

(1-28)

FACULTAD DE CIENCIAS

U.N.A.M.

TEORIA DE GRUPOS Y PROBLEMAS DE TRES
Y DE CUATRO NUCLEONES

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE OYARZABAL

T E S I S

Que para obtener el título de

DOCTOR EN FISICA

P r e s e n t a

VALDIR CASACA AGUILERA NAVARRO

México, D. F.

1969



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para minha MÃE
e minha ESPÔSA

TEORIA DE GRUPOS Y PROBLEMAS
DE TRES Y CUATRO NUCLEONES

INDICE

I .	<u>INTRODUCCION</u>	1
II .	<u>FUNCIONES DE SIMETRIA PERMUTACIONAL DEFINIDA</u>	4
	Técnica de Proyecciones	4
	Procedimiento de Escaleras	10
III .	<u>EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS</u>	13
	Paréntesis de Transformación para Coordenadas Relativas y Centro de Masa (Brashinskets)	13
	Paréntesis de Transformación para Rotaciones Arbitrarias en Términos de Brashinskets	17
IV .	<u>EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS</u>	21
	Estados Translacionalmente Invariantes de Tres Partículas	21
	Estados Generales de Tres Partículas	32
V .	<u>EL PROBLEMA DE CUATRO CUERPOS</u>	44
	Coordenadas de Jacobi y de Kramer-Moshinsky	44
	Los Paréntesis de Transformación $\langle n_a l_a, n_b l_b(\lambda); n_c l_c, \lambda n_1 l_1, n_2 l_2(\lambda); n_3 l_3, \lambda \rangle$	54
VI .	<u>APLICACIONES</u>	60
	Elementos de Matriz de un Hamiltoniano para Tres Nucleones	60
	Función de Onda y Energía de Amarre del Tritio	63
	Funciones de Onda para la Partícula α	71
	Estado Base de la Partícula α para un Hamiltoniano Conocido	76
	Factor de Forma de la Partícula α	81

REFERENCIAS

I

INTRODUCCIÓN

Actualmente hay mucha actividad en problemas de pocos nucleones. Tenemos datos recientes sobre factores de forma del estado base del tritio, He^3 y partícula α [1] obtenidos por dispersión de electrones. Tenemos, también, información de posibles estados excitados de la partícula α y de sistemas de cuatro nucleones en general [2]. Por otro lado, Phillips, de Rice, parece haber observado estados excitados de tres nucleones [3].

Es, por tanto, relevante discutir sistemáticamente la construcción de sistemas completos de estados translacionalmente invariantes para tres y cuatro nucleones.

Esto es lo que tratamos de hacer en este trabajo, utilizando funciones de osciladores armónicos para los estados de una partícula en cada coordenada relativa.

Las definiciones, técnicas matemáticas y resultados que necesitaremos para el desarrollo de nuestro propósito están resumidos en los dos capítulos siguientes.

En el capítulo 2 particularizamos al grupo de permutaciones la técnica general de proyecciones para obtener funciones base para representaciones irreducibles del grupo.

En el capítulo 3 discutimos los paréntesis de transformación (brashinskets) de las coordenadas originales al sistema de centro de masa y coordenadas relativas. También discutimos los paréntesis de transformación para una rotación arbitra-

ria en el espacio bi-dimensional de las coordenadas de dos partículas y su relación con los brashinskets. Estos coeficientes, además de otras aplicaciones [4], tienen un papel importante en problemas de cuatro nucleones.

La parte teórica de este trabajo se encuentra, principalmente, en los capítulos 4 y 5, donde construimos explícitamente estados de tres y cuatro nucleones con las características de que son translacionalmente invariantes, tienen momento angular orbital total definido y son base para representaciones irreducibles dadas del grupo de permutaciones $S(n)$, $n=3,4$.

También se discuten los estados generales de tres partículas (útiles en Física Atómica y Molecular) y su relación con los de cuatro que sean translacionalmente invariantes.

En el último capítulo presentamos algunas aplicaciones. Discutimos las funciones de onda para el estado base de la partícula α y su correspondiente factor de forma en la aproximación de cuatro cuantos.

Se discuten también los elementos de matriz, con respecto al estado base, de un hamiltoniano para un sistema de tres y cuatro nucleones. Estos elementos de matriz son dados explícitamente para el caso en que las funciones pertenecen a la representación irreducible $\{n\}$, $n=3,4$, y tienen momento angular orbital total igual a cero.

Como ejemplo calculamos la energía de amarre del tritio (hasta 20 cuantos) y de la partícula α (hasta 10 cuantos). In-

dicamos el procedimiento a seguir cuando describimos el tri-
tio también con funciones orbitales de simetría menor que {3}.

El autor de esta tesis desea expresar su agradecimien-
to al Dr. M. Moshinsky, tanto por haber sugerido el tema de
ella como por su valiosa orientación durante el tiempo de e-
laboración de la misma. También se agradece al Ing. T. A.
Brody por su asesoría en la parte de programación y al
Dr. F. E. Prieto y la M. en C. R. M. Méndez por la revisión
del manuscrito.

Agradecimientos también son debidos a las siguientes
entidades que, de una forma u otra, hicieron posible la
realización de este trabajo:

Instituto de Física Teórica, São Paulo, S.P., Brasil

Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, G.B., Brasil

Instituto de Física de la U.N.A.M., México, D.F.

Centro Electrónico de Cálculo de la U.N.A.M., México, D.F.

II

FUNCIÓN DE SIMETRÍA PERMUTACIONAL DEFINIDA

La función de onda de un sistema de n nucleones debe ser completamente antisimétrica. Si separamos dicha función de onda como producto de una parte orbital $|\phi\rangle$ por otra que describe el comportamiento del sistema en el espacio de espín $|\chi\rangle$, se puede lograr la referida antisimetría haciendo que $|\phi\rangle$ sea caracterizada por una representación irreducible (RI) $\{f\}$ de $S(n)$ y $|\chi\rangle$ por la RI asociada [5] $\{\tilde{f}\}$.

En los capítulos siguientes se tratará el problema de construir $|\phi\rangle$ con la característica referida, en otras palabras, se requerirá de las funciones orbitales $|\phi\rangle$ la propiedad adicional de que tenga una simetría permutacional bien definida.

Este problema será resuelto utilizándose la técnica cómoda y sencilla de proyecciones y eventualmente el procedimiento un tanto más elaborado de escaleras ("ladder procedure").

El presente capítulo trata de dar un resumen

- a. de la teoría de proyecciones aplicada al caso particular del grupo simétrico;
- b. del procedimiento de escaleras para construir los elementos básicos de una RI de $S(n)$.

Técnica de Proyecciones

Como se verá todo lo que se requiere es el conocimiento

to del efecto de cada elemento de $S(n)$ en $|\emptyset\rangle$ y sus elementos de matriz en la RI considerada.

En lo que sigue usaremos $\{f\}$ y $\mathcal{D}^{\{f\}}$ como notaciones equivalentes para indicar la RI ortogonal de $S(n)$ caracterizada por la partición $f_{1n} + f_{2n} + \dots + f_{sn} = n$. Por d_f indicaremos la dimensión correspondiente. Un elemento (permutación) de $S(n)$ se indicará por p .

Sean $|\{f\}1\rangle, |\{f\}2\rangle, \dots, |\{f\}d_f\rangle$ funciones tales que

$$p|\{f\}\mu\rangle = \sum_{\lambda=1}^{d_f} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\{f\}}(p) |\{f\}\lambda\rangle, \quad \begin{matrix} \mu=1,2,\dots,d_f \\ p \in S(n) \end{matrix} \quad (2.1)$$

(Fijada la RI $\{f\}$ hay una correspondencia biunívoca entre los símbolos de Yamanouchi pertinentes $r[6]$ y los índices μ , de manera que consideraremos μ como representando uno y sólo un símbolo de Yamanouchi).

Decimos que $|\{f\}\nu\rangle$ pertenece a la fila ν de la RI $\{f\}$ si existen $|\{f\}1\rangle, |\{f\}2\rangle, \dots, |\{f\}\nu-1\rangle, |\{f\}\nu+1\rangle, \dots, |\{f\}d_f\rangle$ tales que todas $|\{f\}\lambda\rangle$ cumplan con (2.1).

Multiplicando (2.1) a la izquierda por

$$\overline{\mathcal{D}}_{\lambda'\mu'}^{\{f\}}(p) = \mathcal{D}_{\lambda'\mu'}^{\{f\}}(p)$$

donde la barra significa complejo conjugado, y sumando sobre los elementos de $S(n)$ se sigue de la ortogonalidad de la representación que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\rho} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\{f\}}(\rho) \rho |i+j\mu\rangle &= \sum_{\rho} \sum_{\lambda} \mathcal{D}_{\lambda\mu'}^{\{f\}}(\rho) \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\{f\}}(\rho) |i+j\lambda\rangle \\
 &= \frac{n!}{d_f} \sum_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda} \delta_{\mu'\mu} \delta_{+f} |i+j\lambda\rangle \\
 &= \frac{n!}{d_f} \delta_{\mu'\mu} \delta_{+f} |i+j\lambda'\rangle \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

donde $n!$ es el número de elementos (orden) de $S(n)$.

La condición de ortogonalidad de la representación que utilizamos se expresa explícitamente por [7]

$$\sum_{\rho} \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\{f\}}(\rho) \bar{\mathcal{D}}_{\nu\rho}^{\{f\}}(\rho) = \frac{n!}{d_f} \delta_{+f} \delta_{\lambda\nu} \delta_{\mu\rho}$$

En particular la (2.2) toma la forma

$$\frac{d_f}{n!} \sum_{\rho} \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{\{f\}}(\rho) \rho |i+j\lambda\rangle = |i+j\lambda\rangle \quad (2.3)$$

para toda función $|i+j\lambda\rangle$ que pertenezca a la fila λ de la RI $\{f\}$. Inversamente, dada una función $|i+j\lambda\rangle$ que satisfaga (2.3) podemos encontrar un conjunto de $d_f - 1$ funciones "colegas" $|i+j1\rangle, |i+j2\rangle, \dots, |i+j\lambda-1\rangle, |i+j\lambda+1\rangle, \dots, |i+jd_f\rangle$ de manera que (2.1) sea cierto para todo el conjunto. Donde se concluye que (2.3) es condición necesaria y suficiente para que $|i+j\lambda\rangle$ pertenezca a la fila λ de la RI $\{f\}$ de $S(n)$.

Este resultado es bastante útil ya que si conocemos $|i+j\lambda\rangle$, una de las d_f funciones base para la RI $\{f\}$, las otras se puede obtener directamente de ella, pues, a partir de (2.2) están dadas por

$$|\{f\}\mu\rangle = \frac{d_f}{n!} \sum_p \mathcal{D}_{\mu\lambda}^{\{f\}}(p) p |\{f\}\lambda\rangle \quad (2.4)$$

Los coeficientes $\mathcal{D}_{\mu\lambda}^{\{f\}}(p)$ son conocidos para cualesquiera $\{f\}$ y transposición dadas [8] (y con esto basta pues podemos generar todo $S(n)$ con puras transposiciones) y están dados explícitamente, por ejemplo, en el libro de Hamermesh (ver Referencias) para n hasta 5.

El problema que nos queda es el de construir por lo menos una $|\{f\}\lambda\rangle$.

Sabemos que podemos obtener una representación de $S(n)$ aplicando a una función arbitraria $|\varphi\rangle$ las permutaciones de dicho grupo. (Estamos suponiendo, desde luego, que $|\varphi\rangle$ sea susceptible de sufrir estas operaciones de modo bien definido). La función $|\varphi\rangle$ será uno de los elementos básicos o podrá ser expresada como combinación lineal de funciones base. Lo mismo es cierto si reducimos la representación original en sus componentes irreducibles de manera que $|\varphi\rangle$ se puede expresar como una suma de funciones que son bases para las diferentes representaciones irreducibles $\{f'\}$

$$|\varphi\rangle = \sum_{f'} \sum_{\mu=1}^{d_{f'}} |\{f'\}\mu\rangle \quad (2.5)$$

Decimos que

$$|\{f'\}\rangle \equiv \sum_{\mu=1}^{d_{f'}} |\{f'\}\mu\rangle \quad (2.6)$$

pertenece a la $d_{f'}$ -ésima representación irreducible.

Aplicando p en (2.5), multiplicando por $\mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{i+j}(p)$ y sumando sobre p obtendremos

$$\sum_p \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{i+j}(p) p |\varphi\rangle = \sum_p \sum_{\lambda'} \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{i+j}(p) p |i+j\lambda\rangle$$

y utilizando (2.3) resulta

$$\sum_p \mathcal{D}_{\lambda\lambda}^{i+j}(p) p |\varphi\rangle = \frac{n!}{d_f} |i+j\lambda\rangle \quad (2.7)$$

o sea

$$|i+j\lambda\rangle = \mathcal{P}_{\lambda}^{i+j}(\lambda) |\varphi\rangle \quad (2.8)$$

donde

$$\mathcal{P}_{\mu}^{i+j}(\nu) \equiv \frac{d_f}{n!} \sum_p \mathcal{D}_{\mu\nu}^{i+j}(p) p \quad (2.9)$$

La ecuación (2.8) nos permite construir la función requerida $|i+j\lambda\rangle$ aplicando a una función arbitraria $|\varphi\rangle$ el operador de proyección $\mathcal{P}_{\lambda}^{i+j}(\lambda)$ definido en (2.9).

Resumiendo, dada una función arbitraria $|\varphi\rangle$ tal que esté bien definido el efecto de las permutaciones de $S(n)$ sobre si, podemos construir la RI $\{f\}$ de $S(n)$ asociada a la fila λ construyendo $|i+j\lambda\rangle$ con (2.8) y sus colegas a partir de (2.4) que reescribimos en la forma

$$|i+j\mu\rangle_{\lambda} = \mathcal{P}_{\mu}^{i+j}(\lambda) |i+j\lambda\rangle_{\lambda} \quad (2.10)$$

En otras palabras, los resultados (2.8) y (2.10) nos permiten construir funciones que tienen simetría permutacional bien definida.

El índice λ en los kets que aparecen en (2.10) indica que estamos generando la RI $\{f\}$ asociada a la fila λ de $\mathcal{D}^{\{f\}}$.

Utilizando el concepto de carácter de una permutación p en la RI $\{f\}$

$$\chi^{\{f\}}(p) \equiv \sum_{\mu} \mathcal{D}_{\mu\mu}^{\{f\}}(p) = \text{Tr} \mathcal{D}^{\{f\}}(p) \quad (2.11)$$

podemos construir otro operador de proyección en una forma que resulta ser más conveniente en algunas situaciones.

Tomemos (2.2) con $\lambda' = \mu'$ y sumemos sobre μ' . Obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_p \chi^{\{f\}}(p) p |\{f\}\mu\rangle &= \frac{n!}{d_f} \sum_{\mu'} \delta_{\mu'\mu} \delta_{f'f} |\{f\}\mu'\rangle \\ &= \frac{n!}{d_f} \delta_{f'f} |\{f\}\mu\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sumando ahora sobre μ y teniendo en cuenta la definición (2.6) llegamos a

$$\sum_p \chi^{\{f\}}(p) p |\{f\}\rangle = \frac{n!}{d_f} \delta_{f'f} |\{f\}\rangle \quad (2.13)$$

Vemos que

$$\mathcal{O}^{\{f\}} \equiv \frac{d_f}{n!} \sum_p \chi^{\{f\}}(p) p \quad (2.14)$$

es también un operador de proyección.

Una simplificación que ocurre cuando utilizamos (2.14) en lugar de (2.9) es que, como el carácter es función de la clase

(la traza es invariante frente una transformación de similaridad), en (2.14) basta con sumar sobre las clases de $S(n)$.

Procedimiento de Escaleras

En lo que sigue es más conveniente utilizar una notación explícita para los índices griegos de la sección anterior. Recordemos que μ, ν, λ , etc. estaban unívocamente relacionadas con los símbolos de Yamanouchi r de una RI de $S(n)$ dada.

La notación que utilizaremos es la siguiente

$$\begin{aligned} \{r\} &\equiv \{r_{1n} r_{2n} \dots r_{nn}\} && r \in S(n) \\ (r) &\equiv (r_n r_{n-1} \dots r_1) && r \in S(n). \end{aligned}$$

El concepto fundamental involucrado en el procedimiento de escaleras es el de "distancia axial" que recordaremos en breves palabras.

Dado un diagrama de Young [9] el número de pasos que debemos dar para llegar desde el cuadrado que contiene el número a hasta el que contiene el número b es la distancia axial entre a y b que se indica por $d(a,b)$. Un "paso" es definido por un desplazamiento horizontal o vertical (como los movimientos de la torre en ajedrez, cuando se mueve solo una casilla) y es positivo si se efectúa hacia la izquierda o hacia abajo y negativo en caso contrario.

De la definición sigue que $d(a,b) = -d(b,a)$.

