



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**CENTRO DE FÍSICA APLICADA Y TECNOLOGÍA  
AVANZADA**

**Desarrollo teórico para la caracterización  
de una onda de choque por su efecto en el  
campo de índice de refracción de un  
fluido**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN TECNOLOGÍA**

**P R E S E N T A:**

**FERNANDO ELEAZAR GARCÍA RAMÍREZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. REMY FERNAND ÁVILA FOUCAT**

**Juriquilla, Querétaro**

**2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*a mis padres*



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a mis padres Guadalupe Ramírez Vázquez y Onofre García Mejía por su apoyo total en todo aspecto de mi vida.

A mi director de tesis el Dr. Remy Ávila Foucat por sus enseñanzas, consejos y por su dedicación a mi formación académica.

A cada uno de los profesores con los que tuve oportunidad de tomar clases en la licenciatura, les doy gracias por compartir sus conocimientos conmigo.

A todos mis compañeros y amigos de la licenciatura en tecnología ya que tuve la fortuna de aprender muchas cosas de ellos también.

Al Dr. Alejandro Vargas Casillas quien fue mi tutor de estancia de investigación.

Finalmente agradezco al Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada por permitirme vivir esta experiencia llena de conocimientos, alegrías y satisfacciones.



## RESUMEN

En este trabajo se propone un método óptico para caracterizar ondas de choque como las que se utilizan en litotricia extracorpórea. Para esto se analiza el cambio de fase que sufre una onda luminosa al atravesar una onda de choque. A partir del perfil de presión de la onda de choque se obtiene un perfil de índice de refracción del cual se obtiene el cambio de fase que sufre la onda luminosa al atravesar la onda de choque. Este cambio de fase se traduce en fluctuaciones de intensidad en una imagen las cuales pueden utilizarse para caracterizar la onda de choque. Aquí se presentan simulaciones numéricas que muestran las fluctuaciones de intensidad a diferentes distancias de propagación. En las simulaciones se observó que se producen franjas de luz brillantes que representan la difracción de la luz que produce el cambio de presión de la onda de choque. Se observó que para distancias de propagación muy cortas el contraste entre las franjas de luz y el fondo más oscuro es pequeño. Conforme se aumenta la distancia de propagación tenemos un contraste más alto pero también incrementa la difracción en la imagen. Se encontró que para una distancia de propagación de 0.17 m se tiene el contraste más alto entre la franja de luz brillante y el fondo, además de que la difracción en la imagen no es tan notoria.



## ABSTRACT

In this work, an optical method to describe shock waves as those used in lithotripsy is proposed. For this purpose, the phase change produced in a light wave when it crosses a shock wave is analyzed. From the pressure profile of the shock wave, a refractive index profile is obtained and which is then used to calculate the phase change of a light beam that crosses the wave. The phase change is translated into intensity fluctuations in an image which can be used to describe the shock wave. Simulations showing the intensity fluctuations at different propagation distances are presented here. In the simulations we observed that fringes are produced they are due to the diffraction of the light produced by the pressure change of the shock wave. We observed that at short propagation distances the contrast between the fringes and the darker background is small. As propagation distance increases we have a higher contrast but the diffraction in the image is increased too. It was found that for a propagation distance of 0.17 m we have the highest contrast between the fringes and the background, besides the diffraction in the image is not very noticeable.



## Índice general

1..	<i>Introducción</i> . . . . .	1
2..	<i>Antecedentes</i> . . . . .	4
2.1.	Ondas de choque en litotricia . . . . .	4
2.2.	Fotografía schlieren . . . . .	6
2.3.	SCIDAR generalizado . . . . .	8
2.4.	Herramientas teóricas . . . . .	11
3..	<i>SCIDAR generalizado</i> . . . . .	14
3.1.	Observación en el plano conjugado de la capa turbulenta . . . . .	14
3.2.	Observación en el plano de detección . . . . .	27
3.3.	Aplicación de la técnica del SCIDAR generalizado a la visualización de ondas de choque . . . . .	29
4..	<i>Simulaciones numéricas</i> . . . . .	36
4.1.	Patrones de difracción . . . . .	36
4.2.	Cambio de fase producido por la onda de choque . . . . .	39
4.2.1.	Perfil de presión de la onda de choque . . . . .	41
4.2.2.	Variación del índice de refracción del agua a causa de la onda de choque . . . . .	45
4.2.3.	Cambio de fase . . . . .	46
4.3.	Perfil de cambio de fase en dos dimensiones . . . . .	51
4.4.	Variaciones de intensidad producidas por la onda de choque . . . . .	58
5..	<i>Conclusiones y perspectivas</i> . . . . .	70
	<i>Apéndice</i> . . . . .	72
A..	<i>Programación en MATLAB</i> . . . . .	73

A.1. Funciones matemáticas en MATLAB . . . . .	73
A.2. Transformada discreta de Fourier . . . . .	78
A.3. Transformada discreta de Fourier en MATLAB . . . . .	82
A.4. Dominio de la frecuencia . . . . .	85
A.5. Transformada inversa de Fourier discreta . . . . .	90
<i>B.. Programa 1</i> . . . . .	92
<i>C.. Programa 2</i> . . . . .	97

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se hace un estudio teórico de un método óptico para caracterizar una onda de choque como las que se utilizan en litotricia. Una onda de choque es una onda de presión que viaja a una velocidad mayor a la del sonido. Estas ondas se pueden concentrar hacia un cálculo renal para fragmentarlo en partes lo suficientemente pequeñas para atravesar el tracto urinario. A la técnica de fragmentar cálculos renales mediante ondas de choque se le conoce como Litotricia Extracorpórea con Ondas de Choque. Además de la litotricia se han encontrado otras aplicaciones para las ondas de choque como la transfección celular (introducir ADN a las células) [1]. También se utilizan en cardiología, ortopedia y traumatología, así como para transformar genéticamente hongos y bacterias.

Los equipos de litotricia producen ondas de choque en agua usando actuadores piezoeléctricos, una descarga eléctrica o una bobina. Las ondas de choque se pueden concentrar en una pequeña región utilizando reflectores o lentes acústicas. En el caso de la litotricia extracorpórea, el lugar donde se concentran las ondas de choque debe coincidir con la posición del cálculo renal. Para localizar los cálculos renales, los equipos de litotricia utilizan ultrasonido ó fluoroscopia.

El principal mecanismo de fragmentación del cálculo renal es la cavitación acústica. Alrededor del cálculo renal existen burbujas (de un diámetro entre 7 y 55  $\mu\text{m}$ ) que se expanden y colapsan cuando la onda de choque las atraviesa [2]. El colapso de estas burbujas forma ondas de choque secundarias y “jets” de líquido a alta velocidad (arriba de 400 m/s) que dañan el cálculo renal.

Para medir la presión de las ondas de choque se utilizan hidrófonos que son dispositivos que pueden convertir los cambios de presión en el agua en señales eléctricas. Con estos instrumentos se puede estudiar la presión que ejerce la onda de choque en el lugar donde se hace la medición. Es muy importante conocer la presión que ejerce la onda de choque en el cálculo renal, ya que, si las ondas de choque producen un cambio de presión muy

grande, pueden dañar el tejido que rodea al cálculo renal.

La fotografía Schlieren se ha utilizado para observar ondas de choque. Esta técnica nos permite observar variaciones de densidad que producen las ondas de choque. Con cámaras de alta velocidad se pueden obtener fotografías de las ondas de choque y así observar su comportamiento.

Existe un método que puede utilizarse para medir variaciones de densidad y se conoce como SCIDAR (Scintillation Detection and Ranging). Este método es utilizado para estudiar la turbulencia atmosférica en sitios donde se realizan observaciones astronómicas. La técnica SCIDAR consiste en observar con un telescopio la luz que proviene de una estrella binaria. Al atravesar la atmósfera de la Tierra, las ondas de luz sufren fluctuaciones de fase debido a las variaciones de densidad y temperatura del aire. Las fluctuaciones de fase de las ondas luminosas hacen que en la pupila del telescopio se produzcan fluctuaciones de intensidad luminosa (centelleo). Después se hace un análisis del centelleo y así se pueden obtener parámetros físicos que nos indican el comportamiento de la turbulencia en la atmósfera. Los principales parámetros que se miden son el perfil de turbulencia  $C_N^2(h)$  y la velocidad de las capas turbulentas  $v(h)$  [3].

La desventaja de esta técnica es que sólo se pueden analizar capas de la atmósfera muy elevadas, no se puede analizar el comportamiento de la turbulencia en capas cerca de la superficie. Este problema se solucionó gracias a las investigaciones de Fuchs, Tallon y Vernin quienes propusieron la técnica del SCIDAR generalizado [4]. En esta técnica, en lugar de que el plano de análisis esté situado en la pupila del telescopio, el análisis del centelleo se hace en un plano conjugado que se encuentra por debajo de la pupila. Con esta modificación de la técnica SCIDAR, se puede analizar la turbulencia atmosférica en capas que se encuentran cerca de la superficie de la Tierra.

Se desea desarrollar un método óptico para caracterizar ondas de choque basándonos en la técnica del SCIDAR generalizado. Los cambios de presión de la onda de choque producen una variación en el índice de refracción del medio (en este caso agua). Si se hace incidir un haz de luz al medio por donde se propaga la onda de choque, las ondas luminosas sufrirán un cambio de fase debido a los cambios de índice de refracción que produce la onda de choque.

Las ondas luminosas con fase modificada se propagan hasta un plano de análisis donde se produce centelleo. El plano de análisis se encuentra a cierta distancia del lugar por donde se propaga la onda de choque. Podemos analizar el centelleo producido por la onda de choque para obtener algunos parámetros físicos de la onda de choque (velocidad, fluctuación de presión).

---

Como ya se mencionó anteriormente, el objetivo es desarrollar un método óptico para caracterizar ondas de choque. Su importancia radica en que actualmente las ondas de choque se aplican en varios campos de la medicina. Con este método óptico podremos obtener información de la onda de choque analizando el centelleo que se produce a causa de los cambios de presión de la onda de choque. Con un mejor conocimiento de los parámetros físicos de la onda de choque, se pueden desarrollar nuevas técnicas que permitan incrementar la eficiencia de fragmentación de los cálculos renales.

En este trabajo se realizaron simulaciones numéricas que muestran el centelleo producido por los cambios de fase que sufre una onda luminosa al atravesar una onda de choque. Se calculó el cambio de fase que sufre la onda luminosa debido a los cambios de presión de la onda de choque. Para calcular las variaciones de intensidad luminosa (centelleo) se utilizó la difracción de Huygens-Fresnel. Las simulaciones se realizaron en MATLAB.

En el capítulo 2 de esta tesis se explica cómo se utilizan las ondas de choque en litotricia. También se da una breve explicación sobre la fotografía Schlieren y la técnica del SCIDAR generalizado. En el capítulo 3 se explica en qué consiste la técnica del SCIDAR generalizado con más detalle. También se describe el arreglo óptico que se utilizará para observar las fluctuaciones de intensidad luminosa (centelleo) que produce la onda de choque. En el capítulo 4 se presentan los cálculos que se realizaron para obtener el cambio de fase que sufre una onda luminosa al atravesar una onda de choque. Posteriormente se presentan los resultados de las simulaciones que muestran el centelleo producido por las variaciones de presión de la onda de choque.

## 2. ANTECEDENTES

En este capítulo se da una explicación de cómo se utilizan las ondas de choque para la fragmentación de cálculos renales. Después se describe la fotografía Schlieren que sirve para visualizar las ondas de choque. Posteriormente se da una explicación de la técnica del SCIDAR generalizado. Finalmente se presentan las ecuaciones que se utilizaron para calcular las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque.

### 2.1. *Ondas de choque en litotricia*

Las ondas de choque son ondas de presión producidas por un objeto que se mueve a una velocidad mayor a la del sonido. Una bala o un avión que se mueva a una velocidad supersónica puede producir una onda de choque. Más que de una onda, se trata de frentes de onda con un incremento de presión muy rápido seguido de una caída de presión rápida también. Las ondas de choque se propagan a una velocidad mayor que la del sonido y su intensidad se reduce conforme se propagan (ver [6]).

Las ondas de choque se aplican en la medicina en la fragmentación de cálculos renales. Es posible enfocar las ondas de choque hacia el cálculo renal para fragmentarlo en partes lo suficientemente pequeñas para que puedan atravesar el tracto urinario. A esta técnica se le conoce como litotricia extracorpórea con ondas de choque (ESWL por sus siglas en inglés).

Como se puede ver en la figura 2.1, las ondas de choque se generan fuera del cuerpo humano y son concentradas en el cálculo renal. El generador de ondas de choque se encuentra sumergido en agua. De esta manera pueden generarse ondas de presión en el agua que se propagan hacia el cálculo renal. Las ondas de choque son producidas en agua ya que su impedancia acústica es similar a la del cuerpo humano. Debido a la forma semiesférica del generador, la energía de las ondas de choque se concentra en una zona focal donde se encuentra el cálculo renal.

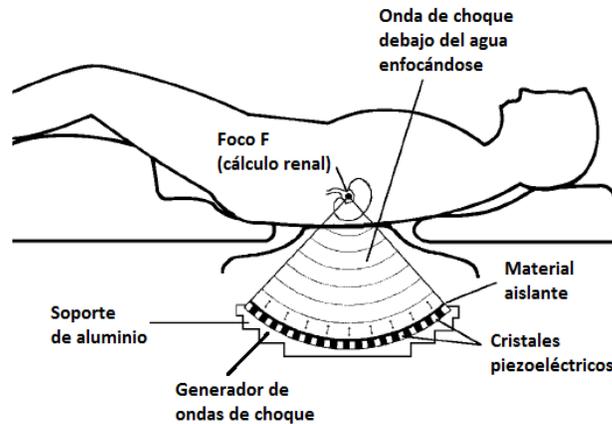


Fig. 2.1: Litotricia extracorpórea con ondas de choque. El generador de ondas de choque (en este caso piezoeléctrico) produce ondas de presión que son enfocadas hacia el cálculo renal. Imagen tomada de [9].

Existen tres tipos de generadores de ondas de choque: electrohidráulicos, piezoeléctricos y electromagnéticos (ver [7]). En la figura 2.2 se muestra un diagrama de cada tipo de generador.

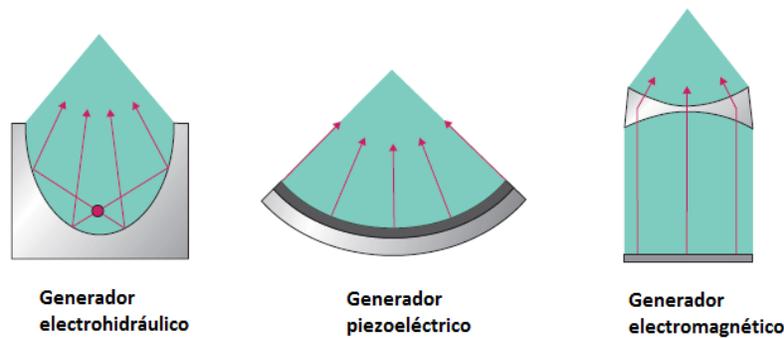


Fig. 2.2: Esquema de los tipos de generadores de ondas de choque. Imagen tomada de [7].

Los generadores electrohidráulicos producen la onda de choque con una descarga eléctrica debajo del agua. Esta descarga se produce en el foco de un reflector elipsoidal. La onda de choque se propaga hacia las paredes del reflector y después se refleja hacia el segundo foco.

Los generadores piezoeléctricos producen la onda de choque con varios

cristales piezocerámicos. Estos cristales se colocan sobre un soporte metálico con forma esférica y se conectan en paralelo. Al recibir una descarga eléctrica, los cristales se expanden al mismo tiempo y producen una onda de presión que se concentra en el punto focal del arreglo esférico.

Los generadores electromagnéticos producen la onda de choque con una membrana metálica que se coloca sobre una bobina plana con forma espiral. Para producir la onda de choque, se aplica un voltaje a la bobina y esto hace que la membrana metálica sea repelida. El movimiento de la membrana produce la onda de choque que se propaga a través del agua. Para enfocar la energía de la onda se utiliza una lente acústica.

Además de la fragmentación de cálculos renales, se han encontrado otras aplicaciones para las ondas de choque. Una de ellas es la trasfección de células por ondas de choque. La trasfección consiste en introducir ADN a células eucariotas. Se han realizado estudios que demuestran que las ondas de choque permiten un aumento en la permeabilidad de la membrana celular. También se ha estudiado la aplicación de las ondas de choque como método de conservación de alimentos. Las ondas de choque pueden ser visualizadas con la fotografía schlieren que se describe en la siguiente sección [11].

## 2.2. Fotografía schlieren

La fotografía schlieren es una técnica que nos permite observar variaciones de densidad. Esta técnica se basa en el hecho de que si un rayo de luz atraviesa un medio donde hay variaciones de densidad, se desviará de su camino en línea recta. En la figura 2.3 se puede ver un esquema del funcionamiento de la fotografía schlieren.

Como se puede ver en la figura 2.3, una fuente de luz ilumina un espejo cóncavo y éste refleja los rayos de luz hacia una videocámara. En el punto focal del espejo se coloca la hoja de una navaja. Si no hay cambios de densidad en el medio, los rayos de luz no se desvían y llegan a la videocámara sin problemas (figura 2.3a). Por otra parte, si hay variaciones de densidad en el medio algunos rayos de luz se desvían de su camino en línea recta y son bloqueados por la hoja de la navaja (figura 2.3). Los rayos bloqueados no alcanzan la videocámara y aparecen como líneas negras en la imagen obtenida. De esta manera se pueden obtener imágenes de las variaciones de densidad en el medio. Ya que las ondas de choque producen cambios abruptos de densidad en el medio por donde se propagan, se utiliza la fotografía schlieren

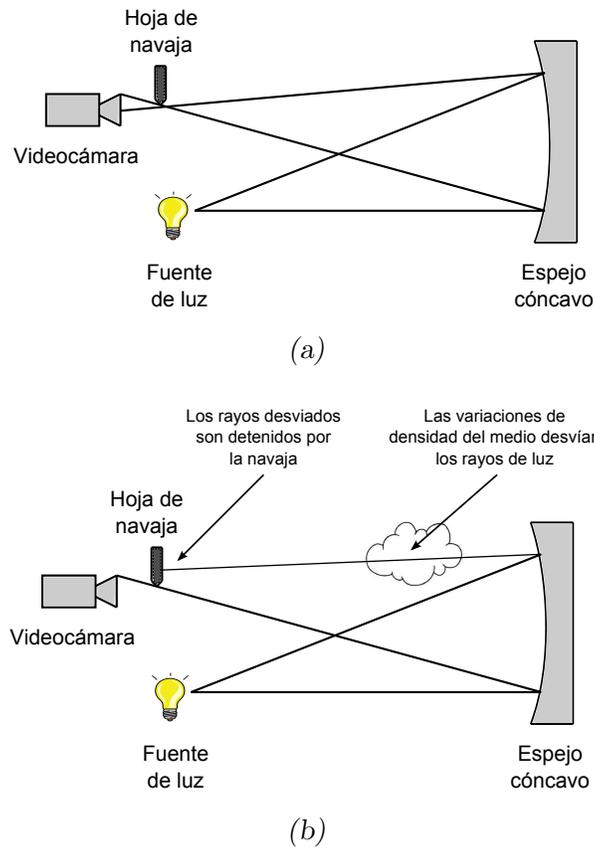


Fig. 2.3: Método para obtener una fotografía schlieren. Se coloca la hoja de una navaja en el punto focal del espejo. (a) Si no hay variaciones de densidad en el medio, los rayos de luz no se desvían y llegan a la videocámara. (b) Cuando hay variaciones de densidad algunos rayos de luz se desvían y son detenidos por la navaja.

para observar su comportamiento.

La fotografía schlieren ha sido utilizada para observar ondas de choque [11]. Existe una técnica que se ha utilizado para estudiar el comportamiento de la turbulencia atmosférica. Esta técnica se conoce como SCIDAR y permite calcular los cambios de fase que sufre una onda de luz al atravesar un medio con cambios de presión. En este trabajo queremos utilizar la técnica del SCIDAR generalizado para caracterizar una onda de choque. En la siguiente sección se da una breve explicación de esta técnica.

### 2.3. SCIDAR generalizado

La turbulencia atmosférica reduce drásticamente la resolución de los telescopios ópticos. Conocer cómo se comporta la turbulencia atmosférica es imprescindible al momento de construir instrumentación astronómica de nueva generación. Por ejemplo, mediciones de turbulencia en los sitios candidatos para la instalación de un nuevo telescopio permite determinar el sitio idóneo para el tipo de observaciones que se llevarán a cabo. La luz que proviene de las estrellas se ve afectada por las fluctuaciones de temperatura del aire que provocan fluctuaciones del índice de refracción y como consecuencia no se pueden lograr imágenes de calidad óptima. Al realizar estudios de turbulencia atmosférica se busca obtener el perfil de la intensidad turbulenta del índice de refracción, comúnmente notado  $C_N^2(h)$  y la velocidad de las capas turbulentas  $v(h)$ .

Los frentes de onda de la luz que proviene de las estrellas sufren fluctuaciones de fase debido a los cambios turbulentos del índice de refracción que existen en la atmósfera. Los frentes de onda distorsionados se propagan a la pupila del telescopio y producen fluctuaciones de intensidad en ella. A las fluctuaciones de intensidad se les conoce como centelleo y se utiliza para obtener los perfiles de turbulencia atmosférica. El centelleo se puede apreciar cuando observamos las estrellas, éstas parecen estar “parpadeando” debido a la distorsión que sufre la luz al atravesar la atmósfera.

Una manera de medir los perfiles de turbulencia atmosférica es utilizando la técnica SCIDAR (scintillation detection and ranging) que consiste en analizar los patrones de centelleo que produce una estrella binaria en la pupila del telescopio. Por simplicidad, supongamos que sólo hay una sola capa turbulenta a una altura  $h$  en la atmósfera. Las dos estrellas tienen una separación angular de  $\rho$  y producen dos patrones de centelleo que se encuentran separados por una distancia  $d = \rho h$  (ver figura 2.4). Si se obtiene el valor de  $d$  podemos saber el valor  $h$ .

Para calcular el valor de  $d$  se toman imágenes de los patrones de centelleo que se producen en el plano de la pupila del telescopio. A estas imágenes se les calcula la función de autocorrelación promedio, la cual tiene un pico central máximo y dos picos laterales más pequeños localizados en  $r_1 = \rho h$  y  $r_2 = -\rho h$ . El perfil de turbulencia  $C_N^2(h)$  puede ser obtenido de la autocorrelación. El centelleo producido por una capa turbulenta a una altura  $h$  es proporcional a  $h^{5/6}$ . Por esta razón la técnica SCIDAR no puede detectar capas turbulentas que se encuentran a bajas altitudes. Esto es un problema significativo ya que

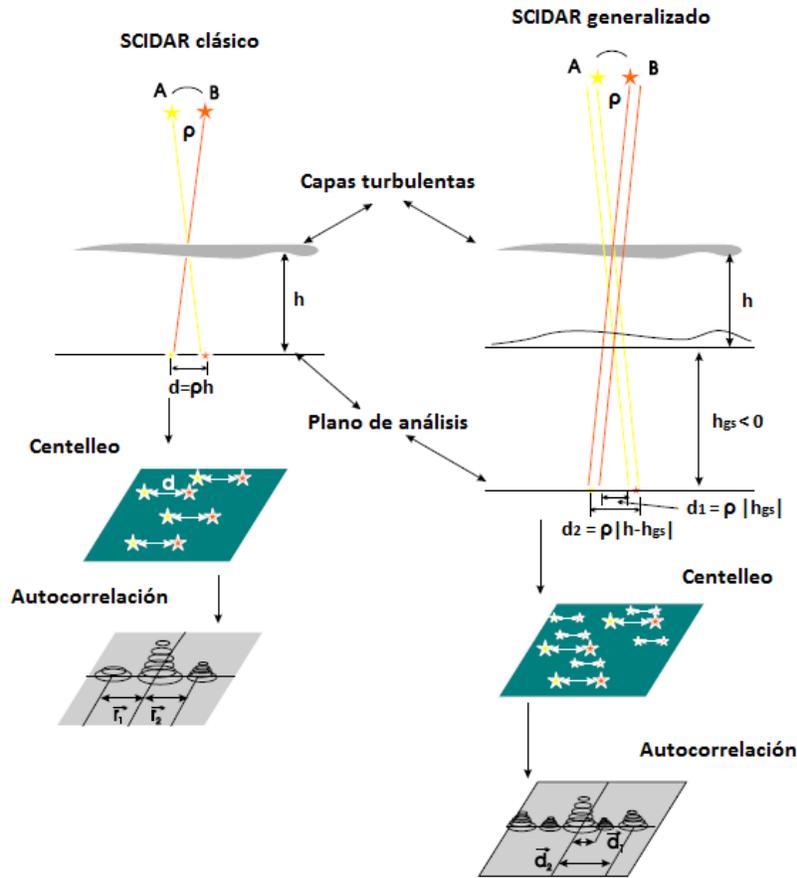


Fig. 2.4: SCIDAR clásico y SCIDAR generalizado. Imagen tomada de [3].

gran parte de la turbulencia atmosférica se encuentra cerca de la superficie terrestre.

Para solucionar este problema se creó la técnica del SCIDAR generalizado que se muestra en la figura 2.4. Esta técnica consiste en analizar los patrones de centelleo que produce una estrella binaria en un plano virtual localizado a una distancia  $h_{gs}$  por debajo de la pupila del telescopio (plano de análisis). En este caso, los patrones de centelleo están separados por una distancia  $|h - h_{gs}|\rho$ , que también es la separación de los picos laterales en la autocorrelación. La varianza del centelleo producido por una capa a una altura  $h$  es proporcional a  $|h - h_{gs}|^{5/6}$ , lo cual hace detectables capas cercanas al suelo ( $h \approx 0$ ). La técnica del SCIDAR generalizado permite detectar capas

turbulentas en bajas altitudes. A partir de la autocorrelación de los patrones de centelleo se puede obtener el perfil de turbulencia  $C_N^2(h + h_{gs})$  como en el caso el SCIDAR clásico.

Para determinar la velocidad de desplazamiento  $v(h)$  de una capa turbulenta que se encuentra a una altura  $h$ , se toman imágenes de los patrones de centelleo cada  $\Delta t$  tiempo. Los patrones de centelleo se desplazan una distancia  $v(h)\Delta t$  entre cada imagen. La correlación cruzada de imágenes obtenidas a instantes separados por  $\Delta t$  tendrá los mismos 3 picos que la autocorrelación, pero estará desplazada una distancia  $v(h)\Delta t$  del centro de la correlación. Ya que se conoce el valor de  $\Delta t$ , el valor de  $v(h)$  puede ser obtenido midiendo la distancia que se desplaza la correlación cruzada (ver [3]). En la figura 2.5 se muestra un esquema de este método, se puede ver que los patrones de centelleo se miden en un plano por debajo de la pupila del telescopio (SCIDAR generalizado).

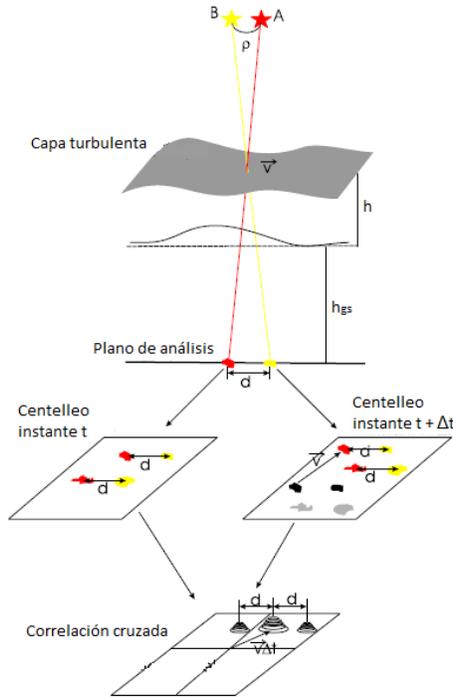


Fig. 2.5: Método para obtener la velocidad de desplazamiento. Imagen tomada de [3].

Como ya se había mencionado, queremos utilizar la técnica del SCIDAR

generalizado para caracterizar una onda de choque. En esta sección vimos que podemos caracterizar una capa turbulenta a partir de los patrones de centelleo que produce. Así como las fluctuaciones turbulentas de temperatura provocan cambios del índice de refracción del aire, el cambio de presión generado por una onda de choque provoca cambios del índice de refracción del medio en el que viaja. Por esta razón, suponemos que la técnica del Scidar generalizado nos permitirá caracterizar una onda de choque de la misma manera.

Se utilizó el principio de Huygens-Fresnel para calcular las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque en una onda luminosa que la atraviesa. En la siguiente sección se presenta la ecuación de Hugins-Fresnel y la ecuación de la difracción de Fresnel.

#### 2.4. Herramientas teóricas

En esta sección se presenta el principio de Huygens-Fresnel y la difracción de Fresnel. Estas ecuaciones nos permiten calcular los patrones de difracción que produce una apertura. En este trabajo se utilizaron estas ecuaciones para calcular las fluctuaciones de intensidad que produce la onda de choque.

