UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

"ALGUNAS APLICACIONES DE LAS FUNCIONES DE GREEN A LA TRANSMISION DE ONDAS ELASTICAS

TESIS

Que para obtener el titulo de

FISICO

presenta

CARLOS JOSE LOZANO MUÑOZ DE COTE

I N D I C E

INTRODUCCION.

Desde principios de siglo el estudio de la estructura de la Tierra por medio del análisis de las ondas sísmicas ha tenido - un continuo desarrollo. En la última década las ondas sísmicas más utilizadas para obtener información de la estructura terrestre han sido las ondas superficiales.

La técnica se basa en el análisis de la distribución de las velocidades de fase y de grupo. (=2= c. IV) Los trabajos publicados sobre el análisis de estructura aplicando esta técnica se han multiplicado grandemente en los últimos años. Sin embargo, sorprende la deficiencia de un estudio teórico completo de las ondas superficiales. No cabe la menor duda de que un estudio completo en este sentido redundará en una ampliación de la técnica de análisis ya que se podrá introducir en ella, como por ejemplo, el estudio de las amplitudes y del espectro de fases.

La presente tesis es parte de un estudio teórico sobre la - transmisión de ondas superficiales en un medio elástico iniciado por HERRERA =5,6,7,8,9= el año pasado. La base de estos trabajos lo constituyen los teoremas de representación integrales de la Elastodinámica.=1,13= Hasta el momento se han analizado - las soluciones asociadas al medio espacio con modificaciones en regiones acotadas =7,8,9,15= utilizando métodos de perturbaciones para obtener soluciones aproximadas.

En nuestro caso trataremos de la dispersión de ondas casi -

estacionarias incidentes sobre una región finita perturbada. La perturbación consistirá en cambios en la frontera consistentes en pequeñas modificaciones en la vertical a lo largo de grandes distancias en la horizontal.

El orden de exposición será el siguiente: En la primera parte presentaremos los teoremas de representación integrales como se han venido desarrollando en la Elastodinámica en los últimos años. En la parte final de esta primera parte se hará el planteamiento del problema de dispersión según esta formulación. Cabe observar que el planteamiento adecuado de los problemas de dispersión solo es posible una vez hecha la extensión a regiones no acotadas de el teorema de representación.

En la segunda parte desarrollaremos un método peculiar de perturbaciones para dar una aproximación de orden cero a dos problemas de dispersión del tipo antes descrito. Es en esta segunda parte donde queda la contribución original de la tesis.

Finalmente deseo expresar mi gratitud al doctor Ismael Herrera por haberme dirigido en la elaboración de este trabajo.

Ciudad Universitaria

México; verano de 1965

C. J. Lozano Muñoz de Cote.

C A P I T U L O I

A N T E C E D E N T E S

Antes de abordar nuestro tema es conveniente establecer cuidadosamente una serie de hechos que, por un lado, nos den las herramientas necesarias para resolver el problema que nos proponemos y, por otro, sitúen a dicho problema dentro de una amplia perspectiva.

Empezaremos por establecer las ecuaciones dinámicas de movimiento.

I.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y CONDICIONES EN LA FRONTERA.

Trataremos el movimiento ondulatorio de pequeña amplitud en un medio elástico que ocupa el medio espacio físico de tres dimensiones constituido por un número finito de capas homogéneas e isotrópicas. Las capas están separadas por superficies a las cuales llamaremos interfases. Atravesando las interfases hallaremos discontinuidad en la densidad y en el tensor elástico. El contacto entre los medios en las interfases supondremos que está rígidamente soldado; i.e. los desplazamientos y los esfuerzos normales a la interfase son continuos.

I.1.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento para un medio homogéneo e isotrópico están dadas por: =16=

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{u}) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = - f_i \qquad \text{(I-1a)}$$

Esta ecuación para desplazamientos $u_i(\underline{x},t)$ casi estacionarios de la forma $\underline{u}(\underline{x}) e^{i\omega t}$ y fuerzas nulas se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{u}) + \rho \omega^2 u_i = 0 \qquad \text{(I-1b)}$$

donde los símbolos utilizados significan:

$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el vector de los desplazamientos.

$\tau_{ij} = C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q}$ es el tensor de los esfuerzos inducido por el desplazamiento $\underline{u}$.

$\underline{f}$ es la densidad de fuerzas de cuerpo.

ρ es la densidad del medio.

$C_{ij,pq} = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{jp}\delta_{iq})$ es el tensor elástico.

λ, μ son los coeficientes de Lamé.

δ_{ij} es la delta de Kronecker.

y además utilizamos la notación indicial: $i = 1,2,3$; índices repetidos indican suma.

I.1.2 ONDAS P Y S.

Vamos a analizar algunos tipos de ondas compatibles con las ecuaciones de movimiento (I-1). Para analizar esto escribamos las ecuaciones de movimiento, sin fuerzas de cuerpo, en -

términos del desplazamiento:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

y proponemos que la solución pueda escribirse:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi + \varepsilon_{ilm}\frac{\partial}{\partial x_l}\Psi_m$$

donde Φ es un potencial escalar, Ψ_k un potencial vectorial y ε_{ijk} es el tensor unitario completamente antisimétrico. Substituyendo la solución propuesta, agrupando convenientemente y observando que:

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

podemos escribir las ecuaciones de movimiento como:

$$\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\} +$$

$$\left\{\lambda\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\left\{\varepsilon_{ipq}\frac{\partial \Psi_q}{\partial x_p}\right\} = 0$$

Si el desplazamiento es tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u_i = 0$$

i.e. divergencia nula o sea no hay cambios en el volumen; las ecuaciones de movimiento quedan expresadas como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi_i = 0$$

donde

$$\beta = \left\{\frac{\mu}{\rho}\right\}^{1/2}$$

Esta ecuación la identificamos como la ecuación de ondas -

que viajan con una velocidad β y, por la condición prescrita anteriormente, las ondas son equivoluminales.

Ahora bien, si el desplazamiento es tal que:

$$\varepsilon_{lmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} = 0$$

i.e. para movimiento irrotacional $\Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} = 0$; y tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0$$

donde

$$\alpha = \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right\}^{1/2}$$

lo cual expresa el movimiento de ondas con velocidad α e irrotacionales.

A las ondas equivoluminales se les llama genéricamente ondas S (shake), a la componente vertical SV y a las componentes horizontales SH; en cambio, a las ondas irrotacionales se les llama P (push).

La solución en ondas planas de las ecuaciones homogéneas para ϕ, ψ_k conducen a tres tipos de ondas independientes P, SV y SH (=2= pp. 11-12) los cuales se observan en el fenómeno sísmico. Es de notarse que entre estos tipos de ondas se establecen interacciones en la frontera (=2= c. II 1,2; c. III 1) lo que hace a los problemas de Elastodinámica de una naturaleza complicada.

Parte de las ondas emitidas por las fuentes queda confinada a la superficie. A este tipo de ondas las llamaremos ondas superficiales.

Otra parte se propaga fuertemente hacia el interior del me dio espacio, teniendo, por tanto, en puntos cercanos a la superficie un decaimiento rápido. A este tipo de ondas las llamaremos ondas de cuerpo. En la siguiente sección damos una definición precisa de onda superficial.

I.1.3 ONDAS SUPERFICIALES.

A las soluciones de (I-1) para el medio espacio tales que satisfacen las condiciones en la frontera:

$$\tau_{ij}(\underline{u})n_j = 0 \quad \text{en la superficie libre} \qquad \text{(I-2)}$$

$$\left.\begin{array}{r} [\underline{u}]=0 \\ n_j[\tau_{ij}(\underline{u})]=0 \end{array}\right\} \text{en las interfases} \qquad \text{(I-3)}$$

donde n_j en (I-2) es la normal a la superficie libre y en (I-3) es la normal a las interfases y, además, estas mismas soluciones satisfacen las condiciones:

$$\int_{x_3^0}^{\infty} |\underline{u}|\, dx_3 < M \qquad \text{(I-4a)}$$

$$\int_{x_3^0}^{\infty} |\tau_{ij}(\underline{u})|\, dx_3 < M \qquad \text{(I-4b)}$$

donde $x_3 = x_3^0$ es la superficie libre y M es un número positivo; las llamaremos ondas superficiales.

Para el caso casi estacionario, supuesta como dirección de propagación el eje x_1, las soluciones de (I-1b,2,3) son del tipo:

$$u_k(x_3)e^{ikx_1 - i\omega t}$$

A las ondas casi estacionarias para las cuales u_k satisface (I-4) las llamaremos ondas superficiales casi estacionarias.

En lo que sigue, al referirnos a ondas superficiales entenderemos que hablamos de estas últimas.

Las ondas superficiales aparecen en el fenómenos sísmico -

recibiendo, según sus características, diversos nombres como - ondas de Raleigh, Stoneley, Love etc. Debido a su importancia en el estudio de la estructura terrestre, pasaremos a describir con cierto detalle a las ondas de Love.

I.1.4 ONDAS SUPERFICIALES DE LOVE.

Love en 1911 dió la explicación correcta de las componentes transversales que se registraban en los sismógrafos horizontales de largo periodo en la parte llamada "temblor principal". Estas ondas eran ondas horizontales polarizadas SH, atrapadas en una capa superficial y propagadas por reflexiones múltiples. A este tipo de ondas sísmicas se les llama ondas de Love.

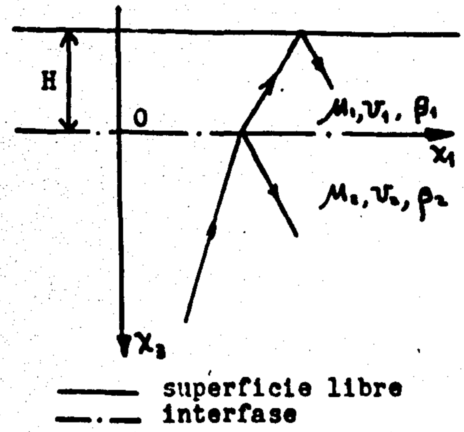


Figura 1 Ondas de love.

Con los cambios de notación - convenientes seguiremos la deducción de Love. =14=

Consideremos al medio espacio cubierto por una capa homogénea e isotrópica de espesor uniforme H. En la interfase suponemos que los medios están soldados rigidamente. Colocado el origen de coordenadas en la interfase sea Ox_1, Ox_2 las coordenadas mutuamente perpendiculares contenidas en la interfase y Ox_3 la coordenada vertical, positiva hacia abajo, como lo muestra la figura 1.

Denotemos por μ_1, β_1 y μ_2, β_2 a los coeficientes de Lamé y a las velocidades de la capa y el medio espacio respectivamente.

Asumamos $u_1 = u_3 = 0$ y a u_2 independiente de x_2 y, denotemos como v_1 y v_2 al desplazamiento u_2 en la capa superficial y en el medio espacio respectivamente.

Si v_1 y v_2 son soluciones casi estacionarias, entonces, las ecuaciones de movimiento que satisfacen están dadas por:

$$\left\{\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{\beta_1}\right)^2\right\} v_1 = 0 \qquad 0 \leq x_3 \leq -H \qquad \text{(I-5a)}$$

$$\left\{\nabla^2 + \left(\frac{\omega}{\beta_2}\right)^2\right\} v_2 = 0 \qquad x_3 \geq 0 \qquad \text{(I-5b)}$$

Supongamos a v_1 y v_2 del tipo:

$$v_1 = f_1(x_3)\exp\langle ikx_1 - i\omega t\rangle$$

$$v_2 = f_2(x_3)\exp\langle ikx_1 - i\omega t\rangle$$

substituyendo en (I-5) f_1 y f_2 satisfacen la ecuación diferencial

$$f_i'' + \left(\frac{\omega^2}{\beta_i^2} - k^2\right) f_i = 0 \qquad i = 1,2.$$

cuya solución general es una combinación lineal de:

$$\exp\left\langle \pm i\left(\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2\right)^{1/2} x_3\right\rangle$$

Definamos:

$$\sigma = \left(\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2\right)^{1/2}$$

$$\sigma' = i\left(\frac{\omega^2}{\beta_2^2} + k^2\right)^{1/2}$$

la solución general de (I-5) quedará expresada por:

$$v_1 = \left(Ae^{i\sigma x_3} + Be^{-i\sigma x_3}\right)\exp\langle ikx_1 - i\omega t\rangle$$

$$v_2 = \left(Ce^{i\sigma' x_3} + De^{-i\sigma' x_3}\right)\exp\langle ikx_1 - i\omega t\rangle$$

Dado que deseamos que las ondas estén confinadas a la capa superficial hacemos a $i\sigma'<0, D=0$. La desigualdad implica que la velocidad aparente es menor que β_2.

$$c = \frac{\omega}{k} < \beta_2$$

Las dos soluciones se acoplan a través de las condiciones en la frontera. De que $x_3=-H$ sea superficie libre se sigue - que el esfuerzo normal sea nulo; i.e.

$$\tau_{32} = 0 \qquad \text{en } x_3 = -H \tag{I-2}$$

por tanto:

$$Ae^{-i\sigma H} - Be^{i\sigma H} = 0 \tag{I-2'}$$

Se ha mencionado que en la interfase los dos medios están soldados rigidamente; esto implica, por una parte, que los desplazamientos son continuos; i.e.

$$v_1 = v_2 = 0 \qquad \text{en } x_3 = 0 \tag{I-3a}$$

por tanto:

$$A + B = C. \tag{I-3a'}$$

y, por otra parte, que los esfuerzos normales son continuos:

$$\tau_{32}(v_1) = \tau_{32}(v_2) \qquad ; \text{en } x_3 = 0 \tag{I-3b}$$

por tanto:

$$\mu_1\sigma(A-B) = \mu_2\sigma' C. \tag{I-3b'}$$

Las ecuaciones (I-2',3') nos sirven para evaluar los coeficientes. Ahora bien, dado que las ecuaciones son homogéneas -- tendrán soluciones distintas de la trivial si:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-i\sigma H} & -e^{i\sigma H} & 0 \\ \mu_1\sigma & -\mu_1\sigma & -\mu_2\sigma' \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

donde supuesta fija ω la ecuación anterior será válida solo para valores discretos de σ, σ' y $\kappa > 0$, a los cuales denotaremos por: $\sigma_m, \sigma'_m, \kappa_m$. Una forma conveniente de v_1, v_2 está dada por:

$$v_1^{(m)} = B_m\left(e^{2i\sigma_m H}\, e^{i\sigma_m x_3} + e^{-i\sigma_m x_3}\right) \exp\langle i\kappa_m x_1 - i\omega t\rangle.$$

$$v_2^{(m)} = B_m\left(1 + e^{2i\sigma_m H}\right) e^{-|\sigma'_m| x_3} \exp\langle i\kappa_m x_1 - i\omega t\rangle.$$

Denotando:

$$U_2^{(m)} = \begin{cases} B_m\left(e^{2i\sigma_m H}\, e^{i\sigma_m x_3} + e^{-i\sigma_m x_3}\right) \\ B_m\left(1 + e^{2i\sigma_m H}\right) e^{-|\sigma'_m| x_3} \end{cases}$$

podemos identificar la forma explícita de $U_2^{(m)}$ para las ondas de Love definida en la sección I.3.4.

