UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESPACIOS $L\Sigma(\leq\kappa)$ Y $(L\Sigma, L\Sigma)$-ESTRUCTURADOS:
ALGUNOS NUEVOS RESULTADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

CARLOS GERARDO PANIAGUA RAMÍREZ

DIRECTOR DE LA TESIS

DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DR. OLEG OKUNEV
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

MÉXICO, D. F. AGOSTO DE 2014

Espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados: Algunos Nuevos Resultados

Carlos Gerardo Paniagua Ramírez

Contenido

Introducción

Un espacio topológico es Lindelöf, o tiene la propiedad de Lindelöf, si toda cubierta abierta tiene una subcubierta numerable. La propiedad de Lindelöf fue introducida por P.S. Alexandroff y P. Urysohn en 1929, el término "Lindelöf" se derivó de un resultado de E. Lindelöf que establece que cualquier familia de subconjuntos abiertos de un espacio euclideano tiene una subfamilia numerable con la misma unión.

La noción de espacio Σ fue introducida por Nagami en 1969 en su artículo Σ-*spaces* [**14**], teniendo como objetivo conseguir una clase de espacios en la cual las propiedades de cubiertas se comporten bien al considerar productos. Una importante subclase de la clase de los espacios Lindelöf, que se obtiene al intersectar ésta con la clase de los espacios de Nagami, es la clase de los espacios Lindelöf Σ.

La clase de los espacios Lindelöf Σ es sumamente importante tanto en Topología General como en otras áreas de Matemáticas, ejemplo de ello son el Análisis Funcional y la Teoría Descriptiva de Conjuntos.

En Análisis Funcional los espacios Lindelöf Σ surgen de manera natural cuando se trabaja con los subespacios compactos de los espacios de Banach con topologías débiles. Por esa razón es que en esa área de las matemáticas se les da el nombre de *espacios débilmente generados por compactos.* En Teoría Descriptiva de Conjuntos los espacios Lindelöf Σ aparecen como una generalización de los espacios K-analíticos y reciben el nombre de *espacios numerablemente K-determinados.*

Es importante mencionar que lo basto del campo de aplicaciones de esta clase de espacios topológicos se debe a que se llega a definirla al buscar unir el estudio de espacios compactos y de espacios segundo numerables. Esta clase de espacios es la menor clase que contiene a la clase de espacios compactos, a la clase de espacios metrizables separables y que es cerrada bajo productos numerables, subespacios cerrados e imágenes continuas.

La noción de mapeo multivaluado superiormente semicontinuo ha sido de gran utilidad para dar una elegante caracterización de los espacios Lindelöf Σ: un espacio topológico X es Lindelöf Σ si y sólo si existen un espacio metrizable separable M y un mapeo compactamente valuado superiormente semicontinuo $p : M \to X$ tal que $p(M) = X$.

Inspirados en esta caracterización, W. Kubiš, O.G. Okunev y P.J. Szeptycki introdujeron por primera vez en su artículo [**12**] a los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$: Si κ es un cardinal, se dice que un espacio X es $L\Sigma(\leq \kappa)$ si existen un espacio segundo numerable M y un mapeo compactamente valuado superiormente semicontinuo $p : M \to X$ tal que $p(M) = X$ y $w(p(m)) \leq \kappa$ para toda $m \in M$, donde $w(p(m))$ denota al peso del subespacio $p(m)$.

Desde su surgimiento, los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ han sido objeto de estudio con la idea de entender mejor las propiedades de los espacios Lindelöf Σ.

Uno de los problemas más interesantes e intrincados en la teoría de los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ es el problema relacionado con la preservación de la propiedad de ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$ por mapeos finito valuados y superiormente semicontinuos. Es relevante hacer ver que gran parte de la dificultad para solucionar este problema está en el hecho de que en realidad se está planteando una serie de preguntas relacionadas a la posibilidad de que algunas construcciones topológicas preserven la propiedad de ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$.

Para ejemplificar, la construcción del duplicado de Alexandroff $AD(X)$ de un espacio X define un mapeo dos-valuado del espacio X en el espacio $AD(X)$ y uno puede hacerse la pregunta de si al considerar el duplicado de Alexandroff de un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, éste vuelve a ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$. Esta pregunta fue un problema planteado por O. G. Okunev en su artículo [**15**] de *Open Problems in General Topology II* (ver problema 15 (146)).

La búsqueda de la solución al problema relacionado al duplicado de Alexandroff de un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, motivó las investigaciones que el autor de este trabajo de tesis realizó sobre el tema, y cuyas conclusiones están plasmadas en el artículo de investigación [**5**]. La intención del Capítulo 2 de este trabajo de tesis doctoral, es exponer los resultados obtenidos en dicha investigación. A continuación damos un resumen de los principales resultados que se exponen en el Capítulo 2:

(1) Si Y es un espacio $L\Sigma(n)$ y X es un espacio $L\Sigma(m)$. Entonces el espacio $X \times Y$ es un espacio $L\Sigma(\kappa)$, con κ un valor acotado entre $n+m-1$ y nm (Teorema 2.1).

(2) Si X es un espacio tal que su potencia X^ω pertenece a la clase $L\Sigma(< \omega)$, entonces X es un espacio cósmico (Corolario 2.4).

(3) Dadas dos familias casi ajenas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ el producto de las compactaciones de Alexandroff de sus Ψ-espacios asociados, $\alpha(\Psi(\mathcal{A})) \times \alpha(\Psi(\mathcal{B}))$ pertenece a la clase $L\Sigma(4)$ si alguna de las familias tiene cardinalidad mayor a ω_1, y será elemento de $L\Sigma(3)$ si ambas familias tienen cardinalidad ω_1 (Teorema 2.9).

(4) Si X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, lo mismo ocurre con su duplicado de Alexandroff $AD(X)$ (Teorema 2.17).

Es importante mencionar que los resultados de los incisos (2) y (3) resuelven, respectivamente, el problema 7.4 de [**12**] y el problema 3(134) de [**15**] en *Open Problems in General Topology II.*

En [**2**] A. V. Arhangel'skii, en un estudio sobre residuos de espacios metrizables, introduce una nueva clase de espacios topológicos que generaliza a la clase de los espacios Lindelöf Σ: la clase de los espacios Charming (o espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados). Esta nueva clase de espacios resulta muy relevante en el contexto de este trabajo, ya que es una clase intermedia entre la clase de los espacios Lindelöf y la de los espacios Lindelöf Σ.

La intención del Capítulo 3 es presentar los resultados obtenidos por el autor en la investigación realizada sobre espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados. Dicha investigación ha permitido concretar el artículo de investigación [**6**]. Consideramos que esta nueva subclase de espacios Lindelöf tiene propiedades interesantes. En los resultados presentados se pone de manifiesto que el comportamiento de algunas propiedades topológicas en la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados, es similar al que ellas tienen en la clase de espacios $L\Sigma$; pero también existen propiedades topológicas cuyo comportamiento en la clase de espacios Charming se asemeja mucho más al comportamiento de ellas en la clase de los espacios Lindelöf.

Algunos de los resultados obtenidos en [**6**] que nos parece importante destacar son los siguientes:

(1) El producto de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados no es necesariamente un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado (Ejemplo 3.12).

(2) Para todo espacio $X \in L\Sigma$ existe un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado que no es $L\Sigma$ y que cuenta con un núcleo homeomorfo a X (Corolario 3.15).

(3) En la clase de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados coinciden las propiedades de ser un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado y ser un espacio $L\Sigma$. En particular, en los espacios de funciones $C_p(X)$, las propiedades de ser espacios $L\Sigma$ y $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado coinciden (Corolario 3.30).

(4) Sea X un espacio compacto. Entonces son equivalentes: $C_p(X)$ es un espacio $L\Sigma$ y $C_p(X)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado (Corolario 3.34).

Estos resultados nos permiten afirmar que la clase de la espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados es una clase bastante interesante. El segundo resultado nos permite considerar subclases de la misma con propiedades específicas, como ejemplo de ello podemos afirmar que las clases de los espacios $(L\Sigma(\leq n), L\Sigma)$-estructurados son no vacías.

Algunos otros resultados en [**6**], que exponemos en este trabajo de tesis, están relacionados con levantamiento de propiedades topológicas. Recuerde el lector que si un espacio topológico X se condensa (esto es, existe una biyección continua) sobre un espacio topológico Y con alguna propiedad $\mathcal{P}$, esto no implica que el espacio topológico X posee la propiedad $\mathcal{P}$. En este sentido, diremos que la propiedad $\mathcal{P}$ no es levantada por condensaciones (por ejemplo, la recta de Sorgenfrey se condensa sobre $\mathbb{R}$ pero la recta de Sorgenfrey es cerodimensional y $\mathbb{R}$ es conexo, de modo que la conexidad no es levantada por condensaciones). Y es claro que si X es compacto entonces esta situación cambia drásticamente. De modo que, es natural imponer propiedades cercanas a la compacidad al espacio X. En [**19**] V.V. Tkachuk realizó un primer estudio sistemático de esta situación. Él demostró que muchas propiedades topológicas $\mathcal{P}$ pueden ser levantadas por condensaciones cuando X es un espacio Lindelöf Σ. Dado que la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados es una generalización de la clase de los espacios Lindelöf Σ, es natural preguntarse si los resultados de Tkachuk admiten generalización a esta nueva clase de espacios o alguna subclase que contenga a los espacios Lindelöf Σ. En este trabajo de tesis presentamos resultados que generalizan algunos resultados de [**19**]. Por ejemplo, demostramos que si κ es un cardinal infinito y X es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado que se condensa en un espacio κ-monolítico, entonces X es κ-monolítico. Además mostramos que la propiedad de ser un espacio κ-monolítico puede ser levantada a cierta clase de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados.