El principio de Hugins-Fresnel se define como:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (2.1)$$

Esta ecuación nos permite calcular el campo complejo  $U$  en un plano  $(x, y)$  que se encuentra a una distancia  $z$  del plano donde se encuentra la apertura de difracción (plano  $(\xi, \eta)$ ) (Goodman 1968). La figura 2.6 nos muestra un esquema de estos sistemas de coordenadas. Los términos  $\lambda$  y  $k$  son la longitud de onda y el número de onda ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) respectivamente.

El término  $r_{01}$  es la distancia que hay entre  $P_0$  y  $P_1$  (figura 2.6). Esta distancia está dada por:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.2)$$

El término  $U(\xi, \eta)$  representa el campo complejo que tenemos en el plano  $(\xi, \eta)$ . Se expresa como una onda de la forma:

$$U(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{-i\phi(\xi, \eta)} \quad (2.3)$$

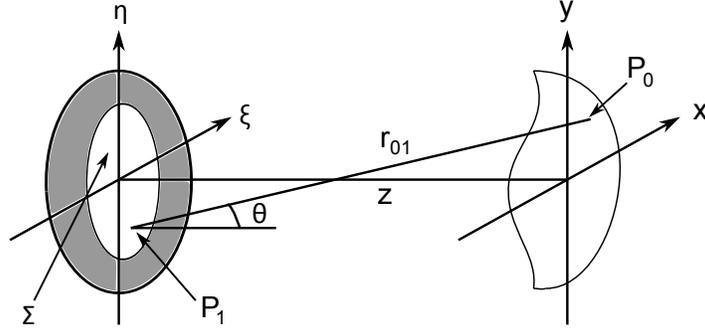


Fig. 2.6: Sistema de coordenadas  $(x, y)$  a una distancia  $z$  del sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ .

donde  $A(\xi, \eta)$  es la amplitud y  $\phi(\xi, \eta)$  la fase. Ambos términos son funciones de la posición.

A partir del principio de Huggens-Fresnel (ecuación 2.1), se puede obtener la difracción de Fresnel que viene dada por:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.4)$$

Esta ecuación se obtiene haciendo una aproximación a la distancia  $r_{01}$  (Goodman 1996 [14]). La aproximación es válida si se cumple la siguiente condición:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2 \quad (2.5)$$

La integral de la ecuación 2.4 se puede expresar como una transformada de Fourier. La transformada de Fourier  $F$  en 2-D se define como:

$$F(u, v) = F[f(x, y)]_{(u,v)} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.6)$$

Podemos reacomodar la ecuación 2.4 de la siguiente manera:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} D(\xi, \eta) e^{-i2\pi[(\frac{x}{\lambda z})\xi + (\frac{y}{\lambda z})\eta]} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

donde

$$D(\xi, \eta) = U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \quad (2.8)$$

es una función de  $\xi$  y  $\eta$ . Como se puede observar, la integral de la ecuación 2.7 tiene la forma de una transformada de Fourier.

Hacemos las siguientes sustituciones en la ecuación 2.6:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\lambda z} \\ v &= \frac{y}{\lambda z} \\ f(x, y) &= D(\xi, \eta) \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que:

$$F[D(\xi, \eta)]_{\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)} = \iint_{-\infty}^{\infty} D(\xi, \eta) e^{-i2\pi\left[\left(\frac{x}{\lambda z}\right)\xi + \left(\frac{y}{\lambda z}\right)\eta\right]} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

El término de la derecha en esta igualdad es precisamente la integral de la ecuación 2.7. Sustituimos 2.9 en 2.7 y obtenemos:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} F[D(\xi, \eta)]_{\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)} \quad (2.10)$$

Finalmente sustituimos 2.8 en 2.10.

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} F[U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)}]_{\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right)} \quad (2.11)$$

Esta es la ecuación de la difracción de Fresnel expresada como una transformada de Fourier.

### 3. SCIDAR GENERALIZADO

La técnica del SCIDAR generalizado se utiliza para caracterizar capas turbulentas a bajas altitudes. En la sección 2.3 se explicó en qué consiste esta técnica. Cuando las ondas de luz que provienen de las estrellas atraviesan la atmósfera, sufren una modificación en su fase. Las ondas luminosas con fase modificada se propagan hacia un plano que se encuentra por debajo de la pupila del telescopio y producen fluctuaciones de intensidad (centelleo). Para caracterizar las capas turbulentas de la atmósfera se hace un análisis de estas fluctuaciones de intensidad.

El SCIDAR generalizado fue propuesto por *Fuchs, Tallon y Vernin* en su trabajo “*Focusing on a turbulent layer: principle of the generalized SCIDAR*” [4]. Ellos demostraron que cuando se enfoca una capa turbulenta no se producen patrones de centelleo. Como se muestra en la figura 3.1, podemos obtener una imagen de la capa turbulenta usando una lente (pupila del telescopio) y un colimador. Si hacemos la observación en el plano donde se forma la imagen de la capa turbulenta, no se producirá ningún centelleo. La técnica del SCIDAR generalizado nos dice que para poder apreciar los patrones de centelleo, debemos hacer la observación en un plano (plano de detección) que se encuentre ya sea antes o después del plano donde se forma la imagen de la capa turbulenta.

En este capítulo se demuestra que al enfocar en el plano donde se produce un cambio de fase no se observa centelleo (figura 3.1). Después se da una explicación de cómo podemos observar el centelleo que produce una capa turbulenta. Finalmente se explica cómo utilizaremos la técnica del SCIDAR generalizado para la visualización de ondas de choque.

#### 3.1. Observación en el plano conjugado de la capa turbulenta

En esta sección se presenta la demostración de que no se producen fluctuaciones de intensidad al enfocar sobre la capa turbulenta. El resultado que obtuve es el mismo al que llegan *Fuchs et al.* en su trabajo “*Focusing on a*

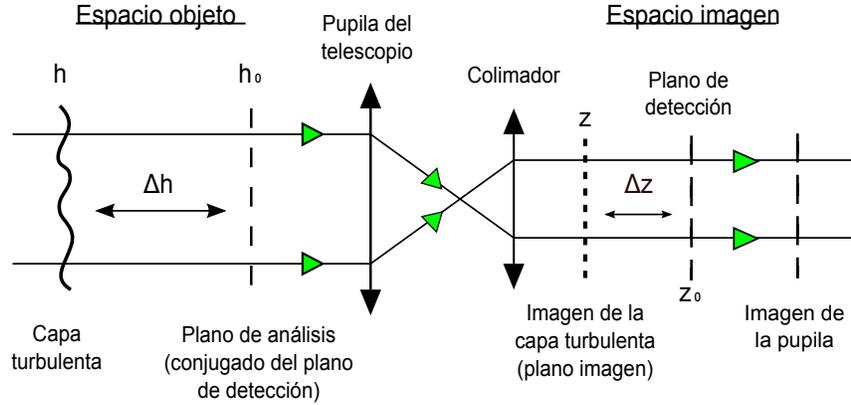


Fig. 3.1: Diagrama que muestra como se puede formar una imagen de la capa turbulenta usando una lente (pupila del telescopio) y un colimador. También se muestra el plano de detección donde se debe realizar la observación para apreciar un patrón de centelleo.

*turbulent layer: Principle of the generalized SCIDAR*". En ese artículo, los autores no dan una demostración exhaustiva del resultado. A continuación presento la demostración detallada.

Para calcular las fluctuaciones de intensidad que produce una capa turbulenta, se utiliza la ecuación de la difracción de Fresnel expresada como transformada de Fourier (ecuación 2.11). La figura 3.2 muestra un diagrama de cómo se forma una imagen de la capa turbulenta utilizando una lente (un telescopio por ejemplo). Se puede observar que el plano objeto se encuentra a una distancia  $h$  de la lente, el plano focal a una distancia  $f$  y el plano imagen a una distancia  $d$ . Las distancias  $h$ ,  $f$  y  $d$  obedecen la ecuación gaussiana de las lentes delgadas que es:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad (3.1)$$

Como ya se mencionó, el frente de onda de la luz que proviene de las estrellas se ve afectado por la capa turbulenta. En la figura 3.3 se muestra cómo el frente de onda sufre una modificación de fase a causa de las fluctuaciones de densidad en la atmósfera. Después de atravesar la capa turbulenta, la onda luminosa con fase modificada se desplaza hacia el telescopio y nos permite formar la imagen de la capa turbulenta. A continuación se muestran los cálculos de las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano imagen (figura 3.2).

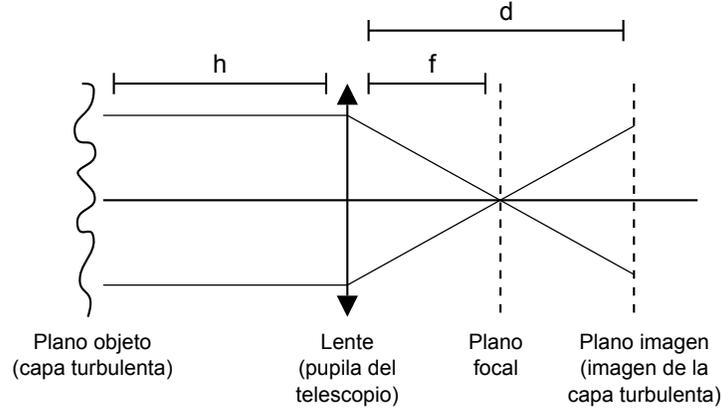


Fig. 3.2: Plano objeto, lente, plano focal y plano imagen.  $h$  es la distancia que hay entre el plano objeto y la lente,  $f$  es la distancia focal y  $d$  es la distancia entre la lente y el plano imagen.

Como primer paso, se calculará el campo complejo que produce la capa turbulenta en la pupila del telescopio. Para esto tomamos la ecuación 2.11 que permite obtener el campo complejo a una distancia  $z$ .

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} F[U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)}]_{(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z})} \quad (3.2)$$

Esta ecuación nos exige que proporcione la distancia de propagación  $z$ , un sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  en donde tenemos el campo complejo de la onda que queremos propagar y un sistema de coordenadas  $(x, y)$ , donde queremos calcular el campo complejo del patrón de difracción. En este caso, la onda que queremos propagar es la onda luminosa con fase modificada que se encuentra inmediatamente después de la capa turbulenta; el sistema de coordenadas donde se encuentra esta onda estará definido por las variables  $(x_h, y_h)$ . Llamaré  $h$  a la distancia que hay entre la onda luminosa y la pupila del telescopio. El sistema de coordenadas donde se encuentra la pupila del telescopio será denotado por las variables  $(x_p, y_p)$ . Estos sistemas de coordenadas y la distancia de propagación se pueden apreciar en la figura 3.4. Resumiendo, debemos hacer las siguientes substituciones en la ecuación 3.2:

$$\begin{aligned} z &= h \\ U(\xi, \eta) &= \Psi_h(x_h, y_h) \\ U(x, y) &= \Psi_p(x_p, y_p) \end{aligned}$$

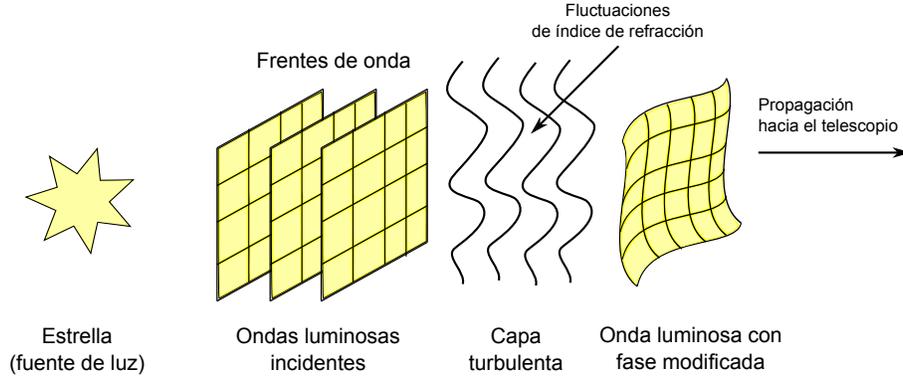


Fig. 3.3: El frente de onda de la luz que proviene de las estrellas se ve afectado por las fluctuaciones de índice de refracción de la capa turbulenta. La capa turbulenta produce una modificación en la fase de la onda luminosa.

El término  $\Psi_h$  representa el campo complejo en el plano de la onda luminosa con fase modificada, y  $\Psi_p$  es el campo complejo en el plano de la lente (pupila del telescopio). Estos campos se muestran en la figura 3.4.

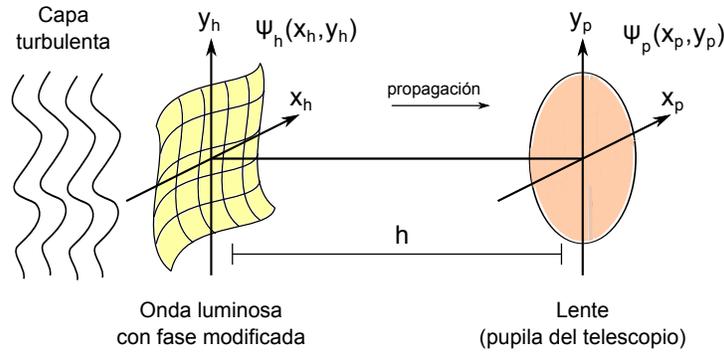


Fig. 3.4: Sistemas de coordenadas de la onda luminosa y de la pupila del telescopio separados por una distancia  $h$ . Los campos complejos en el plano de la onda luminosa y en el plano de la pupila del telescopio están representados por  $\Psi_h(x_h, y_h)$  y  $\Psi_p(x_p, y_p)$  respectivamente.

Haciendo estas sustituciones en 3.2 obtenemos:

$$\Psi_p(x_p, y_p) = \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{i\frac{k}{2h}(x_p^2 + y_p^2)} F[\Psi_h(x_h, y_h) e^{i\frac{k}{2h}(x_h^2 + y_h^2)}]_{\left(\frac{x_p}{\lambda h}, \frac{y_p}{\lambda h}\right)} \quad (3.3)$$

que es la expresión del campo complejo en la pupila del telescopio. Por co-

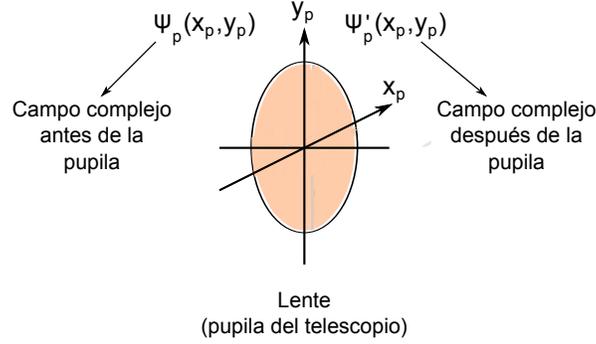


Fig. 3.5: Campos complejos antes y después de la pupila del telescopio.  $\Psi_p(x_p, y_p)$  representa el campo complejo antes de la pupila y  $\Psi'_p(x_p, y_p)$  representa el campo complejo después de la pupila.

modidad, se usará la siguiente notación vectorial:

$$(x_p, y_p) = \vec{x}_p \quad (3.4)$$

$$x_p^2 + y_p^2 = \vec{x}_p^2 \quad (3.5)$$

$$(x_h, y_h) = \vec{x}_h \quad (3.6)$$

$$x_h^2 + y_h^2 = \vec{x}_h^2 \quad (3.7)$$

De esta forma, la ecuación 3.3 se puede escribir como:

$$\Psi_p(\vec{x}_p) = \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_p^2} F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right]_{\frac{x_p}{\lambda h}} \quad (3.8)$$

Ahora, debemos calcular el campo complejo que atraviesa la pupila del telescopio. Como se muestra en la figura 3.5, tenemos un campo complejo antes de la pupila y otro después, ambos en el mismo plano  $(x_p, y_p)$ . El campo complejo antes de la lente es justamente el que se acaba de calcular y está denotado por  $\Psi_p(\vec{x}_p)$ . Al campo que se encuentra después de la lente se le llamó  $\Psi'_p(\vec{x}_p)$  y está dado por la siguiente ecuación:

$$\Psi'_p(\vec{x}_p) = \Psi_p(\vec{x}_p) P(\vec{x}_p) e^{-i\frac{k}{2f}\vec{x}_p^2} \quad (3.9)$$

donde  $P(\vec{x}_p)$  es una función que denota la extensión limitada de la abertura de la pupila y las aberraciones ópticas del telescopio. El término  $e^{-i\frac{k}{2f}\vec{x}_p^2}$  describe una lente de distancia focal  $f$ . Nótese que estos términos también están expresados en notación vectorial.

Sutituimos 3.8 en 3.9 y obtenemos:

$$\Psi'_p(\vec{x}_p) = \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_p^2} e^{-i\frac{k}{2f}\vec{x}_p^2} P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}} \quad (3.10)$$

$$\Psi'_p(\vec{x}_p) = \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{i\frac{k}{2}\vec{x}_p^2(\frac{1}{h}-\frac{1}{f})} P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}} \quad (3.11)$$

Podemos simplificar esta expresión si utilizamos la ecuación de las lentes delgadas (ecuación 3.1):

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{d} \quad (3.12)$$

A continuación sustituimos 3.12 en 3.11.

$$\Psi'_p(\vec{x}_p) = \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{-i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2} P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}} \quad (3.13)$$

Esta es la ecuación del campo complejo que se tiene inmediatamente después de la pupila del telescopio en el plano  $(x_p, y_p)$ . El siguiente paso es propagar este campo complejo hasta el plano imagen.

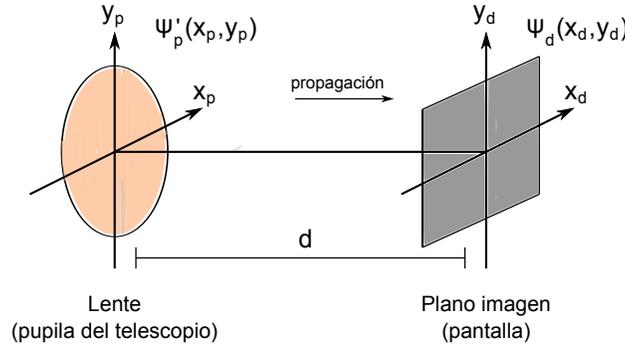


Fig. 3.6: Sistemas de coordenadas de la pupila del telescopio y del plano imagen separados por una distancia  $d$ . Los campos complejos en el plano de la pupila del telescopio y en el plano imagen están representados por  $\Psi'_p(x_p, y_p)$  y  $\Psi_d(x_d, y_d)$  respectivamente.

Debemos usar nuevamente la ecuación de la difracción de Fresnel (ecuación 3.2) para calcular el campo complejo en el plano imagen. Llamaré  $d$  a la distancia de propagación  $z$ . El campo complejo  $U(\xi, \eta)$  ahora equivale al campo  $\Psi'_p(x_p, y_p)$  de la ecuación 3.13 que acabamos de obtener. El sistema

de coordenadas  $(x, y)$  es donde se quiere calcular el patrón de difracción que en este caso es el plano imagen que denotaré con las coordenadas  $(x_d, y_d)$ . Estos sistemas de coordenadas se pueden apreciar en la figura 3.6 donde se observa cómo se propaga el campo complejo del plano de la pupila del telescopio hacia el plano imagen (donde se coloca una pantalla para ver la imagen formada). Ahora debemos hacer las siguientes sustituciones en la ecuación 3.2:

$$\begin{aligned} z &= d \\ U(\xi, \eta) &= \Psi'_p(x_p, y_p) \\ U(x, y) &= \Psi_d(x_d, y_d) \end{aligned}$$

El término  $\Psi_d$  indica el campo complejo en el plano imagen (figura 3.6).

Una vez realizadas las sustituciones obtenemos:

$$\Psi_d(x_d, y_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\frac{k}{2d}(x_d^2+y_d^2)} F[\Psi'_p(x_p, y_p) e^{i\frac{k}{2d}(x_p^2+y_p^2)}]_{\left(\frac{x_d}{\lambda d}, \frac{y_d}{\lambda d}\right)} \quad (3.14)$$

Por comodidad, utilizamos la siguiente notación vectorial:

$$(x_d, y_d) = \vec{x}_d \quad (3.15)$$

$$x_d^2 + y_d^2 = \vec{x}_d^2 \quad (3.16)$$

Utilizando esta notación junto con la de las ecuaciones 3.4 y 3.5, podemos escribir 3.14 como:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_d^2} F[\Psi'_p(\vec{x}_p) e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2}]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.17)$$

Ahora sustituimos el término  $\Psi'_p(\vec{x}_p)$  de la ecuación 3.13 en esta expresión que acabamos de obtener.

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_d^2} F \left[ e^{-i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2} \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.18)$$

Nótese que el producto de las dos primeras exponenciales que están dentro de la transformada de Fourier es igual a 1:

$$e^{-i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_p^2} = 1$$

La ecuación 3.18 se reduce a:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_d^2} F \left[ \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right] \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}}^{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.19)$$

Podemos sacar el término  $\frac{e^{ikh}}{i\lambda h}$  de la transformada de Fourier ya que es un factor constante.

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \frac{e^{ikh}}{i\lambda h} e^{i\frac{k}{2d}\vec{x}_d^2} F \left[ P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{k}{2h}\vec{x}_h^2} \right] \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}}^{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.20)$$

Sabiendo que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , sustituimos este valor en la ecuación 3.20 y multiplicando por  $\frac{h}{h} = 1$  tenemos:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = -\frac{h}{h} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)}}{\lambda d(\lambda h)} e^{i\frac{\pi}{\lambda d}\vec{x}_d^2} F \left[ P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{\pi}{\lambda h}\vec{x}_h^2} \right] \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}}^{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.21)$$

Reacomodando:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = -\frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)} \left( \frac{h}{d} \right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} e^{i\frac{\pi}{\lambda d}\vec{x}_d^2} F \left[ P(\vec{x}_p) F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{\pi}{\lambda h}\vec{x}_h^2} \right] \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}}^{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.22)$$

Podemos introducir el término  $\frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)}$  dentro de la transformada de Fourier ya que es un factor constante. La ecuación 3.22 queda expresada de la siguiente manera:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = -\left( \frac{h}{d} \right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} e^{i\frac{\pi}{\lambda d}\vec{x}_d^2} F \left[ P(\vec{x}_p) \left\{ \frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)} F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i\frac{\pi}{\lambda h}\vec{x}_h^2} \right] \right\} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}}^{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.23)$$

A continuación aplicamos el teorema de similaridad de la transformada de Fourier al término que está entre corchetes. Este teorema nos dice que:

$$\frac{1}{|ab|} F[f(x, y)]_{\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)} = F[f(ax, by)]_{(u, v)} \quad (3.24)$$

Si hacemos las siguientes sustituciones en 3.24:

$$\begin{aligned} a &= \lambda h \\ b &= \lambda h \\ f(x, y) &= \Psi_h(x_h, y_h) e^{i\frac{\pi}{\lambda h}(x_h^2 + y_h^2)} \\ \left( \frac{u}{a}, \frac{v}{b} \right) &= \left( \frac{x_p}{\lambda h}, \frac{y_p}{\lambda h} \right) \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)} F \left[ \Psi_h(x_h, y_h) e^{i \frac{\pi}{\lambda h} (x_h^2 + y_h^2)} \right]_{\left( \frac{x_p}{\lambda h}, \frac{y_p}{\lambda h} \right)} = F \left[ \Psi_h(\lambda h x_h, \lambda h y_h) e^{i \frac{\pi}{\lambda h} [(\lambda h x_h)^2 + (\lambda h y_h)^2]} \right]_{(x_p, y_p)} \quad (3.25)$$

En el argumento de la exponencial del lado derecho se puede factorizar  $\lambda h$ .

$$\frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)} F \left[ \Psi_h(x_h, y_h) e^{i \frac{\pi}{\lambda h} (x_h^2 + y_h^2)} \right]_{\left( \frac{x_p}{\lambda h}, \frac{y_p}{\lambda h} \right)} = F \left[ \Psi_h(\lambda h(x_h, y_h)) e^{i \frac{\pi(\lambda h)^2}{\lambda h} (x_h^2 + y_h^2)} \right]_{(x_p, y_p)} \quad (3.26)$$

Finalmente expresamos esta igualdad en notación vectorial usando las ecuaciones 3.4 - 3.7.

$$\frac{1}{(\lambda h)(\lambda h)} F \left[ \Psi_h(\vec{x}_h) e^{i \frac{\pi}{\lambda h} \vec{x}_h^2} \right]_{\frac{\vec{x}_p}{\lambda h}} = F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \quad (3.27)$$

Regresamos a la ecuación 3.23 y sustituimos 3.27.

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} F \left[ P(\vec{x}_p) \left\{ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right\} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.28)$$

Ahora aplicaremos el teorema de la convolución:

$$F [f(x, y) g(x, y)]_{(u, v)} = F[f(x, y)]_{(u, v)} * F[g(x, y)]_{(u, v)} \quad (3.29)$$

donde  $*$  es el símbolo de la convolución. Si hacemos las siguientes sustituciones en 3.29:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= P(\vec{x}_p) \\ g(x, y) &= F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \\ (u, v) &= \frac{\vec{x}_d}{\lambda d} \end{aligned}$$

tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$F \left[ P(\vec{x}_p) \left\{ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right\} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} = F [P(\vec{x}_p)]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} * F \left[ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \quad (3.30)$$

Sustituimos 3.30 en 3.28 y obtenemos:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} \left\{ F [P(\vec{x}_p)]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} * F \left[ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i \pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} \right\} \quad (3.31)$$

Llegamos a una expresión que contiene la transformada de Fourier de una transformada de Fourier (uno de los factores de la convolución). Para reducir esta ecuación utilizamos la siguiente propiedad:

$$F\{F[f(x)]\}_s = f(-s) \quad (3.32)$$

Si hacemos las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i\pi \lambda h \vec{x}_h^2} \\ s &= \frac{\vec{x}_d}{\lambda d} \end{aligned}$$

tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$F \left[ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i\pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} = \Psi_h \left( \lambda h \left( -\frac{\vec{x}_d}{\lambda d} \right) \right) e^{i\pi \lambda h \left( -\frac{\vec{x}_d}{\lambda d} \right)^2} \quad (3.33)$$

Se puede reducir el término de la derecha:

$$F \left[ F \left[ \Psi_h(\lambda h \vec{x}_h) e^{i\pi \lambda h \vec{x}_h^2} \right]_{\vec{x}_p} \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} = \Psi_h \left( -\frac{h}{d} \vec{x}_d \right) e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} \quad (3.34)$$

A continuación sustituimos 3.34 en 3.31 para obtener:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} \left\{ F \left[ P(\vec{x}_p) \right]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} * \Psi_h \left( -\frac{h}{d} \vec{x}_d \right) e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} \right\} \quad (3.35)$$

Para el caso en el que la pupila del telescopio es de diámetro infinito y no tiene ninguna aberración, podemos suponer que la función pupila es constante en todo punto.

$$P(\vec{x}_p) = C \quad (3.36)$$

La letra  $C$  indica una constante. Por simplicidad suponemos que el valor de la constante es igual a 1.

$$P(\vec{x}_p) = 1 \quad (3.37)$$

Sustituimos este valor en la ecuación 3.35:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} \left\{ F[1]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} * \Psi_h \left( -\frac{h}{d} \vec{x}_d \right) e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} \right\} \quad (3.38)$$

Sabemos que la transformada de Fourier de 1 es igual a la delta de Dirac.

$$F[1]_{(u,v)} = \delta(u, v) \quad (3.39)$$

Si sustituimos

$$(u, v) = \frac{\vec{x}_d}{\lambda d}$$

en 3.39, se cumple lo siguiente:

$$F[1]_{\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}} = \delta\left(\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}\right) \quad (3.40)$$

Este es el término que tenemos en la ecuación 3.38. Ahora sustituimos 3.40 en 3.38 y obtenemos:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = -\left(\frac{h}{d}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} e^{i\frac{\pi}{\lambda d}\vec{x}_d^2} \left\{ \delta\left(\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}\right) * \Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) e^{i\frac{\pi h}{\lambda d^2}\vec{x}_d^2} \right\} \quad (3.41)$$

Llegamos a una expresión que tiene una función convolucionada con una delta de Dirac.

La convolución de una función  $f(\vec{x})$  con una delta de Dirac es igual a la misma función  $f(\vec{x})$ :

$$f(\vec{x}) * \delta(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) * f(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (3.42)$$

donde  $\vec{x} = (x, y)$ . Si hacemos las siguientes sustituciones en 3.42:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}) &= \delta\left(\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}\right) \\ f(\vec{x}) &= \Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) e^{i\frac{\pi h}{\lambda d^2}\vec{x}_d^2} \end{aligned}$$

tenemos que se cumple la siguiente igualdad:

$$\delta\left(\frac{\vec{x}_d}{\lambda d}\right) * \Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) e^{i\frac{\pi h}{\lambda d^2}\vec{x}_d^2} = \Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) e^{i\frac{\pi h}{\lambda d^2}\vec{x}_d^2} \quad (3.43)$$

donde se utiliza la propiedad de la Delta de Dirac:  $\delta(\alpha x) = \delta(x)$ .