Como ejemplo consideremos el siguiente diagrama de Young en $S(6)$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow \begin{aligned} \{f\} &= \{f_{16} f_{26} f_{36}\} = \{321\} \\ (r) &= (r_6 r_5 r_4 r_3 r_2 r_1) = (312121) \end{aligned} \quad (2.15)$$

En este caso tenemos

$$d(2,3) = -2; \quad d(5,6) = 4; \quad d(1,4) = 0 \quad (2.16)$$

Entre las expresiones algebraicas para calcular $d(a,b)$ escogeremos la siguiente [10]

$$d(a,b) = f_{r_a a} - f_{r_b b} + r_b - r_a \quad (2.17)$$

Las distintas f_{st} se encuentran quitando sucesivamente del diagrama de Young original el cuadrado que contiene el mayor número. Así, del ejemplo (2.15) se obtiene la siguiente sucesión de diagramas

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.18)$$

A partir de (2.17) y (2.18) es fácil checar los resultados (2.16).

Ahora definimos σ_m por

$$\sigma_m^{-1} \equiv d(m, m-1) = f_{r_m m} - f_{r_{m-1} m-1} + r_{m-1} - r_m \quad (2.19)$$

Por otro lado [6] dos elementos de una misma RI de $S(n)$ están relacionados por

$$\begin{aligned}
 |\{f\}(r_n \dots r_{m-1} r_m \dots r_1)\rangle &= \\
 &= (1 - \sigma_m^2)^{-1/2} [(m-1, m) - \sigma_m] |\{f\}(r_n \dots r_m r_{m-1} \dots r_1)\rangle \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

donde $(m-1, m)$ indica la transposición de los elementos (coordenadas) m y $m-1$.

Esta relación nos sugiere un método para generar la base para la RI $\{f\}$ a partir de un elemento básico conocido: basta transponer convenientemente las componentes del símbolo de Yamanouchi y aplicar sucesivamente la ecuación (2.20).

Este es el método bautizado por Kramer y Moshinsky [11] de "procedimiento de escaleras" en analogía al proceso de descenso de peso aplicable en algunos grupos (como $R(3)$).

Para finalizar notemos que la aplicación de (2.20) requiere el conocimiento de una $|\{f\}(r)\rangle$ y que la construcción de este elemento se puede hacer a partir de (2.8). Esto nos informa cual es la fila de $\mathcal{D}^{\{f\}}$ a que está asociada la RI $\{f\}$ generada por (2.20).

III

EL PROBLEMA DE DOS CUERPOS

En este capítulo discutimos el problema de dos cuerpos en un potencial de oscilador armónico con la idea de introducir los paréntesis de transformación para transformaciones ortogonales arbitrarias de las coordenadas de las dos partículas. Los paréntesis serán útiles en la discusión del problema de tres y cuatro partículas que es el contenido de los capítulos siguientes.

NOTA: en todo este trabajo utilizaremos coordenadas y momentos en unidades de $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ y $\sqrt{m\hbar\omega}$ respectivamente, con el objeto de tratar con variables adimensionales.

Paréntesis de Transformación para Coordenadas Relativas y de Centro de Masa (Brashinskets)

La parte orbital de la función de onda para un sistema de dos cuerpos puede expandirse en términos de funciones de osciladores armónicos de dos partículas de momento angular total Λ y proyección M que indicamos por (en la notación de Dirac para el ket):

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M \rangle = \left[\psi_{n_1 l_1}(\vec{x}_1) \psi_{n_2 l_2}(\vec{x}_2) \right]_{\Lambda M}^{\wedge} \quad (3.1)$$

$$\equiv \sum_{m_1 m_2} (l_1 l_2 m_1 m_2 | \Lambda M) \psi_{n_1 l_1 m_1}(\vec{x}_1) \psi_{n_2 l_2 m_2}(\vec{x}_2)$$

donde $\psi_{nlm}(\vec{x})$ son funciones de onda de un oscilador armónico que, en términos del operador de creación

$$\vec{\eta} \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{x} - i\vec{p}) \quad (3.2)$$

son dadas por [12]

$$\psi_{nlm} = A_{nl} (\vec{\eta} \cdot \vec{\eta})^n Y_{lm}(\vec{\eta}) |0\rangle \quad (3.3)$$

con

$$A_{nl} = (-)^n \left[\frac{4\pi}{(2n)!!(2n+2l+1)!!} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

y

$$|0\rangle = \pi^{-3/4} \exp(-\frac{1}{2}\vec{x}^2) \quad (3.5)$$

En (3.3) Y_{lm} son armónicos esféricos sólidos.

El estado (3.1) es adecuado para el cálculo de elementos de matriz de operadores de un cuerpo como el de la energía cinética y del potencial común a cada partícula. Sin embargo, no es conveniente para tratar con operadores, como el de la energía de interacción $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$, que dependen de la coordenada relativa. Es, por lo tanto, conveniente desarrollar (3.1) en términos de estados que dependen de las coordenadas relativas y de centro de masa definidas, conjuntamente con sus momentos correspondientes, por

$$\begin{aligned} \vec{x}_a &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) & , & & \vec{p}_a &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ \vec{x}_b &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) & , & & \vec{p}_b &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Los coeficientes para el desarrollo referido, conocidos por el nombre de brashinskets, fueron deducidos por Moshinsky [13] y tabulados por Brody y Moshinsky [14]. Aquí daremos su definición y algunas propiedades que serán utilizadas más adelante.

En el sistema de coordenadas relativas y de centro de masa los estados de dos partículas están dados por

$$|n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M\rangle \equiv \left[\psi_{n_a l_a}(\vec{x}_a) \psi_{n_b l_b}(\vec{x}_b) \right]_{\Lambda M}^{\Lambda} \quad (3.7)$$

Igualmente que en (3.1) los paréntesis cuadrados indican el acoplamiento de momentos angulares.

Notemos que en (3.7) utilizamos las mismas Λ y M que en (3.1). Esto se debe a que la transformación (3.6) es tal que

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda} &= \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \hbar(\vec{x}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{x}_2 \times \vec{p}_2) \\ &= \hbar(\vec{x}_a \times \vec{p}_a + \vec{x}_b \times \vec{p}_b) \\ &= \vec{l}_a + \vec{l}_b \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado también resulta de (3.6) que

$$\begin{aligned} H(1,2) &= \frac{1}{2} \hbar \omega (\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + \vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \hbar \omega (\vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2 + \vec{x}_a^2 + \vec{x}_b^2) = H(a,b) \end{aligned} \quad (3.9)$$

lo cual implica que

$$2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n_a + l_a + 2n_b + l_b \quad (3.10)$$

Los brashinskets son entonces los coeficientes que aparecen en el desarrollo

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M\rangle = \sum_{\substack{n_a l_a \\ n_b l_b}} |n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M\rangle \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \quad (3.11)$$

donde la suma es finita pues n_a, l_a, n_b y l_b son enteros no negativos restringidos por (3.10) y además l_a y l_b deben cumplir con la regla para adición de momentos angulares

$$|l_a - l_b| \leq \Lambda \leq l_a + l_b \quad (3.12)$$

Los brashinskets son independientes de M pues de (3.8) podemos obtener estados con $M + 1$ en los dos miembros de la ecuación (3.11) aplicando el operador

$$[(\Lambda - M)(\Lambda + M + 1)]^{-1/2} (L_x + i L_y)$$

Algunas relaciones de simetría de los brashinskets [15]

son

$$\begin{aligned} & \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \\ &= (-)^{l_b - \Lambda} \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda \rangle \\ &= (-)^{l_1 - \Lambda} \langle n_b l_b, n_a l_a, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \\ &= (-)^{l_2 + l_b} \langle n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda | n_a l_a, n_b l_b, \Lambda \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nótese que en la última relación sólo han sido intercambiados los valores numéricos, de manera que, por ejemplo, $n_a l_a$ (los números cuánticos relativos) tienen ahora los valores antes atribuidos a la partícula 1. Si se intercambia también el sentido físico del bra y del ket, el valor del paréntesis es igual al original ya que la operación equivale a tomar la conjugada compleja y los paréntesis son reales.

Paréntesis de Transformación para Rotaciones Arbitrarias en Términos de Brashinskets

Discutimos los paréntesis de transformación de estados de dos partículas en las coordenadas \vec{x}_1 y \vec{x}_2 para aquellos en las coordenadas \vec{x}_a y \vec{x}_b relacionadas a las anteriores por

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_a \\ \vec{x}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

La matriz en (3.14) representa una rotación de $\pi/4$ con respecto a los índices de partículas.

En esta sección presentaremos un análisis discutido recientemente por Gal [4] para derivar los paréntesis de transformación cuando la relación entre las coordenadas es dada por

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_a \\ \vec{x}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\beta & -\text{sen} \frac{1}{2}\beta \\ \text{sen} \frac{1}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

donde el ángulo de rotación ahora es $\beta/2$.

En su análisis Gal muestra, como veremos, que los parámetros de transformación asociados a (3.15) se expresan en términos de *brashinskets* y fases.

De la discusión en el principio de este capítulo se puede deducir que los estados de dos partículas pueden ser escritos como

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M\rangle = P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) |C\rangle \quad (3.16)$$

donde P es el polinomio

$$P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = A_{n_1 l_1} A_{n_2 l_2} (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1)^{n_1} (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2)^{n_2} \left[y_{l_1}(\vec{n}_1) y_{l_2}(\vec{n}_2) \right]_M^\Lambda \quad (3.17)$$

De (3.2) resulta que (3.15) induce una transformación similar para los operadores de creación, es decir,

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_a \\ \vec{n}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Los coeficientes para las rotaciones por un ángulo $\beta/2$ serán indicados por

$$\langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle_\beta \quad (3.19)$$

y relacionan los polinomios P y Q de acuerdo con

$$P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = \sum_{n_a l_a} \sum_{n_b l_b} Q(n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M) \times \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle_\beta \quad (3.20)$$

donde Q es también dado por (3.17) sustituyendo $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ por $\vec{\eta}_a$ y $\vec{\eta}_b$, respectivamente.

Para encontrar los coeficientes (3.19) notamos que el inverso de la transformación (3.18) se puede descomponer como el producto de matrices siguiente

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\beta & \sin \frac{1}{2}\beta \\ -\sin \frac{1}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \equiv ABCDEFG \quad (3.21)$$

donde A, B, ..., G corresponden a las matrices en el orden indicado.

El problema que sigue es algebraico y consiste en determinar el efecto de cada matriz en el polinomio P.

Inmediatamente vemos que C y F son rotaciones de $\pi/4$ y conducen a brashinskets, como ya fué discutido en la sección anterior. Por otro lado, el efecto de A y G es multiplicar el polinomio por $(\mp i)^{g_2}$ donde $g_2 \equiv 2n_2 + l_2$ es el grado del polinomio en el operador de creación asociado a la segunda partícula.

Por un razonamiento análogo el efecto de E es introducir un factor $\exp[(g_2 - g_1)i\beta/2]$. Finalmente, B (= D) intercambia $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$, cuyo efecto, como se ve de (3.17), es

$$BP(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = (-)^{l_1 + l_2 - \Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \quad (3.22)$$

Combinando todos estos resultados y utilizando las reglas de simetría de los brashinskets (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle_{\mathcal{F}} &= \\ &= i^{2n_b + l_b - 2n_2 - l_2} \sum_{n_c l_c} \sum_{n_d l_d} \exp[(2n_d + l_d - 2n_c - l_c)i\beta/2] (-)^{l_b + l_2} \\ &\times \langle n_c l_c, n_d l_d, \Lambda | n_a l_a, n_b l_b, \Lambda \rangle \langle n_c l_c, n_d l_d, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \quad (3.23) \end{aligned}$$

Estos coeficientes también son reales [12].

La relación (3.23) arriba nos da explícitamente los paréntesis de transformación para una rotación arbitraria con respecto a los índices de las partículas en términos de brashinskets, los cuales están disponibles en tablas [14].

IV

EL PROBLEMA DE TRES CUERPOS

En este capítulo vamos a construir sistemas completos de funciones de osciladores armónicos que tengan momento angular orbital total bien definido y que sean bases para una representación irreducible de $S(3)$, es decir, que tengan simetría permutacional definida.

Primero discutiremos el caso de invariancia translacional donde podemos eliminar el movimiento del centro de masa quedándonos con una variable (vectorial) menos.

Estados translacionalmente invariantes de tres partículas

La restricción a invariancia translacional implica que los estados de tres partículas van depender solamente de dos coordenadas relativas y escogeremos las coordenadas de Jacobi definidas a continuación.

Los estados de tres partículas pueden ser funciones de las coordenadas ordinarias \vec{x}_1 , \vec{x}_2 y \vec{x}_3 o de las definidas por la siguiente transformación ortogonal

$$\begin{aligned}\vec{x}_a &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ \vec{x}_b &= \sqrt{\frac{1}{6}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3) \\ \vec{x}_c &= \sqrt{\frac{1}{3}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Esta transformación, así como la (3.14), es caso particular de la transformación ortogonal de Jacobi definida para n vectores por

$$\vec{X}_s = \sqrt{\frac{1}{s(s+1)}} \left[\sum_{t=1}^s \vec{x}_t - s \vec{x}_{s+1} \right], \quad 1 \leq s \leq n-1 \quad (4.2a)$$

$$\vec{X}_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \sum_{t=1}^n \vec{x}_t \quad (4.2b)$$

A las coordenadas (4.2a) les llamaremos coordenadas relativas de Jacobi, y son obviamente invariantes frente a translaciones.

Entonces un estado arbitrario de tres partículas que sea translacionalmente invariante puede desarrollarse en términos de

$$\langle \vec{x}_a | n_a l_a m_a \rangle \langle \vec{x}_b | n_b l_b m_b \rangle \quad (4.3)$$

donde $\langle \vec{x} | n l m \rangle$ son funciones de un oscilador armónico en la notación de Dirac.

Tendremos estados con momento angular bien definido si utilizamos las funciones (4.3) acopladas a una \wedge y proyección M , es decir,

$$|n_a l_a, n_b l_b, \wedge M\rangle \equiv \left[\langle \vec{x}_a | n_a l_a \rangle \langle \vec{x}_b | n_b l_b \rangle \right]_{M}^{\wedge} \quad (4.4)$$

Lo único que nos queda ahora es caracterizar el estado final por una RI de $S(3)$. Para esto utilizamos los conceptos discu-

tidos en el capítulo II. Necesitamos, entonces, conocer el efecto de las permutaciones de $S(3)$ en las funciones (4.4). De hecho basta con saber el efecto de los generadores de $S(3)$. Escogeremos las permutaciones (12) y (123) como generadores del grupo.

Examinemos más detalladamente el estado (4.4). Igual que (3.16) él puede ser expresado como un polinomio Q en los operadores de creación

$$\vec{\eta}_{a,b} = \sqrt{\frac{1}{2}} (\vec{x}_{a,b} - i \vec{p}_{a,b}) \quad (4.5)$$

actuando en el estado base, es decir,

$$|n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M\rangle = Q(n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M) |0\rangle \quad (4.6)$$

donde

$$Q(n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M) = A_{n_a l_a} A_{n_b l_b} (\vec{\eta}_a \cdot \vec{\eta}_a)^{n_a} (\vec{\eta}_b \cdot \vec{\eta}_b)^{n_b} \times \left[Y_{l_a}(\vec{\eta}_a) Y_{l_b}(\vec{\eta}_b) \right]_{\Lambda M}^{\Lambda} \quad (4.7)$$

y

$$|0\rangle = \pi^{-3/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x}_a^2 + \vec{x}_b^2) \right] = \pi^{-3/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \{ \vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2 + \vec{x}_3^2 - \frac{1}{3} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3)^2 \} \right] \quad (4.8)$$

El estado base $|0\rangle$ es obviamente invariante frente a

permutaciones de las coordenadas \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , y \vec{x}_3 de manera que la discusión de las propiedades de simetría de combinaciones lineales de kets (4.4) se reduce al análisis de las propiedades de simetría de la misma combinación lineal de los polinomios Q . Por ejemplo, si queremos simetrizar la función tendremos de aplicar las permutaciones de $S(3)$ a Q y sumar los polinomios resultantes.

¿ Cual es el efecto de los generadores (12) y (123) en los polinomios Q ?

La respuesta es sencilla pues de (4.1) y (4.5) resulta

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_a \\ \vec{\eta}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_a \\ \vec{\eta}_b \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$(123) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_a \\ \vec{\eta}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_a \\ \vec{\eta}_b \end{pmatrix}$$

El efecto de cualquier permutación de $S(3)$ sobre Q es entonces directo una vez que tenemos el efecto de (12) y (123). De (4.9) y (4.7) vemos que el efecto de (12) sobre Q es multiplicarlo por la fase $(-1)^{2n_b + i_b}$ mientras que la aplicación de (123) en Q conduce a una combinación lineal de Q 's cuyos coeficientes son paréntesis de transformación asociados a un ángulo $\beta = 4\pi/3$.

