(1-5)

"UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO"

FACULTAD DE CIENCIAS.

UN FRAGMENTO DE LA ARITMETICA COMO MODELO DE CIENCIA DEDUCTIVA.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS
PRESENTA EL ALUMNO,

NARCISO BASSOLS BATALLA.

M E X I C O

1 9 4 7

BIBLIOGRAFIA.

Durante la formulación de esta tesis se han consultado las obras siguientes, en el orden de importancia en que se mencionan:

A. Tarski.- Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Sciences.

Natucci.- El concepto de Número.

Lewis and Langford.- Symbolic Logic.

J. W. Young.- Fundamental Concepts of Algebra and Geometry.

Birkhoff & MacLane.- A Survey of Modern Algebra.

Richardson.- Fundamentals of Mathematics.

H. Poincaré.- La Science et L'Hipotese.
Science et Methode.
Derniere Pensèes.

B. Russell.- Introduction to Mathematical Philosophy.

F. Klein.- Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.

INDICE DE PARRAFOS.

Introducción.

Las múltiples consecuencias teóricas de los resultados obtenidos por la metodología de las ciencias deductivas, saltan inmediatamente a la vista. Lo que debe entenderse por axiomas, proposiciones, relaciones y funciones, el sentido preciso de los teoremas, deducciones, pruebas y definiciones, las relaciones mutuas entre estos diversos conceptos, todos estos son campos que han sido completamente transformados al adoptarse los puntos de vista nuevos. Pero, aparte de estas consecuencias, la metodología de las ciencias deductivas tiene una gran importancia que podríamos llamar práctica. Es lo único que permite despojar a las matemáticas elementales del carácter enigmático y misterioso que presentan todavía hoy para una inmensa mayoría. Convierte un objeto de estudio que se presentaba generalmente en una forma despótica, atrabiliaria a fuerza de ser arbitraria, en un conjunto armónico donde cada cosa ocupa un lugar apropiado. Permite exponerlas, sin necesidad de los esfuerzos de imaginación y de ingenio que se empleaban para hacer adivinar la razón de cada cosa. Quien quiera que conozca como se enseñan en México las matemáticas elementales comprenderá, sin necesidad de más explicaciones, a que cosas se quiere hacer referencia.

Al desarrollar este trabajo, he tenido muy en cuenta el libro de Tarski "Introduction to Logic". La notación empleada es, casi en su totalidad, la suya. Aunque he consultado el libro de G. Peano, busqué todas las demostraciones, tomando en cuenta su carácter completamente elemental.

Se observará que no he hecho ningún esfuerzo por formalizar el fragmento de ciencia deductiva que se ha desarrollado. El haberlo intentado me hubiera obligado a abordar cuestiones muy ajenas al tema propuesto. Y después de todo, una ciencia deductiva no deja de serlo porque no esté formalizada.

En las deducciones, desde luego, se ha aceptado a la lógica y a la teoría de las clases como ciencias previamente establecidas.

I.- Esquema de una ciencia deductiva.

Una ciencia deductiva se presenta formada por dos elementos de índole distinta. En primer lugar, se encuentran varios términos cuyo significado no se precisa y a los cuales se suele llamar términos primitivos. Por otra parte, aparecen varios enunciados que afirman propiedades de los términos primitivos, pero de los cuales, como es natural, no se intenta dar ninguna demostración. Estos enunciados llevan el nombre de axiomas o postulados. A continuación, apoyandose en un conjunto de teoremas que constituyen lo que se denomina como "ciencias previas a la ciencia deductiva que se considera", se presentan definiciones de nuevos términos en función de los términos primitivos y deducciones de nuevos teoremas por inferencia de los postulados o axiomas. Aparte de ciertos requisitos que, como se verá más adelante, se exigen al sistema de postulados y términos primitivos, es indiscutible que algún criterio debe existir para escoger cuales sistemas son dignos de estudio. Aunque sobre este asunto hay muchos puntos de vista, puede afirmarse que en general sólo se han estudiado los sistemas que poseen interpretaciones prácticas y aquellos que complementan o facilitan el estudio de otras ciencias deductivas.

Las jerarquías de los términos y de los teoremas son, sin embargo, una simple apariencia. Porque sucede que es posible seleccionar, dentro del conjunto de los teoremas deducidos a partir de los postulados, un conjunto tal que pueda servir como sistema de axiomas para deducir todos los teoremas de la ciencia deductiva en consideración. La nueva ciencia deductiva es idéntica con la anterior, sólamente que aquello que aparecía en la primera bajo la forma de axiomas, en la segunda aparece como teoremas, y viceversa. Algo muy semejante puede suceder con los términos primitivos, porque no se excluye la posibilidad de que en el nuevo sistema de postulados se mencionen directamente sólo términos que se han definido en función de los términos primitivos --y no los términos primitivos mismos--, de manera que la nueva ciencia tenga como términos primitivos unos que en la primera aparecían como definidos. Tampoco la ciencia misma debe considerarse como una unidad aislada, abstractamente perfecta y desligada de las demás ciencias deductivas. Porque podemos hacer la siguiente operación: considerar el conjunto de proposiciones que forman los axiomas como funciones proposicionales, haciendo abstracción de los términos primitivos, y sucede que dentro de otra ciencia deductiva distinta podemos escoger algunos términos --entre los cuales pueden encontrarse, desde luego, algunos de los términos primitivos de esta ciencia-- que satisfagan los postulados originales, es decir, que conviertan las funciones proposicionales dadas en proposiciones verdaderas. Se dice en este caso que se ha dado una interpretación del sistema de axiomas y términos primitivos dentro de otra ciencia distinta. Pero se observa inmediatamente que una interpretación de este tipo equivale en realidad a definir los términos de una ciencia en función de los términos de otra, y a demostrar los postulados de la primera como teoremas deducidos de los axiomas de la segunda.

II.- Sistema de postulados de Peano.

Peano parte de la suposición de que se poseen tres conceptos fundamentales, que no intenta definir, y establece con ellos cinco postulados básicos, sin demostración. En primer lugar, supone que sabemos lo que debemos entender por un número. Además, considera establecida también la idea del sucesor de un número. El tercer concepto fundamental de Peano era primitivamente la unidad; sin embargo, posteriormente prefirió considerar como fundamental el concepto de cero. Nosotros seguiremos esta última costumbre, que es la usual.

Al decir que se suponen conocidos los conceptos fundamentales, no debe entenderse que se dé por conocida ninguna propiedad especial de estos conceptos, ni que se recurra en el curso de la deducción a nada que se suponga implícitamente contenido en ellos. Las únicas propiedades de los conceptos fundamentales que se emplea, son las establecidas formalmente en los cinco postulados siguientes:

1o.- Cero es un número; $0 \varepsilon N$, siendo N la clase de los números.

2o.- Todo número tiene un sucesor, que a su vez es un número. $\underset{x}{A}\left[(x \varepsilon N) \longrightarrow (\text{suc } x \varepsilon N)\right]$

3o.- Dos números nunca tienen el mismo sucesor.

$\bigwedge_{xy} \left[(\text{suc } x = \text{suc } y) \rightarrow (x = y) \right]$

4o.- Cero no es sucesor de ningún número.

$\bigwedge_{xy} \left[(x = \text{suc } y) \rightarrow (x \neq 0) \right]$

5o.- Toda propiedad que pertenezca a cero y al sucesor de cualquier número que tenga esa misma propiedad, pertenece a todos los números.

$\bigwedge_{s} \left\{ (0 \in s) \wedge \bigwedge_{x} \left[(x \in s) \rightarrow (\text{suc } x \in s) \right] \rightarrow (s = N) \right.$

Apoyándose en los postulados 1o. y 5o. se demuestra el siguiente

Teorema II, 1o.- Cero es el único número que no es sucesor de ningún número.

Demostración.- En efecto, sea s la clase formada por cero y todos los números que son sucesores de otros números; aplicando el principio de inducción resulta que s es el conjunto de todos los números. Luego cero es el único número que no es sucesor de otro número.

III.- Compatibilidad de los axiomas de Peano.

Es evidente que no cualquier sistema de postulados puede dar origen a una ciencia deductiva, considerado juntamente con los términos primitivos correspondientes. La primera condición que debe llenar todo sistema, para poder servir a ese fin, es que sea compatible. O sea, que operando con él mediante las reglas de la lógica formal no sea posible llegar a demostrar dos proposiciones contradictorias, o la proposición contradictoria a uno cualquiera de los postulados. Un sistema no compatible es incapaz de servir, naturalmente, para nada de utilidad teórica ni práctica, pues una vez establecida en él una proposición no solo no sería posible afirmar que su contradictoria no puede ser probada, sino que, en general, dentro de ese sistema cualquier proposición podría probarse.

Bajo ciertas suposiciones, se puede encontrar una interpretación de los axiomas de Peano dentro de la lógica. Sin embargo, esa interpretación queda al margen de los propósitos que han servido de guía al desarrollar este trabajo. Hasta la fecha no se ha conseguido demostrar dos proposiciones contradictorias basándose en los postulados de Peano; pero en vista de las observaciones anteriores, la compatibilidad de este sistema tiene que considerarse aquí como una suposición sin demostración.

En general, el número de disciplinas matemáticas para las cuales se ha podido dar una demostración de compatibilidad es muy corto. De ahí resulta que las consideraciones de ese carácter tienen todavía muy poco valor práctico. De acuerdo con la idea que se ha tenido al desarrollar este trabajo, resulta innecesario, por lo tanto, avanzar más en estas cuestiones.

IV.- Independencia de los axiomas de Peano.

La segunda condición que se exige al conjunto de axiomas y términos de una ciencia deductiva, consiste en que los axiomas sean independientes entre sí. Con esto se quiere decir que no sea posible demostrar ninguno de los axiomas a partir de los demás. Es evidente que si esto último sucediera el axioma demostrado no sería verdaderamente tal, sino que habría que incluirlo entre los teoremas de la ciencia deductiva en consideración. Se emplean, en general, dos procedimientos para la demostración de la independencia de los axiomas. Se puede demostrar que cada uno es independiente de los demás --y en este caso se habla de independencia completa--, o bien se toman los axiomas en un cierto orden y se demuestra que cada uno es independiente del sistema formado por los que le siguen --y en este caso se habla de independencia ordenada--. La demostración de que un axioma es independiente de un sistema determinado, consiste en buscar una interpretación del sistema, dentro de las ciencias que se han considerado como verdades demostradas previamente o dentro de la misma ciencia deductiva que se considera, que no sea satisfecha por el axioma cuya independencia se quiere demostrar y que satisfaga el resto de los axiomas. Demostrar la independencia de un axioma dentro de un sistema de axiomas y términos primitivos, se consigue, por lo tanto, definiendo nuevos términos en función de los términos de la ciencia deductiva que se considera y de los términos de las ciencias precedentes, y demostrando que los términos así definidos satisfacen los postulados originales, con excepción de aquel cuya independencia se quiere demostrar. En general, si se quiere demostrar que una cierta proposición $\underline{\alpha}$ no puede ser demostrada a partir de un sistema de postulados A, bastará con encontrar una teoría deductiva arbitraria $\underline{B}$ que sea compatible y a partir de la cual se puedan definir términos que, sustituídos en los postulados del sistema $\underline{A}$ considerados como funciones proposicionales, los conviertan en proposiciones verdaderas, en tanto que sustituídos en la proposición cuya independencia se quiere demostrar, considerada también como función proposicional, la conviertan en una proposición falsa. Desde luego, no se excluye que el sistema $\underline{B}$ sea el sistema formado por la proposición $\underline{\alpha}$ y el sistema $\underline{A}$, siempre que se halla demostrado, o se acepte, la compatibilidad de este sistema.

Axioma 1o.- Llamando "números" a uno y dos, y definiendo el término "sucesor" en la siguiente forma: el "sucesor" de uno es dos y el "sucesor" de dos es uno, resulta un sistema en el cual:

a) Cero no es un "número".

b) Todo "número" tiene un "sucesor", que a su vez es otro "número".

c) El "sucesor" de uno es distinto del "sucesor" de dos.

d) Cero no es "sucesor" de ningún "número".

e) Toda propiedad que pertenezca a un "número" y a su "sucesor", pertenece a todos los "números".

Axioma 2o.- Llamando "números" a cero y uno, y dando al término sucesor el mismo sentido de Peano, se obtiene un sistema que satisface todos los axiomas de éste, menos el segundo. Así:

a) Por definición cero es un "número".

b) Uno no tiene un "sucesor" que sea "número".

c) Dos "números" nunca tienen el mismo sucesor.

d) Cero no es sucesor de ningún "número", y por último

e) Toda propiedad que pertenezca a cero y al sucesor de un "número" que tenga esa propiedad, pertenece también a uno y, por lo tanto, a todos los "números".

Axioma 3o.- Consideremos el sistema formado por los "números" cero, uno y dos, definiendo el término "sucesor" de la siguiente manera: el "sucesor" de cero es uno, el "sucesor" de uno es dos y el "sucesor" de dos es uno. En este sistema:

a) Existen tres "números" y uno de ellos es cero.

b) Todo "número" tiene un "sucesor" que a su vez es otro "número".

c) Cero y dos tienen el mismo "sucesor".

d) Cero no es "sucesor" de ningún "número".

e) Es válido el principio de inducción.

Axioma 4o.- Llamando "números" a cero y uno, pero definiendo el "sucesor" de cero como uno y el "sucesor" de uno como cero, resulta un sistema que satisface todos los postulados de Peano, menos el cuarto, En efecto:

a) cero es un "número".

b) Todo "número" tiene otro "número", "sucesor" suyo.

c) Dos "números" nunca tienen el mismo "sucesor".

d) Cero es sucesor de uno.

e) Se aplica el principio de inducción.

Axioma 5o.- Dando a cero y a número su sentido original, y considerando como "sucesor" de un número al sucesor - de su sucesor, se obtiene un sistema que satisface todos los axiomas de Peano, menos el quinto. En efecto:

a) Cero es un número, es uno de los axiomas de Peano.

b) Todo número tiene un "sucesor", que a su vez es otro "número".