El lado izquierdo de esta ecuación es precisamente el término entre corchetes que tenemos en la ecuación 3.41.

A continuación sustituimos 3.43 en 3.41 y la ecuación se reduce a:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} \Psi_h \left( -\frac{h}{d} \vec{x}_d \right) e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} \quad (3.44)$$

Podemos multiplicar las exponenciales que en su exponente tienen el factor común  $\vec{x}_d^2$ .

$$e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} = e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2 \left(1 + \frac{h}{d}\right)} \quad (3.45)$$

Usando la ecuación de las lentes delgadas se puede demostrar que:

$$1 + \frac{h}{d} = \frac{h}{f} \quad (3.46)$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente. Entonces de la multiplicación de las exponenciales tenemos el siguiente resultado:

$$e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2} e^{i \frac{\pi h}{\lambda d^2} \vec{x}_d^2} = e^{i \frac{\pi}{\lambda d} \vec{x}_d^2 \left(\frac{h}{f}\right)} \quad (3.47)$$

Finalmente sustituimos 3.47 en 3.44 y obtenemos la siguiente expresión:

$$\Psi_d(\vec{x}_d) = - \left( \frac{h}{d} \right) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (d+h)} \Psi_h \left( -\frac{h}{d} \vec{x}_d \right) e^{i \frac{\pi}{\lambda \mu} \vec{x}_d^2} \quad (3.48)$$

donde

$$\mu = \frac{d}{h} f \quad (3.49)$$

Esta es la ecuación del campo complejo en el plano imagen, es decir, nos permite calcular la imagen que veremos a través del telescopio al observar una capa turbulenta en la atmósfera. Es la misma expresión que aparece en Fuchs *et al.* (1998).

Para obtener una imagen se debe calcular la intensidad de la luz en el plano donde se quiere ver la imagen. La intensidad es igual al módulo al cuadrado de un campo complejo  $U$ :

$$I(P) = |U(P)|^2 \quad (3.50)$$

$I(P)$  es la intensidad de una onda monocromática en el punto  $P$  y  $U(P)$  es el campo complejo en el punto  $P$ .

Entonces, debemos tomar el módulo al cuadrado del campo complejo  $\Psi_d(\vec{x}_d)$  que acabamos de obtener para calcular la intensidad en el plano imagen  $I(\vec{x}_d)$ .

$$I(\vec{x}_d) = |\Psi_d(\vec{x}_d)|^2 \quad (3.51)$$

La intensidad  $I(\vec{x}_d)$  nos permitirá obtener la imagen que observaremos en el plano imagen  $(x_d, y_d)$ .

Sustituimos 3.48 en 3.51 y obtenemos:

$$I(\vec{x}_d) = \left| -\left(\frac{h}{d}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} \Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) e^{i\frac{\pi}{\lambda\mu}x_d^2} \right|^2 \quad (3.52)$$

De acuerdo con la ecuación 2.3 sabemos que el campo complejo  $\Psi_h$  es una onda de la forma:

$$\Psi_h(x, y) = A(x, y) e^{-i\phi(x, y)} \quad (3.53)$$

donde  $A(x, y)$  es la amplitud de la onda a la entrada de la capa y  $\phi(x, y)$  es la fase que introdujo la capa turbulenta. Si suponemos que la amplitud de esta onda vale 1 en todo punto entonces  $A(x, y) = 1$ . En este caso tenemos que la función que describe esta onda esta evaluada en  $(-\frac{h}{d}\vec{x}_d)$ , por lo tanto el campo complejo  $\Psi_h$  es igual a:

$$\Psi_h\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right) = e^{-i\phi(-\frac{h}{d}\vec{x}_d)} \quad (3.54)$$

Sustituimos esta expresión en 3.52 y obtenemos:

$$I(\vec{x}_d) = \left| -\left(\frac{h}{d}\right) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} e^{-i\phi(-\frac{h}{d}\vec{x}_d)} e^{i\frac{\pi}{\lambda\mu}x_d^2} \right|^2 \quad (3.55)$$

La propiedad multiplicativa del valor absoluto nos dice que:

$$|ab| = |a||b| \quad (3.56)$$

Usando esta propiedad podemos expresar la ecuación 3.55 de la siguiente manera:

$$I(\vec{x}_d) = \left\{ \left| -\left(\frac{h}{d}\right) \right| \left| e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} \right| \left| e^{-i\phi(-\frac{h}{d}\vec{x}_d)} \right| \left| e^{i\frac{\pi}{\lambda\mu}x_d^2} \right| \right\}^2 \quad (3.57)$$

Se puede demostrar que el valor absoluto de una exponencial compleja es igual a 1:

$$|e^{ia}| = 1 \quad (3.58)$$

donde  $a$  puede ser cualquier número real. Por lo tanto, el valor absoluto de las exponenciales complejas de la expresión 3.57 es igual a 1:

$$\left| e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(d+h)} \right| = 1 \quad (3.59)$$

$$\left| e^{-i\phi\left(-\frac{h}{d}\vec{x}_d\right)} \right| = 1 \quad (3.60)$$

$$\left| e^{i\frac{\pi}{\lambda\mu}\vec{x}_d^2} \right| = 1 \quad (3.61)$$

La ecuación 3.57 se reduce a:

$$I(\vec{x}_d) = \left| -\left(\frac{h}{d}\right) \right|^2 \quad (3.62)$$

Como se puede ver, la intensidad en el plano imagen  $(x_d, y_d)$  es constante en todo punto ya que sólo depende de las distancias  $h$  y  $d$ . De esta manera queda demostrado que no habrá fluctuaciones de intensidad en el plano imagen.

De acuerdo con esta demostración, el centelleo que se observa al enfocar una capa turbulenta no la está causando ésta misma. Los patrones de centelleo son producidos por una capa turbulenta que se encuentra por arriba o por debajo de ésta. En la siguiente sección se explica cómo se pueden observar los patrones de centelleo que produce una capa turbulenta.

### 3.2. Observación en el plano de detección

La técnica del SCIDAR generalizado nos dice que podremos apreciar los patrones de centelleo si hacemos la observación en un plano que se encuentre ya sea por encima o por debajo del plano imagen (Fuchs *et al.* (1998)). Se puede colocar un detector en este plano para observar las fluctuaciones de intensidad que produce la capa turbulenta. A este plano lo llamé plano de detección. Si se desplaza el plano de detección por debajo del plano imagen, ya no estaremos tomando una imagen de la capa turbulenta sino de un plano que se encuentra después de ella (figura 3.1). A este plano que se encuentra por debajo de la capa turbulenta se le conoce como plano de análisis. Entonces, en el plano de detección tendremos la imagen de lo que pasa en el plano de análisis.

La capa turbulenta produce fluctuaciones de fase en las ondas de la luz que provienen de las estrellas. Los frentes de onda con fase modificada se propagan hacia el plano de análisis y es aquí donde se producen los patrones

de centelleo (figura 3.7). Al observar en el plano de detección en el telescopio, estaremos observando las fluctuaciones de intensidad que ocurren en el plano de análisis como producto de las fluctuaciones de fase ocurridas en otros planos. Como se muestra en la figura 3.7, al desplazar el plano de detección en el espacio imagen, el plano de análisis se desplazará en el espacio objeto de la misma manera, en otras palabras, al mover el plano de detección estaremos enfocando a un plano de análisis diferente en la atmósfera. Esto quiere decir que podemos observar los patrones de centelleo en diferentes planos de la atmósfera (espacio objeto) con tan sólo desplazar el plano de detección en el telescopio. Como se acaba de demostrar en la sección anterior, cuando el plano de detección se coloca en el plano imagen, no se observarán fluctuaciones de intensidad.

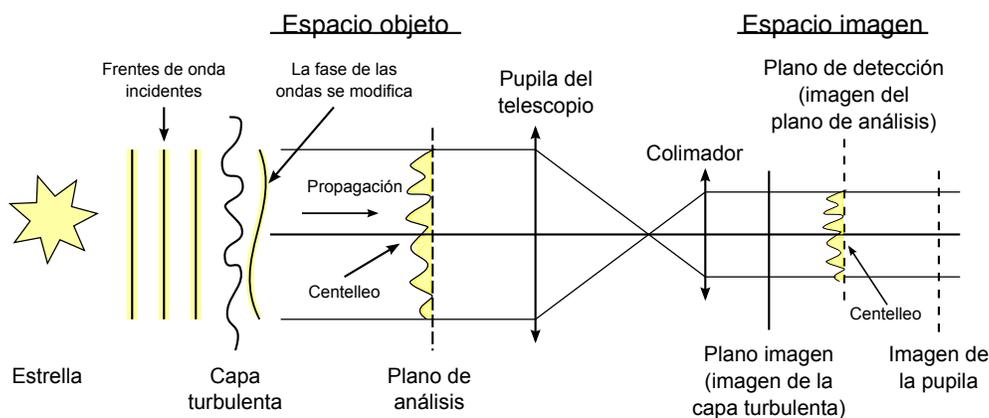


Fig. 3.7: Los frentes de onda que provienen de las estrellas se ven afectados por la capa turbulenta en la atmósfera. Las ondas luminosas se propagan hacia el plano de análisis donde se observan los patrones de centelleo. En el plano de detección se forma una imagen del centelleo producido en el plano de análisis.

La técnica del SCIDAR clásico consiste en analizar los patrones de centelleo en la pupila del telescopio. Esto significa que el plano de detección se coloca en el plano donde se forma la imagen de la pupila (figura 3.7). Esta técnica no puede detectar capas turbulentas en bajas altitudes. La técnica del SCIDAR generalizado consiste en mover el plano de análisis a una posición virtual por debajo de la pupila del telescopio. Esto lo hacemos moviendo el plano de detección por debajo del plano donde se forma la pupila del teles-

copio. De esta manera estaremos detectando los patrones de centelleo que producen las capas turbulentas a bajas altitudes.

### 3.3. *Aplicación de la técnica del SCIDAR generalizado a la visualización de ondas de choque*

En este trabajo se pretende calcular las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque. Para esto se utilizará la técnica del SCIDAR generalizado que consiste en analizar los patrones de centelleo que produce una capa turbulenta de la atmósfera. En la figura 3.7 se puede observar un diagrama de esta técnica donde se muestra cómo la luz que proviene de una estrella se ve afectada por las fluctuaciones de presión de la capa turbulenta. Después tenemos la pupila del telescopio y una lente para formar una imagen de la capa turbulenta y poder analizar el centelleo. En la sección 3.1 se demostró que en el plano imagen no se producen fluctuaciones de intensidad (centelleo). La técnica del SCIDAR generalizado nos dice que los patrones de centelleo se pueden apreciar en un plano de análisis que se encuentra a cierta distancia de la capa turbulenta (figura 3.7). En la sección 3.2 se explica que debemos hacer la observación en un plano de detección que se encuentra a cierta distancia del plano imagen, ya que de esta forma estaremos observando lo que ocurre en el plano de análisis.

Como ya se mencionó, utilizaremos la técnica del SCIDAR generalizado para observar las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque. Para esto se planea construir el sistema óptico de la figura 3.8 donde se puede ver que iluminaremos la onda de choque con una fuente de luz y un espejo (espejo 1). Se puede decir que la onda de choque simula la capa turbulenta de la figura 3.7. Después se coloca un espejo (espejo 2) y una lente para formar una imagen de la onda de choque.

En la sección 3.1 se demostró que no se producen fluctuaciones de intensidad en el plano conjugado de una capa turbulenta. Ya que la onda de choque es un cambio de presión al igual que la capa turbulenta, no se producirán fluctuaciones de intensidad en el plano conjugado de la onda de choque. Las ondas luminosas que provienen del espejo 1 sufren una modificación de fase debido a los cambios de presión que produce la onda de choque. Las ondas luminosas con fase modificada se propagan hacia el plano de análisis y es ahí donde se producen las fluctuaciones de intensidad.

Con el espejo 2 y la lente  $L_2$  formamos el espacio imagen donde se en-

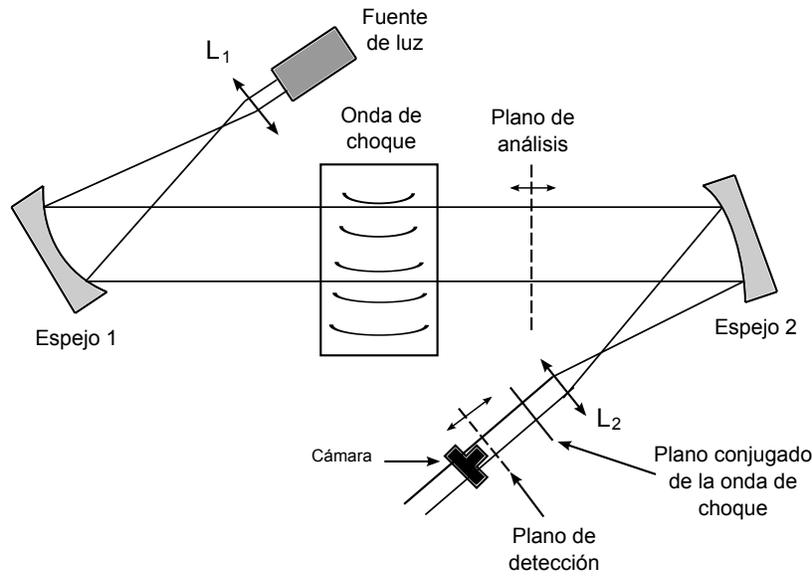


Fig. 3.8: Arreglo óptico para la visualización de las ondas de choque. Se utilizará una cámara para tomar imágenes en el plano de detección.

cuentra el plano de detección. Este plano se encuentra a cierta distancia del plano conjugado de la onda de choque. En el plano de detección se forma la imagen de las fluctuaciones de intensidad que aparecen en plano de análisis. Colocaremos una cámara en el plano de detección para obtener imágenes de las fluctuaciones de intensidad que produce la onda de choque.

A continuación se deducirá una ecuación para describir las fluctuaciones de intensidad que se observarán en el plano de detección (figura 3.8). De acuerdo a la sección 3.2, sabemos que en el plano de detección se forma una imagen de lo que ocurre en el plano de análisis. Entonces, basta con calcular la intensidad en el plano de análisis ya que será la misma intensidad que se observará en el plano de detección.

En la sección 3.1 se utilizó la ecuación de la difracción de Fresnel para demostrar que en el plano donde se forma la imagen de la capa turbulenta no se produce centelleo. Esta ecuación es válida para distancias de propagación muy grandes. Ya que el arreglo óptico que se usará para la visualización de las ondas de choque es pequeño (figura 3.8), podemos utilizar la ecuación de Huygens-Fresnel que es válida para distancias de propagación pequeñas. La

ecuación de Huygens-Fresnel es:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (3.63)$$

donde:

$$U(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{-i\phi(\xi, \eta)} \quad (3.64)$$

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (3.65)$$

Esta ecuación fue usada para calcular las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis a causa de la onda de choque. Esta ecuación nos permite calcular el campo complejo en un sistema de coordenadas  $(x, y)$  que se encuentra a una distancia  $z$  del sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  (figura 2.6). En el sistema  $(\xi, \eta)$  tenemos el campo complejo de la onda que se va a propagar y el valor  $z$  es la distancia de propagación.

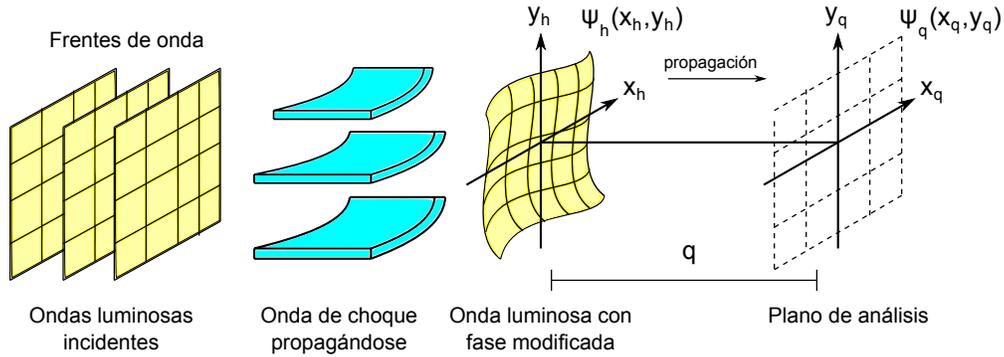


Fig. 3.9: Sistemas de coordenadas de la onda luminosa con fase modificada y del plano de análisis separados por una distancia  $q$ . Los campos complejos en el plano de la onda luminosa y en el plano de análisis están representados por  $\Psi_h(x_h, y_h)$  y  $\Psi_q(x_q, y_q)$  respectivamente

En este caso, el sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  es el de la onda luminosa cuya fase se modifica por las fluctuaciones de presión de la onda de choque; a este sistema lo definiré con las variables  $(x_h, y_h)$ . El sistema de coordenadas en donde queremos calcular las fluctuaciones de intensidad es el plano de análisis al que definiré con el sistema de coordenadas  $(x_q, y_q)$ . A la distancia de propagación  $z$  la denotaré con la variable  $q$ . En la figura 3.9 se muestran

estos sistemas de coordenadas y cómo el frente de onda de la luz incidente, se ve afectada por las fluctuaciones de presión de la onda de choque. En resumen, debemos hacer las siguientes sustituciones en la ecuación 3.63:

$$\begin{aligned} z &= q \\ U(\xi, \eta) &= \Psi_h(x_h, y_h) \\ U(x, y) &= \Psi_q(x_q, y_q) \end{aligned}$$

El término  $\Psi_h$  indica el campo complejo en el plano de la onda luminosa con fase modificada y  $\Psi_q$  representa el campo complejo en el plano de análisis. Haciendo las sustituciones tenemos la siguiente expresión:

$$\Psi_q(x_q, y_q) = \frac{q}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \Psi_h(x_h, y_h) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} dx_h dy_h \quad (3.66)$$

donde:

$$\Psi_h(x_h, y_h) = A(x_h, y_h) e^{-i\phi(x_h, y_h)} \quad (3.67)$$

$$r_{01} = \sqrt{q^2 + (x_q - x_h)^2 + (y_q - y_h)^2} \quad (3.68)$$

Con esta ecuación se calculará la intensidad que se observará en el plano de análisis  $(x_q, y_q)$ .

En primer lugar sustitumos,  $r_{01}$  en 3.66 e introducimos el factor constante  $q/i\lambda$  dentro de la doble integral:

$$\Psi_q(x_q, y_q) = \iint_{\Sigma} \Psi_h(x_h, y_h) \left\{ \frac{q e^{ik\sqrt{q^2 + (x_q - x_h)^2 + (y_q - y_h)^2}}}{i\lambda [q^2 + (x_q - x_h)^2 + (y_q - y_h)^2]} \right\} dx_h dy_h \quad (3.69)$$

Se puede sacar el valor de  $q$  de la exponencial compleja y del término entre paréntesis del denominador:

$$\Psi_q(x_q, y_q) = \iint_{\Sigma} \Psi_h(x_h, y_h) \left\{ \frac{e^{ikq\sqrt{1 + \frac{(x_q - x_h)^2}{q^2} + \frac{(y_q - y_h)^2}{q^2}}}}{i\lambda q \left[ 1 + \frac{(x_q - x_h)^2}{q^2} + \frac{(y_q - y_h)^2}{q^2} \right]} \right\} dx_h dy_h \quad (3.70)$$

Esta ecuación se puede expresar como una convolución. La convolución para funciones en dos dimensiones se define como:

$$f(x, y) * g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy' \quad (3.71)$$

Si hacemos las siguientes sustituciones en 3.71:

$$f(x', y') = \Psi_h(x_h, y_h)$$

$$g(x - x', y - y') = \frac{e^{ikq\sqrt{1 + \frac{(x_q - x_h)^2}{q^2} + \frac{(y_q - y_h)^2}{q^2}}}}{i\lambda q \left[ 1 + \frac{(x_q - x_h)^2}{q^2} + \frac{(y_q - y_h)^2}{q^2} \right]}$$

obtenemos la doble integral de la ecuación 3.70. De acuerdo a la igualdad 3.71, la ecuación 3.70 se puede expresar como:

$$\Psi_q(x_q, y_q) = \Psi_h(x_q, y_q) * \left[ \frac{e^{ikq\sqrt{1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2}}}{i\lambda q \left[ 1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2 \right]} \right] \quad (3.72)$$

Se puede aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de esta expresión obtenemos:

$$F[\Psi_q(x_q, y_q)]_{(u,v)} = F \left\{ \Psi_h(x_q, y_q) * \left[ \frac{e^{ikq\sqrt{1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2}}}{i\lambda q \left[ 1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2 \right]} \right] \right\}_{(u,v)} \quad (3.73)$$

donde  $(u, v)$  son las coordenadas del dominio de la frecuencia. El teorema de la convolución nos dice que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas de Fourier:

$$F[f(x, y) * g(x, y)]_{(u,v)} = F[f(x, y)]_{(u,v)} F[g(x, y)]_{(u,v)} \quad (3.74)$$

Esto significa que podemos expresar la ecuación 3.73 como:

$$F[\Psi_q(x_q, y_q)]_{(u,v)} = F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} F \left[ \frac{e^{ikq\sqrt{1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2}}}{i\lambda q \left[ 1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2 \right]} \right]_{(u,v)} \quad (3.75)$$

El último término de esta expresión es igual a:

$$F \left[ \frac{e^{ikq\sqrt{1+\left(\frac{x_q}{q}\right)^2+\left(\frac{y_q}{q}\right)^2}}}{i\lambda q \left[ 1 + \left(\frac{x_q}{q}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{q}\right)^2 \right]} \right]_{(u,v)} = e^{ikq\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \quad (3.76)$$

Sustituimos 3.76 en 3.75:

$$F[\Psi_q(x_q, y_q)]_{(u,v)} = F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{ikq\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \quad (3.77)$$

Debemos sustituir el valor de  $k$  que es igual a  $2\pi/\lambda$ . Ahora aplicamos la transformada inversa de Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$F^{-1} \{ F[\Psi_q(x_q, y_q)]_{(u,v)} \} = F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \quad (3.78)$$

La transformada inversa de Fourier de la transformada de Fourier de una función  $g(x, y)$ , es igual a  $g(x, y)$ :

$$F^{-1}F[g(x, y)] = g(x, y) \quad (3.79)$$

Entonces, la ecuación 3.78 es igual a:

$$\Psi_q(x_q, y_q) = F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \quad (3.80)$$

Ahora tomamos el módulo al cuadrado a ambos lados de esta ecuación y obtenemos:

$$|\Psi_q(x_q, y_q)|^2 = \left| F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (3.81)$$

En la sección 3.1 vimos que la intensidad es igual al módulo al cuadrado de un campo complejo  $U$ :

$$I(P) = |U(P)|^2 \quad (3.82)$$

Entonces el lado izquierdo de la ecuación 3.81 es igual a la intensidad en el plano de análisis  $(x_q, y_q)$ :

$$|\Psi_q(x_q, y_q)|^2 = I(x_q, y_q) \quad (3.83)$$

Finalmente sustituimos 3.83 en 3.81 y obtenemos:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (3.84)$$

donde, de acuerdo con la ecuación 3.67,  $\Psi_h(x_q, y_q)$  es una onda de la forma:

$$\Psi_h(x_q, y_q) = A(x_q, y_q) e^{-i\phi(x_q, y_q)} \quad (3.85)$$

$A(x_q, y_q)$  es la amplitud de la onda y  $\phi(x_q, y_q)$  la fase. Este término es el campo complejo de la onda cuya fase ha sido modificada a causa de las fluctuaciones de presión de la onda de choque (figura 3.9).

La ecuación 3.84 describe las fluctuaciones de intensidad que observaremos en el plano de análisis, a causa de las fluctuaciones de fase que produce la onda de choque. Si variamos la distancia de propagación  $q$  podremos cambiar la posición del plano de análisis. De esta manera podremos ver las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis, a diferentes distancias del plano donde se encuentra la onda de choque.

Para calcular las fluctuaciones de intensidad que observaremos en el plano de análisis, se hizo un programa en MATLAB que grafica la ecuación 3.84. Para graficar esta ecuación necesitamos obtener la transformada de Fourier de la onda de entrada  $\Psi_h(x_q, y_q)$  y después multiplicarla por la exponencial compleja. A este producto debemos calcularle su transformada inversa de Fourier y después calcular el módulo al cuadrado. En el apéndice A se explica cómo evaluar y graficar funciones matemáticas en MATLAB y también se explica cómo obtener sus transformadas de Fourier.

En el apéndice B se encuentra el programa que grafica la ecuación 3.84. Con la explicación que se da en el apéndice A se espera que se entienda de una mejor manera cómo funciona este programa. En el siguiente capítulo se presentan algunas de las simulaciones que se hicieron para comprobar que el programa funciona correctamente.

## 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En el capítulo anterior se explicó en qué consiste el principio del SCIDAR generalizado y cómo es que lo usaremos para visualizar una onda de choque. También se obtuvo la ecuación 3.84 que nos permite calcular las fluctuaciones de intensidad que observaremos en el plano de análisis, a causa de los cambios de fase que produce una onda de choque. Se realizó un programa en MATLAB para graficar la ecuación 3.84 y se encuentra en el apéndice B.

En este capítulo se presentan los patrones de difracción que se obtienen con el programa del apéndice B para comprobar que funciona correctamente. Después se analiza cómo los cambios de presión de la onda de choque producen un cambio de fase en una onda luminosa que la atraviesa. Por último se presentan algunas imágenes que se obtuvieron de las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque en el plano de análisis.

### 4.1. Patrones de difracción

En esta sección se muestran algunas de las simulaciones que se hicieron para comprobar que el programa del apéndice B funciona correctamente. Recordemos que el programa está graficando la ecuación:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (4.1)$$

donde  $\Psi_h(x_q, y_q)$  es una onda de la forma:

$$\Psi_h(x_q, y_q) = A(x_q, y_q) e^{-i\phi(x_q, y_q)} \quad (4.2)$$

$A(x_q, y_q)$  es la amplitud de la onda y  $\phi(x_q, y_q)$  la fase. En la sección 3.3 se dedujo esta expresión para calcular la intensidad que se produce en el plano de análisis  $(x_q, y_q)$ , a causa de las fluctuaciones de fase de la onda que está en el plano  $(x_h, y_h)$ . En la figura 3.9 se muestran estos sistemas de coordenadas.

La ecuación 4.1 se dedujo a partir de la ecuación de Huygens-Fresnel que es:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (4.3)$$

donde:

$$U(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{-i\phi(\xi, \eta)}$$

Esta ecuación nos permite calcular los patrones de difracción que se producen en un plano  $(x, y)$ , a causa de una apertura en un plano  $(\xi, \eta)$  (figura 2.6). Esto significa que la ecuación 4.1 también debe calcular el patrón de difracción que produce una apertura, ya que se obtuvo directamente de la ecuación 4.3. Para comprobar que el programa del apéndice B funciona correctamente, se calculó el patrón de difracción que produce una rendija utilizando este programa.

Como ya se mencionó anteriormente, el programa está graficando la ecuación 4.1. Entonces, el programa se encarga de graficar el término  $I(x_q, y_q)$  que es la distribución de intensidad en un plano  $(x_q, y_q)$ . Esta distribución de intensidad corresponde al patrón de difracción que produce una apertura que se encuentra en un plano  $(x_h, y_h)$ , como se muestra la figura 4.1.

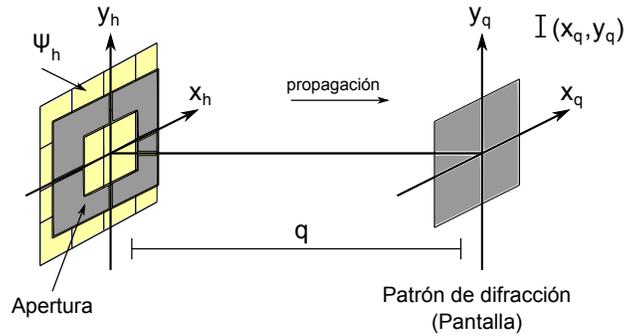


Fig. 4.1: Una onda  $\Psi_h$  atraviesa una apertura y se propaga hasta una pantalla donde produce un patrón de difracción. La onda y la apertura se encuentran en el plano  $(x_h, y_h)$  y la pantalla se encuentra en el plano  $(x_q, y_q)$ . La distancia de propagación es  $q$ .

De acuerdo a la ecuación 4.1, debemos proporcionar como variable de entrada el término  $\Psi_h(x_q, y_q)$ :

$$\Psi_h(x_q, y_q) = A(x_q, y_q) e^{-i\phi(x_q, y_q)}$$

que es una onda de amplitud  $A(x_q, y_q)$  y fase  $\phi(x_q, y_q)$ . Como se puede ver en la figura 4.1, esta onda se encuentra en el plano  $(x_h, y_h)$  y es la que se propaga hasta el plano  $(x_q, y_q)$  para producir el patrón de difracción. A pesar de que la onda  $\Psi_h(x_q, y_q)$  este definida para el plano  $(x_q, y_q)$ , debemos recordar que este término representa una onda en el plano  $(x_h, y_h)$ .