Como dijimos, este procedimiento es directo pero resulta ser laborioso. Obtendremos mucha simplificación si introduci-

mos operadores auxiliares definidos por [11]

$$\begin{aligned}\vec{\eta}_1 &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (-i\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b) \\ \vec{\eta}_2 &\equiv \sqrt{\frac{1}{2}} (i\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b)\end{aligned}\tag{4.10}$$

Estos operadores no deben ser confundidos con los operadores de creación definidos en (3.2).

Ahora, de (4.9) vemos que bajo la operación de los generadores de $S(3)$, $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ se transforman como

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

$$(123) \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{pmatrix}$$

Consideremos los polinomios $P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M)$ definidos también como en (4.7) pero tomando $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, n_1, l_1, n_2, l_2$ en lugar de $\vec{\eta}_a, \vec{\eta}_b, n_a, l_a, n_b, l_b$. La aplicación de (12) y (123) en P , o sea, de sus inversos [16] en $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ nos da

$$(12) P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = (-1)^{l_1 + l_2 - \Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M)\tag{4.12}$$

$$(123) P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = e^{(2\pi i/3)2g} P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M)\tag{4.13}$$

donde definimos

$$2g = 2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2 \quad (4.14)$$

A continuación vamos a construir primeramente los estados base para la RI $\{21\}$ de $S(3)$. Esta representación es bidimensional y los elementos básicos están asociados a los dos símbolos de Yamanouchi (211) y (121) . Construiremos la RI asociada al renglón (211) de modo que los operadores de proyección que entrarán en juego son (ver definición (2.9) y ref. 5, pag.224)

$$P_{211}^{(211)} = \frac{1}{3} \left[e + (12) - \frac{1}{2} \{ (13) + (23) + (123) + (132) \} \right] \quad (4.15)$$

y

$$P_{121}^{(211)} = \frac{1}{\sqrt{12}} \left[(23) - (13) - (123) + (132) \right] \quad (4.16)$$

De acuerdo con la discusión del capítulo II primero aplicamos (4.15) al polinomio P . Obtendremos la función caracterizada por $fr = \{21\}(211)$. En seguida, aplicándole (4.16) obtendremos su colega $\{21\}(121)$.

Notando que

$$\begin{aligned} (13)^{-1} &= (13) = (12)(123) \\ (23)^{-1} &= (23) = (123)(12) \\ (123)^{-1} &= (132) = (12)(123)(12) \end{aligned} \quad (4.17)$$

y utilizando los resultados (4.12) y (4.13) resulta

$$\begin{aligned}
P_{211}^{\{21\}}(211) P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) &= \\
&= \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2\left(2g \frac{\pi}{3}\right) \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) + (-)^{l_1+l_2-\Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \\
&= \frac{1}{2}(1-\delta_{\nu 0}) \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) + (-)^{l_1+l_2-\Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \quad (4.18)
\end{aligned}$$

donde ν es definida por la congruencia

$$2g \equiv \nu \pmod{3} \quad (4.19)$$

El procedimiento anterior condujo inmediatamente a un resultado interesante: dados los polinomios $P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M)$ solamente aquellos tales que $2g$, de la ecuación (4.14), no sea un múltiplo de 3 son los que tienen proyecciones no nulas sobre la RI $\{21\}$ de $S(3)$. El mismo resultado se seguiría si hubiéramos seleccionado $P_{121}^{\{21\}}(121)$ en lugar de (4.15) .

Normalizando la función (4.18) obtenemos nuestro primer resultado

$$\begin{aligned}
\phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; \{21\}(211)) &= \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}} \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) + (-)^{l_1+l_2-\Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$\nu \neq 0$$

Aplicando (4.16) en (4.20) obtenemos la función que nos falta para completar la base:

$$\begin{aligned}
 P_{121}^{\{21\}}(211) \phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; \{21\} \{211\}) &= \\
 &= \frac{2i}{\sqrt{6}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} 2g\right) \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) - (-)^{l_1+l_2-1} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \\
 &= (-)^{\nu} \frac{i}{\sqrt{2}} \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) - (-)^{l_1+l_2-1} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \\
 &\equiv \phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; \{21\} \{121\})
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Notemos que el factor $\sqrt{\frac{1}{2}}$ realmente normaliza las ϕ de (4.20) y (4.21) pues P está normalizado y $P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M)$ ja más es idéntico a $P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M)$ una vez que $\nu \neq 0$.

Para conseguir los estados simétricos y antisimétricos podríamos aplicar $P_{111}^{\{3\}}(111) \equiv P^{\{3\}}$ y $P_{321}^{\{111\}}(321) \equiv P^{\{111\}}$, respectivamente, recordando que todas las permutaciones pueden expresarse en términos de (12) y (123).. Esta sería la receta general. Un procedimiento más elegante es notar que del análisis desarrollado para $f = \{21\}$ concluimos que solamente combinaciones lineales de polinomios P 's con $2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2 \equiv 0 \pmod{3}$, o sea, múltiplo de 3, conducen a estados simétricos o antisimétricos. Los simétricos son caracterizados por el diagrama de Young (y respectivo símbolo de Yamanouchi)

$$\boxed{1 \ 2 \ 3} \longleftrightarrow (111)$$

y así son obviamente simétricos bajo la permutación de las partículas 1 y 2. Los que son antisimétricos están asociados al diagrama de Young (y respectivo símbolo de Yamanouchi)

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow (321)$$

y son obviamente antisimétricos bajo el intercambio de las partículas 1 y 2. Podemos, entonces, obtener los estados $\{3\}$ (111) y $\{111\}$ (321) aplicando, respectivamente, los operadores $p^{[2]}$ y $p^{[11]}$ al polinomio $P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M)$, es decir,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p^{[2]} \\ p^{[11]} \end{bmatrix} P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = \\ & = \frac{1}{2} \left[P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) \pm (-)^{l_1 + l_2 - \Lambda} P(n_2 l_2, n_1 l_1, \Lambda M) \right] \\ & \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; \{3\}(111)) \\ \phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; \{111\}(321)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas expresiones son válidas cuando $2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2$ es un múltiplo de 3 distinto de 0. Cuando $n_1 = n_2 = n$ y $l_1 = l_2 = l$ tendremos

$$P(nl, nl, \Lambda M) = \begin{cases} \phi(nl, nl, \Lambda M; \{3\}(111)) & \text{si } \Lambda \text{ es par} \\ \phi(nl, nl, \Lambda M; \{111\}(321)) & \text{si } \Lambda \text{ es non} \end{cases} \quad (4.23)$$

Obtuvimos, así, polinomios con simetría permutacional y momento angular orbital total bien definidos para el problema de tres partículas, translacionalmente invariante, en términos de los operadores $\vec{\eta}_1$ y $\vec{\eta}_2$ de (4.10). Para el cálculo de los elementos de matriz del hamiltoniano y del factor de forma de núcleos, que discutiremos más adelante, es más conveniente tener los polinomios expresados en términos de $\vec{\eta}_a$ y $\vec{\eta}_b$. Con este propósito en mente notamos que la matriz de la transformación (4.10) puede descomponerse en la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv AB \quad (4.24)$$

Ahora, la aplicación de A a P da una combinación lineal de P's cuyos coeficientes serán brashinskets, mientras que el efecto de B es multiplicar el polinomio por $(-i)^{2n_a+l_a}$, ya que el polinomio es homogéneo de grado $2n_a+l_a$ en la primera variable.

Combinando estos resultados llegamos a

$$P(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M) = \sum_{n_a l_a} \sum_{n_b l_b} Q(n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M) \times (-i)^{2n_a+l_a} \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \quad (4.25)$$

Introduciendo la cantidad μ definida por sus valores

dados en la tabla que sigue

ν	μ	$\{f\}(r)$	$(-)^r$
0	0	$\{3\}(111)$	+1
	1	$\{111\}(321)$	+1
1,2	0	$\{21\}(211)$	+1
	1	$\{21\}(121)$	-1

(4.26)

utilizando (4.25) y propiedades de simetría de los brashinskets contenidas en (3.13), podemos expresar en forma compacta los resultados anteriores y además tener todas las funciones reales. El procedimiento es sencillo y de pura construcción. Tendremos

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; fr\rangle \equiv \phi(n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda M; fr) |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2})}} \sum_{n_a l_a} \sum_{n_b l_b} |n_a l_a, n_b l_b, \Lambda M\rangle$$

$$\times \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle [1+(-)^{l_a+\mu}] (-)^{n_a+\frac{1}{2}(l_a+\mu)+\mu\nu} \quad (4.27)$$

Estos estados están en términos de las coordenadas relativas de Jacobi (4.1). La μ está definida en (4.26).

Una vez construidos explícitamente los estados en el espacio de configuración, el estado completo se construye de la manera usual. Indiquemos por $|SM_S TM_T; fr\rangle$ los estados de tres partículas en el espacio de spin-isospin. El estado completamen

te antisimétrico bajo el intercambio de coordenadas, spins e isospins será dado por [17]

$$|\mathcal{N}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{d_f}} \sum_r (-)^r \left[|n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda_3; fr\rangle |STM_T; \tilde{f} \tilde{F}\rangle \right]_M^J \quad (4.28)$$

donde d_f es la dimensión de la RI $\{f\}$ y $\tilde{f}\tilde{F}$ se refieren a la partición y símbolo de Yamanouchi asociados a fr [5]. La fase $(-1)^r$ está dada en (4.26). El símbolo \mathcal{N} se refiere al conjunto de números cuánticos involucrados

$$\mathcal{N} \equiv n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda f, STM_T, JM \quad (4.29)$$

Así tenemos construidos explícitamente los estados translacionalmente invariantes de tres partículas.

Estados Generales de Tres Partículas

A continuación vamos a derivar los estados generales de tres partículas que sean caracterizados por momento angular orbital total y simetría permutacional bien definidos. Veremos, en el capítulo siguiente, que los estados translacionalmente invariantes para cuatro partículas pueden ser derivados con casi los mismos pasos que desarrollaremos aquí.

Consideremos las coordenadas usuales (adimensionales) \vec{x}_1 , \vec{x}_2 y \vec{x}_3 para las tres partículas y construyamos el ket

$$|n_1 l_1, n_2 l_2(\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle \equiv \left[\left[\langle \vec{x}_1 | n_1 l_1 \rangle \langle \vec{x}_2 | n_2 l_2 \rangle \right]^\Lambda \langle \vec{x}_3 | n_3 l_3 \rangle \right]_\mu^\lambda \quad (4.30)$$

donde el primero, segundo y tercer conjuntos de números cuánticos (n_l) están asociados a las partículas 1, 2 y 3, respectivamente. Así, por ejemplo, en el ket $|n_1 l_1, n_3 l_3(\Lambda); n_2 l_2, \lambda \mu\rangle$ los pares $(n_3 l_3)$ y $(n_2 l_2)$ se refieren a las partículas 2 y 3, respectivamente.

Los estados (4.30) tienen momento angular total λ y proyección μ bien definidos pero, en general, no corresponden a una RI definida del grupo simétrico $S(3)$. Para conseguir esta propiedad utilizamos otra vez la técnica de proyecciones, lo que requiere que sepamos el efecto de cada permutación sobre (4.30). Recordando que debemos aplicar el inverso de cada permutación a las coordenadas y utilizando las técnicas familiares de reacoplamiento de Racah [18] obtenemos, por ejemplo,

$$(23)|n_1 l_1, n_2 l_2(\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle = \left[\left[\langle \vec{x}_1 | n_1 l_1 \rangle \langle \vec{x}_3 | n_2 l_2 \rangle \right]^\Lambda \langle \vec{x}_2 | n_3 l_3 \rangle \right]_\mu^\lambda$$

$$= \sum_{\Lambda'} (-)^{l_1 + \Lambda + \Lambda' + \lambda} \sqrt{(2\Lambda + 1)(2\Lambda' + 1)} W(l_1 l_2 l_3 \lambda; \Lambda \Lambda') |n_1 l_1, n_3 l_3(\Lambda'); n_2 l_2, \lambda \mu\rangle$$

donde W es un coeficiente de Racah.

En la tabla siguiente damos los resultados para todas las permutaciones de $S(3)$.

Ya estamos en condiciones de proyectar los estados. Empezaremos suponiendo que los tres pares $(n_s l_s)$, $s = 1, 2, 3$ son distintos. Decimos que

$$(n_s l_s) \neq (n_{s'}, l_{s'}) \quad , \quad s, s' = 1, 2, 3 \quad , \quad s \neq s' \quad (4.31)$$

si $n_s \neq n_{s'}$, o $l_s \neq l_{s'}$, o ambos. Naturalmente, en este caso, dos kets (4.30) en los cuales los vectores \vec{x}_1 , \vec{x}_2 y \vec{x}_3 fueron permutados son ortogonales.

p	$p n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle$
(1 2)	$(-1)^{l_1+l_2+\Lambda} n_2 l_2, n_1 l_1 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle$
(1 3)	$(-1)^{l_1+l_2+l_3+\lambda} \sum_{\Lambda'} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \nu(l_1 l_2 l_3 \Lambda \Lambda') n_3 l_3, n_2 l_2 (\Lambda'); n_1 l_1, \lambda \mu\rangle$
(2 3)	$\sum_{\Lambda'} (-1)^{l_1+\lambda+\Lambda+\Lambda'} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \nu(l_1 l_2 l_3 \Lambda \Lambda') n_1 l_1, n_3 l_3 (\Lambda'); n_2 l_2, \lambda \mu\rangle$
(1 2 3)	$(-1)^{l_3+\lambda+\Lambda} \sum_{\Lambda'} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \nu(l_1 l_2 l_3 \Lambda \Lambda') n_3 l_3, n_1 l_1 (\Lambda'); n_2 l_2, \lambda \mu\rangle$
(1 3 2)	$\sum_{\Lambda'} (-1)^{l_1+\lambda+\Lambda'} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \nu(l_1 l_2 l_3 \Lambda \Lambda') n_2 l_2, n_3 l_3 (\Lambda'); n_1 l_1, \lambda \mu\rangle$

TABLA 1

Consideremos un estado (4.30) al cual aplicamos el operador de proyección $\mathcal{P}_r^{\{F\}}(\bar{F})$ de (2.9) y otro estado con las mismas $(n_s l_s)$, $s = 1, 2, 3$, y $\lambda \mu$, pero con Λ' en lugar de Λ al cual aplicamos el operador $\mathcal{P}_{r'}^{\{F'\}}(\bar{F}')$. El producto escalar de estos dos estados tiene la forma

$$\langle n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda'); n_3 l_3, \lambda \mu | \mathcal{P}_{r'}^{\{F'\}}(\bar{F}') \mathcal{P}_r^{\{F\}}(\bar{F}) | n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu \rangle =$$

$$= \frac{d_f}{3!} \delta_{f'f} \delta_{r'r} \langle n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda'); n_3 l_3, \lambda \mu | \sum_p \mathcal{D}_{\bar{r}\bar{r}'}^{ff'}(p^{-1}) p | n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu \rangle \quad (4.32)$$

donde el lado derecho sigue cuando sustituimos los operadores por su forma explícita y utilizamos relaciones de ortogonalidad bien conocidas para las \mathcal{D} [19].

En el caso que estamos considerando (los tres pares $n_s l_s$ distintos) la aplicación de cualquier p , que no sea la identidad, al ket produce un estado que es necesariamente ortogonal al bra, de manera que el producto (4.32) toma el valor

$$\frac{d_f}{3!} \delta_{f'f} \delta_{r'r} \delta_{\bar{r}\bar{r}'} \delta_{\Lambda'\Lambda} \quad (4.33)$$

Vemos, entonces, claramente, que cuando aplicamos el operador (normalizado)

$$\bar{p}_r^{ff'}(\bar{r}) \equiv \sqrt{\frac{3!}{d_f}} (-)^{\bar{r}} p_r^{ff'}(\bar{r}) = \sqrt{\frac{d_f}{3!}} (-)^{\bar{r}} \sum_p \mathcal{D}_{r\bar{r}}^{ff'}(p) p \quad (4.34)$$

a (4.30) con todos los pares $n_s l_s$ distintos, obtenemos un conjunto de estados ortonormalizados

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3, \Lambda \lambda \mu, f r \bar{r}\rangle \equiv \bar{p}_r^{ff'}(\bar{r}) |n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle \quad (4.35)$$

Notemos que en el lado izquierdo de (4.35) el orden en que aparecen los pares $(n_s l_s)$, $s = 1, 2, 3$, ya no es significativo.

