $a \in \mathbb{I}$ . La sección horizontal de  $C$  en  $a$  es la función que va de  $\mathbb{I}$  a  $\mathbb{I}$  dada por  $t \mapsto C(t, a)$ ; sección vertical de  $C$  en  $a$  es la función de  $\mathbb{I}$  en  $\mathbb{I}$  definida como  $t \mapsto C(a, t)$ ; y la sección diagonal de  $C$  es la función  $\delta_C$  de  $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  definida como  $\delta_C(t) = C(t, t)$ .*

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del Teorema 1.2.2.

**Corolario 1.2.5** *Las secciones horizontal, vertical y diagonal de una cópula  $C$  son todas no decrecientes y uniformemente continuas en  $\mathbb{I}$ .*

Como consecuencia de la Definición 1.2.1 y del Teorema 1.2.2 podemos decir que la gráfica de cualquier cópula es una superficie continua dentro del cubo unitario  $\mathbb{I}^3$  y del Teorema 1.2.3 se deduce que esta gráfica se encuentra entre las gráficas de las cotas de Fréchet-Hoeffding.

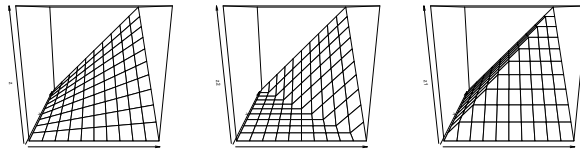


Figura 1.2.1: Gráficas de las cópulas  $\Pi$ ,  $W$  y  $M$

Una forma sencilla de representar a las cópulas son los *diagramas de contorno* (Conway (1979)), estas son gráficas de *conjuntos de nivel*, es decir, se grafica el conjunto en  $\mathbb{I}^2$  tal que  $C(u, v) = a$ , con  $a$  una constante. (Ver Figura 1.2.2)

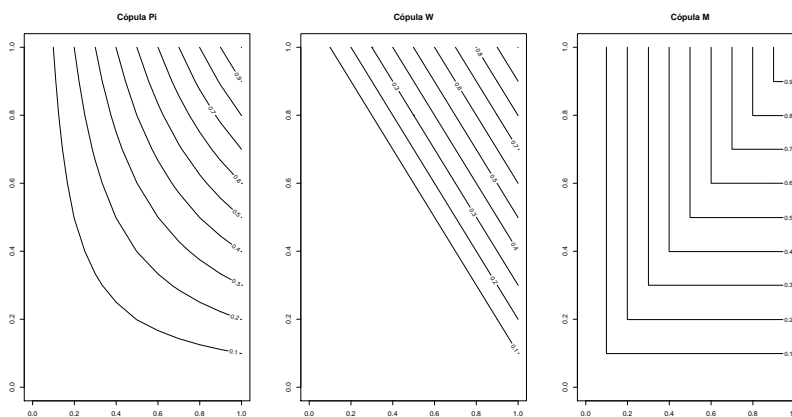


Figura 1.2.2: Gráficas de contorno de las cópulas  $\Pi$ ,  $W$  y  $M$

A continuación daremos la definición de simetría, la cual será de interés más adelante (para mayor detalle consúltese Nelsen (2006)).

**Definición 1.2.6** *Decimos que una cópula  $C$  es simétrica si para todo  $(u, v)$  en  $\mathbb{I}^2$ ,  $C(u, v) = C(v, u)$ .*

Terminaremos esta sección con dos teoremas sobre las derivadas parciales de las funciones cópula.

**Teorema 1.2.7** *Sea  $C$  una cópula. Para cualquier  $v$  en  $\mathbb{I}$ , la derivada parcial  $\partial C(u, v)/\partial u$  existe para casi todo  $u$ , y:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1. \quad (1.7)$$

*Análogamente, para cualquier  $u$  en  $\mathbb{I}$ , la derivada parcial  $\partial C(u, v)/\partial v$  existe para casi todo  $v$ , y:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1. \quad (1.8)$$

*Además, las funciones  $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$  y  $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$  están bien definidas y son no decrecientes en casi todo  $\mathbb{I}$ .*

**Teorema 1.2.8** *Sea  $C$  una cópula. Si  $\partial C(u, v)/\partial v$  y  $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v$  son continuas en  $\mathbb{I}^2$  y  $\partial C(u, v)/\partial u$  existe para toda  $u \in (0, 1)$  cuando  $v = 0$ , entonces  $\partial C(u, v)/\partial u$  y  $\partial^2 C(u, v)/\partial v \partial u$  existen en  $(0, 1)^2$  y  $\partial^2 C(u, v)/\partial u \partial v = \partial^2 C(u, v)/\partial v \partial u$ .*

### 1.3. Cópulas y distribuciones bivariadas

En esta sección describiremos el papel que juegan las cópulas en la relación entre las funciones de distribución bivariadas y sus marginales.

**Definición 1.3.1** *Una **función de distribución**  $F$  con dominio  $\overline{\mathbb{R}}$  cumple lo siguiente:*

1.  $F$  es no decreciente,
2.  $F(-\infty) = 0$  y  $F(\infty) = 1$ .

Análogamente, una **función de distribución conjunta**  $H$  con dominio en  $\overline{\mathbb{R}}^2$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $H$  es 2-creciente,
2.  $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  y  $H(\infty, \infty) = 1$ .

Entonces  $H$  es fijada, y debido a que el  $DomH = \overline{\mathbb{R}}^2$ ,  $H$  tiene marginales  $F(x) = H(x, \infty)$  y  $G(y) = H(\infty, y)$ . Por el Corolario 1.2.5  $F$  y  $G$  son funciones de distribución.

Nótese que las definiciones de funciones de probabilidad anteriores son más generales que las *funciones de distribución de probabilidad* pues no se menciona a las variables aleatorias ni ningún tipo de continuidad.

**Definición 1.3.2** Sea  $F$  una función de distribución. Una *cuasi-inversa* de  $F$  es cualquier función  $F^{(-1)}$  con dominio  $\mathbb{I} = [0, 1]$  tal que

1. Si  $t \in RanF$ , entonces  $F^{(-1)}(t)$  es cualquier  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  tal que  $F(x) = t$ , esto es, para cualquier  $t \in RanF$

$$F(F^{(-1)}(t)) = t.$$

2. Si  $t \notin RanF$ , entonces

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x | F(x) \geq t\} = \sup \{x | F(x) \leq t\}.$$

Si  $F$  es, en particular, estrictamente creciente, entonces tiene una *única cuasi-inversa*, que de hecho es  $F^{(-1)} = F^{-1}$ , en donde  $F^{-1}$  es la inversa usual.

Nótese que no hay nada probabilístico en las definiciones anteriores, y todas las funciones de distribución de una o dos variables aleatorias satisfacen las propiedades antes mencionadas por lo que no es necesario imponer más restricciones. El siguiente teorema nos da finalmente la relación de las cópulas con la probabilidad.

**Teorema 1.3.3 (Teorema de Sklar)** Sea  $H$  una función de distribución conjunta con marginales  $F$  y  $G$ . Entonces existe una cópula  $C$  tal que para toda  $x, y$  en  $DomH = \overline{\mathbb{R}}^2$ :



$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1.9)$$

Si  $F$  y  $G$  son continuas, entonces  $C$  es única; de otra manera  $C$  está únicamente determinada en  $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$ . De manera inversa, si  $C$  es una cópula y  $F, G$  son funciones de distribución, entonces la función  $H$  definida como (1.9) es una función de distribución conjunta con marginales  $F$  y  $G$ .

El teorema anterior es de suma importancia, ya que garantiza que existe una cópula subyacente para toda función de distribución conjunta, entonces, es posible obtener esta cópula a partir de la función de distribución conjunta y las marginales, como lo muestra el siguiente resultado.

**Corolario 1.3.4** *Sea  $H$  una función de distribución conjunta bivariada con marginales continuas  $F$  y  $G$ , y sea  $C$  la única cópula tal que (1.9) se cumple. Entonces para cualquier  $(u, v) \in \mathbb{I}^2$ :*

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (1.10)$$

Con  $F^{(-)}$  y  $G^{(-)}$  las cuasi-inversas de  $F$  y  $G$  respectivamente. (Véase Definición 1.3.2).

Con una apropiada extensión de su dominio en  $\overline{\mathbb{R}}^2$ , toda cópula es una función de distribución conjunta con marginales uniformes en  $\mathbb{I}$ . La siguiente observación especifica este hecho.

**Observación 1.3.5** *Sea  $C$  una cópula y definamos la función  $H_C$  de la siguiente manera:*

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0, \\ C(x, y) & (x, y) \in \mathbb{I}^2, \\ x, & y > 1, x \in \mathbb{I}, \\ y, & x > 1, y \in \mathbb{I}, \\ 1, & x > 1 \text{ y } y > 1. \end{cases}$$

Entonces  $H_C$  es una función de distribución conjunta con marginales Uniformes(0, 1).

A menudo es útil pensar en las cópulas como funciones de distribución conjuntas de variables aleatorias Uniformes(0,1).

Como recordaremos las variables aleatorias  $X, Y$  son independientes si y sólo si  $H(x, y) = F(x)G(y)$  para todo  $x, y$  en  $\overline{\mathbb{R}}^2$ , el siguiente corolario muestra la cópula que caracteriza a las variables aleatorias independientes.

**Corolario 1.3.6** *Si  $X, Y$  son variables aleatorias continuas e independientes, entonces la cópula asociada es  $\Pi(u, v) = uv$ , y de ahí que se conozca a  $\Pi$  como la cópula independencia.*

Una propiedad muy importante de las cópulas es que ante transformaciones estrictamente monótonas de las variables aleatorias  $X, Y$  la cópula es invariante o cambia de forma predecible. Formalizaremos esta propiedad con los siguientes teoremas. Cabe resaltar que si la función de distribución de la variable aleatoria  $X$  es continua, y si  $\alpha$  es una transformación monótona en el  $RanX$ , entonces la función de distribución de la variable aleatoria  $\alpha(X)$  es también continua.

**Teorema 1.3.7** *Sean  $X, Y$  variables aleatorias continuas con cópula  $C_{X,Y}$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son transformaciones estrictamente crecientes en  $RanX, RanY$ , respectivamente, entonces  $C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$ . Es decir,  $C_{X,Y}$  es invariante ante transformaciones estrictamente crecientes.*

La demostración del teorema anterior puede consultarse en Nelsen (2006). Ahora, cuando al menos una de las transformaciones  $\alpha, \beta$ , es estrictamente decreciente, la cópula de las variables aleatorias  $\alpha(X), \beta(Y)$  es una simple transformación de la cópula  $C_{X,Y}$ . Específicamente:

**Teorema 1.3.8** *Sean  $X, Y$  variables aleatorias continuas con cópula  $C_{X,Y}$  y  $\alpha, \beta$  transformaciones estrictamente monótonas en el  $RanX, RanY$ , respectivamente, entonces tenemos que:*

- *Si  $\alpha$  es estrictamente creciente y  $\beta$  es estrictamente decreciente:*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v). \quad (1.11)$$

- *Si  $\alpha$  es estrictamente decreciente y  $\beta$  es estrictamente creciente:*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = v - C_{X,Y}(1 - u, v). \quad (1.12)$$

- *Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ambas estrictamente decrecientes:*

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v). \quad (1.13)$$

**Proposición 1.3.9** *Sea la variable aleatoria continua  $X$ , tenemos que:*

- $C_{X,X} = M$ .
- $C_{X,-X} = W$ .

Este resultado es aún más general, como lo muestra el siguiente corolario.

**Corolario 1.3.10** *Sea  $X$  una variable aleatoria continua,  $\alpha$  y  $\beta$  estrictamente monótonas en el  $\text{Ran}X$ , tenemos que:*

- *Si  $Y = \alpha(X)$  con  $\alpha$  monótona creciente, entonces  $C_{X,Y} = M$ .*
- *Si  $Y = \beta(X)$  con  $\beta$  monótona decreciente, entonces  $C_{X,Y} = W$ .*

## Simulación de vectores aleatorios

En la práctica es muy común simular variables aleatorias con una distribución conocida, esto con la finalidad de estudiar un fenómeno o para obtener resultados estadísticos que sean difíciles de calcular de forma analítica. En esta sección asumiremos que conocemos la cópula  $C_{X,Y}$  y las funciones de distribución marginales  $F, G$  del vector aleatorio de variables continuas  $(X, Y)$  y daremos un procedimiento para simular dichas variables aleatorias.

Notemos que los valores  $F(X), G(Y)$  son transformaciones monótonas crecientes en  $\text{Ran}X, \text{Ran}Y$  respectivamente, entonces, por el Teorema 1.3.7,  $C_{X,Y} = C_{F(X),G(Y)}$ . Cabe resaltar que  $F(X) = U$  y  $G(Y) = V$  son variables aleatorias continuas que se distribuyen como *Uniformes*(0, 1). Notemos también que:

$$\begin{aligned}
 F_{V|U}(v|u) &= P(V \leq v | U = u) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} P(V \leq v | v \leq U \leq u + \delta) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{P(u \leq U \leq u + \delta, V \leq v)}{P(u \leq U \leq u + \delta)} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{C_{U,V}(u + \delta, v) - C_{U,V}(u, v)}{\delta}.
 \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene por la Observación 1.3.5 y la distribución uniforme que siguen  $U$  y  $V$ . Denotaremos dicha igualdad de la siguiente manera:

$$F_{V|U}(v|u) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{C_{U,V}(u + \delta, v) - C_{U,V}(u, v)}{\delta} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = c_u(v). \quad (1.14)$$

Esta expresión corresponde a la derivada parcial de la cópula respecto de  $u$ , que por el Teorema 1.2.7 existe y es no decreciente en casi todo  $\mathbb{I}$ . Con estas observaciones daremos un sencillo procedimiento para simular variables aleatorias continuas con cópula  $C$  y marginales  $F, G$ .

**Procedimiento 1.3.11** *Simulación de  $n$  observaciones del vector aleatorio  $(X, Y)$ :*

Para  $j = 1, 2, \dots, n$ :

1. Simular  $u_j$  observaciones Uniformes(0,1).
2. Simular  $t_j$  observaciones Uniformes(0,1).
3. Calcular  $v_j = c_u^{(-1)}(t_j)$ , con esto obtendremos el par  $(u_j, v_j)$ .
4. Obtener las simulaciones  $(x_j, y_j)$  mediante:

$$x_j = F^{-1}(u_j),$$

$$y_j = G^{-1}(v_j).$$

Donde  $c_u^{(-1)}(v)$  es la cuasi-inversa de  $c_u(v)$  de acuerdo a la Definición 1.3.2.

Mediante el lenguaje de programación R Development Core Team (2012) es posible simular directamente observaciones  $(u, v)$  de algunas cópulas y para obtener las simulaciones  $(x, y)$  se hace uso del procedimiento conocido como: *transformada inversa*, el cual corresponde al último paso del algoritmo de simulación anterior.

## Regresión vía cópula

Dado que las cópulas contienen toda la información sobre la dependencia entre dos variables aleatorias continuas, como ya vimos en las secciones anteriores, resulta natural utilizarlas para medir la dependencia entre variables aleatorias, a continuación estudiaremos cómo.

**Definición 1.3.12** Sea  $(X, Y)$  un vector de variables aleatorias continuas con cópula  $C$  y marginales  $F, G$ . Sea  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x \in \text{Ran}X$  y

$$F_{Y|X}(y|x) := P(Y \leq y | X = x), \quad (1.15)$$

a la gráfica de la solución de la ecuación  $F_{Y|X}(y|x) = \alpha$ , digamos  $y = \psi_\alpha(x)$ , se le denomina curva de regresión de cuantil  $\alpha$  de  $Y$  condicional en  $X = x$ .

Si  $\alpha = \frac{1}{2}$  entonces,  $Y = \psi_{\frac{1}{2}}(x)$  es la curva de regresión mediana.

**Observación 1.3.13** Lo clásico ha sido definir como curva de regresión a la esperanza condicional  $\mathbb{E}(Y_x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$  pero tiene la desventaja de que no siempre existe, además de ser muy sensible a “outliers”. Un caso particular es el modelo de regresión lineal simple, el cual impone la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(Y_x) = \alpha + \beta x$$

La utilidad de las curvas de regresión de cuantil  $\alpha$  radica en poder estimar puntualmente y por intervalos, el valor que reporta la variable aleatoria  $Y$  dado que  $X = x$ . Tomaremos como estimación puntual a la curva de regresión mediana  $\psi_{1/2}(x)$  y obtendremos intervalos de probabilidad con  $0 < \beta < 1$  de la forma:

$$\left[ \psi_{\frac{1-\beta}{2}}(x), \psi_{\frac{1+\beta}{2}}(x) \right]. \quad (1.16)$$

Hasta este momento no hemos utilizado el hecho de que  $(X, Y)$  tenga una cópula asociada  $C$ , a continuación veremos cómo relacionar la curva de regresión con la cópula. Notemos que  $F, G$  son funciones monótonas crecientes en  $\text{Ran}X, \text{Ran}Y$ , entonces, por los resultados vistos en la sección 1.2.3. tenemos que:

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= P(Y \leq y | X = x) \\ &= P[G(Y) \leq G(y) | F(X) = F(x)] \\ &= \left. \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \right|_{u=F(x), v=G(y)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Con estos resultados daremos el procedimiento a seguir para hacer una regresión de cuantil  $\alpha$ .

**Procedimiento 1.3.14** *Regresión vía cópula:*

1. Resolver para  $v$  la ecuación:

$$\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \alpha,$$

digamos  $v = g_\alpha(u)$ .

2. Reemplazar  $u$  por  $F(x)$  y  $v$  por  $G(y)$ :

$$G(y) = g_\alpha(F(x)).$$

3. Resolver para  $y$ :

$$y = G^{-1}(g_\alpha(F(x))).$$

## 1.4. Modelos de Cópulas

Actualmente existe una gran variedad de modelos paramétricos de cópulas, cada una con características especiales, en esta sección presentaremos una familia de cópulas muy usadas, las *cópulas Arquimedianas*. Estas cópulas deben su popularidad a la facilidad con la que se pueden construir, además, existe una gran variedad de ellas. Otra opción para modelar datos a través de cópulas es un ajuste no paramétrico, por ejemplo la cópula Bernstein, la cual expondremos más adelante.

Comenzaremos con dos definiciones de acuerdo a Genest, Nešlehová y Quessy (2011) que nos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

**Definición 1.4.1** *Sea una muestra aleatoria  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  de una distribución conjunta  $H$  con marginales  $F$  y  $G$ . Sea  $C$  la cópula subyacente. Cuando  $F$  y  $G$  son conocidas podemos construir una muestra aleatoria de  $C$  haciendo para todo  $i$  en  $1, \dots, n$*

$$(U_i, V_i) = (F(X_i), G(Y_i)) \tag{1.18}$$

a las cuales denominaremos observaciones de la cópula.

Sin embargo cuando  $F$  y  $G$  son desconocidas no es posible obtener observaciones de  $C$ , por lo que introduciremos la siguiente definición.

**Definición 1.4.2** *Sea una muestra aleatoria  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  de una distribución conjunta  $H$  con marginales  $F, G$  (desconocidas) y cópula  $C$ . Definimos a las pseudo-observaciones de la cópula para todo  $i$  en  $1, \dots, n$  como*

$$(\widehat{U}_i, \widehat{V}_i) = (F_n(X_i), G_n(Y_i)) \quad (1.19)$$

Donde  $F_n$  y  $G_n$  son las funciones de distribución empíricas de  $X$  y  $Y$  respectivamente.

La primera estimación que se tiene de la distribución de una variable aleatoria es un histograma, gracias al cual se pueden proponer modelos que cumplan con la características que refleja dicha gráfica, como colas pesadas o el rango de los datos que se desea ajustar; para el caso de las cópulas es posible tener una primera estimación del modelo de los datos mediante una gráfica de las pseudo-observaciones de la cópula (Definición 1.4.2), esta gráfica tiene una función análoga al histograma, pues dependiendo del modelo de que se trate, las observaciones de una cópula tienen características distintivas. Las Figuras 1.4.1, 1.4.2 muestran observaciones de la cópula  $t$  y Clayton respectivamente a manera de ejemplo.