Para calcular los patrones de difracción, se introdujo al programa una onda de amplitud y fase constante. Por simplicidad se supuso que el valor de esta constante es 1:

$$A(x_q, y_q) = 1$$

$$\phi(x_q, y_q) = 1$$

Esto quiere decir que el valor de la onda es constante en todo punto del plano  $(x_h, y_h)$ :

$$\Psi_h(x_q, y_q) = e^{-i}$$

Ya que queremos calcular los patrones de difracción que produce una apertura, debemos multiplicar esta onda por una función rectángulo  $\Pi(x_q, y_q)$  que es igual a:

$$\Pi(x_q, y_q) = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la apertura} \\ 0 & \text{fuera de la apertura} \end{cases}$$

esta función simula la apertura de la figura 4.1. Al realizar la multiplicación de la onda  $\Psi_h$  con esta función, obtenemos la función  $H(x_q, y_q)$  que es:

$$H(x_q, y_q) = \Psi_h(x_q, y_q) \Pi(x_q, y_q) = \begin{cases} e^{-i} & \text{dentro de la apertura} \\ 0 & \text{fuera de la apertura} \end{cases}$$

Sólo los valores de la onda  $\Psi_h$  que se encuentren dentro de la apertura  $\Pi$ , se propagan hasta el plano  $(x_q, y_q)$ .

En el programa del apéndice B se puede ver que primero se define la onda  $\Psi_h$  y la apertura  $\Pi(x_q, y_q)$ . Después se multiplican y se obtiene la función  $H$ . Ya que queremos calcular los patrones de difracción que produce la apertura, debemos poner  $H$  en lugar de  $\Psi$  como variable de entrada en el programa. Entonces, al correr el programa se graficará la ecuación 4.1, pero con  $H$  como variable de entrada:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[H(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (4.4)$$

Como se puede ver en la figura 4.1, el valor  $q$  es la distancia que separa los planos  $(x_h, y_h)$  y  $(x_q, y_q)$ . Se puede variar esta distancia para alejar o acercar el plano  $(x_q, y_q)$  del plano  $(x_h, y_h)$  y así observar los patrones de difracción a diferentes distancias. Al valor  $q$  también se le conoce como distancia de propagación ya que es la distancia que se propaga la onda  $\Psi_h$  hasta el plano  $(x_q, y_q)$ .

El valor de  $\lambda$  es la longitud de onda de  $\Psi_h$ . En estas simulaciones se utilizó una longitud de onda de 632 nm. Para observar mejor los patrones de difracción, MATLAB nos permite obtener imágenes de las gráficas que obtenemos. Es por esto que las imágenes que se muestran a continuación son imágenes de la gráfica  $I(x_q, y_q)$ .

Para probar el programa, se obtuvo el patrón de difracción que produce una rendija de 1 mm de apertura. En las figuras 4.2a y 4.2b, se muestran los patrones de difracción que calculó el programa para una distancia de propagación de 27.5 mm y 217.5 mm respectivamente. Para comprobar que estos patrones de difracción son correctos, se realizó el experimento de la figura 4.1. Se iluminó una rendija de 1 mm de apertura con un haz de luz de 632 nm de longitud de onda. Después se colocó una cámara a 27.5 mm de la rendija y se tomó la imagen de la figura 4.2c. Luego se alejó la cámara a 217.5 mm de la rendija y se tomó la imagen de la figura 4.2d.

Si comparamos la figura 4.2a con la figura 4.2c, se puede observar que el patrón de difracción que calcula el programa es el mismo que el que observamos en el experimento. Lo mismo ocurre para las imágenes 4.2b y 4.2d. Esto quiere decir que el programa del apéndice B funciona correctamente.

Ahora que sabemos que el programa grafica correctamente la ecuación 4.1, podemos usarlo para visualizar las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque. Como se puede ver en la figura 3.9, las fluctuaciones de presión de la onda de choque producen fluctuaciones de fase en la onda luminosa incidente. En la siguiente sección se estudia cómo la fase de la onda luminosa se ve afectada por las fluctuaciones de presión de la onda de choque.

## 4.2. Cambio de fase producido por la onda de choque

En esta sección veremos cómo una onda de choque produce cambios de fase en una onda de luz que la atraviesa. En la figura 3.8 se muestra el arreglo óptico que se va a utilizar para hacer la observación. En esta figura se puede ver que se va a hacer incidir un haz de luz sobre la onda de choque. Para

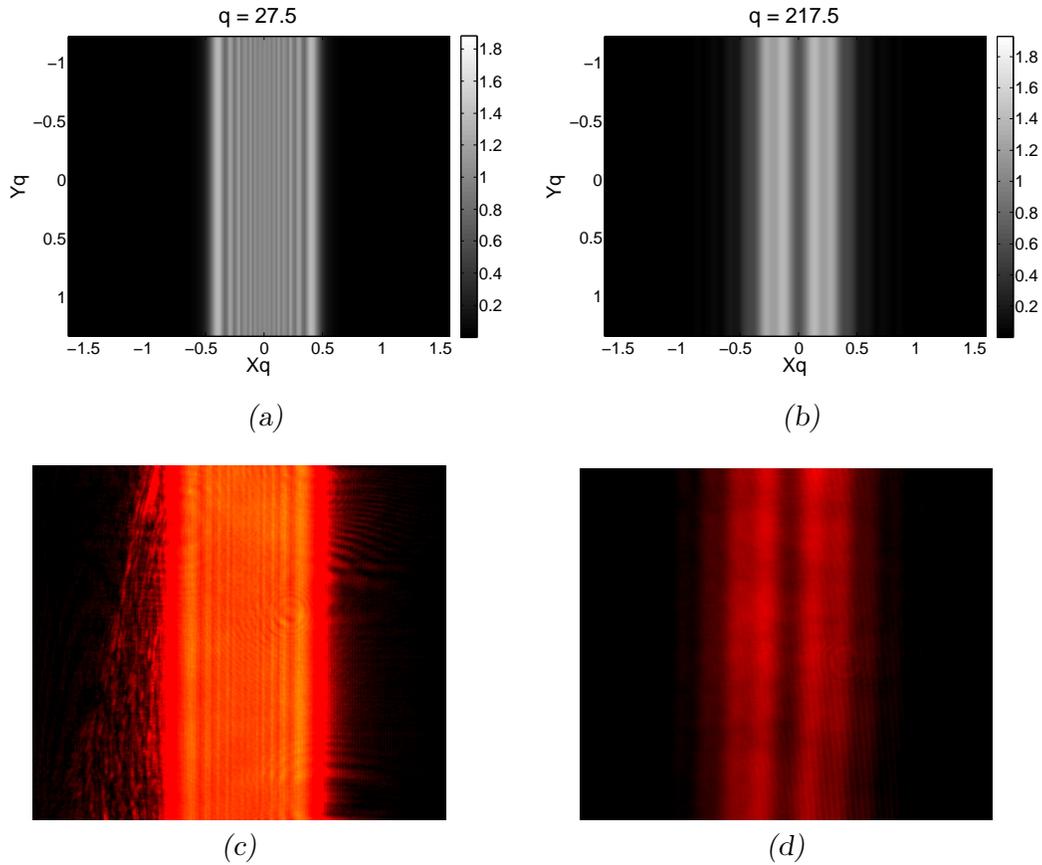


Fig. 4.2: (a) Patrón de difracción calculado por el programa para una rendija de 1 mm de apertura y una distancia de propagación de 27.5 mm. (b) Patrón de difracción calculado por el programa para una rendija de 1 mm de apertura y una distancia de propagación de 217.5 mm. (c) Fotografía del patrón de difracción obtenido en el experimento, para una rendija de 1 mm de apertura y una distancia de propagación de 27.5 mm. (d) Fotografía del patrón de difracción obtenido en el experimento, para una rendija de 1 mm de apertura y una distancia de propagación de 217.5 mm.

producir el haz de luz se usará una fuente de luz, una lente ( $L_1$ ) y un espejo (espejo 1). El espejo produce ondas planas que se propagan hasta la onda de choque. Las fluctuaciones de presión de la onda de choque, hacen que la fase

de las ondas luminosas se modifique (figura 3.9). Las ondas de luz con fase modificada se propagan hasta el plano de análisis y es ahí donde podemos observar las fluctuaciones de intensidad que produce la onda de choque (ver sección 3.2).

El arreglo óptico de la figura 3.8 tiene otro espejo (espejo 2) y otra lente ( $L_2$ ) para formar una imagen de las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis. En la sección 3.3 vimos que la imagen del plano de análisis se forma en el plano de detección, que se encuentra a cierta distancia del plano conjugado de la onda de choque. En el plano de detección se coloca una cámara para observar la imagen de las fluctuaciones de intensidad que produce la onda de choque.

En esta sección veremos cómo la fase de una onda luminosa, se ve afectada por las fluctuaciones de presión de la onda de choque.

#### 4.2.1. Perfil de presión de la onda de choque

En este trabajo se estudian las ondas de choque que se utilizan en litotricia extracorpórea (sección 2.1). Como se comentó anteriormente, estas ondas pueden producirse con un generador de ondas de choque como el que se muestra en la figura 4.3. En este caso tenemos un generador electrohidráulico.

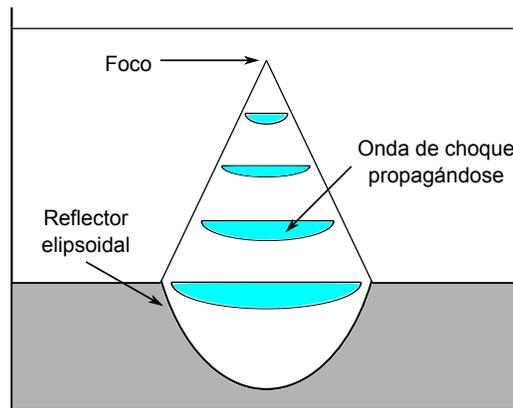


Fig. 4.3: Generador de ondas de choque

El generador es un tanque lleno de agua que en su base tiene un reflector elipsoidal. La onda de choque se produce con una descarga eléctrica en uno de los focos del reflector. Una vez generada, la onda de choque se propaga

hacia el reflector y éste la concentra en el segundo foco (que se encuentra señalado en la figura 4.3). Como vimos en la sección 2.1, una onda de choque es un cambio abrupto de presión en el medio. En este caso, el medio por donde se propaga la onda de choque es agua. En la figura 4.3 se muestra la onda de choque propagándose desde el reflector hasta el foco.

Para estudiar las ondas de choque, se mide la presión que producen en el foco del generador. En este trabajo tomamos el perfil de presión definido por Church [18] que es:

$$P(t) = 2 P^+ e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \pi/3) \quad (4.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} P^+ &= 101 \text{ MPa} \\ \alpha &= 9.1 \times 10^5 \text{ s}^{-1} \\ \omega &= 2\pi (83.3 \text{ kHz}) \end{aligned}$$

$P^+$  es la amplitud máxima del pulso positivo de presión,  $\alpha$  es la constante de decaimiento y  $\omega$  es la frecuencia angular (también ver [2]).

En la figura 4.4 se muestra el perfil de presión que describe la ecuación 4.5. Como se puede ver, la presión máxima ocurre en el primer instante de tiempo, después sigue una disminución de presión hasta llegar a un valor de  $-16.4$  MPa. Posteriormente la presión regresa a la presión de equilibrio. La duración de la onda de choque es de  $7 \mu\text{s}$  aproximadamente. El perfil de presión de la figura 4.4 es la presión en el foco del generador de ondas de choque con respecto al tiempo. Necesitamos obtener un perfil de presión en función de la distancia.

Si tenemos una función en el tiempo  $f(t)$  y queremos ver cómo el perfil de esta función se propaga en el espacio, reemplazamos  $t$  en donde quiera que aparezca en  $f(t)$  por:

$$\left(t - \frac{y}{v}\right)$$

donde  $y$  es la distancia que se propaga la onda y  $v$  su velocidad [19]. Entonces, para obtener el perfil de presión de la onda de choque en función de la distancia, reemplazamos  $t$  por  $(t - y/v)$  en la ecuación 4.5 y obtenemos:

$$P(y, t) = 2 P^+ e^{-\alpha(t - \frac{y}{v})} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{y}{v} \right) + \frac{\pi}{3} \right] \quad (4.6)$$

Esta ecuación describe cómo el perfil de presión de la onda de choque (figura 4.4) se propaga en un eje  $y$ . Ya que el perfil describe la presión en el foco del

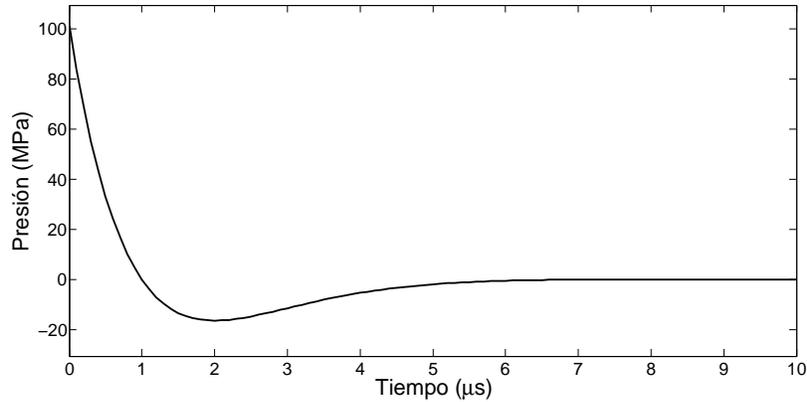


Fig. 4.4: Perfil de presión de la onda de choque

generador de ondas de choque, se toma el foco como punto de referencia para la propagación. Por lo tanto, la ecuación 4.6 describe cómo se propaga el perfil de la figura 4.4 a partir del foco del generador. En la figura 4.5 se muestra el eje  $y$  por donde se propaga el perfil. Se puede ver que la propagación es por encima del foco. Sabemos que esto no ocurre pues la onda de choque se concentra en el foco e inmediatamente después la presión comienza a disminuir. El perfil de presión de la figura 4.4 ya no es válido por encima del foco, pero por ahora supondremos que sí lo es.

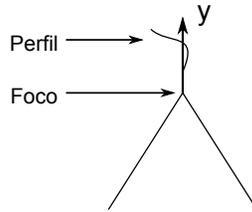


Fig. 4.5: Eje  $y$  donde se propaga el perfil de presión. Se encuentra por encima del foco del generador de ondas de choque

La variable  $t$  de la ecuación 4.6 es el tiempo que se propaga el perfil de presión de la figura 4.4. Para propagar el perfil debemos aumentar el tiempo  $t$ , de esta manera, el perfil se seguirá propagando a lo largo del eje  $y$ . El término  $v$  es la velocidad de propagación del perfil. Ya que el perfil describe el cambio de presión de una onda de choque,  $v$  es la velocidad de propagación

de la onda de choque. Una onda de choque se propaga a una velocidad mayor que la velocidad del sonido. Ya que estamos analizando una onda de choque que se propaga en el agua, su velocidad debe ser superior a 1493 m/s que es la velocidad del sonido en el agua. Entonces, tomaremos un valor de  $v$  de 1500 m/s

Si dejamos que la onda de choque se propague durante un tiempo de 10  $\mu$ s, obtenemos el perfil de presión de la figura 4.6. Este perfil de presión corresponde a la ecuación 4.6 con  $v = 1500$  m/s y  $t = 10$   $\mu$ s.

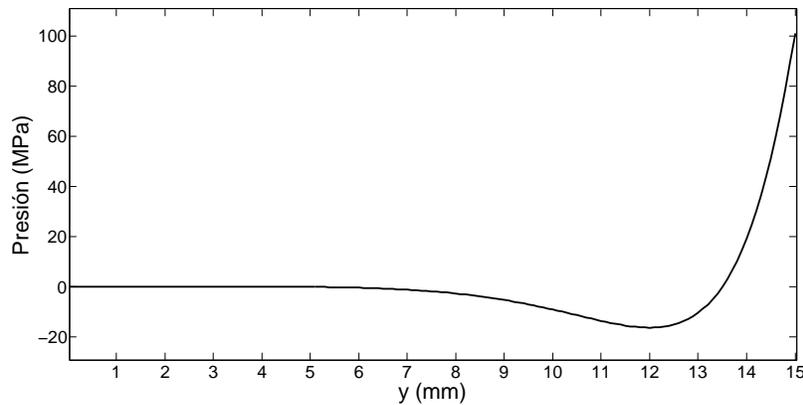


Fig. 4.6: Perfil de presión de la onda de choque en función de la distancia

La figura 4.6 corresponde al perfil de presión de la onda de choque en función de la distancia. Como se puede ver, la presión máxima se propaga una distancia de 15 mm con respecto al foco del generador de ondas de choque (figura 4.5). Este perfil sería la presión de la onda de choque justo después de atravesar el foco del generador.

Se supuso que el perfil de presión es válido por encima del foco y que puede propagarse por encima de éste. Sabemos que la onda de choque se concentra en el foco y después la presión comienza a disminuir, por lo tanto, el perfil de la figura 4.6 ya no es válido por encima del foco. Sin embargo, podemos suponer que el perfil de presión de la figura 4.6 es la presión de la onda de choque justo antes de llegar al foco del generador. En la figura 4.7 se muestra un diagrama de este nuevo sistema de coordenadas.

A continuación veremos cómo la onda de choque afecta el índice de refracción a lo largo del eje  $y$ .

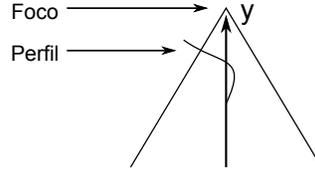


Fig. 4.7: Eje  $y$  donde se encuentra el perfil de presión de la onda de choque. Está ubicado justo debajo del foco del generador de ondas de choque.

#### 4.2.2. Variación del índice de refracción del agua a causa de la onda de choque

En esta sección veremos cómo cambia el índice de refracción del agua a causa de los cambios de presión que produce la onda de choque. Para esto utilizamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 n(\lambda, T, P) = & \sqrt{\frac{a_1}{\lambda^2 - \lambda_a^2} + a_2 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^6} \\
 & + (b_1 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda^4)(T - T_b) \\
 & + (b_4 + b_5 \lambda^2 + b_6 \lambda^4)(T - T_b)^2 \\
 & + (b_7 + b_8 \lambda^2 + b_9 \lambda^4)(T - T_b)^3 \\
 & + [c_1 + c_2 \lambda^2 + (c_3 + c_4 \lambda^2) T](P - P_b) \\
 & + (c_5 + c_6 \lambda^2)(P - P_b)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{array}{lll}
 \lambda_a^2 = 0.018\ 085 & b_1 = -8.454\ 823 \times 10^{-5} & c_1 = 8.419\ 632 \times 10^{-6} \\
 a_1 = 5.743\ 534 \times 10^{-3} & b_2 = -2.787\ 742 \times 10^{-5} & c_2 = 1.941\ 681 \times 10^{-5} \\
 a_2 = 1.769\ 238 & b_3 = 2.608\ 176 \times 10^{-6} & c_3 = -7.762\ 524 \times 10^{-8} \\
 a_3 = -2.797\ 222 \times 10^{-2} & b_4 = -2.050\ 671 \times 10^{-6} & c_4 = 4.371\ 257 \times 10^{-8} \\
 a_4 = 8.715\ 348 \times 10^{-3} & b_5 = 1.019\ 989 \times 10^{-6} & c_5 = 7.089\ 664 \times 10^{-9} \\
 a_5 = -1.413\ 942 \times 10^{-3} & b_6 = -2.611\ 919 \times 10^{-6} & c_6 = -2.240\ 384 \times 10^{-8} \\
 & b_7 = 8.194\ 989 \times 10^{-9} & \\
 & b_8 = -8.107\ 707 \times 10^{-9} & \\
 & b_9 = 4.877\ 274 \times 10^{-8} &
 \end{array}$$

Esta ecuación nos permite calcular el índice de refracción del agua en función de la presión  $P$ , temperatura  $T$  y longitud de onda  $\lambda$  (ver [20]). La temperatura y presión de referencia son:

$$\begin{aligned}
 T_b &= 19.993\ ^\circ\text{C} \\
 P_b &= 1.01325\ \text{bar}
 \end{aligned}$$

Con esta ecuación podemos calcular el cambio de índice de refracción del agua que produce la onda de choque. En la figura 4.6 se puede ver el perfil de presión de la onda de choque a lo largo del eje  $y$  de la figura 4.7. A cada uno de los valores de presión de este perfil, se debe calcular un valor de índice de refracción utilizando la ecuación 4.7.

La ecuación 4.7 nos exige que proporcionemos las unidades de temperatura en  $^{\circ}\text{C}$ , las de longitud de onda en  $\mu\text{m}$  y las de presión en bar. Supondremos que la temperatura del agua por donde se propaga la onda de choque es de

$$T = 25^{\circ}\text{C}$$

La longitud de onda de la onda luminosa que usaremos para iluminar la onda de choque es de 632 nm. Como debemos expresar este valor en micrómetros, la longitud de onda es

$$\lambda = 0.632 \mu\text{m}$$

Ahora sólo queda proporcionar los valores de presión en la ecuación 4.7. Ya que los valores del perfil de la figura 4.6 están en pascales, primero debemos convertirlos a bar.

Si a cada valor de presión de la figura 4.6 se le calcula el valor del índice de refracción usando la ecuación 4.7, obtenemos la gráfica de la figura 4.8. Esta gráfica nos muestra los valores del índice de refracción para cada valor del eje  $y$  de la figura 4.7. En la siguiente sección veremos cómo cada valor de índice de refracción produce un cambio de fase en una onda luminosa que atraviesa el eje  $y$ .

#### 4.2.3. Cambio de fase

En esta sección veremos cómo el perfil del índice de refracción de la figura 4.8, produce un cambio de fase en una onda luminosa que atraviesa el eje  $y$  (figura 4.7). Como ya se mencionó anteriormente, haremos incidir un haz de luz sobre la onda de choque como se muestra en la figura 3.8. En la sección anterior vimos que el cambio de presión de la onda de choque produce un cambio en el índice de refracción del agua. En cada valor del eje  $y$  tenemos un valor de presión de la onda de choque (figura 4.4), entonces, a cada valor del eje  $y$  le corresponde un valor del índice de refracción. Los valores de índice de refracción se muestran en la figura 4.8.

Si hacemos incidir una onda luminosa perpendicularmente al eje  $y$ , los diferentes valores de índice de refracción de la figura 4.8 producen un cambio

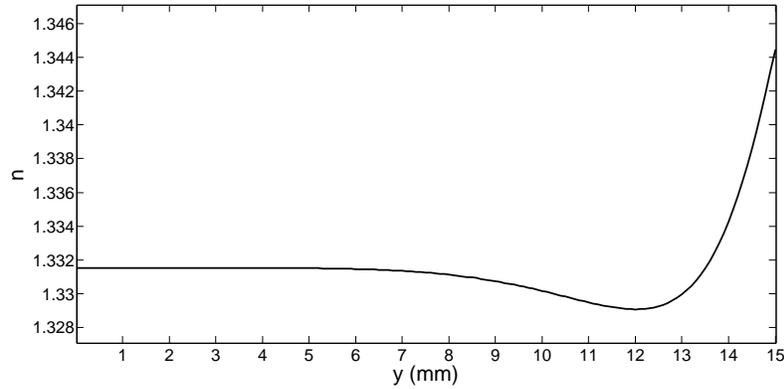


Fig. 4.8: Perfil de índice de refracción del agua que produce el perfil de presión de la onda de choque

de fase en la onda incidente. En la figura 4.9 se muestra la fase de la onda luminosa incidente (fase de entrada) que se encuentra sobre un eje  $y_i$ . La onda luminosa incidente proviene del espejo 1 de la figura 3.8. En la figura 4.9 también se muestra el cambio de fase que produce la variación del índice de refracción y la fase modificada en un eje  $y_h$ . El eje  $y$  se encuentra en el eje de simetría del generador de ondas de choque (figura 4.3).

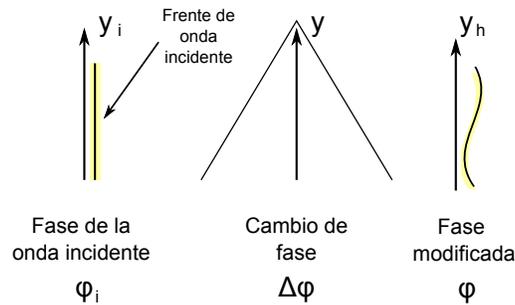


Fig. 4.9: Una onda plana de luz incide sobre el eje  $y$ . La fase de esta onda se modifica por los cambios de índice de refracción en el eje  $y$ .

La onda luminosa que se hace incidir sobre la onda de choque es una onda plana. Una onda plana está formada por un conjunto de planos en los cuales la fase es constante. En la figura 4.9 sólo se muestra uno de estos planos en una dimensión a lo largo del eje  $y_i$ . Entonces, la fase de la onda incidente es

constante en este eje; esto quiere decir que existen muchas ondas a lo largo del eje  $y_i$  y todas ellas se encuentran en fase.

En la figura 4.10 se muestra un diagrama donde se puede ver como varias ondas se encuentran en fase en el eje  $y_i$ . Todas estas ondas se propagan hasta el eje  $y$  y sufren un desfaseamiento debido a los diferentes valores de índice de refracción de la figura 4.8. En este diagrama también se muestra la región donde se encuentra la onda de choque. Se puede ver que la onda de choque abarca una distancia  $a$  a lo largo del eje  $z$ .

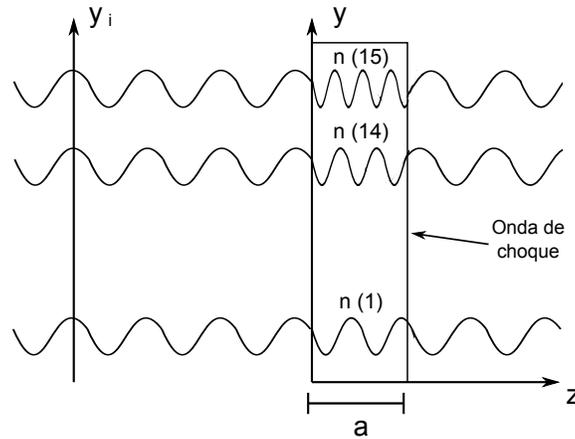


Fig. 4.10: Varias ondas se encuentran en fase en el eje  $y_i$ . Al atravesar el eje  $y$  sufren un desfaseamiento debido a los diferentes valores de índice de refracción.

El cambio de fase lo calculamos con la siguiente ecuación:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (4.8)$$

donde  $\delta$  es la diferencia de camino óptico que es:

$$\delta = \text{OPL}_1 - \text{OPL}_0 \quad (4.9)$$

La definición de la longitud de camino óptico (OPL) es:

$$\text{OPL} = \int_{s=0}^{s=a} n ds \quad (4.10)$$

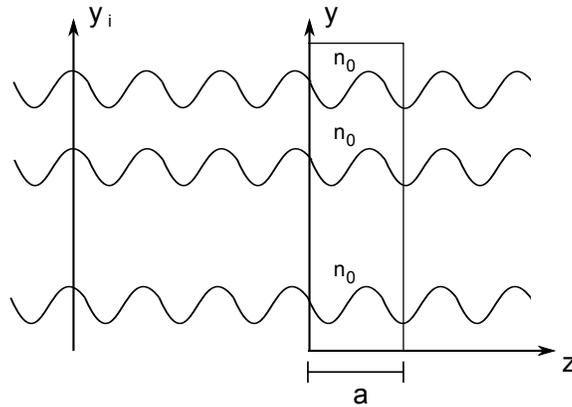
donde  $a$  es la distancia que recorre la luz y  $n$  es el índice de refracción del medio por donde se propaga [19].

Cada onda de la figura 4.10 atraviesa un medio con índice de refracción diferente, por lo tanto, atraviesa una longitud de camino óptico diferente. De acuerdo a la definición de OPL, debemos calcular la integral del índice de refracción a lo largo de la distancia  $a$ . En este caso supondremos que los valores de índice de refracción de la figura 4.10, se mantienen constantes a lo largo de 1 mm de distancia (distancia  $a$ ). Entonces, la longitud de camino óptico para cada valor de  $n$  es:

$$\text{OPL}_1 = n (0.001 \text{ m}) \quad (4.11)$$

Los valores de  $n$  se muestran en la figura 4.8. El término  $\text{OPL}_1$  se refiere a los valores de longitud de camino óptico que corresponden a cada valor de índice de refracción de la figura 4.10.

El término  $\text{OPL}_0$  es la longitud de camino óptico que atraviesan las ondas de la figura 4.10 cuando no hay onda de choque. Si no hay una onda de choque no existe variación del índice de refracción y éste permanece constante a lo largo del eje  $y$ . En la figura 4.11 se puede ver como las ondas de luz atraviesan el eje  $y$  sin ser desfasadas. Ahora se transmiten por un medio de índice de refracción  $n_0$ , que es el índice de refracción del agua  $n_0 = 1.333$ .



*Fig. 4.11:* Varias ondas se encuentran en fase en el eje  $y_i$ . Ya que no hay onda de choque, el índice de refracción es constante y las ondas no se desfasan al atravesar el eje  $y$ .