I.1.5 CONDICIONES EN LA FRONTERA.

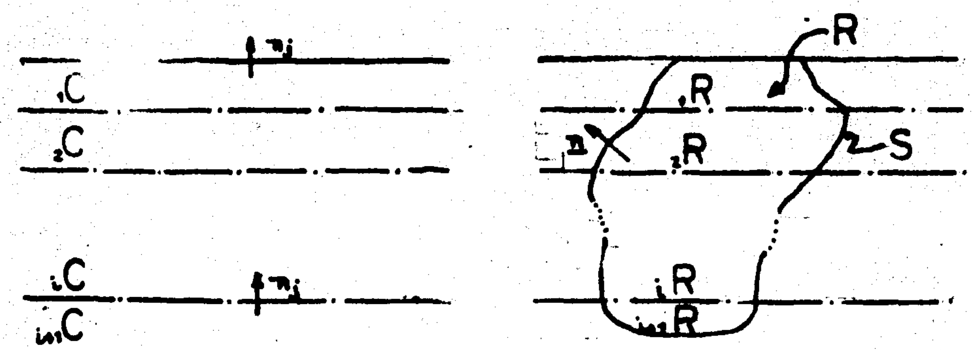
Analiticamente la condición de que la frontera del medio - espacio sea libre de esfuerzos normales se expresa por la ecuación

$$n_j\, \tau_{ij}(u) = 0 \quad \text{en la superficie libre (I-6)}$$

y, la condición de que los esfuerzos normales, así como los - desplazamientos, sean continuos en las interfases se expresa - por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} n_j[\tau_{ij}(\underline{u})] &= 0 \\ [\underline{u}] &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ en las interfases} \qquad \text{(I-7)}$$

donde si denotamos por un índice a la izquierda $\alpha=1 \ldots N$ cada una de las capas (ver figura 2a), n_j es la normal a la interfase apuntando hacia la capa de índice más bajo y, $[f]$ indica el salto de f al pasar de la capa $\alpha=i$ a la capa $\alpha=i+1$.



(a) Medio espacio con capas paralelas

(b) Región R contenida en el medio espacio

Figura 2

I.2 TEOREMA DE RECIPROCIDAD =1=

Dadas dos soluciones u_i y v_i de (I-1a) con fuerzas de cuerpo f_i y g_i que satisfacen las condiciones en la frontera (I-7) y de clase C^2 en un dominio normal =4= contenida en el medio espacio, con frontera S, entonces:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\iint_S \{v_i\,\tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\,\tau_{ij}(\underline{v})\}\, n_j\, dS\, dt =$$

$$\rho\iint_V \left\{v_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\right\}_{\tau_1}^{\tau_2} dV - \iint_V\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f_i v_i - g_i u_i)\, dV\, dt. \qquad \text{(I-8)}$$

Demostración.- Multiplicando (I-1a) por v_i tenemos para cual--

quiera de las capas: $v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{u}) - \rho v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -v_i f_i$

dado que v_i satisface (I-1a) intercambiando u_i, f_i por v_i, g_i respectivamente y, restando ambas expresiones tenemos:

$$v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{v}) - \rho \frac{\partial}{\partial t}\left\{ v_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \right\} = -(f_i v_i - g_i u_i) \qquad \text{(I-9)}$$

Usando la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v}) \right\} = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} C_{ijpq} \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \right] + \left\{ v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}(\underline{v}) \right\} \qquad \text{(I-10)}$$

y la simetría del tensor elástico $C_{ijpq} = C_{pq,ij}$ el primer término del lado derecho de (I-10) se anula obteniéndose la ecuación equivalente a (I-9):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v}) \right\} - \rho \frac{\partial}{\partial t}\left\{ v_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} \right\} = -(f_i v_i - g_i u_i) \qquad \text{(I-11)}$$

Integrando el primer término del lado izquierdo sobre R y, expandiendo la integral en las integrales sobre las subregiones de R asociadas a cada capa (ver figura 2b) tenemos:

$$\int_R \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v}) \right] dV = \sum_\alpha \int_{{}_\alpha R} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[{}_\alpha v_i \, {}_\alpha \tau_{ij}(\underline{u}) - {}_\alpha u_i \, {}_\alpha \tau_{ij}(\underline{v}) \right] dV \qquad \text{(I-12)}$$

Aplicando el teorema de la divergencia a cada subregión y, notando que las integrales en las interfases pueden escribirse como:

$$\int_I \left\{ {}_{\alpha+1} v_i \, {}_{\alpha+1} \tau_{ij}(\underline{u}) - {}_\alpha v_i \, {}_\alpha \tau_{ij}(\underline{u}) - \left({}_{\alpha+1} u_i \, {}_{\alpha+1} \tau_{ij}(\underline{v}) - {}_\alpha u_i \, {}_\alpha \tau_{ij}(\underline{v}) \right) \right\} n_j \, dS$$

$$= \int_I \left\{ [v_i] \, {}_{\alpha+1} \tau_{ij}(\underline{u}) + {}_\alpha v_i \left[\tau_{ij}(\underline{u}) \right] - \left([\underline{u}] \, {}_{\alpha+1} \tau_{ij}(\underline{v}) + {}_\alpha u \left[\tau_{ij}(\underline{v}) \right] \right) \right\} n_j \, dS. \qquad \text{(I-13)}$$

Las soluciones que consideramos satisfacen las condiciones en la frontera (I-7) por tanto de (I-13) se sigue:

$$\int_R \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\right\} dV = \iint_S \left\{v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\right\} n_j dS. \qquad \text{(I-14)}$$

Integrando ahora la ecuación (I-11) sobre R y posteriormente sobre t de τ_1 a τ_2 tenemos finalmente:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\iint_S \left\{v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\right\} n_j dS\, dt =$$

$$\rho \int_V \left[v_i \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} dV - \int_V\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f_i v_i - g_i u_i)\, dt\, dV. \qquad \text{(I-15)}$$

En el caso particular de soluciones para el caso casi estacionario; i.e. del tipo $u(\underline{x})e^{i\omega t}$ el teorema de reciprocidad se le conoce con el nombre de teorema de Betti =13= y queda expresado como:

$$\iint_S \left\{v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\right\} n_j\, dS = 0 \qquad \text{(I-16)}$$

donde $\underline{u}, \underline{v}$ dependen solo de x_i y hemos supuesto que las fuerzas de cuerpo se anulan.

Una aplicación particular del teorema de Betti nos será de utilidad posteriormente. Sean u_i, v_i ondas casi estacionarias y superficiales en el medio espacio con superficie libre y capas paralelas, tales que avanzan en el sentido horizontal x, y, sea R una región acotada descrita por: (ver figura 3)

$$R_1 = \left\{ \underline{x} \mid x_1 \in [a,b]\,;\, x_2 \in [-L,L]\,;\, x_3 \in [0,h] \right\}$$

Aplicando el teorema de Betti tenemos:

$$\int_S \{v_i \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\} n_j\, dS = 2L\left\{ \int_0^h \{v_i \tau_{i1}(\underline{u}) - u_i \tau_{i1}(\underline{v})\}_{x_1=b} dx_3 \right.$$

$$\left. - \int_0^h \{v_i \tau_{i1}(\underline{u}) - u_i \tau_{i1}(\underline{v})\}_{x_1=a} dx_3 + \int_a^b \{v_i \tau_{i3}(\underline{u}) - u_i \tau_{i3}(\underline{v})\}_{x_3=h} dx_1 \right\} = 0$$

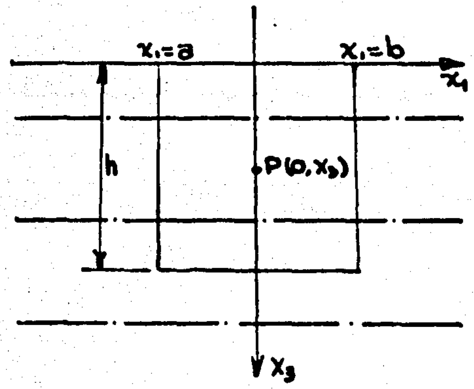


Figura 3. Geometría de R

donde utilizamos el hecho de que los desplazamientos y esfuerzos no dependen de la coordenada

Si $h \to \infty$ las dos primeras integrales de la derecha por (I-4) - son acotadas. La tercera integral es nula, pues los integrandos van a cero cuando $h \to \infty$ y la longitud de integración es finita. Por tanto

$$\int_0^\infty \{v_i \tau_{i1}(\underline{u}) - u_i \tau_{i1}(\underline{v})\}_{x_1=a} dx_3 = \int_0^\infty \{v_i \tau_{i1}(\underline{u}) - u_i \tau_{i1}(\underline{v})\}_{x_1=b} dx_3$$

Como a y b son arbitrarios esta ecuación implica que la integral (I-17) es independiente de a, b; por tanto, depende solo de u_i y v_i.

$$\int_0^\infty \{v_i \tau_{i1}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{v})\} dx_3 \qquad \text{(I-17)}$$

I.3 FUNCION DE GREEN.

Adoptaremos en esta sección un punto de vista heurístico -

dejando de lado toda discusión referente a la existencia de las funciones de Green. Llamaremos función de Green a cualquier familia $G_{ki}(x,\xi,t,\tau)$ de soluciones dependiente de los parámetros ξ, τ y del índice K, tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijpq} \frac{\partial}{\partial x_q} G_{kp}(\underline{x},\underline{\xi},t-\tau)\right) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{ki} = -\delta_{ik}\,\delta(\underline{x}-\underline{\xi},t-\tau). \tag{I-18}$$

y

$$\left.\begin{array}{r} n_j\left[\tau_{ij}(\underline{G}_k)\right] = 0 \\ \left[\underline{G}_k\right] = 0 \end{array}\right\} \text{en las interfases} \tag{I-19}$$

donde $\underline{G}_k = (G_{k1}, G_{k2}, G_{k3})$. Estas funciones tienen la interpretación física de corresponder a movimientos con un impulso unitario concentrado actuando en la dirección K, en el punto ξ en el tiempo τ.

Para problemas casi estacionarios, llamamos función de Green a cualquier familia de funciones $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ dependiente del parámetro vectorial $\underline{\xi}$ y del índice K, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijpq} \frac{\partial}{\partial x_q} G_{kp}(\underline{x},\underline{\xi})\right) + \rho\,\omega^2 G_{ki} = -\delta_{ik}\,\delta(\underline{x}-\underline{\xi}). \tag{I-20}$$

$$\left.\begin{array}{r} n_j\left[\tau_{ij}(\underline{G}_k)\right] = 0 \\ \left[\underline{G}_k\right] = 0 \end{array}\right\} \text{en las interfases} \tag{I-21}$$

Posteriormente en algunas ocasiones consideraremos un medio espacio con superficie libre plana e interfases paralelas a la superficie libre. En este caso a la función de Green le exigiremos además que satisfaga

$$n_j \tau_{ij}(\underline{G}_k)=0 \qquad \text{(I-22)}$$

en la superficie libre.

Observe que aún la condición (I-22) no basta para determinar a la función de Green de una manera única porque existen soluciones (las ondas superficiales, por ejemplo) que satisfacen la ecuación homogénea asociada a (I-20) y las ecuaciones (I-21, 22). Si a una función de Green que satisface (I-21,22,20) le sumamos una de estas soluciones la nueva función también satisface (I-20,21,22).

I.3.1 FUNCION DE GREEN PARA RADIACION EMITIDA.

Hay una función de Green a la que se le puede asignar un significado físico especial. Sea $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi},t-\tau)$ el desplazamiento del medio espacio en la dirección i, observado en el punto $\underline{x}$ en el tiempo t, producido por un impulso unitario concentrado en la dirección K aplicado en el punto $\underline{\xi}$ al medio en reposo en el tiempo τ.

La función $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi},t-\tau)$ representa las ondas emitidas por una fuente situada en $\underline{\xi}$ al tiempo τ.

Para problemas casi estacionarios definimos la función de Green para radiación emitida por

$$G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})=\int_{-\infty}^{+\infty} G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi},t)\,e^{i\omega t}dt \qquad \text{(I-23)}$$

Es fácil ver que, para cada ω, esta función es una función de Green para problemas casi estacionarios. Le llamaremos función de Green para radiación emitida.

I.3.2 LA SIMETRIA DE LA FUNCION DE GREEN PARA RADIACION - EMITIDA.