## Cópulas Arquimedianas

**Definición 1.4.3** *Sea  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  una función continua y estrictamente decreciente tal que  $\varphi(1) = 0$ . La pseudo inversa de  $\varphi$  es una función  $\varphi^{[-1]}$  con dominio  $[0, \infty]$  dada por:*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (1.20)$$

Nótese que  $\varphi^{[-1]}$  es continua y monótona decreciente en  $[0, \varphi(0)]$ . También cumple  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$  para todo  $u \in [0, 1]$ . Pero:

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(u), \\ \varphi(u) & \text{si } \varphi(u) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (1.21)$$

**Observaciones cópula t**

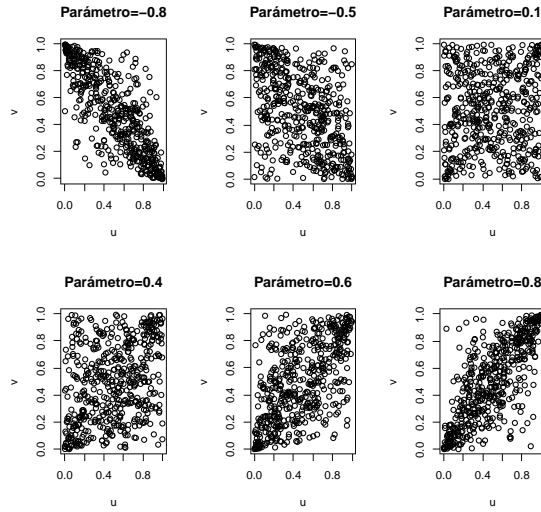


Figura 1.4.1: Ejemplo de observaciones de cópulas.

**Observaciones cópula Clayton**

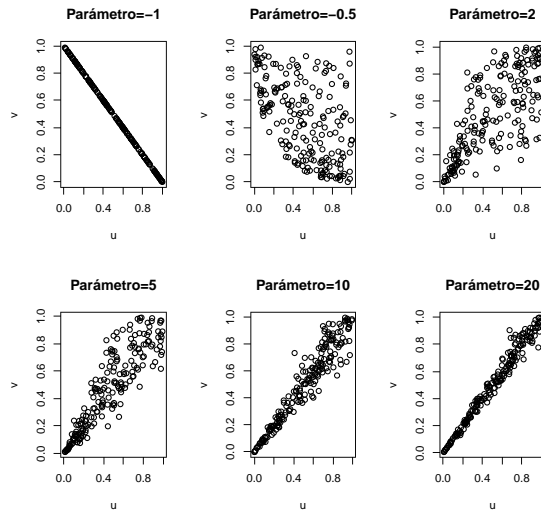


Figura 1.4.2: Ejemplo de oservaciones de cópulas.



Entonces  $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min\{t, \varphi(u)\}$ . Finalmente si  $\varphi(0) = \infty$ , entonces  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ , la inversa usual.

**Teorema 1.4.4** *Sea  $\varphi$  una función como en la Definición 1.4.3 que además sea convexa, entonces la función  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  definida de la siguiente manera:*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (1.22)$$

es una cópula.

**Definición 1.4.5** *A las cópulas obtenidas como en (1.22) se les denomina Arquimedianas y a la función  $\varphi$  se le denomina generador de la cópula.*

Si  $\varphi(0) = \infty$  se dice que  $\varphi$  es un *generador estricto*, si  $\varphi(0) < \infty$  no es estricto. Como se mencionó al principio de esta sección, construir cópulas Arquimedianas es muy sencillo partiendo de su generador, pues es más fácil proponer un generador, a proponer directamente una función que satisfaga la Definición 1.2.1.

**Ejemplo 1.4.6** *A continuación veremos dos ejemplos de cópulas Arquimedianas:*

1. *La cópula independencia  $\Pi$  es Arquimediana y su generador es  $\varphi(t) = -\log(t)$  con  $t \in [0, 1]$ ;*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= e^{-(\log(u) + \log(v))} \\ &= e^{\log(u)} e^{\log(v)} \\ &= uv. \end{aligned}$$

2. *La cota inferior de Fréchet-Hoeffding  $W$  es Arquimediana y su generador es  $\varphi(t) = 1 - t$ , con  $t \in [0, 1]$ .  $\varphi^{[-1]} = 1 - t$  para  $t \in [0, 1]$  y 0 para  $t > 1$ , es decir,  $\varphi^{[-1]} = \max\{1 - t, 0\}$ .*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \max\{1 - (1 - u) - (1 - v), 0\} \\ &= \max\{u + v - 1, 0\} \\ &= W(u, v). \end{aligned}$$

**Teorema 1.4.7** *Sea  $C$  una cópula Arquimediana con generador  $\varphi$ . Entonces:*

1.  $C$  es simétrica, es decir,  $C(u, v) = C(v, u)$  para todo  $u, v$  en  $\mathbb{I}$ ;
2.  $C$  es asociativa, es decir,  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  para  $u, v, w$  en  $\mathbb{I}$ ;
3. Si  $c > 0$  es cualquier constante, entonces  $c\varphi$  es también un generador de  $C$ .

**Teorema 1.4.8** *Sea  $C$  una cópula asociativa tal que  $\delta_C(u) < u$  para toda  $u$  en  $(0, 1)$ . Entonces  $C$  es Arquimediana.*

Las cópulas Arquimedianas se pueden ver como una operación binaria que asigna un par de elementos  $u, v$  en  $\mathbb{I}$  a  $C(u, v)$  en  $\mathbb{I}$ , además, por el Teorema 1.4.7  $C$  es conmutativa y asociativa, y por el Corolario 1.2.5 preserva el orden, es decir, si  $u_1 \leq u_2$  y  $v_1 \leq v_2$  entonces  $C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2)$ , por lo que a  $(\mathbb{I}, C)$  se le denomina semigrupo abeliano ordenado.

**Teorema 1.4.9** *Sea  $C$  una cópula Arquimediana generada por  $\varphi$  y definiendo  $u_C^n$  de forma recursiva como:  $u_C^1 = u$  y  $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$ . Entonces para cualesquiera  $u, v$  en  $\mathbb{I}$ , existe un entero positivo  $n$  tal que  $u_C^n < v$*

El teorema anterior es la versión de la propiedad Arquimediana para  $(\mathbb{I}, C)$ , y es el motivo por el cual las cópulas Arquimedianas reciben dicho nombre.

En la Tabla 1.4.1 se presentan algunas familias de cópulas Arquimedianas. (Más familias de cópulas Arquimedianas disponibles en Nelsen (2006)).

**Observación 1.4.10** *La estructura de las cópulas Arquimedianas facilita algunos procedimientos, como por ejemplo la regresión cuantílica (Definición 1.3.12). Sea  $C$  una cópula Arquimediana se puede expresada como en (1.22) y de acuerdo a la ecuación (1.21) llegamos a lo siguiente:*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ \varphi[C(u, v)] &= \varphi(u) + \varphi(v), \end{aligned} \tag{1.23}$$

Familia	$\varphi_\theta(t)$	$C_\theta(u, v)$	$\theta \in$
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel-Hougaard	$(-\log t)^\theta$	$\exp\left(-\left[ \log u ^\theta +  \log v ^\theta\right]^{1/\theta}\right)$	$[1, \infty)$
Frank	$-\log \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$-\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$

Tabla 1.4.1: Familias Arquimedianas.

derivando dicha expresión con respecto de la variable  $u$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\varphi'[C(u, v)] \partial C(u, v) / \partial u &= \varphi'(u) \\ \partial C(u, v) / \partial u &= \varphi'^{(-1)}[C(u, v)] \varphi'(u).\end{aligned}\quad (1.24)$$

Si lo que queremos es la curva de regresión mediana para una cópula Arquimediana debemos resolver para  $v$  la expresión  $\partial C(u, v) / \partial u = 1/2$ :

$$\begin{aligned}\varphi'^{(-1)}[C(u, v)] \varphi'(u) &= \frac{1}{2} \\ \varphi'[\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))] &= 2\varphi'(u) \\ \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) &= \varphi'^{(-1)}(2\varphi'(u)) \\ \varphi(u) + \varphi(v) &= \varphi\left[\left(\varphi'\right)^{(-1)}(2\varphi'(u))\right] \\ v &= \varphi^{[-1]}\left\{\varphi\left[\left(\varphi'\right)^{(-1)}(2\varphi'(u))\right] - \varphi(u)\right\}\end{aligned}\quad (1.25)$$

## Cópula empírica

La cópula empírica es la versión muestral de la cópula subyacente de variables aleatorias y puede ser usada para la estimación de la misma. Algunas de las aplicaciones de la cópula empírica son: obtener expresiones de la muestra para algunas medidas de asociación o para la construcción de pruebas de

hipótesis no paramétricas, como son el caso de pruebas de independencia o bondad de ajuste para cópulas.

Recordaremos primero la definición de función de distribución empírica para después definir la cópula empírica de acuerdo con Deheuvels (1979).

**Definición 1.4.11** *Sea una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$  con función de distribución  $F$ . La función de distribución empírica se denota y define como:*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_k \leq x\}} \quad (1.26)$$

donde  $I$  es la función indicadora definida como:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$F_n(x)$  es un estimador insesgado y consistente de  $F(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Observación 1.4.12** *Una vez observada la m.a.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tenemos que para toda  $x \in \mathbb{R}$ :*

$$F_n^*(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{x_k \leq x\}}$$

esto es el valor observado del estadístico  $F_n(x)$ , es decir, una estimación de  $F_n(x)$ .

La función descrita en la Observación 1.4.12 es una función de  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  que cumple las características de una función de distribución discreta:

- Escalonada.
- Continua por la derecha.
- Monótona creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$ .

Lo anterior al margen de que  $F$  sea continua, discreta o mixta. A continuación analizaremos un método de suavizamiento de  $F_n^*$  para el caso de  $F$  continua, lo cual es suficiente también para el caso de  $F$  mixta por el teorema de descomposición de v.a.'s mixtas, que expresa que una función de distribución puede escribirse como una combinación lineal convexa de una continua y una discreta.

**Definición 1.4.13 (Polinomio de Bernstein)** *El Polinomio de Bernstein de grado  $n$  para una función continua  $g$  en  $[0, 1]$  se denota y define como:*

$$B_n(x) = (1-x)^n g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^n g(1) \quad (1.27)$$

para todo  $x \in [0, 1]$ .

Notemos que el polinomio descrito en la expresión (1.27) utiliza funciones en el intervalo  $[0, 1]$  por lo que será necesario trabajar con la *cuasi-inversa* de  $F_n^*(x)$  para poder utilizar este polinomio. (Véase Definición 1.3.2).

A continuación daremos un procedimiento para suavizar  $F_n^*(x)$  utilizando el polinomio de Bernstein.

**Procedimiento 1.4.14** *Suavizamiento de  $F_n^*$  con polinomios de Bernstein:*

1. *Obtener la cuasi inversa de la estimación  $F_n^*$  como:*

$$F_n^{*(-1)}\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} x_{(1)} & \text{si } k = 0, \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{si } k = 1, \dots, n-1, \\ x_{(n)} & \text{si } k = n. \end{cases} \quad (1.28)$$

2. *Sustituyendo en la expresión (1.27) tenemos que*

$$B_n(u) = x_{(1)}(1-u)^n + \sum_{k=1}^{n-1} F_n^{*(-1)}\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} + x_{(n)} u^n \quad (1.29)$$

donde  $x_{(k)}$  son los estadísticos de orden.

3. Finalmente los valores suavizados de  $F_n^*$  se obtienen invirtiendo numéricamente  $F_n^{*(-1)}$ .

La estimación que resulta del procedimiento anterior puede ayudar a proponer una distribución paramétrica o ser utilizada como la función de distribución de los datos. La cópula empírica es análoga a la distribución empírica de una variable aleatoria, de igual manera, puede ser suavizada por medio del polinomio de Bernstein como se expondrá a continuación.

**Definición 1.4.15** Sea una muestra aleatoria  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  con función de distribución conjunta  $H$  y marginales  $F$  y  $G$ . Sea  $C$  la cópula subyacente. La cópula empírica es la función  $\widehat{C}_n$  dada por

$$\widehat{C}_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{\text{rank}(X_{(k)}) \leq i, \text{rank}(Y_k) \leq j\}} \quad (1.30)$$

donde  $i, j$  están en  $\{0, 1, \dots, n\}$  y  $\text{rank}(X_{(k)})$  es una función que devuelve la posición del estadístico de orden  $k$  en el vector aleatorio  $X$  o  $Y$  según sea el caso.

Y la frecuencia de la cópula empírica  $\widehat{c}_n$  esta dada por

$$\widehat{c}_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 1/n & \text{si } (X_{(i)}, Y_{(j)}) \text{ pertenece a la muestra,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.31)$$

Donde  $X_{(i)}$  y  $Y_{(j)}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  denotan los estadísticos de orden de la muestra.

Sin embargo la cópula empírica no es una cópula, ya que esta definida únicamente en una rejilla finita de puntos, no en el cuadrado unitario  $[0, 1]^2$ , pero por el teorema de Sklar  $C_n$  puede ser extendida a  $[0, 1]^2$ .

**Observación 1.4.16** En la Definición 1.4.15 definimos a la cópula empírica  $C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$  sólo para  $i, j$  en  $\{0, 1, \dots, n\}$  entonces podemos extender esta definición para  $u, v$  en  $\mathbb{I}$  de la siguiente manera

$$\widehat{C}_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}(\widehat{U}_i \leq u, \widehat{V}_i \leq v). \quad (1.32)$$

Una forma de suavizar la cópula empírica es por medio del polinomio de Bernstein, resultando la **cópula Bernstein** (Erdely y Díaz-Viera (2010)).

**Definición 1.4.17** *La cópula Bernstein se define de la siguiente manera:*

$$\tilde{C}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \hat{C}_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j}. \quad (1.33)$$

Para toda  $(u, v)$  en el cuadrado unitario  $[0, 1]^2$  y con  $\hat{C}_n$  definida como en (1.30).

## Construcción de cópulas a partir de otras

En una aplicación real es común que los datos con los que se trabaja tengan estructuras de dependencia muy complejas, por lo que es muy difícil que una sola familia de cópulas sea suficiente para modelar dichos datos, a continuación presentaremos algunas alternativas para este problema.

**Proposición 1.4.18** *Sean  $C_i$  cópulas y  $\alpha_i$  en  $\mathbb{I}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Entonces cualquier combinación lineal convexa de cópulas, también es cópula, es decir:*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$$

es cópula.

Siburg y Stoimenov (2008) propusieron una técnica conocida como *pegado de cópulas*, esta técnica propone, por ejemplo, que dadas dos cópulas bivariadas  $C_1, C_2$  y un valor fijo  $0 < \theta < 1$  podemos escalar  $C_1$  a  $[0, \theta] \times [0, 1]$ ,  $C_2$  a  $[\theta, 1] \times [0, 1]$  y pegarlas en una sola cópula. Gráficamente esto se muestra en la Figura 1.4.3.

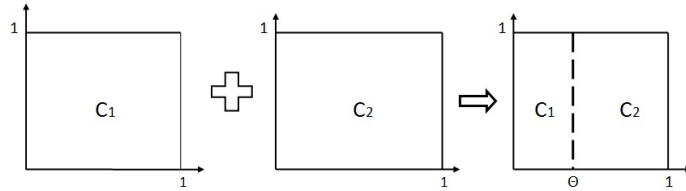


Figura 1.4.3: Pegado de cópulas

La siguiente proposición formaliza esta técnica para 2 cópulas, pero por medio de inducción es posible extenderla a  $n$  cópulas.

**Proposición 1.4.19** Sean  $C_1$  y  $C_2$  cópulas bivariadas y  $\theta$  cualquier parámetro en  $\mathbb{I}$ , entonces la función  $C_{1,2,\theta}(u, v)$  definida como:

$$C_{1,2,\theta}(u, v) = \begin{cases} \theta C_1\left(\frac{u}{\theta}, v\right), & 0 \leq u \leq \theta, \\ (1 - \theta)C_2\left(\frac{u-\theta}{1-\theta}, v\right) + \theta v, & \theta \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (1.34)$$

también es cópula.





## Capítulo 2

# Riesgo de Mortalidad

Las utilidades de cualquier empresa están sujetas a aspectos de diferente naturaleza, para incrementar estas utilidades lo que se busca es contar con la mayor información posible sobre dichos aspectos para poder anticiparse a ellos, pues es bien sabido que entre más información se tenga sobre algo, se está en mejor posición para tomar decisiones. A falta de información exacta se toman decisiones a partir de estimaciones hechas de diversas maneras.

Para las compañías que se dedican a los seguros de personas uno de estos aspectos es la mortalidad, sobre lo cual no se tiene un conocimiento exacto a futuro de su comportamiento, sin embargo, se puede aproximar a través de una adecuada estimación partiendo de la experiencia. Las compañías de seguros sujetas a este riesgo toman decisiones muy importantes basadas en las estimaciones que puedan hacer de este fenómeno, como las primas que deben cobrar por sus seguros, las reservas que deben constituir para hacer frente a las obligaciones contraídas, en qué y cuánto invertir, por lo que la sobre o sub-estimación de las tasas de mortalidad influyen directamente en los resultados de la compañía. Por ejemplo, en el caso de los seguros de vida, si se subestima la mortalidad se cobrará menos de prima y se reservará menos con lo que es probable que en algún momento la compañía no pueda afrontar las obligaciones generadas por este tipo de riesgo; por el contrario, si se sobrestiman las tasas de mortalidad, los pasivos incrementan convirtiéndose en un costo financiero innecesario y en pérdida de oportunidad en inversiones más eficientes. En el siguiente capítulo se presenta una propuesta para modelar la mortalidad por medio de cópulas, apegados al comportamiento que reflejan los datos, compararemos también los resultados con otras propuestas.

## 2.1. Tablas de Mortalidad

A lo largo de la historia ha sido constante la búsqueda de un método que mida la mortalidad, válido para cualquier población humana. La aplicación de una fórmula matemática explicativa del fenómeno de mortalidad fue a lo que los actuarios ingleses del siglo XIX llamaron *ley de mortalidad*. Hasta ahora, las leyes de mortalidad son expresiones que pretenden estimar el comportamiento de la mortalidad en función de la edad. La primera tabla de mortalidad fue publicada en 1662 por John Graunt en su trabajo “Observation upon the Bills of Mortality”, desafortunadamente no queda claro cómo calculó dicha tabla. En esa misma época algunos autores optaron por suponer una fuerza de mortalidad constante. La primera tabla construida de manera lógica, observando las muertes de una población de Polonia, fue desarrollada por Halley, publicada en 1693, para este estudio él consideró que la población permanecía constante. Posteriormente, autores como Moivre, Gompertz y Makeham presentaron propuestas más elaboradas:

- En 1775 Abraham de Moivre ajustó una fórmula a la tabla de mortalidad de Halley.
- En un célebre comunicado hecho en 1825 a la Royal Society of London for Improving Natural Knowledge (fundada en 1662), Benjamin Gompertz sugería que la sobrevivencia es la consecuencia de una resistencia cada vez más débil a la muerte conforme aumenta la edad, y que por tanto, la fuerza de mortalidad crece exponencialmente, con esto se deduce la siguiente expresión para la fuerza de mortalidad  $\mu_x$ , la cual hoy se conoce como *Ley de Gompertz*:

$$\mu_x = BC^x \quad x \geq 0, \quad B > 0, \quad C > 1. \quad (2.1)$$

- En 1860 William Makeham presentó una propuesta considerando el mismo razonamiento que Gompertz, pero añadiendo una constante arbitraria que representa la mortalidad accidental independiente de la edad (el azar), bajo estos supuestos la expresión para la fuerza de mortalidad conocida hoy como *Ley de Makeham* es la siguiente:

$$\mu_x = A + BC^x \quad x \geq 0, \quad B > 0, \quad C > 1, \quad A > -B. \quad (2.2)$$

Una ley científica es el enunciado de una relación constante entre fenómenos, es decir, un suceso que tenga lugar bajo circunstancias bien definidas tendrá siempre el mismo resultado, no importa por quién, o en qué lugar se lleve a cabo. Henri Poincaré (1858-1912) la define como “un vínculo constante entre un antecedente y un consecuente, entre el estado actual del mundo y su estado inmediatamente posterior”. Una ley científica permite tanto la explicación de un hecho o fenómeno como su predicción, por ejemplo, la ley de la gravedad de Newton expone que los cuerpos se atraen, además, predice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  separados una distancia  $r$  es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ( $F = Gm_1m_2/r^2$ ), esto nunca cambia. Podemos también identificar *leyes deterministas* y *leyes probabilísticas*, en las primeras, el consecuente quedará invariablemente **determinado de forma única**, sin opción a cambio en el resultado, mientras que en las leyes probabilísticas el consecuente esta compuesto por **varios resultados posibles**, pero la incertidumbre es medible.