Para calcular la longitud de camino óptico que atraviesa cada onda de la figura 4.11, debemos calcular la integral del índice de refracción a lo largo de la distancia  $a$  (ecuación 4.10). Ya que no hay onda de choque, el valor de

$n_0$  permanece constante a lo largo de la distancia  $a$  que es de 1 mm. Por lo tanto, la longitud de camino óptico que recorre cada onda de la figura 4.11 es:

$$\text{OPL}_0 = n_0 a \quad (4.12)$$

$$\text{OPL}_0 = 0.001333 \text{ m} \quad (4.13)$$

este valor es constante a lo largo del eje  $y$ .

Ahora que tenemos los valores de  $\text{OPL}_1$  y  $\text{OPL}_0$ , podemos calcular la diferencia de camino óptico que es:

$$\delta = n (0.001 \text{ m}) - 0.001333 \text{ m} \quad (4.14)$$

Si sustituimos esta expresión en 4.8 obtenemos:

$$\Delta\phi = 2\pi \left[ \frac{n (0.001 \text{ m}) - 0.001333 \text{ m}}{\lambda} \right] \quad (4.15)$$

Esta ecuación nos permite calcular el cambio de fase que produce cada valor de índice de refracción de la figura 4.8. El valor de  $\lambda$  es la longitud de onda de la onda luminosa que haremos incidir a la onda de choque. Ya se había mencionado que usaremos luz de  $\lambda = 632 \text{ nm}$ . Usando la ecuación 4.15, se calcularon los valores de  $\Delta\phi$  para cada valor de  $n$  de la figura 4.8. Estos valores se muestran en la figura 4.12.

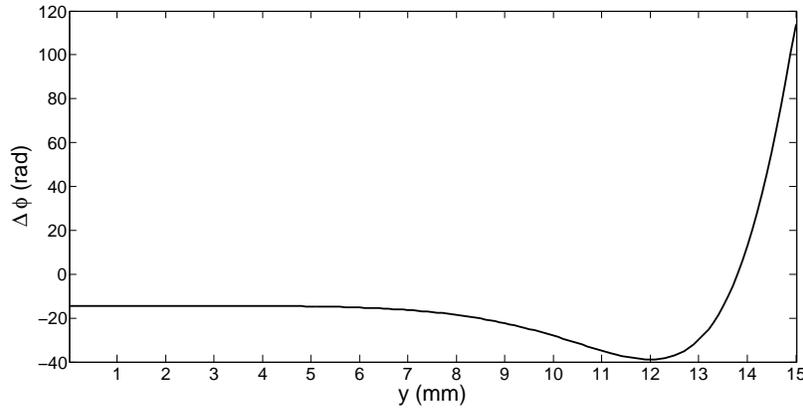


Fig. 4.12: Perfil de cambio de fase que sufre una onda luminosa al atravesar el eje  $y$

Los valores de  $\Delta\phi$  que se encuentran en la figura 4.12 son el desfase que sufre la onda luminosa incidente al atravesar el eje  $y$  (figura 4.9). Si sumamos cada valor de  $\Delta\phi$  a la fase de la onda luminosa incidente, obtenemos la fase de la onda luminosa que ya atravesó la onda de choque.

### 4.3. Perfil de cambio de fase en dos dimensiones

En la sección anterior obtuvimos el perfil de presión de la onda de choque. A partir de este perfil se calculó un perfil de índice de refracción y después se obtuvo el perfil de cambio de fase de la figura 4.12. Estos perfiles se obtuvieron con un programa realizado en MATLAB. Desafortunadamente sólo contamos con el perfil de cambio de fase a lo largo del eje  $y$  (figura 4.9). Para formar una imagen de las fluctuaciones de intensidad que produce una onda de choque, necesitamos un perfil de cambio de fase en dos dimensiones.

El perfil de presión de la onda de choque está descrito por la ecuación 4.6 y se muestra en la figura 4.6. Este perfil muestra la presión que produce la onda de choque justo debajo del foco del generador (figura 4.7). Si se midiera la presión que produce la onda de choque en una posición alejada del foco, encontraríamos que es menor que la del perfil. Esto es porque el generador de ondas de choque concentra la onda en el foco (figura 4.3), por lo tanto, es ahí donde la presión es mayor. La amplitud del perfil de presión disminuye con la distancia. Esto quiere decir que el perfil de la figura 4.6 ya no es válido a distancias alejadas del foco.

Podemos suponer que a una distancia cercana al foco, el perfil de presión de la figura 4.6 sigue siendo válido. En este trabajo supondremos que el perfil de presión es el mismo en una distancia  $b$  que va de -4 a 4 mm en el eje  $x$ , como se muestra en la figura 4.13. Entonces debemos colocar varios perfiles de presión como el de la figura 4.6 a la izquierda y a la derecha del eje  $y$ . A cada uno de estos perfiles les corresponde el perfil de cambio de fase de la figura 4.12. Entonces, si colocamos el perfil de cambio de fase a la izquierda y derecha del eje  $y$ , tendremos los valores de cambio de fase que sufre una onda luminosa al atravesar el plano  $(x, y)$ .

Los perfiles de la sección anterior se obtuvieron con un programa realizado en MATLAB. Este software nos permite trabajar con arreglos de números, ya sean vectores o matrices (ver apéndice A). Todos los valores de cambio de fase de la figura 4.12 se encuentran almacenados en un vector de números

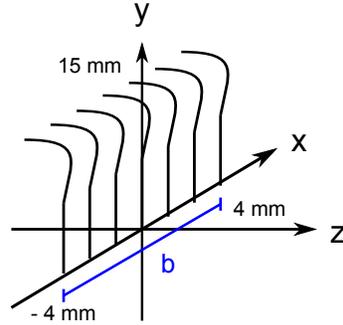


Fig. 4.13: El perfil de presión es válido a lo largo del eje  $x$  en una distancia  $b$  que va de  $-4$  a  $4$  mm.

como el siguiente:

$$d_{ph} = [ \Delta\phi_1 \quad \Delta\phi_2 \quad \Delta\phi_3 \quad \dots \quad \Delta\phi_m ]$$

Este vector contiene los valores de cambio de fase a lo largo del eje  $y$  (figura 4.13). Si deseamos agregar varios perfiles a la izquierda y a la derecha del eje  $y$ , primero debemos obtener el vector transpuesto de  $d_{ph}$ :

$$d_{pho} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 \\ \dots \\ \Delta\phi_m \end{bmatrix}$$

Ahora deberíamos copiar este vector a la izquierda y a la derecha del mismo para obtener la siguiente matriz de números:

$$M_{dph} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 & \dots & \Delta\phi_2 & \Delta\phi_2 & \Delta\phi_2 & \dots & \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 & \dots & \Delta\phi_3 & \Delta\phi_3 & \Delta\phi_3 & \dots & \Delta\phi_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta\phi_m & \dots & \Delta\phi_m & \Delta\phi_m & \Delta\phi_m & \dots & \Delta\phi_m \end{bmatrix}$$

En el programa que se realizó en MATLAB en lugar de copiar el vector a la izquierda y a la derecha, se copió solamente a la derecha pero el número de veces que corresponde a la distancia  $b$ . Ahora viene la pregunta ¿cuántos

vectores  $d_{pho}$  debemos copiar en la matriz  $M_{dph}$  para cubrir la distancia  $b$  ? Para contestar esta pregunta debo explicar cómo se graficó el perfil de cambio de fase de la figura 4.12.

Para obtener la gráfica de cambio de fase de la figura 4.12, primero se debe definir el eje  $y$  en un vector como el siguiente:

$$y = [ y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_m ]$$

En este vector se almacenan los valores del eje  $y$  que va de 0 a 15 mm. En el programa se usaron 10 muestras por unidad, por lo tanto, hay 150 valores almacenados en el vector  $y$  más el valor 0 que ocupa la primera posición de este vector ( $y_1 = 0$ ). En total hay 151 valores almacenados en el vector  $y$ . A cada valor del vector  $y$  le corresponde un valor del vector  $d_{ph}$  donde están almacenados los valores de cambio de fase. Por lo tanto también hay 151 valores almacenados en el vector  $d_{ph}$ . Si graficamos el vector  $d_{ph}$  contra el vector  $y$  obtenemos el perfil de cambio de fase de la figura 4.12. El número de elementos de  $d_{ph}$  es igual al número de filas de la matriz  $M_{dph}$ , por lo tanto, la matriz  $M_{dph}$  tiene un total de 151 filas.

Ahora veamos el número de veces que debemos copiar el vector  $d_{pho}$  en la matriz  $M_{dph}$ , o lo que es lo mismo, el número de columnas que debe tener la matriz. Ya que hay 10 valores por unidad en el eje  $y$ , entonces hay 10 valores de  $\Delta\phi$  por cada milímetro de la figura 4.12. Esto quiere decir que en la matriz  $M_{dph}$  hay 10 filas por cada milímetro del eje  $y$ , por lo tanto, debemos colocar 10 columnas por cada milímetro en el eje  $x$ . Como estamos considerando que el perfil de fase es válido en una distancia de -4 a 4 mm en el eje  $x$ , debemos colocar 80 columnas en la matriz  $M_{dph}$ . Además debemos agregar una columna extra que es la que corresponde a la posición 0 en el eje  $x$ . Entonces hay un total de 81 columnas en la matriz  $M_{dph}$ .

Si graficamos la matriz  $M_{dph}$  contra el vector  $y$  y contra un vector  $x$  que va de -4 a 4 mm (también con 10 muestras por milímetro), obtenemos la gráfica de la figura 4.14. La gráfica de la figura 4.14 es el perfil de cambio de fase de la figura 4.12 extendido a lo largo del eje  $x$ . Podríamos agregar varios perfiles de presión a la derecha e izquierda del eje  $y$  y calcular el perfil de cambio de fase para cada uno de ellos. Como a cada perfil de presión le corresponde el perfil de cambio de fase de la figura 4.12, sólo debemos tomar el perfil de cambio de fase y extenderlo en dos dimensiones como lo hicimos en esta sección.

En este trabajo sólo consideramos los cambios de presión que produce la onda de choque en el plano  $(x, y)$ . Como se puede ver en la figura 4.13,

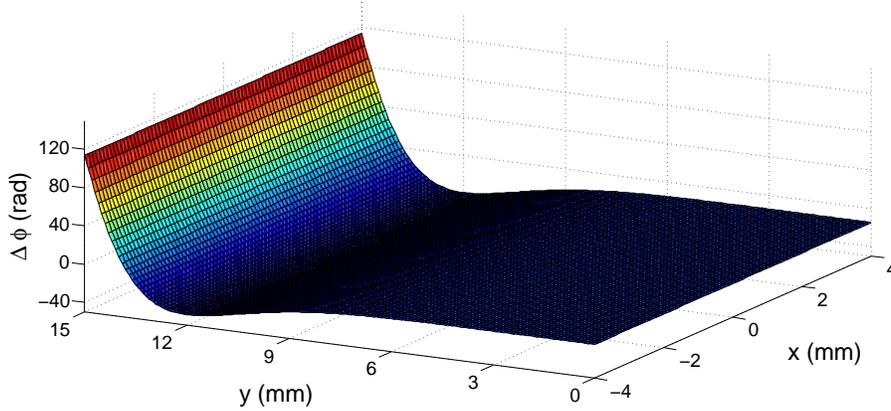


Fig. 4.14: Perfil de cambio de fase extendido sobre el eje  $x$ .

este plano se encuentra justo por debajo del foco del generador. Además, sólo conocemos los cambios de fase para el área del plano  $(x, y)$  que está comprendida ente  $-4$  y  $4$  mm en el eje  $x$  y entre  $0$  y  $15$  mm en el eje  $z$ . Me referiré a esta área como área  $A$ . Entonces, los valores de cambio de fase en el área  $A$  el plano  $(x, y)$  se almacenan en la matriz  $M_{dph}$  y su gráfica se encuentra en figura 4.14.

Ahora, que ya tenemos los valores de cambio de fase en el plano  $(x, y)$ , podemos calcular la fase de la onda luminosa que atraviesa la onda de choque. En la figura 4.9 se puede ver que definí 3 sistemas de coordenadas para poder ubicar donde se encuentra la fase de la onda luminosa incidente, el cambio de fase que produce la onda de choque y la fase modificada. En esta figura sólo se muestra el eje de las  $y$  de estos sistemas de coordenadas. En la figura 4.15 se muestran estos sistemas de coordenadas en tres dimensiones.

En el sistema de coordenadas  $(x_i, y_i)$  se encuentra el frente de onda de la onda luminosa incidente. Recordemos que el frente de onda es una superficie que une todos los puntos de igual fase. Como ya había mencionado anteriormente, la onda luminosa incidente es una onda plana. Estas ondas están formadas por un conjunto de planos en los cuales la fase es constante. Uno de estos planos se muestra en la figura 4.15, en el sistema de coordenadas  $(x_i, y_i)$ . Entonces, la fase de la onda luminosa incidente es constante en todo el plano  $(x_i, y_i)$ , por simplicidad supondremos que su valor es de 1 rad:

$$\phi_i(x_i, y_i) = 1 \text{ rad}$$

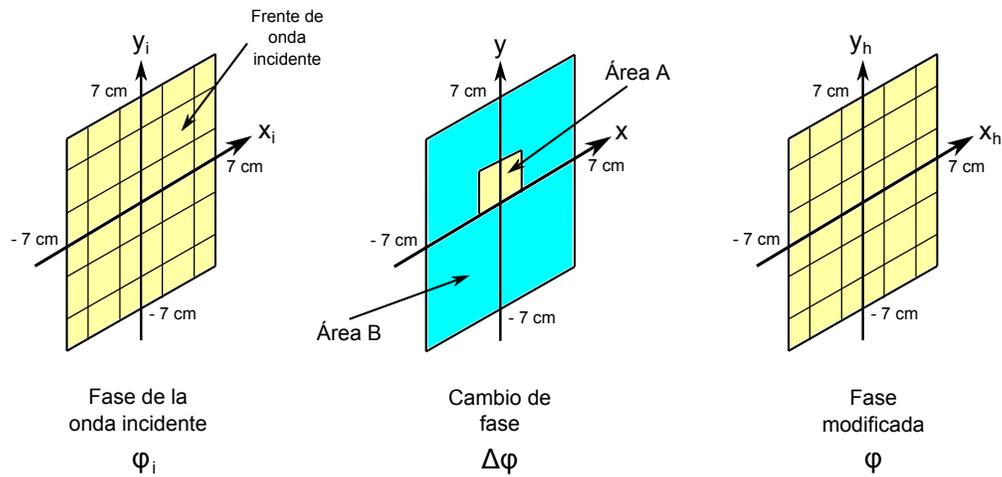


Fig. 4.15: En el sistema de coordenadas  $(x_i, y_i)$  se encuentra el frente de onda incidente. En el sistema de coordenadas  $(x, y)$  se encuentran los cambios de fase que produce la onda de choque en el medio. El área A abarca la parte del plano que va de  $-4$  a  $4$  mm en el eje  $x$  y de  $0$  a  $15$  mm en el eje  $y$ . El área B abarca la parte del plano que va de  $-7$  a  $7$  cm en ambos ejes  $x$  y  $y$ . En el plano  $(x_h, y_h)$  se encuentra la fase de la onda luminosa que ya atravesó la onda de choque.

Recordemos que para iluminar la onda de choque usaremos una fuente de luz, una lente y un espejo como se muestra en la figura 3.8. La onda luminosa incidente proviene del espejo 1 que tiene un radio de  $7$  cm. Esto significa que el haz de luz que ilumina la onda de choque es circular y tiene un radio de  $7$  cm. El frente de onda es del tamaño del haz de luz, es por eso que el frente de onda que se muestra en la figura 4.15 se extiende en el plano  $(x_i, y_i)$  desde  $-7$  a  $7$  cm en ambos ejes  $x_i$  y  $y_i$ . El frente de onda se representa con una superficie cuadrada pero debe ser circular como la forma del espejo. Por el momento supondremos que la superficie del frente de onda es cuadrada y más adelante explicaré cómo se le dió la forma circular.

En el sistema de coordenadas  $(x, y)$  de la figura 4.15 tenemos una superficie que representa los cambios de fase que sufre la onda incidente al atravesar este sistema de coordenadas. Los valores de cambio de fase en el área A son los que se grafican en la figura 4.14 y están almacenados en la matriz  $M_{dph}$ . Como se puede ver en la figura 4.15, el frente de onda incidente se extiende de  $-7$  a  $7$  cm en los ejes  $x_i$  y  $y_i$ . Para saber el desfaseamiento que sufre este

frente de onda, necesitamos conocer los valores de cambio de fase en un área del plano  $(x, y)$  que está comprendida ente -7 y 7 cm en los ejes  $x$  y  $y$ . Me referiré a esta área como área  $B$ . Sólo conocemos los valores de cambio de fase en un área  $A$  del plano  $(x, y)$  que está comprendida entre -4 y 4 mm en el eje  $x$  y entre 0 y 15 mm en el eje  $y$  (figura 4.14).

En el perfil de presión de la figura 4.6 la presión varía muy poco en el intervalo de  $y=0$  a  $y=5$  mm. Esta presión es la presión de equilibrio, es decir, la presión del medio sin ser perturbado por la onda de choque. Como presión de equilibrio tomaré el valor de 22 556 Pa que corresponde a la presión en  $y=0$ . Esta presión es la presión hidrostática del medio la cual viene dada por:

$$P = \rho gh + P_0$$

donde  $P$  es la presión hidrostática en Pa,  $\rho$  es la densidad del agua en  $\text{kg/m}^3$  ( $999.97 \text{ kg/m}^3$ ),  $g$  es la aceleración de la gravedad en  $\text{m/s}^2$  ( $9.8 \text{ m/s}^2$ ),  $h$  es la altura del fluido en m y  $P_0$  es la presión atmosférica en Pa ( $101\,325 \text{ Pa}$ ). De acuerdo con esta ecuación, el valor de 22 556 Pa es la presión hidrostática a una altura de 8.0379 m. A pesar de que el foco de un generador de ondas de choque se encuentra a unos pocos centímetros por debajo del agua, considero que tomar la presión hidrostática a una altura de 8.0379 m no afectará en gran medida los resultados de las simulaciones. La presión hidrostática es despreciable en comparación con la presión ejercida por la onda de choque.

En la figura 4.12 podemos ver que el valor de  $\Delta\phi$  en  $y=0$  es de -14.5387 rad, por lo tanto, este valor es el cambio de fase que corresponde a la presión de equilibrio. El valor de cambio de fase -14.5387 rad se encuentra almacenado en la primera posición del vector  $d_{ph}$  y esta representado con el símbolo  $\Delta\phi_1$ .

Recordemos que sólo estamos considerando los cambios de presión que produce la onda de choque en el área  $A$  que se muestra en la figura 4.15. Sólo se producen cambios de presión en esta área y alrededor de ella tendremos la presión de equilibrio. Por lo tanto, alrededor del área  $A$  tendremos el valor de -14.5387 rad que es el cambio de fase que corresponde a la presión de equilibrio.

Ahora ya conocemos los valores de cambio de fase en el área  $A$  y alrededor de ella. En la matriz  $M_{dph}$  tenemos los valores de cambio de fase que corresponden al área  $A$ . Para tener una matriz de números que contenga los valores de  $\Delta\phi$  para el área  $B$ , debemos agregar el valor de  $\Delta\phi_1 = -14.5387$  rad alrededor de los valores de la matriz  $M_{dph}$  de tal manera que cubra el área  $B$ . En el programa que se hizo en MATLAB esto se hace de una manera muy sencilla.

Primero definimos una matriz  $M_d$  que contiene el valor de  $-14.5387$  en todas sus posiciones. Esta matriz debe de abarcar el área  $B$  que es de  $14 \times 14$  cm. Antes mencioné que estamos tomando diez muestras por milímetro, por lo tanto, la matriz  $M_d$  debe tener 10 filas y 10 columnas por cada milímetro del área  $B$ . Además debe tener una fila y columna extra que son las que corresponden a los valores en  $y = 0$  y en  $x = 0$  respectivamente. Entonces, para abarcar el área  $B$  la matriz  $M_d$  debe tener 1401 filas y 1401 columnas.

Después colocamos los valores de la matriz  $M_{dph}$  dentro de la matriz  $M_d$  de tal manera que tomen las posiciones que corresponden al área  $A$  (que está comprendida entre  $-4$  y  $4$  mm en el eje  $x$  y entre  $0$  y  $15$  mm en el eje  $y$ ). Así es como colocamos los valores de  $\Delta\phi$  del área  $A$  dentro del área  $B$  como está ilustrado en la figura 4.15. La matriz  $M_d$  queda de la siguiente manera:

$$M_d = \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_2 & \dots & \Delta\phi_2 & \Delta\phi_2 & \Delta\phi_2 & \dots & \Delta\phi_2 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_3 & \dots & \Delta\phi_3 & \Delta\phi_3 & \Delta\phi_3 & \dots & \Delta\phi_3 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_m & \dots & \Delta\phi_m & \Delta\phi_m & \Delta\phi_m & \dots & \Delta\phi_m & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_1 & \dots & \vdots & \dots & \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_1 & \dots & \Delta\phi_1 \end{bmatrix}$$

Los valores en color azul son los de la matriz  $M_{dph}$ . Vemos que alrededor de estos valores se encuentra el símbolo  $\Delta\phi_1$  que es igual a  $-14.5387$  rad. En resumen, la matriz  $M_d$  contiene los valores de cambio de fase en un área  $B$  del plano  $(x, y)$  que está comprendida ente  $-7$  y  $7$  cm en los ejes  $x$  y  $y$ .

En el sistema de coordenadas  $(x_h, y_h)$  de la figura 4.15, se encuentra una superficie que representa la fase de la onda luminosa que ya atravesó la onda de choque. A esta fase la denotaré con  $\phi$ . Para calcular  $\phi$  debemos sumar los valores de cambio de fase que se producen en el plano  $(x, y)$  a la fase de la onda incidente:

$$\phi = \phi_i + \Delta\phi \quad (4.16)$$

De acuerdo con esta ecuación, para obtener  $\phi$  debemos sumar los valores de  $\Delta\phi$  que se encuentran en la matriz  $M_d$  a la fase de la onda incidente ( $\phi_i$ ). Esto es un procedimiento sencillo ya que sólo debemos sumar 1 rad a los valores de la matriz  $M_d$  y almacenar los resultados en una matriz  $P_{ho}$ :

$$P_{ho} = M_d + 1 \quad (4.17)$$

Entonces, en la matriz  $P_{ho}$  tendremos los valores de  $\phi$  que es la fase de la onda luminosa que ya atravesó la onda de choque.

La matriz  $P_{ho}$  es del mismo tamaño que la matriz  $M_d$  (1401 x 1401). Esto significa que también abarca un área de -7 a 7 cm pero ahora en los ejes  $x_h$  y  $y_h$ . La superficie que se encuentra en el sistema de coordenadas  $(x_h, y_h)$  de la figura 4.15, representa los valores que se encuentran almacenados en la matriz  $P_{ho}$ . Para graficar los valores de  $\phi$  primero definimos los ejes  $x_h$  y  $y_h$  en dos vectores como los siguientes:

$$xh = [ xh_1 \quad xh_2 \quad xh_3 \quad \dots \quad xh_n ]$$

$$yh = [ yh_1 \quad yh_2 \quad yh_3 \quad \dots \quad yh_m ]$$

En cada uno de estos vectores están almacenados los valores que corresponden al intervalo -7 a 7 cm con 10 muestras por milímetro. Si graficamos la matriz  $P_{ho}$  contra los vectores  $xh$  y  $yh$ , obtenemos la gráfica de la figura 4.16.

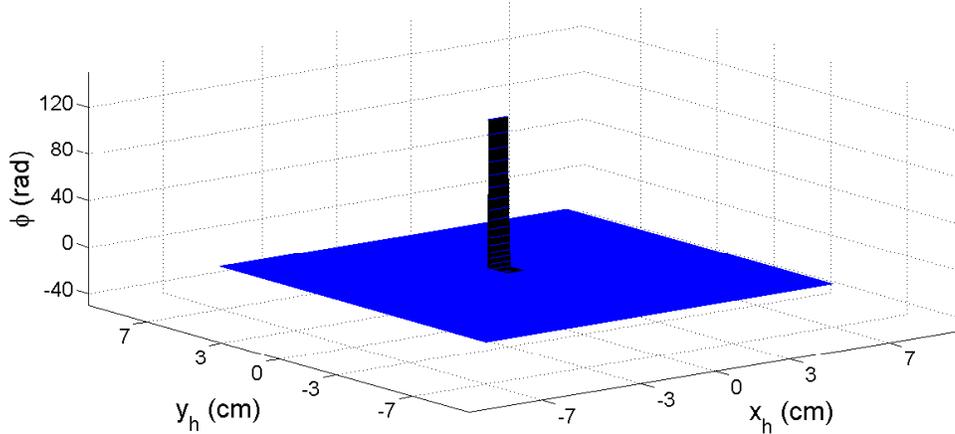


Fig. 4.16: Gráfica de  $\phi$  que es la fase de la onda que atravesó la onda de choque.

#### 4.4. Variaciones de intensidad producidas por la onda de choque

En la figura 3.8 se puede ver el arreglo óptico que utilizaremos para observar las fluctuaciones de intensidad que produce la onda de choque. En

este diagrama se puede ver que un haz de luz atraviesa el espacio por donde se propaga la onda de choque. Para producir el haz de luz se utiliza una fuente de luz, una lente ( $L_1$ ) y un espejo (espejo 1). El espejo produce ondas luminosas planas que se propagan hasta la onda de choque. Los cambios de presión de la onda de choque producen una modificación en la fase de la onda luminosa. La onda luminosa con fase modificada se propaga hasta el plano de análisis y es ahí donde se pueden observar fluctuaciones de intensidad.

En la figura 3.8 también se puede ver que hay una zona rectangular por donde se propaga la onda de choque. Esta zona rectangular representa al generador de ondas de choque que se muestra en la figura 4.3. En la sección anterior vimos cómo la fase de una onda luminosa se ve afectada por los cambios de presión de la onda de choque. Solamente consideramos los cambios de presión que se producen en un plano  $(x, y)$  que corta al tanque del generador de ondas de choque por la mitad. Como ya había mencionado anteriormente, el eje  $y$  se encuentra en el eje de simetría del generador de ondas de choque. Extendimos el perfil de presión a dos dimensiones a lo largo del eje  $x$ .

En la figura 4.15 se muestran tres sistemas de coordenadas donde se ubica la fase de la onda luminosa incidente, el cambio de fase que produce la onda de choque y la fase de la onda luminosa que atravesó la onda de choque. En la figura 4.17 se muestran estos sistemas de coordenadas junto con el espejo 1 y el plano de análisis. Esta figura es la misma que la figura 3.8 pero en dos dimensiones y sólo se muestra la parte donde están el espejo 1, la zona por donde atraviesa la onda de choque y el plano de análisis. Como sólo estamos considerando los cambios de presión que se producen en el plano  $(x, y)$ , únicamente se muestra este plano de la zona rectangular por donde se propaga la onda de choque (figura 3.8).

En la figura 4.17 también se muestra el sistema de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , que es donde se encuentra el frente de onda incidente. Se puede ver que está justo antes del plano  $(x, y)$ . En el sistema de coordenadas  $(x_h, y_h)$  se tiene una superficie que representa la fase de la onda luminosa que ya atravesó la onda de choque. Esta fase está denotada con la letra  $\phi$ . El plano  $(x_h, y_h)$  se encuentra justo después del plano  $(x, y)$ . Como vimos en la sección anterior, hay un valor de la fase  $\phi$  en cada punto del plano  $(x_h, y_h)$ . Los valores de  $\phi$  se encuentran almacenados en la matriz  $P_{ho}$  (ecuación 4.17) y están graficados en la figura 4.16. Los planos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_h, y_h)$  se encuentran a una distancia muy corta del plano  $(x, y)$  pero en la figura 4.17 se muestran más separados para alcanzar a distinguir uno del otro.

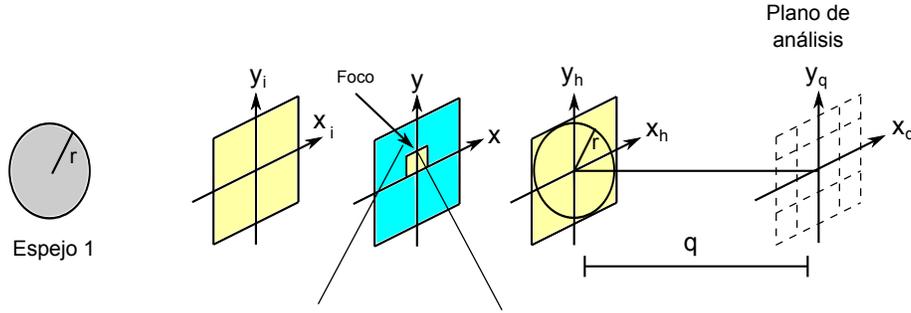


Fig. 4.17: La onda luminosa incidente (cuya fase se encuentra en el plano  $(x_i, y_i)$ ) proviene del espejo 1. El plano  $(x_h, y_h)$  se encuentra justo después del plano  $(x, y)$ . El plano de análisis está definido en el sistema de coordenadas  $(x_q, y_q)$  y se encuentra a una distancia  $q$  del plano  $(x_h, y_h)$ .