Demostración.- Por el segundo axioma de Peano todo número tiene un sucesor, y este número a su vez tiene otro sucesor, que es el "sucesor" del número original.

c) Dos números nunca tienen el mismo "sucesor".

Demostración.- Si dos números tuvieran el mismo "sucesor", por el tercer axioma de Peano los sucesores de esos números serían iguales, y por lo tanto, en virtud del mismo axioma, los dos números serían iguales.

d) Cero no es "sucesor" de ningún número.

Demostración.- En virtud del cuarto axioma de Peano, cero no es sucesor de ningún número; por lo tanto, no es sucesor del sucesor de ningún número, lo cual, por definición, equivale a decir que no es "sucesor" de ningún número.

e) Si formamos una clase de números s con cero y todos los números que son "sucesores" de otros números, el "sucesor" de un número que pertenezca a s pertenecerá también a s, pero el sucesor de cero, no siendo sucesor del sucesor de ningún número en virtud del cuarto axioma de Peano, es un número que no pertenece a s. Luego el sistema no satisface el quinto axioma.

V.- Reducibilidad del sistema de Peano.

La demostración por interpretación que se ha dado de la independencia de los axiomas del sistema de Peano, permite afirmar --bajo los supuestos que ya se indicaron-- la imposibilidad de obtener ninguno de los axiomas a partir de los demás. Es decir, el sistema de axiomas es irreducible. Si consideramos, en cambio, los términos primitivos la situación es totalmente distinta. El teorema II 1 tiene la forma de una definición; por lo tanto, es posible reducir el sistema de Peano, eliminando uno de los términos primitivos, siempre y cuando del sistema de axiomas que lo reemplace se deduzca: a) que existe un número que no es sucesor de ningún otro, y b) que si dos números no son sucesores de ningún otro son iguales entre sí.

Los postulados 2o. y 3o. de Peano no contienen al tér mino cero, y por lo tanto pueden quedar sin alteración. Tomando en cuenta la definición de cero, los postulados 1o. y 4o. juntos se reducen a la afirmación de que cuando menos existe un número que no es sucesor de ningún otro. En el quinto postulado, se puede sustituir a cero de acuerdo con su definición. En estas condiciones nos queda el sistema de postulados de Padoa:

1o.- Todo número tiene un sucesor, que a su vez es un número. $\underset{x}{A}\left[(x \varepsilon N) \rightarrow (\text{suc } x \varepsilon N)\right]$

2o.- Si los sucesores de dos números son iguales, también los números son iguales. $\underset{xy}{A}\left[(\text{suc } x = \text{suc } y) \rightarrow (x = y)\right]$

3o.- Existe cuando menos un número que no es sucesor de ningún otro. $E\left\{\underset{yz}{A}\left[(z = \text{suc } y) \rightarrow (z \neq x)\right]\right.$

4o.- Toda propiedad que pertenezca a un número que no sea sucesor de ningún otro, y que pertenezca al sucesor de un número que tenga esa propiedad, pertenece a todos los números. $\underset{S}{A}\left\{(O \varepsilon s) \wedge \underset{x}{A}\left[(x \varepsilon s) \rightarrow (\text{suc } x \varepsilon s)\right] \rightarrow (s = N)\right\}$

De los axiomas tercero y cuarto se deduce inmediatamente el siguiente: Teorema V,1.- Solamente un número no es sucesor de ningún otro número.

$$\underset{xy}{A}\left[\sim \underset{z}{E}\left\{(x = \text{suc } z) \wedge (y = \text{suc } z)\right\} \rightarrow (x = y)\right]$$

Demostración.- Sea $\underline{a}$ un número que no es sucesor de ningún número y sea $\underline{s}$ la clase formada por $\underline{a}$ y todos los números que son sucesores de otros números. Entonces, según el cuarto axioma, todos los números pertenecen a $\underline{s}$ y, por lo tanto, $\underline{a}$ es el único que no es sucesor de otro número. Ahora se puede definir a cero:

Definición V,1.- Cero es el número, único, que no es sucesor de otro número.

El sistema de axiomas de Padoa, unido a la definición anterior, constituye un sistema equivalente al sistema de axiomas de Peano. La demostración formal de este hecho se da un poco más adelante.

VI.- Sistema de postulados de Pieri.

El profesor Mario Pieri objetó los sistemas de postulados de Peano y de Padoa, por la forma como introducen el principio de inducción completa. A juicio de Pieri este principio es, en cierto sentido, más complejo que los otros axiomas, por lo cual presenta dificultades para que lo manejen quienes están poco acostumbrados al análisis. Sugirió, por lo tanto, tomar los conceptos fundamentales de número y sucesor, y el siguiente sistema de axiomas:

1o.- Existe cuando menos un número. $\underset{x}{E}\,(x \in N)$

2o.- Todo número tiene un sucesor, que a su vez es otro número. $\underset{x}{A}\left[(x \in N)\longrightarrow(\text{suc } x \in N)\right]$

3o.- Dos números que no son sucesores de ningún número, son siempre iguales entre sí.

$$\underset{xy}{A}\left[\sim \underset{z}{E}\left\{(x=\text{suc } z)\wedge(y=\text{suc } z)\right\}\longrightarrow(x=y)\right]$$

4o.- En cualquier clase de números no vacía, existe cuando menos un número que no es sucesor de ningún número de la clase. $\underset{s}{A}\left\{(x,y,z \in s)\longrightarrow\underset{x}{E}\left[(y=\text{suc } z)\longrightarrow(y\neq x)\right]\right\}$

A partir de este sistema se demuestra facilmente el siguiente:

Teorema VI,1.- Existe un número, único, que no es sucesor de ningún otro número.

Demostración.- La clase de todos los números, que no es una clase vacía por el primer postulado, contiene cuando menos un número que no es sucesor de otro número, según el último postulado. Además, este número es único en virtud del tercer postulado. Es el llamado cero del sistema de Peano.

VII.- Independencia de los axiomas de Pieri.

Axioma 1o.- Llamaremos "números" a los números naturales que no pueden obtenerse de cero mediante la relación de sucesor. Según demostraremos más adelante, no existen tales "números". Sin embargo, dando a la noción de sucesor su sentido según los axiomas de Pieri resulta:

b) Todo "número" tiene un sucesor, por ser un número natural. Además, este sucesor es un "número", pues tampoco puede obtenerse de cero mediante la noción de sucesor.

c) Dos "números" que no son sucesores de ningún "número", son siempre iguales entre sí.

Demostración.- Un "número" que no sea sucesor de ningún "número" no puede ser sucesor de ningún número natural, pues si fuera sucesor de un número que no sea "número" podría obtenerse de cero aplicando la noción de sucesor. En virtud del tercer axioma de Pieri, dos "números" que no son sucesores de ningún número natural son iguales entre sí.

d) En cualquier clase de "números", existe cuando menos un "número" que no es sucesor de ningún elemento de la clase.

Demostración.- Una clase de "números", de existir, sería una clase de números naturales, a la cual se aplicaría el cuarto axioma de Pieri.

Axioma 2o.- Consideremos como "números" a los números naturales cero y uno. Dando al término sucesor el mismo senti do de Pieri, resulta que:

a) Existen dos "números".

b) Uno no tiene sucesor entre la clase de los "números".

c) El único "número" que no es sucesor de otro es cero.

d) Sólo hay tres clases de números, la formada por uno, la que contiene a dos y la que contiene a ambos. Las tres clases contienen un elemento que no es sucesor de otro elemento de la clase.

Axioma 3o.- En el conjunto de los números naturales llamaremos "sucesor" de un número al sucesor de su sucesor. Entonces:

a) Existen "números".

b) Todo número tiene un sucesor y este, a su vez, tiene otro sucesor; luego todo número tiene su "sucesor".

c) Uno y cero no son "sucesores" de ningún número.

d) En toda clase de números no vacía, existe cuando menos un número que no es "sucesor" de ningún elemento de la clase.

Demostración.- Supongamos que la clase s no satisface el teorema. Formemos una clase s' con los elementos de s y los sucesores de ellos que no estén contenidos en s. La clase s' no satisface el cuarto postulado de Pieri, pues todos sus elementos son sucesores de otros elementos de la clase. Luego s', y por consiguiente s, son clases vacías.

Axioma 4o.- Formando un sistema con los números cero, uno y dos, y definiendo el término "sucesor" de la siguiente manera: el "sucesor de cero es uno, el "sucesor" de uno es -

dos y el "sucesor" de dos es uno, resulta:

a) Existen tres "números".

b) Todo "número" tiene un "sucesor", que a su vez es otro "número".

c) Sólo cero no es "sucesor" de otro "número".

d) La clase formada por uno y dos no contiene ningún elemento que no sea "sucesor" de otro elemento de la clase.-

VIII.- Postulados y Propiedades.

Para demostrar que los sistemas de axiomas de Peano, Padoa y Pieri --complementados estos dos últimos con la definición de cero-- describen en realidad las propiedades del mismo conjunto de entes numéricos, basta con obtener expresadas como propiedades de los números en un sistema a los postulados de los otros sistemas.

Demostración de los postulados de Padoa en el sistema de Peano.- Los postulados 1o. y 2o. son comunes a ambos sistemas. El 3er. postulado es una consecuencia inmediata de los postulados 1o. y 4o. Además, en virtud del teorema II 1, el principio de inducción puede escribirse en la forma que le da Padoa.

Demostración de los postulados de Peano en el sistema de Padoa. El primer postulado es evidente, puesto que cero es un número. Los postulados 2o. y 3o. son comunes a ambos sistemas. El cuarto postulado es precisamente la definición de cero; el postulado 5o. se deduce inmediatamente de la definición de cero y del cuarto postulado de Padoa.

Demostración de los postulados de Pieri en el sistema de Peano.- El primer postulado es consecuencia del primer pos tulado de Peano. El segundo postulado es común a ambos sistemas. El teorema II 1 equivale al tercer postulado. Para demostrar el cuarto postulado procedemos en la siguiente forma: Sea s una clase de números tal que todos sus elementos son sucesores de otros elementos de la clase. Entonces s es una clase vacía. En efecto, sea N - s la clase formada por todos los números que no pertenecen a s. Por definición, cero pertenece a N - s; además, en virtud del tercer postulado, el sucesor de todo elemento de N - s pertenece a N - s por la definición de s. Luego todos los números pertenecen a N - s y s es una clase vacía.

Demostración de los postulados de Peano en el sistema de Pieri.- 1er. Postulado.- Por definición, cero es un número. 2o. Postulado.- Es común a ambos sistemas. 3er. Postulado.- Para demostrar este postulado, se demuestra primero el siguiente:

Teorema VIII,1.- La clase formada por cero y todos los números que pueden obtenerse de cero mediante la relación de sucesor, contiene a todos los números.

Demostración.- Sea s la clase formada por los números que no pertenecen a la clase mencionada en el teorema. Entonces s es una clase vacía. En efecto, todo número de s es sucesor de otro número de s, pues si fuera sucesor de algún número que no perteneciera a s podría obtenerse de cero mediante la relación de sucesor. Por el cuarto postulado de Pieri, s es una clase vacía. Supongamos ahora que un cierto número es sucesor de dos números distintos; esto significa que si formamos la sucesión de los números naturales, empezando con cero y colocando a continuación de cada número a su sucesor, el número dado aparecerá dos veces. La clase formada por el número dado y los números obtenidos de él aplicando la relación de sucesor hasta obtener de nuevo el número dado, es una clase tal que sus elementos son todos ellos sucesores de elementos de la clase. Por el cuarto postulado de Pieri, será esta una clase vacía. No existe, por lo tanto, ningún número que sea sucesor de dos números distintos.

5o. Postulado.- Sea $\underline{s}$ una clase de números que satisface las condiciones de este postulado. Si $\underline{u}$ es la clase formada por los elementos que no pertenecen a $\underline{s}$, se demuestra fácilmente que $\underline{u}$ es una clase vacía. Efectivamente, sea u_0 un elemento de $\underline{u}$ que no es sucesor de otro elemento de la misma clase. u_0 existe en virtud del 4o. postulado de Pieri. Ahora bien, u_0 no puede ser cero porque cero pertenece a $\underline{s}$, por definición. Luego debe ser sucesor de otro número, pero este número no puede estar en $\underline{s}$ porque entonces u_0 pertenecería a $\underline{s}$, ni en $\underline{u}$ por la definición de u_0. Por lo tanto u_0 no existe y $\underline{u}$ es una clase vacía.

Demostración de los postulados de Pieri en el sistema de Padoa.- El primer postulado es consecuencia inmediata del tercer postulado de Padoa. El segundo postulado es común a ambos sistemas. El teorema V 1 es equivalente al tercer postulado. Para demostrar el cuarto postulado, puede aplicarse la misma demostración empleada a partir del sistema de Peano, sustituyendo el tercer postulado de Peano por el segundo postulado de Padoa, que es su equivalente.

Demostración de los postulados de Padoa en el sistema de Pieri.- El primer postulado es común a ambos sistemas. Para demostrar el segundo se puede aplicar la demostración del tercer postulado de Peano. Además, el teorema VI 1 es equivalente al tercer postulado. Finalmente, puede demostrarse el 4o. postulado aplicando la demostración del 5o. postulado de Peano y el teorema VI 1.

IX.- Definición de suma.

El sistema de postulados de una ciencia deductiva establece un conjunto de relaciones entre los términos primitivos de esa ciencia. Se puede considerar, por lo tanto, que los postulados en realidad describen las propiedades o definen a los términos primitivos. Sin embargo, los teoremas que pueden deducirse del sistema fundamental, establecen también relaciones entre los términos primitivos, o bien entre términos definidos en función de estos. Lo que el sistema de postulados hace, en realidad, es establecer algunas de las propiedades de los términos primitivos, en tal forma que de ellas puedan deducirse todas las demás propiedades que forman el objeto de estudio de la ciencia deductiva que se considera.