Finalmente hago patente mi agradecimiento al apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT) clave IN115312.

Carlos Gerardo Paniagua Ramírez
Agosto de 2014.

CAPÍTULO 1

La clase de los espacios $L\Sigma(\leqslant \kappa)$

1. Introducción

El único requisito para la lectura de esta obra es el conocimiento de algunos hechos básicos de Topología General y algunos otros acerca de los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$.

La referencia básica para cualquier tema de Topología General es la obra de R. Engelking [**9**]; y a ella nos remitimos para cualquier resultado y notación relacionada a la Topología General. Para la parte relacionada a los espacios Lindelöf $\Sigma(\leq \kappa)$, el lector puede hallar en la bibliografía algunas referencias que tratan la parte básica del tema. En este capítulo desarrollamos principalmente algunos resultados, no propiamente básicos, relacionados a los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ que aparecen en el artículo original de W. Kubiš, O.G. Okunev y P.J. Szeptycki [**12**].

A través de todo el presente trabajo supondremos que todos nuestros espacios son espacios de Tychonoff, es decir, espacios completamente regulares y de Hausdorff.

2. Tipos especiales de espacios Lindelöf Σ

Un espacio topológico X es un espacio Lindelöf Σ si es un espacio Lindelöf y es también un espacio Σ en el sentido de Nagami [**14**]; es decir, X es un espacio Lindelöf para el cual existen una cubierta $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados numerablemente compactos de X y una familia σ-discreta $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X la cual es una *red con respecto a* $\mathcal{C}$, esto es, para todo $C \in \mathcal{C}$ y todo $V \subseteq X$ abierto con $C \subseteq V$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq V$.

La conjunción de la propiedad de Lindelöf y la compacidad numerable trae como consecuencia la siguiente caracterización de espacios Lindelöf Σ.

1.1. Proposición. Un espacio X es un espacio Lindelöf Σ si y sólo si existe una cubierta $\mathcal{C}$ de subconjuntos compactos de X y una red numerable $\mathcal{N}$ respecto de $\mathcal{C}$

Demostración. En primer lugar verificaremos que la condición es necesaria. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta cerrada para X formada por subespacios numerablemente compactos, y sea $\mathcal{N}$ una familia σ-discreta de subconjuntos de X que es red respecto de $\mathcal{C}$. Dado que los elementos de la cubierta $\mathcal{C}$ son subespacios cerrados de X, éstos heredan de X la propiedad de ser espacio Lindelöf. Como cualquier espacio de Lindelöf numerablemente compacto es un espacio compacto, cada uno de los elementos de la cubierta $\mathcal{C}$ resulta ser un subespacio compacto de X. Ahora, dado que en un espacio Lindelöf toda familia discreta es a lo más numerable, tenemos que la familia $\mathcal{N}$ es también numerable.

Probemos ahora la suficiencia de la condición. Supongamos que existen una cubierta $\mathcal{C}$ para X formada por subespacios compactos de X y una red numerable $\mathcal{N}$ para X con respecto a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{N}$ es numerable, $\mathcal{N}$ es una familia σ-discreta de subconjuntos de X. Por lo que, para mostrar que X es un espacio Lindelöf Σ, sólo resta mostrar que el espacio X tiene la propiedad de Lindelöf.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X y sea $\mathcal{U}^f$ la familia obtenida a partir de $\mathcal{U}$ al considerar todas las posibles uniones finitas de los elementos de $\mathcal{U}$. Es evidente que el encontrar una subcubierta numerable para X de la cubierta $\mathcal{U}^f$ nos proporciona una subcubierta numerable de la cubierta original $\mathcal{U}$. Ahora bien, para encontrar dicha subcubierta, llamaremos a un elemento N de $\mathcal{N}$ *distinguido* si existe una familia finita $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ para la cual se cumpla que $N \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Si $N \in \mathcal{N}$ es un elemento distinguido, elijamos un elemento U_N de $\mathcal{U}^f$ de tal manera que $N \subseteq U_N$. Consideremos ahora la familia

$$\mathcal{W} = \{U_N : N \in \mathcal{N} \ \ y \ \ N \ es \ distinguido\}.$$

Es claro que $\mathcal{W}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{U}^f$. Más aún, $\bigcup \mathcal{W} = X$. En efecto, consideremos un elemento $x \in X$. Dado que $\mathcal{C}$ es una cubierta para X, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Como el conjunto C es compacto y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, y desde luego de C, es posible elegir un elemento $U \in \mathcal{U}^f$ para el cual se cumpla $C \subseteq U$. Ahora, dado que $\mathcal{N}$ es una red para X con respecto a la cubierta $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq U$. Con ello podemos afirmar que dicho N es un elemento distinguido de $\mathcal{N}$. Por lo tanto, existe un elemento $U_N \in \mathcal{W}$ que cumple $x \in C \subseteq N \subseteq \bigcup U_N$. Esto demuestra que $\mathcal{W}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{U}^f$. $\square$

Otra caracterización de los espacios Lindelöf Σ particularmente importante para nuestros propósitos es aquella dada en [**12**], en términos de mapeos compactamente valuados superiormente semicontinuos. Por *mapeo multivaluado*, también conocido como función conjunto-valuada, $p : X \to Y$ haremos referencia a una función $p : X \to \mathcal{P}(Y)$.

1.2. Definición. Sean X y Y espacios topológicos.

(1) Un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es *compacto-valuado* si para todo $x \in X$, el conjunto $p(x)$ es compacto.
(2) Un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es *superiormente semicontinuo* si para todo $x_0 \in X$ y toda vecindad V de $p(x_0)$, el conjunto $\{x \in X : p(x) \subseteq V\}$ es una vecindad de x_0, o equivalentemente, si para todo abierto V de Y, el conjunto $p^{\#}(V) = \{x \in X : p(x) \subseteq V\}$ es abierto en X.

Otra equivalencia de semicontinuidad superior es la siguiente: Un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es superiormente semicontinuo si para todo conjunto cerrado $H \subseteq Y$, el conjunto $p^{-1}(H) = \{x \in X : p(x) \cap H \neq \emptyset\}$ es cerrado en X.

De ahora en adelante las siglas *cvss* significarán la frase "compactamente valuado superiormente semicontinuo".

Es importante mencionar que siempre que $f : X \to Y$ sea una función, emplearemos la misma letra f para denotar al mapeo multivaluado $f : X \to Y$ dado por $f(x) = \{f(x)\}$. De este modo, toda función puede ser identificada naturalmente con un mapeo 1-valuado. Por otra parte, siempre que f es una función, f^{-1} define un mapeo multivaluado.

1.3. Observación. Las siguientes afirmaciones son sencillas de verificar:

(1) Un mapeo 1-valuado f es cvss si y sólo si es continuo.
(2) Si $f : X \to Y$ es un mapeo 1-valuado, continuo y sobreyectivo, entonces f^{-1} es cvss si y sólo si f es perfecta.
(3) Si $F \subseteq X$ y $i_F : F \to X$ es el mapeo inclusión, entonces $i_F^{-1} : X \to F$ es cvss si y sólo si F es cerrado en X.

Si $p : X \to Y$ es un mapeo multivaluado y $A \subseteq X$, entonces definimos *la imagen de A bajo p* como el conjunto:

$$p(A) = \bigcup_{x\in A} p(x).$$

Asimismo, se define la *composición* de dos mapeos multivaluados $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ como el mapeo multivaluado

$$q \circ p : X \to Z$$

dado por $(q \circ p)(x) = q(p(x))$ para cada $x \in X$. Esto es, $q(p(x))$ es la imagen de $p(x)$ bajo q.

A continuación demostraremos algunas afirmaciones relacionadas a mapeos compactamente valuados que nos serán de utilidad más adelante.

1.4. Proposición.

(1) Si Y es la imagen de X bajo un mapeo cvss, entonces $l(Y) \leq l(X)$. Además, si X es compacto, Y también lo es.
(2) La composición de mapeos cvss es un mapeo cvss.

(3) Si $p : X \to Y$ es un mapeo cvss y $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado. Entonces la restricción de p a F, $p_F : F \to Y$, definida como $p_F(x) = p(x)$ para cada $x \in F$ es un mapeo cvss.

Demostración. (1) Supongamos que $p : X \to Y$ es un mapeo cvss tal que $p(X) = Y$. Sea $\mathcal{W}$ una cubierta abierta para Y. Mostraremos que es posible extraer una subcubierta abierta de $\mathcal{W}$ de cardinalidad menor o igual que $l(X)$.

Para toda $x \in X$, la colección $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta para $p(x)$. Como $p(x)$ es compacto, existe una subcolección finita $\mathcal{W}_x$ de $\mathcal{W}$ tal que $p(x) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_x$. Dado que p es superiormente semicontinuo, resulta que el conjunto $p^{\#}(\bigcup \mathcal{W}_x)$ es un conjunto abierto en X que además cumple $x \in p^{\#}(\bigcup \mathcal{W}_x)$ para cada $x \in X$. Entonces la familia

$$\mathcal{V} = \{p^{\#}(\bigcup \mathcal{W}_x) : x \in X\}$$

es una cubierta abierta del espacio X. Por lo tanto, es posible extraer una subcubierta $\mathcal{V}^*$ de $\mathcal{V}$ de cardinalidad menor o igual que $l(X)$. Esto es, existe un subconjunto X^* de X de cardinalidad menor o igual que $l(X)$ tal que la colección

$$\mathcal{V}^* = \{p^{\#}(\bigcup \mathcal{W}_x) : x \in X^*\}$$

es una cubierta abierta de X.