Demostraremos que la función de Green G_{ki} dada por (I-23) para problemas casi estacionarios correspondientes a emisión, - necesariamente satisface la simetría siguiente:

$$G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) = G_{ik}(\underline{\xi},\underline{x}) \tag{I-24}$$

Demostración.- Para cualquier $t'>0$ definamos

$$G^{+}_{ki}(\underline{x},\underline{\eta},t) = G_{ki}(\underline{x},\underline{\eta},t'-t). \tag{I-25}$$

donde $G_{ki}(\underline{x},\underline{\eta},t'-t)$ es la función de Green para emisión considerada anteriormente de manera que G^{+}_{ki} es nula para $t>t'$ y satisface:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{C_{ijpq}\frac{\partial G^{+}_{\ell p}}{\partial x_q}(x,\eta,t)\right\} - \rho\frac{\partial^2 G^{+}_{\ell i}}{\partial t^2} = -\delta_{i\ell}\,\delta(\underline{x}-\underline{\eta};t'-t) \tag{I-26}$$

Multiplicando esta ecuación por $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi},t)$ y (I-18) por $G^{+}_{\ell i}(\underline{x},\underline{\eta},t)$ restando y utilizando la simetría del tensor elástico

$$C_{ij,pq} = C_{pq,ij}$$

obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{G^{+}_{\ell i}(\underline{x},\underline{\eta},t)\,\tau_{ij}(\underline{G}_k) - G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi},t)\,\tau_{ij}(\underline{G}^{+}_{\ell})\right\}$$

$$-\rho\frac{\partial}{\partial t}\left\{G^{+}_{\ell i}\frac{\partial G_{ki}}{\partial t} - G_{ki}\frac{\partial G^{+}_{\ell i}}{\partial t}\right\} = -G^{+}_{\ell k}(\underline{x},\underline{\eta},t)\,\delta(t)\,\delta(\underline{x}-\underline{\xi})$$

$$+\,G_{k\ell}(\underline{x},\underline{\xi},t)\,\delta(t'-t)\,\delta(\underline{x}-\underline{\eta}) \tag{I-27}$$

Integrando sobre una región R tal que contenga en su interior los puntos ξ y η y limitada por una frontera consistente en dos porciones; una formada por la superficie libre y la otra por una superficie tal que al tiempo t no haya sido aún perturbada, obtenemos:

$$\int_R \frac{\partial}{\partial t}\left\{ G^+_{li} \frac{\partial G_{ki}}{\partial t} - G_{ki} \frac{\partial G^+_{li}}{\partial t} \right\} d\underline{x} =$$

$$G_{kl}(\eta,\xi,t)\,\delta(t'-t) - G^+_{lk}(\xi,\eta,t)\,\delta(t) \qquad \text{(I-28)}$$

Integrando ahora sobre todos los valores de t obtenemos:

$$\int_R \left[G^+_{li} \frac{\partial G_{ki}}{\partial t} - G_{ki} \frac{\partial G_{li}}{\partial t} \right]_{-\infty}^{+\infty} d\underline{x} = - G^+_{lk}(\xi,\eta,0) + G_{kl}(\eta,\xi,t')$$

(I-29)

El integrando es nulo pues, para $t=\infty$, G^+_{li} y su derivada y, para $t=-\infty$, G_{ki} y su derivada son idénticamente nulas, por tanto:

$$G^+_{lk}(\xi,\eta,0) = G_{kl}(\eta,\xi,t')$$

Ahora bien, usando la definición (I-25):

$$G_{lk}(\xi,\eta,t') = G_{kl}(\eta,\xi,t')$$

donde esta relación es válida para toda $t'>0$. De (I-23) se sigue que para la función de Green en el caso casi estacionario

$$G_{ki}(\underline{x},\xi) = G_{ik}(\xi,\underline{x}) \qquad \text{(I-24)}$$

I.3.3 UNA RELACION DERIVADA DEL TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

Con frecuencia haremos uso de la relación

$$\int_S \left\{ G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{x} = 0 \qquad \underline{\xi} \notin R \qquad \text{(I-30)}$$

que es válida cuando $\underline{u}(\underline{x})$ es una solución de las ecuaciones de movimiento para problemas casi estacionarios sin fuerzas de - - cuerpo, en la región R cuya frontera es S.

Esta relación se deduce del teorema de reciprocidad (I-16) observando que cuando $\underline{\xi} \notin R$, $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ para cada K satisface las - ecuaciones de movimiento con fuerzas de cuerpo nulas.

I.3.4 RELACIONES DE ORTOGONALIDAD PARA ONDAS SUPERFICIALES.

La función de Green que usaremos en la solución de nuestros problemas será la asociada al medio espacio de N-capas paralelas en el dominio de frecuencias. Antes de obtener las contribuciones de las ondas superficiales a esta función de Green es conveniente establecer una relación de ortogonalidad de las ondas superficiales. =5=

Cuando la dirección de propagación de estas ondas es el eje x_1, la parte espacial puede escribirse en la forma:

$$U_i^{(n)}(x_3)\, e^{i k_n x_1} \quad ; \quad k_n > 0 \qquad \text{(I-31)}$$

donde el índice n indica el modo n-ésimo de propagación y aquí como en lo que sigue la repetición de los índices n ó m no indica suma.

La matriz de esfuerzos asociada con los desplazamientos - - (I-31) está dada por

$$T_{ij}^{(n)}(x_3)\, e^{i k_n x_1} \qquad \text{(I-32)}$$

donde $T_{ij}^{(n)}(x_3)$ depende de x_3 solamente. Como los coeficientes de la ecuación diferencial (I-1b) son reales, los complejos conjugados de (I-32)

$$U_i^{*(n)}(x_3)\, e^{-i k_n x_1} \qquad \text{(I-33)}$$

también son ondas superficiales. La matriz de esfuerzos correspondiente es

$$T_{ij}^{*(n)}(x_3)\, e^{-i k_n x_1} \qquad \text{(I-34)}$$

Usando la ecuación (I-17) se puede obtener una relación de ortogonalidad =5=, para ondas superficiales. Tomando dos soluciones, una de la forma (I-31) y otra de la forma (I-33) y substituyendo en (I-17) se obtiene, usando (I-32,34), que:

$$e^{i(k_n - k_m)x_1} \int_0^\infty \left\{ U_i^{*(m)} T_{i1}^{(n)} - U_i^{(n)} T_{i1}^{*(m)} \right\} dx_3$$

es independiente de x_1. Por lo mismo, si $k_n \neq k_m$:

$$\int_0^\infty \left\{ U_i^{*(m)} T_{i1}^{(n)} - U_i^{(n)} T_{i1}^{*(m)} \right\} dx_3 = 0 \qquad \text{(I-35a)}$$

Usando los teoremas de representación se puede probar =5= que:

$$J_m = \int_0^\infty \left\{ U_i^{*(m)} T_{i1}^{(m)} - U_i^{(m)} T_{i1}^{*(m)} \right\} dx_3 \neq 0 \qquad \text{(I-35b)}$$

y por lo mismo

$$J_m^{-1} \int_0^\infty \left\{ U_i^{*(m)} T_{i1}^{(n)} - U_i^{(n)} T_{i1}^{*(m)} \right\} dx_3 = \delta_{mn} \qquad \text{(I-36)}$$

Ahora bien, tomando dos soluciones de la forma (I-31) y - substituyendo en (I-17) obtenemos que:

$$e^{i(k_n+k_m)x_1}\int_0^\infty \left\{U_i^{(n)}T_{i1}^{(m)}-U_i^{(m)}T_{i1}^{(n)}\right\}dx_3$$

es independiente de x_1. Por lo mismo:

$$\int_0^\infty \left\{U_i^{(m)}T_{i1}^{(n)}-U_i^{(n)}T_{i1}^{(m)}\right\}dx_3=0 \qquad \text{(I-37)}$$

I.3.5 FUNCION DE GREEN PARA RADIACION EMITIDA EN EL MEDIO ESPACIO DE N-CAPAS PARALELAS.

Los métodos tradicionales para la obtención de la función de Green se basan en el uso de expresiones integrales defini-- das en el campo complejo. La contribución de los residuos de - las integrales dan las ondas superficiales de la función de - Green. =3=

Un método más sencillo y directo que es aplicable cuando - se desea obtener solamente la contribución de las ondas superficiales a la función de Green ha sido propuesto recientemente. =5= Se basa en los teoremas de representación y las relaciones de ortogonalidad que acabamos de obtener.

A toda función de Green $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ definida para el - medio espacio podemos separarla en dos partes. Una parte tomará cuenta de las ondas superficiales, llamémosla $S_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$; la otra parte dará las contribuciones de las ondas de cuerpo , llamémosla $B_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$.

$$G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) = S_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) + B_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) \qquad \text{(I-38)}$$

Para obtener la forma explícita de las contribuciones por ondas superficiales a la función de Green, asumamos que la fuente está colocada en algún punto P del eje x_3 (ver figura 3) entonces:

$$G_{ki}(\underline{x};0,\xi_3)=B_{ki}(\underline{x};0,\xi_3)+S_{ki}(\underline{x};0,\xi_3) \tag{I-39}$$

En general, las contribuciones a la derecha e izquierda de la fuente serán combinaciones lineales de ondas salientes y entrantes en todos los modos de propagación, por tanto podemos escribir:

$$\underline{S}_k(\underline{x};0,\xi_3)=\begin{cases}\sum_n a_{nk}\,\underline{U}^{(n)}(x_3)\,e^{ik_nx_1}+\sum_n b_{nk}\,\underline{U}^{*(n)}(x_3)\,e^{-ik_nx_1} & ;x_1>0\\ \sum_n c_{nk}\,\underline{U}^{(n)}(x_3)\,e^{ik_nx_1}+\sum_n d_{nk}\,\underline{U}^{*(n)}(x_3)\,e^{-ik_nx_1} & ;x_1<0\end{cases} \tag{I-40}$$

Añadiendo una solución regular a (I-40) la función $\underline{G}_k$ sigue siendo función de Green. Así, eligiendo como solución regular a la combinación lineal de ondas superficiales:

$$-\sum_n b_{nk}\,\underline{U}^{*(n)}(x_3)\,e^{-ik_nx_1}-\sum c_{nk}\,\underline{U}^{(n)}(x_3)\,e^{ik_nx_1}$$

obtenemos ahora, para $\underline{S}_k$ la expresión más simétrica:

$$\underline{S}_k(\underline{x};0,\xi_3)=\begin{cases}\sum_n A_{nk}\,\underline{U}^{(n)}(x_3)\,e^{ik_nx_1} & ;\ x_1>0\\ \sum C_{nk}\,\underline{U}^{*(n)}(x_3)\,e^{-ik_nx_1} & ;\ x_1<0\end{cases} \tag{I-41}$$

que es la que por razones físicas debe corresponder a la función de Green para radiación emitada.

Aplicando el teorema de representación a la región R indicada en la figura 3 y, procediendo de modo similar a lo hecho en la parte final de la sección I.2 de la expresión (I-39) con $\underline{S}_k$ dado por (I.41) se sigue que los desplazamientos están dados por:

$$u_k(0,x_3)=\int_0^{\infty}\left\{B_{ki}(b,\xi_3;0,x_3)\,\tau_{i1}(\underline{u})-u_i\,\tau_{i1}(\underline{B}_k)\right\}d\xi_3$$

$$-\int_0^{\infty}\left\{B_{ki}(a,\xi_3;0,x_3)\,\tau_{i1}(\underline{u})-u_i\,\tau_{i1}(\underline{B}_k)\right\}d\xi_3$$

$$+\sum_n A_{nk}(x_3)\int_0^{\infty}\left\{U_i^{(n)}\tau_{i1}(\underline{u})-u_i\,T_{i1}^{(n)}\right\}_{\xi_1=b}e^{ik_n b}d\xi_3$$

$$-\sum_n C_{nk}(x_3)\int_0^{\infty}\left\{U_i^{*(n)}\tau_{i1}(\underline{u})-u_i\,T_{i1}^{*(n)}\right\}_{\xi_1=a}e^{ik_n a}d\xi_3 \qquad \text{(I-42)}$$

Si u_k es una onda superficial las dos primeras integrales son nulas. Esto se sigue del heche de que las dos integrales son acotadas e independientes de a y b y, de que $\underline{B}_k\to 0$ cuando $a\to-\infty$ y $b\to+\infty$.

En particular eligiendo a $u_k(\underline{x})$ como:

$$u_k(\underline{x})=U_k^{(m)}(x_3)\,e^{ik_m x_1} \qquad \text{(I-43)}$$

de (I-37) y (I-42) se sigue que:

$$U_k^{(m)}(x_3)=-\sum_n C_{nk}(x_3)\int_0^{\infty}\left\{U_i^{*(n)}T_{i1}^{(m)}-U_i^{(m)}T_{i1}^{*(n)}\right\}d\xi_3$$

(I-44)

y de (I-36,41), finalmente, tenemos:

$$\frac{1}{J_m}\,U_k^{(m)}(x_3)=C_{mk}(x_3) \qquad \text{(I-45)}$$

Similarmente:

$$\frac{1}{J_m} U_k^{*(m)}(x_3) = A_{mk}(x_3) \tag{I-46}$$

Las expresiones (I-45,46) junto a las ecuaciones (I-39,41) permiten escribir a la función de Green como:

$$G_{ki}(\underline{x};0,\xi_3) = B_{ki}(\underline{x};0,\xi_3) + \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{*(n)}(\xi_3) U_i^{(n)}(x_3) e^{ik_n x_1} ; & x_1 > 0 \\ \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{(n)}(\xi_3) U_i^{*(n)}(x_3) e^{-ik_n x_1} ; & x_1 < 0 \end{cases} \tag{I-47}$$

Debido a la invariancia de las ecuaciones de movimiento y de las condiciones en la frontera frente a traslaciones del eje x_1 podemos escribir:

$$G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) = B_{ki}(\underline{x},\underline{\xi}) + \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{*(n)}(\xi_3) U_i^{(n)}(x_3) e^{ik_n(x_1-\xi_1)} ; & x_1 > \xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{(n)}(\xi_3) U_i^{*(n)}(x_3) e^{-ik_n(x_1-\xi_1)} ; & x_1 < \xi_1 \end{cases} \tag{I-48}$$

La constante de normalización J_n es imaginaria pura, de -- aquí que no podamos incorporarla a la función $U_k^{(n)}$ pues esto requiere una constante de normalización positiva.

I.4 TEOREMA DE REPRESENTACION. =1,13=

Por simplicidad derivaremos el teorema de representación para el caso casi estacionario.

Previamente hacemos notar que la función de Green $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ dada por (I-23) es C^2 para $\underline{x} \neq \underline{\xi}$, satisface, para cada ω, la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}(\underline{G}_k)+\rho\,\omega^2 G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})=-\delta_{ik}\,\delta(\underline{x}-\underline{\xi}) \quad \text{(I-49)}$$

y las condiciones en la frontera (I-21).

Teorema.- Si la función de Green $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ que satisface (I-21,49) es C^2 para $\underline{x}\neq\underline{\xi}$ en una región acotada R contenida en el medio espacio, con frontera S, y si la solución u_i de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}(\underline{u})+\rho\,\omega^2 u_i(\underline{x})=0 \quad \text{(I-1b)}$$

cumple las condiciones en las interfases (I-7) y, es C^2 en R entonces u_i para puntos $\underline{x}\in R$ puede ser representada como:

$$u_i(\underline{x})=\int_S\left\{G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{u})-u_i(\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\}n_j\,d\underline{\xi} \quad \text{(I-50)}$$

Demostración.- Multiplicando (I-49) por u_i y (I-1b) por G_{ki} y restando obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{u})-u_i(\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\}=u_k(\underline{x})\,\delta(\underline{x}-\underline{\xi})$$

donde hemos utilizado una simetría del tensor elástico.

Integrando sobre R y aplicando el teorema de la divergencia formalmente obtenemos (I-50).

I.5 TEOREMA DE DESCOMPOSICION. =6=

El tipo de problemas que atacaremos requieren de la extensión del teorema de representación integral a regiones no acotadas. KNOPOFF y HUDSON =10,11,12= han propuesto algunos modos de proceder que justifican considerando un mecanismo disipativo, sin llegar a aclarar en que consiste este mecanismo. En realidad estos autores no han hecho ningún esfuerzo por establecer sus ideas a este respecto en una forma sistemática y así, obtener de ellas una teoría consistente. Por ejemplo, los teoremas de representación en regiones no acotadas son aplicables solamente a cierto tipo de ondas, las que con frecuencia se caracterizan por satisfacer ciertas condiciones de radiación. KNOPOFF y HUDSON no hacen distinción a este respecto. En esta sección nos proponemos hacer la extensión de un modo sistemático y razonablemente riguroso.