No sólo los términos primitivos pueden definirse en esta forma indirecta, en el método axiomático; también las operaciones, y en general las relaciones entre los entes así definidos se pueden establecer mediante un conjunto de definiciones que describen suficientes propiedades de la relación definida, para que de ellas resulten todas sus demás propiedades. En el caso de la suma de los números naturales, esto se consigue con el siguiente par de definiciones:

Definición IX,1.- La suma de un número con cero es igual al propio número. En símbolos $\underset{x}{A}$ $(x+0=x)$.

Definición IX,2.- La suma de un número con el sucesor de otro número es igual al sucesor de la suma de los dos números.

$$\underset{xy}{A}\left[x + \text{suc } y = \text{suc } (x + y)\right]$$

X.- Igualdad entre números naturales.

La igualdad entre números naturales es una relación que no puede definirse como se define la suma, es decir, describiendo algunas propiedades de la relación tales que de ellas pueda demostrarse cualquier otra propiedad. Esto es así, en virtud de que la relación de igualdad entre números está implícita en los postulados de Peano y aparece explícitamente empleada en uno de los postulados de Pieri. La relación de igualdad pertenece por lo tanto a las reglas de la lógica que se suponen priviamente a la enunciación del sistema de postulados.

Puede entenderse que la igualdad entre números obedece a las reglas de la identidad entre objetos físicos y que, por lo tanto, dos números iguales son en realidad el mismo número. No basta, sin embargo, con este enunciado general. La concepción anterior equivale a declarar que dos números son iguales cuando toda propiedad que pertenezca a uno de ellos pertenece forzosamente al otro. En lenguaje simbólico:

$$\underset{xy}{A}\left\{(x = y) \rightarrow \underset{s}{A}\left[(x \varepsilon s) \rightarrow (y \varepsilon s)\right]\right\}$$

Desde un punto de vista positivo, en cierto sentido puede decirse que dos números iguales de acuerdo con la definición anterior, son en realidad el mismo número. Porque, si todas las propiedades de uno de ellos son compartidas por el otro, entonces, fuera del hecho de que ambos existen, no existe nada más que pueda conocerse sobre ellos y que permita -

distinguirlos entre sí.

Fácilmente se puede demostrar que la igualdad entre números definida en la forma anterior, desde el punto de vista lógico es una relación de equivalencia; es decir, que satisface las siguientes propiedades:

a) Todo número es igual a sí mismo. $\underset{x}{A}(x=x)$

b) Si un número es igual a otro, el segundo es igual al primero. $\underset{xy}{A}\left[(x=y)\rightarrow(y=x)\right]$

c) Si un número es igual a otro, y este es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.

$\underset{xyz}{A}\left[(x=y)\wedge(y=z)\rightarrow(x=z)\right]$

Por lo tanto, la igualdad es una propiedad reflexiva, simétrica y transitiva. Resulta evidente también, que si el signo $\circ$ indica una operación cualquiera entre números, siempre se cumple la siguiente ley:

Principio de sustitución.- Para toda terna de números x, y, z se tiene que si $x=y$, también $x\circ z=y\circ z$ y $z\circ x=z\circ y$. $\underset{xyz}{A}\left[(x=y)\rightarrow(x\circ z=y\circ z)\wedge(z\circ x=z\circ y)\right]$

XI.- Propiedades de la suma.

La definición de la suma de dos números naturales no afirma que exista para todos los números, ni tampoco que la suma de dos números "apriori" sea también un número natural. Lo primero que se puede preguntar es lo siguiente: ¿bastan las dos definiciones dadas para la existencia y la definición de la suma de cualquier pareja de números? De acuerdo con los postulados de Peano, se demuestra inmediatamente el siguiente:

Teorema XI,1.- La suma de dos números naturales siempre existe y es otro número natural. $\underset{xy}{A}\left[\underset{z}{E}(x+y=z)\right]$

Demostración.- a) La suma de un número cualquiera con cero existe y es un número natural, puesto que, por definición, es el mismo número.

b) Si la suma de un número con otro existe y es un número, también existe y es un número la suma del primer número con el sucesor del segundo, ya que es, por definición, el sucesor de la suma de los dos números.

c) Luego, en virtud del principio de inducción finita, es verdadero el teorema.

Las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, se demuestran también fácilmente mediante el empleo del principio de inducción.

<u>Teorema</u> XI,2.- $\underset{xy}{A}\left[(x+y)=(y+x)\right]$

a) Para demostrar que el teorema es cierto cuando $y=0$, demostraremos primero el siguiente:

<u>Teorema</u> XI,3.- $\underset{x}{A}\left[(0+x)=x\right]$

i) Si $x=0$, tenemos que $0+0=0$, lo cual se sigue inmediatamente de la definición de la suma de un número con cero.

ii) Si el teorema es cierto para un número x, es verdad también para el sucesor de x, porque $0+\text{suc }x=\text{suc}(0+x)$, o sea $0+\text{suc }x=\text{suc }x$.

iii) Luego el teorema es cierto para todo número natutal.

En virtud de este teorema tenemos que $0+x=x$; como además, por definición, $x+0=x$, de las propiedades de la suma resulta $x+0=0+x$.

b) Si suponemos que el teorema se aplica a dos números naturales <u>x</u> y <u>y</u>, es decir, si $x+y=y+x$, el teorema es válido también para el sucesor de y. Para demostrar esto, demostraremos primero el siguiente:

<u>Teorema</u> XI,4.- $\underset{xy}{A} \left[\text{suc } x + y = \text{suc}(x+y) \right]$

Demostración.- i) La propiedad existe cuando $y = 0$. En efecto, $\text{suc}(x+0) = \text{suc } x$, y también $\text{suc } x + 0 = \text{suc } x$, por las definiciones de la suma. Luego $\text{suc } x + 0 = \text{suc}(x+0)$.

ii) Si tenemos $\text{suc } x + y = \text{suc}(x+y)$, también es verdad que $\text{suc } x + \text{suc } y = \text{suc}(x + \text{suc } y)$. Pues, por definición $\text{suc}(x + \text{suc } y) = \text{suc} \left[\text{suc}(x+y) \right]$ y también $\text{suc } x + \text{suc } y = \text{suc}$ $(\text{suc } x + y)$. Y como $\text{suc}(\text{suc } x + y) = \text{suc} \left[\text{suc}(x+y) \right]$ resulta que $\text{suc } x + \text{suc} y = \text{suc}(x + \text{suc } y)$.

iii) Por lo tanto, la propiedad existe para cualquier pareja de números naturales.

En virtud del teorema anterior, resulta que $\text{suc } y + x = \text{suc}(y+x)$, o sea $\text{suc } y + x = \text{suc}(x+y)$; además, por definición, $x + \text{suc } y = \text{suc } (x+y)$, luego $x + \text{suc } y = \text{suc } y + x$.

c) Por lo tanto, aplicando el principio de inducción, queda demostrado que: $\underset{xy}{A} (x + y = y + x)$

Teorema XI, 5.- $\underset{xyz}{A} \left[(x+y) + z = x + (y+z) \right]$

a) El teorema es válido cuando $z = 0$, pues en ese caso $(x+y) + 0 = x + y$, y también $x + (y+0) = x + y$.

b) Si el teorema es válido para x, y, z, se tiene: $(x+y) + \text{suc } z = \text{suc} \left[(x+y) + z \right]$, y también $x + (y + \text{suc } z) = x + \text{suc}(y+z)$, o sea $x + (y + \text{suc } z) = \text{suc} \left[x + (y+z) \right]$; pero cuando dos números son iguales sus sucesores también son iguales, luego $(x+y) + \text{suc } z = x + (y + \text{suc } z)$.

c) Por lo tanto, el teorema es válido para todos los números.

En vista de que tanto el principio de inducción finita como los demás postulados de Peano los hemos demostrado como teoremas a partir de los postulados de Pieri, las demostraciones anteriores de las propiedades de la suma son válidas consideradas como deducciones de estas propiedades a partir de cualquiera de los dos sistemas de postulados.

Para la demostración de los siguientes teoremas de la aritmética de los números, emplearemos tanto los postulados de Peano como los de Pieri. En la demostración dentro de un sistema, los postulados del otro sistema se consideran como teoremas demostrados. En el sistema de Pieri, además, el cero aparece como un término definido en función de los términos primitivos.

Teorema XI,6.- La suma de dos números distintos de cero, es diferente de cero.

Demostración.- Por definición: suc $x+$ suc $y =$ suc (suc $x + y$). Como suc x y y son números, su suma es otro número y, por lo tanto, suc $x+$ suc y es un número sucesor de otro número.

El segundo axioma de Euclides, puede demostrarse en la siguiente forma:

Teorema XI, 7.- $\underset{xyz}{A}\left[(x+y=z+y)\longrightarrow(x=z)\right]$

Demostración.- a) Si $y=0$, se tiene $x+0=x$ y $z+0=z$, por las propiedades de la suma. Luego $(x+0=z+0)\rightarrow(x=z)$.

b) Suponiendo que $(x+y=z+y)\longrightarrow(x=z)$, tenemos que; $x+$ suc $y=$ suc$(x+y)$ y $z+$suc $y=$ suc $(z+y)$, por lo tanto - cuando $x+$ suc $y= z+$ suc y, resulta suc$(x+y)=$ suc$(z+y)$. O sea $x+y=z+y$, que equivale a $x=z$.

c) Luego el teorema es válido para todos los números.

XII.- Definición del producto.

La multiplicación de los números naturales, queda definida, como la suma, a través de una pareja de definiciones.

Definición XII,1.- $\underset{x}{A}\ (x \cdot 0 = 0)$

Definición XII,2.- $\underset{xy}{A}\ (x \cdot \text{suc } y = x \cdot y + x)$

XIII.- Unidades para la suma y la multiplicación.

De acuerdo con la definición de suma: $\underset{x}{A}\ (x + 0 = x)$. Es decir, el número cero tiene la propiedad de que puede sumarse a cualquier número sin alterarlo. Por otra parte, en virtud de la definición de multiplicación, se tiene $\underset{x}{A}\ (x \cdot \text{suc } 0 = x)$. O sea que el número suc 0 tiene la propiedad de poderse multiplicar por cualquier otro sin alterar a éste. Estas propiedades de los números 0 y suc 0, que resultan en la axiomática de Peano y Pieri de las definiciones de suma y producto, suelen establecerse como axiomas para definir algunos conjuntos de entes numéricos que incluyen a los números naturales como caso particular.

XIV.- Propiedades de la multiplicación.

Teorema XIV,1.- El producto de dos números siempre existe y es otro número. $\underset{xy}{A}\left[\underset{z}{E}\ (x \cdot y = z)\right]$

Demostración.- a) El producto de un número cualquiera por cero es siempre cero, por definición.

b) Si el producto de los números x y y es un número, también existe y es un número el producto de x por el sucesor de y, pues por definición $x \cdot \text{suc } y = x \cdot y + x$, y siendo $x \cdot y$ y x números, su suma también lo es, por las propiedades de la suma.

c) Por lo tanto, el conjunto de los números naturales es cerrado no sólo a la adición, sino también a la multiplicación.

En virtud de que las operaciones de suma y multiplicación entre varios números se conciben como reiteraciones de la suma y multiplicación de dos números, de los teoremas de existencia que hemos demostrado se deduce que siempre existen y son números las sumas y productos de cualquier número finito de números.

Teorema XIV,2.- $\underset{xy}{A}\,(x \cdot y = y \cdot x)$

Demostración.- a) Para demostrar que el teorema es válido cuando $y = 0$, es necesario demostrar antes el siguiente:

Teorema XIV,3.- $\underset{x}{A}\,(0 \cdot x = 0)$

Demostración.- i) Si $x = 0$, resulta $0 \cdot 0 = 0$, lo cual es cierto por definición.

ii) Si suponemos que $0 \cdot x = 0$, resulta que $0 \cdot \text{suc}\ x = 0 \cdot x + 0$, o sea $0 \cdot \text{suc}\ x = 0$.

iii) Por lo tanto, $\underset{x}{A}\,(0 \cdot x = 0)$.

Del teorema anterior y de la definición de producto se deduce que $\underset{x}{A}\,(x \cdot 0 = 0 \cdot x)$.

b) Suponiendo que sea cierto que $x \cdot y = y \cdot x$, resulta $x \cdot \text{suc}\ y = \text{suc}\ y \cdot x$. Para demostrar esto, se demuestra el siguiente:

Teorema XIV,4.- $\underset{xy}{A}\,(\text{suc}\ x \cdot y = x \cdot y + y)$

Demostración.- i) Si $y = 0$, $\text{suc}\ x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$, o sea $\text{suc}\ x \cdot 0 = 0$, lo cual es verdadero por definición.

ii) Si se tiene $\text{suc}\ x \cdot y = x \cdot y + y$, como $\text{suc}\ x \cdot \text{suc}\ y = \text{suc}\ x \cdot y + \text{suc}\ x$, por definición, resulta: $\text{suc}\ x \cdot \text{suc}\ y = x \cdot$

$y+$ suc $x+y$. O sea suc $x \cdot$ suc $y = x \cdot y +$ suc$(x+y)$, en virtud del teorema XI,4. Por otra parte, $x \cdot$ suc $y +$ suc $y = x \cdot y + x +$ suc y, o sea $x \cdot$ suc $y +$ suc $y = x \cdot y +$ suc$(x+y)$, por la definición IX,2. Luego: suc $x \cdot$ suc $y = x \cdot$ suc $y +$ suc y.

iii) Por inducción, el teorema es válido para todos los números.

De acuerdo con el teorema anterior, como $x \cdot$ suc $y = x \cdot y + x$, y como suc $y \cdot x = y \cdot x + x$, o sea suc $y \cdot x = x \cdot y + x$, resulta que $x \cdot$ suc $y =$ suc $y \cdot x$.

c) Aplicando nuevamente el principio de inducción queda demostrada la propiedad conmutativa del producto.