Sea $\mathcal{W}^*$ la subcolección de $\mathcal{W}$ definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{W}^* = \bigcup \{\mathcal{W}_x : x \in X^*\}.$$

Esta familia es una cubierta abierta para Y, de cardinalidad menor o igual que $l(X)$. De donde podemos concluir que $l(Y) \leq l(X)$.

Por otra parte, si X es compacto, existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que la familia

$$\mathcal{V}^* = \{p^{\#}(\bigcup \mathcal{W}_{x_i}) : 1 \leq i \leq n\}$$

es una cubierta abierta de X. Donde $\mathcal{V}^*$ y $\mathcal{W}_{x_i}$ son tal y como se definieron en los párrafos anteriores.

Sea $\mathcal{W}^*$ la subcolección de $\mathcal{W}$ definida mediante:

$$\mathcal{W}^* = \{W \in \mathcal{W} : \exists i \leqslant n, W \in \mathcal{W}_{x_i}\}.$$

Esta familia es una cubierta abierta finita para Y. Por lo tanto, Y es compacto.

(2) Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ mapeos cvss. Mostraremos que el mapeo composición $q \circ p : X \to Z$ es cvss. Para ello, sea V un subconjunto abierto de Z. En primer lugar verificaremos que se cumple la igualdad $(q \circ p)^{\#}(V) = p^{\#}(q^{\#}(V))$.

Observemos que

$$\begin{aligned} x \in (q \circ p)^{\#}(V) \ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ q(p(x)) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{y \in p(x)} q(y) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall y \in p(x),\ q(y) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall y \in p(x),\ y \in q^{\#}(V) \\ &\Leftrightarrow\ p(x) \subseteq q^{\#}(V) \\ &\Leftrightarrow x \in p^{\#}(q^{\#}(V)). \end{aligned}$$

Haciendo uso de esta igualdad y la semicontinuidad superior de los mapeos p y q, obtenemos fácilmente que el conjunto $(q \circ p)^{\#}(V) = p^{\#}(q^{\#}(V))$ es un subconjunto abierto de X.

Ahora demostraremos que el mapeo $q \circ p$ es compacto valuado. Tomemos $x \in X$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta en Z para $q(p(x)) = \bigcup\{q(y) : y \in p(x)\}$. Entonces, para toda $y \in p(x)$, la colección $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para $q(y)$. Como $q(y)$ es compacto, existe una subcolección finita $\mathcal{U}_y$ de $\mathcal{U}$ tal que $q(y) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_y$. Utilizando la semicontinuidad superior de q, resulta que el conjunto $q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y)$ es abierto en Y y además $y \in q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y)$ para toda $y \in p(x)$. Entonces la familia

$$\mathcal{V} = \{q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_y) : y \in p(x)\}$$

es una cubierta abierta de $p(x)$. Nuevamente, como $p(x)$ es compacto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in p(x)$ tales que

$$p(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} q^{\#}(\bigcup \mathcal{U}_{y_i}).$$

Entonces la colección $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{y_i}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ que cubre a $q(p(x)) = \bigcup\{q(y) : y \in p(x)\}$. Por lo tanto $q(p(x))$ es compacto.

(3) Sea $H \subseteq Y$ un subconjunto cerrado. Dado que $p : X \to Y$ es un mapeo cvss tenemos que el conjunto $W = p^{-1}(H) = \{x \in X : p(x) \cap H \neq \emptyset\}$ es cerrado en X. Por lo tanto el conjunto $W \cap F$ es cerrado en F y basta observar que $p_F^{-1}(H) = W \cap F$ para concluir que p_F es cvss. □

Ahora introducimos un resultado que será de utilidad al momento de caracterizar a los espacios Lindelöf Σ.

1.5. Lema. Si $p : M \to Z$ es un mapeo cvss, entonces $G(p) := \bigcup_{m \in M}(\{m\} \times p(m))$ es un subespacio cerrado de $M \times Z$.

Demostración. Sea (m, z) un elemento de $(M \times Z) \setminus G(p)$. Entonces podemos asegurar que $z \notin p(m)$. Por lo tanto, existen abiertos ajenos U y V de Z tales que $p(m) \subseteq U$ y $z \in V$. Como el mapeo p es superiormente semicontinuo, resulta que el conjunto $C = \{h \in M : p(h) \subseteq U\}$ es abierto en M y $m \in C$. Luego, se cumple lo siguiente: $(m, z) \in C \times V \subseteq (M \times Z) \setminus G(p)$. Para mostrar esto último, sea $(h, y) \in C \times V$ y observemos que $y \notin p(h)$ ya que $y \notin U$, de aquí se sigue que $(h, y) \notin G(p)$. Por lo tanto $G(p)$ es cerrado en $M \times Z$. □

La siguiente proposición reune algunas de las caracterizaciones de los espacios Lindelöf Σ que tenemos hasta este momento. Posteriormente veremos que la caracterización dada en el inciso (3) será de gran importancia para el surgimiento de ciertas subclases especiales de la clase de los espacios Lindelöf Σ. De ahora en adelante, los símbolos $L\Sigma$ significarán la frase “Lindelöf Σ”.

1.6. Proposición. Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es un espacio $L\Sigma$;
(2) existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a $\mathcal{C}$;
(3) existen un espacio segundo numerable M y un mapeo compacto valuado superiormente semicontinuo $\rho : M \to X$ tal que $\rho(M) = X$;
(4) existen un espacio segundo numerable M, un espacio L y funciones continuas $g : L \to M$ y $f : L \to X$ tales que g es perfecta y $f(L) = X$;
(5) existen un espacio segundo numerable M, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua $f^* : F \to X$ tal que $f^*(F) = X$.

Demostración. La equivalencia (1) si y sólo si (2) es justamente la Proposición 1.1.

(3)$\Rightarrow$ (4) Consideremos al espacio $K = \beta X$, la compactación de Stone-Čech de X, y sea

$$L = Graf(\rho) = \bigcup_{m \in M} (\{m\} \times \rho(m))$$

la gráfica del mapeo multivaluado ρ. Por el Lema 1.5 el conjunto L es un subespacio cerrado de $M \times \beta X$.

Ahora sea $f : L \to K$ la restricción de la proyección en el segundo factor $\pi_K : M \times K \to K$ al conjunto L. Dado que el mapeo ρ tiene como codominio X, podemos asegurar que $f(L) \subseteq X$. Además, dado que $\rho(M) = X$, para cada $x \in X$ existe $m_x \in M$ tal que $x \in \rho(m_x)$. Por lo anterior, $(m_x, x) \in L$ y $f((m_x, x)) = x$. Por lo tanto $f(L) = X$.

Luego, dado que K es compacto, por el teorema de Kuratowski (cf. [**9**, 3.1.16]), la función $\pi_M : M \times K \to M$, que es la proyección en el primer factor de $M \times K$, es una función cerrada y lo mismo podemos asegurar de su restricción al subespacio cerrado L de $M \times K$. Sea $g : L \to M$ la restricción de $\pi_M : M \times K \to M$ a L.

Como para cada $m \in M$ se cumple que $g^{-1}(m) = \pi_M^{-1}(m) \cap L = \{m\} \times p(m)$, $g^{-1}(m)$ es compacto, para toda $m \in M$. De lo anterior obtenemos que la función $g : L \to M$ es perfecta.

(4)$\Rightarrow$ (5) Consideremos el mapeo $p : M \to X$ definido como $p(m) = f(g^{-1}(m))$. Dado que f es continua y g es perfecta, el mapeo inverso $g^{-1} : M \to L$ es compacto valuado y superiormente semicontinuo por la Observación 1.3. Por lo tanto, la composición $f \circ g^{-1} : M \to X$ es cvss. Notemos que al ser $f : L \to X$ una función, estamos empleando la misma letra f para denotar al mapeo multivaluado $f : L \to X$ dado por $f(l) = \{f(l)\}$.

Siguiendo la idea de la implicación previa, consideremos al espacio $K = \beta X$, la compactación de Stone-Čech de X, y sea

$$F = Graf(p) = \bigcup_{m \in M} (\{m\} \times p(m))$$

la gráfica del mapeo multivaluado p. Nuevamente por el Lema 1.5 F es un subespacio cerrado de $M \times \beta X$.

Ahora definamos a la función $f^* : F \to K$ como la restricción de la proyección en el segundo factor $\pi_K : M \times K \to K$ al conjunto F. Dado que el mapeo p tiene como codominio X, podemos asegurar que $f^*(F) \subseteq X$. Además, dado que $p(M) = X$, para cada $x \in X$ existe $m_x \in M$ tal que $x \in p(m_x)$. Por lo anterior, $(m_x, x) \in F$ y $f^*((m_x, x)) = x$. Por lo tanto $f^*(F) = X$.

(5)$\Rightarrow$ (3) Consideremos el mapeo $p : M \to X$ dado por $p = f^* \circ i_F^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección en el primer factor e $i_F : F \to M \times K$ es la inclusión. Resulta que p es superiormente semicontinuo, compacto valuado y sobreyectivo por 1.3.

(3)$\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para M. Entonces la colección $p(\mathcal{B}) = \{p(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una red numerable para X con respecto a la cubierta $\mathcal{C} = \{p(m) : m \in M\}$. En efecto, sea $C_{m_0} = p(m_0)$ y U una vecindad abierta de C_{m_0}. Dado que p es superiormente semicontinuo, el conjunto

$$p^{\#}(U) = \{m \in M : p(m) \subseteq U\}$$

es abierto en M y además $m_0 \in p^{\#}(U)$; como $\mathcal{B}$ es una base de M existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $m_0 \in B_0 \subseteq p^{\#}(U)$ y por lo tanto $p(m_0) \subseteq p(B_0) \subseteq U$.