STOKER y PETERS =17,18,19,20= han observado que los problemas para el estado estacionario son poco naturales en la Mecánica y que esto da lugar a las dificultades que surgen para caracterizar a las soluciones de interés físico. El punto de vista que adoptaremos aquí ha sido desarrollado por HERRERA =6= y tiene íntima relación con la observación de STOKER y PETERS que les lleva a descomponer la solución, de un modo único, en dos partes, ambas soluciones, una de las cuales satisface una condición de radiación. Sin embargo, la base de la descomposición que presentaremos serán los teoremas de representación integrales. La significación física de tal descomposición dependerá esencialmente de que la función de Green se elija adecuadamente.

La ventaja principal de la forma en que estableceremos las condiciones de radiación es que se pueden formular independien temente de la forma de la función de Green y, resulta sumamente adecuada para problemas en los que se usan teoremas de representación integrales y, particularmente, para el método de perturbación que presentamos.

Enunciemos primero el teorema de descomposición:

Sea R el medio espacio con superficie libre S (ver figura 4a); B una subregión acotada de R; R_r la parte de R contenida en un círculo de radio r y centro en el origen y tal que B esté contenido en R_r y, S_r la frontera de R_r no contenida en S.

Sea $G_{ki}(\underline{x},\underline{\xi})$ una función de Green para el medio espacio que satisface la relación de simetría (I-24).

Cualquier solución u_i en R-B de (I-1b), tal que satisface la condición en las interfases (I-7) y con esfuerzos normales cero en S-B puede ser descompuesta de una manera única en dos componentes $\underline{w}'$ y $\underline{w}''$ tales que:

a) $u_k(\underline{x}) = w'_k(\underline{x}) + w''_k(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in R-B.$ (I-51)

b) $\underline{w}'$ está definida en todo R donde satisface (I-1b,7) y da esfuerzos normales cero en la superficie libre S.

c) $\underline{w}''$ satisface (I-1b,7) en R-B ; da esfuerzos normales cero en S-B, y

$$\int_{S_r} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{w}'') - w''_i(\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = 0 \qquad \text{(I-52)}$$

para toda r si $\underline{x} \in R_r - B$.

Más aún, las únicas funciones que satisfacen (a), (b) y (c) están dadas por:

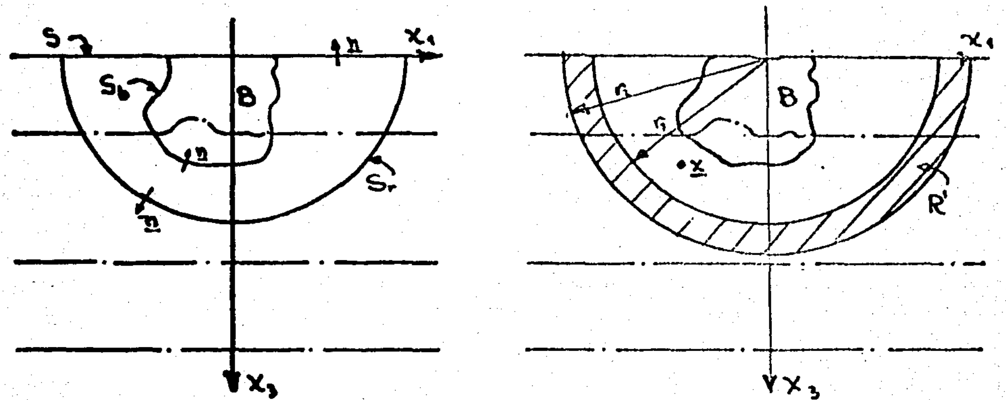
$$w'_k(\underline{x}) = \int_{S_r} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(I-53)}$$

$\underline{x} \in R_r$

$$w''_k(\underline{x}) = \int_{S_b} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(I-54)}$$

$$\underline{x} \in R - B$$

Observación.- Observe que la descomposición depende de la función de Green considerada.



(a) Geometría de los contornos de integración.

(b) Región R'.

Figura 4

Demostración.- Probaremos primeramente que la definición (I-53) de w'_k es independiente de r. En efecto, por la expresión (I-30) derivada del teorema de reciprocidad tenemos que:

$$\int_{S'} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\,\tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\,\tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = 0$$

para toda superficie cerrada y acotada frontera de una región R' que no contiene a $\underline{x}$. Ahora bien, dada una cierta $\underline{x}$ elijamos r_1 tal que $\underline{x} \in R_{r_1}$. Sea R' la región entre S_{r_1} y S_{r_2} (asiurada en la figura 4b). Aplicando (I-30) en R' y usando la condición en la superficie libre (I-6) se sigue que (I-53) es independiente de r.

Aplicando el teorema de representación directamente en la región R_r-B tenemos:

$$u_k(\underline{x}) = w_k'(\underline{x}) + w_k''(\underline{x}) \quad \underline{x} \in R_r - B$$

La relación de simetría (I-24) implica que w_k' y w_k'' pueden ser escritas como:

$$w_k'(\underline{x}) = \int_{S_r} \left\{ G_{ik}(\underline{x},\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{G}_i) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \;\; ; \underline{x} \in R_r$$

$$w_k''(\underline{x}) = \int_{S_b} \left\{ G_{ik}(\underline{x},\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{G}_i) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \underline{x} \in R_r - B$$

Dado que $G_{ik}(\underline{x},\underline{\xi})$ y $\tau_{ij}(\underline{G}_i)$ son soluciones de (I-1b) si $\underline{x} \neq \underline{\xi}$. Los integrandos no son sino combinaciones lineales de las soluciones, e integrando sobre el parámetro $\underline{\xi}$ siguen siendo soluciones. Por tanto, de la relación de simetría se sigue que $\underline{w}'$ y $\underline{w}''$ son una superposición de soluciones de (I-1b,7). Más - aún, $\underline{w}'$ deja esfuerzos normales cero en S y $\underline{w}''$ deja esfuerzos normales cero en S-B. Se prueba, pues, (b) y, para probar (c) solo resta demostrar que (I-52) es cierto.

Apliquemos (I-30) en B con la función w_k'.

$$\int_{S_b} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \underline{x} \in R_r - B$$

donde se hace uso del hecho de que la integral sobre S∩B se anula ya que w_k' y $\underline{G}_k$ dan esfuerzos normales cero, por tanto, en vista de esta relación y (I-53) tenemos:

$$w''_k(\underline{x}) = \int_{S_b} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) \, \tau_{ij}(\underline{w}'') - w''_i \, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

Aplicando el teorema de representación en $R_r - B$ para w''_k obtenemos:

$$w''_k(\underline{x}) = \int_{S_b, S_r} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) \, \tau_{ij}(\underline{w}'') - w''_i \, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

De estas dos expresiones se sigue (I-52)

Con esto demostramos que las expresiones (I-53) y (I-54) satisfacen (a), (b) y (c).

Que la descomposición es única se sigue de lo siguiente. Dados dos pares de soluciones w'_i y w''_i restémoslas para formar la pareja u'_k, u''_k tal que:

$$u'_k(\underline{x}) + u''_k(\underline{x}) = 0 \qquad x \in R-B \quad \text{(I-55)}$$

que satisfacen obviamente (a), (b) y (c). Aplicamos el teorema de representación a u'_k en R_r. Dado que u'_i satisface (b) y utilizando (I-53,55) tenemos:

$$u'_k(\underline{x}) = \int_{S_r} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}') - u'_i \, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \; ; \; \underline{x} \in R_r$$

$$= -\int_{S_r} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}'') - u''_i \, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \; ; \; x \in R_r - B$$

de donde se sigue que:

$$u'_k(\underline{x}) = 0 \qquad \underline{x} \in R_r - B$$

Tomando una r_1 tal que $S_{r_1} \subset R_{r_2} - B$ (figura 4b) y aplicando el teorema de representación en R_{r_1} se sigue que:

$$u'_k(\underline{x}) = 0 \qquad \underline{x} \in R$$

ya que las integrales son identicamente nulas por el resultado anterior. De (I-55) se sigue que:

$$u''_k(\underline{x}) = 0 \qquad \underline{x} \in R-B$$

por tanto la descomposición es única.

I.5.1 EXTENSION DEL TEOREMA DE REPRESENTACION A REGIONES NO ACOTADAS.

Decimos que u_k satisface una condición de radiación con respecto a la función de Green $\underline{G}_k$ si $w'_k = 0$ para toda $\underline{x} \in R$.

La extensión del teorema de representación a regiones no acotadas podemos expresarlo de la manera siguiente:

"Dada una solución u_k de (I-1b), (I-7) tal que satisface una condición de radiación, entonces:"

$$u_k(\underline{x}) = \int_{S_b}\left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi} \quad ; \underline{x} \in R-B \qquad \text{(I-56)}$$

Demostración.- De la definición de condición de radiación y de (I-51) se sigue que $u_k = w''_k$, por tanto (I-56) se sigue de (I-54)

I.6 EL PROBLEMA DE DISPERSION. =9=

Debido a la interpretación física que daremos a nuestros resultados, supondremos que en todo lo que sigue la función de Green que se usará será la correspondiente a la de "radiación emitida" para el medio espacio de capas paralelas.

Si en la región acotada B de la figura 4 prescribimos un cambio respecto de el medio original, i.e. en el que se definen $\underline{G}_k$ y w'_k, consistente en alteraciones ya sea de la frontera o de las propiedades físicas, podemos llamar a la componente w''_k, descrita en la sección anterior, el campo dispersado por la región alterada B. Así mismo,a la componente w_k^i podemos llamarla el campo incidente.

En general cuando se trata de formular problemas de dispersión es necesario definir en alguna forma una condición de radiación. Esto con frecuencia se ha hecho considerando el comportamiento asimptótico de la solución en infinito. Este tratamiento requiere un análisis particular en cada caso y, en general, esto dificulta la determinación apropiada de las condiciones de radiación.

Dentro del marco del teorema de descomposición que hemos presentado la formulación del problema de dispersión se formula con mucha sencillez: "Dada una solución $w_k^i(x)$ en R que satisface la ecuación de movimiento (I-1b) y las condiciones (I-7) en las interfases y que deja esfuerzos nulos en toda la superficie libre S de R, determinar una solución en la región modificada tal que su restricción a R-B tenga por componente regular a $w_k^i(x)$."

I.6.1 PROBLEMAS DE DISPERSION LINEALIZADOS.

Con lo dicho en la sección anterior finalizamos la presentación de los teoremas de representación y la formulación en general del problema de dispersión.

Ahora aclararemos el tipo de problema de dispersión que resolveremos usando un método de perturbaciones que posteriormente expondremos. Dado el medio espacio constituido por un número finito de capas, asumamos conocida la función de Green. Introduzcamos una modificación en la frontera en una región finita y tal que su espesor en la dirección x_3 sea muy pequeño y su longitud en la dirección x, sea muy grande. Considerando una onda incidente (solución en el medio no perturbado) nos proponemos evaluar el campo dispersado aproximadamente.

El método de perturbaciones propuesto por HERRERA =7,8,9= ha sido aplicado a algunos modelos geofísicos del tipo arriba indicado por MAL y HERRERA =15= encontrando que para este tipo de modificaciones en la frontera -consideradas típicas en aplicaciones geofísicas- los resultados son consistentes con las hipótesis del método excepto por un cambio de fase que es grande. En este método -que es una aplicación del método clásico de perturbaciones a problemas de dispersión de ondas elásticas- se toma como orden cero a la solución no perturbada y así, necesariamente, es en la primera aproximación donde deben aparecer los cambios de fase que, en este caso, son grandes y que, por lo mismo, violan las hipótesis del método.

La dificultad que se presenta es, pues, semejante a la que ocurre en problemas que han surgido en otros campos para los cuales el método W.K.B.J. ha tenido éxito. Sin embargo, para el caso de que nos ocuparemos el método W.K.B.J. no es aplicable.

Para resolver la dificultad, usando los teoremas de representación, obtenemos una solución de orden cero que tome cuenta de los cambios de fase y, luego, esta solución puede ser perturbada para dar los términos correspondientes a la primera aproximación que entonces si resultan consistentes con las hipótesis iniciales.

Consideraremos un medio en el cual el espesor de las perturbaciones es pequeño (ε) mientras que su longitud es grande (L) de manera que $L\varepsilon$ se mantiene acotado. La idea básica del método que se propone aquí es formular los teoremas de representación con la función de Green correspondiente al medio no perturbado. Luego se modifican estos teoremas aprovechando el hecho de que la función de Green para un medio cuyo espesor de capas es el de la región perturbada se conoce, obteniendo de esta manera una estimación de orden cero de la solución.

Ahora bien, las ondas de cuerpo decaen rapidamente, por tanto, supuesta una fuente de ondas situada suficientemente lejos de la región perturbada las únicas ondas apreciables incidentes que llegarían a ella serían las ondas superficiales. Más aún, si los puntos de observación del campo dispersado están suficientemente alejados de la zona perturbada B, las ondas de cuerpo emitidas en B no serán apreciables en los puntos de observación por lo que limitaremos nuestra discusión a ondas superficiales.

En el siguiente capítulo se hallarán las soluciones aproximadas a orden cero para dos modelos de interés geofísico, lo cual nos dará ocasión de desarrollar el método de perturbaciones aquí propuesto.

C A P I T U L O   I I

D O S   P R O B L E M A S D E   D I S P E R S I O N

II.1 DEPRESION EN LA SUPERFICIE LIBRE.

Consideremos que el campo incidente de un medio espacio con N capas paralelas y con una depresión en la superficie está dado por una onda superficial avanzando en la dirección x_1 del tipo:

$$w'_k(\underline{x}) = U_k^{(n)}(x_3)\, e^{i k_p x_1} \qquad \text{(II-1)}$$

El campo dispersado puede quedar expresado como:

$$w''_k(\underline{x}) = {}_0w''_k(\underline{x}) + {}_1w''_k(\underline{x}) \qquad \text{(II-2)}$$

donde ${}_0w''_k$ es una aproximación de orden cero y ${}_1w''_k$ queda, dada ${}_0w''_k(\underline{x})$, bien definida por:

$${}_1w''_k(\underline{x}) = w''_k(\underline{x}) - {}_0w''(\underline{x}) \qquad \text{(II-3)}$$

Dado el campo incidente (II-1) en el medio espacio con la depresión en la superficie que se muestra en la figura 5, evaluaremos el campo dispersado debido a la presencia de la constricción correspondiente en la capa superficial.