El producto es distributivo sobre la suma, de acuerdo con el:

Teorema XIV,5.- $\underset{xyz}{A}\left[x\ (y+z) = xy + xz\right]$

Demostración.- a) Siendo y y z dos números cualesquiera, el teorema es válido cuando $x = 0$, porque $0\ (y+z) = 0$ y también $0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$.

b) Suponiendo que $x\ (y+z) = xy + xz$, como suc $x\ (y+z)$ $x\ (y+z) + (y+z)$, por el teorema XIV,4 resulta suc $x\ (y+z)$ $xy + xz + y + z$, o sea suc $x\ (y+z) =$ suc $x \cdot y +$ suc $x \cdot z$.

c) Por lo tanto, para cualquier terna de números, el producto es distributivo sobre la suma.

Además, el producto de números naturales es asociativo, según el:

Teorema XIV,6.- $\underset{xyz}{A}\left[(xy)z = x(yz)\right]$

Demostración.- a) Siendo y y z números cualesquiera, el teorema es cierto cuando $x = 0$, pues $(0 \cdot y)z = 0$ y también $0(yz) = 0$.

b) Si la propiedad pertenece a los números x, y, z, pertenece también a los números suc x, y, z; en efecto (suc x·y)z = (xy + y)z, y por el teorema anterior (suc x·y)z = (xy)z + yz. Por otro lado suc x(yz) = x(yz) + yz; o sea que (suc x·y)z = suc x(yz). Luego el teorema es válido para todos los números.

En otros sitemas de postulados se toma como axioma el:

<u>Teorema</u> XIV,7.- El producto de dos números distintos de cero es un número distinto de cero.

Demostración.- a) Por definición suc x · suc y = suc x · y + suc x. Si x es un número cualquiera, el teorema es cierto cuando y = 0, pues se tiene suc x · suc 0 = suc x · 0 + suc x, o sea suc x · suc 0 = suc x, por la definición de suma.

b) Si <u>x</u> es un número cualquiera, y la propiedad se cumple para <u>y</u>, también se cumple para suc y. En efecto, por definición suc x · suc(suc y) = suc x · suc y + suc x. Como, por hipótesis, suc x · suc y es distinto de cero, resulta que suc x · suc(suc y), suma de números diferentes de cero, es también diferente de cero según el teorema XI,6. Por lo tanto, el teorema es válido para todos los números.

XV.- <u>Ley de la cancelación para la multiplicación.</u>

En algunos sistemas de postulados que definen conjuntos de entes numéricos, se toma a veces como postulado la ley de la cancelación para la multiplicación. Dentro del sistema de Peano o de Pieri, esta ley es susceptible de demostración.

<u>Teorema</u> XV,1.- $\underset{xyz}{A}\left[(x \cdot \text{suc } y = z \cdot \text{suc } y) \rightarrow (x = z)\right]$

Demostración.- a) Sean <u>x</u> y <u>z</u> números cualesquiera; si y = 0, por un teorema ya demostrado x · suc 0 = x y z · suc 0 = z, luego $x = z$ cuando $x \cdot suc\ 0 = z \cdot suc\ 0$.

b) Si x y z, son tres números para los cuales el teorema es válido, también se cumplirá para x, suc y y z; en efecto, como $x \cdot suc(suc\ y) = x\ suc\ y\ \ x\ \ y\ \ z \cdot suc(suc\ y) = z \cdot suc\ y + z$, por la ley de la cancelación para la suma resulta $x = z$. Luego el teorema es válido para todos los números, en virtud del principio de inducción.

XVI.- El número como suma de unidades.

Supongamos que hemos ordenado los números naturales, principiando con cero y colocando a continuación de cada número a su sucesor. Se ha demostrado que en esta sucesión quedan incluídos todos los números y que ninguno aparece dos veces. Puede entonces usarse para denominar a los números una notación cualquiera, vg. la decimal. La sucesión será entonces $0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, N, \ldots\ldots\ldots$

Definición XVI,1.- Se dice que un conjunto cualquiera tiene n elementos cuando es posible establecer una relación biunívoca entre los elementos del conjunto y los números anteriores a n en la sucesión de los números naturales.

Teorema XVI,1.- Todo número n, distinto de cero, es igual a la suma de n unidades.

Demostración.- El teorema es evidente para la unidad. Además, si n es igual a la suma de n unidades, como $n + suc\ 0 = suc\ n$ por definición, resulta que $suc\ n$ es igual a la suma de $suc\ n$ unidades. Por lo tanto, el teorema es válido para todos los números distintos de cero.

En virtud del principio de sustitución, resulta el siguiente:

Teorema XVI,2.- La suma de dos números $\underline{x}$, $\underline{y}$, es igual a la suma de $\underline{x}$ unidades más la suma de $\underline{y}$ unidades.

Teorema XVI,3.- El producto de dos números distintos de cero $\underline{x}$, $\underline{y}$, es igual a la suma de $\underline{y}$ números $\underline{x}$.

Demostración.- a) El teorema es cierto cuando $y=1$, pues por la definición de producto $\underset{\times}{A}$ $(x \cdot 1 = x)$.

b) Si el producto xy es igual a la suma de $\underline{y}$ números $\underline{x}$, como se tiene que $x \cdot \text{suc}\ y = xy + x$, resulta $x \cdot \text{suc}\ y$ igual a la suma de suc y números $\underline{x}$. O sea que para todo par de números distintos de cero se cumple el teorema.

Como consecuencia de la propiedad conmutativa del producto, es válido también el:

Teorema XIV,4.- El producto de dos números xy, es igual a la suma de $\underline{x}$ números $\underline{y}$.

XVII.- Formación de las tablas de sumar y multiplicar.

La notación, cualquiera que ella sea, es una manera de hacer corresponder un signo a cada uno de los números, de tal manera que a cada número corresponda un solo signo, cada signo corresponda a un solo número y se pueda saber inmediatamente que signo corresponde al sucesor de un número cuyo signo se conoce. Los conjuntos de igualdades que forman las tablas de sumar y multiplicar pueden ser establecidos a partir de los axiomas de los números naturales.

Supongamos que se trata, por ejemplo, de demostrar la igualdad $2+2=4$. Sustituyendo los signos por su definición, la igualdad se transforma en esta otra: $\text{suc}(\text{suc}\ 0) + \text{suc}(\text{suc}\ 0) = \text{suc}\left\{\text{suc}\left[\text{suc}(\text{suc}\ 0)\right]\right\}$. Aplicando la definición de suma reiteradamente, el primer término se convierte de la siguiente manera: $suc(suc\ 0) + suc(suc\ 0) = suc[suc(suc\ 0) + suc\ 0]$, pero $suc[suc(suc\ 0) + suc\ 0] = suc\{suc[suc(suc\ 0)]\}$.

En la misma forma, si se quiere demostrar que $2 \cdot 2 = 4$, basta con aplicar reiteradamente la definición de producto: $suc(suc\ 0) \cdot suc(suc\ 0) = suc(suc0) \cdot suc\ 0 + suc(suc0)$, o sea $suc(suc\ 0) \cdot suc(Suc\ 0) = suc(suc\ 0) + suc(suc\ 0)$. Luego $suc(suc\ 0) \cdot suc(suc\ 0) = suc\{suc[suc(suc\ 0)]\}$.

XVIII.- <u>Definición y propiedades de las potencias.</u>

Las potencias de los números se definen en la siguiente forma:

<u>Definición</u> XVIII,1.- Todo número distinto de cero, elevado a la potencia cero es igual a la unidad. $\underset{x \neq 0}{A} (x^0 = suc\ 0)$

<u>Definición</u> XVIII,2.- Todo número distinto de cero, elevado a una potencia igual al sucesor de otro número, es igual al producto del primer número por el mismo número elevado a una potencia igual al segundo. $\underset{x \neq 0}{A} (x \backslash sucy = x \cdot x^y)$

Teorema XVIII,1.- $\underset{xy}{A} \left[(x \neq 0) \rightarrow \underset{z}{E} (x^y = z) \right]$

Demostración.- Por definición existe y es número la potencia cero de cualquier número distinto de cero. Además, si existe la potencia x^y, en virtud de que $x \backslash sucy = x \cdot x^y$ es el producto de dos números, siempre será un número. Luego, por inducción, el teorema es válido.

<u>Teorema</u> XVIII,2.- $\underset{xyz}{A} \left[(x \neq 0) \rightarrow (x^y \cdot x^z = x^{y+z}) \right]$

Demostración.- a) Por definición $x^0 \cdot x^z = suc\ 0 \cdot x^z$, o sea $x^0 \cdot x^z = x^z$. Además $x^{0+z} = x$. Luego el teorema es cierto cuando $x = 0$.

b) Si se tiene $x^y \cdot x^z = x^{y+z}$, resulta $x \backslash sucy \cdot x^z = x \cdot x^y \cdot x^z$, es decir $x \backslash sucy \cdot x^z = x \cdot x^{y+z}$; o sea, por la defi nición de potencia, $x \backslash sucy \cdot x^z = x \backslash suc(y+z)$. Luego $x \backslash sucy \cdot x^z = x \backslash (sucy+z)$. Por lo tanto, el teorema es cierto para todos los números naturales.

Teorema XVIII,3.- Todo número, elevado a una potencia distinta de cero, es igual al producto de sí mismo un número de veces igual a la potencia.

Demostración.- Según la definición, $x \backslash suc0 = x$. También según la definición, $x \backslash sucy = x \cdot x^y$ es igual al producto de y números x, $x \backslash sucy$ resulta igual al producto de suc y números x. Luego el teorema es verdadero, por inducción.

XIX.- Integridad del sitema de Pieri.

Dado un sistema de postulados y términos primitivos pueden presentarse dos casos opuestos. O bien el sistema no admite que se agreguen otros axiomas, y entonces se dice que es un sitema completo; o bien es posible formar otros sistemas que incluyan al sistema considerado. Desde un punto de vista absoluto, un sistema sería completo cuando se pudiera demostrar la verdad o falsedad de toda proposición referente a los términos primitivos. Una demostración de este tipo no se ha conseguido hacer para el sistema de los números naturales; pero desde un punto de vista formal, se considera suficiente la demostración de que cualquier sistema que satisfaga los postulados del sistema original es isomórfico con éste. Se entiende por isomorfismo de dos sistemas la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de los sistemas tal que, cuando se verifican operaciones iguales entre elementos correspondientes, los elementos resultantes se corresponden.

Teorema XVIII,1.- Todo sistema de elementos que satisfaga los postulados de Pieri, es isomórfico con el sistema de los números naturales.

Demostración.- Supongamos que se tiene, definidos mediante un sistema cualquiera de axiomas, un conjunto s de entes, entre los cuales existe una relación que puede hacerse corresponder a la de sucesor y que satisfacen postulados semejantes a los de Pieri. Se establece una relación biunívoca entre estos elementos y los elementos de la sucesión de los números naturales en la forma siguiente: cero corresponde al elemento de s que no es sucesor de ningún otro elemento de s, uno corresponde al sucesor del elemento que corresponde a cero, y así sucesivamente. En virtud de que se ha demostrado que es posible llegar a cualquier número empezando con cero y empleando la relación de sucesor, la correspondencia anterior establece una relación biunívoca entre todos los números y todos los elementos de s. Esta relación, además, constituye un isomorfismo, porque, en virtud de la forma como se ha establecido, si dos elementos se corresponden se corresponden también sus sucesores.

XX.- Definición de las relaciones de orden.

Definición XX,1.- $\underset{xy}{A}\left[(x<y)\longleftrightarrow \underset{z\neq 0}{E}(y=x+z)\right]$

Definición XX,2.- $\underset{xy}{A}\left[(x>y)\longleftrightarrow(y<x)\right]$

Teorema XX,1.- $\underset{x}{A}\,(x<\text{suc } x)$

Demostración.- De acuerdo con la definición de suma $x+\text{suc }0=\text{suc } x$, luego $x<\text{suc } x$.

Teorema XX,2.- $\underset{xy}{A}\left[(x<y)\longrightarrow(x<\text{suc } y)\right]$

Demostración.- Si $x<y$, por definición existirá z

tal que $y = x + z$; sumando a ambos lados <u>suc 0</u> resulta $\text{suc } y = x + \text{suc } z$, y por lo tanto $x < \text{suc } y$.

<u>Teorema</u> XX,3.- $\underset{xyz}{A}\left[\{(x<y)\wedge(y<z)\}\rightarrow(x<z)\right]$

Demostración.- Por definición $y = x + u$, siendo $u \neq 0$, y también $z = y + v$, siendo $v \neq 0$. Luego $y + v = x + u + v$, o sea $z = x + (u + v)$. En virtud del teorema XI 6, $z = x + w$, siendo $w \neq 0$. Es decir que $x < z$.

<u>Teorema</u> XX,4.- $\underset{xyz}{A}\left[(x<y)\rightarrow(x+z<y+z)\right]$

Demostración.- De $y = x + u$, siendo $u \neq 0$, resulta $y + z = (x + z) + u$, o sea $x + z < y + z$.

<u>Teorema</u> XX,5.- $\underset{xy}{A}\left[(x<y)\rightarrow(y\nless x)\right]$

Demostración.- Supongamos que $x<y$ y también $y<x$; tendríamos entonces $y = x + u$, siendo $u \neq 0$, y $x = y + v$, siendo $v \neq 0$. Por lo tanto $y + v = x + u + v$, en virtud de la primera igualdad; o sea $x = x + u + v$, en virtud de la segunda. Pero, por el segundo axioma de Euclides, que ya demostramos, resulta $u + v = 0$, es decir $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Luego si $x<y$, entonces $y \nless x$.

Definimos, por inducción, una clase de números que llamaremos "conjunto de números posteriores a x", correspondiendo a cada número natural <u>x</u>, de la siguiente manera:

<u>Definición</u> XX,1.- Suc x es posterior a x.

<u>Definición</u> XX,2.- Si <u>y</u> es posterior a <u>x</u>, entonces <u>suc y</u> lo es a <u>x</u>.