Las “leyes” enunciadas anteriormente no cumplen con la definición de ley científica, Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt (1997) dicen:

Utilizando argumentos biológicos, algunos autores han **sugerido** que la supervivencia humana puede ser explicada con leyes simples como las de física.

Las leyes científicas no se sugieren, no están expuestas a la aprobación o no de las personas, simplemente existen. El mismo autor menciona que:

El interés en buscar funciones analíticas simples de supervivencia ha declinado en años recientes. Muchos piensan que la creencia en leyes universales de mortalidad es ingenua...

Aunque la expresión *ley de mortalidad* se sigue utilizando en la literatura actuarial el concepto es muy cuestionado, ya que no es razonable representar de forma determinista un fenómeno tan complejo como la mortalidad. A lo que podemos aspirar, es a una predicción del fenómeno a través de modelos estadísticos con cierto control de la incertidumbre. Gerber (1997) expone:

En el pasado se han hecho esfuerzos para deducir expresiones analíticas universales para la función de supervivencia a partir de ciertos postulados básicos, en analogía con las leyes de física. Estos esfuerzos, desde un punto de vista del siglo XX, resultan ahora **ingenuos** y rodeados de cierto misticismo.

Las leyes de Gompertz y Makeham tuvieron mucho éxito por la facilidad en los cálculos pero hoy en día se cuenta con herramientas computacionales muy poderosas que dan lugar a cálculos complejos y manejo de grandes bases de datos para llevar a cabo los análisis necesarios para un ajuste adecuado de los datos.

## 2.2. Modelando el pasivo

Para modelar la mortalidad usaremos la tabla de experiencia mexicana, publicada en el año 2000 por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas. Dicha información contiene las cantidades de expuestos y muertos por edad. (Veáse Apéndice A).

En la figura 2.2.1 se muestra la distribución en edades para los 6,678,983 expuestos, observemos que la mayoría de la muestra esta concentrada entre las edades 20 y 65.

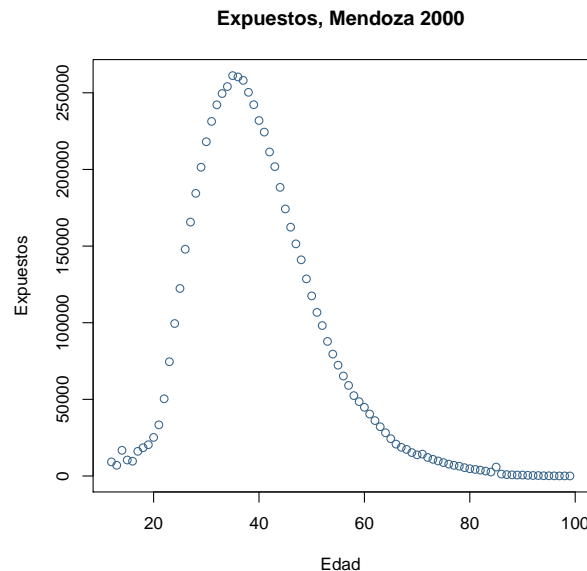


Figura 2.2.1: Distribución de expuestos por edad.

A partir de estos datos obtenemos las tasas observadas de mortalidad de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x} \quad (2.3)$$

donde  $D_x$  representa el número de muertos en edad  $x$  y  $E_x$  el número de expuestos también a edad  $x$ . A partir de las observaciones  $\hat{q}_x$  estimaremos el modelo adecuado para modelar la mortalidad; en la figura 2.2.2 se muestra la gráfica de la edad versus las tasas observadas de mortalidad.

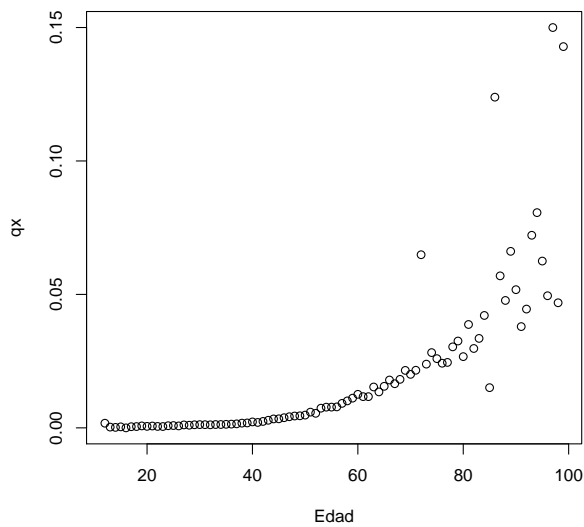


Figura 2.2.2: Tasas observadas de mortalidad.

Estos datos muestran que no necesariamente en las edades más jóvenes existe una tasa menor de mortalidad, pues hay un pequeño descenso en la tendencia de la tasa en las edades más jóvenes, así como tampoco edades más grandes implican tasas de mortalidad mayores como sugieren las “leyes” de Gompertz o Makeham. A continuación expondremos los resultados con dos modelos muy populares y finalmente daremos nuestra propuesta.

### Modelo: regresión logística.

En Mendoza, Madrigal y Gutiérrez-Peña (2000) se propone suavizar los datos haciendo una *transformación logit* a las tasas observadas de mortalidad, dicha transformación se muestra en la ecuación 2.4:

$$w_x = \log \left( \frac{\hat{q}_x}{1 - \hat{q}_x} \right) \quad (2.4)$$

Se aplicará la transformación a todas las tasas de mortalidad observadas menos al registro correspondiente a la edad 16 ya que  $\hat{q}_{16}$  es cero. En la Figura 2.2.3 se muestra la gráfica de los datos transformados. A estos datos ajustaremos un modelo de regresión lineal simple (Observación 1.3.13) de la forma:

$$w_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad (2.5)$$

donde  $x_i$  representa la edad,  $w_i$  las transformaciones logit a las tasas de mortalidad,  $\beta_0, \beta_1$  son los parámetros a estimar y  $\varepsilon_i$  son v.a.i.i.d (variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas) que representan los errores que tendrá el modelo respecto de los datos reales. El modelo de regresión lineal hace supuestos muy importantes sobre  $\varepsilon_i$ , supone que siguen una distribución Normal con media 0 y varianza constante  $\sigma^2$ . Estos supuestos se utilizan para desarrollar pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para los parámetros estimados, por este motivo es de suma importancia validarlos.

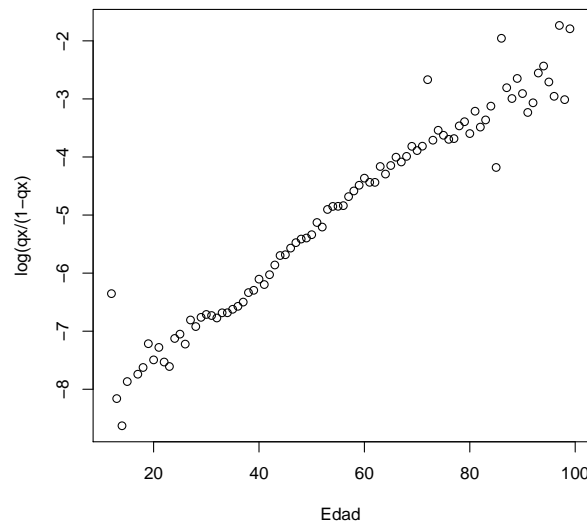


Figura 2.2.3: Transformación logit a las tasas de mortalidad.

La forma que resulta de  $q_x$  después de la transformación logit y con el ajuste por regresión lineal es el que muestra la ecuación 2.6.

$$q_x = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 - \exp(\beta_0 + \beta_1 x)} \quad (2.6)$$

Llevando a cabo los cálculos pertinentes con el paquete estadístico R Development Core Team (2012) se obtienen los resultados que muestra la Tabla 2.2.1.

Tabla 2.2.1: Resultados modelo de regresión logística.

Valor	Resultado
$\beta_0$	-8.71578
$\beta_1$	0.06691
P-value para $H_0 : \beta_0 = 0$	$2 \times 10^{-16}$
P-value para $H_0 : \beta_1 = 0$	$2 \times 10^{-16}$
$R^2$	0.9548

Tenemos que el coeficiente de determinación  $R^2$ , que indica qué tan explicativo es nuestro modelo, es alto; es posible también rechazar las pruebas de hipótesis para determinar si los parámetros son poco significativos ( $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ), con p-values bajos. La Figura 2.2.4 muestra el ajuste con bandas de confianza al 95

Como ya se mencionó es necesario validar los supuestos del modelo de regresión sobre la distribución de los errores para que el modelo sea consistente. A continuación los resultados de la validación.

- Para el supuesto de normalidad se utilizó la prueba de hipótesis de Shapiro-Wilk, cuya hipótesis nula  $H_0$  es que los datos analizados se distribuyen como una Normal, para mayor detalle consúltese Royston (1982); el p-value de esta prueba para  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{87}$  fue de  $6.57 \times 10^{-7}$  rechazando así que los errores del modelo se distribuyen como una Normal, gráficamente esto está representado en la Figura 2.2.5 donde se muestra el histograma de los errores que resultan de la estimación y la gráfica de una distribución normal con la media y varianza muestral.
- A simple vista la Figura 2.2.6 muestra que los datos no tienen la misma dispersión en todo el intervalo  $[0, 1]$ , por lo tanto la varianza de los errores no es constante, para formalizar este resultado separamos los



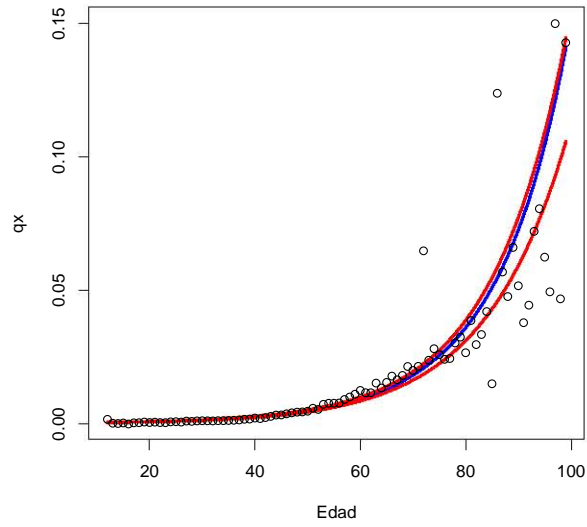
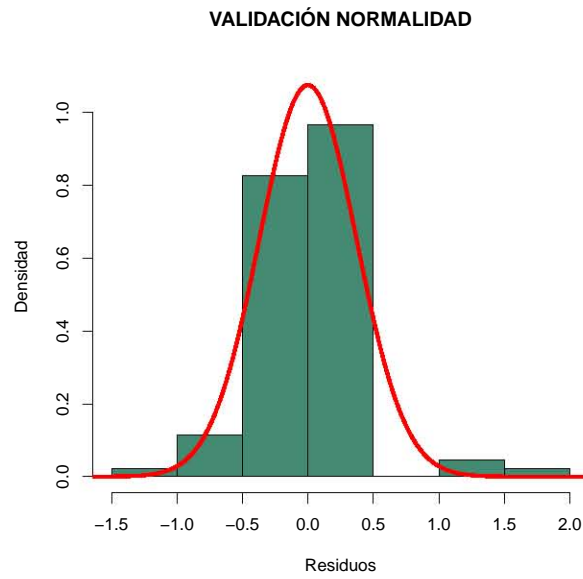
Figura 2.2.4: Ajuste con regresión logística a  $\hat{q}_x$ .

Figura 2.2.5: Histograma de los errores del ajuste por regresión logística.

errores del modelo correspondientes a las edades  $\{12 \dots 29\} \cup \{76 \dots 99\}$  y  $\{30 \dots 75\}$ , después se utilizó la prueba *t-Student* para contrastar las varianzas  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  correspondientes a cada submuestra. Los resultados se presentan en la Tabla 2.2.2.

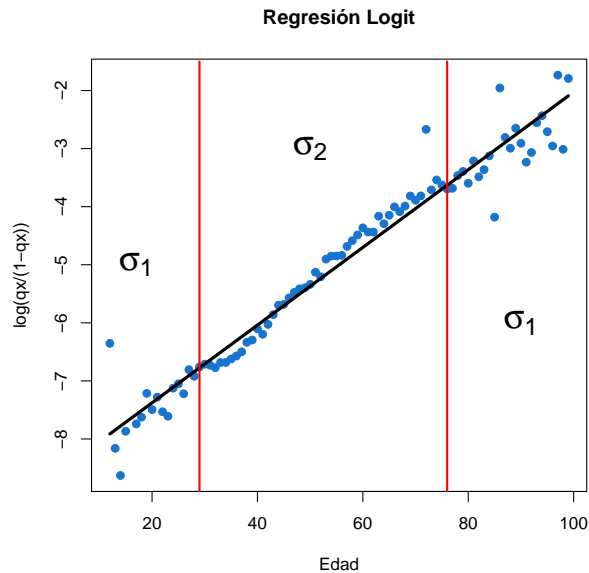


Figura 2.2.6: ¿Varianza Constante?

Tabla 2.2.2: Prueba t-student para la varianza de  $\varepsilon_i$

$H_0$	p-value
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	0.002155
$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	0.9989
$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	0.001078

Al no cumplirse los supuestos sobre los errores, el modelo de regresión logística carece, en este caso, de sustento estadístico.

### Modelo: ley de Makeham.

Haremos ahora el ajuste con un modelo muy conocido y usado: la ley de Makeham.

La probabilidad de que una persona que ha cumplido la edad  $x$  llegue con vida a la edad  $x + 1$  se denota como  $p_x$ , este valor es el complemento de la probabilidad de que una persona muera en edad  $x$ , es decir:

$$q_x = 1 - p_x. \quad (2.7)$$

En términos de la fuerza de mortalidad  $p_x$  se obtiene como:

$$p_x = \exp \left[ - \int_0^1 \mu_{x+t} dx \right] \quad (2.8)$$

Sustituyendo la expresión de la “Ley de Makeham” 2.2 en 2.8 y desarrollando tenemos que:

$$\begin{aligned} p_x &= \exp \left[ - \int_0^1 A + BC^x dx \right] \\ &= \exp(-A) \exp \left( \frac{-B}{\log C} (C-1) C^x \right) \\ &= \exp \left[ -A - \frac{B(C-1)}{\log C} C^x \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En donde los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$  deben calcularse de acuerdo a las tasas crudas de mortalidad con las que se cuente. Calculando logaritmos de ambos lados de la ecuación 2.9 tenemos que:

$$A + \frac{B(C-1)}{\log C} C^x + \log p_x = 0. \quad (2.10)$$

Lo anterior implica resolver un sistema de ecuaciones, pero por lo general este sistema tendrá más ecuaciones que incógnitas, al ser mayor el número de observaciones para  $p_x$  con los que se cuenta que los 3 valores que debemos estimar, lo cual prácticamente garantiza que no tendrá solución, pero es posible resolver esto como un problema de optimización con restricciones ya que la ecuación 2.10 es equivalente a:

$$\left[ A + \frac{B(C-1)}{\log C} C^x + \log p_x \right]^2 = 0. \quad (2.11)$$

Resultando el siguiente problema de minimización con la función objetivo:

$$\phi(A, B, C) := \sum_x \left[ A + \frac{B(C-1)}{\log C} C^x + \log p_x \right]^2, \quad (2.12)$$

sujeto a:  $C > 1$ ,  $B > 0$  y  $A \geq -B$ , donde la suma en 2.12 es sólo sobre los valores de  $x$ , de los cuales se tenga la estimación  $\hat{p}_x$ . Denotando la estimación de los parámetros como  $\hat{C}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{A}$ , la probabilidad de supervivencia suavizada, para cualquier edad  $x$ , se obtiene mediante

$$\tilde{p}_x = \exp \left[ -\hat{A} - \frac{\hat{B}(\hat{C}-1)}{\log \hat{C}} \hat{C}^x \right]. \quad (2.13)$$

En Erdely (2009) se sugieren los valores iniciales  $A_{inicial} = 0.00027679$ ,  $B_{inicial} = 0.00001246$ ,  $C_{inicial} = 1.09667$  para resolver el problema de optimización a través de iteraciones utilizando algún software. Resolviendo el problema de optimización descrito en 2.12 obtenemos los siguientes valores para los parámetros  $A, B, C$ :

Tabla 2.2.3: Valores para los parámetros  $A, B, C$ .

$\hat{A}$	$-3.5821 \times 10^{-4}$
$\hat{B}$	$3.5821 \times 10^{-4}$
$\hat{C}$	1.0589

Con esto estimamos los  $p_x$  para cada  $x$  y posteriormente, con (2.7) estimamos la probabilidad de muerte para cada edad  $x$ . En la Figura 2.2.7 se muestra dicha estimación comparadas con las tasas observadas de mortalidad.

Este ajuste no reconoce que existe una tasa más grande de mortalidad en la edad más joven y sobre-estima las probabilidades en la edad más avanzadas, que como ya explicamos representa pérdida para las compañías aseguradoras; tampoco podemos dar un intervalo para las estimaciones.

## Modelo para las tasas de mortalidad vía cópulas.

En las secciones anteriores se hizo el ajuste para los datos de mortalidad con dos modelos muy conocidos, a continuación se presenta una propuesta por medio de las funciones cópulas. Todos los cálculos se harán con ayuda del paquete R Development Core Team (2012).

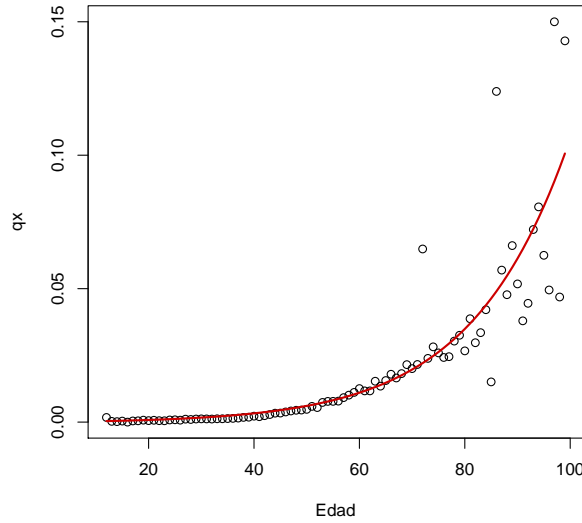


Figura 2.2.7: Ajuste con Ley de Makeham.

Verificaremos primero que los datos con los que estamos trabajando sean dependientes, esto lo haremos a través de una prueba de independencia basada en la cópula empírica, disponible en la librería “copula” Genest y Rémiillard (2004), en dicha prueba la hipótesis nula es que los datos son independientes. El p-value que arroja esta prueba aplicada a los datos de mortalidad ( $Edad, \hat{q}_x$ ) es de  $4.995 \times 10^{-4}$ , con lo que descartamos la independencia de los datos.

Aplicamos también la prueba de Genest para determinar si la cópula asociada a los datos cumplen con la Definición 1.2.6, aquí, la hipótesis nula es que la cópula asociada a los datos a los que se aplica es simétrica. Al igual que la prueba de independencia, esta prueba hace uso de la cópula empírica (para mayor detalle consúltese Genest y otros (2011)). El resultado para dicha prueba aplicada a la muestra no nos permite descartar que la cópula sea simétrica con un p-value de 0.28 por lo que podemos ajustar una cópula simétrica.

Como ya mencionamos las pseudo-observaciones son de gran ayuda cuando se quiere ajustar un modelo a algunos datos, al revelar características del comportamiento de los mismos, por lo que continuaremos nuestro análisis

obteniendo y graficando las pseudo-observaciones de la cópula para los datos de mortalidad, las cuales se muestran en la Figura 2.2.8.

Como podemos observar los datos son mas dispersos en los extremos, las observaciones de la cópula Clayton, Figura 1.4.2, reproducen este comportamiento pero sólo para un extremo por lo que el ajuste con este modelo no sería muy favorable.