Los desplazamientos $u_i(\underline{x}) = w_i' + w_i''$ satisfacen la ecuación - de movimiento (I-1b) y las condiciones en la frontera:

$$\tau_{ij}(\underline{u})\, n_j = 0 \qquad ; \ \underline{x} \in S \cup S' \qquad \text{(II-4a)}$$

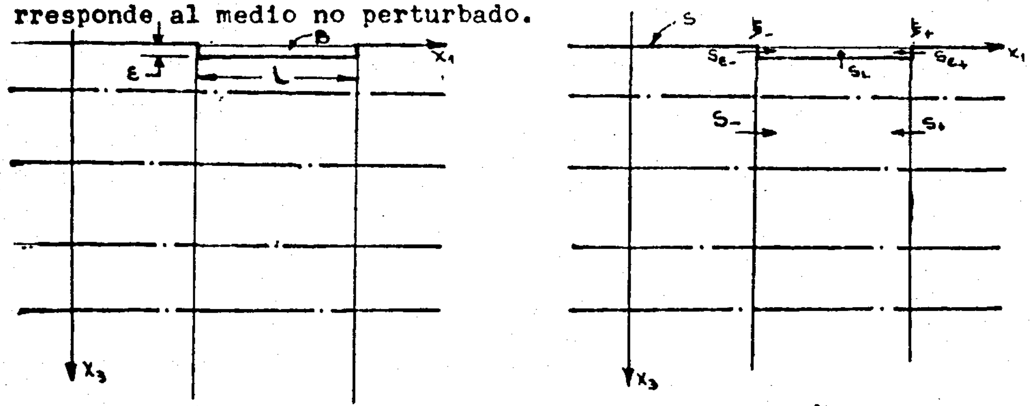
$$\left.\begin{array}{r} [\underline{u}] = 0 \\ [\tau_{ij}(\underline{u})] = 0 \end{array}\right\} \text{en las interfases} \qquad \text{(II-4b)}$$

Por el teorema de descomposición (I-54) sabemos que:

$$w_k''(\underline{x}) = \int_{S'} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-5)}$$

$$\underline{x} \in R - B$$

donde $S' = S_L \cup S_{\varepsilon+} \cup S_{\varepsilon-}$; las normales apuntan en las direcciones que se indican en la figura 5b y, la función de Green G_{ki} corresponde al medio no perturbado.



(a) Depresión en la superficie libre.

(b) Identificación de superficies.

Figura 5

Por conveniencia definimos tres subregiones:

$$R_I = \left\{ \underline{x} \in R \mid x_1 \leq \xi_- \right\}$$

$$R_{II} = \{ \underline{x} \in R \mid x_1 \in [\xi_-, \xi_+] ; x_3 \geq \varepsilon \}. \qquad \text{(II-6)}$$

$$R_{III} = \{ \underline{x} \in R \mid x_1 \geq \xi_+ \}.$$

Sean:

$$\overline{U}_k^{(n)}(x_3)\, e^{i \overline{k}_n x_1} \qquad \text{(II-7a)}$$

$$\overline{\overline{T}}_{ij}^{(n)}(x_3)\, e^{i \overline{k}_n x_1} \qquad \text{(II-7b)}$$

los desplazamientos y los esfuerzos asociados a una onda superficial en el modo (n) que satisfacen la ecuación de movimiento (I-1b) y las condiciones en la frontera:

$$\tau_{i3}(\underline{u}) = 0 \quad \text{en } x_3 = \varepsilon \qquad \text{(II-8a)}$$

$$\left.\begin{array}{r} [\underline{u}] = 0 \\ [\tau_{i3}(\underline{u})] = 0 \end{array}\right\} \text{ en las interfases} \qquad \text{(II-8b)}$$

i.e. son las ondas superficiales asociadas al medio espacio modificado entendiendo por tal un medio espacio con superficie - libre e interfases paralelas para el cual la capa superficial ha disminuido su espesor en ε. Sea $\overline{H}_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x})$ para cada $\underline{\xi}$ y cada i una combinación lineal de ondas superficiales, dependientes- de los parámetros $\underline{x}$ y k, asociadas al medio espacio modificado. La elección apropiada de $\overline{H}_{ki}$ se hace en la sección -- II.3.

Aplicamos el teorema de reciprocidad para $\overline{H}_{k}$ y $\underline{u}$ en la -- subregión R_{II}:

$$\int_{S''} \left\{ \overline{H}_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\overline{\underline{H}}_k) \right\} n_j \, d\xi = 0 \qquad \text{(II-9)}$$

donde $S'' = S_L \cup S_+ \cup S_-$ con $n_j = (0,0,-1)$ para S_L y las normales a S_+ y S_- apuntando hacia R_{II} y, u_i es tambien onda superficial. En tal caso por las condicones de convergencia (I-5) la integral está definida.

Restando (II-9) a (II-5) tenemos:

$$w^{*}_{k}(\underline{x}) = \int_{S'}\left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi}) \tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$-\int_{S''}\left\{ \bar{H}_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi}) \tau_{ij}(\underline{\bar{H}}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad x \notin R_{II} \qquad \text{(II-10)}$$

Aplicando en R_{II} la ecuación (I-30) la cúal es una aplicación del teorema de reciprocidad podemos escribir:

$$\int_{S_L}\left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi} =$$

$$\int_{S_+,S_-}\left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-11)}$$

donde las normales a S_+ y S_- apuntan hacia R_{II}.

Del hecho de que u_i y $\bar{H}_{ki}$ satisfagan las condiciones en la superficie (II-4a) y (II-8a) respectivamente se sigue que:

$$\int_{S_L}\left\{ \bar{H}_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{\bar{H}}_k)\right\} n_j \, d\underline{\xi} = 0 \qquad \text{(II-12)}$$

Usando la relación:

$$G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) = B_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) + S_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}).$$

expandiendo las integrales indicadas en (II-10) considerando - (II-11,12) y definiendo:

$$H_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) = S_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) - \bar{H}_{ki}(\underline{\xi},\underline{x}) \qquad \text{(II-13)}$$

la ecuación (II-10) para puntos $\underline{x} \notin R_{II}$ puede escribirse como:

$$w_k^{i}(\underline{x}) = \int_{S_+,S_-} \left\{ B_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{B}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$+ \int_{S_{\epsilon+},S_{\epsilon-}} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$\int_{S_+,S_-} \left\{ H_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-14)}$$

Para obtener la aproximación de orden cero es preciso evaluar la forma explícita de H_{ki} y $\tau_{ij}(\underline{H}_k)$ lo cual haremos en la sección II.3. Una vez hecho esto procederemos a la evaluación explícita en la sección II.4.1.

Conocida la aproximación de orden cero en $\underline{x} \notin R_{II}$ podemos determinar la aproximación de orden cero para $\underline{x} \in R_{II}$. En efecto, sea $\bar{G}_{ki}$ la función de Green que satisface (I.1b) y las condiciones en la frontera (II-8); i.e. es la función de Green asociada al medio espacio modificado. Aplicando el teorema de representación (I-50) en R_{II} tenemos:

$$u_k(\underline{x}) = -\int_{S_+,S_-} \left\{ \bar{G}_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{\bar{G}}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \underline{x} \in R_{II} \qquad \text{(II-15)}$$

donde hemos usado el hecho de que la integral sobre S_L se anula por las condiciones en la frontera (II-4a) y (II-8a).

II.2 PERTURBACION EN UNA INTERFASE.

Consideremos el medio espacio de N capas paralelas con una depresión de la interfase colocada a una profundidad h, según se muestra en la figura 6a.

Dado el campo incidente por una onda superficial del tipo:

$$W'_k(\underline{x}) = U_k^{(p)} \, e^{i k_p \xi_1} \qquad \text{(II-16)}$$

calcularemos el campo dispersado W''_k.

El campo dispersado puede expresarse como:

$$W''_k(\underline{x}) = {}_0W''_k(\underline{x}) + {}_1W''_k(x) \qquad \text{(II-17a)}$$

donde ${}_0w''_i$ es una aproximación de orden cero. ${}_1W''_k(x)$ queda bien definida, dada ${}_0w''_i$, como:

$$ {}_1W''_k(\underline{x}) = W''_k(x) - {}_0W''_k(x) \qquad \text{(II-17b)}$$

Los desplazamientos $u_i(\underline{y})$ satisfacen las ecuaciones de movimiento (I-1b) y las condiciones en la frontera:

$$\tau_{i3}(\underline{u}) = 0 \qquad x_3 = 0 \qquad \text{(II-18a)}$$

$$\left.\begin{aligned} n_j[\tau_{ij}(\underline{u})] &= 0 \\ [\underline{u}] &= 0 \end{aligned}\right| \quad \underline{x} \in \text{interfases (ver figura 6)} \qquad \text{(II-18b)}$$

Distingamos en el medio espacio tres subregiones:

$$R_I = \left\{ \underline{x} \in R \mid x_1 \leq \xi_- \right\}$$

$$R_{II} = \left\{ \underline{x} \in R \mid x_1 \in [\xi_-, \xi_+] \right\}$$

$$R_{III} = \left\{ \underline{x} \in R \mid x_1 \geq \xi_+ \right\}$$

El campo dispersado está dado por la ecuación (I-54) según el teorema de descomposición:

$$W_k''(\underline{x}) = \int_{S'} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi}) \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \tag{II-19}$$

donde $S' = S_u \cup S_h \cup S_{\varepsilon+} \cup S_{\varepsilon-}$ (ver en la figura 6b el sentido de las normales).

Denotemos a los desplazamientos y a los esfuerzos asociados a una onda superficial en el modo (n) que satisfacen la ecuación de movimiento (I-1b) y las condiciones en la frontera:

$$\tau_{i3}(\underline{u}) = 0 \qquad x_3 = 0 \tag{II-20a}$$

$$\left.\begin{array}{l} [u] = 0 \\ [\tau_{i3}(\underline{u})] = 0 \end{array}\right\} \text{en } x_3 = h + \varepsilon \text{ y en las demás interfases.} \tag{II-20b}$$

como:

$$\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\, e^{i \bar{k}_n x_1} \tag{II-21a}$$

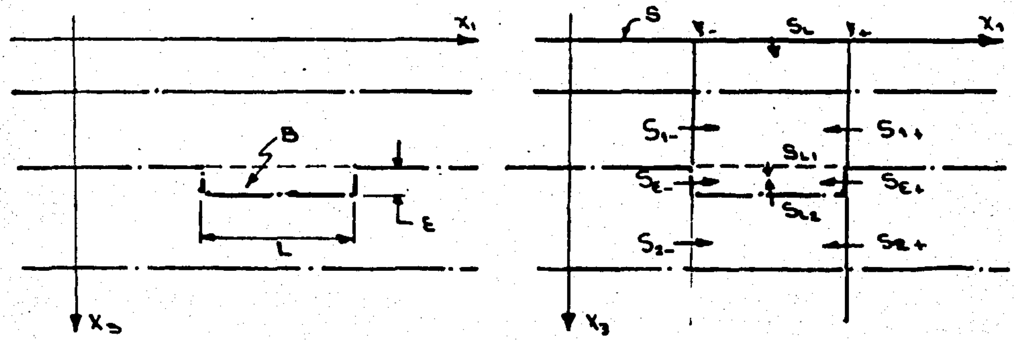
$$\bar{T}_{kj}^{(n)}(x_3)\, e^{i \bar{k}_n x_1} \tag{II-21b}$$

Las ondas (II-21a) son, pues, las ondas superficiales asociadas al medio modificado, entendiendo por tal al medio espacio con superficie libre e interfases paralelas para el cual la interfase situada a una profundidad h ha sido cambiada a una profundidad $h+\varepsilon$.

Sea $\bar{H}_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x})$, para cada i y cada $\underline{\xi}$, una combinación lineal dependiente de los parámetros $\underline{x}$ y k de ondas superficiales del medio modificado. La elección apropiada de la función $\bar{H}_{ki}$ se hará en la sección II.3. Aplicando (I-30) para $\bar{H}_{ki}$ y u_i en la subregión R_{II}

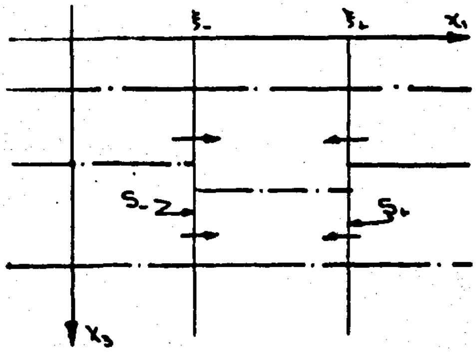
$$\int_{S''} \left\{ \bar{H}_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\, \tau_{ij}(\underline{\bar{H}}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = 0 \tag{II-22}$$

donde $S'' = S_L \cup S_+ \cup S_-$ y las normales apuntan según se indica en la figura 6c.



(a) Perturbación en una interfase.

(b) Identificación de superficies



(c) Identificación de las superficies S_+ y S_-.

Figura 6

Restando (II-22) a (II-19) tenemos:

$$W_k''(x) = \int_{S'} \left\{ G_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$- \int_{S''} \left\{ \bar{H}_{ki}(\underline{\xi},\underline{x})\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi})\, \tau_{ij}(\underline{\bar{H}}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \tag{II-23}$$

Aplicando la ecuación (I-30) en la subregión de R_{II} que contiene los puntos que satisfacen la condición $x_3 < h$ obtenemos la igualdad:

$$\int_{S_{i+}} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = \int_{S_{0+}, S_{i+}} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$\underline{x} \notin R_{II} \qquad \text{(II-24a)}$$

Aplicando, ahora, (I-30) en la subregión de R_{II} definida por la condición $x_3 > h+\varepsilon$ tenemos:

$$\int_{S_{i+}} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = \int_{S_{i+}, S_{i-}} \left\{ G_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{G}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$\underline{x} \notin R_{II}. \qquad \text{(II-24b)}$$

Además por (II-18a,20a) se sigue que:

$$\int_{S_-} \left\{ \bar{H}_{ki} \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{\bar{H}}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} = 0. \qquad \text{(II-24c)}$$

La función de Green puede escribirse como:

$$G_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) = B_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) + S_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \qquad \text{(II-25)}$$

Definimos a:

$$H_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) = S_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) - B_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \qquad \text{(II-26)}$$

Usando (II-24,25,26) podemos escribir a la expresión (II-23) como:

$$w_k''(\underline{x}) = \int_{S_+, S_-} \left\{ B_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{B}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi}$$

$$+ \int_{S_+, S_-} \left\{ H_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i \tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-27)}$$

$$\underline{x} \notin R_{II}.$$

Nuevamente, la evaluación explícita de una aproximación de orden cero de w_k'' depende de la determinación de H_{ki}, lo cual haremos en la siguiente sección.

Para determinar la aproximación de orden cero en $\underline{x} \in R_{II}$ hallaremos la representación de la solución en R_{II}. Sea $\bar{G}_{ki}(\xi, x)$ la función de Green que satisface las condiciones en la frontera (II-20); i.e. la función de Green para el medio modificado.