<u>Teorema</u> XX,6.- $\underset{xy}{A}\left[(x\neq y)\rightarrow\{(x \text{ post } y)\vee(y \text{ post } x)\}\right]$

Demostración.- a) Si $x = 0$ y $y = 0$, entonces y post x en virtud del principio de inducción.

b) Si $x \neq y$, y <u>x</u> es posterior a <u>y</u> o <u>y</u> es posterior a <u>x</u>, entonces <u>suc x</u> es posterior a <u>y</u> o <u>suc y</u> es posterior a <u>x</u>, según sea el caso, por la definición del conjunto de números posteriores a otro. Luego, en general, para cualquier pareja de números la propiedad es válida.

De los teoremas XX 1 y XX 2, y de la definición del conjunto de números posteriores a un número dado, se deduce el siguiente:

<u>Teorema</u> XX,7.- $\underset{xy}{A}\left[(x<y)\longleftrightarrow(y \text{ post } x)\right]$

Podemos, por lo tanto, enunciar el teorema XIX 6 en esta otra forma:

<u>Teorema</u> XX,6a.- $\underset{xy}{A}\left[(x\neq y)\longrightarrow(x<y)\vee(y<x)\right]$

XXI.- <u>Los números como miembros de un conjunto bien ordenado.</u>

En virtud de los teoremas XX 3, XX 4, XX 5 y XX 6a, podemos afirmar que la relación $<$ ordena a los números naturales.

El principio de inducción finita puede adoptar formas que aparentemente son distintas al enunciado general que se ha dado, pero que en el fondo son idénticas a él. Por ejemplo, considerando la propiedad de un número de que su sucesor tenga determinada propiedad, por sustitución obtenemos el siguiente enunciado:

Toda propiedad que pertenezca al sucesor de cero, y que pertenezca al sucesor de un número que tenga esa propiedad, pertenece a todos los números distintos de cero.

El teorema 7 del párrafo anterior nos permite establecer esta otra forma del principio de inducción: Toda propiedad que pertenezca a un número <u>x</u>, y que pertenezca al sucesor de un número que tenga esa propiedad, pertenece a todos los números mayores que x.

A su vez, este enunciado nos permite probar el siguiente:

Teorema XXI,1- Dado un número y mayor que otro número x, o bien $y = \mathrm{suc}\ x$, o bien $y = \mathrm{suc}\ z$, siendo z mayor que x.

Demostración.- a) El teorema es válido si $y = \mathrm{suc}\ x$.

b) Si el teorema es válido para y, el suc y es sucesor de un número mayor que x y, por lo tanto, el teorema es válido para suc y. Luego el teorema es válido para todos los números mayores que x.

La clase de los números naturales forma un conjunto bien ordenado por la relación $<$, como se demuestra a continuación:

Teorema XXI,2.- $\underset{s}{A}\left\{\underset{z}{E}\left[\underset{x}{A}\left[(z \in s) \wedge (x \in s) \longrightarrow (z < x) \vee (z = x)\right]\right]\right\}$

Demostración.- Sea s una clase de números cualquiera. Formando una clase s' con todos los elementos de s y todos los elementos posteriores a los elementos de s, de acuerdo con el cuarto postulado de Pieri, habrá cuando menos un elemento z de la clase s' que no será sucesor de ninguno de los elementos de esta clase. En virtud del teorema XXI 1, z no será tampoco mayor que ninguno de los elementos de s', o sea que será menor que todos los demás elementos de esta clase, y por lo tanto, que todos los elementos de s. Además, este elemento z es único, pues otro elemento w que tampoco fuera mayor que ninguno de los elementos de s, sería igual forzosamente a z, pues no podría ser z mayor que w ni w mayor que z.

XXII.- Relaciones Inversas.

Definidas por inducción las operaciones de suma, multiplicación y potenciación de números, se pueden definir relaciones inversas en la siguiente forma:

Definición de diferencia XXII,1.- $\underset{xyz}{A}\left[(x = y - z) \longleftrightarrow (y = x + z)\right]$

Definición de cociente XXII,2.-

$$\underset{xyz}{A}\left[\left(x = \tfrac{y}{z}\right) \wedge (yz \neq 0) \longleftrightarrow (y = xz)\right]$$

Definición de raiz XXII,3.-

$$\underset{xyz}{A}\left[\left(x = \sqrt[z]{y}\right) \wedge (yx \neq 0) \longleftrightarrow (y = x^{z})\right]$$

Estas relaciones no son en realidad operaciones. No lo son porque no constituyen relaciones funcionales. En virtud de las condiciones de $yz \neq 0$ y $xy \neq 0$, en la división y en la radicación respectivamente, se puede demostrar que dos números son iguales cuando son diferencia o cociente de los mismos números, o cuando son raiz del mismo grado de un mismo número. Pero no se puede demostrar que a cada pareja de números corresponda una diferencia, un cociente y una raiz. De hecho, en el caso de la diferencia hemos demostrado que solamente existe cuando el primer número es posterior al segundo y que, si existe la diferencia entre un número y otro, no existe la diferencia entre el segundo y el primero.

XXIII.- Definiciones.

Generalmente, las definiciones de nuevos términos aparecen en una ciencia deductiva bajo la forma de equivalencias. Un ejemplo lo encontramos en la definición de cero dentro de los sistemas de axiomas de Padoa y Pieri. La primera parte de la definición es una función proposicional corta que contine el término a definir y la segunda es otra fun ción proposicional que contiene únicamente términos y relaciones previamente definidos. Ambas funciones proposicionales están ligadas por una expresión que establece la equivalencia de las dos. También las relaciones pueden definirse mediante equivalencias. La relación $<$ se ha definido de esa manera; la operación $+$, en cambio, se definió por un procedimiento completamente distinto. Se establecieron dos proposiciones que contienen la operación a definir y se admitió la validez de esas proposiciones, sin demostración.

Todo teorema que contenga términos o relaciones definidos mediante equivalencias, puede reducirse inmediatamente, por simple sustitución, a un teorema enunciado solamente en función de los términos y relaciones primitivos. Si el teorema es verdadero y la ciencia deductiva completa y compatible, podrá siempre demostrarse por inferencia basándose en los axiomas. Los teoremas que contienen términos o relaciones definidos por el segundo procedimiento se demuestran a partir del sistema de axiomas originales, adicionado con las proposiciones que se admiten sin demostración.

Para garantizar que una definición por equivalencia no puede conducir a ninguna contradicción, es necesario demostrar que el término definido existe; o sea que la función proposicional empleada para definirlo no es contradictoria, si se acepta la compatibilidad del sistema de postulados. Si además, por ejemplo, el término definido designa un elemento único, es necesario demostrar que sólo un elemento satisface la definición. La no contradicción de la función proposicional puede establecerse por interpretación, es decir exhibiendo un término definido previamente que satisfaga la definición. En el caso de la definición de cero, la existencia del ente definido se sigue inmediatamente del tercer postulado de Padoa. Por lo tanto, bastó con demostrar que ese elemento es único, para garantizar la compatibilidad de la definición. La relación $<$ quedó definida empleando únicamente la operación $+$, la demostración de existencia se omitió por obvia.

Una misma definición puede establecerse por ambos procedimientos. El teorema X^A,7 demuestra la equivalencia entre la relación $>$ y la relación "posterior a". Ahora bien, es el caso que la primera relación se definió mediante una equivalencia, en tanto que la segunda se definió por inducción.

SEGUNDA PARTE

XXIV.- Construcción de la teoría axiomática de los enteros.

Hasta ahora, nuestra labor ha consistido exclusivamente en establecer una serie de definiciones y demostrar algunos teoremas simplemente mediante inferencia a partir de los sistemas de postulados, que se demostraron equivalentes. En la demostración de cada teorema, se ha aceptado como ciencias previamente establecidas a la lógica formal y a la teoría de las clases. Las demostraciones se han limitado a establecer la verdad de una proposición aplicando las reglas de inferencia en los postulados originales, o bien a proposiciones deducidas a partir de ellos. Se ha desarrollado pués, un proceso absolutamente deductivo.

Sin embargo, desde el párrafo I señalamos que así como las proposiciones de una ciencia deductiva se clasifican, hasta cierto punto, en una forma arbitraria dividiéndolas en postulados y teoremas, de tal manera que aquello que en un sistema aparece bajo la forma de postulados puede presentarse en otro bajo la forma de teoremas, así también los sistemas de postulados no forman entidades absolutamente aisladas e independientes. En efecto, se hizo notar que el conjunto de postulados de una ciencia deductiva puede encontrar una interpretación dentro de otra ciencia distinta, y que eso equivalía a demostrar los postulados de aquella como teoremas de ésta, definiendo previamente los términos primitivos de una como términos derivados de los términos primitivos de la otra.

Esta relación entre dos ciencias deductivas, puede - observarse en otra forma si el proceso se efectúa en sentido inverso. En este caso se tendrá un sistema de postulados y de términos primitivos constituyendo el fundamento de una - ciencia deductiva, y a partir de ellos se definirán los términos primitivos de una ciencia nueva. No obstante se establecerá un nuevo sistema de postulados independientes, y la ciencia deductiva así formada se demostrará consistente, - aceptando tan sólo la compatibilidad de los postulados de la ciencia original. Dada una ciencia deductiva, no sólo es posible hacerla crecer constantemente agregándole nuevas definiciones y demostrando nuevos teoremas, sino que también es posible obtener de ella nuevos sistemas de postulados y términos primitivos que constituyan nuevas ciencias deductivas.

Llamaremos número entero, en general, a toda pareja de números naturales, estableciendo las siguientes definiciones:

Definición XXIV,1.-

$$\underset{x\ldots}{A}\left[\{(x,y)=(z,w)\}\longleftrightarrow(x+w=y+x)\right]$$

Definición XXIV,2.-

$$\underset{x\ldots}{A}\left[\{\text{suc }(x,y)=(z,w)\}\longleftrightarrow(x+w+\text{suc }0=y+x)\right]$$

Definición XXIV,3.-

$$\underset{x\ldots}{A}\left[\{\text{sim }(x,y)=(z,w)\}\longleftrightarrow(x+z=y+w)\right]$$

Las definiciones anteriores permiten expresar ciertas proposiciones sobre las parejas de números naturales en términos de números naturales únicamente.

La igualdad definida mediante XXIV,1 es también una relación de equivalencia, porque se tiene:

Teorema XXIV,1.- $\underset{xy}{A}\left[(x,y)=(x,y)\right]$

Demostración.- De acuerdo con las propiedades de los números naturales $x+y=y+x$, que equivale al teorema.

Teorema XXIV,2.- $\underset{x\ldots}{A}\left[\left\{(x,y)=(z,w)\right\}\longleftrightarrow\left\{(z,w)=(x,y)\right\}\right]$

Demostración.- La primera igualdad equivale a la siguiente: $x+w=y+z$, que también equivale a la segunda.

Teorema XXIV,3.-

$$\underset{x\ldots}{A}\left[\left\{(x,y)=(z,w)\right\}\wedge\left\{(z,w)=(r,s)\right\}\longrightarrow\left\{(x.y)=(r,s)\right\}\right]$$

Demostración.- De la primera y segunda igualdades se obtiene que $x+w=y+z$ y $z+s=w+r$, sumando estas igualdades resulta $x+s=y+r$, que equivale a la igualdad que se quiere demostrar.

Si llamamos N al conjunto de todas las parejas de números naturales, en virtud de las definiciones 2 y 3 resultan evidentes los:

Teorema XXIV,4.- $\underset{xy}{A}\left[(x,y)\in N\rightarrow suc(x,y)\in N\right]$

Teorema XXIV,5.- $\underset{xy}{A}\left[(x,y)\in N\rightarrow sim(x,y)\in N\right]$

Apoyandose en las definiciones dadas, se demuestra también los teoremas siguientes:

Teorema XXIV,6.- $\underset{xy}{A}\left[sim\left\{sim(x,y)\right\}=(x,y)\right]$

Demostración.- Sean $sim(x,y)=(p,q)$ y $sim(p,q)=(r,s)$, en virtud de la definición 3 se tiene $x+p=y+q$ y $p+r=q+s$. De estas dos igualdades resulta $x+s=y+r$, que de acuerdo con la definición 1 equivale a $(x,y)=(r,s)$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema XXIV,7.- $\underset{x\ldots}{A}\left[\left\{sim\left[suc\left\{sim\left[suc(x,y)\right]\right\}\right]\right\}=(x,y)\right]$

Demostración.- Sean $suc(x,y)=(p,q)$, $sim(p,q)=(r,s)$, $suc(r,s)=(u,v)$ y $sim(u,v)=(z,w)$. Entonces, $x+q+suc\ 0=$

$y+p$, $p+r=q+s$, $r+v+\mathrm{suc}\,0=s+u$ y $u+z=v+w$. Sumando estas igualdades resulta $x+w=y+z$, que equivale a la igualdad que se quería demostrar.

<u>Teorema</u> XXIV,8.- $\underset{x}{A}\left[\underset{y}{E}\left\{\mathrm{sim}(x,y)=(x,y)\right\}\right]$

Demostración.- En efecto, sea $x=y$; se tiene entonces $\mathrm{sim}(x,x)=(p,q)$ de donde se sigue $x+q=x+p$ que equivale a $(x,x)=(p,q)$.

<u>Teorema</u> XXIV,9.- $\underset{x\ldots}{A}\left[\left\{\mathrm{sim}(x,y)=(x,y)\wedge\mathrm{sim}(z,w)=(z,w)\right\}\rightarrow\left\{(x,y)=(z,w)\right\}\right]$

Demostración.- De la primera igualdad resulta $x=y$ y de la segunda $z=w$, luego $x+z=y+w$.