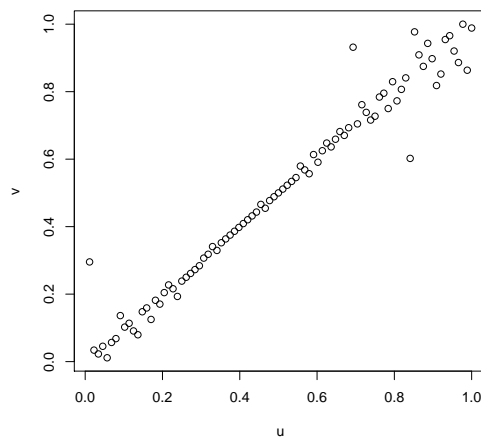


Figura 2.2.8: Pseudo-observaciones de la cópula. Mortalidad.

Una vez que hemos descartado la posibilidad de independencia, que no pudimos descartar la simetría de la cópula asociada a los datos y con una idea visual de la misma, podemos comenzar con el análisis para ajustar un modelo. Utilizaremos la prueba de bondad de ajuste disponible en la librería *copula*, más detalles de esta prueba en Hofert y Mächler (2011).

La Tabla 2.2.4 muestra los resultados de las pruebas de bondad de ajuste para algunas cópulas. El mayor p-value lo obtiene la cópula Plackett con parámetro 1057.185.

La Figura 2.2.9 muestra la gráfica de las pseudo-observaciones de los datos reales y una simulación condicional con la cópula que arrojó el mayor p-value en la prueba de bondad de ajuste. Observemos que la cópula Plackett no está reflejando la variabilidad de los extremos de nuestros datos, característica que nos interesa quede reflejada en el modelo que decidamos tomar, por lo que recurriremos a otras alternativas.

Tabla 2.2.4: Bondad de ajuste: datos de mortalidad.

Cópula	Parámetro	P-value
Normal	0.956	0.0004995
Gumbel	5.919	0.0004995
Clayton	9.378	0.0004995
Plackett	1057.185	0.2083
Galambos	5.151	0.0004995
Frank	45.776	0.07243
Husler Reiss	4.286	0.0004995
t	0.986	0.0004995
Joe	6.384	0.0004995

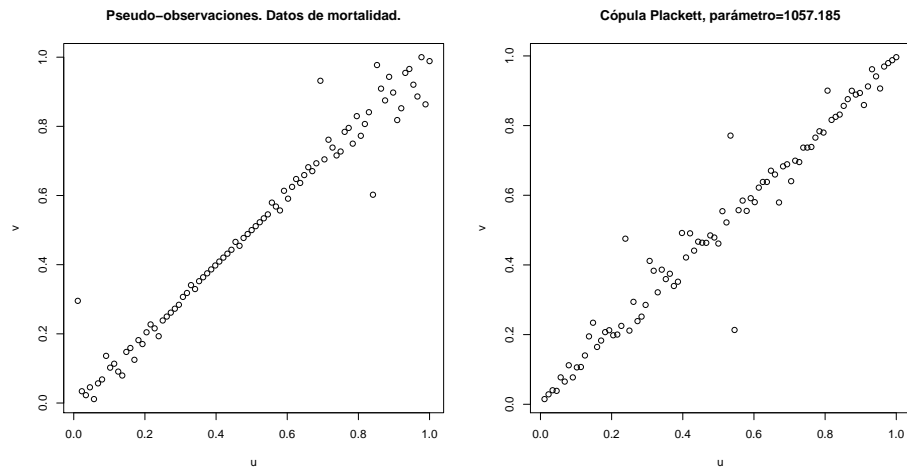


Figura 2.2.9: Comparativo cópula Plackett.

Dado que existe dispersión en ambos extremos de las pseudo-observaciones recurriremos a la técnica de *pegado de cópulas* de acuerdo a la Proposición 1.4.19 para modelar estas dispersiones por separado y luego unir las en una sola cópula. Obtendremos dos submuestras de los datos, cada una con la mitad de la muestra, para estimar dos cópula  $C_1$ ,  $C_2$ , de acuerdo a la Figura 2.2.10; por lo que el valor de  $\theta$  en la expresión (1.34) será de  $1/2$ .

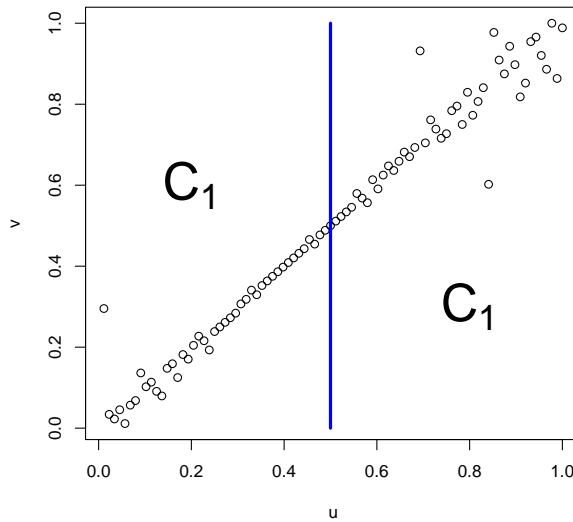


Figura 2.2.10: División de los datos.

Los modelos que resultan del análisis de bondad de ajuste para la primera parte de las pseudo-observaciones no reproducen la dispersión que estas tienen al principio.

Recordemos que las pseudo-observaciones se construyen a partir de  $F(x)$ ,  $G(y)$  donde, en este caso,  $x$  es la variable edad y  $y$  la variable  $\hat{q}_x$ , recordemos también que  $F(x)$ ,  $G(y)$  son transformaciones monótonas crecientes a las variables  $x, y$ , entonces, por el Teorema 1.3.7  $C_{X,Y} = C_{F(X),G(Y)}$ .

Para la primera mitad de los datos utilizaremos  $(F(x), G(y))$  para estimar la cópula; observando el comportamiento de la primera mitad de los datos existe parecido con las observaciones de una cópula Clayton, Figura 1.4.2, pero invertida, por lo que aplicamos una transformáramos a las pseudo-observaciones de la primera mitad de los datos de la siguiente forma:



$$u_1 = 1 - u, \quad v_1 = 1 - v. \quad (2.14)$$

Dicha transformación se muestra en la Figura 2.2.11.

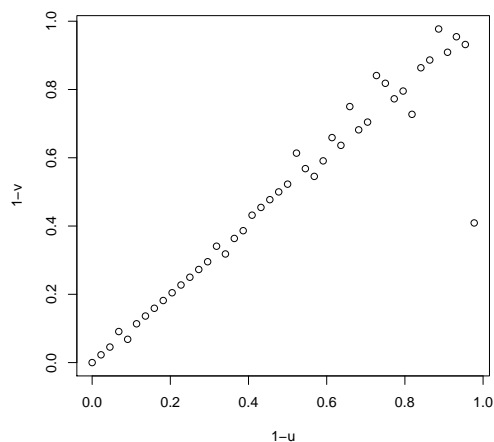


Figura 2.2.11: Transformación a la primera parte de las pseudo-observaciones.

Aplicaremos pruebas de bondad de ajuste a los datos  $(u_1, v_1)$  para obtener el modelo adecuado. Los resultados de estas pruebas se muestran en la Tabla 2.2.5.

Tabla 2.2.5: Bondad de ajuste: Transformación primera parte de las pseudo-observaciones de los datos de mortalidad.

<b>Cópula</b>	<b>Parámetro</b>	<b>P-value</b>
Normal	0.93	0.0004995
Gumbel	5.15	0.002498
Clayton	19.262	0.9361
Galambos	4.799	0.002498
Frank	34.88	0.7252
Husler Reiss	2.90	0.0004995
Joe	5.527	0.0004995

Como ya se había anticipado el modelo más adecuado es la cópula Clayton con parámetro 19.262. La Figura 2.2.12 muestra la transformación de

las pseudo-observaciones y una simulación condicional mediante la cópula Clayton con el parámetro mencionado.

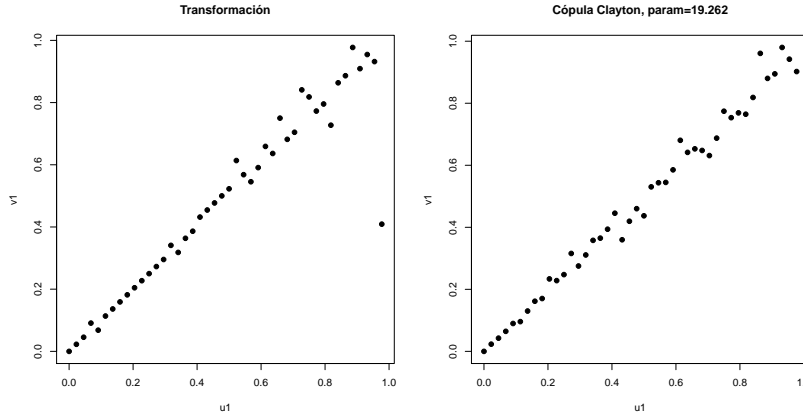


Figura 2.2.12: Transformación  $u_1, v_1$  vs cópula Clayton

Notemos que para regresar a las pseudo-observaciones debemos hacer la siguiente operación:

$$u = 1 - u_1, \quad v = 1 - v_1; \quad (2.15)$$

Dicha operación es una transformación monótona decreciente sobre  $u_1, v_1$ , que son las variables de las cuales hemos estimado la cópula. Por el Teorema 1.3.8 es posible conocer la cópula para  $u, v$  a partir de  $C_{u_1, v_1}$  mediante la ecuación (1.13):

$$C_1(u, v) = u + v - 1 + C_{u_1, v_1}(1 - u, 1 - v) \quad (2.16)$$

Aplicamos ahora pruebas de bondad de ajuste para la segunda mitad de los datos, los resultados se muestran en la Tabla 2.2.6.

Nuevamente el p-value más alto lo obtiene una cópula Clayton, pero ahora con parámetro 8.043, en la Figura 2.2.13 se muestra una comparación de las pseudo-observaciones de la segunda parte de los datos contra las observaciones de una cópula Clayton con el parámetro mencionado, este será el modelo que utilizaremos para esta parte de los datos y lo denotaremos como  $C_2$ .

Tabla 2.2.6: Bondad de ajuste: Segunda mitad de los datos de mortalidad.

Cópula	Parámetro	P-value
Normal	0.911	0.02048
Gumbel	3.458	0.002498
Clayton	8.043	0.9026
Galambos	2.686	0.001499
Frank	16.401	0.3811
Husler Reiss	2.87	0.0004995
t	0.947	0.3911
Joe	3.555	0.0004995

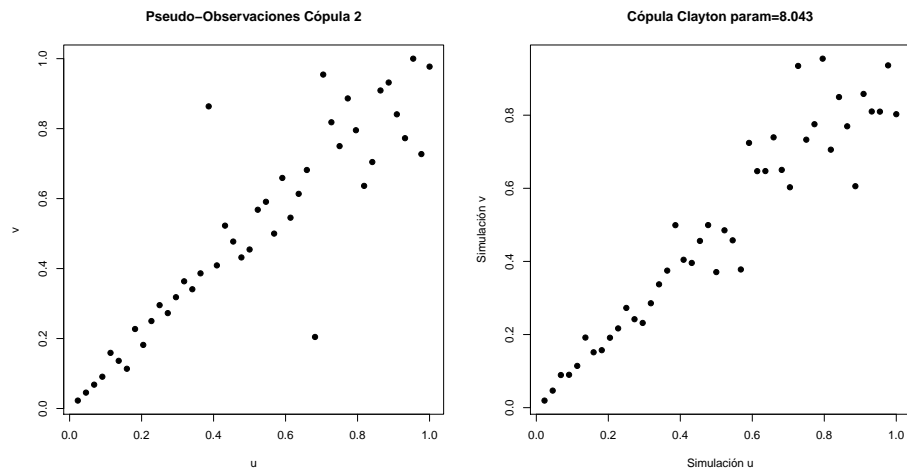


Figura 2.2.13: Pseudo-observaciones de la segunda mitad de datos contra cópula Clayton.

Con las dos cópulas conocidas y desarrollando la expresión (1.34) llegamos a la cópula para los datos de mortalidad, la cual tendrá la forma descrita en la ecuación (2.17).

$$C_{Mortalidad}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2} [2u + v - 1 + C_{u_1, v_1}(1 - 2u, v)], & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} C_2(2u - 1, v) + \frac{1}{2} v, & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Donde  $\theta = 1/2$  como ya se había mencionado y  $C_{u_1, v_1}$ ,  $C_2$  las cópulas Clayton que estimamos.

Mediante esta cópula simularemos las tasas de mortalidad dada la edad, de acuerdo al Procedimiento 1.3.11 debemos calcular  $F_{Y|X}(y|x)$ , que de acuerdo a la expresión 1.17 corresponde a:

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \right|_{u=F(x), v=G(y)}$$

Nótese que al derivar con respecto de  $u$  la cópula descrita en la expresión 1.34 obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial u} C_{1,2,\theta}(u, v) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} C_1\left(\frac{u}{\theta}, v\right), & 0 \leq u \leq \theta, \\ \frac{\partial}{\partial u} C_2\left(\frac{u-\theta}{1-\theta}, v\right), & \theta \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial u} C_{Mortalidad}(u, v) = \begin{cases} 1 - \frac{\partial}{\partial u} C_{u_1, v_1}(2u, v), & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial u} C_2(2u - 1, v), & \frac{1}{2} \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

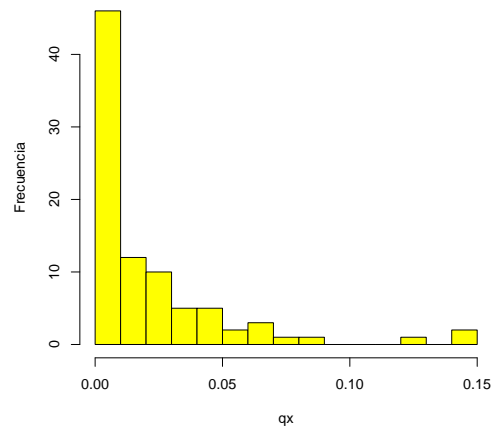
Además de las simulaciones, los resultados anteriores son necesarios para obtener intervalos de probabilidad para nuestra estimación. Continuaremos con las marginales.

La marginal de la edad no presenta mayor complicación pues es posible simularla mediante una variable *Uniforme*(11.5, 99.5). Para el ajuste de las tasas de mortalidad nos apoyaremos del histograma de las  $\hat{q}_x$ , el cual se muestra en la Figura 2.2.14. La Tabla 2.2.7 contiene algunos datos descriptivos que nos ayudarán para determinar el mejor ajuste para  $\tilde{q}_x$ .

Es claro que las tasas de mortalidad sólo pueden tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$ ; podemos deducir también que los datos no son simétricos ya

Tabla 2.2.7: Estadística descriptiva  $\hat{q}_x$ .

Tamaño de muestra	88
Media	0.02053
$\sigma$	0.02979
Min	0
Max	0.15
1 <sup>er</sup> Cuartil	0.00127
Mediana	0.00782
3 <sup>er</sup> Cuartil	0.02782

Figura 2.2.14: Histograma de  $\hat{q}_x$ .

que son muy diferentes el 1<sup>er</sup> y 3<sup>er</sup> cuartil. Se hicieron pruebas de bondad de ajuste con la prueba Anderson-Darling (para mayor detalle consúltese Marsaglia y Marsaglia (2004)) a algunos modelos como por ejemplo la distribución Gamma, Beta y Beta Generalizada. En la Tabla 2.2.8 se muestran los resultados.

Tabla 2.2.8: Pruebas de bondad de ajuste para la distribución de  $\hat{q}_x$ .

Distribución	Parámetros	p-value
Gamma	forma=0.2, escala=7	$6.18 \times 10^{-6}$
Beta	forma1=1, forma2=13)	$6.818 \times 10^{-6}$
Beta Generalizada	forma=(0.9,0.3, 2), rate=1, escala=1	$1.078 \times 10^{-6}$

No fue posible ajustar ningún modelos paramétrico, por lo que usaremos el ajuste no paramétrico a través de la función de distribución empírica (Definición 1.4.11) y el suavizamiento con polinomios de Bernstein mediante el Procedimiento 1.4.14 para obtener una función continua (Figura 2.2.15).

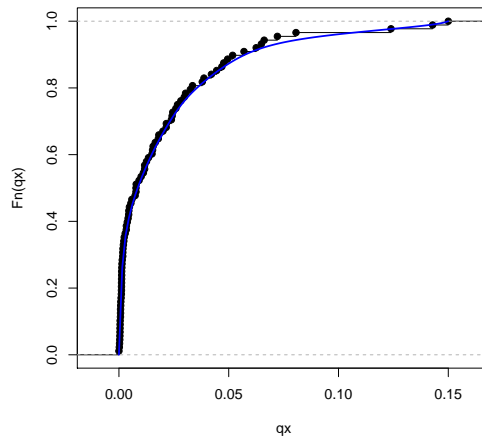


Figura 2.2.15: Función de distribución de  $q_x$ .

Finalmente obtenemos el modelo para simular la mortalidad para más adelante estimar las reclamaciones que tendremos. En la Figura 2.2.16 se muestra el intervalo de probabilidad  $\alpha = 0.95$  para las tasas de mortalidad con el modelo que hemos estimado. En la Figura 2.2.17 se muestran las tasas observadas de mortalidad y 5 simulaciones.

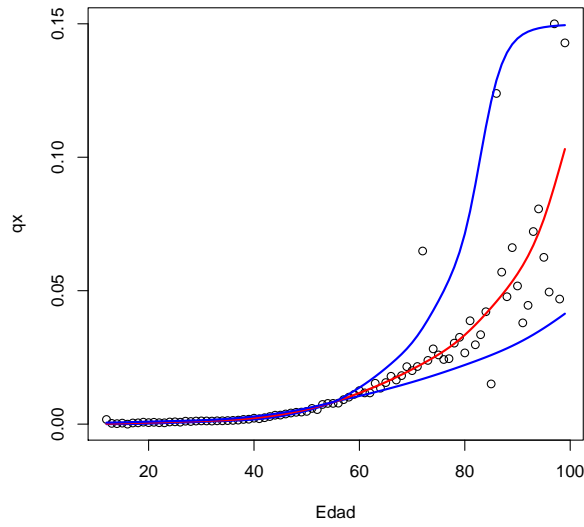


Figura 2.2.16: Intervalo de probabilidad  $\alpha = 0.95$  para  $\hat{q}_x$ .

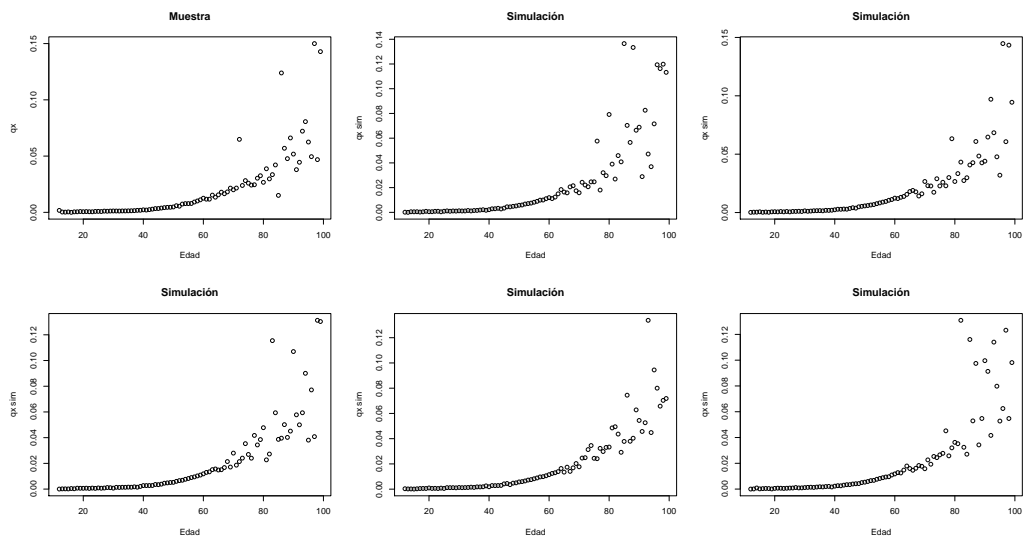


Figura 2.2.17: Simulaciones de  $q_x$ .

# Capítulo 3

## Riesgo de Mercado

Actualmente el mercado ofrece una gran variedad de instrumentos de inversión: con mucho o poco riesgo, con plazos cortos, medianos y largos, etc. Dependiendo de las características de cada instrumento se determina el rendimiento del mismo; generalmente a mayor riesgo, mayor rendimiento esperado y viceversa, sin embargo no todos los inversionistas están dispuestos a correr el mismo riesgo, de ahí que exista tanta variedad.