Aplicando el teorema de representación en R_{II} tenemos:

$$u_k(\underline{x}) = -\int_{S_+, S_-} \left\{ \bar{G}_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i(\underline{\xi}) \tau_{ij}(\bar{\underline{G}}_k) \right\} n_j \, d\xi \qquad \underline{x} \in R_{II}. \tag{II-28}$$

donde hemos usado el hecho de que la integral sobre S_L se anula por (II-18a,20a).

La aproximación explícita de orden cero podrá hallarse en la sección II.4.2.

II.3 DETERMINACION DE LA FUNCION H_{ki}.

La función de Green para radiación emitida en el medio espacio; i.e. la función que satisface la ecuación de movimiento (I-20), las condiciones an la frontera (I-21,22) y la relación de simetría (I-24) obtenida en la sección I.3.5, está dada por

$$G_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) = B_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) + S_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) \tag{II-29a}$$

donde:

$$S_{ki}(\underline{\xi}, \underline{x}) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{*(n)}(x_3) U_i^{(n)}(\xi_3) e^{-i k_n (x_1 - \xi_1)} & x_1 < \xi_1 \\[2ex] \sum_n \frac{1}{J_n} U_k^{(n)}(x_3) U_i^{*(n)}(\xi_3) e^{i k_n (x_1 - \xi_1)} & x_1 > \xi_1 \end{cases} \tag{II-29b}$$

y B_{ki} es la contribución por ondas de cuerpo.

La combinación lineal, aludida en las secciones II.1 y II.2 como $\bar{H}_{ki}(\xi,x)$, conviene elegirla de la manera siguiente. Partiendo de la contribución de ondas superficiales a la función de Green para los medios espacios modificados respectivos multipliquemos, para obtener $\bar{H}_{ki}$, cada una de las componentes por una fase. La expresión, pues, para $\bar{H}_{ki}(\xi,x)$ está dada por:

$$\bar{H}_{ki}(\xi,x)=\begin{cases}\sum_n \frac{1}{J_n}\bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\,\bar{U}_i^{(n)}(\xi_3)\,e^{-i\langle \bar{k}_n(x_1-\xi_1)+\alpha_n\rangle} & x_1<\xi_1\\[2ex] \sum_n \frac{1}{J_n}\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\,\bar{U}_i^{*(n)}(\xi_3)\,e^{i\langle \bar{k}_n(x_1-\xi_1)+\beta_n\rangle} & x_1>\xi_1\end{cases}\tag{II-30}$$

donde las $\bar{U}_k^{(n)}$, para cada problema, están dadas por (II-7) y (II-21) respectivamente.

Hemos definido a $H_{ki}(\xi,x)$ en (II-13) y (II-26) como:

$$H_{ki}(\xi,x)=S_{ki}(\xi,x)-\bar{H}_{ki}(\xi,x)$$

dadas las expresiones (II-29b,30) y agrupando de un modo conveniente podemos escribir:

$$H_{ki}=\begin{cases}\sum_n \frac{1}{J_n}U_k^{*(n)}(x_3)U_i^{(n)}(\xi_3)\,e^{-ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle -i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)+ik_n(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle\right]\\ +\sum_n\left\{\frac{1}{J_n}U_k^{*(n)}(x_3)U_i^{(n)}(\xi_3)-\frac{1}{J_n}\bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\bar{U}_i^{(n)}(\xi_3)\right\}\exp\langle -i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle & x_1<\xi_1\\[2ex] \sum_n \frac{1}{J_n}U_k^{(n)}(x_3)U_i^{*(n)}(\xi_3)\,e^{-ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)-ik_n(x_1-\xi_1)+i\beta_n\rangle\right]\\ +\sum_n\left\{\frac{1}{J_n}U_k^{(n)}(x_3)U_i^{*(n)}(\xi_3)-\frac{1}{J_n}\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\bar{U}_i^{*(n)}(\xi_3)\right\}\exp\langle +i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)+i\beta_n\rangle & x_1>\xi_1\end{cases}\tag{II-31}$$

Escribamos a las funciones H_{ki} y $T_{ij}(H_k)$ como:

$$H_{ki} = {}_0H_{ki} + {}_1H_{ki} \qquad \text{(II-32)}$$

$$T_{ij}(H_k) = {}_0T_{ij}(H_k) + {}_1T_{ij}(H_k) \qquad \text{(II-33)}$$

donde ${}_0H_{ki}$ y ${}_0T_{ij}(H_k)$ son contribuciones de orden cero de H_{ki} y T_{ij}. Las ondas superficiales correspondientes a un medio espacio con capas paralelas dependen de una manera continua y diferenciable del espesor de dichas capas. Sin embargo, la aproximación que se obtiene derivando formalmente las ondas superficiales con respecto al espesor de las capas no es una aproximación uniforme debido a que la fase varía linealmente en la dirección horizontal y por lo mismo los errores en dicha aproximación crecen indefinidamente en esa dirección. No obstante, la dependencia en la dirección vertical de dichas ondas si puede aproximarse de una manera uniforme procediendo de esta manera. De hecho se sabe que $U_k^{(n)}(x_3)$ es derivable con respecto a ε en condiciones muy generales, más aún:

$$U_k^{(n)}(x_3) = \bar{U}_k^{(n)}(x_3) + \varepsilon \bar{U}_{k,\varepsilon}(x_3) + O(\varepsilon^2) \qquad \text{(II-34)}$$

donde la coma, de aquí en adelante, precediendo un índice indica derivación con respecto a él.

Usando (II-34) obtenemos la siguiente igualdad:

$$U_k^{(n)}(x_3)\, U_i^{(n)}(\xi_3) = \bar{U}_k^{(n)}(x_3)\, \bar{U}_i^{(n)}(\xi_3) + \varepsilon \left(\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\bar{U}_i^{(n)}(\xi_3)\right)_{,\varepsilon}$$

así mismo, de la igualdad anterior se sigue que:

$$\left\{\frac{1}{J_n}U_k^{(n)}U_i^{(n)}-\frac{1}{\bar J_n}\bar U_k^{(n)}\bar U_i^{(n)}\right\}=\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{\bar J_n}\right)\bar U_k^{(n)}U_i^{(n)}$$
$$+\frac{\epsilon}{J_n}\left(U_k^{(n)}U_i^{(n)}\right)_{,\epsilon}+O(\epsilon^2).$$

Substituyendo las igualdades anteriores en (II-31) obtenemos

$$H_{ki}=\begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n}\bar U_k^{*(n)}(x_3)\bar U_i^{(n)}(\xi_3)\, e^{-i\kappa_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle -i\bar\kappa_n(x_1-\xi_1)+i\kappa_n(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle\right] \\ +\sum_n \frac{\epsilon}{J_n}\left(\bar U_k^{*(n)}(x_3)\bar U_i^{(n)}(\xi_3)\right)_{,\epsilon} e^{-i\kappa_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle -i(\bar\kappa_n-\kappa_n)(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle\right] \\ +\sum_n\left\{\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{\bar J_n}\right)\bar U_k^{*(n)}(x_3)\bar U_i^{(n)}(\xi_3)+\frac{\epsilon}{J_n}\left(\bar U_k^{*(n)}(x_3)\bar U_i^{(n)}(\xi_3)\right)_{,\epsilon}\right\} \\ \quad\cdot\exp\langle -i\bar\kappa_n(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle+O(\epsilon^2) \qquad x_1<\xi_1 \\ \\ \sum_n \frac{1}{J_n}\bar U_k^{(n)}(x_3)\bar U_i^{*(n)}(\xi_3)\, e^{i\kappa_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle i(\bar\kappa_n-\kappa_n)(x_1-\xi_1)+i\varphi_n\rangle\right] \\ +\sum_n \frac{\epsilon}{J_n}\left(\bar U_k^{(n)}(x_3)\bar U_i^{*(n)}(\xi_3)\right)_{,\epsilon} e^{i\kappa_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle i(\bar\kappa_n-\kappa_n)(x_1-\xi_1)+i\varphi_n\rangle\right] \\ +\sum\left\{\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{\bar J_n}\right)\bar U_k^{(n)}(x_3)\bar U_i^{*(n)}(\xi_3)+\frac{\epsilon}{J_n}\left(U_k^{(n)}U_i^{(n)}\right)_{,\epsilon}\right\} \\ \quad\cdot\exp\langle i(x_1-\xi_1)\bar\kappa_n+i\alpha_n\rangle+O(\epsilon^2)\;;\; x_1>\xi_1 \end{cases} \tag{II-35}$$

Observando que:

$$J_n = \bar{J}_n + O(\varepsilon)$$

una aproximación para H_{ki} está dada por:

$$
{}_0H_{ki}(\xi,\chi) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n} \bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\bar{U}_i^{(n)}(\xi_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle -i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle\right] & x_1<\xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n} \bar{U}_k^{(n)}(x_3)\bar{U}_i^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)+i\beta_n\rangle\right] & x_1>\xi_1 \end{cases} \qquad \text{(II-36)}
$$

El tensor de los esfuerzos asociado a H_{ki} puede escribirse como:

$$\tau_{ij}(\underline{H}_k) = \tau_{ij}({}_0\underline{H}_k) + \tau_{ij}({}_1H_{ki}) \qquad \text{(II-37)}$$

Puede probarse que $\tau_{ij}({}_1\underline{H}_k)$ es de orden ε ;la expresión explícita de $\tau_{ij}({}_0\underline{H}_k)$ está dada por:

$$
\tau_{ij}({}_0\underline{H}_k) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n}\bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\bar{\bar{T}}_{ij}^{(n)}(\xi_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle -i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle\right] \\ -i\varepsilon \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n}\bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\, C_{ijp1}\bar{U}_p^{(n)}(\xi_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)}\cdot \exp\langle -i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)-i\alpha_n\rangle \\ +O(\varepsilon^2) \qquad x_1<\xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n}\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\bar{\bar{T}}_{ij}^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)}\left[1-\exp\langle i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)+i\beta_n\rangle\right] \\ +i\varepsilon \sum_n \frac{1}{\bar{J}_n}\bar{U}_k^{(n)}(x_3)\, C_{ijp1}\bar{U}_p^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)}\exp\langle i(\bar{k}_n-k_n)(x_1-\xi_1)+i\beta_n\rangle \\ +O(\varepsilon^2) \qquad x_1>\xi_1 \end{cases}
$$

por tanto, una aproximación de orden cero para $\tau_{ij}(\underline{H}_k)$ está dada por:

$$
{}_0T_{ij}(H_k) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{*(n)}(x_3) \overline{\overline{T}}_{ij}^{(n)}(\xi_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle -i(\bar{k}_n - k_n)(x_1-\xi_1) - i\alpha_n \rangle\right] & x_1 < \xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{(n)}(x_3) \overline{\overline{T}}_{ij}^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle i(\bar{k}_n - k_n)(x_1-\xi_1) + i\beta_n \rangle\right] & x_1 > \xi_1 \end{cases} \qquad \text{(II-38)}
$$

II.3.1 DETERMINACION DE LA SOLUCION DE ORDEN CERO.

Teniendo en cuenta la definición (II-2,17) de ${}_0W_i''$ podemos escribir a la solución u_i como:

$$
u_i(\underline{x}) = {}_0u_i(\underline{x}) + {}_1u_i(\underline{x}) \qquad \text{(II-39a)}
$$

donde, si ${}_0u_i$ son contribuciones de orden cero quedará dada por

$$
{}_0u_i(\underline{x}) = W_i'(\underline{x}) + {}_0W_i''(\underline{x}) \qquad \text{(II-39b)}
$$

de (I-51) se sigue además que:

$$
{}_1u_i(\underline{x}) = {}_1W_i''(\underline{x}). \qquad \text{(II-39c)}
$$

Consideraremos ahora la expresión (II-14) -que es el campo dispersado de el problema de la depresión en la superficie- para obtener una aproximación de orden cero.

Al primer término de (II-14) lo despreciaremos porque constituye una superposición de ondas de cuerpo que, para puntos de observación alejados de la zona perturbada, es pequeño debido al decaimiento que sufren dichas ondas con la distancia.

El segundo término es de orden ε porque los términos del integrando son acotados y la longitud de la línea de integración es ε.

El tercer término de (II-14) puede escribirse, usando --

(II-32,33,39), como:

$$\int_{S_+,S_-}\{H_{ki}\tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\tau_{ij}(\underline{H}_k)\}n_j\,d\underline{\xi} =$$

$$\int_{S_+,S_-}\{{}_0H_{ki}\tau_{ij}({}_0\underline{u}) - {}_0u_i\,{}_0\tau_{ij}(H_k)\}n_j\,d\underline{\xi}$$

$$+\int_{S_+,S_-}\{{}_0H_{ki}\,\tau_{ij}({}_1\underline{u}) - {}_1u_i\,{}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k)\}n_j\,d\underline{\xi}$$

$$+\int_{S_+,S_-}\{H_{ki}\tau_{ij}({}_1\underline{u}) - {}_1u_i\,\tau_{ij}(\underline{H}_k)\}n_j\,d\underline{\xi} \qquad \text{(II-40)}$$

Asumiendo que para puntos interiores el tensor de esfuerzos $\tau_{ij}(\underline{u})$ y el desplazamiento u_i considerados como funciones dependientes de ε no sufren cambios bruscos, podemos afirmar que dadas las aproximaciones de orden cero $\tau_{ij}({}_0\underline{u})$; ${}_0\underline{u}$ difieren en términos de orden ε de $\tau_{ij}(\underline{u})$; $\underline{u}$ para cualquier valor de ε , mientras éste sea pequeño.

Los puntos contenidos en S_+ y S_- son interiores, de aquí - que en S_+ y S_-; ${}_0\underline{u}$, $\tau_{ij}({}_0\underline{u})$ difieren en términos de orden ε de $\underline{u}$, $\tau_{ij}(\underline{u})$. Las integrales (II-40) son convergentes, más aún, por las razones aludidas arriba, la segunda integral es de orden ε , mientras que la tercera integral por (II-32,33) es tambien de orden ε.

De todo esto se sigue que una aproximación de orden cero para w_i'' es:

$${}_0w_i'' = \int_{S_+,S_-}\{{}_0H_{ki}\tau_{ij}({}_0\underline{u}) - {}_0u_i\,{}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k)\}n_j\,d\underline{\xi} \qquad \underline{x}\notin R_{II} \quad \text{(II-41)}$$

Para la perturbación en la interfase el campo dispersado - está dado por (II-27). La primera integral, por las mismas razo nes dadas anteriormente, no da contribuciones de orden cero.