Para evitar repeticiones inútiles definiremos un orden canónico para los pares referidos: si l_1, l_2 y l_3 tienen la misma paridad, es decir, $(-)^{l_1} = (-)^{l_2} = (-)^{l_3}$ ordenaremos los pares de tal modo que $(n_1 l_1) > (n_2 l_2) > (n_3 l_3)$ donde por $(n_s l_s) > (n_{s'} l_{s'})$ queremos decir que $l_s > l_{s'}$, o, si $l_s = l_{s'}$, que $n_s > n_{s'}$. Si una de las l tiene paridad distinta de las otras dos indicaremos esta l y su n correspondiente por $n_3 l_3$ y los pares restantes serán ordenados de manera que $(n_1 l_1) > (n_2 l_2)$.

Es importante tener en cuenta este orden canónico al utilizarse la tabla 2 que será mencionada más adelante.

Notemos también que de (4.30) resulta que Λ satisface las relaciones

$$|l_1 - l_2| \leq \Lambda \leq l_1 + l_2, \quad |l_3 - \lambda| \leq \Lambda \leq l_3 + \lambda \quad (4.36)$$

de modo que fijando $n_1, l_1, n_2, l_2, n_3, l_3, \lambda, \mu, f, r, \bar{r}$ el número de estados (4.35) que tenemos es

$$\min[(l_1 + l_2), (l_3 + \lambda)] - \max[|l_1 - l_2|, |l_3 - \lambda|] + 1. \quad (4.37)$$

El factor de fase $(-1)^{\bar{r}}$ introducido en (4.34) es $+1$ cuando el símbolo de Yamanouchi \bar{r} corresponde a un diagrama de Young en el cual los números están distribuidos en orden natural o pueden ser puestos en este orden bajo un número par de transposiciones. En caso contrario es -1 . Como ejemplos tene-

mos los casos contenidos en la última columna de la tabla (4.26), Esta fase, arbitraria, va se conveniente para la extensión al caso de cuatro partículas.

Los operadores de proyección que aparecen en (4.35) son dados explícitamente en la tabla 2, al final de este capítulo.

A continuación vamos a discutir el caso en que dos de los pares $(n_s l_s)$ son iguales. Por conveniencia enumeraremos los pares de manera que los iguales son $(n_1 l_1)$ y $(n_2 l_2)$. Debemos, entonces, proyectar a partir de los estados

$$|n_1, n_1 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu \rangle \quad (4.38)$$

donde $(n_1) \neq (n_3 l_3)$.

Consideremos el producto escalar (4.32) en el cual bra y ket tienen la forma (4.38). La aplicación de cualquier permutación a (4.38) que intercambie \vec{x}_3 con \vec{x}_1 o \vec{x}_2 da un nuevo estado que es ortogonal a (4.38) con Λ arbitraria. Por lo tanto, solamente los términos con $p=e$ o $p=(12)$ contribuyen a la suma

$\sum_p \mathcal{D}_{FF'}^{\{f\}}(p^{-1})$ y como (12) aplicada a (4.38) da el mismo estado multiplicado por la fase $(-)^{l+l-\Lambda} = (-)^{\Lambda}$, tenemos que en el caso presente el producto escalar (4.32) toma el valor

$$\frac{d_f}{3!} \delta_{ff'} \delta_{r'r'} \delta_{\Lambda'\Lambda} \left[\delta_{FF'} + (-)^{\Lambda} \mathcal{D}_{FF'}^{\{f\}}((12)) \right]$$

Los elementos de matriz de (12) en las distintas RI de $S(3)$ están dados, por ejemplo, en la ref. 5, pag.224. Teniendo en cuenta que las permutaciones de $S(3)$ pueden ser escritas en la forma

$$e, (12), (23), (123) = (23)(12), (13), (132) = (13)(12)$$

y que el efecto de (12) es introducir un factor $(-)^{\wedge}$, los operadores de proyección se simplifican, como está indicado explícitamente en la tabla 2.

El único caso que nos queda para discutir es el de los tres pares $(n_s l_s)$ iguales, o sea, cuando proyectamos del estado

$$|n_l, n_l (\wedge); n_l, \lambda \mu \rangle \quad (4.39)$$

Si aplicamos el operador de proyección (4.34) a (4.39) obtendremos estados caracterizados por fr , pero, los estados así proyectados con \wedge diferentes en general no serán ortogonales. Esto puede comprenderse mejor considerando el producto escalar (4.32) con todas las $(n_s l_s)$ iguales a (n_l) . Claramente, en este caso, la aplicación de una permutación arbitraria al ket nos da estados que no son necesariamente ortogonales al bra, de modo que debemos tomar en cuenta el efecto de todos los términos de la suma $\sum_p \bigoplus_{FF'}^{(f)}$ $(p^{-1}) p$ sobre el ket. Para cada p tenemos la combinación lineal de la tabla 1, tomando todas las $n_s l_s$ iguales a n_l . El producto escalar no da entonces $\delta_{\wedge \wedge}$ o $\delta_{FF'}$ y no podemos conseguir estados ortonormalizados de esta manera.

Seguiremos, por lo tanto, un procedimiento diferente.

Si queremos proyectar estados con $f = \{21\}$ vemos, a partir de la RI correspondiente, que el operador (2.14) tiene la forma

$$\mathcal{O} = \frac{1}{3} [2\varepsilon - (123) - (132)] \quad (4.40)$$

Este operador es hermitiano e idempotente. Así, su matriz con respecto al conjunto completo de estados (4.39), con Λ restringida por (4.36), tiene dimensión

$$d = \min(2l, l+\lambda) - |l-\lambda| + 1 \quad (4.41)$$

y sus eigenvalores deben ser 0 o 1. De la tabla 1 (pag.34), los elementos de matriz son dados por

$$M_{\Lambda\Lambda'}(l\lambda) \equiv \langle n_l, n_l(\Lambda'); n_l, \lambda_\mu | \mathcal{O} | n_l, n_l(\Lambda); n_l, \lambda_\mu \rangle$$

$$= \frac{2}{3} \delta_{\Lambda\Lambda'} - \frac{1}{3} (-)^{l+\lambda} \left[\binom{l+\lambda}{-} + \binom{l-\lambda}{-} \right] \sqrt{(2\Lambda'+1)(2\Lambda+1)} W(l l l \lambda; \Lambda \Lambda') \quad (4.42)$$

Inmediatamente vemos que son nulos cuando Λ y Λ' tienen diferente paridad, de modo que la matriz de \mathcal{O} se rompe en dos partes: una para Λ par y otra para Λ non.

De la discusión del caso en que dos de los pares (n_s, l_s)

eran iguales, del cual el problema presente es un caso particular, concluimos que los eigenestados de la matriz de Λ par que corresponden al eigenvalor 1 son caracterizados por la RI $\{21\}$ de $S(3)$ y tienen $r = (211)$ ya que los eigenestados son simétricos bajo el intercambio de las dos primeras partículas. Los eigenestados correspondientes al eigenvalor 0 cuando Λ es par son caracterizados por $f = \{3\}$. De manera similar los eigenestados de la matriz con Λ impar que corresponden al eigenvalor 1 son caracterizados por la RI $\{21\}$ con $r = (121)$, pues son antisimétricos bajo el intercambio de las dos primeras partículas. Los eigenestados asociados al eigenvalor 0, cuando Λ es non, tienen $f = \{111\}$.

Nos falta, todavía, encontrar los estados colegas cuando estamos tratando de la RI $\{21\}$. Vimos que cuando Λ es par y el eigenvalor es 1 tendremos el estado $\{21\}(211)$. Su colega se puede determinar utilizando el procedimiento de escaleras discutido al final del capítulo II. En el caso presente tenemos

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

de modo que $\{f_{13}f_{23}f_{22}\} = \{210\}$; $\{f_{12}f_{22}\} = \{20\}$; $\{f_{11}\} = \{1\}$.

Queremos el estado cuyo diagrama de Young es

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow r = (121)$$

es decir, debemos permutar la segunda y tercera componentes del símbolo de Yamanouchi original (recuérdese que $r = (r_3 r_2 r_1)$).

De (2.19) resulta

$$\sigma_3^{-1} = f_{23} - f_{12} + 1 - 2 = -2,$$

y de (2.20) encontramos el estado colega

$$|\{21\}(121)\rangle = \sqrt{\frac{4}{3}} \left[(23) + \frac{1}{2} \right] |\{21\}(211)\rangle, \quad \Lambda \text{ par} \quad (4.43)$$

Por otro lado, cuando Λ es impar y el eigenvalor es 1 tendremos que el eigenestado está caracterizado por $\{21\}(121)$ de manera que su colega $\{21\}(211)$ también se encuentra por el procedimiento anterior y resulta ser

$$|\{21\}(211)\rangle = \sqrt{\frac{4}{3}} \left[(23) - \frac{1}{2} \right] |\{21\}(121)\rangle, \quad \Lambda \text{ non} \quad (4.44)$$

Nótese que el procedimiento de escaleras es el que debe ser usado pues no podemos construir el operador de proyección (2.9) ya que la diagonalización de la matriz (4.42) no nos dice a que fila de $\mathcal{D}^{\{f\}}$ está asociado un eigenestado considerado.

El procedimiento detallado discutido para conseguir estados de simetría permutacional definida a partir de los estados (4.39) está indicado en la tabla 2 por la frase que dice que se debe diagonalizar la matriz del operador \mathcal{O} cuyos ele -

mentos son dados por (4.42).

Veremos en el capítulo que sigue que hay una correspondencia entre los estados generales de tres partículas que acabamos de discutir y los de cuatro partículas que sean translacionalmente invariantes.

TABLA 2

$n_1 l_1 n_2 l_2 n_3 l_3$	Λ	fr, S(3)	fr, S(4)		$ n_1 l_1 n_2 l_2 n_3 l_3, \Lambda, \lambda \mu, fr\rangle$
			(ppp)(nnn)	(nnp)(ppn)	
$n l n l n l$	ARBITR.	{3} {21} {111}	{4} {22} {1111}	- - -	Derivados diagonalizando la matriz del operador \mathcal{O} , cuyos elementos están dados por (4.42)
$n l n l n_3 l_3$	PAR	{3}(111)	{4}(1111)	{31}(2111)	$\sqrt{\frac{1}{3}} [e + (13) + (23)]$
		{21}(211)	{22}(2211)	{31}(1211)	$\sqrt{\frac{2}{3}} [e - \frac{1}{2}(13) - \frac{1}{2}(23)]$
		{21}(121)	{22}(2121)	{31}(1121)	$\sqrt{\frac{1}{2}} [(23) - (13)]$
	IMPAR	{21}(211)	{22}(2211)	{211}(3211)	$\sqrt{\frac{1}{2}} [(13) - (23)]$
		{21}(121)	{22}(2121)	{211}(3121)	$-\sqrt{\frac{2}{3}} [e + \frac{1}{2}(13) + \frac{1}{2}(23)]$
		{111}(321)	{1111}(4321)	{211}(1321)	$\sqrt{\frac{1}{3}} [e - (13) - (23)]$
$n_1 l_1 n_2 l_2 n_3 l_3$	ARBITRARIA	{3}(111)	{4}(1111)	{31}(2111)	$\sqrt{\frac{1}{6}} [e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)]$
		{21}_1(211)	{22}_1(2211)	{31}(1211)	$\sqrt{\frac{1}{3}} [e + (12) - \frac{1}{2}\{(13) + (23) + (123) + (132)\}]$
		{21}_3(121)	{22}_3(2121)	{31}(1121)	$\frac{1}{2} [(23) - (13) + (123) - (132)]$
		{21}_2(211)	{22}_2(2211)	{211}(3211)	$\frac{1}{2} [(13) - (23) + (123) - (132)]$
		{21}_2(121)	{22}_2(2121)	{211}(3121)	$-\sqrt{\frac{1}{3}} [e - (12) + \frac{1}{2}\{(13) + (23) - (123) - (132)\}]$
		{111}(321)	{1111}(4321)	{211}(1321)	$\sqrt{\frac{1}{6}} [e - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)]$

V

EL PROBLEMA DE CUATRO CUERPOS

En este capítulo construiremos explícitamente estados de cuatro partículas con las siguientes propiedades

- a. invariancia translacional;
- b. momento angular orbital total definido;
- c. simetría permutacional bien definida.

La restricción a invariancia translacional implica que los estados de cuatro partículas serán funciones solamente de tres coordenadas relativas.

Coordenadas de Jacobi y de Kramer-Moshinsky

Será conveniente definir el sistema de coordenadas relativas de dos modos distintos. Uno de ellos son las coordenadas relativas de Jacobi dadas por (4.2a), con $n = 4$

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_a &= \sqrt{1/2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\
 \vec{x}_b &= \sqrt{1/6} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3) \\
 \vec{x}_c &= \sqrt{1/12} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 - 3\vec{x}_4)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

El otro es el introducido por Kramer y Moshinsky [20]:

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_4 - \vec{x}_2 - \vec{x}_3) \\
 \vec{y}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_2 + \vec{x}_4 - \vec{x}_1 - \vec{x}_3) \\
 \vec{y}_3 &= \frac{1}{2}(\vec{x}_3 + \vec{x}_4 - \vec{x}_1 - \vec{x}_2)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para completar los sistemas de coordenadas (5.1) y (5.2) se requiere la coordenada de centro de masa

$$\vec{x}_d = \vec{y}_4 = \frac{1}{4}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4) . \tag{5.3}$$

Las coordenadas relativas (5.1) y (5.2) están relacionadas por la transformación ortogonal

$$\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{x}_a \\ \vec{x}_b \\ \vec{x}_c \end{pmatrix}, \quad M = \|M_{st}\|, 1 \leq s, t \leq 3 \tag{5.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \equiv M_1 M_2 M_3 \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Esta descomposición de M será útil al relacionar los

estados en las coordenadas de Kramer-Moshinsky (5.2) con los estados en las coordenadas de Jacobi (5.1).

Los estados translacionalmente invariantes de osciladores armónicos en términos de las coordenadas (5.1) y (5.2) serán caracterizados por los kets

$$|n_1 l_1, n_2 l_2(\lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle = \left[\left[\langle \vec{x}_a | n_1 l_1 \rangle \langle \vec{x}_b | n_2 l_2 \rangle \right]^\lambda \langle \vec{x}_c | n_3 l_3 \rangle \right]_\mu^\lambda \quad (5.6)$$

$$|n_1 l_1, n_2 l_2(\lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle = \left[\left[\langle \vec{y}_1 | n_1 l_1 \rangle \langle \vec{y}_2 | n_2 l_2 \rangle \right]^\lambda \langle \vec{y}_3 | n_3 l_3 \rangle \right]_\mu^\lambda \quad (5.7)$$

donde distinguimos los estados en las coordenadas de Jacobi de aquellos en las coordenadas de Kramer-Moshinsky por los paréntesis \rangle y \rangle , respectivamente.

Los kets (5.7) satisfacen las condiciones a. y b. mencionadas anteriormente. Para satisfacer la c. les aplicaremos la técnica de proyecciones. Necesitaremos, para este fin, conocer el efecto de todas las 24 permutaciones de $S(4)$ sobre el conjunto de coordenadas (5.2). Seleccionaremos las transposiciones (12), (23) y (34) como los generadores de $S(4)$. Los siguientes resultados son inmediatos

$$(12) \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$(23) \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$(34) \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{y}_3 \end{pmatrix}$$

Vemos claramente que el subgrupo $S(3)$ de $S(4)$ que permuta \vec{x}_1 , \vec{x}_2 y \vec{x}_3 hace exactamente lo mismo para \vec{y}_1 , \vec{y}_2 e \vec{y}_3 (ya que (12) y (23) son generadores de $S(3)$). Por otro lado el subgrupo $D(2)$ de $S(4)$ definido por las permutaciones

$$\begin{aligned} e; \quad d_1 &= (23)(14); \quad d_2 = (13)(24) = (24)(13); \\ d_3 &= (12)(34) = (34)(12). \end{aligned} \quad (5.9)$$

tiene la siguiente representación cuando opera sobre el vector cuyas componentes son \vec{y}_1 , \vec{y}_2 e \vec{y}_3 :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad d_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad d_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

El grupo $S(4)$ se descompone como el producto semidirecto de los subgrupos mencionados [20], es decir

$$S(4) = D(2) \wedge S(3) \quad (5.11)$$

Así, cualquier elemento ρ de $S(4)$ puede expresarse de manera única como un producto del tipo

$$\rho = dp, \quad d \in D(2), \quad p \in S(3) \quad (5.12)$$

Este resultado nos va a ser muy útil pues, como veremos, no tendremos necesidad de los 24 elementos de $S(4)$ para construir los operadores de proyección.

Los operadores de proyección de $S(4)$, de acuerdo con (2.9), son combinaciones lineales de permutaciones $\rho = dp$. El efecto de p sobre un estado (5.7) es, debido a (5.8), el mismo que el efecto de p sobre un estado ordinario de tres partículas discutidos en el capítulo anterior. En lo que se refiere a las d vemos inmediatamente de (5.10) que cuando son aplicadas a (5.7) dan el mismo estado multiplicado por los siguientes factores (fases)

$$e \rightarrow 1; \quad d_1 \rightarrow (-)^{l_2+l_3}; \quad d_2 \rightarrow (-)^{l_1+l_3}; \quad d_3 \rightarrow (-)^{l_1+l_2} \quad (5.13)$$

El efecto del grupo $D(2)$ sobre los estados (5.7) puede así ser especificado por el valor de los tres momentos angulares (l_1, l_2, l_3) . Al construir esta terna de l 's hay que tener en cuenta el orden canónico definido en el capítulo anterior en las líneas que siguen a la ecuación (4.35).