(2)$\Rightarrow$ (3) Consideremos en $\mathcal{N}$ a la topología discreta. Sea

$$M = \{m \in \mathcal{N}^{\omega} : \exists C \in \mathcal{C} : m(\omega) = \{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\}\}.$$

Obsérvese que si $x \in X$ entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$. Definimos $A = \{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\}$. Claramente A es a lo más numerable. Entonces existe una enumeración (posiblemente con repeticiones) $A = \{N_i : i \in \omega\}$. Entonces la función $m : \omega \to \mathcal{N}$ dada por $m(i) = N_i$ pertenece a M. En consecuencia, $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{N}^{\omega}$. Ahora bien, dotando a M de la topología de subespacio, obtenemos que M resulta ser un espacio metrizable y separable.

Definamos ahora el mapeo multivaluado $\rho : M \to X$ de la siguiente manera:

$$\rho(m) = \bigcap\{m(i) : i \in \omega\},$$

para cada $m \in M$.

Afirmamos que el mapeo ρ es compacto valuado, superiormente semicontinuo y sobreyectivo.

En efecto, dada $m \in M$, por definición, existe $C \in \mathcal{C}$ de tal modo que $\rho(m) = \bigcap\{N \in \mathcal{N} : C \subseteq N\} = C$ y así tenemos que ρ es compacto valuado. Obsérvese que la verificación hecha para mostrar que M es no vacío permite además verificar que el mapeo ρ es suprayectivo. De modo que sólo resta mostrar que ρ es superiormente semicontinuo. Para ello, supongamos que V es abierto en X y que $m \in \rho^{\#}(V)$. Entonces $C_m = \rho(m) \subseteq V$. Como $\mathcal{N}$ es una red para X con respecto a la cubierta $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C_m \subseteq N \subseteq V$. En consecuencia, existe $i \in \omega$ tal que $N = m(i)$. Sea $U = M \cap \pi_i^{-1}(\{N\})$, donde $\pi_i : \mathcal{N}^{\omega} \to \mathcal{N}$ es la i-ésima proyección. Claramente U es un subconjunto abierto de M tal que $m \in U \subseteq \rho^{\#}(V)$. Por lo tanto, $\rho^{\#}(V)$ es abierto en M y la semicontinuidad superior de ρ está demostrada. $\square$

Algunas propiedades de la clase de los espacios Lindelöf Σ, relevantes para el desarrollo de este trabajo, son enunciadas en el siguiente resultado.

1.7. Proposición. La clase de los espacios $L\Sigma$ es cerrada bajo uniones numerables, imágenes de mapeos cvss y al tomar subespacios cerrados.

Demostración. Sea $\{X_n : n < \omega\}$ una familia numerable de subespacios $L\Sigma$ de un espacio X. Para cada $n < \omega$, tomemos una cubierta compacta $\mathcal{C}_n$ y una red numerable $\mathcal{N}_n$ con respecto a $\mathcal{C}_n$. Entonces $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{C}_n : n < \omega\}$ es una cubierta compacta de $W = \bigcup\{X_n : n < \omega\}$ y $\mathcal{N} = \bigcup\{\mathcal{N}_n : n < \omega\}$ es una red numerable con respecto a dicha cubierta. Aplicando la equivalencia (2) de 1.6 se sigue que W es un espacio $L\Sigma$.

Ahora sean X un espacio $L\Sigma$ y $\rho : X \to Y$ un mapeo cvss y sobreyectivo. Al ser X un espacio $L\Sigma$ existe un espacio segundo numerable M y un mapeo cvss $\gamma : M \to X$ sobreyectivo. Entonces la composición $\rho \circ \gamma : M \to Y$ es un mapeo cvss por 1.4(2) y sobreyectivo, de modo que al aplicar la equivalencia (3) de 1.6 obtenemos que Y es un espacio $L\Sigma$.

Finalmente sean X un espacio $L\Sigma$ y $F \subseteq X$ un subespacio cerrado de X. Tomemos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a dicha cubierta. Las familias $\mathcal{C}_F = \{C \cap F : C \in \mathcal{C}\}$ y $\mathcal{N}_F = \{N \cap F : N \in \mathcal{N}\}$ son una cubierta compacta para F y una red numerable con respecto a dicha cubierta, respectivamente. Por (2) de 1.6 se sigue que F es un espacio $L\Sigma$. $\square$

Antes de proseguir mencionamos que el artículo [**18**] contiene información relevante y caracterizaciones adicionales de los espacios Lindelöf Σ.

Inspirados en la caracterización de los espacios $L\Sigma$ dada en el inciso (3) de la proposición anterior, los autores de [**12**] introducen por primera vez las clases de espacios $L\Sigma(\mathcal{K})$ de la siguiente manera:

1.8. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios compactos. Definimos $L\Sigma(\mathcal{K})$ como la clase de todos los espacios para los cuales existe un espacio segundo numerable M y un mapeo compacto valuado superiormente semicontinuo $\rho : M \to X$ tal que $\rho(M) = X$ y $\rho(m) \in \mathcal{K}$, para toda $m \in M$.

También son introducidas en [**12**] las clases $KL\Sigma(\mathcal{K})$; como podremos observar, la diferencia sustancial entre los elementos de las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$ está en el hecho de exigir que los dominios de los mapeos cvss sean espacios compactos, segundo numerables.

1.9. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios compactos. Definimos $KL\Sigma(\mathcal{K})$ como la clase de todos los espacios para los cuales existe un espacio compacto segundo numerable M y un mapeo compacto valuado superiormente semicontinuo $\rho : M \to X$ tal que $\rho(M) = X$ y $\rho(m) \in \mathcal{K}$, para toda $m \in M$.

Un par de consecuencias inmediatas de estas definiciones y de la Proposición 1.4(1) son las siguientes: para cualquier clase de espacios compactos $\mathcal{K}$ siempre sucede que $KL\Sigma(\mathcal{K}) \subset L\Sigma(\mathcal{K})$ y que todos los espacios en $KL\Sigma(\mathcal{K})$ son compactos.

Por otra parte, tomando como base las ideas para la demostración la Proposición 1.6, se obtiene facilmente la demostración de la siguiente proposición:

1.10. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios compactos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) X es un espacio $L\Sigma(\mathcal{K})$.
(2) Existen una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}$ y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a $\mathcal{C}$.

Si, adicionalmente, la clase $\mathcal{K}$ es cerrada con respecto a imágenes continuas y subespacios cerrados, entonces las anteriores condiciones también son equivalentes a las siguientes:

(3) Existen un espacio segundo numerable M, un espacio L y funciones continuas $g : L \to M$ y $f : L \to X$ tales que g es perfecta, $g^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$ y $f(L) = X$.
(4) Existen un espacio segundo numerable M, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua $f : F \to X$ tal que $f(F) = X$ y $F \cap \pi_M^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$, en donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección al primer factor.

Del mismo modo se obtiene la siguiente caracterización de los espacios que pertenecen a las clases $KL\Sigma(\mathcal{K})$.

1.11. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios compactos invariante bajo imágenes continuas y subespacios cerrados. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(1) X es un espacio $KL\Sigma(\mathcal{K})$.
(2) Existen un espacio segundo numerable M, un espacio L y funciones continuas $g : L \to M$ y $f : L \to X$ tales que g es perfecta, $g^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$ y $f(L) = X$.
(3) Existen un espacio compacto segundo numerable M, un espacio compacto K, un subespacio cerrado F de $M \times K$ y una función continua $f : F \to X$ tal que $f(F) = X$ y $F \cap \pi_M^{-1}(m) \in \mathcal{K}$ para toda $m \in M$, en donde $\pi_M : M \times K \to M$ es la proyección al primer factor.

Si κ es un cardinal, finito o infinito, denotamos por medio de $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(\leq \kappa)$ a las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$ en donde $\mathcal{K}$ es la clase de todos los espacios compactos de peso $\leq \kappa$. Del mismo modo, $L\Sigma(< \kappa)$ y $KL\Sigma(< \kappa)$ son las clases $L\Sigma(\mathcal{K})$ y $KL\Sigma(\mathcal{K})$ en donde $\mathcal{K}$ es la clase de todos los espacios compactos de peso $< \kappa$. Finalmente, por medio de $L\Sigma(\kappa)$ denotaremos a la clase de todos los espacios de $L\Sigma(\leq \kappa)$ que no son elementos de $L\Sigma(< \kappa)$, esto es, $L\Sigma(\kappa) = L\Sigma(\leq \kappa) \setminus L\Sigma(< \kappa)$.

Si $f : \omega \to \mathcal{N}$ es una función supreyectiva, la función $g : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\omega)$ dada por $g(C) = \{n \in \omega : C \subseteq f(n)\}$ satisface que

$\bigcap g(C) = C$. En consecuencia la cardinalidad de una cubierta de subconjuntos compactos con respecto a la cual existe una red numerable no excede a 2^ω, es decir $|\mathcal{C}| \leqslant 2^\omega$. Adicionalmente, todos los espacios en $L\Sigma(\leq \kappa)$ tienen cardinalidad a lo más $2^{\kappa+\omega}$. En efecto, si para cada $C \in \mathcal{C}$ tenemos que $\mathcal{B}_C$ es una base para el subespacio C de cardinalidad $\leqslant \kappa$ y $f : X \to \mathcal{C}$ es tal que $x \in f(x)$, para cada $x \in X$, entonces $g : X \to \bigcup\{C \times \mathcal{P}(\mathcal{B}_C) : C \in \mathcal{C}\}$ dada por $g(x) = (f(x), B \in \mathcal{B}_{f(x)} : x \in B$ es inyectiva. Si $\kappa \geq 2^\omega$, entonces la clase $L\Sigma(\leq \kappa)$ coincide con la clase de todos los espacios Lindelöf Σ con peso de red $\leq \kappa$ ("network weight").