<u>Teorema</u> XXIV,10.- $\underset{s}{A}\left[\left\{\underset{xy}{A}\left[\left\{(x,y)\in s\rightarrow \mathrm{suc}(x,y)\in s\right\}\right]\wedge \underset{zw}{A}\left[\left\{\mathrm{suc}(z,w)\in s\rightarrow\left[(z,w)\in s\right\}\right]\right\}\rightarrow(s=N)\right]$

Demostración.- Sea <u>s</u> una clase de parejas no vacía; existirá cuando menos un elemento (x,y) perteneciente a <u>s</u>. En virtud de las definiciones 1 y 2, la primera implicación equivale a decir que si (x,y) pertenece a <u>s</u>, también pertenecerá a <u>s</u> (suc x,y), pues (suc x,y)$=\mathrm{suc}(x,y)$; la segunda implicación, por su parte, equivale a decir que si (x,y) pertenece a <u>s</u>, también pertenecerá a <u>s</u> (x, suc y), ya que $\mathrm{suc}(x,\mathrm{suc}\,y)=(x,y)$. Si $x=y$, pertenece a <u>s</u> la pareja $(0,0)$, por ser $(0,0)=(x,x)$. En el caso de que $x>y$, también pertenece a <u>s</u> la pareja $(x-y,0)$; luego, aplicando el principio de inducción, queda demostrado que también pertenece a <u>s</u> cualquier pareja de la forma $(x-y,z)$, y en particular $(x-y,x-y)$ $(0,0)$. Por un razonamiento idéntico se demuestra que cuando $x<y$, pertenece a <u>s</u> la pareja $(0,0)$. Luego siempre pertenece a <u>s</u> esa pareja. Aplicando ahora el principio de inducción resulta que <u>s</u> contiene cualquier pareja de números, o sea que

$s = N$.

XXV.- Sistema de postulados de los números enteros.

Los teoremas 4 a 10 del párrafo anterior se han demostrado a partir de las definiciones del propio párrafo y de los postulados del sistema de los números naturales. En virtud del caracter formal de las demostraciones matemáticas, para estudiar el conjunto de teoremas que pueden obtenerse exclusivamente a partir de los teoremas 4 a 10 del párrafo anterior, no es necesario, aunque siempre sea posible, recurrir a los postulados de los números naturales y a las definiciones dadas. Bastará con hacer abstracción de los símbolos que representan a las parejas de números naturales en esas siete proposiciones, considerarlas como funciones proposicionales y convertirlas después mediante los cuantificadores necesarios en proposiciones relativas a los entes de una clase que se considera definida mediante el sistema de proposiciones, y entre los cuales existen relaciones definidas también a través de ese sistema.

En esta forma, obtenemos una nueva ciencia deductiva cuyos términos primitivos son:

Término XXV,1.- Número entero, representado por N, correspondiendo a la clase de las parejas de números naturales.

Término XXV,2.- Sucesor de un número entero, correspondiendo a la relación XXIV 2 entre parejas de números naturales.

Término XXV,3.- Simétrico de un número entero, correspondiendo a la definición XXIV 3.

Como postulados se establecen los siguientes:

<u>Postulado</u> XXV,1.- $\underset{x}{A}\left[(x\varepsilon N)\rightarrow(\text{suc } x\varepsilon N)\wedge(\text{suc } x\neq x)\right]$

<u>Postulado</u> XXV,2.- $\underset{x}{A}\left[(x\varepsilon N)\rightarrow(\text{sim } x\varepsilon N)\right]$

<u>Postulado</u> XXV,3.- $\underset{xy}{A}\left[\{\text{sim}(\text{sim } x)=y\}\rightarrow(x=y)\right]$

<u>Postulado</u> XXV,4.- $\underset{xy}{A}\left[\{\text{sim}[\text{suc}\{\text{sim}(\text{suc } x)\}]=y\}\rightarrow(x=y)\right]$

<u>Postulado</u> XXV,5.- $\underset{x}{E}\ (\text{sim } x=x)$

<u>Postulado</u> XXV,6.- $\underset{xy}{A}\left[\{(\text{sim } x=x)\wedge(\text{sim } y=y)\}\rightarrow(x=y)\right]$

<u>Postulado</u> XXV,7.- $\underset{s}{A}\left[\{\underset{x}{A}(x\varepsilon s\rightarrow\text{suc } x\varepsilon s)\wedge\underset{y}{A}(\text{suc } y\varepsilon s\rightarrow y\varepsilon s)\}\rightarrow(s=N)\right]$

La compatibilidad de este sistema de postulados, está demostrada por el hecho de que toda proposición deducida de ellos puede transformarse en una proposición relativa a números naturales, mediante la aplicación de las definiciones XXIV 1, XXIV 2 y XXIV 3.

La relación de igualdad entre números enteros se considera, por supuesto, como una relación de equivalencia, con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

XXVI.- <u>Independencia de los axiomas de Pados.</u>

Postulado 1o.- Sea "N" el conjunto formado por el número 0, definido por los postulados 5 y 6 de Pados, el número suc 0 y el número simétrico del suc 0. Entonces:

a) El número suc(suc 0) no pertenece a "N", puesto que no puede ser igual a suc 0; ni a 0 porque entonces suc (suc 0)$=$0, o sea sim[suc(suc 0)]$=$0, de donde sim[suc{sim [suc(suc 0)]}]$=$sim(suc 0), luego sim(suc 0)$=$suc 0, lo cual está en contradicción con los postulados. Tampoco puede ser suc(suc 0)$=$sim(suc 0), porque entonces suc 0$=$0.

b) Por definición "N" contiene los números 0, sim 0, suc 0 y sim(suc 0).

c) Para los tres elementos de "N", es válido la igualdad: $\text{sim}(\text{sim } x) = x$, por ser uno de los postulados.

d) Por la misma razón es válido la igualdad: $\text{sim}\{\text{suc}[\text{sim}(\text{suc } x)]\} = x$.

e) Cero es un elemento de "N".

f) Cero es el único elemento de "N" tal que: $\text{sim } x = x$.

g) Una clase cualquiera s que contiene un elemento de "N", contiene a los tres cuando: $\underset{x}{A}\ (x \in s \rightarrow \text{suc } x \in s)$ y $\underset{y}{A}(\text{suc } y \in s \rightarrow y \in s)$. En efecto, como $\text{sim}\{\text{suc}[\text{sim}(\text{suc } 0)]\} = 0$, resulta $\text{suc}[\text{sim}(\text{suc } 0)] = 0$. Luego si en la clase s se encuentra 0, suc 0 ó sim(suc 0), se encuentran los tres números.

Postulado 2o.- Llámese "N" al conjunto formado por 0 y todos los números tales que: $\underset{x}{A}\ (x \in \text{"N"} \rightarrow \text{"suc" } x \in \text{"N"})$. El "suc" de un número será su sucesor, con la excepción de que cero no será su sucesor, con la excepción de que cero no será "sucesor" de ningún número. En este caso:

a) Por definición, si $x \in \text{"N"}$ entonces $\text{"suc" } x \in \text{"N"}$.

b) Sim("suc" 0) no está en "N", porque $\text{suc}[\text{sim}(\text{"suc" } 0)] = 0$.

c) Por tratarse de números enteros $\underset{x}{A}[\text{sim}(\text{sim } x) = x]$

d) Y también $\underset{x}{A}\{\text{sim}\{\text{"suc"}[\text{sim}(\text{"suc" } x)]\} = x\}$

e) Cero pertenece a "N".

f) Cero es el único elemento de "N" tal que $\text{sim } x = x$.

g) Supongamos que existe una clase s de elementos de "N" para la cual $\underset{x}{A}\ (x \in s \rightarrow \text{"suc" } x \in s)$ y también $\underset{x}{A}\ (\text{"suc" } x \in s \rightarrow x \in s)$. Si s no contiene a cero es una clase vacía, porque la clase $\text{"N"} - s = \text{"N"}$, luego toda clase s no vacía contiene a cero y, por lo tanto, a todos los elementos de "N".

Postulado 3o.- En el conjunto N_0 de los números naturales llamaremos "sim"x al número tal que suc("sim" x)$=$x cuando $x \neq 0$, y haremos "sim" 0 igual a cero por definición. Entonces:

a) $x \in N_0 \rightarrow$ suc $x \in N_0$ es uno de los axiomas de Peano.

b) Todo número natural, excepto cero, es sucesor de otro número, según la definición de cero.

c) La expresión "sim"("sim x)$=$x se transforma en suc(suc x)$=$x, lo cual está en contradicción con el tercer axioma de Peano.

d) Por definición "sim"$\{$ suc$[$"sim"(suc x)$]\}$ $=$ x.

e) También por definición, "sim" 0 $=$0.

f) Por el segundo axioma de Peano, para cualquier número distinto de cero: "sim" $x \neq x$.

g) Toda clase <u>s</u> de números naturales, para la cual $x \in s \rightarrow$ suc $x \in s$ y suc $x \in s \rightarrow x \in s$, contiene a cero, porque de no ser así la clase N_0-s contiene todos los números naturales en virtud del principio de inducción. Luego, por el mismo axioma, <u>s</u> es igual a N_0.

Postulado 4o.- Sea "N" la clase formada por los enteros 0, suc 0 y sim(suc 0). Definimos "suc" 0$=$suc 0, "suc" $[$sim(suc 0)$]$ $=$ 0y "suc"(suc 0)$=$ 0. Tendremos:

a) Si $x \in$ "N", entonces "suc" $x \in$ "N", para $x=0$, $x=$ suc 0 y $x=$ sim(suc 0).

b) Si $x \in$ "N", también sim $x \in$ "N", para todos los elementos de "N".

c) Por ser enteros los elementos de "N" $\underset{x}{A}$$[$ sim(sim x) $=$x$]$

d) Sim$\{$"suc"$[$sin$\{$"suc"(suc o)$\}]\}$ $=$ sim(suc 0)

e) Cero es miembro de "N".

f) Cero es el único elemento de "N" tal que sin $x = x$.

g) Si para una clase s no vacía, formada por elementos de "N", son válidas las implicaciones $\underset{x}{A}$ ($x \in s \rightarrow$ "suc" $x \in s$) y $\underset{x}{A}$ ("suc" $x \in s \rightarrow x \in s$), entonces s contiene a los tres miembros de "N", pues si contiene a cero por la primera implicación contiene a suc 0 y por la segunda implicación a sin(suc 0), si contiene a suc 0 por la primera contiene a cero y por la segunda a sin(suc 0), y si contiene a sin(suc 0) por la primera contiene a cero y a suc 0.

Postulado 5o.- Formando la clase "N" con suc 0 y sin (suc 0), y definiendo "suc"(suc 0) = sin(suc 0) y "suc" sin (suc 0) = suc 0, resulta una clase en la cual todos los elementos tienen las siguientes propiedades:

a) $x \in$ "N" $\rightarrow$ "suc" $x \in$ "N".

b) $x \in$ "N" $\rightarrow$ sin $x \in$ "N".

c) Sin(sin x) = x.

d) Sin $\Big[$ "suc" $\big\{$ sin("suc" x) $\big\}\Big]$ = x.

e) cero no es miembro de la clase,

f) pero, por ser números, los elementos de "N" satisfacen el sexto postulado de Pados.

g) En una clase s no vacía, si $\underset{x}{A}$($x \in s \rightarrow$ "suc" $x \in s$) entonces s contiene los dos elementos de "N", ya que cada uno es "suc" del otro.

Postulado 6o.- En la clase "N" formada por cero y suc 0, se establecen las siguientes definiciones: "suc" 0 = suc 0, "suc"(suc 0) = 0, "sin" 0 = 0 y "sin"(suc 0) = suc 0. Entonces tenemos que:

a) $\underset{x}{A}$ ($x \in$ "N" $\rightarrow$ "suc" $x \in$ "N")

b) $\underset{x}{A}$ ($x \in$ "N" $\rightarrow$ "sin" $x \in$ "N")

c) $\underset{x}{A}\left[\text{"sin"}(\text{"sin" } x) = x\right]$

d) $\underset{x}{A}\left[\text{"sin"}\left\{\text{"suc"}\left[\text{"sin"}(\text{"suc" } x)\right]\right\} = x\right]$, pues "suc"("suc" x) $= x$.

e) $\underset{x}{E}$ ("sin" $x = x$)

f) $\underset{x}{A}$ ("sin" $x = x$) y existen dos elementos distintos.

g) Si para una clase s no vacía $\underset{x}{A}$ ($x \in s \rightarrow$ "suc" $x \in s$), cuando s contiene a 0 contiene también suc 0 y cuando contiene a suc 0 contiene a cero.

Postulado 7o.- Si en la clase N de los números enteros definimos "suc" $x =$ sin x, resulta:

a) Por el segundo postulado de Padoa $\underset{x}{A}$ ($x \in N \rightarrow$ "suc" $x \in N$)

b) Por el mismo postulado $\underset{x}{A}$ ($x \in N \rightarrow$ sin x N)

c) $\underset{x}{A}\left[\text{sin}(\text{sin } x) = x\right]$, es el tercer postulado de Padoa.

d) $\underset{x}{A}\left[\text{sin}\left\{\text{"suc"}\left[\text{sin}(\text{"suc" } x)\right]\right\} = x\right.$, por el mismo postulado.

e) Cero es miembro de N.

f) Cero es el único miembro de N tal que sin $x = x$.

g) La clase formada por cero exclusivamente satisface la condición de que $\underset{x}{A}$ ($x \in s \rightarrow$ "suc" $x \in s$) y de que $\underset{x}{A}$ ("suc" $x \in s \rightarrow x \in s$), aunque no contiene a todos los números enteros.

XXVII.- Independencia de los términos primitivos de Padoa.

En lo que respecta a los términos primitivos, puede plantearse un problema similar al que hemos resuelto positivamente bajo el título de independencia de los postulados de Padoa. Dentro del sistema de los números naturales se llegó, siguiendo los resultados de Pieri, a cuatro axiomas referentes a relaciones entre dos términos no definidos: la clase de los números naturales y la relación de sucesor entre los elementos de esa clase. Del hecho de que el primer axioma establezca la existencia de un número natural cuando menos, y de que se haya demostrado la independencia de ese axioma del sistema formado por los otros tres, se desprende la imposibilidad de definir la clase de los números naturales como la clase de aquellos entes que satisfacen entre sí la relación de sucesor tal como se expresa en los axiomas 2o., 3o. y 4o. de M. Pieri.

Considerando las definiciones XXIV 1, 2 y 3, es fácil demostrar que la relación de sucesor no puede definirse aplicando un número finito de veces las relaciones de igualdad y de simetría. En efecto, una definición de la relación de sucesor sería una estructura formal, independiente de los valores de las variables; pero en el caso de que $x = y$, las relaciones de igualdad y de simetría permiten obtener únicamente parejas de la forma (z,z), de tal manera que mediante ellas no podría obtenerse la relación de sucesor entre ningunas parejas.