Indicando por p y n los valores pares y nones de l , respectivamente, tenemos la siguiente representación de $D(2)$ cuando consideramos los estados (5.7) como base

$(l_1 l_2 l_3)$	D(2)			
	e	d_1	d_2	d_3
(p p p)	1	1	1	1
(n n n)	1	1	1	1
(p p n)	1	-1	-1	1
(n n p)	1	-1	-1	1

(5.14)

TABLA 3

Vemos que en los casos (ppp) y (nnn) tenemos la representación identidad para D(2). En estos casos, teniendo en cuenta la descomposición (5.12), el efecto de las permutaciones ρ se reduce al de p. Podemos, así, utilizar los resultados del capítulo anterior para obtener RI de S(4). Si aplicamos, por ejemplo, $\bar{P}_{111}^{\{3\}}(111)$ de (4.34) al estado (5.7) que sea (ppp) o (nnn), es decir, con las tres l pares o impares, tendremos un estado que es simétrico bajo intercambio no solamente de las tres primeras partículas sino, de hecho, de las cuatro, de modo que tendremos la RI {4} de S(4).

Similarmente, si aplicamos $\bar{P}_{321}^{\{111\}}(321)$ a los estados del tipo (ppp) o (nnn) tendremos un estado antisimétrico bajo intercambio de las cuatro partículas, es decir, la RI {1111}.

Finalmente, si aplicamos los operadores $\bar{P}_{211}^{\{21\}}(\bar{F})$ y $\bar{P}_{121}^{\{21\}}(\bar{F})$ con $\bar{F} = (211)$ o (121) , definidos por (4.34) a los estados (5.7) del tipo (nnn) o (ppp) , obtendremos estados correspondientes a la RI de $S(4)$ caracterizada por la partición $\{22\}$ y con símbolos de Yamanouchi iguales a (2211) y (2121) , respectivamente, como se puede averiguar fácilmente comparando las RI $\{22\}$ y $\{21\}$ (ver, v.g., ref.5, pags.224-5).

Estos resultados están resumidos en la tabla 2 donde, como en la discusión de tres partículas, debemos distinguir entre los casos posibles para los pares $(n_s 1_s)$, $s = 1, 2, 3$.

Vamos a discutir ahora los casos en que $(1_1 1_2 1_3)$ es (ppn) o (nnp) . Otra vez usaremos los operadores de proyección de $S(3)$ e intentaremos identificar los estados resultantes con alguna RI de $S(4)$.

Empezaremos con la aplicación de $\bar{P}_{111}^{\{3\}}(111)$ a (5.7). El estado resultante corresponderá a la RI $\{3\}$ del subgrupo $S(3)$ de $S(4)$. Necesariamente, por lo tanto, debe pertenecer a la RI de $S(4)$ que proviene del producto directo

$$\{3\} \times \{1\} = \{4\} \oplus \{31\} \quad (5.15)$$

o, en términos de diagramas

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

Debido a (5.14) no puede pertenecer a $\{4\}$, en cuyo caso el efecto de todas permutaciones sería $+1$, de manera que pertenece a $\{31\}$ y además con el símbolo de Yamanouchi (2111) que garantiza que las tres primeras partículas estén en un estado simétrico. En resumen, el estado

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \left[e + (12) + (23) + (123) + (13) + (132) \right] |n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle \quad (5.16)$$

con $(1_1 1_2 1_3)$ del tipo (nnp) o (ppn) está caracterizado por $f_r = \{31\}(2111)$.

Sus colegas, o sea, aquellos estados con símbolos de Yamanouchi (1211) y (1121) , son construídos utilizando el procedimiento de escaleras,

El diagrama de Young y símbolo de Yamanouchi asociados al estado (5.16) son

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow (2111)$$

de modo que

$$\{f_{14} f_{24} f_{34} f_{44}\} = \{3100\} ; \{f_{13} f_{23} f_{33}\} = \{300\} ; \{f_{12} f_{22}\} = \{20\} \{f_{11}\} = \{1\} \quad (5.17)$$

Para obtener el estado asociado a

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow (1211)$$

tenemos que permutar los cuadrados con 3 y 4, es decir, r_3 y r_4 en el símbolo de Yamanouchi, de modo que a partir de (5.17) y (2.19) resulta

$$\sigma_4^{-1} = f_{r_4} - f_{r_3} + r_3 - r_4 = f_{24} - f_{13} + 1 - 2 = -3$$

Finalmente, de (2.20) resulta

$$|\{31\}(1211)\rangle = \sqrt{\frac{9}{8}} \left[(34) + \frac{1}{3} \right] |\{31\}(2111)\rangle \quad (5.18)$$

Como el ket en el lado derecho es simétrico bajo el intercambio de las tres primeras partículas podemos reescribir (5.18) como

$$|\{31\}(1211)\rangle = \sqrt{\frac{9}{8}} \left[(34)(12) + \frac{1}{3} \right] |\{31\}(2111)\rangle = \sqrt{\frac{9}{8}} \left[d_3 + \frac{1}{3} \right] |\{31\}(2111)\rangle \quad (5.19)$$

donde d_3 es un elemento de $D(2)$ definido en (5.9).

Teniendo en cuenta (5.16), (5.13) y la tabla de multiplicación de $S(3)$ [21] tenemos, explícitamente,

$$|\{31\}(1211)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ e + (12) - \frac{1}{2} [(23) + (123) + (13) + (132)] \right\} |n_1 l_1, n_2 l_2(\lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle \quad (5.20)$$

para el caso en que $(1_1 1_2 1_3)$ es (nnp) o (ppn) .

Por comparación notamos que el operador en (5.20) es exactamente el $\bar{P}_{211}^{(21)}(211)$ de (4.34).

Por otro lado el procedimiento de escaleras para obtener el estado $|\{31\}(1121)\rangle$ conduce exactamente al operador que aparece en (4.43).

Estos últimos resultados están indicados en la tabla 2.

Hemos mostrado que los operadores de proyección

$\bar{P}_{111}^{\{3\}}(111)$, $\bar{P}_{211}^{\{21\}}(211)$ y $\bar{P}_{121}^{\{21\}}(211)$ nos dan los tres estados base para la RI $\{31\}$ de $S(4)$ si $(l_1 l_2 l_3)$ es (ppn) o (nnp) .

Consideremos a continuación el operador $\bar{P}_{321}^{\{111\}}(321)$.

Cuando lo aplicamos al estado (5.7) obtenemos un estado antisimétrico en las tres primeras partículas. Necesariamente, entonces, debe pertenecer a la RI de $S(4)$ que proviene del producto directo

$$\{111\} \times \{1\} = \{211\} \oplus \{1111\} \quad (5.21)$$

o, en términos de diagramas,

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \times \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

De (5.14) vemos que no puede pertenecer a $\{1111\}$ cuando $(l_1 l_2 l_3)$ es (nnp) o (ppn) , pues d_1 y d_2 tienen eigenvalor -1 . El estado debe ser, por lo tanto, el $|\{211\}(1321)\rangle$ donde el símbolo de Yamanouchi garantiza la antisimetría en las tres primeras partículas.

El procedimiento de escaleras nos produce

$$|\{211\}(3121)\rangle = -\sqrt{\frac{9}{8}} \left[d_3 + \frac{1}{3} \right] |\{211\}(1321)\rangle \quad (5.22)$$

Aplicando el operador que aparece en (5.22) al estado $\bar{P}_{321}^{\{111\}}(321)|\{5.7\}\rangle$ obtendremos, de manera similar a la que nos condujo a (5.20), el estado $\bar{P}_{121}^{\{21\}}(121)|\{5.7\}\rangle$. Por otro lado, el estado $|\{211\}(3211)\rangle$, el último que falta, es dado por $\bar{P}_{211}^{\{21\}}(121)|\{5.7\}\rangle$.

Estos resultados también aparecen resumidos en la tabla 2.

No hay que olvidar que hemos considerado siempre el caso en que todos los pares $(n_s l_s)$, $s = 1, 2, 3$, son distintos. Si dos de ellos o los tres son iguales, el procedimiento a seguir es el mismo que se discutió para el caso de tres partículas en la segunda parte del capítulo anterior. Notemos que si todos los pares referidos son iguales las únicas posibilidades para $(l_1 l_2 l_3)$ son $\{ppp\}$ o $\{nnn\}$ de manera que las RI de $S(4)$ que aparecen son $\{4\}$, $\{22\}$ y $\{1111\}$. (Ver tabla 2 al final del capítulo IV).

Los paréntesis de transformación

$$\langle n_a l_a, n_b l_b(\Lambda), n_c l_c, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2(\Lambda), n_3 l_3, \lambda \rangle$$

Aquí terminamos la discusión de un método general pa-

ra construir estados con las propiedades a., b. y c. mencionadas al principio de este capítulo. Son proyectados del estado (5.7) y dados en términos de las coordenadas de Kramer-Moshinsky definidas en (5.2). Como veremos a continuación, para el cálculo del factor de forma y de los elementos de matriz del hamiltoniano para un sistema de cuatro nucleones es más conveniente tener los estados en términos de las coordenadas relativas de Jacobi (5.1). Trataremos, entonces, de determinar los coeficientes de la expansión

$$|n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle = \sum |n_a l_a, n_b l_b (\Lambda'); n_c l_c, \lambda \mu\rangle \times \langle n_a l_a, n_b l_b (\Lambda'); n_c l_c, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda); n_3 l_3, \lambda \rangle \quad (5.23)$$

donde $\langle | \rangle$ son los coeficientes que queremos determinar. La suma es sobre todos los índices del ket $| \rangle$ con excepción de $\lambda \mu$.

En primer lugar notemos que λ debe ser la misma tanto en el bra $| \rangle$ como en el $| \rangle$. La demostración de esto es sencilla y requiere no más que la definición $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ y la ortogonalidad de la matriz M de (5.4) (compare con (3.8)).

La suma (5.23) es limitada, pues, debido otra vez a la ortogonalidad de (5.4) tenemos que el hamiltoniano del oscilador armónico es formalmente invariante frente a la transformación (5.2) (compare con (3.9)). Esto conduce a (compare con (3.10))

$$2n_a + l_a + 2n_b + l_b + 2n_c + l_c = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 + 2n_3 + l_3 \quad (5.24)$$

donde todos los términos son no negativos.

Para obtener la forma explícita de los paréntesis de transformación notemos la descomposición de M dada en (5.5).

Es claro que el efecto de M_3 sobre (5.23) es multiplicarlo por $(-)^{l_3}$. La transformación M_1 conduce a una rotación de $\pi/4$ en los índices 1 y 2 lo que induce combinaciones lineales, en términos de brashinskets, del tipo (3.11).

Para encontrar el efecto de M_2 primero reacomplamos (5.23) con la técnica usual para expresarlo en términos de estos del tipo

$$|n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3(\Lambda), \lambda \mu\rangle \quad (5.25)$$

Ahora es claro que M_2 produce una rotación por un ángulo tal que

$$\cos \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad , \quad \sin \frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.26)$$

lo que induce brashinskets generalizados definidos para cada ángulo β por (3.20) y dados explícitamente en términos de brashinskets ordinarios por (3.23).

La expresión a que se llega después de los pasos descritos es

$$\begin{aligned}
 |n_1 l_1, n_2 l_2(\Lambda); n_3 l_3, \lambda \mu\rangle &= \sum_{\Lambda''} \sum_{\substack{n_l \\ n_a l_a \\ n_b l_b \\ n_c l_c}} \sum_{\substack{n_b l_b \\ n_c l_c}} |n_a l_a; n_b l_b, n_c l_c(\Lambda''), \lambda \mu\rangle \\
 &\times (-)^{l_c} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda''+1)} W(l_a l \lambda l_3; \Lambda \Lambda'') \\
 &\times \langle n_b l_b, n_c l_c, \Lambda'' | n l, n_3 l_3, \Lambda'' \rangle \langle n_a l_a, n l, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\Lambda' \Lambda''} \sum_{\substack{n_l \\ n_a l_a \\ n_b l_b \\ n_c l_c}} \sum_{\substack{n_b l_b \\ n_c l_c}} |n_a l_a, n_b l_b(\Lambda'); n_c l_c, \lambda \mu\rangle \\
 &\times (-)^{l_c} (2\Lambda''+1) \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} W(l_a l \lambda l_3; \Lambda \Lambda'') W(l_a l_b \lambda l_c; \Lambda' \Lambda) \\
 &\times \langle n_a l_a, n l, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \langle n_b l_b, n_c l_c, \Lambda'' | n l, n_3 l_3, \Lambda'' \rangle \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

donde la última forma sigue de un reacomplamiento.

Por lo tanto la forma explícita para los coeficientes $\langle 1 \rangle$ de (5.23) es la siguiente

$$\begin{aligned}
 &\langle n_a l_a, n_b l_b(\Lambda'); n_c l_c, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2(\Lambda); n_3 l_3, \lambda \rangle \\
 &= (-)^{l_c} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \sum_{\Lambda''} \sum_{n_l} (2\Lambda''+1) W(l_a l_b \lambda l_c; \Lambda' \Lambda'') W(l_a l \lambda l_3; \Lambda \Lambda'') \\
 &\times \langle n_a l_a, n l, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \langle n_b l_b, n_c l_c, \Lambda'' | n l, n_3 l_3, \Lambda'' \rangle \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

En esta expresión la suma sobre Λ'' está restringida de la manera usual mientras que las sumas sobre n, l están limitadas por las relaciones

$$2n + 1 = 2n_1 + 1_1 + 2n_2 + 1_2 - 2n_a - 1_a \quad (5.30)$$

$$y \quad |\Lambda - l_a| \leq l \leq \Lambda + l_a \quad (5.31)$$

donde la primera sigue de (3.10) y la última de la regla para adición de momentos angulares.

Por otro lado podríamos haber escrito (5.23) en la forma

$$\begin{aligned} |n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3 (\Lambda), \lambda \mu\rangle &= \sum |n_a l_a; n_b l_b, n_c l_c (\Lambda'), \lambda \mu\rangle \\ &\times \langle n_a l_a; n_b l_b, n_c l_c (\Lambda'), \lambda | n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3 (\Lambda), \lambda \rangle \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde, ahora, el orden de acoplamiento de las tres l es distinto.

Es fácil ver que estos nuevos coeficientes son combinaciones lineales de los (5.29), o sea,

$$\begin{aligned} &\langle n_a l_a; n_b l_b, n_c l_c (\Lambda'), \lambda | n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3 (\Lambda), \lambda \rangle = \\ &= \sum_{\bar{\Lambda}'} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)(2\bar{\Lambda}+1)(2\bar{\Lambda}'+1)} W(l_a l_b \lambda l_c; \bar{\Lambda}' \Lambda') W(l_1 l_2 \lambda l_3; \bar{\Lambda} \Lambda) \\ &\times \langle n_a l_a, n_b l_b (\bar{\Lambda}'); n_c l_c, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2 (\bar{\Lambda}); n_3 l_3, \lambda \rangle \end{aligned} \quad (5.33)$$

De (5.29) y de la ortogonalidad de los coeficientes de Racah obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
 & \langle n_2 l_2; n_b l_b, n_c l_c (\Lambda'), \lambda | n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3 (\Lambda), \lambda \rangle = \\
 & = (-)^{l_c} \sqrt{(2\Lambda+1)(2\Lambda'+1)} \sum_{\Lambda'' n l} (2\Lambda''+1) W(l_1 l_2 \lambda l_3; \Lambda'' \Lambda) W(l_2 \lambda l_3; \Lambda'' \Lambda') \\
 & \times \langle n_2 l_2, n l, \Lambda'' | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda'' \rangle \langle n_b l_b, n_c l_c, \Lambda' | n l, n_3 l_3, \Lambda' \rangle_{\beta} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Otra vez las sumas sobre n, l están limitadas por las relaciones (5.30) y (5.31).

INSTITUTO DE FÍSICA



BIBLIOTECA
JUAN B. DE OYARZABEN

VI

APLICACIONES

En este capítulo haremos algunas aplicaciones sencillas de los estados de tres y cuatro partículas discutidos en los dos últimos capítulos.

Elementos de Matriz de Un Hamiltoniano para Tres Nucleones

Los estados translacionalmente invariantes de tres nucleones están discutidos en la primera parte del capítulo 4. Su forma explícita está dada por (4.28).