En las definiciones anteriores, cuando κ es un cardinal finito, los símbolos $\leq \kappa$ significan "a lo más κ elementos". De modo que el único elemento de $L\Sigma(\leq 0)$ es el conjunto vacío y un espacio X pertenece a la clase $L\Sigma(n)$, con $n \in \omega\setminus\{0\}$, si X tiene una cubierta $\mathcal{C}$ formada por conjuntos de a lo más n elementos para la cual existe una red numerable en X, pero X no tiene una cubierta formada por conjuntos de a lo más $(n-1)$ elementos para la cual haya una red numerable. Evidentemente, la clase $L\Sigma(\leq 1)$ es la clase de todos los espacios de peso de red numerable (o espacios cósmicos), y $KL\Sigma(\leq 1)$ es la clase de los espacios compactos metrizables (en espacios compactos coinciden el peso y el peso de red).

Algunas propiedades importantes que poseen las clases de espacios que acabamos de introducir están contenidas en la siguiente proposición.

1.12. Proposición ([**12**]). Sea κ un cardinal. Entonces las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$, $L\Sigma(< \kappa)$, $KL\Sigma(\leq \kappa)$ y $KL\Sigma(< \kappa)$ son invariantes con respecto a: (i) tomar imágenes bajo funciones continuas; (ii) subespacios cerrados; y (iii) tomar uniones finitas. Además de ello, las clases $L\Sigma(\leq \kappa)$ y $L\Sigma(< \kappa)$ son también cerradas con respecto a uniones numerables.

Demostración. Daremos las demostraciones para $L\Sigma(\leq \kappa)$. Sea $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$. Tomemos una cubierta compacta $\mathcal{C}$ de X tal que para todo $C \in \mathcal{C}$ se cumple que $w(C) \leqslant \kappa$ y $\mathcal{N}$ una red numerable con respecto a $\mathcal{C}$.

(i) Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces la familia $\mathcal{C}_Y = \{f(C) : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta compacta de Y tal que cada elemento de $\mathcal{C}_Y$ tiene peso $\leqslant \kappa$ y la familia $N_Y = \{f(N) : N \in \mathcal{N}\}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{C}_Y$. En efecto, si $D \in \mathcal{C}_Y$ y V es una vecindad abierta de D. Entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $f(C) = D$ y por lo tanto $f^{-1}(V)$ es una vecindad abierta de C. Dado que $\mathcal{N}$ es una red con respecto a $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subseteq N \subseteq f^{-1}(V)$. Por lo tanto $D \subseteq f(N) \subseteq V$. Aplicando la Proposición 1.10(2) se muestra que $Y \in L\Sigma(\leq \kappa)$.

(ii) Ahora sea $F \subseteq X$ un subespacio cerrado. Entonces la familia $\mathcal{C}_F = \{C \cap F : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta compacta de F cuyos elementos tienen peso $\leq \kappa$ y $\mathcal{N}_F = \{N \cap F : N \in \mathcal{N}\}$ es una red numerable con respecto a $\mathcal{C}_F$. Nuevamente por 1.10(2) F es elemento de $L\Sigma(\leq \kappa)$.

(iii) Supongamos que $X_1, X_2, \ldots X_n$ son elementos de $L\Sigma(\leq \kappa)$. Para cada $i \leq n$, tomemos una cubierta compacta $\mathcal{C}_i$ de X_i, cuyos elementos tienen peso $\leq \kappa$, y una red numerable $\mathcal{N}_i$ con respecto a $\mathcal{C}_i$. Entonces $\mathcal{C} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{C}_i, i \leqslant n\}$ es una cubierta compacta de $X = \bigcup\{X_i : i \leqslant n\}$ y $\mathcal{N} = \bigcup\{N : N \in \mathcal{N}_i, i \leqslant n\}$ es una red numerable para X con respecto a C.

Finalmente, si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de subespacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ de un espacio X. Para cada $n \in \omega$, tomemos una cubierta compacta $\mathcal{C}_n$, cuyos elementos tienen peso $\leq \kappa$, y una red numerable $\mathcal{N}_n$ con respecto a $\mathcal{C}_n$. Entonces $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{C}_n : n < \omega\}$ es una cubierta compacta de $W = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$ y $\mathcal{N} = \bigcup\{\mathcal{N}_n : n \in \omega\}$ es una red numerable con respecto a dicha cubierta. Aplicando la equivalencia (2) de 1.10 se sigue que W es un espacio $L\Sigma(\leq \kappa)$. $\square$

A continuación mostramos cómo algunos espacios clásicos son espacios $L\Sigma(n)$, para algún $n \in \omega$.

1.13. Ejemplo.

(1) El *espacio dos flechas* se define de la siguiente manera: Sea $X = C_0 \cup C_1 \subset \mathbb{R}^2$, donde $C_0 = \{(x, 0) : 0 < x \leqslant 1\}$ y $C_1 = \{(x, 1) : 0 \leqslant x < 1\}$, y la topología en X está

generada por la base de conjuntos de la forma $\{(x,i) \in X : x_0 - \frac{1}{k} < x < x_0,\ i = 0,1\} \cup \{(x_0,0)\}$ donde $0 < x_0 \leqslant 1$ y $k = 1,2,3,\ldots$ y los conjuntos de la forma $\{(x,i) \in X : x_1 < x < x_1 + \frac{1}{k},\ i = 0,1\} \cup \{(x_1,1)\}$ donde $0 \leqslant x_1 < 1$ y $k = 1,2,3,\ldots$. El espacio dos flechas es un elemento de la clase $L\Sigma(2)$. Efectivamente, existe una función perfecta 2-a-1 de este espacio sobre el intervalo unitario $I = [0,1]$, por lo que resulta ser elemento de $L\Sigma(\leq 2)$ por la observación 1.3(2). Además, dado que este espacio no tiene peso de red numerable, no pertenece a la clase $L\Sigma(\leq 1)$. Por tanto, el espacio dos flechas es un elemento de $L\Sigma(2)$.

(2) Recordemos que el *duplicado de Alexandroff* $AD(X)$ de un espacio X es el conjunto $X \times 2$ con la topología definida del siguiente modo: los puntos de $X \times \{1\}$ son aislados, y las vecindades básicas de los puntos del tipo $(x,0)$ son de la forma $(U \times 2) \setminus \{(x,1)\}$, en donde U es una vecindad de x en X (vea [**8**] para más detalles de la construcción). Es fácil ver que el mapeo $\pi : AD(X) \to X$ definido por la regla $\pi((x,i)) = x$ es dos-a-uno y perfecto, de modo que el mapeo inverso es 2-valuado y superiormente semicontinuo.

Ahora sea T la circunferencia unitaria, considerada como subespacio de $\mathbb{R}^2$, y sea $AD(T)$ su duplicado de Alexandroff. Entonces $AD(T) \in L\Sigma(2)$, pues este espacio no tiene peso de red numerable y admite una función perfecta sobre un espacio metrizable y separable, el espacio T.

(3) El espacio $A(2^\omega)$, la compactación de Alexandroff del espacio discreto de cardinalidad 2^ω, es una imagen continua y no metrizable del espacio $AD(T)$. En efecto, para obtener una función sobreyectiva y continua de $AD(T)$ sobre $A(2^\omega)$ basta identificar todos los puntos de T con el único punto no aislado de $A(2^\omega)$ y establecer una biyección entre los subespacios discretos de estos espacios. Por lo

anterior, $A(2^\omega) \in L\Sigma(2)$. Desde luego se puede establecer una ligera generalización de este ejemplo:

1. Si $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$, entonces $A(\kappa)$ es imagen continua de $AD(T)$ y así, $A(\kappa) \in L\Sigma(\leqslant 2)$ (Proposición 1.12).

2. Si $A(\kappa) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$, entonces, por el párrafo que le sigue a la proposición 1.11, $\kappa \leqslant |A(\kappa)| \leqslant \mathfrak{c}$.

3. Como, además $L\Sigma(\leqslant 2) \subseteq L\Sigma(\leqslant \kappa)$, se concluye que los siguientes enunciados son equivalentes: (a) $A(\kappa) \in L\Sigma(\leqslant \omega)$; (b) $A(\kappa) \in L\Sigma(\leqslant 2)$; (c) $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$.

(4) Sea $\mathcal{A}$ una familia casi-ajena y maximal. Denotemos como es usual con $\Psi(\mathcal{A})$ su Ψ espacio asociado y con $\alpha(\Psi(\mathcal{A}))$ a la compactación de Alexandroff de este espacio. Entonces $\alpha(\Psi(\mathcal{A}))$ es también un elemento de la clase $L\Sigma(\leq 2)$. En efecto, al espacio $\alpha(\Psi(\mathcal{A}))$ lo podemos ver como la unión de ω, el cual es elemento de $L\Sigma(\leq 1)$, y el subespacio $Y = \alpha(\Psi(\mathcal{A})) \setminus \omega$ que es homeomorfo a un espacio de la forma $A(\kappa)$, elemento de $L\Sigma(\leq 2)$, con κ igual a la cardinalidad de $\mathcal{A}$. Dado que la clase $L\Sigma(\leq 2)$ es cerrada bajo uniones finitas, podemos concluir que $\alpha(\Psi(\mathcal{A})) \in L\Sigma(\leq 2)$. Adicionalmente, si $\kappa \geq \omega_1$, $\alpha(\Psi(\mathcal{A}))$ contiene un subespacio cerrado que pertenece a la clase $L\Sigma(2)$ y en consecuencia el espacio $\alpha(\Psi(\mathcal{A}))$ también pertenece a esta misma clase.