Por consideraciones similares a las que se hicieron para afirmar que no son suficientes los axiomas 2o., 3o. y 4o. de Pieri para definir la clase de los números naturales, se puede afirmar también que los axiomas de Padoa 3o., 4o., 5o., 6o. y 7o. no son suficientes para definir la clase de los números enteros.

XXVIII.- Algunos teoremas sobre los números enteros.

Una vez establecido el sistema de postulados y demostrada su independencia, Padoa demostró una serie de teoremas.

Teorema XXVIII,1.- $\underset{xy}{A}\left[(\text{sim } x = \text{sim } y) \rightarrow (x = y)\right]$

Demostración.- Si tenemos que $\text{sim } x = \text{sim } y$, entonces $\text{sim}(\text{sim } x) = \text{sim}(\text{sim } y)$; luego, en virtud del tercer postulado $x = y$.

Teorema XXVIII,2.- $\underset{xy}{A}\left[(\text{sim } x = y) \rightarrow (x = \text{sim } y)\right]$

Demostración.- Si $\text{sim } x = y$, entonces $\text{sim}(\text{sim } x) = \text{sim } y$; o sea que $x = \text{sim } y$, por el tercer postulado.

Teorema XXVIII,3.- $\underset{xyz}{A}\left[(\text{suc } x = y) \wedge (\text{suc } z = y) \rightarrow (x = z)\right]$

Demostración.- Siendo $\text{suc } x = y$ y $\text{suc } z = y$, serán: $\text{sim}\left[\text{suc}\left\{\text{sim}(\text{suc } x)\right\}\right] = \text{sim}\left[\text{suc}(\text{sim } y)\right]$ y $\text{sim}\left[\text{suc}\left\{\text{sim}(\text{suc } z)\right\}\right] = \text{sim suc}(\text{sim } y)$ Luego: $x = \text{sim}\left[\text{suc}(\text{sim } y)\right]$ y también $z = \text{sim}\left[\text{suc}(\text{sim } y)\right]$; por lo tanto $x = z$.

Teorema XXVIII,4.- $\underset{x}{A}\left[\underset{y}{E}(\text{suc } y = x)\right]$

Demostración.- Sea x un número cualquiera. En virtud del primero y segundo postulados existe el número $y = \text{sim}\left[\text{suc}\left\{\text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc } x)\right]\right\}\right]$. Pero, en virtud del cuarto postulado, se tiene $\text{sim}(\text{suc } y) = \text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc } x)\right]$; o sea que $\text{sim}\left[\text{sim}(\text{suc } y)\right] = \text{sim}\left[\text{suc}\left\{\text{sim}(\text{suc } x)\right\}\right]$. Transformando el primer miembro de la igualdad de acuerdo con el tercer postulado y el segundo de acuerdo con el cuarto, resulta $\text{suc } y = x$.

Ya que, en virtud de los dos últimos teoremas, dado un número x existe un número y un solo número y que satisfaga la igualdad $\text{suc } y = x$, se puede llamar a ese número "precursor" de x, de acuerdo con la siguiente

Definición XXVIII,1.- $\underset{xy}{A}\left[(x = \text{suc } y) \leftrightarrow (y = \text{prec } x)\right]$

Teorema XXVIII,5.- $\underset{x}{A}\left[(y = \text{prec } x) \rightarrow (y \in N)\right]$

Demostración.- En el curso de la demostración del teorema 4, demostramos que $\text{prec } x = \text{sim}\left[\text{suc}\left\{\text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc } x)\right]\right\}\right]$.

Como el término del lado derecho de la igualdad siempre es un número cuando $x \in N$, en virtud de los postulados 1o. y 2o., resulta que prec $x \in N$ siempre que $x \in N$.

Teorema XXVIII,6.- $\underset{x}{A}[\text{suc}(\text{prec } x) = x]$

Demostración.- En virtud de la definición 1, si hacemos prec $x = y$, resulta $x = \text{suc } y$, luego $x = \text{suc}(\text{prec } x)$.

A continuación, Padoa hace notar que los postulados 5o. y 6o. expresan que existe un número y un solo número tal que sea igual a su propio simétrico. Puede establecerse, por lo tanto, la definición siguiente:

Definición XXVIII,2.- $\underset{x}{A}[(x = 0) \longleftrightarrow (\text{sim } x = x)]$

El primer postulado garantiza que existe y es un número entero el sucesor del número cero. Este número se define como uno.

Definición XXVIII,3.- $\underset{x}{A}[(x = 1) \longleftrightarrow (x = \text{suc } 0)]$

Teorema XXVIII,7.- Sim $1 = \text{prec } 0$.

Demostración.- Sea prec $0 = x$, por definición entonces $0 = \text{suc } x$, y por el tercer postulado $0 = \text{sim}(\text{suc } x)$. Luego $\text{sim}(\text{suc } 0) = x$, en virtud del cuarto postulado. Por lo tanto $\text{sim}(\text{suc } 0) = \text{prec } 0$.

XXIX.- Suma de números enteros.

Padoa define la suma, diferencia y producto de números enteros siguiendo los pasos de Peano. La suma queda definida a trevés de la siguiente terna de definiciones:

Definición XXIX,1.- $\underset{x}{A}(x + 0 = x)$.

Definición XXIX,2.- $\underset{xy}{A}[x + \text{suc } y = \text{suc}(x + y)]$

Definición XXIX,3.- $\underset{xy}{A}[x + \text{prec } y = \text{prec}(x + y)]$

Para justificar estas definiciones, es preciso demostrar que siempre existe y pertenece a la clase de los números enteros la suma de dos enteros cualesquiera.

<u>Teorema</u> XXIX,1.- $\underset{xy}{A}\left[\underset{z}{E}\ (x+y=z)\right]$

Demostración.- Sea <u>s</u> la clase de los números tales que la suma de dos de ellos es igual a otro número. Esta clase no es vacía, puesto que, por la definición 1, la suma de cero con cero es igual al propio número. Sea ahora <u>x</u> un número cualquiera; supongamos que la suma $x+y$ es un número, entonces, según la definición 2, la suma $x+\text{suc}\ y$ es también un número, puesto que es precisamente $\text{suc}(x+y)$. Si, por otra parte, la suma $x+\text{suc}\ y$ es un número, también será un número la suma $x+y$, pues la tercera definición puede escribirse $x+z=\text{prec}\ (x+\text{suc}\ z)$, y el precursor de un número siempre es otro número. Por lo tanto, en virtud del séptimo postulado, será un número la suma de <u>x</u> con cualquier número. Como <u>x</u> es un número cualquiera, resulta que <u>s</u> contiene a todos los números.

<u>Teorema</u> XXIX,2.- $\underset{x}{A}\ (x+1=\text{suc}\ x)$

Demostración.- En virtud de la definición 2, $x+1=\text{suc}(x+0)$, pero según la definición 1 $x+0=x$, luego $x+1=\text{suc}\ x$.

<u>Teorema</u> XXIX,3.- $\underset{x}{A}\ (x+\text{sim}\ 1=\text{prec}\ x)$

Demostración.- Del teorema XXVIII,7 y de la tercera definición de este párrafo resulta: $x+\text{sim}\ 1=\text{prec}(x+0)$, o sea $x+\text{sim}\ 1=\text{prec}\ x$.

<u>Teorema</u> XXIX,4.- $\underset{x}{A}\ (0+x=x)$

Demostración.- Sea <u>s</u> la clase de los números para los cuales es válido el teorema. Desde luego <u>s</u> no es una clase vacía, porque, por definición, $0+0=0$. Si, además, el teorema es válido para x, tendremos que $0+\text{suc } x = \text{suc}(0+x)$ se transforma en $0+\text{suc } x = \text{suc } x$. Luego suc x también pertenece a <u>s</u>. Por otra parte, cuando $0+\text{suc } x = \text{suc } x$, como $0+\text{suc } x = \text{suc}(0+x)$, por el teorema XXVIII,3 resulta $0+x=x$. En virtud del séptimo postulado <u>s</u> contendrá a todos los números.

<u>Teorema</u> XXIX,5.- $\underset{xy}{A}\left[\text{suc } x+y = \text{suc}(x+y)\right]$

Demostración.- Si $x=0$ y $y=0$, tenemos $\text{suc } 0+0 = \text{suc}(0+0)$, luego existe cuando menos un número para el cual el teorema es válido. Sea <u>x</u> un número cualquiera, si el teorema es válido para y, tendremos $\text{suc } x+\text{suc } y = \text{suc}\left[\text{suc}(x+y)\right]$ y por otra parte $\text{suc}(x+\text{suc } y) = \text{suc}\left[\text{suc}(x+y)\right]$, luego el teorema también es válido para suc y. Además, si $\text{suc } x+\text{suc } y = \text{suc}(x+\text{suc } y)$, transformando ambos miembros de la igualdad de acuerdo con la definición de suma, resulta $\text{suc}(\text{suc } x+y) = \text{suc}\left[\text{suc}(x+y)\right]$, o sea $\text{suc } x+y = \text{suc}(x+y)$. Por lo tanto, el teorema es válido para todos los números, en virtud del séptimo postulado.

<u>Teorema</u> XXIX,6.- $\underset{xy}{A}\left[\text{prec } x+y = \text{prec}(x+y)\right]$

Demostración.- Si $x=0$ y $y=0$, resulta $\text{prec } 0+0 = \text{prec}(0+0)$, luego el teorema es válido cuando menos para cero. Si <u>x</u> es un número arbitrario, cuando $\text{prec } x+y = \text{prec}(x+y)$ tenemos $\text{prec } x+\text{suc } y = x+y$ y $\text{prec}(x+\text{suc } y) = x+y$. Por otra parte, cuando $\text{prec } x+\text{suc } y = \text{prec}(x+\text{suc } y)$ se obtiene $\text{suc}(\text{prec } x+y) = x+y$, o sea $\text{prec } x+y = \text{prec}(x+y)$. Del séptimo postulado resulta pués, que el teorema se aplica a todos los números.

<u>Teorema</u> XXIX,7.- $\underset{xy}{A}\,(x+y = y+x)$

Demostración.- Si $y=x$, tenemos $x+x=x+x$; por lo tanto existen números para los cuales el teorema es válido.

Sea $\underline{x}$ un número cualquiera, supongamos que para el número $\underline{y}$ se tiene $x+y=y+x$, entonces, como $x+\text{suc}\ y=\text{suc}(x+y)$, resulta $x+\text{suc}\ y=\text{suc}(y+x)$. Luego, por el teorema 5 tendremos $x+\text{suc}\ y=\text{suc}\ y+x$. Si se tiene $x+\text{suc}\ y=\text{suc}\ y+x$, resulta $\text{suc}(x+y)=\text{suc}(y+x)$, luego $x+y=y+x$. Por lo tanto, la suma es siempre conmutativa.

<u>Teorema</u> XXIX,8.- $\underset{xyz}{A}\left[x+(y+z)=(x+y)+z\right]$

Demostración.- Sea $\underline{s}$ la clase de los números para los cuales es válido el teorema. Cuando $z=0$, $x+(y+0)=(x+y)+0$, luego $\underline{s}$ no es una clase vacía. Sean, además, $\underline{x}$ y $\underline{y}$ números arbitrarios; si se tiene $x+(y+z)=(x+y)+z$, se tendrá $x+(y+\text{suc}\ z)=\text{suc}\left[x+(y+z)\right]$ y también $(x+y)+\text{suc}\ z=\text{suc}\left[(x+y)+z\right]$, luego $x+(y+\text{suc}\ z)=(x+y)+\text{suc}\ z$. Por otra parte, cuando $x+(y+\text{suc}\ z)=(x+y)+\text{suc}\ z$, se tendrá $\text{suc}\left[x+(y+z)\right]=\text{suc}\left[(x+y)+z\right]$, luego $x+(y+z)=(x+y)+z$. Por lo tanto $\underline{s}$ contiene a todos los números.

<u>Teorema</u> XXIX,9.- $\underset{x}{A}\ (x+\text{sim}\ x=0)$

Demostración.- Si $x=0$, $0+\text{sim}\ 0=0$, luego la clase de los números que satisfacen el teorema no es una clase vacía. Suponiendo que para cierto número $\underline{x}$ se tenga $x+\text{sim}\ x=0$, resulta $\text{suc}\ x+\text{sim}(\text{suc}\ x)=\text{suc}\left[x+\text{sim}(\text{suc}\ x)\right]$, o sea $\text{suc}\ x+\text{sim}(\text{suc}\ x)=x+\text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc}\ x)\right]$. Pero como $\text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc}\ x)\right]=\text{sim}\ x$, $\text{suc}\ x+\text{sim}(\text{suc}\ x)=0$. Además, siendo $\text{suc}\ x+\text{sim}(\text{suc}\ x)=0$, resulta $\text{suc}\left[x+\text{sim}(\text{suc}\ x)\right]=0$, o sea: $x+\text{suc}\left[\text{sim}(\text{suc}\ x)\right]=0$, de donde $x+\text{sim}\ x=0$. Por lo tanto, el teorema es válido para todos los números.

<u>Teorema</u> XXIX,10.- $\underset{xyz}{A}\left[(x+y=z+y)\rightarrow(x=z)\right]$

Demostración.- Si $y=0$, se tiene $x+0=x$ y $z+0=z$, por las propiedades de la suma resulta $(x+0=z+0)\rightarrow(x=z)$.

Suponiendo que $x+y=z+y$ implique $x=z$, tenemos que $x+\text{suc } y=\text{suc}(x+y)$ y por otro lado $z+\text{suc } y=\text{suc}(z+y)$, por lo tanto, cuando $x+\text{suc } y=z+\text{suc } y$ resulta $\text{suc}(x+y)=\text{suc}(z+y)$, o sea $x+y=z+y$ que implica $x=z$. Además, cuando $x+\text{suc } y=z+\text{suc } y$ implica $x=z$, resulta que $\text{suc}(x+y)=\text{suc}(z+y)$, o sea $x+y=z+y$, implica $x=z$. Luego todos los números satisfacen el teorema.