Las compañías de seguros, al tener compromisos a corto, mediano y largo plazo pueden diversificar sus inversiones tanto en el plazo como en el riesgo, aunque la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas tiene muy regulado este aspecto a fin de garantizar que puedan cumplir con las obligaciones adquiridas. Para el presente trabajo utilizaremos como instrumento de inversión a los CETES, a continuación describiremos brevemente qué son y propondremos un modelo vía cópula.

### 3.1. CETES

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) son el instrumento de deuda más antiguo emitido por el Gobierno Federal. Se emitieron por primera vez en 1978. Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal que es de 10 pesos), no pagan intereses en su periodo de vigencia y pagan su valor nominal en la fecha de su vencimiento. En cuanto al plazo, se pueden emitir en cualquier periodo de vigencia, siempre y cuando su fecha de vencimiento coincida con un jueves o la fecha que sustituya a este en caso de que fuera



inhábil. Los plazos más comunes son de 28, 91 y 182 días. Para este trabajo usaremos CETES con plazo 28 y 182 días. La manera de determinar el valor de dichos instrumentos es a través de la colocación primaria, en subastas, en las cuales el Banco de México oferta estos títulos, los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y la tasa de rendimiento que desean obtener, resultando ganadores quienes hayan postulado la tasa más baja. Las reglas para participar en dicha subasta las emite el Banco de México y están dirigidas a las instituciones de crédito, casas de bolsa, sociedades de inversión, aseguradoras, sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro y a la Financiera Rural. El precio de un CETE a partir de su tasa de rendimiento anual se calcula con la siguiente fórmula:

$$P = \frac{VN}{\left(1 + \frac{r \times t}{360}\right)} \quad (3.1)$$

donde:

$P$ =Precio del CETE.

$VN$ =Valor nominal del título en pesos.

$r$ =Tasa de rendimiento nominal anual.

$t$ =Plazo en días del CETE.

Muchos instrumentos de inversión tienen periodos de capitalización o reinversión a lo largo del año, a estos periodos se les conoce como *base*, por ejemplo un instrumento que vence semestralmente tiene base 2 ( $364/182 = 2$ ), como los CETES a plazo 182 días. La tasa de rendimiento se expresa siempre de forma anual y es posible que los instrumentos se comercialicen antes de su vencimiento, en el mercado secundario, por lo que es necesario conocer cuál es la tasa equivalente a otro periodo de vencimiento para determinar el precio del instrumento. Para obtener dicha tasa equivalente se utiliza la siguiente fórmula:

$$\left(1 + \frac{r_1}{b_1}\right)^{b_1} = \left(1 + \frac{r_2}{b_2}\right)^{b_2} \quad (3.2)$$

donde:

$r_{1,2}$ =Tasas de rendimiento.

$b_{1,2}$ =Base correspondiente.

En ocasiones el periodo de vencimiento deseado se encuentra entre dos periodos de instrumentos convencionales, con rendimientos conocidos. En este caso resulta muy arbitrario determinar con qué tasas de rendimiento calcular la tasa equivalente. Para resolver este problema existen muchos métodos de interpolación entre dos nodos, tasa-periodo de vencimiento conocidos. A continuación presentaremos uno de estos métodos.

**Método 3.1.1** *Para obtener la tasa de rendimiento  $r_P$  a un plazo  $P$ , comprendido entre un plazo corto y un plazo largo ( $P_C$ ,  $P_L$ ) con tasas de rendimiento conocidas  $r_{P_C}$  y  $r_{P_L}$  respectivamente, mediante el **método de interpolación de la alambrada** se deben realizar los siguientes cálculos:*

- *Se estima la tasa de interés forward para el plazo de  $P_L - P_C$  días mediante la siguiente fórmula:*

$$r_{P_L - P_C} = \left[ \frac{1 + r_{P_L} \frac{P_L}{360}}{1 + r_{P_C} \frac{P_C}{360}} - 1 \right] \times \frac{360}{P - P_C}. \quad (3.3)$$

- *Con la tasa obtenida en el punto anterior se calcula la tasa para el plazo  $P - P_C$ :*

$$r_{P - P_C} = \left[ \left( 1 + r_{P_L - P_C} \frac{P_L - P_C}{360} \right)^{\frac{P - P_C}{P_L - P_C}} - 1 \right] \times \frac{360}{P - P_C}. \quad (3.4)$$

- *Ahora la tasa obtenida en el punto anterior se compone con la tasa  $r_{P_C}$  para obtener finalmente la tasa para el plazo  $P$ :*

$$r_P = \left[ \left( 1 + r_{P_C} \frac{P_C}{360} \right) \times \left( 1 + r_{P - P_C} \frac{P - P_C}{360} \right) \right] \times \frac{360}{P}. \quad (3.5)$$

Es posible reducir el método anterior a una sola ecuación:

$$r_P = \left\{ \left[ \left( 1 + r_{P_L} \frac{P_L}{360} \right)^{\frac{P - P_C}{360}} \times \left( 1 + r_{P_C} \frac{P_C}{360} \right)^{\frac{P_L - P}{360}} \right]^{\frac{360}{P_L - P_C}} - 1 \right\} \times \frac{360}{P}. \quad (3.6)$$

## 3.2. Modelando el activo

En el presente trabajo se usarán los datos históricos de las tasas de rendimiento para los CETES 28 y 182 días en el periodo comprendido del 02/07/2009 al 28/06/2012, disponibles en la página del Banco de México: [www.banxico.org.mx](http://www.banxico.org.mx). Estos datos son semanales, corresponde a 3 años completos y conforman una muestra de tamaño 157 (Figura 3.2.1).

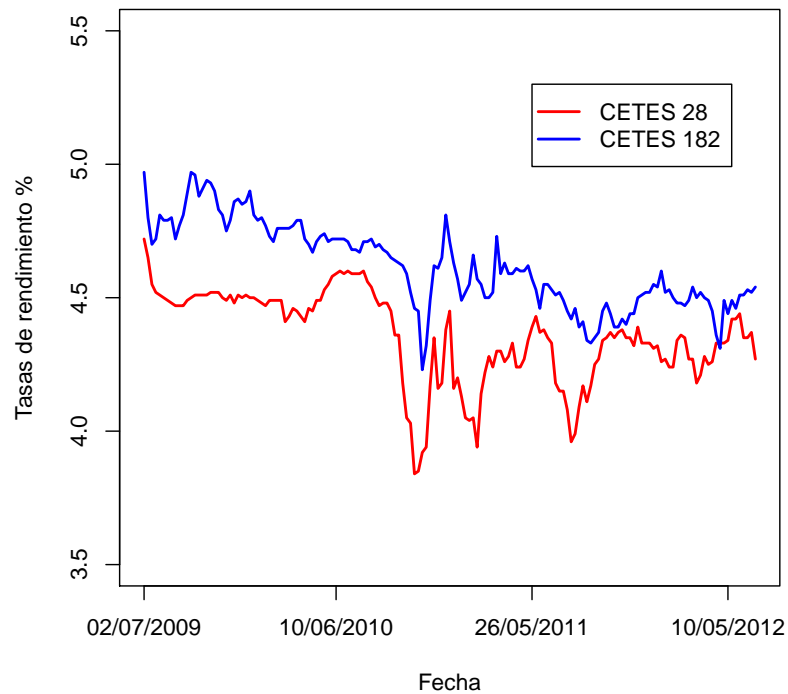


Figura 3.2.1: Datos históricos, rendimiento CETES.

Para calcular los incrementos que hay en cada semana en las tasas de rendimiento utilizaremos la fórmula:

$$\text{incremento}_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad (3.7)$$

Donde  $r_i$  es la tasa de rendimiento del CETE para  $i = 1, \dots, 156$ .

### Modelo: Normal Multivariada.

En la actualidad existe una gran variedad de métodos para predecir el comportamiento de los instrumentos de inversión que conforman un portafolio, entre estos podemos mencionar el método de Varianza-Covarianza, el cual supone una distribución sobre los rendimientos, lo más común es que esta distribución sea una Normal Multivariada con lo que únicamente resta estimar los parámetros de dicha distribución. A continuación presentaremos los resultados de este método aplicado al logaritmo de los incrementos de las tasas de rendimiento de los CETES con plazo 28 y 182 días.

Utilizando el paquete R Development Core Team (2012) estimamos la matriz de varianza-covarianza y el vector de medias:

- Vector de Medias:  $(-6.42 \times 10^{-4}, 5.80 \times 10^{-4})$ .
- Matriz de varianza-covarianza:

$$= \begin{pmatrix} 2.38 \times 10^{-4} & 5.58 \times 10^{-5} \\ 5.58 \times 10^{-5} & 1.56 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

La Figura 3.2.2 muestra los log-incrementos de las tasas de rendimiento reales y cinco simulaciones con el modelo estimados anteriormente, como podemos ver, dichas simulaciones no reflejan la variabilidad en los extremos de los datos reales.

Este modelo asume que las marginales se distribuyen como una normal, por lo que a continuación aplicaremos la prueba de hipótesis de Shapiro para cada marginal, los resultados se muestran en la Tabla 3.2.1

Tabla 3.2.1: Prueba Shapiro a los log-incrementos.

$H_0$ :Distribución Normal	P-value
CETES 28	$1.91 \times 10^{-9}$
CETES 182	$2.86 \times 10^{-6}$

Es posible rechazar las hipótesis de normalidad sobre las marginales, estos resultados son un argumento más para cuestionar este modelo. Como ya se mencionó el suponer normalidad facilita mucho los cálculos pero no es viable en cuanto a las decisiones tan importantes que deben tomarse basados en estas estimaciones.

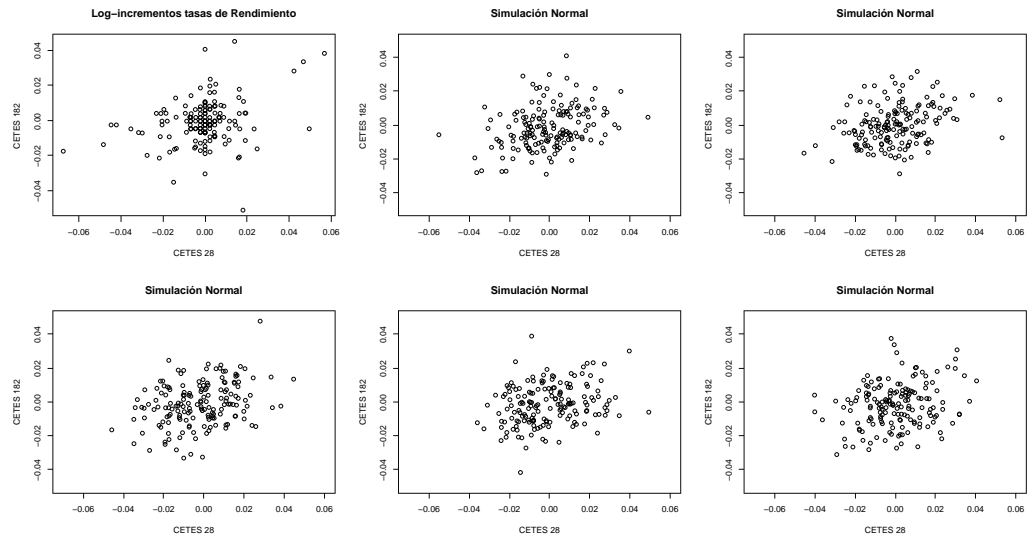


Figura 3.2.2: Simulaciones Normal Multivariada.

### Modelo para los CETES vía cópulas.

Para esta sección calcularemos los incrementos de las tasas de rendimiento de los CETES de acuerdo a la ecuación (3.7). Los rendimientos de los CETES son muy estables, mucho más a corto plazo, por lo que resultan varios datos repetidos en la muestra de incrementos. Para resolver este problema se identificaron los valores repetidos y se incorporó una perturbación muy pequeña que no alterara la tendencia de los datos pero que llevará la muestra a una muestra continua y así poder modelar con cópulas. Para incorporar esta perturbación a los datos repetidos se simuló una variable  $Uniforme(-0.000000001, 0.000000001)$  por cada dato repetido y se sumo a dicho dato. Con esto tenemos lista la muestra para empezar a hacer las pruebas.

- Al igual que con el modelo de mortalidad, comenzaremos verificando que haya una relación entre los datos por medio una prueba de independencia basada en la cópula empírica, dicha prueba arroja un p-value de 0.031.
- La prueba de simetría para la muestra de incrementos arroja un p-value

de 0.1583.

Con estos resultados se rechaza la hipótesis de independencia y no podemos rechazar la simetría, por lo que la muestra puede ser modelada con alguna cópula simétrica. En la Figura 3.2.3 se muestran las pseudo-observaciones de la cópula.

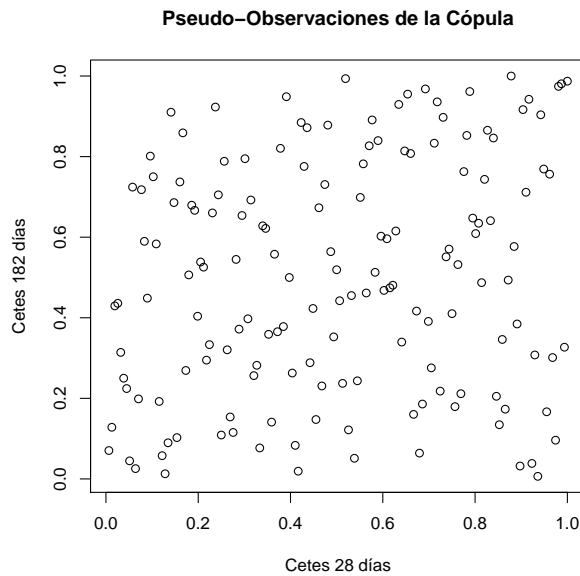


Figura 3.2.3: Pseudo-observaciones de la cópula. CETES.

Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste se muestran en la Tabla 3.2.2.

Tabla 3.2.2: Bondad de ajuste: CETES.

<b>Cópula</b>	<b>Parámetro</b>	<b>P-value</b>
Normal	0.231	0.2433
Clayton	0.254	0.1374
Plackett	1.907	0.1494
Frank	1.252	0.1494
t	0.199	0.3302

El mayor p-value lo obtiene la cópula t con parámetro 0.199. La Figura 3.2.4 muestra un comparativo entre las pseudo-observaciones y una simulación condicional con la cópula t y el parámetro mencionado.

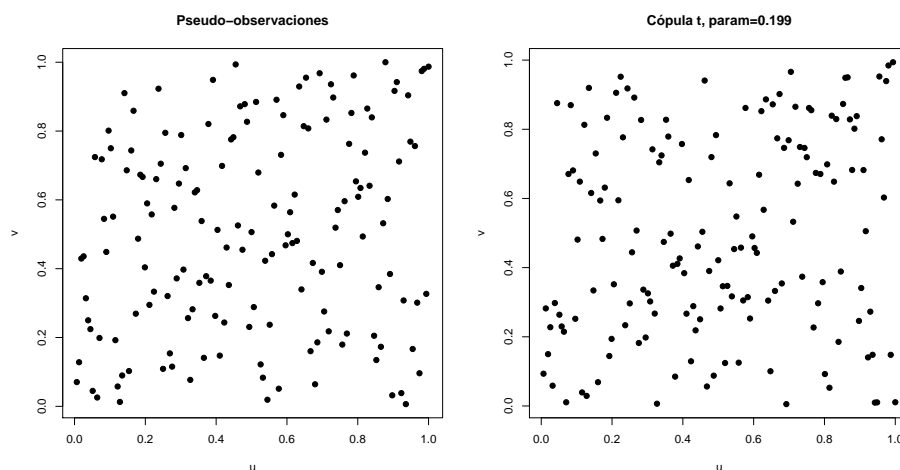


Figura 3.2.4: Pseudo-observaciones cetes vs cópula t.

Para ajustar las marginales comenzaremos con un resumen de los datos, el cual se muestra en la Tabla 3.2.3.

Tabla 3.2.3: Estadística descriptiva CETES 28 y 182.

	CETES 28	CETES 182
Tamaño de muestra	156	156
Media	0.99948	0.9995
$\sigma$	0.01542	0.01253
Min	0.93483	0.95056
Max	1.0584	1.0465
1 <sup>er</sup> Cuartil	0.99514	0.99353
Mediana	1	1
3 <sup>er</sup> Cuartil	1.0046	1.0045

Para tener una idea visual de la distribución que siguen las marginales graficamos los histogramas, Figura 3.2.5, donde podemos ver la simetría de los datos.

## Histogramas

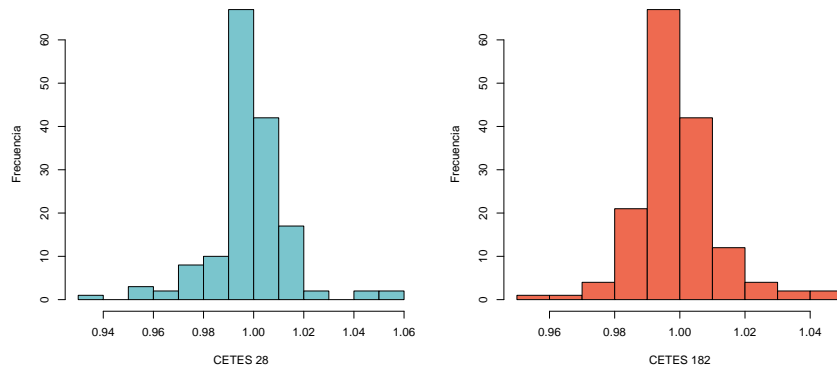


Figura 3.2.5: Histogramas de los incrementos de los CETES.

Se hicieron pruebas de bondad de ajuste para distribuciones simétricas, algunos resultados se muestran en la Tabla 3.2.4.

Tabla 3.2.4: Pruebas de bondad de ajuste marginales CETES.

Distribución	CETES 28		CETES 182	
	Parámetros	P-value	Parámetro	P-value
Cauchy	Localización= 1 Escala=0.005	0.4224	Localización=0.99 Escala=0.0055	0.2972
Normal	Media muestral Varianza muestral	0.001064	Media muestral Varianza muestral	0.043
F	df1=16014.6 df2=16032	0.007	df1=22170 df2=22165	0.0123
Laplace	Localización=1 Escala=0.0099	0.1554	Localización=1 Escala=0.009	0.3723

La distribución Cauchy presenta un mejor ajuste para los CETES 28 y la distribución Laplace para los CETES 182, sin embargo, las colas tan pesadas de la distribución Cauchy, al momento de simular, reflejaron saltos en las tasas de rendimiento poco comunes, por ejemplo, se pasa de un rendimiento de 4% a uno de 1% en una semana, y como ya se menciona, los CETES son muy estables, así que optaremos por utilizar las distribución de Laplace para



ambas marginales como lo muestra la Figura 3.2.6.

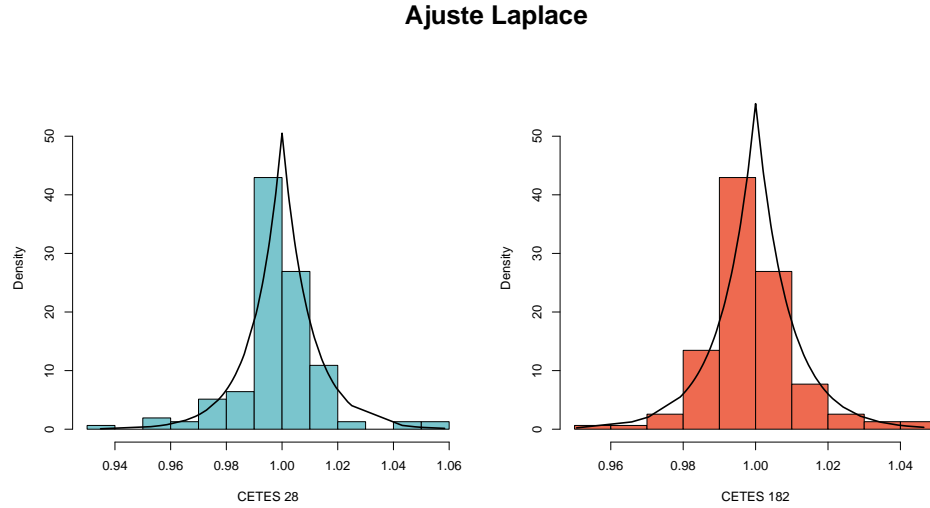


Figura 3.2.6: Ajuste marginales Laplace.