En [**12**] se enuncian diversos resultados relacionados a propiedades de los espacios $L\Sigma(\leq n)$. A continuación destacamos algunos de ellos que serán importantes para el desarrollo de este trabajo de tesis.

1.14. Proposición ([**12**]). Sea $n \in \omega$ y supóngase que X es un espacio que tiene una familia de conjuntos abiertos y ajenos, $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, y que para cada $\alpha < \omega_1$ existe un subconjunto cerrado $Y_\alpha \subset U_\alpha$ tal que $Y_\alpha \notin L\Sigma(\leq n)$. Entonces $X \notin L\Sigma(\leq n+1)$.

Demostración. Supongamos que $X \in L\Sigma(\leq n+1)$ y fijemos una cubierta $\mathcal{C} \subseteq [X]^{\leq n+1}$ para la cual existe una red numerable,

$\mathcal{N}$, con respecto de $\mathcal{C}$. Para cada $\alpha \leq \omega_1$, la colección $\{Y_\alpha \cap C : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta para Y_α que cuenta con una red numerable en Y_α. Dado que $Y_\alpha \notin L\Sigma(\leq n)$, existe $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $C_\alpha \subseteq Y_\alpha$. Elegimos $N_\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $C_\alpha \subset N_\alpha \subset U_\alpha$. Entonces $N_\alpha \neq N_\beta$ para $\alpha \neq \beta$, lo cual contradice el hecho de que la cardinalidad de $\mathcal{N}$ es numerable. □

1.15. Proposición ([**12**]). Sea $n \in \omega$ y supóngase que $\{X_\beta : \beta < \kappa\} \subseteq L\Sigma(\leq n)$ es una familia de espacios compactos y $\kappa \leq 2^\omega$. Sea X la compactación unipuntual de $\bigoplus_{\beta<\kappa} X_\beta$. Entonces $X \in L\Sigma(\leq n+1)$. Además si $X_\beta \in L\Sigma(n)$ para una cantidad no numerable de índices β, entonces $X \in L\Sigma(n+1)$.

Demostración. Para cada X_β fijemos una cubierta compacta $\mathcal{C}_\beta \subseteq [X_\beta]^{\leq n}$ con una red numerable N_β en X_β. Supondremos que $X_\beta \cap X_\eta = \emptyset$ siempre que $\beta \neq \eta$ y que $X = \{\infty\} \cup \bigcup_{\beta<\kappa} X_\beta$.

Definamos $\mathcal{C} = \{C \cup \{\infty\} : C \in \mathcal{C}_\beta, \beta < \kappa\}$. La colección $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta para X. Lo que resta mostrar es que $\mathcal{C}$ tiene una red numerable, respecto de $\mathcal{C}$.

Sea $N_\beta = \{N_m^\beta : m < \omega\}$ y fijemos una familia numerable $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ que separe conjuntos finitos (aquí utilizamos el hecho de que $\kappa \leq 2^\omega$). Sea $A^* = \bigcup_{\beta\in A} X_\beta$. Definamos

$$\mathcal{N} = \{\{\infty\} \cup (A^* \cap \bigcup_{\beta<\kappa} N_m^\beta) : m < \omega, A \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\mathcal{N}$ es una familia numerable. Lo que resta mostrar es que $\mathcal{N}$ es una red para $\mathcal{C}$. Para ello, fijemos $C = C_0 \cup \{\infty\}$, donde $C_0 \in \mathcal{C}_\beta$. Fijemos un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $C \subseteq U$. Entonces U es una vecindad de ∞, de modo que el conjunto $F = \{\eta < \kappa : X_\eta \nsubseteq U\}$ es finito. Elijamos $A \in \mathcal{A}$ tal que $\beta \in A$ y $(F \setminus \{\beta\}) \cap A = \emptyset$. Encontremos $m < \omega$ tal que $C_0 \subseteq N_m^\beta \subseteq U \cap X_\beta$. Sea

$$M = \{\infty\} \cup (A^* \cap \bigcup_{\eta<\kappa} N_m^\eta).$$

Entonces $M \in \mathcal{N}$ y además se cumple $C \subseteq M \subseteq U$.

La segunda afirmación es consecuencia de la Proposición 1.14. $\square$

Dados dos mapeos multivaluados $p : X \to Y$ y $q : Z \to W$ definimos el *mapeo producto* $p \times q : X \times Z \to Y \times W$ como $(p \times q)[(x,z)] = p(x) \times q(z)$. Como el producto de mapeos cvss es un mapeo cvss, tenemos el siguiente hecho fácil de demostrar.

1.16. Proposición. Sean λ y κ números cardinales (finitos o infinitos) si $X \in L\Sigma(\leq \kappa)$ y $Y \in L\Sigma(\leq \lambda)$ entonces $X \times Y \in L\Sigma(\leq \lambda\kappa)$.

Posteriormente se presentará una versión mejorada del anterior resultado para el caso en que λ y κ son cardinales finitos (vea el Teorema 2.1). Por el momento utilizaremos la Proposición 1.15 en la demostración de nuestro siguiente teorema. Antes de enunciarlo, notemos que en el inciso (3) de 1.13 se argumenta lo siguiente: $A(\kappa) \in L\Sigma(\leqslant 2)$ para toda $\kappa \leq 2^\omega$. En el siguiente teorema se demuestra que $A(\omega_1)^n \in L\Sigma(n+1)$.

1.17. Teorema ([**12**]). Para cada $n \in \omega \setminus \{1\}$ se tiene que $A(\omega_1)^n \in L\Sigma(n+1)$, donde ω_1 está equipado con la topología discreta.

Demostración. Sea $A(\omega_1) = \omega_1 + 1$, donde todos los puntos de ω_1 son aislados. Para el caso $n = 1$ afirmamos que $A(\omega_1)^1 \in L\Sigma(2)$. En efecto, tomemos un subespacio de $Y \subset \mathbb{R}$ de cardinalidad ω_1 y una biyección $f : Y \to D(\omega_1)$ entre Y y el espacio discreto de cardinalidad ω_1. Entonces el mapeo 2-valuado $p : Y \to A(\omega_1)$ definido por $p(y) = \{f(y), \omega_1\}$ es superiormente semicontinuo. Por lo tanto $A(\omega_1) \in L\Sigma(\leq 2)$ y dado que este espacio no tiene peso de red numerable, no es elemento de $L\Sigma(1)$. Por lo tanto $A(\omega_1) \in L\Sigma(2)$.

Supóngase ahora que $n > 1$ y que $A(\omega_1)^{n-1} \in L\Sigma(n)$. Dado que $A(\omega_1)^n$ contiene ω_1 copias ajenas cerrado-abiertas de $A(\omega_1)^{n-1}$, tenemos que $A(\omega_1)^n \notin L\Sigma(\leqslant n)$ por la Proposición 1.14.

Para cada permutación $p : n \to n$, consideremos el subconjunto X_p de $A(\omega_1)^n$ definido por

$$X_p = \{(x_i)_{i<n} : x_{p(i)} \leq x_{p(i+1)} \ \ para \ \ toda \ \ i < n-1\}$$

Entonces

$$A(\omega_1)^n = \bigcup \{X_p : p \in {}^n n \ \ es \ \ una \ \ permutación\}.$$

Por la Proposición 1.12, es suficiente mostrar que cada X_p pertenece a $L\Sigma(\leq n+1)$. Como todos los X_p son homeomorfos, es suficiente demostrar que $X_{id} \in L\Sigma(\leq n+1)$. Primeramente definiremos una cubierta para X_{id} formada por conjuntos de $n+1$ elementos:

Para cada $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in X_{id} \cap \omega_1^n$ y para cada $k < n$ sea $\overline{\alpha}^k$ el elemento de X_{id} obtenido al intercambiar las últimas $n-k$ coordenadas de $\overline{\alpha}$ por ω_1. De modo que $\overline{\alpha}^n = \overline{\alpha}$ y $\overline{\alpha}^0 = (\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_1)$. Sea

$$C_{\overline{\alpha}} = \{\overline{\alpha}^k : k \leq n, \overline{\alpha} \in X_{id} \cap \omega_1^n\}.$$

Estos conjuntos formaran la cubierta para X_{id} de conjuntos de $n+1$ elementos.

Ahora definiremos una red numerable para esta cubierta en X_{id}. Los elementos de esta red se construirán a partir de las siguientes tres familias de conjuntos:

Familia 1: Supongamos, por inducción, que las colecciones construidas de manera similar en $A(\omega_1)^{n-1}$ tienen una red numerable (para el caso $n=1$ se sigue del inciso (3) del Ejemplo 1.13). Dado que $A(\omega_1)^{n-1}$ se puede identificar de manera natural con el subespacio $Y = A(\omega_1)^{n-1} \times \{\omega_1\}$, existe una red numerable para los conjuntos $C_{\overline{\alpha}} \cap Y$ contenida en $Y \cap X_{id}$. Llamemos a esta familia numerable $\mathcal{N}_Y$. Observemos que para cada $\overline{\alpha} \in X_{id}$, el único punto de $C_{\overline{\alpha}}$ que no está contenido en Y es $\overline{\alpha}$.