La onda luminosa incidente sufre una modificación de fase a causa de los cambios de presión que produce la onda de choque. En la sección 3.3 vimos que la onda luminosa con fase modificada se propaga hasta el plano de análisis. En este plano es donde se observarán las fluctuaciones de intensidad. En esa sección se dedujo una ecuación para calcular las fluctuaciones de intensidad que observaremos en el plano de análisis. Esta ecuación es:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[\Psi_h(x_q, y_q)]_{(u,v)} e^{iq \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (4.18)$$

donde  $\Psi_h(x_q, y_q)$  es una onda de la forma:

$$\Psi_h(x_q, y_q) = A(x_q, y_q) e^{-i\phi(x_q, y_q)} \quad (4.19)$$

$A(x_q, y_q)$  es la amplitud y  $\phi(x_q, y_q)$  es la fase. Como se puede ver en la figura 4.17, el plano de análisis está definido por el sistema de coordenadas  $(x_q, y_q)$ , por lo tanto, el término  $I(x_q, y_q)$  es la intensidad en el plano de análisis. La onda luminosa con fase modificada es justamente la onda  $\Psi_h(x_q, y_q)$  de la ecuación 4.18. El término  $q$  es la distancia de propagación y  $\lambda$  es la longitud de onda de  $\Psi_h$ . Entonces la ecuación 4.18 describe los cambios de intensidad que se observarán en el plano de análisis  $(x_q, y_q)$  a causa de la onda con fase modificada que se encuentra en el plano  $(x_h, y_h)$ .

Para calcular  $I(x_q, y_q)$  debemos proporcionar la onda luminosa con fase modificada  $\Psi_h(x_q, y_q)$  en la ecuación 4.18. Suponemos que cuando la onda  $\Psi_h$  atraviesa la onda de choque, su amplitud se mantiene constante. Para

simplificar suponemos que la constante es igual a 1:

$$A(x_q, y_q) = 1$$

Entonces, la onda  $\Psi_h$  sólo sufre una modificación de fase al atravesar la onda de choque:

$$\Psi_h(x_q, y_q) = e^{-i\phi(x_q, y_q)} \quad (4.20)$$

El término  $\phi(x_q, y_q)$  indica los valores de fase de la onda luminosa que atravesó la onda de choque. En la sección anterior obtuvimos estos valores y están almacenados en la matriz  $P_{ho}$  (ecuación 4.17). A pesar de que el término  $\phi(x_q, y_q)$  denota valores de fase para el plano  $(x_q, y_q)$ , recordemos que los valores de fase están definidos sobre el plano  $(x_h, y_h)$  (figura 4.17).

Si sustituimos 4.20 en 4.18, obtenemos:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[e^{-i\phi(x_q, y_q)}]_{(u,v)} e^{iq\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1-\lambda^2(u^2+v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (4.21)$$

Esta ecuación describe las fluctuaciones de intensidad que produce la onda cuya fase ha sido modificada por los cambios de presión de la onda de choque. Para graficar el término  $I(x_q, y_q)$  se programó en MATLAB la ecuación 4.21 como ya vimos en la sección 4.1. En esa sección se comprobó que el programa que grafica  $I(x_q, y_q)$  funciona correctamente. El programa se encuentra en el apéndice B. Para comprobar el correcto funcionamiento de este programa, supusimos que la fase  $\phi(x_q, y_q)$  era constante e igual a 1 en todo el plano  $(x_q, y_q)$ . Ahora debemos poner como variable de entrada los valores de fase de la matriz  $P_{ho}$  (ecuación 4.17).

El programa del apéndice C obtiene la matriz de números  $P_{ho}$  tal y como se explicó en la sección anterior. Después de las líneas de código que obtienen la matriz  $P_{ho}$ , se ponen las líneas de código del programa del apéndice B. En lugar de tomar un valor de fase de  $\phi = 1$ , el programa ahora toma como fase  $\phi$  a todos los valores de la matriz  $P_{ho}$ . De esta manera, el programa del apéndice C obtiene una imagen de la intensidad  $I(x_q, y_q)$  que produce los valores de fase de la matriz  $P_{ho}$ .

El frente de onda incidente que se encuentra en el sistema de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , proviene del espejo 1 (ver figura 4.17). El espejo es circular de radio  $r = 7$  cm y por lo tanto el frente de onda también debe tener forma circular. En el sistema de coordenadas  $(x_h, y_h)$  se encuentra una superficie que representa la fase de la onda que ya atravesó la onda de choque y proviene del espejo 1. Por lo tanto, esta superficie también debe tener forma circular y

su radio debe ser de 7 cm. Para simular la forma de circular del haz de luz, multiplicamos a la onda con fase modificada  $\Psi_h$  por una función  $circ(x_q, y_q)$  que es igual a:

$$circ(x_q, y_q) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_q^2 + y_q^2} < 7cm \\ 0 & \text{en otros lugares} \end{cases}$$

donde:

$$\sqrt{x_q^2 + y_q^2} = r$$

La letra  $r$  indica el radio del círculo que delimita la forma del haz de luz. El radio de este círculo es de 7 cm al igual que el radio del espejo 1. En la sección 4.1 también multiplicamos la onda  $\Psi_h$  por una función rectángulo  $\Pi(x_q, y_q)$  para simular una apertura de rendija.

En la ecuación 4.21, la exponencial  $e^{-i\phi(x_q, y_q)}$  representa la onda luminosa con fase modificada. Debemos multiplicar esta exponencial por la función  $circ(x_q, y_q)$  para simular la forma circular del haz de luz. Al hacer esta multiplicación la ecuación 4.21 queda como:

$$I(x_q, y_q) = \left| F^{-1} \left\{ F[e^{-i\phi(x_q, y_q)} circ(x_q, y_q)]_{(u, v)} e^{iq \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2(u^2 + v^2)}} \right\} \right|^2 \quad (4.22)$$

Esta ecuación nos permite calcular la intensidad de luz que observaremos en el plano de análisis, tomando en cuenta la forma circular que tiene el haz de luz. El programa del apéndice C grafica esta ecuación que es la misma que la ecuación 4.21 pero con la función  $circ(x_q, y_q)$  mutliplicando a  $\Psi_h$ . Como mencioné anteriormente, en la sección 4.1 se comprobó el correcto funcionamiento del programa del apéndice B que grafica la ecuación 4.21. En esa sección en lugar de multiplicar a  $\Psi_h$  por la función  $circ(x_q, y_q)$ , la multiplicamos por una función rectángulo  $\Pi(x_q, y_q)$  para simular una apertura de rendija. Entonces, el programa del apéndice B tiene unas líneas de código para definir una matriz de 1's y 0's que simula la apertura de rendija.

Ya había explicado que en el programa del apéndice C después de las líneas de código que obtienen la matriz  $P_{ho}$ , se ponen las mismas líneas de código que el apéndice B. Después de agregar las líneas de código del apéndice B al programa del apéndice C, se debe cambiar la parte del código que define la apertura de rendija por unas líneas de código que definan a la función  $circ(x_q, y_q)$ . Esto es muy sencillo de hacer ya que la función  $circ(x_q, y_q)$  es como una apertura circular. Las instrucciones de programa para una apertura

circular se encuentran al final del apéndice B. Entonces, en el programa del apéndice C en lugar de tener las líneas de código para una apertura de rendija, tenemos las líneas de código para una apertura circular.

Como el programa del apéndice C grafica la ecuación 4.22, también debemos poner como variables de entrada la longitud de onda  $\lambda$  y la distancia de propagación  $q$ . El valor de  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz que usaremos para iluminar la onda de choque. Para hacer las simulaciones usamos un valor de  $\lambda$  de 632 nm.

El término  $q$  es la distancia que separa el plano de análisis  $(x_q, y_q)$  del plano  $(x_h, y_h)$  que es donde se encuentra la onda luminosa con fase modificada (figura 4.17). La distancia  $q$  es la distancia que se propaga la onda  $\Psi_h$  hasta el plano  $(x_q, y_q)$  (distancia de propagación). Al variar la distancia  $q$  podemos alejar o acercar el plano de análisis del plano  $(x_h, y_h)$ . Como se puede ver en la figura 4.17, el plano  $(x_h, y_h)$  se encuentra justo después del plano  $(x, y)$ . En el programa del apéndice C podemos asignar el valor de  $q$  que queramos y así obtener imágenes de las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis a esa distancia  $q$  del plano  $(x_h, y_h)$ . Queremos observar las fluctuaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis a diferentes distancias del plano  $(x_h, y_h)$ .

A continuación se presentan las imágenes que se obtienen al ejecutar el programa del apéndice C. Este programa se encarga de calcular los valores de  $I(x_q, y_q)$  de la ecuación 4.22. Recordemos que los valores de fase  $\phi$  se encuentran almacenados en la matriz  $P_{ho}$ . El programa calcula un valor de intensidad  $I$  para cada valor de la matriz  $P_{ho}$ . Todos los valores de  $I$  se almacenan en una matriz de números  $I$ . Para mostrar como imagen los valores de la matriz  $I$ , se utilizó la función *imagesc* de MATLAB. Esta función muestra cada valor de la matriz  $I$  como un pixel. Dependiendo del valor que tengan los elementos de esta matriz, la función *imagesc* los muestra con un tono de gris diferente.

En el programa sólo podemos modificar la distancia  $q$ . Este valor debe estar en metros. Para un valor de  $q = 0.5$  m, el programa produce la imagen de la figura 4.18. En esta imagen se muestra la intensidad luminosa en el plano de análisis. La distribución de intensidad tiene forma circular (de radio 7 cm) porque la forma del haz de luz también lo es. También se muestra una barra de tonos de grises para saber el valor de intensidad que le corresponde a cada punto del plano de análisis  $(x_q, y_q)$ .

Cada pixel de la figura 4.18 es un elemento de la matriz  $I$ . Dependiendo del valor que tenga un elemento de la matriz, la función *imagesc* le asigna un

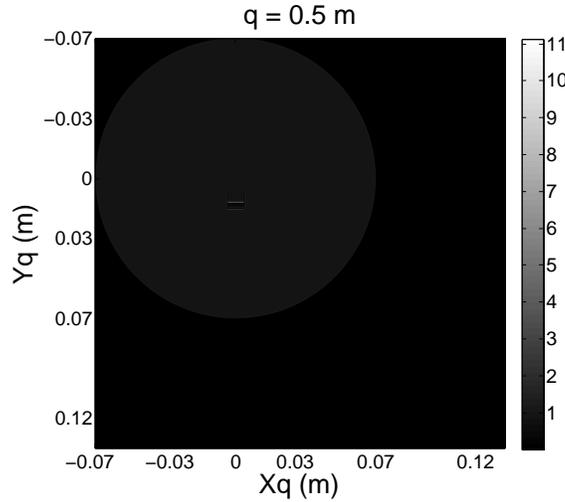


Fig. 4.18: Intensidad luminosa en el plano de análisis para una distancia de propagación de 0.5 m.

tono de gris diferente. El valor más grande lo muestra de color blanco y el más pequeño lo muestra de color negro. Hay 10 píxeles por cada milímetro.

Los ejes  $x_q$  y  $y_q$  se obtienen definiendo en el programa dos vectores de números. Nótese que los valores del eje  $y_q$  van aumentando de arriba hacia abajo. Ambos ejes  $x_q$  y  $y_q$  se encuentran extendidos hasta 13.47 cm. Esto es porque al calcular la TF de la ecuación 4.22, el programa debe extender la longitud de la matriz  $I$  hasta una potencia entera de 2 (ver apéndice A.3).

En el centro del círculo de la figura 4.18 se encuentran las variaciones de intensidad que produce la onda de choque. Si hacemos un zoom en esa región obtenemos la imagen de la figura 4.19. Estos cambios de intensidad son producidos por los cambios de fase del área  $A$  (ver sección 4.3). Se puede ver que hay una franja de luz más brillante en  $y = 0.012$  m.

Con la imagen de la figura 4.19 podemos saber que contraste tendremos a una distancia  $q$  de 0.5 m. Para calcular el contraste de las imágenes usamos la siguiente ecuación:

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (4.23)$$

donde  $I_{max}$  e  $I_{min}$  son los valores de intensidad máximo y mínimo respectivamente. Tomamos como  $I_{max}$  al valor de intensidad más grande de la barra de tono de grises. En la figura 4.19 se puede ver en la barra de tonos de grises

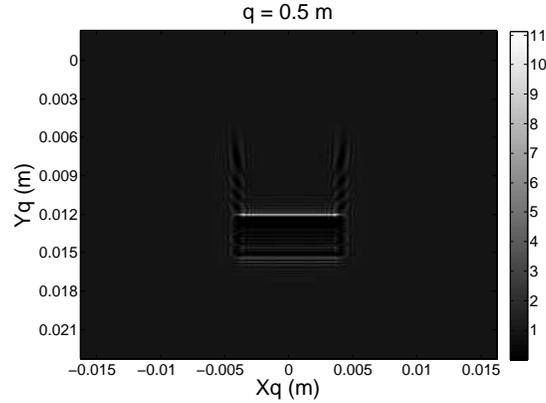


Fig. 4.19: Variación de intensidad luminosa producida por una onda de choque para una distancia de propagación de 0.5 m.

que el valor de  $I_{max}$  es de 11.1317. Por otra parte, tomamos como  $I_{min}$  al valor de intensidad que rodea a las variaciones de intensidad que produce la onda de choque (zona central). En este caso el valor de  $I_{min}$  es de 1. Con estos valores de  $I_{max}$  y de  $I_{min}$  tenemos un contraste de:

$$C = 0.8351$$

En las figuras 4.20, 4.21 y 4.22 se pueden ver las variaciones de intensidad producidas por la onda de choque a diferentes distancias de propagación. La intensidad luminosa es mayor en las franjas de luz que se pueden ver en las imágenes. Estas franjas de luz son producidas por la onda de choque. Se calcularon los valores de contraste para cada una de estas imágenes y se muestran en la tabla 4.1. El contraste más alto es de 0.8692 y corresponde a la imagen 4.20c (distancia de propagación  $q = 0.2$  m). Por otro lado, en la imagen 4.20a tenemos muy poco contraste ( $C = 0.1115$ ). Esto es lógico ya que la distancia de propagación de esta imagen es de apenas 1 cm. A esta distancia no podremos ver variaciones de intensidad y por eso debemos tomar las imágenes a una distancia  $q$  mayor a 1 cm.

En las imágenes 4.22a y 4.22b la difracción de la luz empieza a hacerse más evidente. Al aumentar la distancia de propagación también incrementa la difracción de la luz en la imagen. Esto quiere decir que después de una distancia  $q$  de 1 m, la difracción en la imagen hará más difícil apreciar las franjas brillantes de luz. Por esta razón, debemos tomar imágenes a una distancia de propagación menor a 1 m.

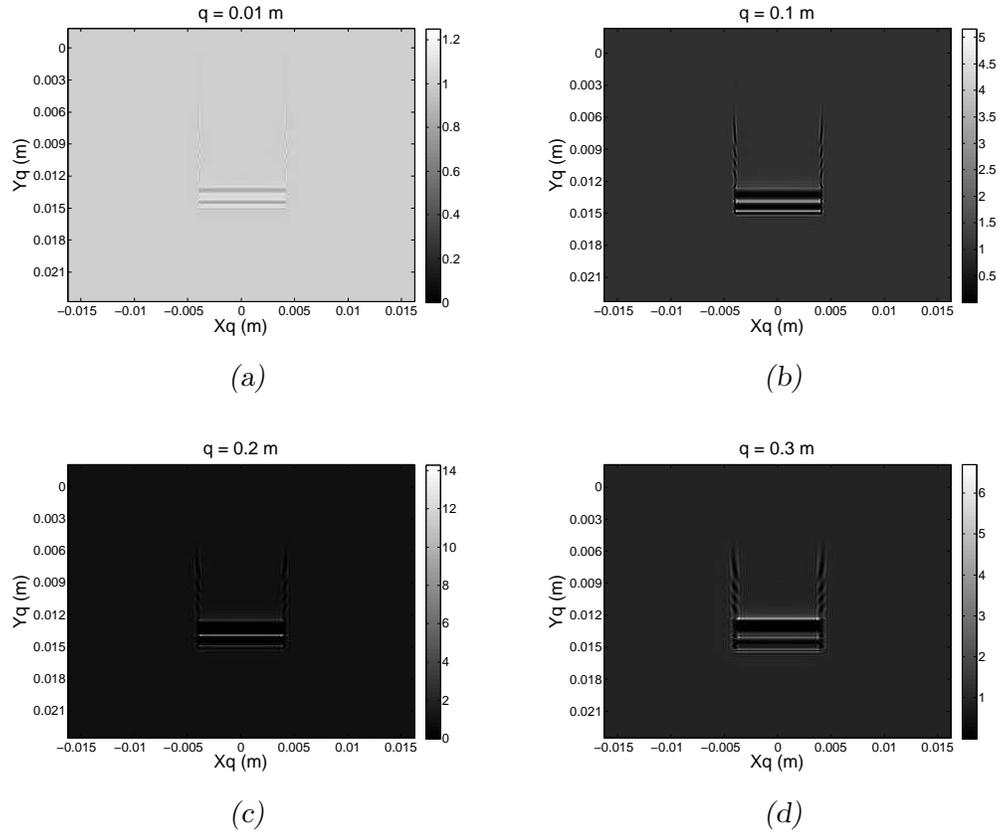


Fig. 4.20: Variaciones de intensidad producidas por la onda de choque a diferentes distancias de propagación. (a)  $q = 0.01$  m. (b)  $q = 0.1$  m. (c)  $q = 0.2$  m. (d)  $q = 0.3$  m.

En las imágenes donde  $q$  es menor a 1 m se puede ver que la difracción no es tan notoria. Entonces, debemos tomar imágenes a una distancia  $q$  mayor a 1 cm y menor a 1 m. Como ya había mencionado antes, en  $q = 0.2$  m (figura 4.20c) tenemos el valor de contraste más alto de la tabla 4.1. Se hicieron varias simulaciones y se encontró que a  $q = 0.17$  se tiene un contraste un poco más alto que en  $q = 0.2$ . Las variaciones de intensidad para una distancia de  $q = 0.17$  se muestran en la figura 4.23. El valor de  $I_{min}$  es de 1 y el valor de  $I_{max}$  es de 16.0857, por lo tanto, el valor de contraste de esta imagen es de 0.8829. A esta distancia la difracción de la luz no es tan notoria. Entonces, la distancia  $q = 0.17$  es ideal para tomar una imagen de las variaciones de

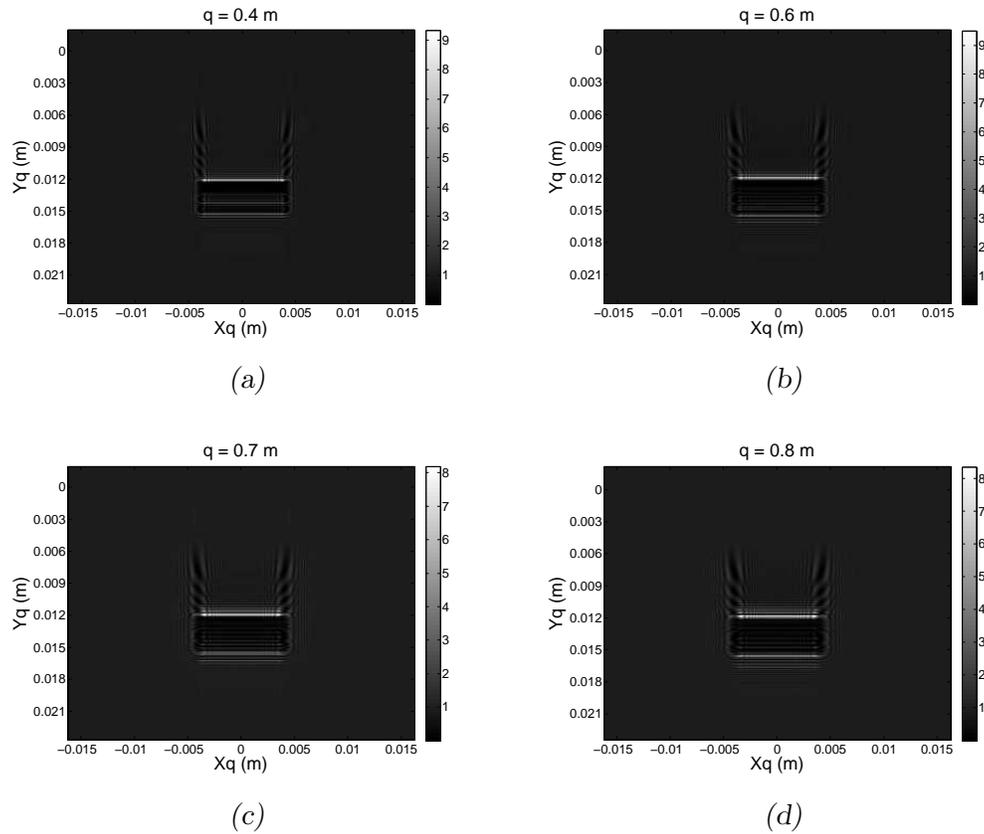


Fig. 4.21: Variaciones de intensidad producidas por la onda de choque a diferentes distancias de propagación. (a)  $q = 0.4$  m. (b)  $q = 0.6$  m. (c)  $q = 0.7$  m. (d)  $q = 0.8$  m.

intensidad que produce la onda de choque.

Las imágenes de las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23 muestran las variaciones de intensidad que produce la onda de choque en el plano de análisis. En la figura 3.8 se puede ver el arreglo óptico que usaremos para observar estas variaciones de intensidad. En la sección 3.3 expliqué que en el plano de detección se forma una imagen de lo que ocurre en el plano de análisis. En el plano de detección colocaremos una cámara fotográfica para tomar imágenes de estas variaciones de intensidad.

Si colocamos la cámara en el plano conjugado de la onda de choque estaremos tomando una imagen del plano  $(x, y)$ . Al principio de esta sección

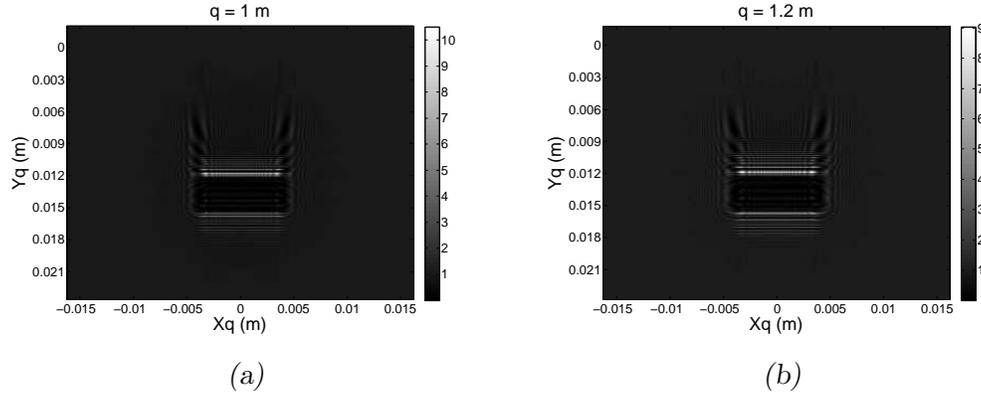


Fig. 4.22: Variaciones de intensidad producidas por la onda de choque a una distancia de propagación de (a)  $q = 1$  m y (b)  $q = 1.2$  m.

expliqué que sólo consideramos los cambios de presión en este plano. Como ya vimos en la sección 3.1, al enfocar una capa turbulenta en la atmósfera no observaremos fluctuaciones de intensidad. En este caso en lugar de la capa turbulenta tenemos el plano  $(x, y)$  donde están los cambios de presión que produce la onda de choque. Ya que una capa turbulenta y la onda de choque consisten en fluctuaciones de presión, no observaremos variaciones de intensidad si hacemos la observación en el plano conjugado de la onda de choque.

Si acercamos o alejamos la cámara del plano conjugado de la onda de choque, podemos tomar imágenes de las variaciones de intensidad en el plano de análisis a diferentes distancias  $q$  del plano  $(x_h, y_h)$ . Así podremos tomar las imágenes de las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23. Dependiendo de la distancia focal del espejo 2 y la lente 2, será la distancia que debemos separar la cámara del plano conjugado de la onda de choque. Podemos experimentar tomando fotografías a diferentes distancias. Como ya vimos, a una distancia  $q$  de 0.17 m tendremos un mejor contraste por lo que tendremos que calcular la distancia que debemos mover la cámara del plano conjugado de la onda de choque para tomar la imagen 4.23.

$q$ (m)	$I_{min}$	$I_{max}$	Contraste ( $C$ )
0.01	1	1.2510	0.1115
0.1	1	5.1609	0.6754
0.2	1	14.2881	0.8692
0.3	1	6.6925	0.7400
0.4	1	9.3238	0.8063
0.6	1	9.5067	0.8096
0.7	1	8.1733	0.7820
0.8	1	8.3570	0.7863
1	1	10.5140	0.8263
1.2	1	9.0383	0.8008

Tab. 4.1: Valores de contraste para diferentes distancias de propagación.

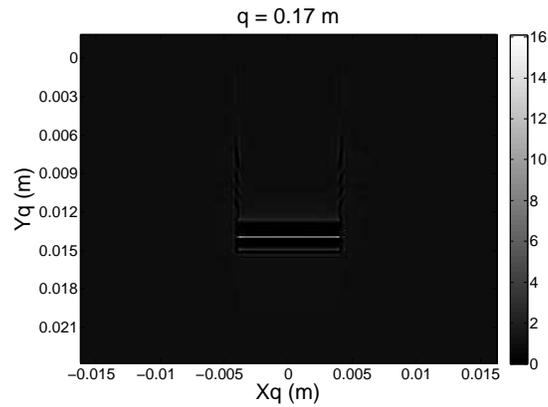


Fig. 4.23: Variación de intensidad luminosa producida por una onda de choque para una distancia de propagación de 0.17 m.

## 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo propusimos una nueva técnica para caracterizar una onda de choque a partir de las variaciones de intensidad que produce en el plano de análisis. Se realizó un programa que simula las variaciones de intensidad que produce la onda de choque. A partir de estas simulaciones pudimos ver que la onda de choque produce franjas de luz brillantes en el plano de análisis que representan la difracción de la luz que produce el cambio de presión de la onda de choque.

Vimos que conforme aumenta la distancia de propagación  $q$  también incrementa la difracción en la imagen. Entonces debemos evitar tomar imágenes a una distancia  $q$  mayor a 1 m ya que a esta distancia la difracción en la imagen hace más difícil apreciar las franjas brillantes de luz. Por otro lado, a una distancia  $q$  de 1 cm no podremos observar variaciones de intensidad debido al bajo contraste. Por lo tanto, debemos tomar imágenes a una distancia de propagación mayor a 1 cm y menor a 1 m.

Se hicieron varias simulaciones y encontramos que para una distancia  $q = 0.17$  m tenemos un valor de contraste alto entre la franja de luz brillante y el fondo más oscuro. A esta distancia la difracción de la luz no es tan notoria. Entonces, la distancia  $q = 0.17$  es ideal para tomar una imagen de las variaciones de intensidad que produce la onda de choque.

Presentamos simulaciones de las variaciones de intensidad que produce la onda de choque. El siguiente paso para poder caracterizar una onda de choque es comparar estas simulaciones con resultados experimentales. Construiremos el arreglo óptico de la figura 3.8 para tomar las imágenes de las variaciones de intensidad que produce la onda de choque.

Para tomar las imágenes de las variaciones de intensidad utilizaremos una cámara fotográfica de alta velocidad. Esta cámara la colocaremos a cierta distancia del plano conjugado de la onda de choque. De esta manera la cámara podrá tomar imágenes de las variaciones de intensidad que se producen en el plano de análisis. Para tomar imágenes a distancias de propagación  $q$  diferentes, debemos acercar o alejar la cámara del plano conjugado de la

---

onda de choque. Al alejar la cámara de este plano, podremos tomar una imagen del plano de análisis a una distancia  $q$  más grande. Así podremos tomar las imágenes de las variaciones de intensidad producidas por la onda de choque.

Después compararemos las imágenes de la cámara con las imágenes que se obtienen de las simulaciones. Debemos comprobar que el experimento concuerda con las simulaciones realizadas en este trabajo. Una vez que realicemos el experimento podremos darnos una idea de qué tan precisas son estas simulaciones y si se pueden mejorar.

Una vez que comparemos las simulaciones con el experimento podremos realizar el proceso inverso que se hizo en este trabajo, es decir, a partir de una imagen de variaciones de intensidad obtener un perfil de presión de una onda de choque. Para caracterizar la onda de choque tomaremos imágenes de las variaciones de intensidad que produce y a partir de ellas obtendremos el perfil de presión que le corresponde. Además de la presión podremos calcular la velocidad de la onda de choque. De esta manera podremos caracterizar una onda de choque utilizando un método óptico.