La segunda integral por (II-32,33,39) queda dada por:

$$\int_{S_+,S_-} \left\{ H_{ki}\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\, \tau_{ij}(H_k) \right\} n_j\, d\xi =$$

$$\int_{S_+,S_-} \left\{ {}_0H_{ki}\, \tau_{ij}(\underline{u}) - {}_0u_i\, {}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi$$

$$+ \int_{S_+,S_-} \left\{ {}_0H_{ki}\, \tau_{ij}(\underline{u}) - {}_1u_i\, {}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi$$

$$+ \int_{S_+,S_-} \left\{ {}_1H_{ki}\, \tau_{ij}(\underline{u}) - u_i\, {}_1\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi \qquad \text{(II-42)}$$

La primera integral de (II-42) es convergente y contiene a los términos de orden ε; ${}_1\tau_{ij}(\underline{H}_k)$, ${}_1H_{ki}$ por tanto, es de orden ε.

La segunda integral conviene escribirla como:

$$\int_{S_+,S_-} \left\{ {}_0H_{ki}\, \tau_{ij}({}_1\underline{u}) - {}_1u_i\, {}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi =$$

$$\int_{S_{1+},S_{1-},S_{2+},S_{2-}} \left\{ {}_0H_{ki}\, \tau_{ij}({}_1\underline{u}) - {}_1u_i\, {}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi$$

$$+ \int_{S_{\varepsilon+},S_{\varepsilon-}} \left\{ {}_0H_{ki}\, \tau_{ij}({}_1\underline{u}) - {}_1u_i\, {}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi. \qquad \text{(II-43)}$$

donde las superficies se encuentran identificadas en la figura 6b. Los puntos contenidos en $S_{1+} \cup S_{1-} \cup S_{2+} \cup S_{2-}$, son interiores, de aquí que los mismos argumentos presentados arriba nos lleven a concluir que el primer término de (II-43) es de orden ε. Los puntos contenidos en $S_{\varepsilon+}$ y $S_{\varepsilon-}$ son de la frontera modificada. En este caso, los valores que toma $\tau_{ij}(u)$ pueden, en general, diferir en términos de orden cero de $\tau_{ij}(u)$. Sin embargo, en la segunda integral de (II-43) los integrandos son acotados y la longitud de la línea de integración es ε. De aquí que esta integral sea de orden ε.

Del análisis precedente se concluye que una aproximación de orden cero del campo dispersado dado por (II-27) estará dada por:

$$ {}_{o}W_k''(x) = \int_{S_+,S_-} \left\{ {}_{o}H_{ki}\,\tau_{ij}({}_{o}u) - {}_{o}u_i\,{}_{o}\tau_{ij}(H_k) \right\} n_j\, d\xi \qquad x \notin R_{II} \qquad \text{(II-44)} $$

Del teorema de representación y del hecho de que la función de Green pueda escribirse como:

$$ G_{ki} = B_{ki} + S_{ki} $$

donde B_{ki} representa la contribución por ondas de cuerpo a la función de Green y, S_{ki} representa la contribución a la función de Green de las ondas superficiales, se sigue que el campo total pueda descomponerse como:

$$ u_i(x) = s_i(x) + b_i(x) $$

donde b_i son las contribuciones de las ondas de cuerpo y s_i son las contribuciones de las ondas superficiales de el campo total.

En particular, una aproximación de orden cero del campo total podrá descomponerse de un modo similar; i.e.

$$ {}_0u_i(\underline{x}) = {}_0s_i(\underline{x}) + {}_0b_i(\underline{x}) $$

De aquí que a (II-41,44) podamos escribirlas como:

$$ {}_0W_k''(\underline{x}) = \int_{S_+,S_-} \left\{ {}_0H_{ki}\,\tau_{ij}({}_0\underline{s}) - {}_0s_i\,{}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi $$

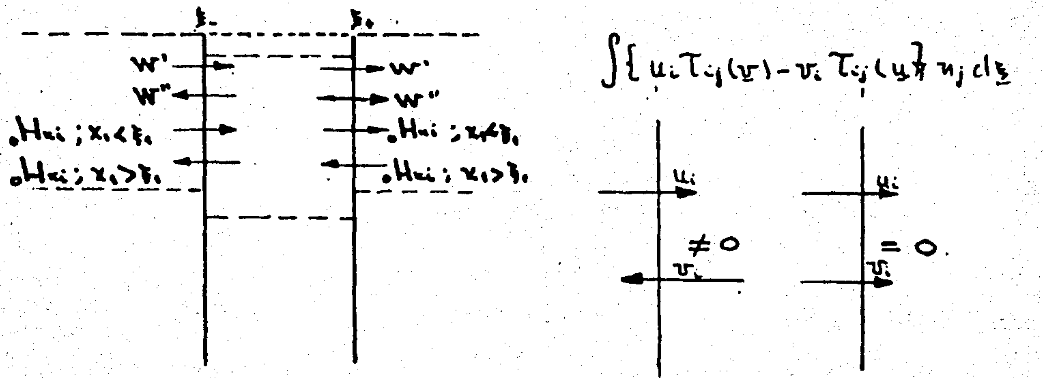
$$ + \int_{S_+,S_-} \left\{ {}_0H_{ki}\,\tau_{ij}({}_0\underline{b}) - {}_0b_i\,{}_0\tau_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi $$

Se ha demostrado =5= que las ondas de cuerpo y las ondas - superficiales son ortogonales. La segunda integral de la ecuación anterior difiere en términos de orden ϵ de aquella que define la relación de ortogonalidad, por tanto, una aproximación de orden cero para W_i'' estará dada por la primera integral, es decir, para la aproximación de orden cero dada por (II-41,44)- basta considerar, para puntos en S_+ y S_-, solo las contribuciones por ondas superficiales de ${}_0\underline{u}$.

II.3.2 DETERMINACION DE LAS FASES.

Hemos señalado en la sección I.6.1 la necesidad de obtener la aproximación de orden cero de tal modo que en ella se tomen en cuenta los cambios grandes de fase inducidos por las alteraciones de longitud grande de la frontera. Este resultado lo - lograremos eligiendo de un modo conveniente las fases , para lo cual usaremos las relaciones de ortogonalidad (I-36,37) y el hecho de que de acuerdo con la expresión (I-54) para el campo dispersado es generado por fuentes distribuidas en la frontera perturbada.

El uso que haremos de las relaciones de ortogonalidad se - entiende mejor con la ayuda de la figura 7a donde se encuentran indicadas las direcciones de las ondas que intervienen en las expresiones (II-41,44) de $_o\underline{W}''$.



(a) Direcciones de las ondas en S_+ y S_-.

(b) Ortogonalidad de las ondas superficiales $\underline{u}$, $\underline{v}$.

Figura 7

La figura 7b indica graficamente la relación de ortogonalidad. La única onda no conocida que interviene en las expresiones para $_oW_i''$ es W_i'', lo cual sugiere de inmediato que α_n, β_n deben ser tales que:

(II-45a)

i) Si $\underline{X} \in R_I$; $x_1<\xi_1$ entonces $_oH_{ki} = {_o}T_{ij}(\underline{H}_k) = 0$ en $\underline{\xi} \in S_-$

(II-45b)

ii) Si $\underline{X} \in R_{III}$; $x_1>\xi_1$ entonces $_oH_{ki} = {_o}T_{ij}(\underline{H}_k) = 0$ en $\underline{\xi} \in S_+$.

Aplicando estas condicones a (II-36,38) se sigue que:

$$\alpha_n = -(\bar{k}_n - k_n)(x_1 - \xi_-)$$

$$\beta_n = -(\bar{k}_n - k_n)(x_1 - \xi_+)$$

haciendo uso de estos resultados, podemos escribir a (II-36,38) como:

$$
{}_{0}H_{ki} = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{*(n)}(x_3)\, \overline{U}_i^{(n)}(\xi_3)\, e^{-i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle -i(\bar{k}_n - k_n)(\xi_1 - \xi_1)\rangle\right] & x_1 < \xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{(n)}(\bar{x}_3)\, \overline{U}_i^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle i(\bar{k}_n - k_n)(\xi_1 - \xi_1)\rangle\right] & x_1 > \xi_1 \end{cases} \qquad \text{(II-46)}
$$

$$
\tau_{ij}(\underline{H}_k) = \begin{cases} \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{*(n)}(x_3)\, \overline{\overline{T}}_{ij}^{(n)}(\xi_3)\, e^{-i\bar{k}_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle -i(\bar{k}_n - k_n)(\xi_1 - \xi_1)\rangle\right] & x_1 < \xi_1 \\ \sum_n \frac{1}{J_n} \overline{U}_k^{(n)}(x_3)\, \overline{\overline{T}}_{ij}^{*(n)}(\xi_3)\, e^{ik_n(x_1-\xi_1)} \left[1 - \exp\langle i(\bar{k}_n - k_n)(\xi_1 - \xi_1)\rangle\right] & x_1 > \xi_1 \end{cases} \qquad \text{(II-47)}
$$

II.4 SOLUCIONES.

Teniendo ya la forma explícita de los términos dependientes de x_1 en las representaciones dadas a la solución de orden cero (II-41,44) para puntos $\underline{x} \notin R_{II}$ suficientemente alejados de la zona perturbada, procederemos en esta sección a evaluarlas. Para puntos $\underline{x} \in R_{II}$ las aproximaciones de orden cero del campo total requerirán de un tratamiento especial.

Observando que los términos dependientes de x_1 en ${}_{0}H_{ki}$; ${}_{0}\tau_{ij}(\underline{H}_k)$ (II-46,47) están dados para el medio espacio modificado y en el campo incidente (II- 1,16) para el medio espacio no perturbado, se hace conveniente expresar al campo incidente como:

$$
W_k^i(\underline{x}) = \overline{U}_k^{(p)}(x_3)\, e^{ik_p x_1} + O(\epsilon). \qquad \text{(II-48)}
$$

pues de esta manera podremos utilizar directamente las relacio nes de ortogonalidad. La ecuación anterior se sigue de (II-1,16) y de (II-34).

II.4.1 DEPRESION EN LA SUPERFICIE.

Para evaluar aproximaciones de orden cero del campo total en puntos $\underline{x} \notin R_{I}$ consideraremos dos casos de la ecuación (II-41)

i) Si $\underline{x} \in R_{I}$ entonces en S_{-} de (II-45a) se sigue que ${}_{o}H_{ki}, {}_{o}\tau_{ij}(\underline{H}_{k})$ se anulan, por tanto:

$$
{}_{o}W''_{k}(\underline{x}) = \int_{S_{+}} \{ {}_{o}H_{ki} \tau_{ij}(\underline{W}') - W'_{i}\, {}_{o}\tau_{ij}(\underline{H}_{k}) \} n_j \, d\underline{\xi}
$$

$$
+ \int_{S_{+}} \{ {}_{o}H_{ki} \tau_{ij}({}_{o}\underline{W}'') - {}_{o}W''_{i}\, {}_{o}\tau_{ij}(\underline{H}_{k}) \} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-49)}
$$

donde $n_j = (-1,0,0)$ y hemos usado la relación (II-39b) para ${}_{o}u_{i}$.

La primera integral por la relación de ortogonalidad -- es nula (ver figura 7); usando (II-46,47,48) la ecuación anterior queda expresada por:

$$
{}_{o}W''_{k}(\underline{x}) \doteq -\sum_{n} \frac{1}{J_n} \overline{U}_{k}^{*(n)}(x_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)} [1-\exp\langle i(\overline{k}_n - k_n)L\rangle]
$$

$$
\cdot \left\{ \exp\langle ik_p \xi_1 \rangle \int_{\varepsilon}^{\infty} \{ \overline{U}_{i}^{(n)} \overline{\overline{T}}_{i1}^{(p)} - \overline{U}_{i}^{(p)} \overline{\overline{T}}_{i1}^{(n)} \} d\xi_3 \right\} \qquad \text{(II-50)}
$$

la cual, nuevamente, por la relación de ortogonalidad (I-37) - está dada por:

$$
{}_{o}W''_{k}(\underline{x}) = 0 \qquad ; \underline{x} \in R_{I}. \qquad \text{(II-51)}
$$

De (II-39b) se sigue que una aproximación de orden cero - del campo total, dada por (II-51), es:

$$
{}_{o}u(\underline{x}) = \overline{U}_{i}^{(p)}(x_3)\, e^{ik_p x_1} \quad ; \ \underline{x} \in R_{I} \qquad \text{(II-52)}
$$

ii) Si $\underline{x} \in R_{\text{II}}$ entonces en S_+ de (II-45b) se sigue que ${}_oH_{ki}$; ${}_oT_{ij}$ se anulan. De la relación (II-39b) para y de (II-51) se sigue que:

$$ {}_oW''_i(\underline{x}) = \int_S \{ {}_oH_{ki} T_{ij}(\underline{W}') - W'_i \, {}_oT_{ij}(\underline{H}_k) \} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-53)} $$

donde $n_j = (1,0,0)$. Haciendo uso en la ecuación anterior de -- (II-46,47,48) obtenemos:

$$ {}_oW''_i(\underline{x}) = \sum_n \frac{1}{J_n} \bar{U}_i^{(n)}(x_3) \exp\langle i\, k_n (x_1 - \xi_1) + i\, k_p \xi_1 \rangle $$
$$ \cdot [1 - \exp\langle i(\bar{k}_p - k_n) L \rangle] \left\{ \int_C \{ \bar{U}_i^{*(n)} \bar{T}_{i1}^{(p)} - \bar{U}_i^{(p)} \bar{T}_{i1}^{*(n)} \} d\xi_3 \right\}. $$
(II-54)

y, por la relación de ortogonalidad (I-36) obtenemos finalmente

$$ {}_oW''_i(\underline{x}) = -\bar{U}_i^{(p)}(x_3) [1 - \exp\langle i(\bar{k}_p - k_p) L \rangle] e^{i k_p x_1} \qquad \underline{x} \in R_{\text{III}}. \qquad \text{(II-55)} $$

De esta ecuación así como de las ecuaciones (II-39b,48) se sigue que una aproximación de orden cero del campo total es:

$$ {}_oU_i(\underline{x}) = \bar{U}_i^{(p)}(x_3) e^{i k_p x_1} \exp\langle i(\bar{k}_p - k_p) L \rangle \qquad \underline{x} \in R_{\text{III}}. \qquad \text{(II-56)} $$

iii) Si $\underline{x} \in R_{\text{I}}$ usamos la expresión (II-15) para el campo disperso. Dado que en la trayectoria de integración solo hay -- puntos interiores, tenemos que una aproximación de orden cero estará dada por:

$$ {}_oU_k(\underline{x}) = \int_{S_+, S_-} \{ \bar{G}_{ki} T_{ij}({}_o\underline{u}) - {}_ou_i T_{ij}(\bar{\underline{G}}_k) \} n_j \, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-57)} $$

la función de Green, así como ${}_ou_i$ podemos descomponerlas en sus contribuciones por ondas de cuerpo y ondas superficiales

$$
{}_0u_k(\underline{x}) = {}_0s_k(\underline{x}) + {}_0b_k(\underline{x}) = -\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{B}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{s}) - {}_0s_i\,T_{ij}(\bar{\underline{B}}_k)\right\} n_j\, d\xi
$$

$$
-\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{B}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{b}) - {}_0b_i\,T_{ij}(\bar{\underline{B}}_k)\right\} n_j\, d\xi
$$

$$
-\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{S}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{s}) - {}_0s_i\,T_{ij}(\bar{\underline{S}}_k)\right\} n_j\, d\xi
$$

$$
-\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{S}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{b}) - {}_0b_i\,T_{ij}(\bar{\underline{S}}_k)\right\} n_j\, d\xi \qquad \text{(II-58)}
$$