Familia 2: Fijemos una familia numerable $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega_1}\omega_1$ de funciones tales que $\{(\alpha, \beta) : \beta \leq \alpha\} = \bigcup \mathcal{F}$. Para cada sucesión $\overline{f} = (f_i : i < n-1)$ en $\mathcal{F}$, sea $N_{\overline{f}} \subseteq \omega_1^n$ el conjunto de todas las sucesiones

$(\alpha_i)_{i<n}$ tales que $\alpha_i = f_i(\alpha_{i+1})$ para cada $i < n-1$. Observemos que cada $N_{\overline{f}} \subseteq X_{id}$.

Familia 3: Sea $\mathcal{N}_0$ una familia numerable de subconjuntos de ω_1 que separa puntos de conjuntos finitos.

Nuestra red consistirá de conjuntos de la siguiente forma:

$$N \cup (N_{\overline{f}} \cap \prod_{i<n} N_i)$$

donde $N \in \mathcal{N}_Y$, $\overline{f} \in \mathcal{F}^{n-1}$ y cada $N_i \in \mathcal{N}_0$.

Para verificar que esta familia es una red con respecto a la cubierta de los conjuntos $C_{\overline{\alpha}}$, fijemos $\overline{\alpha} \in X_{id}$ y una vecindad abierta U de $C_{\overline{\alpha}}$. Por construcción, existe un $N \in \mathcal{N}_Y$, tal que $C_{\overline{\alpha}} \setminus \{\overline{\alpha}\} \subseteq N \subseteq U$. Dado que $\overline{\alpha}^0 = (\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_1) \in U$, podemos fijar conjuntos finitos $F_i \subseteq \omega_1$ para $i < n$ de modo que

$$V(0) = \prod_{i<n} (\omega_1 \setminus F_i) \subseteq U.$$

De la misma manera, para cada $0 < k \leq n$, podemos fijar un abierto básico $V(k)$ conteniendo a $\overline{\alpha}^k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$V(k) = \{\alpha_0\} \times \ldots \times \{\alpha_{k-1}\} \times \prod_{k \leq i < n} (\omega_1 \setminus F_i) \subseteq U.$$

Además, podemos suponer que $\alpha_i \in F_i$ para cada $i < n$.

Para cada $i < n$ fijemos $N_i \in \mathcal{N}_0$ tal que $N_i \cap F_i = \{\alpha_i\}$ (esto es, N_i separa el punto α_i del conjunto finito $F_i \setminus \{\alpha_i\}$).

Enseguida, para cada $i < n-1$, fijemos $f_i \in \mathcal{F}$ tal que $f_i(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$. Es claro que

$$\overline{\alpha} \in N_{(f_i)} \cap \prod_{i<n} N_i,$$

de modo que es suficiente probar que $N_{(f_i)} \cap \prod_{i<n} N_i \subseteq U$. Para ello, supongamos que es falso y fijemos

$$\overline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in (N_{(f_i)} \cap \prod_{i<n} N_i) \setminus U.$$

Fijemos k maximal tal que $\beta_k = \alpha_k$ (si no existe tal k, entonces $\beta_k \notin F_k$ para toda k y por lo tanto $\overline{\beta} \in V(0) \subseteq U$). Entonces $\beta_i = \alpha_i$ para toda $i \leq k$, dado que $\overline{\beta} \in N(f_i)$, y $\beta_i \notin F_i$ para toda $i > k$. Por lo tanto, $\overline{\beta} \in V(k) \subseteq U$, una contradicción. Por lo tanto se cumple que $N_{(f_i)} \cap \prod_{i<n} N_i \subseteq U$. $\square$

Obsérvese que como consecuencia del anterior teorema es posible afirmar que, para toda $n \in \omega$, $L\Sigma(n) \neq \emptyset$.

Antes proseguir es necesario recordar algunas definiciones. Un espacio es *disperso* si todo subconjunto no vacío del mismo tiene puntos aislados. Dado un espacio X se define el *conjunto derivado* como el conjunto de todos los puntos de acumulación y, para cada ordinal α, se define el *α-ésimo conjunto derivado* de la siguiente manera: $X^{(0)} = X$ y $X^{(\alpha+1)}$ es el conjunto derivado de $X^{(\alpha)}$. Si α es límite $X^{\alpha} = \cap\{X^{(\nu)} : \nu < \alpha\}$. Finalmente, como $X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\beta)}$ si $\alpha < \beta$, existe un ordinal mínimo tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Este ordinal α es la *altura de X*.

1.18. Corolario. Las clases $L\Sigma(n)$, con $n \in \omega$, así como la clase $L\Sigma(\omega)$, son no vacías y contienen espacios compactos. De hecho, para cada $n \in \omega$ existe un espacio compacto disperso X_n de altura n y cardinalidad ω_1, tal que $X_n \in L\Sigma(n+1)$.

El siguiente objetivo es mostrar que $A(\omega_2) \times A(\omega_2) \notin L\Sigma(3)$. Para ello necesitaremos un lema previo relativo a cubiertas y redes con respecto a cubiertas.

Dadas dos familias $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ de subconjuntos de X, definimos

$$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 = \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \mathcal{C}_1 \ \ y \ \ C_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

1.19. Lema ([**12**]). Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ cubiertas de un espacio X formadas por conjuntos finitos, y $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ redes con respecto a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Entonces $\mathcal{N}_1 \wedge \mathcal{N}_2$ es una red con respecto a $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $C_1 \in \mathcal{C}_1$ y $C_2 \in \mathcal{C}_2$ con

$$C_1 \cap C_2 = \{u_1, u_2, \dots u_k\}, \quad C_1 \setminus C_2 = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$
$$y \;\; C_2 \setminus C_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}.$$

Sea U una vecindad de $C = C_1 \cap C_2$ en X. Fijemos vecindades ajenas $U_{u_1}, \dots, U_{u_{t_l}}$ de los puntos en $C_1 \cup C_2$ que cumplan $U_{u_1} \cap \dots \cap U_{t_l} \subset U$. Fijemos $N_1 \in \mathcal{N}_1$ y $N_2 \in \mathcal{N}_2$ tales que

$$C_1 \subset N_1 \subset \bigcup \{U_{u_i} : 1 \leq i \leq k\} \cup \bigcup \{U_{s_i} : 1 \leq i \leq m\}$$

y

$$C_2 \subset N_2 \subset \bigcup \{U_{u_i} : 1 \leq i \leq k\} \cup \bigcup \{U_{t_i} : 1 \leq i \leq l\}.$$

Entonces $N = N_1 \cap N_2$ es un elemento de $\mathcal{N}_1 \wedge \mathcal{N}_2$ tal que

$$C_1 \cap C_2 \subset N \subset \bigcup \{U_{u_i} : 1 \leq i \leq k\} \subset U.$$

□

En el siguiente teorema se demuestra que $A(\omega_2)^2 \notin L\Sigma(3)$.

1.20. TEOREMA ([**12**]). Sea $A(\omega_2)$ la compactación de Alexandroff del espacio discreto de cardinalidad ω_2. Entonces $A(\omega_2)^2 \notin L\Sigma(3)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\omega_2 > 2^\omega$, entonces $A(\omega_2) \notin L\Sigma(3)$, ya que todo espacio en $L\Sigma(n)$ tiene cardinalidad menor o igual que 2^ω.

De modo que supongamos que $\omega_2 \leq 2^\omega$. Sea $A(\omega_2) = \omega_2 + 1$, donde todos los puntos de ω_2 son aislados. Sea $\mathcal{C}_0$ la cubierta de $A(\omega_2)^2$ formada por los conjuntos de la forma

$$C_{\alpha\beta} = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_2, \beta), (\omega_2, \omega_2)\},$$

con $\alpha, \beta < \omega_2$. Entonces existe una red numerable $\mathcal{N}_0$ con respecto a la cubierta $\mathcal{C}_0$.

Ahora supongamos que existe una cubierta $\mathcal{C}$ de $A(\omega_2)^2$ formada por conjuntos de a lo más 3 elementos y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a dicha cubierta. Podemos suponer que cada elemento de $\mathcal{C}$ está contenido en un elemento de la forma $C_{\alpha\beta}$, en caso contrario podemos reemplazar $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}_0$ y $\mathcal{N}$ con $\mathcal{N} \wedge \mathcal{N}_0$.

Diremos que un elemento C de $\mathcal{C}$ es de tipo 1 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\omega_2, \beta), (\omega_2, \omega_2)\},$$

es de tipo 2 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_2, \omega_2)\},$$

y de tipo 3 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_2, \beta)\}$$

para algunos $\alpha, \beta < \omega_2$. Observemos que los elementos de $\mathcal{C}$ de estos tres tipos cubren $\omega_2 \times \omega_2$. Además, existen a lo más una cantidad numerable de elementos del tipo 3. De hecho, de no ser así la unión P de todos los elementos de $\mathcal{C}$ de tipo 3 sería un espacio Lindelöf Σ, lo cual es imposible, dado que uno de los tres conjuntos $P \cap (A(\omega_2) \times \{\omega_2\})$, $P \cap (\{\omega_2\} \times A(\omega_2))$, $\{(\alpha, \beta) \in P : (\alpha, \omega_2) \notin P, (\omega_2, \beta) \notin P\}$ sería un subespacio no numerable de P que es además cerrado y discreto. Removiendo de $A(\omega_2)$ a todos los elementos de ω_2 que aparecen como coordenadas de los puntos de P, y tomando intersecciones de $\mathcal{C}$ y el cuadrado del conjunto restante, obtenemos una cubierta sin elementos del tipo 3 y la intersección de $\mathcal{N}$ con este cuadrado resulta ser una red numerable con respecto a esta nueva cubierta. Por lo tanto, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{C}$ son de los tipos 1 o 2.