Para los cálculos es más conveniente expresar los estados (4.28) en términos de los estados

$$\begin{aligned} & \langle \vec{x}_a \vec{x}_b | n_a l_a, S'_{j_a} T' f', n_b l_b, \frac{1}{2} j_b \frac{1}{2}, T M_T, J M \rangle \\ & \equiv \left[\langle \vec{x}_a | n_a l_a, S'_{j_a} T' f' \rangle \langle \vec{x}_b | n_b l_b, \frac{1}{2} j_b \frac{1}{2} \rangle \right]_{M M_T}^{J T} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde ($\Upsilon = \frac{1}{2}$)

$$\langle \vec{x}_a | n_a l_a, S'_{j_a m_a} T' M_T' f' \rangle \equiv \left[\langle \vec{x}_a | n_a l_a \rangle | \Upsilon^2 S' T' M_T' f' \rangle \right]_{m_a}^{j_a}$$

y

$$\langle \vec{x}_b | n_b l_b, \frac{1}{2} j_b m_b \frac{1}{2} \tau \rangle \equiv \left[\langle \vec{x}_b | n_b l_b \rangle | \gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2} \tau \rangle \right]_{m_b}^{j_b}$$

Los kets $|\gamma^2 S' T' M_T' f'\rangle$ y $|\gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2} \tau\rangle$ son los estados de spin-isospin de las primeras dos partículas y de la tercera, respectivamente.

Los paréntesis de transformación que conectan los estados (4.28) y (6.1) son fáciles de determinar a partir de las relaciones (4.27). Su forma explícita es

$$\begin{aligned} & \langle n_a l_a, S' j_a T' f', n_b l_b, \frac{1}{2} j_b \frac{1}{2}, T J | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda S f, T J \rangle \\ &= \left[2(1 + \delta_{n_1 n_2} \delta_{l_1 l_2}) \right]^{-1/2} (-)^{n_a + \frac{1}{2}(l_a + \mu) + \mu \nu} \left[1 + (-)^{l_a + \mu} \right] \\ & \times \langle n_a l_a, n_b l_b, \Lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda \rangle \langle \gamma^2 f' S' T'; \gamma \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \gamma^3 \tilde{f} S T \rangle \\ & \times \left[(2j_a + 1)(2j_b + 1)(2\Lambda + 1)(2S + 1) \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} l_a & l_b & \Lambda \\ S' & \frac{1}{2} & S \\ j_a & j_b & J \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde $\langle | \} \rangle$ son coeficientes de precedencia fraccional para la parte de spin-isospin calculados por H.A. Jahn [22] y dados en una tabla bastante cómoda en la referencia 17, pag.416. Las

llaves $\{ \}$ son coeficientes ρ_j . Los parámetros μ, ν, \dagger están relacionados entre sí de acuerdo con (4.26).

Hay disponible un programa en Algol para el cálculo de los coeficientes de transformación (6.2).

Asumiendo solamente fuerzas de dos cuerpos el hamiltoniano más general para un sistema de tres nucleones está dado por

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{s=1}^3 \frac{1}{2} \hbar \omega (\vec{p}_s)^2 + \sum_{s < t=2}^3 V_{st} \quad (6.3)$$

en notación usual.

El hamiltoniano intrínseco se escribe como [23]

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_0 + \sum_{s < t=2}^3 U_{st}$$

con

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega (p_a^2 + p_b^2 + x_a^2 + x_b^2)$$

y

$$U_{st} = V_{st} - \frac{1}{6} \hbar \omega (\vec{x}_s - \vec{x}_t)^2 \quad (6.4)$$

Los elementos de matriz de \mathcal{H}_I con respecto a los estados (4.28), teniendo en cuenta los coeficientes de transformación (6.2) son dados por

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathcal{N}} | \mathcal{H}_I | \mathcal{N} \rangle &= \hbar\omega(N+3) \delta_{\bar{\mathcal{N}}\mathcal{N}} + \langle \bar{\mathcal{N}} | \sum_{st} U_{st} | \mathcal{N} \rangle \\
&= \hbar\omega(N+3) \delta_{\bar{\mathcal{N}}\mathcal{N}} + \sum_{\substack{n_a l_a \\ n_b l_b}} \sum_{\substack{\bar{n}_a \bar{l}_a \\ \bar{j}_a \bar{j}_b}} \sum_{S'T'} \langle \bar{n}_a \bar{l}_a S' j_a T' | \sum_{st} U_{st} | n_a l_a S' j_a T' \rangle \\
&\quad \times \langle \bar{n}_1 \bar{l}_1, \bar{n}_2 \bar{l}_2, \bar{\Lambda} \bar{S} \bar{f}, \bar{T} J | \bar{n}_a \bar{l}_a, S' j_a T' f', n_b l_b \frac{1}{2} j_b \frac{1}{2} T J \rangle \\
&\quad \times \langle n_a l_a, S' j_a T' f', n_b l_b \frac{1}{2} j_b \frac{1}{2}, J T | n_1 l_1, n_2 l_2, \Lambda S f, J T \rangle \quad (6.5)
\end{aligned}$$

donde \mathcal{N} está dada por (4.29) y

$$N = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2$$

Función de Onda y Energía de Amarre del Tritio

Consideremos el caso particular del tritio. Describiremos su estado base con funciones completamente simétricas (en el espacio de configuración) y con momento angular orbital total nulo. Aún con estas simplificaciones veremos que un cálculo hasta 20 cuantos conduce a diagonalización de matrices de dimensión 67.

Tomaremos el potencial nucleón-nucleón del tipo

$$V_{st} = \frac{1}{2} (1 + P_{st}^B)^3 V(r_{st}) + \frac{1}{2} (1 - P_{st}^B)^4 V(r_{st}) \quad (6.6)$$

donde B_P es el operador de intercambio de spin y 1V y 3V son los potenciales para estados pares de singulete y triplete. No necesitaremos los potenciales impares porque estamos restringiéndonos a funciones de onda completamente simétricas. Naturalmente, debido a la dependencia en los espines de las fuerzas nucleares, se requieren funciones de onda con partes menos simétricas. Lo que haremos es sustituir V_{st} por un potencial efectivo, sin dependencia de spin, de la forma

$$V_e = \frac{1}{2} \left[{}^3V(r_{st}) + {}^1V(r_{st}) \right] \quad (6.7)$$

De hecho se puede demostrar que, escribiendo (6.6) en la forma

$$V = \frac{1}{2} ({}^1V + {}^3V) + \frac{1}{2} B_P ({}^3V - {}^1V) = V_e + W$$

los coeficientes de precedencia fraccional para la parte de spin-isospin dan elementos de matriz de W diferentes de cero solamente cuando $I \neq f$.

Podemos sumar sobre los pares y el hamiltoniano intrínseco queda $(r^2 \equiv x_a^2)$

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_0 + 3 \left[\frac{1}{2} ({}^3V_{12} + {}^1V_{12}) - \frac{1}{3} \hbar \omega r^2 \right] \quad (6.8)$$

Con respecto a la función de onda tenemos que con $\Lambda=0$ y $f = \{3\}$ el estado (4.27) debe cumplir con las condiciones

(ver (4.19) y (4.26))

$$l_1 = l_2 = l; \quad 2n_1 + l_1 - 2n_2 - l_2 = 2(n_1 - n_2) \equiv 0 \pmod{3}$$

es decir

$$n_2 = n_1 + 3q, \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

De esta manera (4.27) se escribe como ($n = n_1$)

$$\begin{aligned} |nq\rangle &\equiv |nl, n+3q, l; 00; \{3\}(111)\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{1+\delta_{q0}}} \sum_{n_a, n_b} |n_a, 2l_a, n_b, 2l_a; 00\rangle \\ &\times (-)^{n_a+l_a} \langle n_a, 2l_a, n_b, 2l_a, 0 | nl, n+3q, l, 0 \rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde las sumas están limitadas a valores no negativos de n_a , n_b y l_a tales que

$$n_a + n_b + 2l_a = 2n + 3q + l \quad (6.11)$$

La función del estado base del tritio será dada por

$$\phi_{00}^{\{3\}} = \sum_{nlq} a(nlq) |nlq\rangle \quad (6.12)$$

$$\text{con } 4n + 2l + 6q = N \quad (\text{número de cuantos}) \quad (6.13)$$

Los coeficientes $a(nlq)$ pueden ser determinados por un análisis variacional de la energía de amarre del tritio uti-

lizando la frecuencia del oscilador armónico como parámetro variacional.

Los elementos de matriz de (6.8) con respecto a los estados (6.10) son dados por

$$\begin{aligned}
 \langle n'_l q' | H_I | n l q \rangle &= \hbar \omega (N+3) \delta_{n'_l, n} \delta_{l', l} \delta_{q', q} \\
 &+ \frac{3(-)^{l+l'+q+q'}}{\sqrt{(1+\delta_{q0})(1+\delta_{q'0})}} \sum_{\substack{n'_a, n'_c \\ n'_2, n'_c}} \langle n'_a 2l'_a, n'_c 2l'_c, 0 | n'_l, n+3q', 0 \rangle \\
 &\times \langle n_a 2l_a, n_c 2l_c, 0 | n'_l, n+3q', 0 \rangle \langle n'_a 2l'_a || V + {}^3V - \frac{2}{3} \hbar \omega r^2 || n_a 2l_a \rangle \\
 &\langle n'_c 2l'_c || V + {}^3V - \frac{2}{3} \hbar \omega r^2 || n_c 2l_c \rangle
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde el elemento de matriz reducido es dado por una combinación lineal de integrales de Talmi con coeficientes B definidos en la referencia 14, es decir,

$$\begin{aligned}
 \langle n'_a 2l'_a || V + {}^3V - \frac{2}{3} \hbar \omega r^2 || n_a 2l_a \rangle &= \\
 &= \sum_{p=2l'_a}^{2l'_a+n'_a+n_a} B(n'_a 2l'_a, n_a 2l_a, p) I_p(V + {}^3V - \frac{2}{3} \hbar \omega r^2)
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

donde

$$I_p(+)=\frac{2}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} \int_0^{\infty} (c^{-r^2} + (c)r^{-2p+2}) r^2 dr \tag{6.16}$$

Los potenciales que utilizamos son sumas de 6 gaussianas (3 para tripletes y 3 para singuletes).

Introduzcamos la notación

$$h_I = \frac{\hbar^2}{m_e} , \quad v_{oi} = \frac{V_{oi}}{m_e c^2} , \quad \alpha_i = \frac{\hbar^2 c^2}{m_e^2 M c^2} \frac{1}{\mu_i^2} , \quad \epsilon = \frac{\hbar \omega}{m_e c^2} \quad (6.17)$$

donde V_{oi} , μ_i son la profundidad y alcance del potencial i ; m y M son las masas en reposo del electrón y del protón, respectivamente. El parámetro variacional será entonces ϵ .

Cada componente del potencial tendrá la forma

$$v_{oi} \exp\left[-\frac{2\alpha_i}{\epsilon} r^2\right] \quad (6.18)$$

En este caso las integrales de Talmi (6.16) son inmediatas y (6.15) queda

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 2l'_1 \parallel \sum_{i=1}^6 v_{oi} \exp\left[-\frac{2\alpha_i}{\epsilon} r^2\right] - \frac{2}{3}\epsilon r^2 \parallel n_a 2l_a \rangle \\ & = \sum_{p=2l_a}^{2l_a+n'_1+n_2} B(n'_1 2l'_1, n_a 2l_a, p) \left[\sum_{i=1}^6 \frac{v_{oi}}{\left[1 + \frac{2\alpha_i}{\epsilon}\right]^{p+3/2}} - \frac{2}{3}\left(p + \frac{3}{2}\right)\epsilon \right] \quad (6.19) \end{aligned}$$

La dimensión de la matriz cuyos elementos están dados por (6.14) se obtiene sumando sobre las posibilidades para n , l y q que deben cumplir con (6.13). Definiendo $N_0 = \frac{1}{2}N = 2n +$

1+3q la dimensión d es dada por

$$d = (k+1)(3k+r) + \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\bar{x}} (N_0 - 6x)(N_0 - 6x + 1) \quad (6.20)$$

donde \bar{x} debe ser tal que la suma no contribuya con términos negativos; k y r están definidos por

$$6k + r = N_0 + 1$$

De (6.20) se encuentra que para $N = 0, 4, 8, 12, 16, 20$ las dimensiones de la matriz (6.14) son $d = 1, 4, 11, 23, 41, 67$, respectivamente.

Los cálculos fueron llevados hasta 20 cuantos fijando $\epsilon = 21$ y utilizando los potenciales propuestos por Tamagaki [24], Tang [25] y Eikemeier-Hackenbroich [26]. Los respectivos parámetros se encuentran en la tabla 4.

El potencial V1 no produjo estado ligado (probablemente debido al carozo muy alto) y el V2 dió cerca de 12% de la energía de amarre experimental. En las figuras 1 y 2, que siguen, se enseñan los resultados para los potenciales V3 y V4.

Nótese que a partir de 8 y 10 cuantos la convergencia se vuelve muy lenta, casi definiendo un plateau. El mismo "plateau" fué observado, también después de los 8 cuantos, en un estudio del deuterón hasta 30 cuantos.

La razón por la cual el "plateau" se presenta bajo puede ser debida a dos causas: el hecho de que nos limitamos a funciones con $\Lambda = 0$ y $f = \{3\}$ (sin mezclas de f's); y el

hecho de que no introducimos correlaciones del carozo repulsivo como, por ejemplo, correlaciones de Jastrow.

POTENCIAL	REFER.	SINGULETE			TRIPLETE		
		V_1 μ_1	V_2 μ_2	V_3 μ_3	V_1 μ_1	V_2 μ_2	V_3 μ_3
V1	24	2000 .447	-270 .942	-5 2.5	2000 .447	-230 .942	-5 2.5
V2	25	1000 .577	-166 1.118	-23 1.581	1000 .577	-326.7 .976	-43 1.291
V3	25	880 .4385	-67.1 1.27	-21 1.6222	1000 .4303	-143.4 1.1043	-43 1.291
V4	26	880 .4303	-70 1.25	-21 1.4434	600 .4264	-70 1.4142	-27.6 1.6223

TABLA 4
(V_i en MeV; μ_i en fm)

Por otro lado, dos puntos nos llevan a creer que la aproximación es buena. Primero, estudiando el factor de forma del átomo de hidrógeno (cuyo hamiltoniano conocemos con razonable seguridad) se ve que podemos acercarnos cuanto querremos del resultado exacto sin aumentar exageradamente el número de cuantos (el ajuste es muy bueno con solo 8 cuantos [27]). En segundo lugar tenemos el ajuste razonable al factor de forma de la partícula α tomando en cuenta apenas 4 cuantos en la función de onda, como veremos.

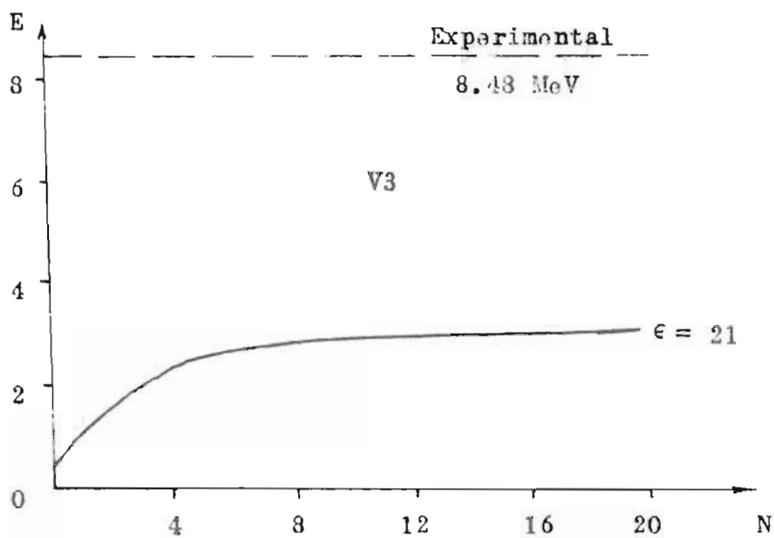


Figura 1

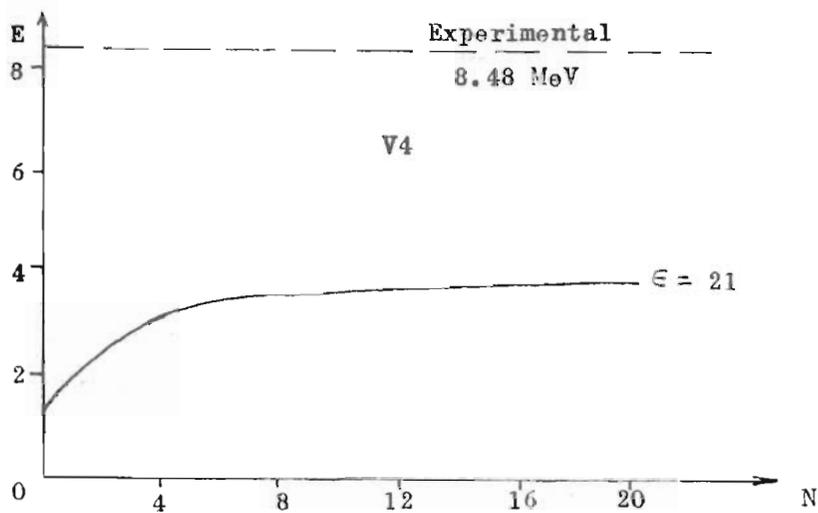


Figura 2

Funciones de Onda para la Partícula α

A continuación vamos a construir las funciones de onda orbitales para un sistema de cuatro nucleones con las características de que sean completamente simétricas (pertencientes a la partición $\{4\}$), con momento angular total nulo y translacionalmente invariantes.