La Figura 3.2.7 muestra la comparación de 5 simulaciones de los incrementos de los CETES contra los incrementos reales.

Y la Figura 3.2.8 muestra un comparativo entre los log-incrementos reales, una simulación con la normal multivariada y una simulación con el modelo vía cópula que hemos ajustado.

Nótese que los datos con los que se hizo el ajuste corresponden a los incrementos en las tasas de rendimiento de los CETES ( $incremento_i$ ), por lo que es necesaria una semilla, es decir, una tasa de rendimiento inicial  $r_0$ , para obtener las trayectorias de las tasas de rendimiento de manera recursiva:

$$r_k = r_0 \prod_{i=1}^k incremento_i.$$

Con la finalidad de mostrar la eficiencia del modelo propuesto mediante cópulas, se simularon 10,000 trayectorias de los rendimientos de ambos CETES para un año. Con dichas simulaciones se obtuvieron intervalos de probabilidad con  $\alpha = 0.95$  para ambos CETES, como lo muestra la Figura 3.2.9.

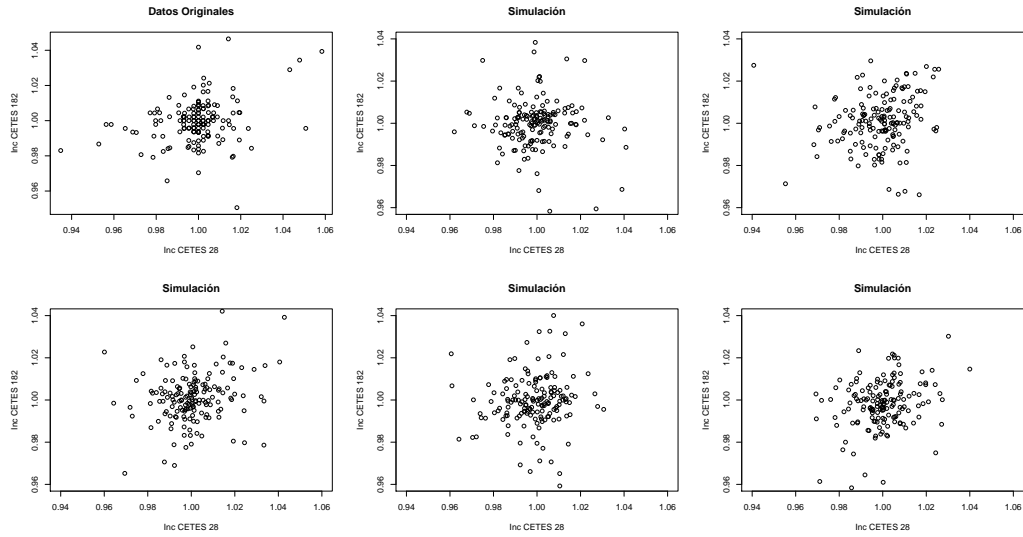


Figura 3.2.7: Simulaciones de los incrementos de los CETES.

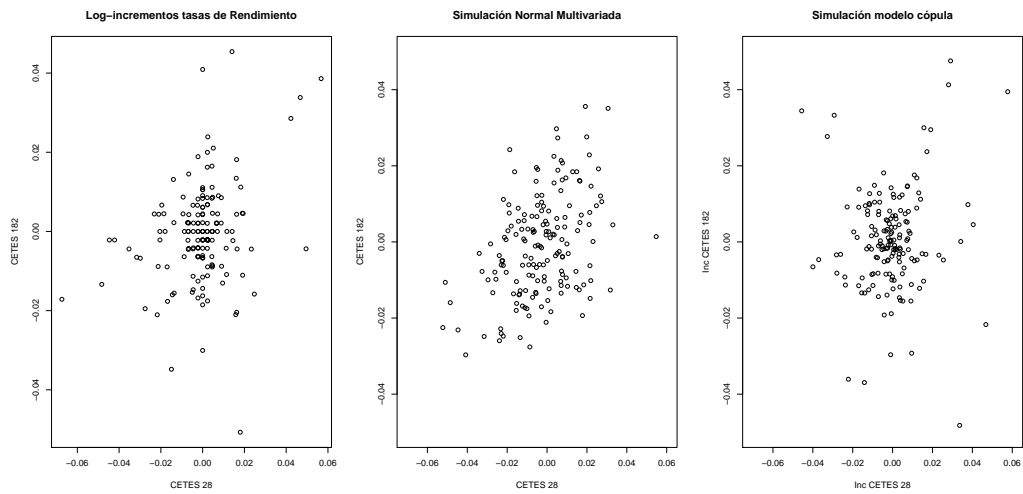


Figura 3.2.8: Comparativo modelo Normal Multivariada vs Modelo vía cópula.

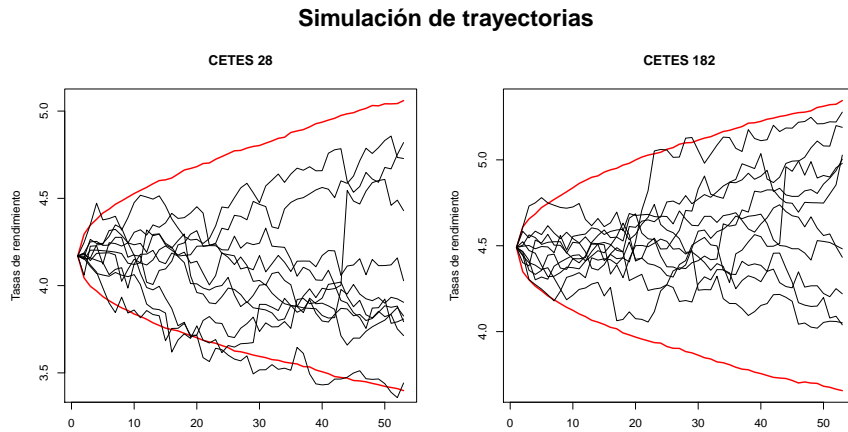


Figura 3.2.9: Trayectorias simuladas.

Se recabó un año más de información, correspondiente al periodo 05/07/2012 - 13/06/2013, y se verificó que las trayectorias reales estuvieran contenidas en los intervalos de probabilidad obtenidos como lo muestra la Figura 3.2.10.

Utilizaremos este modelo en el siguiente capítulo para simular trayectorias del comportamiento de las tasas de rendimiento de los CETES en un año.

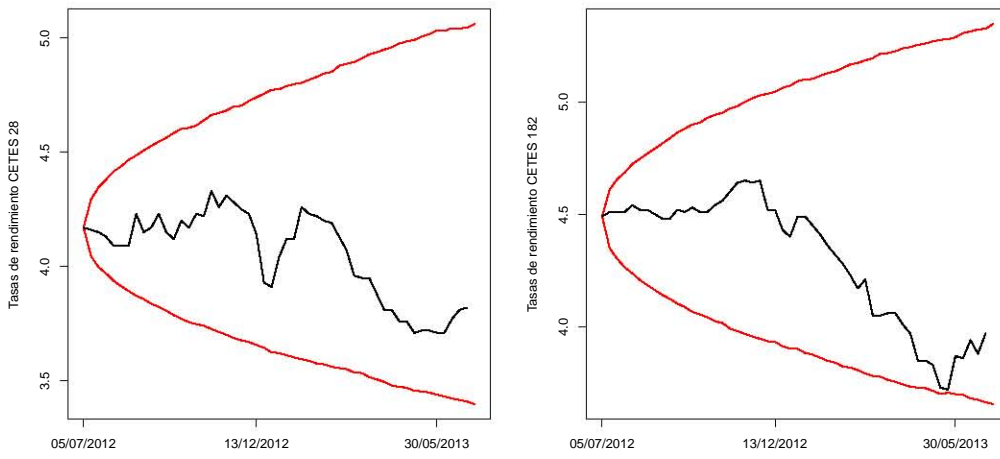


Figura 3.2.10: Intervalo de probabilidad CETES 28 y CETES 182.



# Capítulo 4

## ALM Estocástico

El flujo de dinero en las instituciones financieras es muy intenso por la naturaleza de sus actividades, pero deben garantizar que cuentan con el capital necesario, en el momento que se requiera para cumplir con las obligaciones contraídas. Un banco, por ejemplo, no deja estático el dinero de sus clientes, lo invierte de diversas maneras para obtener ganancias, pero debe garantizar que en el momento en que el cliente quiera retirar su dinero podrá entregárselo. Lo mismo sucede con las aseguradoras, que invierten las primas de los seguros, pero al momento en que sea reclamado un siniestro, la compañía debe contar con el dinero necesario.

Son estos flujos de capital los que han obligado a las instituciones financieras a desarrollar análisis detallados de los activos y pasivos que poseen y cómo se relacionan, con la finalidad de implementar estrategias que les permita incrementar sus ganancias sin correr el riesgo de descapitalizarse. Al estudio de la interacción entre activos y pasivos se le conoce como *gestión o manejo de activos y pasivos*, ALM por sus siglas en inglés (Asset Liability Management). Para el análisis del ALM, es necesario estimar tanto el monto, como el horizonte de tiempo en el que se necesitará el dinero, para en base a ello, tomar decisiones respecto de las estrategias de inversión, las reservas, entre otras decisiones importantes. En este trabajo, dichas estimaciones se harán mediante simulaciones, de ahí la necesidad de darle una orientación de carácter aleatorio o estocástico de nuestro análisis.

Con el propósito de mantener solventes a las compañías aseguradoras, la nueva Ley de Seguros y Fianzas (LSF), publicada en el Diario Oficial de la Federación el 4 de abril de 2013, menciona que las compañías de seguros tienen la obligación de constituir los fondos necesarios para respaldar un

*requerimiento de capital de solvencia* (RCS), el cual tiene como propósito:

- Contar con los recursos patrimoniales suficientes en relación a los distintos riesgos a los que están expuestas y las responsabilidades que asuman las aseguradoras.
- Desarrollar políticas adecuadas de suscripción, selección de riesgo y reaseguro.
- La determinación de los recursos que las aseguradoras deberán mantener con el propósito de hacer frente a situaciones de carácter excepcional que pongan en riesgo su solvencia o estabilidad, derivado tanto de la operación particular de las aseguradoras como de condiciones de mercado.

Dicha ley también menciona las consideraciones que deben tomarse para el cálculo del RCS, a continuación se mencionan algunas de ellas:

- Se debe garantizar que sean considerados todos los riesgos y responsabilidades asumidas, analizados en el horizonte de tiempo que corresponda a la naturaleza y características de dichos riesgos y responsabilidades.
- Las pérdidas imprevistas en función de los riesgos y responsabilidades a los que se encuentren expuestas las aseguradoras, con un nivel de confianza del 99.5 % y a un horizonte de un año.
- Cubrir como mínimo el riesgo de mortalidad, longevidad, discapacidad, enfermedad, gastos de administración, caducidad, rescate de pólizas y eventos extremos de los seguros de vida.
- Cubrir adicionalmente el riesgo de mercado, de descalce entre activos y pasivos, de liquidez, de crédito y operativo.

El *riesgo de descalce* entre activo y pasivo refleja la pérdida potencial derivada de la falta de correspondencia estructural entre activos y pasivos, por el hecho de que una posición no pueda ser cubierta mediante el establecimiento de una posición contraria equivalente, es decir, que un pasivo no pueda ser cubierto por un activo o viceversa. El *riesgo operativo* refleja las pérdidas por deficiencias o fallas en los procesos operativos, tecnológicos, de recursos humanos o cualquier otro evento relacionado con la operación.

En la década de los 90's, JP Morgan desarrolló una medida para cuantificar la exposición al riesgo. Esta medida es el *valor en riesgo* o VaR por sus siglas en inglés (Value at Risk) y es una manera de describir la magnitud de la pérdida probable en un horizonte de tiempo. Comúnmente el VaR se calcula con el cuantil 99.5 % de la distribución de pérdidas.

En el presente capítulo se realizará la simulación del ALM para una compañía de seguros y se calculará el RCS; también se desagregará el RCS por riesgo de mortalidad y de mercado.

## 4.1. Simulación del ALM estocástico.

Se simuló la interacción de activos y pasivos de una compañía de seguros **a lo largo de un año** para dos carteras de asegurados con una política de inversión establecida para posteriormente dar una estimación puntual del capital inicial necesario para que al término del año, la compañía aseguradora no tenga descalce entre activos y pasivos.

### Características del activo

Para la parte del activo se tomó en cuenta la inversión en CETES a plazo 28 y 182 días con la siguiente **política de inversión**:

- 1er semestre: 50 % en CETES a 28 días y 50 % en CETES a 182 días.
- 2do semestre: 75 % en CETES a 28 días y 25 % en CETES a 182 días.

Se simularon 60,000 trayectorias de tamaño 53 de los rendimientos para los dos tipos de CETES con el modelo vía cópula que se desarrolló en capítulos anteriores. Cada entrada de la trayectoria corresponde a la tasa de rendimiento por semana y la semilla inicial, que en este caso son las tasas de rendimiento real que reportó el Banco de México el 5 de julio de 2012 y cuyo valor es de 4.17 % para los CETES 28 y de 4.49 % para los CETES 182. La Figura 4.1.1 muestra 4 ejemplos de estas simulaciones.

Dichas simulaciones corresponden a tasas nominales de rendimiento para los CETES, pero como ya se mencionó, cada semana se pagarán siniestros, por lo que será necesario vender algunos CETES antes de su vencimiento. Para saber el valor de los CETES al final de cada semana se calculan tasas equivalentes de acuerdo al plazo de vencimiento que aún le reste a cada



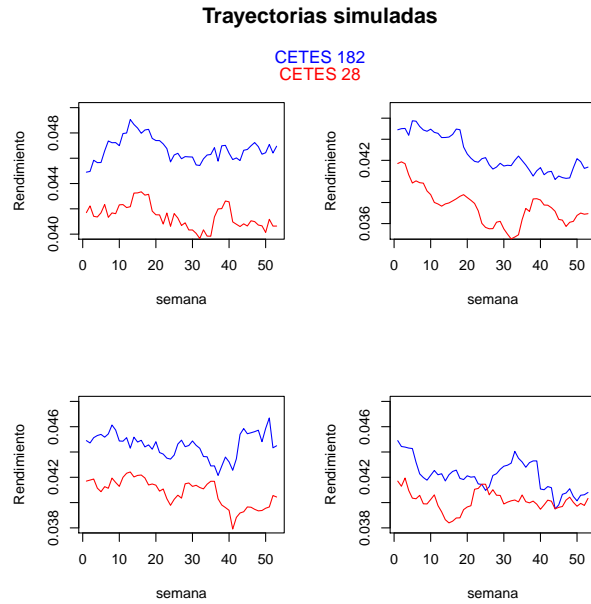


Figura 4.1.1: Simulación de trayectorias conjuntas para el rendimiento de los CETES.

CETE. Las tasas equivalentes se calcularán mediante la ecuación (3.2) si se trata de plazos de vencimiento menores a 28 días; para los plazos de vencimiento que se encuentren entre 28 y los 182 días se calculará la tasa alamburada de acuerdo a la ecuación (3.6) y quedarán sin cambio la tasa de rendimiento en las semanas en la que falte el plazo completo al que fueron emitidos los CETES. Con estas tasas equivalentes se obtiene finalmente el precio de los CETES para cada semana con la ecuación (3.1).

## Características del pasivo

Supondremos dos carteras de un **seguro de vida temporal a un año** para simular el pasivo. Cada cartera tiene diferentes características demográficas y socioeconómicas. Para ambas carteras el rango de edades de los asegurados es de 18 a 90 años, la cartera 1 cuenta con 1,000,000 pólizas con distribución variable por edad y la cartera 2 con 20,000 pólizas distribuidas uniformemente por edad. Dicha distribución se muestra en la Figura 4.1.2 y los datos exactos pueden consultarse en el Apéndice A.

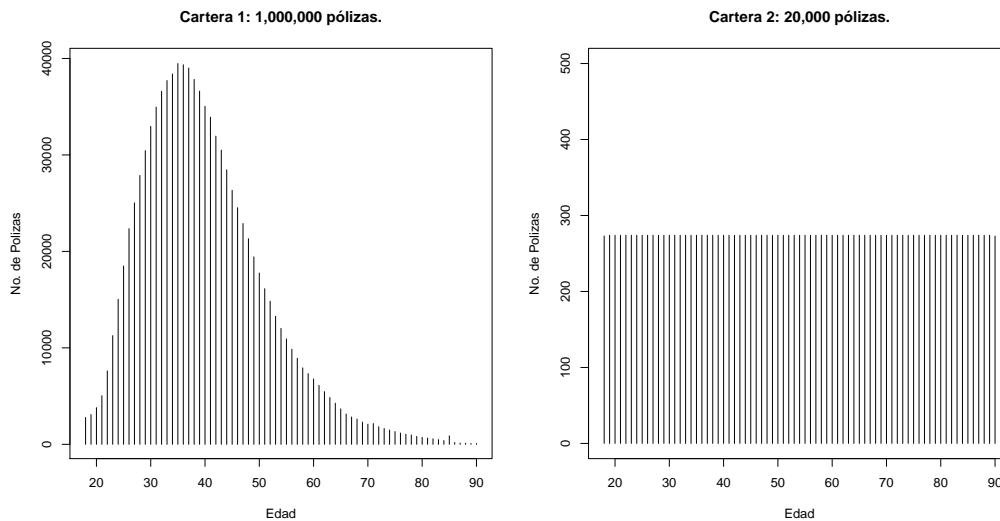


Figura 4.1.2: Distribución de pólizas por edad.

En la Tabla 4.1.1 se presentan las características de cada cartera. La cartera 1 tiene un nivel socioeconómico más bajo que la cartera 2 pero esta última tiene una menor tasa de mortalidad. Para las tasas de mortalidad tomaremos el modelo vía cópula que ajustamos a los datos de Mendoza y otros (2000).

Tabla 4.1.1: Características de cada Cartera.

	<b>Cartera 1</b>	<b>Cartera 2</b>
<b>No. de pólizas</b>	1,000,000	20,000
$q_x$	<i>Mendoza</i>	<i>Mendoza * U(0, 1)</i>
<b>S.A. p/póliza</b>	\$250,000	\$12,500,000

Si bien las carteras difieren en el número de pólizas y en la suma asegurada por póliza, en total, ambas carteras suman \$250,000 mdp de suma asegurada.

Se simularon 60,000 tasas de mortalidad  $q_x$  para cada  $x$ . Para ambas carteras se utilizaron estas simulaciones, pero para la cartera 2 se multiplicó cada simulación por una variable *Uniforme*(0, 1).

Las reclamaciones anuales simuladas por cartera para cada uno de los 60,000 escenarios se obtuvieron de la siguiente manera:

- Cartera 1:

$$RC1 = \sum_{x=18}^{90} AseguradosC1_x \times \hat{q}_x \quad (4.1)$$

- Cartera 2:

$$RC2 = \sum_{x=18}^{90} AseguradosC2_x \times \hat{q}_x \times U(0, 1) \quad (4.2)$$

Con  $RC1$ = reclamaciones de la cartera 1,  $RC2$ =reclamaciones de la cartera 2,  $\hat{q}_x$  las tasas de mortalidad simuladas,  $AseguradosC1_x$  y  $AseguradosC2_x$  los asegurados en edad  $x$  para las carteras 1 y 2 respectivamente. Para obtener el monto de reclamaciones anuales basta con multiplicar la suma asegurada por las reclamaciones anuales para cada cartera. En la Figura 4.1.3 se muestra la función de densidad empírica del monto de reclamaciones anuales para cada cartera. Considerando el *mejor estimador* o BE (Best Estimate) de la reclamación anual como la **mediana** de las simulaciones, esperamos que el monto de reclamaciones en el año sea de \$938.25 mdp para la cartera 1, \$1850.00 mdp para la cartera 2, es decir, \$2,788.25 mdp en total.