La primera y cuarta integrales son de orden ε porque difieren en ese orden de las integrales que definen la relación de ortogonalidad entre las ondas superficiales y las ondas de cuerpo. Dado que la segunda y tercera integrales solo dan ondas de cuerpo y ondas superficiales respectivamente, podemos escribir:

$$
{}_0\underline{s}_k = -\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{S}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{s}) - {}_0s_i\,T_{ij}(\bar{\underline{S}}_k)\right\} n_j\, d\xi \qquad \text{(II-59)}
$$

$$
{}_0\underline{b}_k = -\int_{S_+,S_-}\left\{\bar{B}_{ki}\,T_{ij}({}_0\underline{b}) - {}_0b_i\,T_{ij}(\bar{\underline{B}}_k)\right\} n_j\, d\xi \qquad \text{(II-60)}
$$

Las contribuciones de las ondas de cuerpo a la aproximación de orden cero del campo total dadas por (II-60) nos son desconocidas por serlo los integrandos. Sin embargo, podemos evaluar las contribuciones dadas por ondas superficiales. En efecto, recordando que para puntos $\underline{x} \notin R_{II}$ alejados de la perturbación las aproximaciones de orden cero del campo total son ondas superficiales (II-52,56) y observando que para puntos cercanos fuera de R_{II} las aproximaciones de orden cero del campo total diferirán de las aproximaciones en puntos alejados por términos de orden cero asociados a ondas de cuerpo podremos utilizar a las expresiones (II-52,56) como contribuciones por ondas superficiales a orden cero ($_0S_i$) del campo total en S_- y S_+ respectivamente. Así, los integrandos de (II-59) son conocidos y podemos escribir a $_0\underline{S}$ como:

$$_0S_k(\underline{x}) = \sum_n \frac{1}{J_n} \bar{U}_k^{*(n)}(x_3)\, e^{-i\bar{k}_n(x_1-\xi_+)+ik_p\xi_+} \exp\langle i(\bar{k}_p-k_p)L\rangle \cdot \left\{ \int_\varepsilon^\infty \{ \bar{U}_i^{(n)} \bar{T}_{i1}^{(p)} - \bar{U}_i^{(p)} \bar{T}_{i1}^{(n)} \} d\xi_3 \right\}_{\xi_1=\xi_+}$$

$$- \sum_n \frac{1}{J_n} \bar{U}_k^{(n)}(x_3)\, e^{i\bar{k}_n(x_1-\xi_-)+ik_p\xi_-} \cdot \left\{ \int_\varepsilon^\infty \{ \bar{U}_i^{*(n)} \bar{T}_{i1}^{(p)} - \bar{U}_i^{(p)} \bar{T}_{i1}^{*(n)} \} d\xi_3 \right\}_{\xi_1=\xi_-} \qquad \text{(II-61)}$$

Usando las relaciones de ortogonalidad (I-36,37) la ecuación -- anterior se reduce a:

$$_0S_k(\underline{x}) = \bar{U}_k^{(p)}(x_3)\, e^{i\bar{k}_p x_1} \exp\langle -i(\bar{k}_p-k_p)\xi_-\rangle \qquad \underline{x} \in R_{II} \qquad \text{(II-62)}$$

II.4.2 PERTURBACION EN UNA INTERFASE.

La aproximación de orden cero está dada por (II-44) :

$$_0W_k^u(\underline{x}) = \int_{S_+,S_-} \{ {_0H_{ki}}(\underline{\xi},\underline{x}) T_{ij}({_0\underline{u}}) - {_0u_i}(\underline{\xi})\, {_0T_{ij}}(\underline{H}_k) \} n_j\, d\underline{\xi} \qquad \underline{x} \notin R_{II} \qquad \text{(II-63)}$$

Para evaluarla explicitamente conviene considerar dos casos

i) Si $\underline{x} \in R_I$ por (II-45a) $_0H_{ki}$; $_0T_{ij}(\underline{H})$ son nulos en S_-, por tanto:

$$_0W_k^u(\underline{x}) = \int_{S_+} \{ {_0H_{ki}} T_{ij}({_0\underline{u}}) - {_0u_i}\, {_0T_{ij}}(\underline{H}_k) \} n_j\, d\xi_3 \qquad \text{(II-64)}$$

donde $n_j=(-1,0,0)$. De (II-39b) se sigue que:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = \int_{S_+} \{ {}_0H_{ki}\, T_{ij}(\underline{W}') - W'_i\, {}_0T_{ij}(\underline{H}_k) \} n_j\, d\underline{\xi} $$

$$ + \int_{S_1} \{ {}_0H_{ki}\, T_{ij}({}_0\underline{W}'') - {}_0W''_i\, {}_0T_{ij}(\underline{H}_k) \} n_j\, d\underline{\xi} \qquad \text{(II-65)} $$

Del teorema de descomposición se sigue que las ondas del cam po dispersado viajan hacia la derecha en S_+, de aquí que podamos escribir a ${}_0W''$ salvo términos de orden ϵ en la forma:

$$ {}_0W''_i = \sum_r A^{(r)}\, \overline{U}_i^{(r)}(x_3) $$

Usando (II-46,47,48) la expresión (II-65) para ${}_0\underline{W}''$ queda:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = \sum_n \frac{1}{\overline{J}_n}\, \overline{U}_k^{*(n)}(x_3)\, e^{-ik_n(x_1-\xi_1)} [1-\exp\langle -i(\overline{k}_n - k_n)L\rangle] $$

$$ \left\{ e^{ik_p\xi_1} \int_0^{\infty} [\, \overline{U}_i^{(n)}\, \overline{\overline{T}}_{i1}^{(p)} - \overline{U}_i^{(p)}\, \overline{\overline{T}}_{i1}^{(n)}]\, d\xi_3 \right\} $$

$$ + \sum_r A^{(r)} \int_0^{\infty} \{ \overline{U}_i^{(n)}\, \overline{\overline{T}}_{i1}^{(r)} - \overline{U}_i^{(r)}\, \overline{\overline{T}}_{i1}^{(n)} \}\, d\xi_3 \qquad \text{(II-66)} $$

De la relaión de ortogonalidad (I-37) se sigue que:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = 0 \qquad ; \ \underline{x} \in R_I \qquad \text{(II-67)} $$

Usando finalmente (II-39b) y (II-48) una solución aproxima da de orden cero del campo total estará dada por:

$$ {}_0U_k(\underline{x}) = \overline{U}_k^{(p)}\, e^{ik_p x_1} \quad \underline{x} \in R_I \qquad \text{(II-68)} $$

ii) Si $\underline{y} \in R_{III}$, de (II-45b) la integral sobre S_+ de (II-63) es nula. De (II-39b,67) se sigue que:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = \int_{S_\cdot} \left\{ {}_0H_{ki}\, T_{ij}(\underline{W}') - W'_i\, {}_0T_{ij}(\underline{H}_k) \right\} n_j\, d\xi \qquad \underline{x} \in R_{III} \qquad \text{(II-69)} $$

donde $n_j=(1,0,0)$. De (II-46,47,48) se sigue que la expresión - (II-69) es igual a:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = \sum_n \frac{1}{J_n} \bar{U}_k^{(n)}(x_3)\, e^{i k_n (x_1 - \xi_0) + i k_p \xi_-} \left[1 - \exp\langle i(\bar{k}_n - k_n)L \rangle \right] $$

$$ \cdot \int_0^\infty \left\{ \bar{U}_i^{*(n)} \bar{T}_{i1}^{(p)} - \bar{U}_i^{(p)} \bar{T}_{i1}^{*(n)} \right\} d\xi_3 \qquad \text{(II-70)} $$

Por la relación de ortogonalidad (I-36) obtenemos:

$$ {}_0W''_k(\underline{x}) = -\bar{U}_k^{(p)}\, e^{i k_p x_1} \left[1 - \exp\langle i(\bar{k}_p - k_p)L \rangle \right. \qquad \underline{x} \in R_{III} \qquad \text{(II-71)} $$

De esta última ecuación y de (II-39b) obtenemos una solu -- ción aproximada de orden cero para el campo total:

$$ {}_0U_i(\underline{x}) = \bar{U}_k^{(p)}\, e^{i k_p x_1} \exp\langle i(\bar{k}_p - k_p)L \rangle \qquad \underline{x} \in R_{III} \qquad \text{(II-72)} $$

iii) Si $\underline{x} \in R_{II}$. Si partimos de (II-28) y procedemos de modo similar a lo hecho en la sección anterior, obtendremos una aproximación de orden cero de las contribuciones por ondas superficiales al campo total dada por:

$$ {}_0S_k(\underline{x}) = \bar{U}_k^{(p)}(x_3)\, e^{i k_p x_1} \exp\langle -i(\bar{k}_p - k_p)\xi_- \rangle \qquad \underline{x} \in R_{II} \qquad \text{(II-73)} $$

II.5 INTERPRETACION FISICA DE LOS RESULTADOS.

Las contribuciones de las ondas suerficiales a las soluciones de orden cero, tanto del problema de la depresión en la superficie como del problema de la perturbación en la interfase, dadas por (II-52,56,62) y (II-68,72,73) respectivamente, permiten una interpretación física sencilla de la dispersión por este tipo de perturbaciones de una onda superficial incidente.

Cuando la perturbación tiene longitud larga en el eje x_1, las ondas que viajan a lo largo de ella se "acomodan" a lo que hemos llamado el medio modificado. Es decir, debido a la longitud larga las ondas superficiales toman los modos asociados a un medio espacio que satisface las condiciones en la frontera dadas para la subregión R_{II} y que viajan con la velocidad correspondiente.

Este cambio brusco en la velocidad inducirá modificaciones grandes en la fase de salida respecto a la onda asociada al medio original. Esto se toma en cuenta en las expresiones (II-56) y (II-72).

Hemos demostrado esencialmente que el proceso arriba descrito es el que induce los cambios grandes de fase, y que las contribuciones,apreciables en el orden cero de aproximación, no pueden ser producidas por otros mecanismos para puntos de observación suficientemente alejados de la perturbación.

II.6 CONCLUSION.

La inconsistencia con las hipótesis del método de perturbaciones hallada por MAL y HERRERA =15= al aplicarlo al tipo de perturbaciones ya señalado queda eliminada.

En la sección II.3 queda mostrado el modo de perturbar la solución para lograr lo indicado. La aproximación de orden cero se obtiene considerando a la velocidad de las ondas superficiales en los distintos modos como una función de la posición. Esta velocidad es igual en cada una de las regiones a la velocidad de ondas superficiales asociadas con un medio espacio con el espesor de capas correspondiente a cada una de dichas regio nes. Las amplitudes de cada uno de los modos separadamente no sufren cambios de amplitud en este orden de aproximación. La - amplitud total de una onda,sin embargo, sufre cambios de ampli tud que son el resultado de interferencias y superposiciones - debidos a los cambios de velocidad de los diversos modos, los cuales son distintos entre sí.

APENDICE A

BIBLIOGRAFIA

=1= De HOOP A.T. Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their applications to elastodynamics diffraction theory. Tesis doctoral c. III Technische Hogeschool, Delft. (1958)

=2= EWING, JARDETSKY, PRESS Elastic waves in a layered media. Mac Graw-Hill, New York, (1957).

=3= FREDRICKS R.W. Scattering of elastic pulses by obstacles of infinite impedance and semi-infinite dimension on the surface of a half space. Tesis doctoral Universidad de California. Los Angeles (1959)

=4= HELLWING G. Partial differential equations. Blaisdell Publishing Company. New York. (1964).

=5= HERRERA I. On a method to obtein a Green's function for a multi-layared half space. Bull. Seism. Soc. of Am. v.54 - pp. 1087-1096 (1964).

=6= HERRERA I. Contribution to the linearized theory of surface wave transmission. Bull. Seism. Soc. of Am. v.69 -- pp. 4791-4800 (1964).

=7= HERRERA I. A perturbation method for elastic wave propagation I. Non parallel boundaries. J. Geophys. Rev. V.69 - pp. 3845-3851 (1964).

=8= HERRERA I., MAL A.K. A perturbation method for elastic wave propagation II. Small inhomogeneities. J. Geophys. - Rev. v.70 pp. 871-883 (1965)

=9= HERRERA I. Un método de perturbaciones para propagación - de ondas elásticas. III. Inhomogeneidades delagadas. Geofísica Internacional v.5 pp. 1-14 (1965)

=10= KNOPOFF L. Diffraction of elastic waves. J. Acoust. Soc. Am. V.28 pp. 217-229 (1956)

=11= KNOPOFF L., J.A. HUDSON Transmission of Love waves past a continental margin. J. Geophys. Res. v. 69 pp. 217-229 (1964)

=12= KNOPOFF L. , J.A. HUDSON Scattering of elastic waves by samal inhomogeneities. J. Acoust. Soc. Am. v.36 pp. 338 a 343 (1964).

=13= KUPRADZE V.D. Progress in solid mechanics. V. III John Wiley & Sons, Inc. New York. (1963).

=14= LOVE A.E. Some problems of Geodynamics. Cambridge University Press. (1926).

=15= MAL A.K., I. HERRERA Scattering of Love waves by a constriction in the crust. Se publicará en el J. Geophys. Res.

=16= SOKOLNIKOFF I.S. Mathematical theory of elasticity. sec.25 Mac Graw-Hill. New York. (1956).

=17= STOKER J.J., A.S. PETERS A uniqueness theorem and a new solution for Sommerfeld's and other diffraction problems. - Comm. Pure Appl. Math. v.7 pp. 565-586 (1954)

=18= STOKER J.J. Some remarks on radiation conditions. Proc. of Symposia Appl. Math. v.5 "Wave motion and vibration theory". Am. Math. Soc. (1954).

=19= STOKER J.J. On radiation conditions. Trans. of the Symposium on partial differential equations. Universidad de California. (1955)

=20= STOKER J.J. On radiation conditions. Comm. Pure Appl. Math. v.9 pp. 577-595 (1956).

A P E N D I C E B

N O T A C I O N.

La integral:

$$\int_S \tau_{ij}\, n_j \, d\underline{\xi}$$

es una integral de superficie sobre S con respecto a la variable de integración $\underline{\xi}$ y

$$\int_R f_i u_i \, d\underline{x}$$

es una integral sobre la región R con respecto a la variable $\underline{x}$.