Aplicaremos dichas funciones al cálculo de la energía de amarre y del factor de forma de la partícula α .

Empecemos simplificando la notación. De (5.7) tenemos para estados con

$$|n_1 l_1, n_2 l_2 (\Lambda = l_3); n_3 l_3, 00\rangle \equiv |n_1 l_1, n_2 l_2; n_3 l_3\rangle \quad (6.21)$$

Por otro lado podemos construir el estado

$$|n_1 l_1; n_2 l_2, n_3 l_3\rangle \quad (6.22)$$

acoplando $\vec{\Lambda} (= \vec{l}_2 + \vec{l}_3)$ con \vec{l}_1 ($l_1 = \Lambda$) para obtener λ final igual a 0.

Los estados (6.22) pueden expresarse en términos de estados (6.21), o vice versa, por medio de coeficientes de Racah. Pero el hecho de que $\lambda = 0$ implica que hay solamente un término en la expansión con coeficiente igual a uno, de manera que (6.21) y (6.22) son idénticos entre sí. Utilizaremos la siguiente notación genérica

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle \quad (6.23)$$

donde la ausencia de punto y coma indica que el orden en que hacemos el acoplamiento es irrelevante. Sin embargo es importante hacer notar que el orden en que aparecen los pares $(n_s l_s)$ sí es significativo, el primer par refiriéndose a la primera coordenada \vec{y}_1 , etc.

El operador $\mathcal{P}_{\text{III}}^{(12)}(\text{III}) \equiv \mathcal{P}$ definido en (2.9) tiene la forma

$$\mathcal{P} = \sum dp = (e + d_1 + d_2 + d_3) \sum p \quad (6.24)$$

donde utilizamos la descomposición y notación de (5.12).

De (5.13) tenemos que

$$\begin{aligned} (e + d_1 + d_2 + d_3) |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle = \\ = \left[1 + (-)^{l_2 + l_3} + (-)^{l_1 + l_3} + (-)^{l_1 + l_2} \right] |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle \end{aligned} \quad (6.25)$$

Por otro lado los efectos de (12) y (23) (tomados aquí como los generadores de $S(3)$) son

$$(12) |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle = (-)^{l_1 + l_2 - l_3} |n_2 l_2, n_1 l_1, n_3 l_3\rangle \quad (6.26)$$

$$(23) |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle = (-)^{l_2 + l_3 - l_1} |n_1 l_1, n_3 l_3, n_2 l_2\rangle \quad (6.27)$$

Como las l son enteras vemos que el efecto de una permutación de $S(3)$ sobre (6.23) es permutar los pares $(n_s l_s)$

$s=1,2,3$, dando un factor extra $(-)^{l_1+l_2+l_3}$ si la permutación es impar o ningún factor si es par. Así la aplicación de (6.24) al estado (6.21) conduce a

$$\begin{aligned}
 P |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle &= \left[1 + (-)^{l_2+l_3} + (-)^{l_1+l_3} + (-)^{l_1+l_2} \right] \\
 &\times \left[|n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle + |n_1 l_1, n_3 l_3, n_2 l_2\rangle + |n_2 l_2, n_3 l_3, n_1 l_1\rangle \right. \\
 &\left. + |n_2 l_2, n_1 l_1, n_3 l_3\rangle + |n_3 l_3, n_1 l_1, n_2 l_2\rangle + |n_3 l_3, n_2 l_2, n_1 l_1\rangle \right] \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Para el caso particular del estado base de la partícula α la paridad es positiva. Como la paridad del estado (6.21) es $(-)^{l_1+l_2+l_3}$ concluimos que debemos restringirnos al caso en que $l_1+l_2+l_3$ es par. En otras palabras, o todas las l son pares o dos de ellas son nones. Pero este último caso no nos interesa pues el primer paréntesis cuadrado en (6.28) se anularía. Por lo tanto, en lo que sigue tendremos la terna $(l_1 l_2 l_3)$ del tipo (ppp), de modo que (6.28) queda

$$\begin{aligned}
 |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle_S &\equiv A \left[|n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle + |n_1 l_1, n_3 l_3, n_2 l_2\rangle + \right. \\
 &\left. + |n_2 l_2, n_3 l_3, n_1 l_1\rangle + |n_2 l_2, n_1 l_1, n_3 l_3\rangle + |n_3 l_3, n_1 l_1, n_2 l_2\rangle + |n_3 l_3, n_2 l_2, n_1 l_1\rangle \right] \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

donde el coeficiente de normalización A es $\sqrt{\frac{1}{6}}$ si todos los pares $(n_s l_s)$ son distintos, $\sqrt{1/2}$ si dos cualesquiera son iguales y $1/6$ si todos son iguales.

Hemos construido explícitamente estados de osciladores armónicos no espúreos para un sistema de cuatro partículas que son simétricos bajo intercambio de coordenadas y con momento angular orbital total nulo. Nos falta ahora expresarlos en términos de coordenadas de Jacobi, que, como veremos, son bastante adecuadas tanto para el cálculo de la energía de amarré como del factor de forma. Para esto utilizamos los coeficientes definidos en (5.23) y dados explícitamente en (5.29)

En la notación (6.23) tenemos, para $1 \leq i, j, k \leq 3$

$$\begin{aligned}
 |n_i l_i, n_j l_j, n_k l_k\rangle &= \sum_{\substack{n_a l_a \\ n_b l_b}} \sum_{\substack{n_c l_c \\ \Lambda'}} |n_a l_a, n_b l_b(\Lambda'); n_c l_c, 00\rangle \\
 &\times \langle n_a l_a, n_b l_b(\Lambda'); n_c l_c, 0 | n_i l_i, n_j l_j(l_k); n_k l_k, 0 \rangle \\
 &= \sum_{\substack{n_a l_a \\ n_b l_b}} \sum_{n_c l_c} |n_a l_a, n_b l_b, n_c l_c\rangle \langle n_a l_a, n_b l_b(l_c); n_c l_c, 0 | n_i l_i, n_j l_j(l_k); n_k l_k, 0 \rangle
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

donde otra vez utilizamos el hecho de que $\lambda = 0$ para limitar el valor de Λ' a l_c y simplificar la notación para los kets $| \rangle$ como en (6.23).

De (5.29) resulta

$$\begin{aligned}
 & \langle n_a l_a, n_b l_b(l_c); n_c l_c, 0 | n_i l_i, n_j l_j(l_k); n_k l_k, 0 \rangle = \\
 & = (-)^{l_c} \sqrt{(2l_k+1)(2l_c+1)} \sum_{n l \Lambda''} W(l_a l_b 0 l_c; l_c \Lambda'') W(l_a l 0 l_k; l_k \Lambda'') \\
 & \times (2\Lambda''+1) \langle n_a l_a, n l, l_k | n_i l_i, n_j l_j, l_k \rangle \langle n_b l_b, n_c l_c, \Lambda'' | n l, n_k l_k, \Lambda'' \rangle_{\beta} \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Pero las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 W(l_a l_b 0 l_c; l_c \Lambda'') & = (-)^{l_b - l_c - l_k} W(l_a \Lambda'' l_c l_c; 0 l_b) = [(2l_a+1)(2l_c+1)]^{-1/2} \delta_{l_a \Lambda''} \\
 W(l_a l 0 l_k; l_k \Lambda'') & = [(2l_a+1)(2l_k+1)]^{-1/2} \delta_{l_a \Lambda''}
 \end{aligned}$$

implican que

$$\begin{aligned}
 & \langle n_a l_a, n_b l_b(l_c); n_c l_c, 0 | n_i l_i, n_j l_j(l_k); n_k l_k, 0 \rangle = \\
 & = (-)^{l_c} \sum_{n l} \langle n_a l_a, n l, l_k | n_i l_i, n_j l_j, l_k \rangle \langle n_b l_b, n_c l_c, l_a | n l, n_k l_k, l_a \rangle_{\beta} \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

Finalmente tendremos

$$\begin{aligned}
 |n_i l_i, n_j l_j, n_k l_k \rangle & = \sum_{\substack{n_a l_a \\ n_b l_b}} \sum_{\substack{n_c l_c \\ n l}} |n_a l_a, n_b l_b, n_c l_c \rangle \\
 (-)^{l_c} \langle n_a l_a, n l, l_k | n_i l_i, n_j l_j, l_k \rangle & \langle n_b l_b, n_c l_c, l_a | n l, n_k l_k, l_a \rangle_{\beta} \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

para $1 \leq i, j, k \leq 3$.

Con (6.29) y (6.33) se obtiene un conjunto completo

de funciones de osciladores armónicos para el estado base de la partícula α (la parte orbital completamente simétrica). A continuación discutiremos su energía de amarre hasta 10 cuantos y su factor de forma en la aproximación de 4 cuantos.

Estado Base de la Partícula α para un Hamiltoniano Conocido

Si nos restringimos a fuerzas de dos cuerpos el hamiltoniano más general para un sistema de cuatro nucleones está dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega \sum_{s=1}^4 (\vec{p}_s)^2 + \sum_{s < t=2}^4 V_{st} \quad (6.34)$$

donde \vec{p}_s es el momento lineal (en unidades de $\sqrt{m\hbar\omega}$, recordamos) de la partícula s y V_{st} depende tanto de los momentos y coordenadas relativas como del spin e isospin de las partículas s y t .

En coordenadas de Jacobi (5.1), (5.3) el hamiltoniano intrínseco se escribe como [23]

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega (\vec{p}_d)^2 = \mathcal{H}_0 + \sum_{st} U_{st} \quad (6.35)$$

donde

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega (p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + x_a^2 + x_b^2 + x_c^2) \quad (6.36)$$

y

$$U_{st} = V_{st} - \frac{1}{8} \hbar \omega (\vec{x}_s - \vec{x}_t)^2 \quad (6.37)$$

Consideremos, otra vez, un potencial independiente de spin e isospin de la forma (6.7), es decir,

$$V_{st} = \frac{1}{2} \left[{}^3V(r_{st}) + {}^1V(r_{st}) \right] \quad (6.38)$$

El hamiltoniano (6.35) con respecto a los estados (6.29) tiene elementos de matriz dados por

$$\begin{aligned} & {}_S \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2, n'_3 l'_3 | \mathcal{H}_I | n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3 \rangle_S = \\ & = \hbar\omega \left(N + \frac{9}{2} \right) \delta_{n'_1 n_1} \delta_{l'_1 l_1} \delta_{n'_2 n_2} \delta_{l'_2 l_2} \delta_{n'_3 n_3} \delta_{l'_3 l_3} + \\ & + \sum_{st} {}_S \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2, n'_3 l'_3 | \frac{1}{2} [{}^1V(r_{st}) + {}^3V(r_{st})] - \frac{1}{8} \hbar\omega (\vec{x}_s - \vec{x}_t)^2 | n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3 \rangle_S \end{aligned} \quad (6.39)$$

Vemos entonces que, como en el caso del tritio, aquí también se puede desarrollar un cálculo variacional enteramente en el espacio de configuración donde el estado orbital

$\phi_{A=0, f=\{4\}}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c) \equiv \phi_{O\{4\}}$ puede ser expandido en términos de los estados (6.29) hasta un cierto número de cuantos N dado por

$$N = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 + 2n_3 + l_3 \quad (6.40)$$

i.e.,

$$\phi_{O\{4\}} = \sum a(n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3) |n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3\rangle_S \quad (6.41)$$

La minimización del valor esperado de \mathcal{H}_I con respecto a (6.41), sujeta a la condición adicional de que $\phi_{O\{4\}}$ esté

normalizada a uno, conduce al sistema de ecuaciones lineales [12]

$$\sum_{n_3 l_3} \left(n_1' l_1', n_2' l_2', n_3' l_3' \mid \mathcal{H}_I \mid n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3 \right)_S a(n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3) \\ = E a(n_1' l_1', n_2' l_2', n_3' l_3') \quad (6.42)$$

para los coeficientes a . E es el menor eigenvalor de \mathcal{H}_I .

La matriz en (6.42) puede ser evaluada notando que

- (a) el operador \mathcal{H}_0 , de (6.36), es diagonal en la representación $(n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3)_S$ con eigenvalor $(N + \frac{9}{2}) \hbar \omega$ como indicado en (6.39);
- (b) el operador $\sum U_{st}$, de (6.37), supuesto independiente de carga, puede ser sustituido por $6U_{12}$ pues los estados (6.29) son simétricos y 6 es el número de pares entre 4 nucleones.

Podemos utilizar ahora el desarrollo (6.29) para expresar los elementos de matriz con respecto a los estados $\mid \rangle_S$ en términos de aquellos con respecto a $\mid \rangle$.

Teniendo en cuenta (6.33) y suponiendo que f es una función solamente de la variable adimensional r^2 es fácil ver que

$$\left(n_i' l_i', n_j' l_j', n_k' l_k' \mid f \mid n_i l_i, n_j l_j, n_k l_k \right) = \\ = \delta_{n_i' n_i} \delta_{n_k' n_k} \sum_{n_a l_a} \langle n_a l_a \mid f \mid n_a l_a \rangle \\ \times \sum_{n l} \langle n_a l_a, n l, l_k \mid n_i' l_i', n_j' l_j', l_k \rangle \langle n_a l_a, n l, l_k \mid n_i l_i, n_j l_j, l_k \rangle \quad (6.43)$$

donde utilizamos (3.23) y las relaciones de ortogonalidad de los brashinskets [14].

Los potenciales utilizados son los mismos que en el caso del tritio, o sea, suma de 6 gaussianas (ver tabla 4 en la página 69), de manera que el elemento de matriz reducido que aparece en (6.43) está dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{mc^2} \langle n'_a l'_a || f || n_a l_a \rangle &= \frac{1}{2} \langle n'_a l'_a || \sum_{q=1}^6 v_{0q} \exp[-\frac{2\alpha_q r^2}{\epsilon}] - \frac{\epsilon r^2}{2} || n_a l_a \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=l_a}^{l_a+n'_a+n_a} B(n'_a l'_a, n_a l_a, p) \left[\sum_{q=1}^6 \frac{v_{0q}}{[1+\frac{2\alpha_q}{\epsilon}]^{p+3/2}} - \frac{1}{2} (p+\frac{3}{2}) \epsilon \right] \quad (6.44) \end{aligned}$$

donde utilizamos la notación definida en (6.17).

De (6.39), (6.43) y (6.44) tenemos para los elementos de matriz del hamiltoniano intrínseco la expresión explícita

$$\begin{aligned} \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2, n'_3 l'_3 | h_I | n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3 \rangle_S &= \epsilon (N+\frac{9}{2}) \delta_{n'_1 n_1} \delta_{l'_1 l_1} \delta_{n'_2 n_2} \delta_{l'_2 l_2} \delta_{n'_3 n_3} \delta_{l'_3 l_3} \\ &+ 3 \langle n'_1 l'_1, n'_2 l'_2, n'_3 l'_3 | \sum_{q=1}^6 v_{0q} \exp[-\frac{2\alpha_q r^2}{\epsilon}] - \frac{\epsilon r^2}{2} | n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3 \rangle_S \quad (6.45) \end{aligned}$$

con $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} \langle n'_i l'_i, n'_j l'_j, n'_k l'_k | \sum_{q=1}^6 v_{0q} \exp[-\frac{2\alpha_q r^2}{\epsilon}] - \frac{\epsilon r^2}{2} | n_i l_i, n_j l_j, n_k l_k \rangle &= \\ = \delta_{n'_i n_i} \delta_{l'_i l_i} \delta_{n'_j n_j} \delta_{l'_j l_j} \delta_{n'_k n_k} \delta_{l'_k l_k} \sum_{n_l} \langle n'_a l'_a, n_l l_l | n'_i l'_i, n'_j l'_j, l_l \rangle \langle n_a l_a, n_l l_l | n_i l_i, n_j l_j, l_l \rangle \\ \times \sum_{p=l_a}^{l_a+n'_a+n_a} B(n'_a l'_a, n_a l_a, p) \left[\sum_{q=1}^6 \frac{v_{0q}}{[1+\frac{2\alpha_q}{\epsilon}]^{p+3/2}} - \frac{1}{2} \epsilon (p+\frac{3}{2}) \right] \quad (6.46) \end{aligned}$$

Notemos que las sumas sobre n_a' y l salen sobrando una vez que las condiciones que deben satisfacer los brashinskets implican que

$$n_a' = \frac{1}{2}(2n_i' + l_i' + 2n_j' + l_j' - 2n_i - l_i - 2n_j - l_j) \quad (6.47)$$

y
$$l = 2n_i + l_i + 2n_j + l_j - 2n_a - l_a - 2n$$

donde aprovechamos la presencia de $\delta_{n'_R n_R} \delta_{l'_R l_R}$ para poner $2n'_k + l'_k = 2n_k + l_k$.