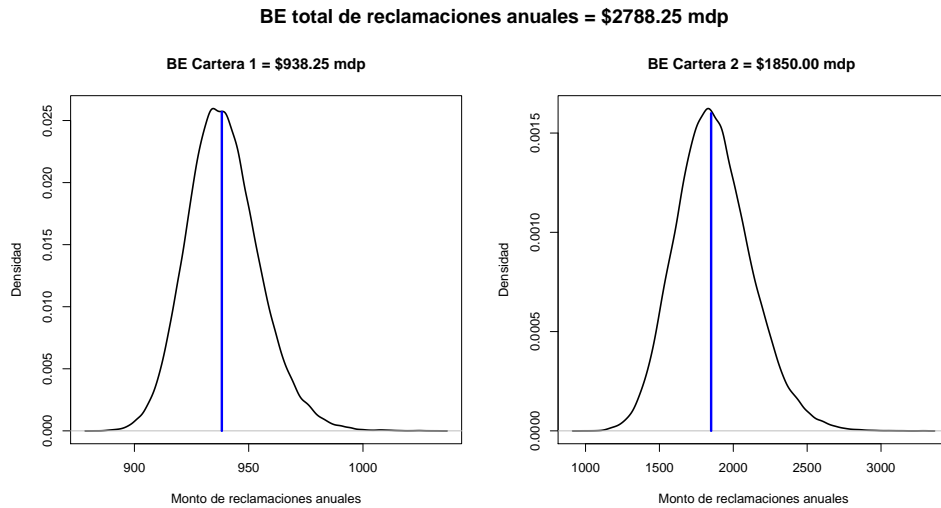


Figura 4.1.3: BE del monto de reclamación anual.

El VaR 99.5%; correspondiente al cuantil 0.995 de la distribución empírica para las reclamaciones anuales; es de \$3,599.00 mdp. Utilizando la banda de confianza 99.5% para las tasas de mortalidad estimadas con el modelo de regresión logística resulta un VaR de \$3,260.25 mdp, lo cual implica una subestimación del 9.4% en el riesgo de mortalidad con dicho modelo.

Las reclamaciones anuales de cada escenario se distribuyeron uniformemente en las 52 semanas del año. Con esta distribución semanal se obtiene un BE de reclamaciones semanales para la cartera 1 de \$18 mdp y de \$37.50 mdp para la cartera 2. En la Figura 4.1.4 se muestran 4 escenarios, a manera de ejemplo, de las reclamaciones semanales de ambas carteras.

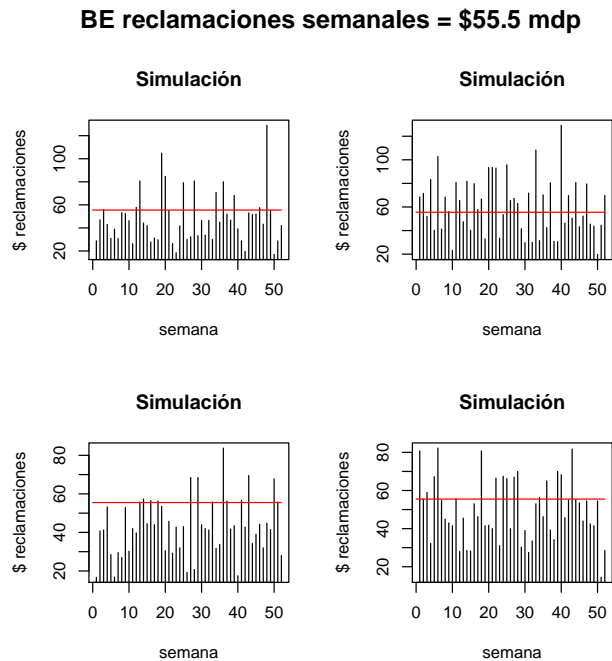


Figura 4.1.4: BE de reclamaciones semanales.

## Procedimiento de simulación del ALM estocástico

Con los supuestos anteriores, explicaremos a continuación el procedimiento para la simulación del ALM estocástico.

Los insumos o *inputs* que necesitamos son:

- Las reclamaciones, que en este caso es un vector de tamaño 52 correspondiente al monto de las reclamaciones semanales para las dos carteras.
- Los precios de los CETES para cada semana, así como el precio inicial al que se compran los CETES, resultando un vector de tamaño 53 para cada CETE.
- Activo inicial. Consideraremos como activo inicial el monto anual de reclamaciones por escenario simulado para garantizar que no nos faltará dinero.

El resultado u *output* que arrojará el análisis es una matriz de tamaño  $53 \times 3$ . La primera columna de la matriz será el activo total, la segunda y tercera columna corresponde al activo en CETES 28 y CETES 182 respectivamente. El primer renglón corresponde al activo inicial, y en los siguientes 52 renglones estará el activo para las 52 semanas del año.

Al final de cada semana se restará del activo las reclamaciones que se hayan tenido. Analizaremos por separado: las primeras 25 semanas, la semana 26, de la semana 27 a la 51 y la semana 52. Esto porque trataremos en todo momento que los CETES cumplan con el plazo original para obtener el mayor rendimiento posible.

En primer lugar aplicaremos la política de inversión para el primer semestre, es decir, con la mitad del activo inicial compramos CETES 28 y con la otra mitad CETES 182.

Para las primeras 25 semanas venderemos los títulos de CETES 28 que sean necesarios para pagar las reclamaciones al final de la semana. Si no es posible liquidar dichas reclamaciones con los CETES 28, la parte faltante se obtendrá de los CETES 182. Cabe recordar que para las semanas en las que haya vencimiento de CETES 28 el valor de dichos títulos sera de \$10.

En la semana 26 hay vencimiento de CETES 182, para pagar las reclamaciones de esta semana se tomará en cuenta el monto que resulte de multiplicar el número que tengamos de dichos títulos por su valor nominal de \$10. Si no es posible liquidar las reclamaciones con este monto, se recurrirá a los CETES 28, si por el contrario sobra dinero después de pagar las reclamaciones, se aplicará la política de inversión para el segundo semestre.

De la semana 27 a la 51 se procederá de la misma manera que en las primeras 25 semanas.

En la semana 52 hay vencimiento de ambos CETES. Para calcular el activo se multiplica la cantidad de títulos que se tengan de ambos CETES por \$10 y se restan las reclamaciones de la semana.

Al tomar como activo inicial el monto total de reclamaciones anuales garantizamos que siempre nos sobrar  dinero o en el mejor de los casos el activo final será 0. Es decir, que con el monto total de reclamaciones anuales como activo inicial tendremos un descalce entre activo y pasivo al final del año. La Figura 4.1.5 muestra la distribución del activo en CETES a plazo 28 y 182 a lo largo del año para 4 de los escenarios simulados, con un descalce de \$60.07 mdp, \$53.44 mdp, \$59.85 mdp, \$65.16 mdp respectivamente.

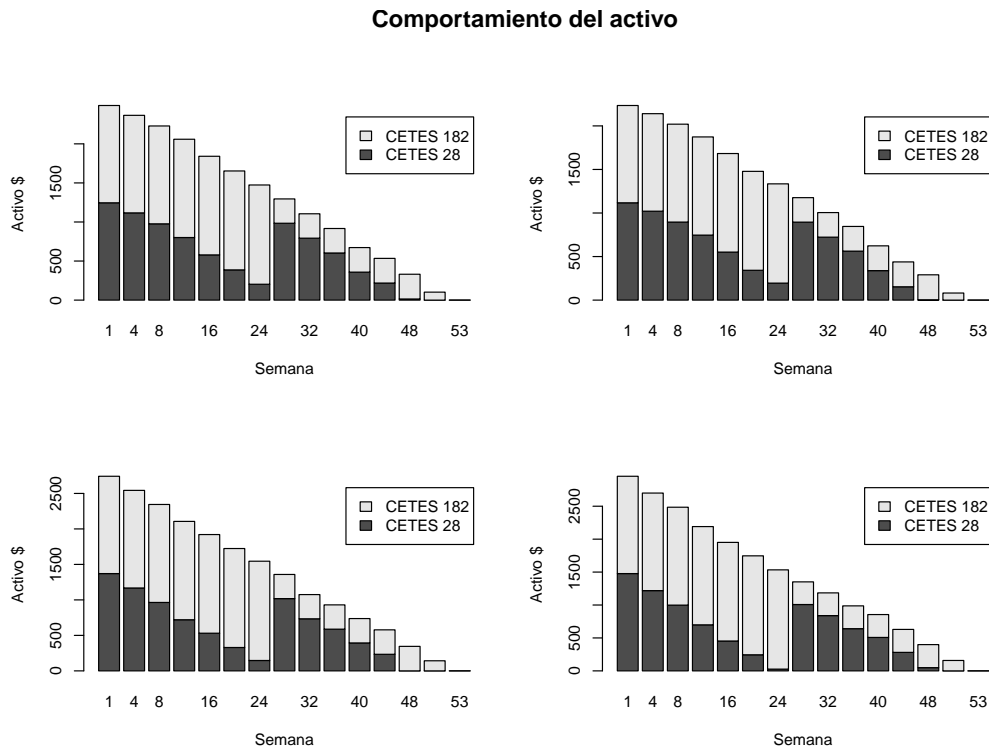


Figura 4.1.5: Distribución del activo en 4 escenarios simulados.

El dinero que se destina de más para el pago de siniestros podría ser invertido de manera más eficiente, por lo que buscamos el activo inicial que **no** resulte en descalce al final del año. Para lograr esto, para cada escenario, se hizo el análisis de ALM considerando como activo inicial el monto

anual de siniestros en cada uno de los escenarios simulados, pero el dinero que sobró al final del análisis se restó del activo inicial, se volvió a hacer el análisis de ALM y nuevamente se restó el sobrante al activo inicial. Este procedimiento se repite hasta lograr que no sobre dinero. En la mayoría de los casos esto se logra con 5 iteraciones. El código de los programas utilizados pueden consultarse en el Apéndice B.

## 4.2. Análisis de Resultados.

Con lo anterior tenemos 60,000 simulaciones del activo inicial que se necesita para cubrir las obligaciones contraídas a lo largo del año, considerando la política de inversión antes mencionada, sin que sobre o falte dinero. La Figura 4.2.1 muestra la distribución empírica  $\tilde{F}_A$  para el activo inicial.

A partir de esta distribución podemos dar una estimación puntual del capital inicial con la mediana, cuyo valor es de \$2,730.78 mdp. El VaR 99.5% es de \$3,492.76 mdp. El requerimiento de capital de solvencia, RCS, lo calcularemos de la siguiente manera:

$$RCS = VaR_{99.5\%}(A) - BE(A). \quad (4.3)$$

De acuerdo a la ecuación (4.3) el RCS es de \$762.45 mdp. Esta cantidad corresponde al fondo que debe constituir la compañía y que no puede tocar a lo largo del año, es por esto que es de suma importancia calcularlo de forma correcta, pues como ya mencionamos, si se reserva de más se tienen pérdidas de oportunidad en inversiones más eficientes y si se reserva de menos es probable caer en insolvencia.

Ya calculamos la cantidad que es necesaria para el RCS pero una cuestión muy importantes es ¿qué cantidad de ese dinero corresponde a cada riesgo?, es decir, ¿qué cantidad se reserva por el riesgo de mercado, por el riesgo de mortalidad, por el riesgo que aporta cada cartera? y ¿qué cantidad por el riesgo que aporta cada tipo de CETE? Para responder a las preguntas anteriores se desagregó por riesgo el RCS total realizando el análisis de ALM y calculando el RCS para cada riesgo mediante algunas modificaciones, las cuales se mencionan a continuación:

- Para conocer la cantidad del RCS correspondiente al riesgo de mortalidad se fijaron los precios de cada CETE, es decir, para las semanas en las que era necesario valuar los CETES, de los 60,000 escenarios, se

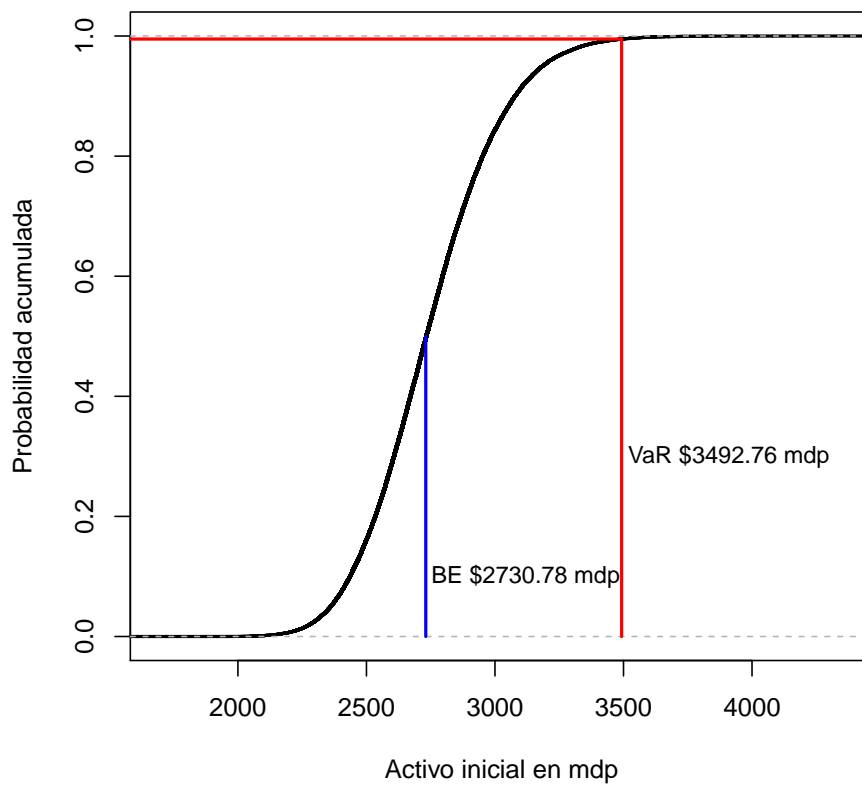


Figura 4.2.1: Distribución empírica del activo inicial simulado.



utilizó un sólo valor para cada CETE, y no las simulaciones correspondientes, este valor corresponde al BE de los precios simulados: \$9.9816 para los CETES 28 y \$9.8878 para los CETES 182.

- Para saber qué cantidad se reserva por el riesgo de la cartera 1 se tomaron en cuenta únicamente las reclamaciones de la cartera 1 y para la cartera 2 se consideraron solamente las reclamaciones de la cartera 2.
- Para el riesgo de mercado se fijaron las reclamaciones semanales en \$55.5 mdp, dicha cantidad corresponde al BE de reclamaciones semanales para ambas carteras.
- Para conocer la cantidad que corresponde al riesgo por los CETES 28 se fijaron las reclamaciones semanales en \$55.5 mdp y el precio de los CETES 182 en \$9.8878, es decir, únicamente se dejaron variar los precios de los CETES 28. Para los CETES 182 se dejan variar únicamente los precios de dichos CETES.

La Tabla 4.2.1 muestra los montos correspondientes al RCS por riesgo de mercado, riesgo de mortalidad, por el riesgo de cada cartera y por el riesgo de cada CETE.

Tabla 4.2.1: Desagregación del riesgo, monto en mdp.

Rubro	Monto del RCS
<b>Total</b>	\$762.45
Riesgo de Mortalidad	\$771.51
Riesgo de Mercado	\$2.78
Cartera 1	\$47.29
Cartera 2	\$744.04
CETES 28	\$2.41
CETES 182	\$1.15

De acuerdo a los resultados, la cartera 2 aporta más riesgo que la 1 y los CETES 28 aportan mas riesgo que los CETES 182. Poniendo más atención en la cifras veremos que el RCS por el riesgo de mercado, mas el RCS por el riesgo de mortalidad **no** arroja la misma cantidad que el RCS total, al igual que la suma del RCS por el riesgos de cada CETE no corresponde al

RCS por el riesgo de mercado y lo mismo sucede con la suma del RCS de ambas carteras y el RCS total. Esto se debe al *beneficio por diversificación*, es decir, al combinar los riesgos se mitiga un poco el riesgo total. Las cantidades exactas por este beneficio se muestran en la Tabla 4.2.2.

Tabla 4.2.2: Beneficio por diversificación, monto en mdp.

<b>Rubro</b>	<b>Monto del RCS</b>
Riesgo de mortalidad	\$771.51
Riesgo de mercado	\$2.78
Diversificación	-\$11.84
<b>Total</b>	<b>\$762.45</b>
Cartera 1	\$47.29
Cartera 2	\$744.02
Diversificación	-\$28.88
<b>Total</b>	<b>\$762.45</b>
CETES 28	\$2.41
CETES 182	\$1.15
Diversificación	-\$0.78
<b>Riesgo de Mercado</b>	<b>\$2.78</b>



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se presentaron algunas de las características más importantes de las cópulas bivariadas, utilizando principalmente la capacidad que tienen para relacionar dos distribuciones marginales y una distribución conjunta ya que la cópula bivariada contiene la información de la dependencia entre dos variables aleatorias continuas. La amplia gama de modelos paramétricos, la posibilidad de construir nuevos modelos combinando los ya existentes y la cópula Bernstein ofrecen la posibilidad de modelar dependencias complejas y no limitarse a la dependencia lineal o a imponer supuestos a los datos, por lo que las cópulas permiten modelar los fenómenos de una manera más flexible.

Dadas las características del activo y pasivo de una compañía aseguradora fue posible, mediante la simulación de dependencia estocástica, con ayuda de las funciones cópula, determinar los montos de reserva necesarios para garantizar de manera más eficiente, con un grado de confiabilidad, la solvencia de dicha compañía aseguradora. Además, se pudo obtener el RCS para cada tipo de riesgo, cartera e instrumento.

Para calcular el RCS mediante simulación no es necesario utilizar tablas de mortalidad. Las tasas observadas de mortalidad solamente se utilizaron para obtener un modelo que reprodujera el posible comportamiento de la mortalidad mediante funciones cópula, esto nos dio la variación en las tasas de mortalidad que refleja la información real.

La simulación semanal de las tasas de rendimiento de los CETES susti-

tuye el cálculo del *valor presente*, con una tasa de rendimiento constante en todo el año, como se supone para algunos cálculos actuariales. La simulación es más realista al utilizar tasas de rendimiento variables en cada semana y de acuerdo a una estimación lo más fiel posible, considerando o no la dependencia entre los distintos plazos de CETES.

Para el cálculo del RCS la Comisión Europea, en el documento Commission y otros (2010), en la fórmula estándar para calcular el RCS propone una matriz de correlación entre tipos de riesgo, con lo que se cae nuevamente en la imposición de estructuras de dependencia de los datos. Mediante las simulaciones que se hicieron, la relación entre riesgos se encuentra en el beneficio por diversificación que resulta del cálculo del RCS para cada riesgo, cartera e instrumento, de acuerdo a los comportamientos modelados del activo y pasivo.

Con la simulación de un fenómeno es posible elegir un modelo realista cuyo análisis matemático es posible y así ofrecer mejores resultados que los obtenidos mediante estimaciones puntuales, pues además de un valor fijo, podemos obtener distintas estimaciones, conociendo la probabilidad con la que cada una de ellas se observara en la realidad; no así las tablas de mortalidad o el uso de una tasas de rendimiento fija para todo el año.

Podemos afirmar que es posible cuantificar los riesgos a los que esta expuesta una compañía aseguradora mediante simulación y con el uso de las funciones cópula, de una manera eficiente, con escenarios realistas. Si bien es cierto que se paga un costo en el tiempo y facilidad de los cálculos, ya que las simulaciones requieren más potencia computacional, dependiendo del tamaño de la simulación y la cantidad de escenarios que se deseen y los fundamentos matemáticos que se utilizan resultan más complejos, las actuales herramientas computacionales cubren dicho costo.

La política de inversión fue previamente determinada por lo que, finalmente, se deja para un futuro trabajo la obtención de la política de inversión óptima para incrementar las ganancias en el año, aportando un beneficio más a la compañía aseguradora.



# Apéndice A

## Información del pasivo.

Tabla A.0.1: Distribución de asegurados por edad para cada cartera.