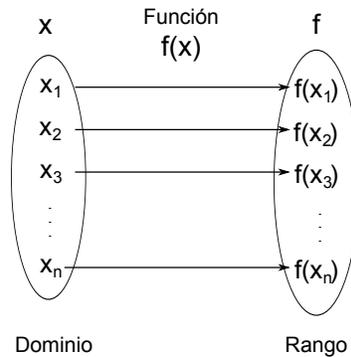
## Apéndice

## A. PROGRAMACIÓN EN MATLAB

En este apéndice se explica cómo evaluar y graficar funciones matemáticas en MATLAB. También se da una explicación de cómo calcular la transformadas de Fourier de una función.

### A.1. Funciones matemáticas en MATLAB

Para graficar una función matemática  $f(x)$ , primero debemos evaluarla en el dominio  $x$  para obtener el rango  $f$  de la función. Recordemos que una función es una "regla" que asigna a cada valor del dominio  $x$ , un valor del rango  $f$ .



Una vez que se obtiene el rango de la función, se puede graficar contra el dominio para obtener una gráfica de  $f(x)$ . MATLAB nos permite trabajar con arreglos de números, ya sean vectores o matrices. Para evaluar cualquier función matemática  $f(x)$ , primero debemos proporcionar el dominio  $x$ , esto lo hacemos definiendo un vector como el siguiente:

$$x = [ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n ]$$

donde  $n$  es la longitud del arreglo numérico. Este vector contiene los valores de  $x$  en donde queremos evaluar la función. Una vez definido el dominio, se

escribe la función  $f(x)$  que queremos evaluar usando la sintaxis del programa. Algunos ejemplos de funciones son:

$$\begin{aligned} f &= \sin(x) \\ f &= \cos(x) \\ f &= \exp(x) \end{aligned}$$

Si ejecutamos alguna de estas instrucciones, MATLAB generará un vector  $f$  con los valores que resultan de evaluar la función  $f(x)$  en los valores del vector  $x$ :

$$f = [ f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3) \quad \dots \quad f(x_n) ]$$

Por lo tanto, este vector es el rango de la función.

Ésta es la manera de evaluar funciones matemáticas en MATLAB. Una vez evaluada la función  $f(x)$ , se puede obtener una gráfica de la función si se grafica el rango  $f$  contra el dominio  $x$ . Para que quede un poco más clara la explicación realizaré un pequeño ejemplo a continuación.

Supongamos que queremos evaluar la función  $f(x) = \text{sinc}^2(x)$  en un dominio  $x$  que vaya de -5 a 5. Como ya mencioné antes, primero definimos el dominio de la función, esto lo podemos hacer con el siguiente comando:

$$x = \text{inf} : \Delta x : \text{sup}$$

donde  $\text{inf}$  es el valor inferior del dominio que queremos,  $\text{sup}$  es el valor superior y  $\Delta x$  es la diferencia entre los valores del dominio. Como en este caso necesitamos un dominio de -5 a 5 y además queremos una diferencia entre sus valores de 0.1 (para que la función esté bien muestreada), el comando sería:

$$x = -5 : 0.1 : 5$$

Esta instrucción nos define el siguiente vector:

$$x = [ -5 \quad -4.9 \quad -4.8 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 4.7 \quad 4.8 \quad 4.9 \quad 5 ]$$

Una vez definido el dominio de la función, procedemos a evaluar la función  $f(x) = \text{sinc}^2 x$ . La sintaxis de MATLAB para esta función es:

$$f = (\text{sinc}(x)).^2$$

Esta instrucción genera un vector  $f$  cuyos elementos son los valores que resultan de evaluar la función  $f(x) = \text{sinc}^2 x$  en los valores del vector  $x$ :

$$f = [ \text{sinc}^2(-5) \quad \text{sinc}^2(-4.9) \quad \dots \quad \text{sinc}^2(0) \quad \dots \quad \text{sinc}^2(4.9) \quad \text{sinc}^2(5) ]$$

En este vector se almacenan todos los valores de  $f(x)$ , por lo tanto, el vector  $f$  representa el rango de la función  $f(x) = \text{sinc}^2 x$ . Para graficar la función, se grafica el vector  $f$  contra el vector  $x$  usando la siguiente instrucción:

$$\text{plot}(x, f)$$

y obtenemos la gráfica de la figura A.1 que es precisamente la gráfica de  $f(x) = \text{sinc}^2 x$ .

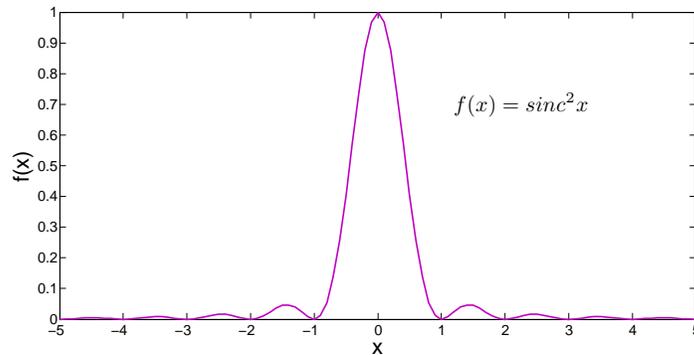


Fig. A.1: Gráfica de la función  $f(x) = \text{sinc}^2(x)$  obtenida con MATLAB.

Para evaluar funciones matemáticas en dos dimensiones  $g(x, y)$ , debemos proporcionar un vector extra para definir el eje  $y$ :

$$x = [ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n ]$$

$$y = [ y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_m ]$$

donde  $n$  y  $m$  son las longitudes de los vectores  $x$  y  $y$  respectivamente.

Una vez que definimos el dominio de la función, el siguiente paso sería evaluar la función  $g(x, y)$  como en el caso de una dimensión, pero debemos realizar un paso más antes de eso. Si evaluamos la función  $g(x, y)$  con los vectores  $x$  y  $y$ , MATLAB no tendrá los números suficientes para calcular los valores de la función en todos los puntos del dominio que queremos, solamente calculará los valores de la función para los puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_m)$ . Necesitamos evaluar  $g(x, y)$  en todos los puntos del dominio  $(x, y)$ , es decir, debemos evaluarla en los puntos  $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3)$  etc. Para solucionar

este problema, debemos proporcionar arreglos de números como los siguientes:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_1 & y_1 & \dots & y_1 \\ y_2 & y_2 & y_2 & \dots & y_2 \\ y_3 & y_3 & y_3 & \dots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m & y_m & y_m & \dots & y_m \end{bmatrix}$$

Estas matrices son de longitud  $m \times n$  donde  $m$  es el número de renglones y  $n$  el número de columnas. MATLAB nos permite obtener las matrices  $X$  y  $Y$  a partir de los vectores  $x$  y  $y$  de una manera muy sencilla; esto lo explicaré más adelante utilizando un ejemplo.

Una vez que tenemos las matrices  $X$  y  $Y$ , podemos escribir la función  $g(x, y)$  que queremos evaluar utilizando la sintaxis de MATLAB. Algunos ejemplos de funciones en dos dimensiones son:

$$\begin{aligned} g &= \sin(X + Y) \\ g &= \cos(X + Y) \\ g &= \exp(X + Y) \end{aligned}$$

Nótese que debemos poner las matrices  $X$  y  $Y$  como variables de entrada. Si ejecutamos alguna de estas instrucciones, MATLAB generará una matriz  $g$  con los valores que resultan de evaluar la función  $g(x, y)$  en los valores del dominio  $(x, y)$ :

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1, y_1) & g(x_2, y_1) & g(x_3, y_1) & \dots & g(x_n, y_1) \\ g(x_1, y_2) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_2) & \dots & g(x_n, y_2) \\ g(x_1, y_3) & g(x_2, y_3) & g(x_3, y_3) & \dots & g(x_n, y_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(x_1, y_m) & g(x_2, y_m) & g(x_3, y_m) & \dots & g(x_n, y_m) \end{bmatrix}$$

La matriz  $g$  es el rango de la función  $g(x, y)$  ya que contiene los valores de la función para el dominio  $(x, y)$ . La longitud de la matriz  $g$  es de  $m \times n$ . Así es como se evalúan funciones matemáticas en dos dimensiones, a continuación realizaré un ejemplo para que quede un poco más clara la explicación.

Supongamos que queremos evaluar la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$  en un dominio que vaya de -5 a 5 para el eje  $x$  y también para el eje  $y$ . Como primer paso debemos definir el dominio de la función. Ya que queremos que los ejes  $x$  y  $y$  sean de -5 a 5, los comandos para definirlos son:

$$x = -5 : 0.1 : 5$$

$$y = -5 : 0.1 : 5$$

Nótese que para ambos vectores se escogió una diferencia entre valores de 0.1 como en el caso de una dimensión. Estas instrucciones del programa nos definen los siguientes vectores:

$$x = [ -5 \quad -4.9 \quad -4.8 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 4.7 \quad 4.8 \quad 4.9 \quad 5 ]$$

$$y = [ -5 \quad -4.9 \quad -4.8 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 4.7 \quad 4.8 \quad 4.9 \quad 5 ]$$

El siguiente paso es obtener las matrices  $X$  y  $Y$ . MATLAB nos permite obtener estas matrices usando el siguiente comando:

$$[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$$

Las variables de entrada son los vectores  $x$  y  $y$ .

Una vez definidas las matrices  $X$  y  $Y$  podemos escribir la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$ . La sintaxis para esta función es:

$$g = ((\text{sinc}(X)).^2) .* \text{sinc}(Y)$$

Al ejecutar esta instrucción, MATLAB generará una matriz  $g$  con los valores que resultan de evaluar la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$  en los valores de las matrices  $X$  y  $Y$ :

$$g = \begin{bmatrix} \text{sinc}^2(-5)\text{sinc}(-5) & \dots & \text{sinc}^2(5)\text{sinc}(-5) \\ \text{sinc}^2(-5)\text{sinc}(-4.9) & \dots & \text{sinc}^2(5)\text{sinc}(-4.9) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{sinc}^2(-5)\text{sinc}(4.8) & \dots & \text{sinc}^2(5)\text{sinc}(4.8) \\ \text{sinc}^2(-5)\text{sinc}(4.9) & \dots & \text{sinc}^2(5)\text{sinc}(4.9) \\ \text{sinc}^2(-5)\text{sinc}(5) & \dots & \text{sinc}^2(5)\text{sinc}(5) \end{bmatrix}$$

La matriz  $g$  es el rango de la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$ . Si graficamos esta matriz contra el dominio  $x$  y  $y$ , obtendremos la gráfica de la figura A.2 que corresponde justamente a la gráfica de la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$ . Para obtener la gráfica se debe ejecutar la siguiente instrucción:

$$\text{surf}(x, y, g)$$

La función *surf* sirve para graficar en dos dimensiones.

Ahora que ya expliqué cómo evaluar y graficar funciones matemáticas en MATLAB, procederé a explicar cómo obtener sus transformadas de Fourier.

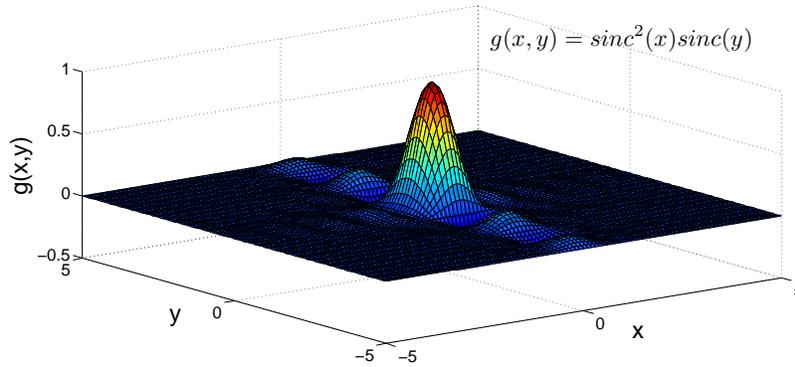


Fig. A.2: Gráfica de la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$  obtenida con MATLAB.

## A.2. Transformada discreta de Fourier

MATLAB nos permite calcular la transformada de Fourier de una función con el comando “fft”. Este comando (ó subrutina de MATLAB) utiliza la transformada discreta de Fourier para calcular la transformada de Fourier de una función definida en una dimensión. La definición de la transformada de Fourier es para funciones continuas. En una dimensión, la transformada de Fourier está definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xu} dx \quad (\text{A.1})$$

donde  $u$  indica el dominio de la frecuencia. Necesitamos hacer una aproximación de esta ecuación para calcular la transformada de Fourier de funciones discretas.

En una función discreta el dominio  $x$  no es continuo; sólo podemos tomar valores discretos de éste. Supongamos que tenemos  $n$  valores del dominio  $x$ :

$$x_r = r\Delta x \quad (\text{A.2})$$

donde:

$$r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

El valor de  $\Delta x$  es la diferencia entre los valores del dominio (ó intervalo de muestreo).

La transformada de Fourier de una función discreta también es una función discreta. Esto significa que sólo podemos obtener los valores de la transformada de Fourier para un dominio de frecuencia discreto  $u_R$  que viene dado por:

$$u_R = \frac{R}{n \Delta x} \quad (\text{A.3})$$

donde:

$$R = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$$

En la expresión A.1 vemos que para calcular la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ , se debe calcular la integral del producto de esta función y la exponencial compleja. Para calcular la transformada de Fourier de una función discreta no podemos tomar la integral, debemos hacer una aproximación tomando la suma sobre todos los valores de  $x$ :

$$F(u_R) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x u} dx \approx \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) e^{-i2\pi x_r u_R} \Delta x \quad (\text{A.4})$$

Como ya se había mencionado, la transformada se calcula para el dominio  $u_R$ . Si sustituimos A.2 y A.3 en la suma tenemos que:

$$\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) e^{-i2\pi x_r u_R} \Delta x = \Delta x \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) e^{-i\frac{2\pi}{n} r R} \quad (\text{A.5})$$

A la suma del segundo miembro de esta ecuación es a lo que se conoce como transformada discreta de Fourier (Press 2007). Podemos denotarla con  $F_R$ :

$$F_R = \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) e^{-i\frac{2\pi}{n} r R} \quad (\text{A.6})$$

Con esta ecuación podemos calcular las transformadas de Fourier de funciones discretas. De acuerdo con la ecuación A.4, la transformada de Fourier  $F(u_R)$  es aproximadamente igual a la transformada discreta de Fourier  $F_R$  multiplicada por el intervalo de muestreo  $\Delta x$ :

$$F(u_R) \approx \Delta x F_R \quad (\text{A.7})$$

La transformada discreta de Fourier en dos dimensiones se obtiene de la misma manera. La transformada de Fourier en dos dimensiones se define como:

$$G(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{A.8})$$

donde las coordenadas  $(u, v)$  definen el dominio de la frecuencia. Si realizamos el producto que se encuentra en la exponencial podemos expresar esta ecuación como:

$$G(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi ux} e^{-i2\pi vy} dx dy \quad (\text{A.9})$$

Como esta ecuación está definida en dos dimensiones, ahora también debemos considerar el eje  $y$  en el dominio del espacio y el eje  $v$  en el dominio de la frecuencia. Ya que la ecuación A.9 está definida para funciones continuas  $g(x, y)$ , debemos hacer una aproximación para funciones discretas como en el caso de una dimensión.

Como ya vimos, el dominio  $(x, y)$  debe ser discreto. El eje de las  $x$  viene dado por la expresión A.2 mientras que el eje de las  $y$  viene dado por:

$$y_s = s\Delta y \quad (\text{A.10})$$

donde:

$$s = 0, 1, 2, 3 \dots m - 1$$

El valor de  $\Delta y$  es la diferencia entre los valores del eje  $y$ . El dominio de la frecuencia  $(u, v)$  también debe ser discreto. Los valores que puede tomar  $u$  vienen dados por la expresión A.3, por otro lado, los valores del eje  $v$  están dados por:

$$v_s = \frac{S}{m \Delta y} \quad (\text{A.11})$$

donde:

$$S = -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} + 1, -\frac{m}{2} + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 2, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}$$

La transformada de Fourier en dos dimensiones  $F(u, v)$  se calcula para el dominio discreto  $(u_R, v_S)$ :

$$G(u_R, v_S) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi ux} e^{-i2\pi vy} dx dy \quad (\text{A.12})$$

Como en el caso de una dimensión, debemos tomar una suma para aproximar la integral. En este caso tenemos una integral doble por lo que debemos tomar una suma sobre todos los valores de  $x$  y otra suma sobre todos los valores de  $y$ :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i2\pi ux} e^{-i2\pi vy} dx dy \approx \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} g(x_r, y_s) e^{-i2\pi u_R x_r} e^{-i2\pi v_S y_s} \Delta x \Delta y \quad (\text{A.13})$$

Si sustituimos las variables  $u_R, v_S, x_r$  y  $y_s$ , el segundo miembro de esta ecuación es igual a:

$$\Delta x \Delta y \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} g(x_r, y_s) e^{-i\frac{2\pi}{n} rR} e^{-i\frac{2\pi}{m} sS} \quad (\text{A.14})$$

La suma doble de esta expresión es la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones y podemos denotarla con  $G_{UR}$ :

$$G_{UR} = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} g(x_r, y_s) e^{-i\frac{2\pi}{n} rR} e^{-i\frac{2\pi}{m} sS} \quad (\text{A.15})$$

Ya que tenemos una suma doble en esta ecuación, primero se debe calcular la suma sobre uno de los índices ( $r$  ó  $s$ ) y después sobre el otro. Si primero queremos calcular la suma sobre el índice  $s$ , la ecuación A.15 debe de expresarse de la siguiente manera:

$$G_{UR} = \sum_{r=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n} rR} \left[ \sum_{s=0}^{m-1} g(x_r, y_s) e^{-i\frac{2\pi}{m} sS} \right] \quad (\text{A.16})$$

El término que está entre corchetes es la transformada discreta de Fourier en una dimensión. Esto significa que para calcular la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones, debemos calcular la transformada discreta de Fourier en una dimensión sobre el índice  $s$ . Al resultado que obtengamos de esto, debemos calcularle la transformada discreta de Fourier en una dimensión sobre el índice  $r$ .

De acuerdo con las ecuaciones A.12 y A.13, la transformada de Fourier  $G(u_R, v_S)$  es aproximadamente igual a la transformada discreta de Fourier  $G_{UR}$  multiplicada por los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ :

$$G(u_R, v_S) \approx \Delta x \Delta y G_{UR} \quad (\text{A.17})$$

Ahora que he explicado lo que es la transformada discreta de Fourier en una y dos dimensiones, procederé a explicar cómo obtener la transformada de Fourier de una función utilizando MATLAB.

### A.3. Transformada discreta de Fourier en MATLAB

MATLAB ya tiene programada una función (o subrutina) para calcular la transformada discreta de Fourier en una dimensión (ecuación A.6). Esta función es "fft" y se utiliza de la siguiente manera:

$$TF = fft(f)$$

donde la variable de entrada es el vector  $f$  (ver sección A.1). Al ejecutar esta instrucción, MATLAB produce un vector  $TF$  con los valores que corresponden a la transformada discreta de Fourier de la función  $f(x)$ , cuyo rango definimos con el vector  $f$ .

La función de MATLAB  $fft$  calcula la transformada discreta de Fourier utilizando el algoritmo de la "Fast Fourier Transform (FFT)". Para incrementar la velocidad con que trabaja este algoritmo, la longitud del vector  $f$  debe ser igual a una potencia entera de 2.

Es muy difícil que las funciones siempre tengan una longitud igual a alguna potencia de 2. Esto no es un problema ya que podemos agregar ceros al vector  $f$ , hasta que su longitud sea igual a una potencia entera de 2:

$$f = [ f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3) \quad \dots \quad f(x_n) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 ]$$

Esto quiere decir que si nuestro vector  $f$  tiene una longitud de 200 ( $n = 200$ ), debemos agregar ceros hasta que la longitud sea de 256; o si la longitud de  $f$  es de 1000, agregamos ceros hasta que la longitud sea igual a 1024.

Afortunadamente, la función  $fft$  nos permite agregar ceros al vector  $f$  de una manera muy sencilla. En la función  $fft$  podemos proporcionar como variable de entrada, el número de valores de la transformada discreta de Fourier que queremos que se calcule. Si queremos que la función  $fft$  calcule  $N$  valores de la transformada discreta de Fourier, la instrucción es la siguiente:

$$TF = fft(f, N)$$

Al ejecutar esta instrucción, se agregan ceros al vector  $f$  hasta que su longitud es igual al valor de  $N$ , después de esto, se calculan los valores de la

transformada discreta de Fourier y se almacenan en el vector  $TF$ . Por lo tanto, debemos asignar un valor de  $N$  que sea mayor a la longitud de  $f$  y que sea una potencia entera de 2 (la más cercana a la longitud de  $f$ ), para que el algoritmo  $FFT$  sea más eficiente. Entonces, la longitud del vector  $TF$  es igual a  $N$ . Por ejemplo, si sabemos que la longitud del vector  $f$  es 200 ( $n=200$ ), debemos asignar un valor de  $N$  de 256 y la instrucción sería:

$$TF = fft(f, 256)$$

La función  $fft$  agregará ceros al vector  $f$  hasta que tenga la longitud de 256 y después calculará la transformada discreta de Fourier de  $f$ .

La transformada discreta de Fourier de una función en dos dimensiones se calcula de la misma manera. MATLAB también tiene programada una función (o subrutina) para calcular la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones (ecuación A.16). Esta función es " $fft2$ " y se utiliza de la siguiente manera:

$$TG = fft2(g)$$

La variable de entrada es la matriz  $g$  que obtuvimos en la sección A.1. Al ejecutar esta instrucción se produce una matriz  $TG$  con todos los valores de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ .

La función  $fft2$  también utiliza el algoritmo de "*Fast Fourier Transform (FFT)*" para hacer el cálculo de  $G_{UR}$ . Como ya se había mencionado al final de la sección A.2, el término entre corchetes de la ecuación A.16 es la transformada discreta de Fourier en una dimensión. Por lo tanto, para obtener  $G_{UR}$  se calcula la transformada discreta de Fourier en una dimensión sobre el índice  $s$ ; al resultado se le calcula lo mismo pero ahora sobre el índice  $r$ . Entonces, la función  $fft2$  calcula la transformada discreta de Fourier en una dimensión a cada columna de la matriz  $g$  usando el algoritmo  $FFT$ . A la matriz resultante le hace el mismo cálculo pero ahora sobre cada fila. De esta manera es como se obtiene la matriz  $TG$ .

Ya que la función  $fft2$  también utiliza el algoritmo  $FFT$ , debemos hacer que las longitudes de las columnas y filas de la matriz  $g$  sean iguales a una potencia entera de 2. Como en el caso unidimensional, podemos agregar ceros a las filas y columnas de  $g$ , hasta que sus longitudes sean iguales a una

potencia entera de 2:

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1, y_1) & g(x_2, y_1) & g(x_3, y_1) & \dots & g(x_n, y_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g(x_1, y_2) & g(x_2, y_2) & g(x_3, y_2) & \dots & g(x_n, y_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g(x_1, y_3) & g(x_2, y_3) & g(x_3, y_3) & \dots & g(x_n, y_3) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g(x_1, y_m) & g(x_2, y_m) & g(x_3, y_m) & \dots & g(x_n, y_m) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Al igual que la función *fft*, la función *fft2* también nos permite introducir como variables de entrada el número de valores de la transformada discreta de Fourier que queremos que calcule. Si queremos que la función *fft2* calcule  $M \times N$  valores de  $G_{UR}$ , la instrucción es la siguiente:

$$TG = \text{fft2}(g, M, N)$$

Debemos asignar un valor de  $M$  que sea mayor a la longitud de las columnas de  $g$ . De igual forma, asignamos un valor de  $N$  que sea mayor a la longitud de los renglones de  $g$ . Los valores de  $M$  y  $N$  deben ser potencias de dos para que el algoritmo "FFT" funcione más rápido. Si ejecutamos esta instrucción, la función *fft2* añade ceros a los renglones y columnas de  $g$  hasta que tiene una longitud de  $M \times N$ . Después de esto, calcula la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$  y almacena los valores en la matriz  $TG$  (de longitud  $M \times N$  también).

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la transformada discreta de Fourier de una función  $g(x, y)$ , cuyo rango se encuentra en una matriz  $g$  de longitud 800 x 900. La instrucción que debemos ejecutar es la siguiente:

$$TG = \text{fft2}(g, 1024, 1024)$$

ya que la potencia de 2 más próxima a 800 y 900 es 1024. Al ejecutar esta instrucción, se producirá una matriz  $TG$  de tamaño 1024 x 1024 con todos los valores de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ .

A este proceso de agregar ceros al vector  $f$  y a la matriz  $g$  se le conoce como "zero padding". Es muy importante realizar este proceso ya que la velocidad con que trabaja el algoritmo "FFT" incrementa de una manera

impresionante. Muchas veces trabajamos con una gran cantidad de datos en MATLAB, por esta razón, necesitamos que la velocidad de procesamiento sea la más alta posible.

Ahora que ya he explicado cómo usar las funciones (o subrutinas) *fft* y *fft2*, explicaré cómo se almacenan los valores de la transformada discreta de Fourier en el vector *TF* (para funciones unidimensionales) y la matriz *TG* (para funciones bidimensionales).

#### A.4. Dominio de la frecuencia

Hasta ahora, hemos visto cómo evaluar y graficar funciones matemáticas en una y dos dimensiones en MATLAB. También vimos cómo se utilizan las funciones *fft* y *fft2* para calcular sus transformadas discretas de Fourier. En la sección anterior vimos que para obtener la transformada discreta de Fourier de una función  $f(x)$ , debemos ejecutar la siguiente instrucción:

$$TF = fft(f, N)$$

donde  $f$  es el vector que contiene el rango de la función  $f(x)$  y  $N$  es la longitud del vector  $f$ . Si ejecutamos esta instrucción, la función *fft* calculará los valores de la transformada discreta de Fourier de  $f(x)$  y los almacenará en el vector *TF*.

Como vimos en la sección A.2, la transformada discreta de Fourier  $F_R$  se calcula para el dominio discreto  $u_R$  que viene dado por:

$$u_R = \frac{R}{n \Delta x} \tag{A.18}$$

donde:

$$R = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$$

Entonces, el dominio de la frecuencia  $u$  viene dado por:

$$u = -\frac{1}{2 \Delta x}, -\frac{n/2 - 1}{n \Delta x}, \dots, -\frac{1}{n \Delta x}, 0, \frac{1}{n \Delta x}, \dots, \frac{n/2 - 1}{n \Delta x}, \frac{1}{2 \Delta x}$$

Como se puede ver, este dominio contiene tanto frecuencias negativas como positivas. Comienza en la frecuencia más negativa que es  $-\frac{1}{2 \Delta x}$ , y va aumentando hasta llegar a la frecuencia cero. Después sigue aumentando hasta

llegar a la frecuencia más positiva que es  $\frac{1}{2\Delta x}$ . Los valores que se almacenan en el vector  $TF$ , son los valores de la transformada discreta de Fourier que corresponden al dominio  $u$ :

$$F_R = F\left(-\frac{1}{2\Delta x}\right), \dots, F\left(-\frac{1}{n\Delta x}\right), F(0), F\left(\frac{1}{n\Delta x}\right), \dots, F\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)$$

Cuando ejecutamos la instrucción  $TF = fft(f, N)$ , los valores de  $F_R$  se almacenan en el vector  $TF$  pero se ordenan de la siguiente manera:

$$TF =$$

$$\left[ F(0) \quad F\left(\frac{1}{n\Delta x}\right) \quad \dots \quad F\left(\frac{n/2-1}{n\Delta x}\right) \quad F\left(\pm\frac{1}{2\Delta x}\right) \quad F\left(-\frac{n/2-1}{n\Delta x}\right) \quad \dots \quad F\left(-\frac{1}{n\Delta x}\right) \right]$$

El primer valor del vector  $TF$  es el valor de la transformada discreta de Fourier evaluada en la frecuencia cero. Después siguen los valores de  $F_R$  para las frecuencias positivas hasta llegar al valor de

$$F\left(\pm\frac{1}{2\Delta x}\right)$$

que es el valor de  $F_R$  en la frecuencia más positiva. La razón del signo  $\pm$  es porque el valor de  $F_R$  en la frecuencia más positiva es igual al valor de  $F_R$  en la frecuencia más negativa:

$$F\left(-\frac{1}{2\Delta x}\right) = F\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)$$

Al ser estos valores iguales, la función  $fft$  los coloca en el mismo lugar del vector  $TF$ . Después se almacenan los valores de  $F_R$  para las frecuencias negativas, comenzando con la más negativa (que es la misma que la más positiva) hasta el valor

$$F\left(-\frac{1}{n\Delta x}\right)$$

que es el valor correspondiente a la frecuencia antes de la frecuencia cero.