Las ecuaciones (6.42) y (6.45) nos darán los coeficientes a de (6.41).

Cálculos hasta 10 cuantos utilizando los potenciales de la tabla 4, pag.69, y fijando $\epsilon=32$, nos condujeron a los siguientes resultados para la energía de amarre de la partícula α .

El potencial de Tamagaki (V1) no produjo estado ligado, como en el caso del tritio, y el V2 (de Tang) dió el 30.3% del valor experimental. En las figuras 3 y 4 se enseñan los resultados para los potenciales V3 (Tang) y V4 (Eikemeier-Hackenbroich).

Nótese, otra vez, la convergencia lenta, cuyas causas probables fueron mencionadas antes (limitación a funciones simétricas en la parte orbital de la función de onda y no introducción de correlaciones tipo Jastrow).

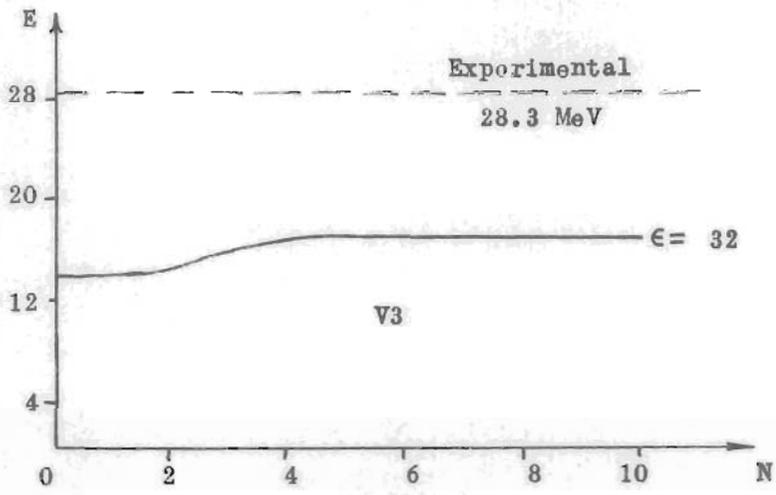


Figura 3

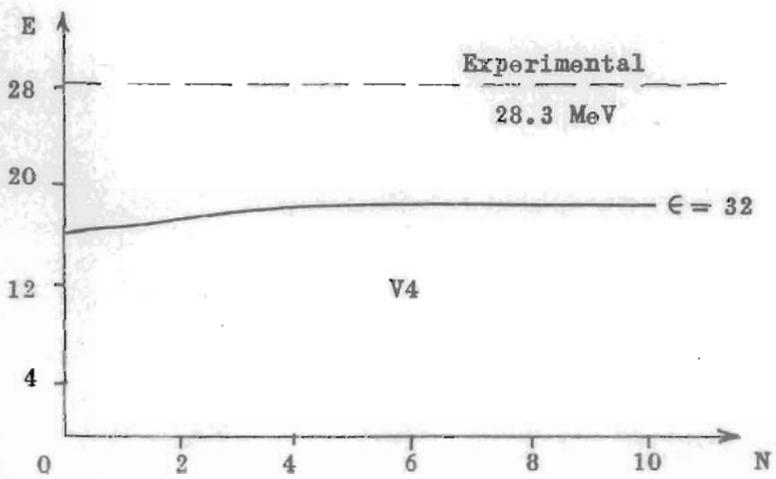


Figura 4

Factor de Forma de la Partícula α

Vamos ahora a discutir los estados simétricos (6.29) con l_1, l_2 y l_3 pares cuando el número total de cuantos (6.40) toma los valores 0, 2 y 4.

Para $N = 0$ todos los números cuánticos deben ser cero y el primer estado, que indicaremos por $|1\rangle$, es

$$|1\rangle \equiv |00,00,00\rangle_S = |00,00,00\rangle \quad (6.48)$$

Para $N = 2$ podemos tener solamente $n_1=1$ y todos los demás números cuánticos nulos y permutaciones de ellos. La posibilidad $l_1=l_2=1$ y todos los demás nulos, y permutaciones de ellos se queda eliminada por la condición de que las l deben ser pares. Así, en dos cuantos, tenemos un solo estado que indicaremos por $|2\rangle$

$$|2\rangle \equiv |10,00,00\rangle_S \quad (6.49)$$

Para $N = 4$ y $(l_1 l_2 l_3) = (ppp)$ tenemos solamente las siguientes posibilidades (exceptuando permutaciones) para los momentos angulares: (000), (200) y (220) donde la segunda debe ser excluida para que podamos tener el momento angular total $\lambda = 0$. Para (000) podemos escoger $n_1=2, n_2=n_3=0$ y permutaciones, o $n_1=n_2=1, n_3=0$ y permutaciones de ellos. Para (220) debemos tomar $n_1=n_2=n_3=0$ para garantizar $N = 4$. Tenemos, por lo tanto, tres posibles estados de 4 cuantos:

$$\begin{aligned}
 |3\rangle &\equiv |20,00,00\rangle_S \\
 |4'\rangle &\equiv |10,10,00\rangle_S \\
 |5'\rangle &\equiv |02,02,00\rangle_S
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Por conveniencia en los cálculos numéricos en lugar de $|4'\rangle$ y $|5'\rangle$ escogemos una transformación ortogonal de ellos definida por

$$\begin{aligned}
 |4\rangle &= \frac{\sqrt{15}}{9} |4'\rangle + \frac{2\sqrt{3}}{9} |5'\rangle \\
 |5\rangle &= \frac{2\sqrt{3}}{9} |4'\rangle - \frac{\sqrt{15}}{9} |5'\rangle
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

El análisis de la sección anterior nos da los estados $|m\rangle$, $m=1,2,3,4,5$ en las coordenadas de Jacobi (5.1):

$$|1\rangle = |00,00,00\rangle \tag{6.52}$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|10,00,00\rangle + |00,10,00\rangle + |00,00,10\rangle] \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}
 |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} [|20,00,00\rangle + |00,20,00\rangle + \frac{2}{3} |00,00,20\rangle] - \frac{\sqrt{10}}{9} |10,01,01\rangle \\
 &+ \frac{\sqrt{10}}{18} [|10,10,00\rangle + 2|00,10,10\rangle + 2|10,00,10\rangle] - \frac{\sqrt{2}}{9} |02,01,01\rangle \\
 &+ \frac{\sqrt{2}}{9} [|02,02,00\rangle + 2|00,02,02\rangle + 2|02,00,02\rangle] + \frac{\sqrt{6}}{9} |00,11,01\rangle
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
 |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{8}} [|20,00,00\rangle + |00,20,00\rangle + \frac{4}{3} |00,00,20\rangle] + \frac{1}{\sqrt{27}} |02,02,00\rangle \\
 &+ \frac{1}{6\sqrt{3}} |10,10,00\rangle + \frac{\sqrt{5}}{27} |10,01,01\rangle + \frac{\sqrt{4}}{27} |02,01,01\rangle - \frac{1}{3} |00,11,01\rangle
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned}
 |5\rangle &= \frac{4}{27} [|10,10,00\rangle + |10,00,10\rangle + |00,10,10\rangle] \\
 &- \frac{\sqrt{5}}{27} [|02,02,00\rangle + |02,00,02\rangle + |00,02,02\rangle]
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

La función orbital para la partícula α en términos de funciones de osciladores armónicos, si nos restringimos a 4 cuantos en la aproximación, será dada por

$$\phi_{0\{4\}}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c) = a_1 |1\rangle + a_2 |2\rangle + a_3 |3\rangle + a_4 |4\rangle + a_5 |5\rangle \quad (6.57)$$

El factor de forma de carga es dado por [12]

$$F_{ch}(\vec{q}) = [f_p(\vec{q}) + f_n(\vec{q})] F(\vec{q}) \quad (6.58)$$

con

$$F(\vec{q}) = F(q^2) = \int \phi_{0\{4\}}^*(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c) \frac{\text{sen } kx_c}{kx_c} \phi_{0\{4\}}(\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c) d\vec{x}_a d\vec{x}_b d\vec{x}_c \quad (6.59)$$

donde

$$\vec{k} = \sqrt{\frac{3\hbar}{4m\omega}} \vec{q}, \quad x_c = |\vec{x}_c| \quad (6.60a, b)$$

y $\hbar\vec{q}$ es el momento transferido.

La suma $f_p + f_n$, de los factores de forma del protón y del neutrón, es conocida experimentalmente [28] de manera que el problema se reduce a una combinación lineal de elementos de matriz del tipo

$$\begin{aligned} & \langle n'_a l'_a, n'_b l'_b, n'_c l'_c | \frac{\text{sen } kx_c}{kx_c} | n_a l_a, n_b l_b, n_c l_c \rangle \\ & = \langle n'_c l'_c | \frac{\text{sen } kx_c}{kx_c} | n_c l_c \rangle \delta_{n'_a n_a} \delta_{l'_a l_a} \delta_{n'_b n_b} \delta_{l'_b l_b} \delta_{n'_c l'_c} \quad (6.61) \end{aligned}$$

Ahora, por un lado tenemos [14] que

$$\begin{aligned} \langle n'l | \frac{\text{sen } kr}{kr} | n'l \rangle & = \int_0^\infty R_{n'l}(r) \frac{\text{sen } kr}{kr} R_{n'l}(r) r^2 dr \\ & = \sum_{p=l}^{l+n'} B(n'l, n'l, p) I_p \left(\frac{\text{sen } kr}{kr} \right) \end{aligned}$$

donde $B(n'l, n'l, p)$ son coeficientes conocidos y tabulados [14], y por el otro, un cálculo directo de la integral de Talmi indicada nos da

$$I_p \left(\frac{\text{sen } \kappa r}{\kappa r} \right) = \frac{1}{2} e^{-\kappa^2/4} \sum_{s=0}^p (2s+1) \left(-\frac{\kappa^2}{4} \right)^{p-s} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{3}{2})} \quad (6.62)$$

La relación entre κ^2 y q^2 está dada por el cuadrado de (6.60a).

Entonces el factor de forma (6.59) se puede obtener de los coeficientes a_m , $m = 1, 2, 3, 4, 5$ de (6.57). Asumiéndolos reales obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} F(\kappa^2) = e^{-\kappa^2/4} \left\{ 1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{6} a_1 a_2 + \frac{1}{9} a_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{9} a_2 a_3 + \frac{2}{9} \sqrt{\frac{5}{6}} a_2 a_4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2}{3}} a_2 a_5 + \frac{2}{9} (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \right] \kappa^2 + \left[\frac{\sqrt{10}}{360} a_1 a_3 + \frac{\sqrt{15}}{180} a_1 a_4 + \frac{1}{72} a_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{135} a_2 a_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{45} \sqrt{\frac{5}{6}} a_2 a_4 + \frac{11}{540} a_3^2 + \frac{11}{270} \sqrt{\frac{2}{3}} a_3 a_4 + \frac{1}{135} \sqrt{\frac{10}{3}} a_3 a_5 + \frac{11}{270} a_4^2 + \frac{1}{54} a_5^2 \right] \kappa^4 - \right. \\ \left. - \left[\frac{\sqrt{5}}{2160} a_2 a_3 + \frac{1}{360} \sqrt{\frac{5}{6}} a_2 a_4 + \frac{1}{1620} a_3^2 + \frac{1}{270} \sqrt{\frac{2}{3}} a_3 a_4 + \frac{1}{270} a_4^2 \right] \kappa^6 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{144} \sqrt{\frac{2}{5}} a_3 + \frac{1}{24\sqrt{15}} a_4 \right]^2 \kappa^8 \right\} \quad (6.63) \end{aligned}$$

Imponiendo la condición de normalización para la función de onda (6.57), $\sum_{m=1}^5 a_m^2 = 1$, tendremos 4 parámetros independientes lo que dificulta un estudio gráfico de la variación de F como función de κ^2 . Recordemos que la frecuencia del oscilador es otro parámetro en el análisis.

La discusión se simplifica si nos restringimos a una

combinación del estado de cero cuanto $|1\rangle$ con uno cualquiera de los otros para dar una ϕ del tipo

$$\phi_{014}^{(m)} = \cos\gamma |1\rangle + \sin\gamma |m\rangle \quad m=2,3,4,5 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.64)$$

Para $m=2,3,4$ obtuvimos efectos de difracción del tipo que aparece en el factor de forma experimental [1] mientras que para $m=5$ no ocurre difracción. El mejor ajuste se obtiene para $m=4$ con $\gamma=-30^\circ$ y -70° como indica la figura, donde comparamos con el experimento los casos $\gamma=-30^\circ$ para $\hbar\omega=33.6$ MeV y $\gamma=-70^\circ$ para $\hbar\omega=37$ MeV. En los dos casos el ajuste es razonable.

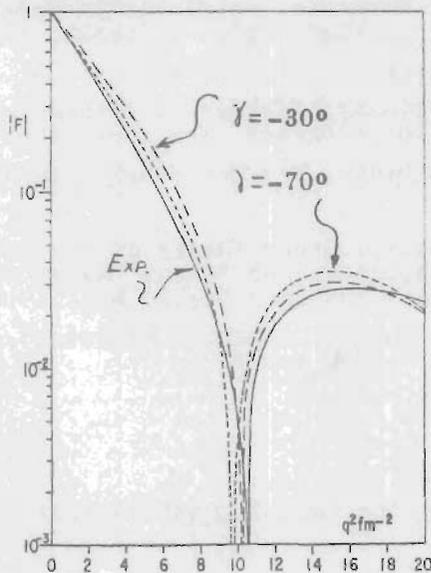


Figura 5

REFERENCIAS

- 1 . R.F.Frosch, J.S.McCarthy, R.E.Rand & M.R.Yearian
Phys.Rev. 160(1067)874
- 2 . P.Kramer & M.Moshinsky, Phys.Letters 23(1966)574
- 3 . G.C.Phillips, seminario de viernes en el Centro Nuclear
de Salazar
- 4 . A.Gal, Ann.Phys.(N.Y.) 49(1968)341
- 5 . M.Hamermesh, "Group Theory", Addison-Wesley, Reading, 1964, p. 200
- 6 . Ref. 5, p. 221
- 7 . E.P.Wigner, "Group Theory", Academic Press, N.Y., 1959, p. 79
- 8 . G.de B.Robinson, "Representation Theory of the Symmetric
Group", University of Toronto Press, 1961, p. 38
- 9 . Ref. 5, p. 198 y Ref. 8, p. 36
- 10 . Ref. 5, p. 219 y Ref. 8, p. 38
- 11 . P.Kramer & M.Moshinsky, Nucl.Phys. 82(1966)241
- 12 . M.Moshinsky, "The Harmonic Oscillator in Modern Physics:
From Atoms to Quarks", Gordon & Breach, 1969
- 13 . M.Moshinsky, Nucl.Phys. 13(1959)104
- 14 . T.A.Brody & M.Moshinsky, "Tables of Transformation
Brackets", Gordon & Breach, New York, 1967
- 15 . M.Moshinsky & T.A.Brody, Rev.Mex.Fis. 9(1960)181 y Ref. 14
- 16 . Ref. 7, p. 105
- 17 . P.Kramer & M.Moshinsky, Group Theory of Harmonic Oscillator
and Nuclear Structure, en "Group Theory and Applications"
(E.M.Loeb1, Ed.), Academic Press, N.Y., 1968, p. 422
- 18 . D.M.Brink & G.R.Satchler, "Angular Momentum", Clarendon
Press, Oxford, 1968, cap. III
- 19 . Ref. 5, p. 103 y Ref. 7, p. 79
- 20 . Ref. 17, p. 384
- 21 . Ref. 7, pp. 58 y 65
- 22 . H.A.Jahn, Proc.Roy.Soc.London 205A(1951)192
- 23 . Ref. 17, p. 435
- 24 . R.Tamagaki, Prog.Theor.Phys. 39(1968)91
- 25 . I.R.Afnan & Y.C.Tang, Phys.Rev. 175(1968)1337
- 26 . H.Eikemeier & H.H.Hackenbroich, Zeits.Phys. 195(1966)412
- 27 . W.W.Yeh, comunicación privada
- 28 . T.Janssens, R.Hofstadter, E.B.Hughes & M.R.Yearian,
Phys.Rev. 142(1966)922