<u>Teorema</u> XXIX,11.- $\underset{xy}{A}\left[\text{sim}(x+y)=\text{sim } x+\text{sim } y\right]$

Demostración.- En virtud del teorema 9, tenemos $x+y+\text{sim}(x+y)=0$. Por lo tanto $(x+\text{sim } x)+(y+\text{sim } y)+\text{sim}(x+y)=\text{sim } x+\text{sim } y$, o sea $\text{sim}(x+y)=\text{sim } x+\text{sim } y$.

XXX.- <u>Producto de números enteros.</u>

El producto de números enteros lo define Padoa en la siguiente forma:

<u>Definición</u> XXX,1.- $\underset{x}{A}\,(x\cdot 0=0)$

<u>Definición</u> XXX,2.- $\underset{xy}{A}\,(x\cdot\text{suc } y=x\cdot y+x)$

<u>Definición</u> XXX,3.- $\underset{xy}{A}\,(x\cdot\text{prec } y=x\cdot y+\text{sim } y)$

Por inducción puede demostrarse la existencia del producto de dos números cualesquiera.

<u>Teorema</u> XXX,1.- $\underset{xy}{A}\left[\underset{z}{E}\,(x\cdot y=z)\right]$

Demostración.- Llamaremos <u>s</u> a la clase de los números que satisfacen el teorema. No es una clase vacía puesto que, en virtud de la definición 1, cuando $y=0$ se tiene $x\cdot 0=0$. Sea ahora <u>x</u> un número cualquiera, si existe un número z tal que $xy=z$, como $x\cdot\text{suc } y=xy+x$, $x\cdot\text{suc } y$ será también un número. Si, por otra parte, $x\cdot\text{suc } y$ es un número, como $x\cdot\text{suc } y+\text{sim } x=xy$, también <u>xy</u> será un número. Luego la clase <u>s</u> contiene a todos los números.

<u>Teorema</u> XXX,2.- $\underset{xy}{A}$ (suc x . y = xy + y)

Demostración.- Si y = 0, tenemos suc x . 0 = x . 0 + 0, por lo tanto existen ciertos números que satisfacen el teorema. Por otra parte, siendo <u>x</u> cualquier número, si tenemos suc x y = xy + y, resulta suc x . suc y = suc x . y + suc x, o sea suc x . suc y = xy + y + suc x. De la definición XXIX,2 y del teorema XXIX,5 resulta que $\underset{xy}{A}$ (x + suc y = suc x + y). Por lo tanto, obtenemos suc x . suc y = x . suc y + suc y. Además, cuando suc x . suc y = x . suc y + suc y, resulta suc x . y + suc x = xy + x + suc y, o sea suc x . y = xy + y. Luego el Teorema es válido en virtud del séptimo axioma.

<u>Teorema</u> XXX,3.- $\underset{xy}{A}$ (xy = yx)

Demostración.- Sea <u>s</u> la clase de los números que cumplen el teorema. Si x = 0 y y = 0, tenemos 0.0 = 0.0, luego <u>s</u> no es una clase vacía. Suponiendo que, dado un número arbitrario <u>x</u>, se tenga xy = yx, se tendrá también x . suc y = xy + x y suc y . x = yx + x, y por lo tanto x . suc y = suc y . x. Además, cuando x . suc y = suc y . x, resulta xy + x = yx + x y por lo tanto xy = yx. Luego s = N.

La demostración de los dos teoremas siguientes es muy similar a la demostración de los teoremas XIV,5 y XIV,6:

<u>Teorema</u> XXX,4.- $\underset{xyz}{A}$ [x(y + z) = xy + xz]

<u>Teorema</u> XXX,5.- $\underset{xyz}{A}$ [x(yz) = (xy)z]

La relación "simétrico" queda ligada con la operación de multiplicar por el:

<u>Teorema</u> XXX,6.- $\underset{xy}{A}$ [x . sim y = sim(xy)]

Demostración.- Cuando y = 0, se cumple el teorema. Además, si dado un número arbitrario <u>y</u>, se tiene x . sim y = sim xy, también se tendrá suc x . sim y = x . sim y + sim y, luego suc x . sim y = sim(xy) + sim y. O sea que suc x . sim y = sim(xy + y), que equivale a $\text{suc } x \cdot \text{sim } y = \text{sim}(\text{suc } xy)$. Si, por otra parte, $\text{suc } x \cdot \text{sim } y = \text{sim}(\text{suc } xy)$, resulta $x \cdot \text{sim } y + \text{sim } y = \text{sim}(xy+y)$, por lo cual $x \cdot \text{sim } y = \text{sim}(xy)$. Por lo tanto, el teorema es verdadero.

XXXI.- Diferencia de números enteros.

En el párrafo XXII se hizo notar que no es posible establecer la diferencia entre los números naturales como una relación funcional, debido a que solamente existe en ciertos casos. Pados establece una relación funcional, que llama diferencia, entre los números enteros, en la siguiente forma:

Definición XXXI,1.- $\underset{xyz}{A}\left[(x - y = z) \leftrightarrow (z = x + \text{sim } y)\right]$

Mediante la definición anterior las propiedades de la diferencia se transforman en teoremas referentes a sumas de números. Por ejemplo:

Teorema XXXI,1.- $\underset{xy}{A}\ (x - y + y = x)$

Demostración.- $x - y + y$ se transforma, por sustitución, de la siguiente manera: $x + \text{sim } y + y = x$.

Teorema XXXI,2.- $\underset{x}{A}\ (x - x = 0)$

Demostración.- Este teorema equivale al teorema XXIX,9.

XXXII.- Relaciones de orden entre los números enteros.

Considérese el conjunto de números enteros "N", empleado para demostrar la independencia del segundo postulado de Pados, y definido en la siguiente forma:

a) 0ε "N", b) $\underset{x}{A}\ (x \varepsilon \text{"N"} \rightarrow \text{suc } x \varepsilon \text{"N"})$.

Las proposiciones siguientes resultan inmediatamente de la definición de "N" y del teorema XVIII,3:

1o.- El número entero 0 pertenece a la clase "N".

2o.- Todo elemento de "N" tiene un sucesor que pertenece a "N".

3o.- Si los sucesores de dos elementos de "N" son iguales, también los elementos mismos son iguales.

d) Cero no es sucesor de ningún elemento de "N".

e) Si una subclase de "N" contiene a cero, y si es tal que cuando un elemento de "N" pertenece a ella pertenece también a ella el sucesor de ese elemento, entonces, por definición, esa subclase es igual a "N".

El conjunto de los números enteros contiene, por lo tanto, un subconjunto --que a su vez contiene a cero-- cuyos elementos satisfacen proposiciones equivalentes a los postulados de Peano, y que, por consecuencia, es isomorfico con el conjunto de los números naturales. Llamaremos a ese subconjunto N_0.

Fórmese ahora un subconjunto de N con los elementos de N_0 y los elementos simétricos de los elementos de N_0. Se observa inmediatamente que los elementos de este subconjunto satisfacen los seis primeros postulados de Padoa. Por otra parte, se puede demostrar el siguiente:

Teorema XXXII,1.- El conjunto formado por los elementos de N_0 y sus elementos simétricos es igual a N.

Demostración.- Sea s el subconjunto formado por los elementos de N_0 y sus elementos simétricos. Si se tiene $x \in s$ y $x \in N_0$, entonces, por definición, suc $x \in s$; por otra parte, cuando $x \in s$ y sim $x \in N_0$, también suc $x \in s$. En efecto, considerese el elemento sim(suc x), como sim $z =$ suc[sim(suc z)] resulta sim(suc x) $=$ prec(sim x); pero ya que sim $x \neq 0$, prec(sim x) $\in N_0$, luego suc $x \in s$. Además, cuando se tiene suc $x \in s$ y suc $x \in N_0$, si suc $x \neq 0$ entonces prec(suc x) $\in N_0$, o sea $x \in N_0$. Si suc $x = 0$, prec $0 = $ sim(suc 0), luego prec $0 \in s$. Cuando suc $x \in s$ y sim(suc x) $\in N_0$, resulta prec (sim x) $\in N_0$, luego sim $x \in N_0$, o sea $x \in s$. En virtud del séptimo postulado $s = N$.

Haciendo una comparación de las definiciones de suma y producto dadas en los párrafos IX y XII, con las definiciones de los párrafos XXIX y XXX, se hace evidente que el isomorfismo entre el subconjunto N_0 y la clase de los números naturales es tal que si dos elementos se corresponden su suma y producto se corresponden también. Por lo tanto, en virtud de los teoremas XI,1 y XIV,1 el subconjunto N_0 es cerrado en las operaciones de suma y multiplicación.

Los números enteros se dividen pués, en dos clases: una que es isomórfica con los números naturales y otra formada por los elementos simétricos de los elementos de la primera. Se puede decir también que el conjunto de los enteros está bién ordenado.

Si llamamos, como es costumbre, elementos positivos a los elementos de N_0 y elementos negativos a sus simétricos, las relaciones de orden se definen de la siguiente manera:

Definición XXXII,1.- $\bigwedge_{xyz} \left[(x > y) \leftrightarrow (x - y = z) \wedge (z \in N_0) \wedge (z \neq 0) \right]$

Definición XXXII,2.- $\bigwedge_{xy} \left[(x < y) \leftrightarrow (y > x) \right]$

Es decir, un número es mayor que otro siempre que la diferencia entre el primero y el segundo es positiva y distinta de cero.

Teorema XXXII,2.- Todos los números positivos distintos de cero son mayores que cero.

Demostración.- Si $x \varepsilon N_0$, $x - 0 = x$ y por lo tanto $x > 0$.

Teorema XXXII,3.- Todos los números negativos son menores que cero.

Demostración.- Si $\text{sim } x \varepsilon N_0$, como por definición $0 - x = \text{sim } x$, resulta $0 > x$, o sea $x < 0$.

La relación $>$, tal como se ha definido, ordena al sistema de los números enteros, como se demuestra a continuación:

Teorema XXXII,4.- $\underset{xyz}{A}\left[(x > y) \wedge (y > z) \rightarrow (x > z)\right]$

Demostración.- Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x - y = t$ y $y - z = r$, donde $t \varepsilon N_0$ y $r \varepsilon N_0$. Sumando las igualdades anteriores resulta: $x - y + y - z = t + r$, que en virtud del teorema XXXI,1 se transforma en $x - z = t + r$, donde $(t + r) \varepsilon N_0$. Luego $x > z$.

Teorema XXXII,5.- $\underset{xyz}{A}\left[(x > y) \rightarrow (x + z > y + z)\right]$

Demostración.- Sea $x > y$, entonces $x - y = t$, donde $t \varepsilon N_0$. Por lo tanto, si $x + z - (y + z) = r$, se tiene $r = x + z + \text{sim}(y + z)$, o sea que $r = x + \text{sim } y$. Es decir que $r = t$. Luego $x + z = y + z$.

Teorema XXXII,6.- $\underset{xy}{A}\left[(x > y) \rightarrow (y \not> x)\right]$

Demostración.- En efecto, supongamos que $x > y$ y $y > x$, entonces $x - y = t$ y $y - x = r$, donde $t \varepsilon N_0$ y $r \varepsilon N_0$. Por lo tanto $t = x + \text{sim } y$ y $r = y + \text{sim } x$. $t + r = x + \text{sim } x + y + \text{sim } y$, o sea $t + r = 0$. Esto está en contradicción con el teorema XI,6 porque <u>t</u> y <u>r</u> son distintos de cero. Es decir, si $x > y$ entonces $y \not> x$.

Teorema XXXII,7.- $\underset{xy}{A}\left[(x \neq y) \rightarrow (x > y) \vee (y > x)\right]$

Demostración.- Sea $x - y = z$, si <u>z</u> es un número positivo $x > y$, pués $z \neq 0$. Si, por otra parte, <u>z</u> es un número negativo, como $x + \sin y = z$, $\sin x + y = \sin z$. O sea $y - x = \sin z$, es decir que $y > x$. En virtud de que todo número es positivo o negativo, y como es evidente que siempre existe la diferencia entre dos números, queda demostrado el teorema.

XXXIII.- Algunas propiedades de los enteros.

Con los teoremas demostrados, es relativamente simple demostrar la ley arquimedeana y el algoritmo de Euclides, a partir del cual se desarrolla la teoría de la divisibilidad y de los números primos.

Teorema XXXIII,1.- $\underset{xy}{A}\left[(x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow \underset{z}{E}\ (zx > y)\right]$

Demostración.- Desde luego, el teorema es verdadero cuando $x = \text{suc } 0$ porque $\text{suc } y \cdot \text{suc } 0 = \text{suc } y$, y $\text{suc } y > y$. Supóngase además que el teorema es válido para la pareja de números x y y; o sea que existe z tal que $zx > y$, entonces $z \cdot \text{suc } x = zx + x$. Es decir que $z \cdot \text{suc } x > y$. Luego el teorema siempre es verdadero.

Teorema XXXIII,2.- $\underset{xy}{A}\left[(y > 0) \rightarrow \underset{z}{E}\left\{(x = zy + w) \wedge (0 \leq w < y)\right\}\right]$

Demostración.- En virtud de la propiedad arquimedeana, siempre existirá un número z tal que $zy > x$, sea $x > 0$ ó $x < 0$. Por lo tanto, se tendrá $x + r = zy$, donde $r > 0$. Sea s el conjunto de todas las r posibles, como s es un conjunto de enteros positivos existirá una r_0 menor que todas las demás. Esta r_0 tiene que ser menor que y, porque en caso contrario $x + (r_0 - y) = zy - y$, o sea $x + (r_0 - y) = \text{prec } zy$, lo cual implicaría una r_1 menor que r_0. Ahora bién, si $x + r_0 = zy$, entonces $x = \text{prec}(zy) + (y - r_0)$ es decir $x = \text{prec}(zy) + w$, siendo $0 \leq w < y$.