Necesitamos ordenar los valores del vector  $TF$  de acuerdo al dominio  $u$ , es decir, primero debemos poner los valores de  $F_R$  para las frecuencias negativas hasta la frecuencia cero. Después debemos poner los valores de  $F_R$  para las frecuencias positivas. MATLAB ya tiene programada una función que nos permite hacer este ordenamiento y es  $fftshift$ . Esta función se utiliza de la siguiente manera:

$$FO = fftshift(TF)$$

La variable de entrada es el vector  $TF$ . Al ejecutar esta instrucción, se producirá un vector  $FO$  con los valores del vector  $TF$  ordenados de acuerdo al dominio  $u$ :

$$FO =$$

$$\left[ F\left(\pm\frac{1}{2\Delta x}\right) \quad F\left(-\frac{n/2-1}{n\Delta x}\right) \quad \dots \quad F\left(-\frac{1}{n\Delta x}\right) \quad F(0) \quad F\left(\frac{1}{n\Delta x}\right) \quad \dots \quad F\left(\frac{n/2-1}{n\Delta x}\right) \right]$$

La longitud del vector  $FO$  también es  $N$ . Nótese que el último valor de este vector no es el correspondiente a la frecuencia más positiva  $\frac{1}{2\Delta x}$ . Esto es porque el valor

$$F\left(\frac{1}{2\Delta x}\right)$$

se encuentra almacenado en la primera posición del vector  $FO$ , junto con el valor correspondiente a la frecuencia más negativa.

Si almacenamos en un vector los valores del dominio  $u$  y lo graficamos contra el vector  $FO$ , obtendremos una gráfica de la transformada discreta de Fourier de  $f(x)$ .

La transformada discreta de Fourier en dos dimensiones se calcula de la misma manera. En la sección anterior vimos que para obtener la transformada discreta de Fourier de una función en dos dimensiones  $g(x, y)$ , debemos ejecutar la siguiente instrucción:

$$TG = fft2(g, M, N)$$

donde  $g$  es la matriz que contiene los valores de  $g(x, y)$ .  $M$  y  $N$  es el número de filas y columnas de  $g$  respectivamente. Al ejecutar esta instrucción, MATLAB calcula los valores de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$  y los almacena en la matriz  $TG$ .

De acuerdo con lo que vimos en la sección A.2, la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones  $G_{RS}$  se calcula para un dominio de frecuencia  $(u_R, v_S)$ . Los valores de  $u_R$  vienen dados por la expresión A.18, por otro lado, los valores de  $v_S$  están dados por:

$$v_S = \frac{S}{m \Delta y} \tag{A.19}$$

donde:

$$S = -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} + 1, -\frac{m}{2} + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 2, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}$$

Entonces, los valores del eje  $v$  son:

$$v = -\frac{1}{2\Delta y}, -\frac{m/2-1}{m\Delta y}, \dots, -\frac{1}{m\Delta y}, 0, \frac{1}{m\Delta y}, \dots, \frac{m/2-1}{m\Delta y}, \frac{1}{2\Delta y}$$

De acuerdo con los valores que toman  $u$  y  $v$ , sabemos que el dominio de frecuencia en dos dimensiones  $(u, v)$  esta dado por:

$$(u, v) = \begin{array}{cccccc} (-\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{2\Delta y}) & \dots & (-\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{2\Delta y}) & (0, -\frac{1}{2\Delta y}) & (\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{2\Delta y}) & \dots & (\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{2\Delta y}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & (-\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & (0, -\frac{1}{m\Delta y}) & (\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & (\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) \\ (-\frac{1}{2\Delta x}, 0) & \dots & (-\frac{1}{n\Delta x}, 0) & (0, 0) & (\frac{1}{n\Delta x}, 0) & \dots & (\frac{1}{2\Delta x}, 0) \\ (-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) & \dots & (-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) & (0, \frac{1}{m\Delta y}) & (\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) & \dots & (\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) & \dots & (-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) & (0, \frac{1}{2\Delta y}) & (\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) & \dots & (\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) \end{array}$$

Al ejecutar la instrucción  $TG = fft2(g, M, N)$ , se calculan los valores de  $G_{RS}$  y se almacenan en la matriz  $TG$ , pero ordenados de la siguiente forma:

$$TG = \left[ \begin{array}{cccccc} G(0, 0) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, 0) & G(\pm\frac{1}{2\Delta x}, 0) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, 0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G(0, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & G(\pm\frac{1}{2\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) \\ G(0, \pm\frac{1}{2\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \pm\frac{1}{2\Delta y}) & G(\pm\frac{1}{2\Delta x}, \pm\frac{1}{2\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, \pm\frac{1}{2\Delta y}) \\ G(0, -\frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, -\frac{m/2-1}{m\Delta y}) & G(\pm\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{m/2-1}{m\Delta y}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ G(0, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & G(\pm\frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) \end{array} \right]$$

En esta matriz se puede ver que para cada eje  $u$  y  $v$ , primero se almacenan los valores de  $G_{RS}$  para las frecuencias positivas y después para las negativas, del mismo modo que el caso unidimensional. El comando *fftshift* nos permite ordenar los valores de  $G_{RS}$  de acuerdo al dominio  $(u, v)$ :

$$GO = fftshift(TG)$$

AL ejecutar esta instrucción se produce una matriz  $GO$  con los valores de  $G_{RS}$  ordenados de acuerdo al dominio  $(u, v)$ :

$GO =$

$$\begin{bmatrix} G(\pm \frac{1}{2\Delta x}, \pm \frac{1}{2\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, \pm \frac{1}{2\Delta y}) & G(0, \pm \frac{1}{2\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \pm \frac{1}{2\Delta y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G(\pm \frac{1}{2\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) & G(0, -\frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, -\frac{1}{m\Delta y}) \\ G(\pm \frac{1}{2\Delta x}, 0) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, 0) & G(0, 0) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, 0) \\ G(\pm \frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) & G(0, \frac{1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \frac{1}{m\Delta y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G(\pm \frac{1}{2\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & G(0, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) & \dots & G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \frac{m/2-1}{m\Delta y}) \end{bmatrix}$$

Se puede ver que el último renglón de esta matriz, no corresponde a los valores de  $G_{UR}$  para los valores del último renglón del dominio  $(u, v)$ . Estos valores son:

$$G(-\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) \quad \dots \quad G(-\frac{1}{n\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y}) \quad G(0, \frac{1}{2\Delta y}) \quad \dots \quad G(\frac{n/2-1}{n\Delta x}, \pm \frac{1}{2\Delta y}) \quad G(\frac{1}{2\Delta x}, \frac{1}{2\Delta y})$$

ya que estos valores son los mismos que los que están en el primer renglón de la matriz  $GO$ , se amacenan en el mismo lugar (por eso el signo  $\pm$ ). Lo mismo ocurre con los valores de  $G_{UR}$  para la última columna del dominio  $(u, v)$ .

Si graficamos esta matriz contra el dominio  $(u, v)$ , obtendremos una gráfica de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ . Esta es la manera de utilizar las funciones de MATLAB  $fft2$  y  $fftshift$ . A continuación realizaré un ejemplo de cómo obtener la transformada discreta de Fourier de una función.

En la sección A.1 evaluamos la función en dos dimensiones  $g(x, y) = sinc^2(x)sinc(y)$ . El dominio es de -5 a 5 para los ejes  $x$  y  $y$  con un valor de 0.1 para  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . En la sección A.1, obtuvimos el rango de  $g(x, y)$  y lo almacenamos en una matriz  $g$  de longitud 101 x 101.

Para obtener la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ , debemos ejecutar la instrucción  $TG = fft2(g, M, N)$ . Necesitamos valores de  $N = 128$  y  $M = 128$ , ya que son mayores a 101 y son potencias enteras de 2 (para hacer el "zero padding"). Ahora, podemos ejecutar instrucción:

$$TG = fft2(g, 128, 128)$$

que nos dará los valores de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ . Después se ordenan los valores de  $TG$ :

$$GO = \text{fftshift}(TG)$$

Para obtener la gráfica de la transformada discreta de  $g(x, y)$ , se debe calcular el valor absoluto de cada elemento de la matriz  $GO$ . Para esto ejecutamos:

$$GA = \text{abs}(GO)$$

A continuación, debemos calcular los valores del dominio de frecuencia para el eje  $u$  y para el eje  $v$ . Los valores de  $u$  y  $v$  los obtenemos con las ecuaciones A.18 y A.19. Para esta transformada tenemos que:

$$u = [ -5 \quad -4.92 \quad -4.84 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 4.76 \quad 4.84 \quad 4.92 ]$$

$$v = [ -5 \quad -4.92 \quad -4.84 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 4.76 \quad 4.84 \quad 4.92 ]$$

Si graficamos la matriz  $GA$  contra los vectores  $u$  y  $v$ , obtenemos la gráfica de la figura A.3, que es precisamente la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$ .

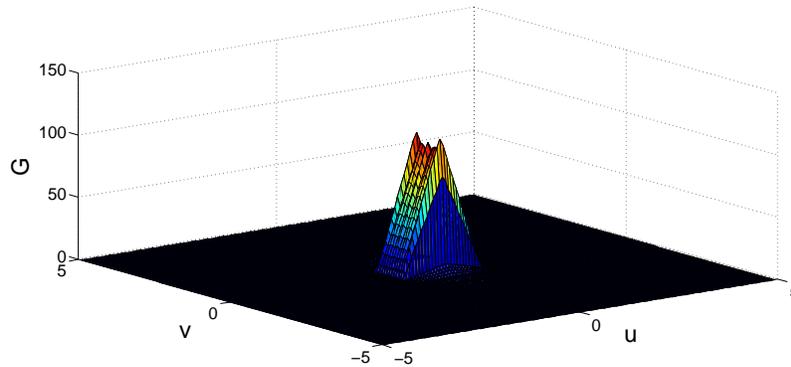


Fig. A.3: Gráfica de la transformada discreta de Fourier de la función  $g(x, y) = \text{sinc}^2(x)\text{sinc}(y)$ .

### A.5. Transformada inversa de Fourier discreta

La transformada inversa de Fourier discreta nos permite obtener los valores de la función original  $f(x_r)$ , a partir de los valores de la transformada

discreta de Fourier  $F_R$ . La ecuación es:

$$f(x_r) = \frac{1}{n} \sum_{R=0}^{n-1} F_R e^{i \frac{2\pi}{n} Rr} \quad (\text{A.20})$$

La función de MATLAB que nos permite calcular la transformada inversa es *ifft* y se utiliza de la siguiente forma:

$$fi = \text{ifft}(FO)$$

Como variable de entrada se introduce la matriz  $FO$ . Al ejecutar esta instrucción obtendremos los valores de la función original  $f(x)$  (almacenados en el vector  $fi$ ).

Si queremos obtener la transformada inversa de una función en dos dimensiones, la función de MATLAB que debemos usar es *ifft2*. En la sección anterior vimos que los valores de la transformada discreta de Fourier de  $g(x, y)$ , se almacenan en la matriz  $GO$ . Si queremos calcular su transformada inversa debemos ejecutar el siguiente comando:

$$gi = \text{ifft2}(GO)$$

Esta instrucción nos calculará los valores de la función original  $g(x, y)$  y los almacenará en la matriz  $gi$ .

## B. PROGRAMA 1

```
1  % Las unidades son en MILIMETROS
2
3  % - - - - - DATOS DE ENTRADA - - - - -
4
5  % Distancia de propagacion q
6  q=27.5;
7
8  % Domino (xq,yq). El dominio es de -xq a xq, -yq a yq
9  xq=2;
10 yq=7.5;
11
12 % Longitud de onda
13 l=0.000632;
14
15 % Sampling Frequency (muestras que quiero por unidad)
16 Fs=50;
17
18 % < < < < < < < Ecuacion > > > > > > > >
19
20 % - - - - - Dominio (Xq,Yq) - - - - -
21 % Esta parte define el dominio (Xq,Yq)
22
23 % Delta x (espacio entre muestras)
24 dx=1/Fs;
25
26 Xq=-xq:dx:xq;
27 Yq=-yq:dx:yq;
28
29 % - - - - - Onda de entrada - - - - -
30 % La onda de amplitud y fase unitaria
31
32 % Fase de la onda
33 Ph=ones(length(Yq),length(Xq));
34
35 % Amplitud
36 A=1;
```

```

37
38 % Onda
39 Psi=A*exp(-i*Ph);
40
41 %----- Apertura de rendija -----
42 %La apertura es una funcion rectangulo. Para hacer
43 %esta funcion se definio una matriz de ceros.
44 %Se colocan 1's dentro de la apertura que queremos.
45
46 %Aqui se define el ancho de la rendija. La apertura es de
47 %longitud 2*ap
48 ap=0.5;
49
50 %Se escala
51 ac=ap*Fs;
52
53 % Matriz de ceros
54 AP=zeros(length(Yq),length(Xq));
55
56 %Coordenadas del punto central de la matriz
57 Cx=(length(Xq)-1)/2+1;
58 Cy=(length(Yq)-1)/2+1;
59
60 %Se llena de 1's los puntos alrededor del centro
61 %de la matriz
62 AP(1:length(Yq),(Cx-ac):(Cx+ac))=1;
63
64 %--- Multiplicacion de la onda por la apertura ---
65 % Funcion H
66 H=Psi.*AP;
67
68 %----- Transformada de Fourier de H -----
69
70 %Zero padding. Se agregan ceros a la matriz H para que
71 %su longitud sea igual a una potencia entera de 2.
72
73 nx=length(Xq);
74 Nx=2^nextpow2(nx);
75
76 ny=length(Yq);
77 Ny=2^nextpow2(ny);
78
79 % Transformada de Fourier (desordenada)
80 G=fft2(H,Ny,Nx);
81

```

```

82 % Ordenamiento de la Transformada de Fourier
83 GO=fftshift(G);
84
85 %----- Exponencial compleja -----
86
87 % Se calcula el dominio de la frecuencia
88
89 % Frecuencia critica de Nyquist
90 fc=1/(2*dx);
91 % Diferenciales de frecuencia
92 du=1/(dx*Nx);
93 dv=1/(dx*Ny);
94
95 % Dominio de frecuencia
96 u=-fc:du:fc-du;
97 v=-fc:dv:fc-dv;
98
99 % Esta funcion es para graficar en dos dimensiones
100 [U,V]=meshgrid(u,v);
101
102 % Se evalua la exponencial compleja en el dominio (u,v)
103
104 EC=exp(((i*2*pi*q)/l)*sqrt(1-l^2*(U.^2+V.^2)));
105
106 %--- Multiplicacion TF con exponencial compleja ---
107
108 Mp=GO.*EC;
109
110 %--- Transformada inversa de Fourier ---
111
112 f=ifft2(Mp);
113
114 %--- Dominio (Xq,Yq) extendido ---
115
116 % Se debe agregar a los ejes Xq Yq, la longitud extra
117 % del zero padding.
118
119 % Eje Xq
120
121 % Numero de ceros que se agregan por el Zero padding
122 difx=Nx-length(Xq);
123 % Escalamos
124 xa=difx*dx;
125 % Sumamos al dominio
126 xM=xq+xa;

```

```

127 %Se extiende el dominio
128 Xqz=-xq:dx:xM;
129
130 %Eje Yq
131
132 %Numero de ceros que se agregan por el Zero padding
133 dify=Ny-length(Yq);
134 %Escalamos
135 ya=dify*dx;
136 %Sumamos al dominio
137 yM=yq+ya;
138 %Se extiende el dominio
139 Yqz=-yq:dx:yM;
140
141 %- - - - - Intensidad - - - - -
142 I=(abs(f)).^2;
143
144 %Se obtiene una imagen de la matriz I
145
146 figure(1)
147 imagesc(Xqz,Yqz,I);
148 axis equal
149 title('q=27.5')
150 xlabel('Xq')
151 ylabel('Yq')
152
153 colormap(gray);
154 colorbar;

```

Además de la difracción producida por una rendija, el programa puede calcular el patrón de difracción que produce una apertura circular. Para hacer esto, sustituimos la parte del código que dice “*Apertura de rendija*” por el siguiente código:

```

1 %- - - - - Apertura circular - - - - -
2
3 %Aqui se define el radio de la apertura
4 r0=3;
5
6 %Se escala
7 r1=r0*Fs;
8
9 %Matriz de 1's
10 AP=ones(length(Yq),length(Xq));
11

```

```

12 %Coordenadas del punto central de la matriz
13 Cx=(length(Xq)-1)/2+1;
14 Cy=(length(Yq)-1)/2+1;
15
16 %Aqui se iguala a cero todos los valores de la matriz que
17 %están fuera de la apertura
18 for ax=1:length(Xq);
19 for ay=1:length(Yq);
20     r=sqrt((ax-Cx)^2+(ay-Cy)^2);
21     if (r>r1)
22         AP(ay,ax)=0;
23     end;
24 end;
25 end;

```

Para una apertura cuadrada el código es:

```

1  %----- Apertura cuadrada -----
2  %La apertura es una función rectangular. Para hacer esta
3  %función se definió una matriz de ceros. Se colocan 1's
4  %dentro de la apertura que queremos
5
6  %Aquí se define el ancho y largo de la apertura cuadrada.
7  %La apertura mide 2*ap x 2*ap.
8  ap=2;
9
10 %Se escala
11 ac=ap*Fs;
12
13 %Matriz de ceros
14 AP=zeros(length(Yq),length(Xq));
15
16 %Coordenadas del punto central de la matriz
17 Cx=(length(Xq)-1)/2+1;
18 Cy=(length(Yq)-1)/2+1;
19
20 %Se llena de 1's los puntos alrededor del centro de la
    matriz
21 AP((Cy-ac):(Cy+ac),(Cx-ac):(Cx+ac))=1;

```

## C. PROGRAMA 2

El siguiente programa produce una imagen que muestra las variaciones de intensidad que produce una onda de choque en el plano de análisis. Solamente se puede variar el valor de  $q$ .

```
1  %Programa que calcula las variaciones de intensidad que
2  %produce una onda de choque en el plano de analisis
3
4  %Las unidades son en METROS
5
6  clear all
7
8  % Distancia de la propagacion (metros)
9  q=0.17;
10
11  %- - - Perfil de presion en funcion del tiempo - - -
12
13  %Tiempo final
14  tf=10*10-6;
15  %dominio del tiempo (segundos)
16  t=0:0.1*10-6:tf;
17
18  %pico de presion positiva (Pascales)
19  pm=101000000;
20  %constante alfa (1/segundos)
21  a=9.1*105;
22  %frecuencia angular (hertz)
23  w=2*pi*83300;
24
25  % Perfil de presion (Pa)
26  Pt=2*pm*(exp(-a*t)).*(cos(w*t+pi/3));
27
28  %- - - Perfil de presion en funcion del espacio - - -
29
30  %Sampling Frequency (muestras por unidad)
31  Fs=10;
32  % Delta y (espacio entre muestras)
```

```

33 dy=1/Fs;
34 %Dominio del espacio (metros)
35 y=0:dy*10-3:15*10-3;
36
37 %Velocidad de la onda de choque (metros/segundo)
38 v=1500;
39
40 %Tiempo que dejamos propagando la onda (segundos)
41 t0=tf;
42
43 %Perfil de presion en funcion de la distancia(Pa)
44 Py=2*pm*(exp(-a*(t0-y/v)))*(cos(w*(t0-y/v)+pi/3));
45
46 %- - - - - Conversion a bar - - - - -
47
48 %1 Pascal = 1*10-5 bar
49
50 Pc=Py*1*10-5;
51
52 %- - - Indice de refraccion del agua - - -
53
54 %longitud de onda (micrometros). Para hacer este calculo
55 %l debe estar en micrometros.
56 lu=0.632;
57
58 %Temperatura del agua (grados centigrados)
59 T=25;
60
61 %Temperatura de referencia (grados centigrados)
62 Tb=19.993;
63 %Presion de referencia (bar)
64 Pb=1.01325;
65
66 %Valores de la ecuacion
67 la2=0.018085;
68 a1=5.743534*10-3;
69 a2=1.769238;
70 a3=-2.797222*10-2;
71 a4=8.715348*10-3;
72 a5=-1.413942*10-3;
73 b1=-8.454823*10-5;
74 b2=-2.787742*10-5;
75 b3=2.608176*10-6;
76 b4=-2.050671*10-6;
77 b5=1.019989*10-6;

```

```

78 b6=-2.611919*10^-6;
79 b7=8.194989*10^-9;
80 b8=-8.107707*10^-9;
81 b9=4.877274*10^-8;
82 c1=8.419632*10^-6;
83 c2=1.941681*10^-5;
84 c3=-7.762524*10^-8;
85 c4=4.371257*10^-8;
86 c5=7.089664*10^-9;
87 c6=-2.240384*10^-8;
88
89 % Perfil de indice de refraccion. Esta expresion debe estar
90 % en una sola linea.
91 n=sqrt( a1/(lu^2-la2)+a2+a3*lu^2+a4*lu^4+a5*lu^6)+(b1+b2*lu^2+
      b3*lu^4)*(T-Tb)+(b4+b5*lu^2+b6*lu^4)*(T-Tb)^2+(b7+b8*lu^2+
      b9*lu^4)*(T-Tb)^3+(c1+c2*lu^2+(c3+c4*lu^2)*T)*(Pc-Pb)+(c5+
      c6*lu^2)*(Pc-Pb).^2;
92
93 % - - - - - Camino optico - - - - -
94
95 % indice de refraccion del agua
96 n0=1.333;
97
98 % distancia recorrida
99 dz=1*10^-3;
100
101 % camino optico SIN onda de choque
102 OPL0=n0*dz;
103
104 % camino optico CON onda de choque
105 OPL=n*dz;
106
107 % - - - - - Diferencia de fase - - - - -
108
109 % Longitud de onda (metros)
110 l=632*10^-9;
111
112 % diferencia de camino optico
113 dc=OPL-OPL0;
114
115 % Perfil de diferencia de fase
116 dph=(2*pi*dc)/l;
117
118 % - - - - - Se extiende el perfil a 2D - - - - -
119

```

```

120 % se saca la transpuesta del vector dph
121 dpho=dph';
122
123 % Extension del perfil al eje x (MILIMETROS)
124 x=4;
125 xe=x*Fs;
126 % Extension total del eje x (2*x+1). El +1 es por el cero
127 xt=xe*2+1;
128
129 % Dominio x
130 Dx=-x*10^-3:dy*10^-3:x*10^-3;
131
132 % Se forma una matriz de ceros
133 Mdph=zeros(length(dpho),xt);
134
135 % Se extiende el perfil al eje x
136 for s1=1:length(dpho);
137 for s2=1:xt;
138 Mdph(s1,s2)=dpho(s1);
139 end
140 end
141
142 %-----
143 % El perfil en 2D (area A) se extiende para cubrir el
144 % area B
145
146 % Dominio (yi, zi)
147 yi=-70*10^-3:dy*10^-3:70*10^-3;
148 xi=yi;
149
150 % se hace la matriz del tamaño del dominio "i"
151 Md=(ones(length(yi),length(xi)))*dph(1);
152
153 % Posicion de la onda de choque en eje y
154 Yp=0;
155 % Se escala
156 ps0=Yp*10^3*Fs;
157 % Esto es para que tome como referencia el 0 del eje yi
158 ps=(length(yi)-1)/2+ps0;
159
160 % Posicion de la onda de choque en eje x
161 % Centro de la matriz en eje x
162 psx1=(length(xi)-1)/2;
163 % Se le resta el perfil
164 psx=psx1-x*Fs;

```

```

165
166 %Se pone el perfil de onda de choque en el dominio
167 %mas grande (area B)
168 for s3=1:length(dpho);
169 for s4=1:xt;
170 Md(ps+s3 , psx+s4)=Mdph(s3 , s4);
171 end
172 end
173
174 %- - - - Fase de la onda incidente - - - -
175
176 Mphi=1;
177
178 %- - Fase de la onda que ya atraves la onda de choque - -
179
180 % Matriz Pho
181 Pho=Mphi+Md;
182
183
184 %<<<<< Lineas de codigo del apendice b >>>>>
185
186 Xq=xi;
187 Yq=yi;
188
189 xq=xi(length(xi));
190 yq=yi(length(yi));
191 dx=dy*10^-3;
192
193 A=1;
194 Psi=A*exp(-i*Pho);
195
196 %- - - - -
197 %Codigo para apertura circular
198
199 %Aqui se define el radio de la apertura (metros)
200 r0=0.07;
201
202 %Se escala
203 rm=r0*10^3;
204 r1=rm*Fs;
205
206 % Matriz de 1's
207 AP=ones(length(Yq),length(Xq));
208
209 %Coordenadas del punto central de la matriz

```

```

210 Cx=(length(Xq)-1)/2+1;
211 Cy=(length(Yq)-1)/2+1;
212
213 %Aqui se iguala a cero todos los valores de la
214 %matriz que estan fuera de la apertura
215 for ax=1:length(Xq);
216 for ay=1:length(Yq);
217     r=sqrt((ax-Cx)^2+(ay-Cy)^2);
218     if (r>r1)
219         AP(ay,ax)=0;
220     end;
221 end;
222 end;
223
224 %termina el codigo de la apertura circular
225 %-----
226
227 %continuan las lineas de codigo del apendice B
228
229 H=Psi.*AP;
230
231 nx=length(Xq);
232 Nx=2^nextpow2(nx);
233
234 ny=length(Yq);
235 Ny=2^nextpow2(ny);
236
237 G=fft2(H,Ny,Nx);
238 GO=fftshift(G);
239
240 fc=1/(2*dx);
241 du=1/(dx*Nx);
242 dv=1/(dx*Ny);
243 u=-fc:du:fc-du;
244 v=-fc:dv:fc-dv;
245 [U,V]=meshgrid(u,v);
246 EC=exp(((i*2*pi*q)/1)*sqrt(1-l^2*(U.^2+V.^2)));
247
248 Mp=GO.*EC;
249
250 f=ifft2(Mp);
251
252 difx=Nx-length(Xq);
253 xa=difx*dx;
254 xM=xq+xa;

```

```
255 Xqz=-xq : dx :xM;
256
257 dify=Ny-length(Yq);
258 ya=dify*dx;
259 yM=yq+ya;
260 Yqz=-yq : dx :yM;
261
262 I=(abs(f)).^2;
263
264 figure(1)
265 imagesc(Xqz,Yqz,I);
266 axis equal
267 xlabel('Xq_(m)', 'FontSize', 25)
268 ylabel('Yq_(m)', 'FontSize', 25)
269
270 colormap(gray);
271 colorbar;
```

## Bibliografía

- [1] Armenta, E., Varela, A., Martínez, G. y Loske, A. M. (2006). Transfección de células por medio de ondas de choque. *Revista mexicana de física*, 52 (4), 352-358.
- [2] Canseco, G., de Icaza-Herrera, M., Fernández, F. y Loske, A. M. (2011). Modified shock waves for extracorporeal shock wave lithotripsy: A simulation based on the Gilmore formulation. *Ultrasonics*, 51, 803-810.
- [3] Cruz D. X., Gonzalez, S. I., Ávila, R., et al. (2003). Development of a Generalized SCIDAR at UNAM. *RevMexA A (Serie de Conferencias)*, 19, 44-51.
- [4] Fuchs, A., Tallon, M. y Vernin, J. (1998). Focusing on a turbulent layer: principle of the "Generalized SCIDAR. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 110, 86-91.
- [5] Garnier, D. Profiling Atmospheric Turbulence with Single Star SCIDAR. PhD Thesis. National University of Ireland, Galway, 2007.
- [6] Settles, G. (2006) High-speed Imaging of Shock Waves, Explosions and Gunshots. *American Scientist*, 94 (1), 22-31.
- [7] Wilbert, D. M. (2002). A comparative review of extracorporeal shock wave generation. *BJU International*, 90, 507-511.
- [8] Fernández, F., Loske, A. M., Zendejas, H., Castaño, E. y Paredes, M. I. (2005). Desarrollo de un litotriptor extracorporeal más eficiente. *Revista mexicana de ingeniería biomédica*, XXVI (1), 7-15.
- [9] Fernández, F., Loske, A. M., van Cauwelaert, J. y Prieto, F. E. (2004). Electronic Device to improve the efficiency of extracorporeal lithotripters. *Journal of Applied Research and Technology*, 2 (2), 170-178.

- 
- [10] Grinenko, A., et al. (2004). Analysis of shock wave measurements in water by a piezoelectric pressure probe. *Review of Scientific Instruments*, 75 (1), 240-244.
- [11] Eliasson, V. On focusing of shock waves. PhD Thesis. Stockholm, Sweden, Royal Institute of Technology, 2007.
- [12] Hickson, P. (1994). Wave-front curvature sensing from a single defocused image. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11 (5), 1667-1673.
- [13] Roddier, F., Roddier, C. y Roddier, N. (1988) Curvature sensing: a new wavefront sensing method. *SPIE Statistical Optics*, 976, 203-209
- [14] Goodman, J. W. (1996). *Introduction to Fourier Optics*. Second edition. New York: Mc-GrawHill.
- [15] Quintero Torres, R. y Quintero Bermúdez, R. (2012). *Matlab para principiantes*. México, D. F.: Jit Press.
- [16] Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier transform and its applications*. Third edition. Singapore: Mc-GrawHill.
- [17] Press, W. H. et al. (2007) *Numerical Recipes: The art of scientific computation*. Third edition. New York: Cambridge University Press.
- [18] Church, C. (1989). A theoretical study of cavitation generated by an extracorporeal shock wave lithotripter. *Acoustical Society of America*, 86 (1), 215-227.
- [19] Hecht, E. (2000) *Óptica*. Tercera Edición. Madrid: Addison Wesley.
- [20] Thormählen, I., Straub, J. y Grigull, U. (1985). Refractive index of water and its dependence on wavelength, temperature and density. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 14 (4), 933-945.