Edad	Cartera 1	Cartera 2	Edad	Cartera 1	Cartera 2	Edad	Cartera 1	Cartera 2
18	2787	273	43	30503	274	68	2619	274
19	3084	274	44	28458	274	69	2309	274
20	3804	274	45	26329	274	70	2088	274
21	5041	274	46	24534	274	71	2156	274
22	7613	274	47	22889	274	72	1831	274
23	11268	274	48	21315	274	73	1645	274
24	15034	274	49	19434	274	74	1484	274
25	18489	274	50	17758	274	75	1323	274
26	22359	274	51	16132	274	76	1173	274
27	25034	274	52	14833	274	77	1054	274
28	27871	274	53	13271	274	78	966	274
29	30445	274	54	12018	274	79	822	274
30	32958	274	55	10924	274	80	719	274
31	34961	274	56	9858	274	81	648	274
32	36597	274	57	8929	274	82	574	274
33	37711	274	58	7926	274	83	487	274
34	38397	274	59	7331	274	84	391	274
35	39476	274	60	6773	274	85	883	274
36	39349	274	61	6108	274	86	190	274
37	39007	274	62	5466	274	87	138	274
38	37831	274	63	4855	274	88	117	274
39	36611	274	64	4263	274	89	96	274
40	35049	274	65	3679	274	90	92	273
41	33907	274	66	3144	274			
42	31949	274	67	2833	274			

Tabla A.0.2: Individuos Expuestos y Muertos. Experiencia mexicana.

Edad	Expuestos	Muertos	Edad	Expuestos	Muertos	Edad	Expuestos	Muertos
12	9203	16	42	211408	509	72	12116	786
13	7001	2	43	201843	574	73	10888	260
14	16768	3	44	188313	630	74	9822	277
15	10445	4	45	174223	591	75	8752	227
16	9654	0	46	162347	617	76	7762	188
17	16102	7	47	151459	632	77	6973	171
18	18442	9	48	141042	626	78	6392	194
19	20408	15	49	128595	581	79	5440	177
20	25173	14	50	117505	562	80	4758	127
21	33359	23	51	106745	629	81	4286	166
22	50374	27	52	98154	535	82	3799	113
23	74561	37	53	87818	647	83	3222	108
24	99480	80	54	79525	617	84	2588	109
25	122342	106	55	72288	562	85	5841	88
26	147954	108	56	65234	513	86	1259	156
27	165651	183	57	59083	542	87	913	52
28	184425	182	58	52445	530	88	775	37
29	201460	233	59	48508	540	89	635	42
30	218085	265	60	44817	563	90	618	32
31	231340	276	61	40417	473	91	448	17
32	242170	277	62	36168	423	92	337	15
33	249538	312	63	32128	492	93	291	21
34	254078	318	64	28208	380	94	186	15
35	261217	347	65	24342	379	95	160	10
36	260378	364	66	20805	373	96	101	5
37	258114	388	67	18746	310	97	60	9
38	250332	443	68	17329	315	98	64	3
39	242261	446	69	15277	329	99	35	5
40	231921	517	70	13819	277			
41	224367	456	71	14268	308			





# Apéndice B

## Código en R

Los análisis y procedimientos de simulación se hicieron utilizando el software libre R Development Core Team (2012) el cuál es muy útil para el análisis estadístico y la graficación. Este software es, a la vez, un programa y un lenguaje de programación con gran flexibilidad para ajustarse a las necesidades de los distintos perfiles de usuarios. Adicional a las funciones incluidas en el paquete, han sido desarrolladas gran cantidad de librerías con funciones específicas, por colaboradores de todo el mundo. En este trabajo se utilizaron las librerías “copula” y “VGAM”.

Este software puede obtenerse de la página <http://www.r-project.org/>, del apartado CRAN. Una vez instalado, las librerías se descargan mediante la interfaz de R de forma muy sencilla. Sólo es necesario que en el menú “Paquetes” se elija la opción *instalar paquete*, se escoja un espejo, se localice el paquete y se de la instrucción de instalar. Cada vez que sea abierta la interfaz de R es necesario cargar las librerías adicionales que sean necesarias mediante la instrucción `library(nombre de la librería)`, previa instalación de la librería.

### B.1. Cópulas

#### Cópula Empírica

```
CopEmp<-function(datos)
{
#Input:
#      datos=matriz de observaciones de
```

```

#           tamaño nx2
#Output:
#   copula empírica= matriz de n+1 x n+1
n<-length(datos[,1])
datos.ord<-datos[order(datos[,1]),]
yk<-sort(datos.ord[,2])
copula<-matrix(0,nrow=n+1,ncol=n+1)
for(i in 1:n)
{
  for(j in 1:n)
  {
    q<-sum((match(yk[1:j],datos.ord[,2])<=i)*1)
    copula[i+1,j+1]=q/n
  }
}
return (copula)
}

```

### Cópula Bernstein.

```

Cop.Ber<-function(u,v)
{
#Necesario general la cópula empírica en
#la variable "cop.emp"
valor<-0
n<-length(cop.emp[,1])-1
valor<-(t(c(0,dbinom((1:n),n,u))))%*%cop.emp)%*%
c(0,dbinom((1:n),n,v))
return(valor)
}

```

### Derivada de la cópula Bernstein

```

du.Cópula.Bernstein<-function(u,v)
{
#Derivada de la cópula Bernstein
#Necesario generar antes la cópula empírica

```

```

#en la variable "cop.emp"
valor<-0
n<-length(cop.emp[,1])-1
d<-((1:n)*u^(-1))-(n-(1:n))*((1-u)^(-1))
valor<-(t(c(0,dbinom((1:n),n,u)*d))%%cop.emp)%%
c(0,dbinom((1:n),n,v))
return(valor)
}

```

## B.2. Distribución empírica.

### Cuasi inversa

```

cuasi.dist<-function(muestra)
{
#La variable muestra debe ser un vector
F.inv<-c()
xor<-sort(muestra)
n<-length(xor)
F.inv[1]<-xor[1]
F.inv[n+1]<-xor[n]
for(i in 2:n)
F.inv[i]<-(xor[(i-1)]+xor[i])/2
return(F.inv)
}

```

### Inversa de la distribución empírica

```

Ber.F.inv<-function(u)
{
#Generar la variable cuasi<-cuasi.dist(muestra)
n<-length(cuasi)-1
bf<-t(cuasi[2:n])%%
dbinom(1:(n-1),n,u1)+(cuasi[1]*(1-u1)^(n))+(u1^(n)*
cuasi[n+1])
bf<-sum(cuasi*dbinom(0:n,n,u))
return(bf)
}

```

**Función auxiliar**

```
Ber.F.aux<-function(u,x) Ber.F.inv(u)-x
```

**Función de distribución empírica**

```
F.n<-function(x)
#Input: x=observación
#Output: F(x)
uniroot(Ber.F.aux,interval=c(0,1),x=x,tol=0.0000005)$root
```

**B.3. Simular  $q_x$ .****Derivada de la cópula Clayton**

```
du.Clayton<-function(u,v,theta)
max((u^(-theta)+v^(-theta)-1)^(-(theta+1)/theta)*
u^(-theta-1),0)
```

**Función auxiliar**

```
du.aux.Clayton<-function(v,uap) du.Clayton(uap[1],v,uap[3])-
uap[2]
```

**Regresión cuantílica**

```
reg.cuantil.Clayton<-function(u,a,theta)
uniroot(du.aux.Clayton,interval=c(0,1),
uap=c(u,a,theta),tol=0.0000005)$root
```

**Simulación de tasas de mortalidad**

```
simular.qx<-function(n.sim,x){
#Input: n.sim=número de simulaciones
# x=edad
#Output: vector de tamaño n.sim
#
u<-punif(x,11.5,99.5)
yy<-c()
if(x<=55){
```

#### B.4. SIMULACIÓN DE TRAYECTORIAS DE RENDIMIENTO DE LOS CETES.85

```
for(i in 1:n.sim){
v<-(1-reg.cuantil.Clayton(1-(u*2),runif(1),19.262))/2
yy[i]<-Ber.F.inv(v)
}
}
else{
for(i in 1:n.sim){
v<-(reg.cuantil.Clayton((u-0.5)*2,runif(1),8.043)/2)+0.5
yy[i]<-Ber.F.inv(v)
}
}
return(yy)
}
```

### B.4. Simulación de trayectorias de rendimiento de los CETES.

#### Cópula t

```
t.cop=tCopula(0.199)
```

#### Derivada de la cópula t

```
du.Cuv<-function(u,v,a) ((pCopula(c(u+0.000000000001,v),t.cop)-
pCopula(c(u,v),t.cop))/0.000000000001)-a
```

#### Regresión cuantílica

```
Gv<-function(u,a)
uniroot(du.Cuv,interval=c(0,1),u=u,a=a,tol=0.0000005)$root
```

#### Simulación de trayectorias de rendimientos de tamaño n

```
Simulacion.CETES<-function(semillas,n.try)
{
##**Necesarias librerias 'copula' y VGAM
#Input: n.try=tamaño de la trayectoria
# semillas=vector de dim 2 con las tasas de rendimiento
}
```

```

#           semillas[1](semilla CETES 28)
#           semillas[2](semilla CETES 182)
#Output: matriz de tamaño n.try x 2
#
incre28<-rlaplace(n.try,location = 1, scale =0.0099)
PP28<-plaplace(incre28,location = 1, scale =0.0099)
aunif<-runif(n.try)
PP182<-mapply(Gv,u=PP28,a=aunif)
incre182<-qlaplace(PP182,location=1,scale=0.009)
CETE28<-c(semillas[1],semillas[1]*cumprod(incre28))
CETE182<-c(semillas[2],semillas[2]*cumprod(incre182))
return(cbind(CETE28,CETE182))
}

```

## B.5. Valuación de los CETES.

### Cambio de base

```

tasaeq<-function(tasa,vencimiento,plazo)
{
#Input: tasa=tasa de rendimiento nominal
#       vencimiento=días para vencimiento
#       plazo=plazo para obtener la tasa
#       equivalente
#Output: tasa equivalente
b1<-364/vencimiento
b2<-364/plazo
return((((1+tasa/b1)^(b1/b2))-1)*b2)
}

```

### Tasa alambrada

```

tasaalambrada<-function(tasa.cp,tasa.lp,cp,lp,plazo)
{
#Input:tasa.cp=tasa de rendimiento instrumento corto plazo
#       tasa.lp=tasa de rendimiento instrumento largo plazo
#       cp=corto plazo
#       lp=largo plazo

```

```
#      plazo=plazo del cual se desea la tasa
#Output:tasa alambrada
a<-(1+tasa.lp*(lp/360))^((plazo-cp)/360)
b<-(1+tasa.cp*(cp/360))^((lp-plazo)/360)
tasa<-((a*b)^(360/(lp-cp))-1)*(360/plazo)
return(tasa)
}
```

### Tasa equivalente

```
tasas.equivalentes<-function(tasas28,tasas182)
{
#Input: tasas28=vector de tamaño 53
#      tasas182=vector de tamaño 53
#Output: tasas equivalentes para cada semana del año
semana<-seq(1:52)
días.semána<-rep(7,26)
maturitiC28<-rep(c(28,21,14,7),13)
maturitiC182<-rep(c(182,cumsum(-días.semána)+182),2)
tas28<-tasas28
tas182<-tasas182
for(i in 1:52){
if(maturitiC28[i]==21 | maturitiC28[i]==14 | maturitiC28[i]==7)
tas28[i]<-tasaeq(tasas28[i],28,maturitiC28[i])
if(maturitiC182[i]<28)
tas182[i]<-tasaeq(tasas182[i],182,maturitiC182[i])
if(maturitiC182[i]>27)
tas182[i]<-tasaalambrada(tasas28[i],tasas182[i],28,
182,maturitiC182[i])
else {
tas28[i]<-tasas28[i]
tas182[i]<-tasas182[i]
}
}
return(cbind(c(0,semana),tas28,tas182))
}
```

### Valor del CETE



```

precio.cete<-function(r,p)
#Input: r=tasa de rendimiento (0.045% p/e)
#      p=plazo en días del CETE
#Output: precio del CETE
10/(1+r*p/360)

```

## B.6. ALM estocástico

```

ALM<-function(activo0,reclamaciones,valorC28,valorC182)
{
# Input: activo0:activo al principio del año
#       reclamaciones: monto de reclamaciones por semana
#       valorC28:valor de los CETES 28 para cada semana
#       valorC182:valor de los CETES 182 para cada semana
#Output: activo Total, activo C28, activo C182
#
#Política de inversión:1er semestre 50% CETES 28, 50% CETES 182
#                       2do semestre 75% CETES 28, 25% CETES 182
titulos<-matrix(0,nrow=53,ncol=2)
colnames(titulos)<-c("C28","C182")
activo<-matrix(0,nrow=53,ncol=3)
colnames(activo)<-c("Total","C28","C182")
titulos[1,1]<-0.5*activo0/valorC28[1]
titulos[1,2]<-0.5*activo0/valorC182[1]
activo[1,]<-c(activo0,0.5*activo0,0.5*activo0)
#Primera semestre
for(k in 1:25)
{
if(!(is.na(match(k,4*(1:6))))){
montoC28<-10*titulos[k,1]
if(reclamaciones[k]<=montoC28){
titulos[k+1,1]<-(montoC28-reclamaciones[k])/valorC28[k+1]
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]
}
else{
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]-
((reclamaciones[k]-montoC28)/valorC182[k+1])
}
}
}
}

```

```

}
}
else{
montoC28<-valorC28[k+1]*titulos[k,1]
if(reclamaciones[k]<=montoC28){
titulos[k+1,1]<-(montoC28-reclamaciones[k])/valorC28[k+1]
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]
}
else{
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]-
((reclamaciones[k]-montoC28)/valorC182[k+1])
}
}
activo[k+1,2]<-valorC28[k+1]*titulos[k+1,1]
activo[k+1,3]<-valorC182[k+1]*titulos[k+1,2]
activo[k+1,1]<-activo[k+1,2]+activo[k+1,3]
}
montoC182<-10*titulos[26,2]
if(reclamaciones[k]<=montoC182){
titulos[27,1]<-titulos[26,1]+
0.75*(montoC182-reclamaciones[26])/valorC28[27]
titulos[27,2]<-0.25*(montoC182-reclamaciones[26])/valorC182[27]
}
else{
titulos[27,1]<-titulos[26,1]-
((reclamaciones[26]-montoC28)/valorC28[27])
}
activo[27,2]<-valorC28[27]*titulos[27,1]
activo[27,3]<-valorC182[27]*titulos[27,2]
activo[27,1]<-activo[27,2]+activo[27,3]
#Segundo semestre
for(k in 27:51)
{
if(!(is.na(match(k,4*(7:12))))){
montoC28<-10*titulos[k,1]
if(reclamaciones[k]<=montoC28){
titulos[k+1,1]<-(montoC28-reclamaciones[k])/valorC28[k+1]
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]

```

```

}
else{
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]-
                ((reclamaciones[k]-montoC28)/valorC182[k+1])
}
}
else{
montoC28<-valorC28[k+1]*titulos[k,1]
if(reclamaciones[k]<=montoC28){
titulos[k+1,1]<-(montoC28-reclamaciones[k])/valorC28[k+1]
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]
}
else{
titulos[k+1,2]<-titulos[k,2]-
                ((reclamaciones[k]-montoC28)/valorC182[k+1])
}
}
activo[k+1,2]<-valorC28[k+1]*titulos[k+1,1]
activo[k+1,3]<-valorC182[k+1]*titulos[k+1,2]
activo[k+1,1]<-activo[k+1,2]+activo[k+1,3]
}
activo[53,1]<-10*(titulos[52,1]+titulos[52,2])-reclamaciones[52]
return(activo)
}

```

## B.7. Activo inicial para evitar descalce.

```

ALM.0<- function(reclamaciones,valorC28,valorC182,iteraciones=100,
                tolerancia=0.01)
{
# Input: reclamaciones: monto de reclamaciones por semana
#       valorC28:valor de los CETES 28 para cada semana
#       valorC182:valor de los CETES 182 para cada semana
#       iteraciones: 100 por default
#       tolerancia  $0.01 por default
#
# Output: capital.inicialactivo para que el balance sea 0.

```

```
#

indicador <- 0
capital.inicial<- sum(reclamaciones)
for(i in 1:iteraciones){
activo<- ALM(capital.inicial,reclamaciones,valorC28,valorC182)[,1]
if((activo[53] < tolerancia) & (activo[53] >= 0)){
indicador <- 1
break
}
capital.inicial <- capital.inicial - activo[53]
}
if(indicador == 0){
warning("Problema para encontrar capital inicial,
aumente las iteraciones o la tolerancia")
stop
}
return(capital.inicial)
}
```



# Bibliografía

*Descripción técnica de los certificados de la tesorería de la federación.* Banco de México. Consultado el 05 de abril de 2013.

<http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/>

BAUER, ROB; HOEVENAARS, ROY y STEENKAMP, TOM (2006). «Asset liability management». *Oxford Handbook of Pensions and Retirement Income*, pp. 417–440.

BOWERS, NEWTON L; GERBER, HANS U; HICKMAN, JAMES C; JONES, DONALD A y NESBITT, CECIL J (1997). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries Schaumburg, IL.

CAI, J (2004). «Asset Management. Encyclopedia of Actuarial Science». *John Wiley and Sons, Chichester*, **1**, pp. 1–17.

COMMISSION, EUROPEAN y otros (2010). «Internal Market and Services DG. Insurance and pensions, Brussels». *QIS5 Technical Specifications (Working Document of the Commission services)*.

CONWAY, DA (1979). «Multivariate Distributions with Specified Marginals. (Technical Report 145.)». *Stanford University*.

DE SEGUROS Y FIANZAS, COMISIÓN NACIONAL (2013). «Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas». *Diario Oficial de la Federación*.

DEHEUVELS, P. (1979). *La fonction de dépendence empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d indépendence*. Acad Roy Belg Bul.

- EMBRECHTS, PAUL; FREY, RUDIGER y MCNEIL, ALEXANDER (2005). «Quantitative risk management». *Princeton Series in Finance, Princeton*.
- ERDELY, A. (2009). «Validación y actualización de tablas de sobrevivencia». *Documento de trabajo*.
- ERDELY, A. y DÍAZ-VIERA, M. (2010). «Nonparametric and Semiparametric Bivariate Modeling of Petrophysical Porosity-Permeability Dependence from Well Log Data». *In: Copula Theory and Its Applications (P Jaworski et al. eds), Lecture Notes in Statistics - Springer 198*, pp. 267–278.
- GENEST, C; NEŠLEHOVÁ, J y QUESSY, J F (2011). *Test of symmetry for bivariate copulas*. Annals of the Institute of Statistical Mathematics.
- GENEST, CHRISTIAN y RÉMILLARD, BRUNO (2004). *Tests of independence and randomness based on the empirical copula process.*
- GERBER, H.U. (1997). *Life insurance mathematics*. Springer-Verlag.
- GIL, F.J.; HERAS, M. A. y VILAR, Z.J. (1999). *Matemáticas de los seguros de vida*. Editorial Mapfre.
- HOFERT, MARIUS y MÄCHLER, MARTIN (2011). «Nested Archimedean copulas meet R: the nacopula package». *Journal of Statistical Software*, **39(9)**, pp. 1–20.
- KOJADINOVIC, IVAN y YAN, JUN (2010). «Modeling multivariate distributions with continuous margins using the copula R package». *Journal of Statistical Software*, **34(9)**, pp. 1–20.
- MARSAGLIA, GEORGE y MARSAGLIA, JOHN (2004). «Evaluating the anderson-darling distribution». *Journal of Statistical Software*, **9(2)**, pp. 1–5.
- MENDOZA, M; MADRIGAL, AM y GUTIÉRRES-PEÑA, E (2000). «Predictive Mortality Graduation and the Value At Risk. A Bayesian Approach». *ITAM, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas e IIMAS-UNAM*.
- NELSEN, ROGER B (2006). *An introduction to copulas*. Springer Verlag.

- R DEVELOPMENT CORE TEAM (2012). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.  
<http://www.R-project.org/>
- ROYSTON, JP (1982). «An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples». *Applied Statistics*, pp. 115–124.
- SÁNCHEZ CERÓN, CARLOS (2001). «Valor en riesgo y otras aproximaciones». *México: SEI Investments de México*.
- SIBURG, KARL FRIEDRICH y STOIMENOV, PAVEL A (2008). «Gluing copulas». *Communications in Statistics Theory and Methods*, (19), pp. 3124–3134.
- VENABLES, WILLIAM N; SMITH, DAVID M y TEAM, R DEVELOPMENT CORE (2002). «An introduction to R».
- YAN, JUN (2007). «Enjoy the joy of copulas: With a package copula». *Journal of Statistical Software*, 21(4), pp. 1–21.
- YAN, JUN y KOJADINOVIC, IVAN (2012). «Copula: Multivariate dependence with copulas». *R package version 0.999-5*.
- YEE, THOMAS W; YEE, MAINTAINER THOMAS y SUGGESTS, MASS (2013). «Package VGAM».