Sea $(\alpha, \beta) \in \omega_2 \times \omega_2$; tomemos un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $(\alpha, \beta) \in C$. Si C es del tipo 1, entonces $V = (A(\omega_2) \times \{\beta\}) \cup (A(\omega_2) \setminus \{\alpha\})^2$ es una vecindad de C, de modo que existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset V$. Obviamente, $N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \{(\alpha, \beta)\}$. Del mismo modo, si C es del tipo 2, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $N \cap (\omega_2 \times \{\beta\}) = \{(\alpha, \beta)\}$. De este modo, los conjuntos

$$B_1 = \{(\alpha, \beta) \in \omega_2 \times \omega_2 : N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \\ = \{(\alpha, \beta)\} \textit{ para alguna } N \in \mathcal{N}\}$$

y

$$B_2 = \{(\alpha, \beta) \in \omega_2 \times \omega_2 : N \cap (\omega_2 \times \{\beta\}) = \\ = \{(\alpha, \beta)\} \textit{ para alguna } N \in \mathcal{N}\}$$

cubren a $\omega_2 \times \omega_2$. Notemos que para cualesquiera $\alpha \in \omega_2$ y $N \in \mathcal{N}$ existe a lo más un $\beta \in \omega_2$ tal que

$$N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \{(\alpha, \beta)\},$$

de modo que para cada $\alpha \in \omega_2$, el conjunto $B_1 \cap (\{\alpha\} \times \omega_2)$ es a lo más numerable. Del mismo modo, para cada $\beta \in \omega_2$ el conjunto $B_2 \cap (\omega_2 \times \{\beta\})$ es a lo más numerable. La existencia de este par de conjuntos que cubre $\omega_2 \times \omega_2$ contradice el teorema de Kuratowski sobre la caracterización de los alephs [**13**]. $\square$

Siguiendo las ideas de la demostración del teorema anterior, es posible demostrar el siguiente resultado:

1.21. Proposición. Sean $A(\omega_1)$ y $A(\omega_2)$ las compactaciones de Alexandroff de los espacios discretos de cardinalidades ω_1 y ω_2 respectivamente. Entonces $A(\omega_1) \times A(\omega_2) \notin L\Sigma(3)$.

Demostración. Si $\omega_2 > 2^\omega$, entonces $A(\omega_2) \notin L\Sigma(3)$, ya que todo espacio en $L\Sigma(n)$ tiene cardinalidad menor o igual que 2^ω.

De modo que supongamos que $\omega_2 \leq 2^\omega$. Sean $A(\omega_1) = \omega_1 + 1$ y $A(\omega_2) = \omega_2 + 1$, donde todos los puntos de ω_1 y ω_2 son aislados. Sea $\mathcal{C}_0$ la cubierta de $A(\omega_1) \times A(\omega_2)$ formada por los conjuntos de la forma

$$C_{\alpha\beta} = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_1, \beta), (\omega_1, \omega_2)\},$$

con $\alpha < \omega_1$ y $\beta < \omega_2$. Entonces existe una red numerable $\mathcal{N}_0$ con respecto a la cubierta $\mathcal{C}_0$.

Ahora supongamos que existe una cubierta $\mathcal{C}$ de $A(\omega_1) \times A(\omega_2)$ formada por conjuntos de a lo más 3 elementos y una red numerable $\mathcal{N}$ con respecto a dicha cubierta. Podemos suponer que cada elemento de $\mathcal{C}$ está contenido en un elemento de la forma $C_{\alpha\beta}$, en caso contrario podemos reemplazar $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}_0$ y $\mathcal{N}$ con $\mathcal{N} \wedge \mathcal{N}_0$.

Diremos que un elemento C de $\mathcal{C}$ es de tipo 1 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\omega_1, \beta), (\omega_1, \omega_2)\},$$

es de tipo 2 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_1, \omega_2)\},$$

y de tipo 3 si

$$C \subset \{(\alpha, \beta), (\alpha, \omega_2), (\omega_1, \beta)\}$$

para algunos $\alpha < \omega_1$ y $\beta < \omega_2$. Observemos que los elementos de $\mathcal{C}$ de estos tres tipos cubren $\omega_1 \times \omega_2$. Además, existen a lo más una cantidad numerable de elementos del tipo 3. De hecho, de no ser así la unión P de todos los elementos de $\mathcal{C}$ de tipo 3 sería un espacio Lindelöf Σ, lo cual es imposible, dado que uno de los tres conjuntos $P \cap (A(\omega_1) \times \{\omega_2\})$, $P \cap (\{\omega_1\} \times A(\omega_2))$, $\{(\alpha, \beta) \in P : (\alpha, \omega_2) \notin P, (\omega_1, \beta) \notin P\}$ sería un subespacio no numerable de P que es además cerrado y discreto. Removiendo de $A(\omega_2)$ a todos los elementos de ω_2 que aparecen como coordenadas de los puntos de P, y tomando intersecciones de $\mathcal{C}$ y el cuadrado del conjunto restante, obtenemos una cubierta sin elementos del tipo 3 y la intersección de $\mathcal{N}$ con este cuadrado resulta ser una red numerable con respecto a esta nueva cubierta. Por lo tanto, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{C}$ son de los tipos 1 o 2.

Sea $(\alpha, \beta) \in \omega_1 \times \omega_2$; tomemos un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $(\alpha, \beta) \in C$. Si C es del tipo 1, entonces $V = (A(\omega_1) \times \{\beta\}) \cup (A(\omega_2) \setminus \{\alpha\})^2$ es una vecindad de C, de modo que existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C \subset N \subset V$. Obviamente, $N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \{(\alpha, \beta)\}$. Del mismo modo, si C es del tipo 2, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $N \cap (\omega_2 \times \{\beta\}) = \{(\alpha, \beta)\}$. De este modo, los conjuntos

$$\begin{aligned} B_1 = \{(\alpha, \beta) \in \omega_2 \times \omega_2 : N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \\ = \{(\alpha, \beta)\} \textit{ para alguna } N \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B_2 = \{(\alpha, \beta) \in \omega_2 \times \omega_2 : N \cap (\omega_2 \times \{\beta\}) = \\ = \{(\alpha, \beta)\} \textit{ para alguna } N \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

cubren a $\omega_2 \times \omega_2$. Notemos que para cualesquiera $\alpha \in \omega_2$ y $N \in \mathcal{N}$ existe a lo más un $\beta \in \omega_2$ tal que

$$N \cap (\{\alpha\} \times \omega_2) = \{(\alpha, \beta)\},$$

de modo que para cada $\alpha \in \omega_2$, el conjunto $B_1 \cap (\{\alpha\} \times \omega_2)$ es a lo más numerable. Del mismo modo, para cada $\beta \in \omega_2$ el conjunto

$B_2 \cap (\omega_2 \times \{\beta\})$ es a lo más numerable. Nuevamente, la existencia de este par de conjuntos que cubre $\omega_2 \times \omega_2$ contradice el teorema de Kuratowski sobre la caracterización de los alephs [**13**]. $\square$

Finalizaremos el presente capítulo con dos resultados relacionados a las propiedades de la clase $L\Sigma(< \omega)$.

1.22. Proposición ([**12**]). Sea $X \in L\Sigma(< \omega)$. Entonces existen subespacios $X_n \subseteq X$, con $n \in \omega$, tales que $X_n \in L\Sigma(\leq n)$, y $X = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$.

Demostración. Sea $p : M \to X$ un mapeo finito valuado y superiormente semicontinuo del espacio segundo numerable M en el espacio X y tal que $p(M) = X$. Para cada $n \in \omega$, definimos $M_n = \{m \in M : |p(m)| \leq n\}$ y $X_n = p(M_n)$. Directamente de la definición se sigue que $X_n \in L\Sigma(\leq n)$ y es claro que $X = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$. $\square$

1.23. Proposición. Supongamos que X es un espacio tal que $X^\omega \in L\Sigma(< \omega)$. Entonces para algún $n \in \omega$, $X^\omega \in L\Sigma(n)$.

Demostración. Para cada $k \in \omega$, sea $\pi_k : (X^\omega)^\omega \to X^\omega$ la proyección sobre el k-ésimo factor. Dado que $(X^\omega)^\omega$ es homeomorfo a X^ω, aplicando la proposición anterior, tenemos que $(X^\omega)^\omega = \bigcup\{X_k : k \in \omega\}$ donde $X_k \in L\Sigma(\leq k)$. Es claro que $\pi_n(X_n) = X^\omega$ para alguna $n \in \omega$. Por lo tanto, $X^\omega \in L\Sigma(\leq n)$. $\square$

CAPÍTULO 2

El duplicado y la compactación de Alexandroff de espacios en $L\Sigma(\leqslant \omega)$

1. Introducción

Uno de los problemas más interesantes e intrincados en la teoría de los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ es el problema relacionado con la preservación de la propiedad de ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$ por mapeos finito valuados y superiormente semicontinuos. Gran parte de la dificultad para solucionar este problema está en el hecho de que en realidad se está planteando una serie de preguntas relacionadas a la posibilidad de que algunas construcciones topológicas preserven la propiedad de ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$.

Por ejemplo, la construcción del duplicado de Alexandroff $AD(X)$ de un espacio X define un mapeo dos-valuado del espacio X en el espacio $AD(X)$ y uno puede hacerse la pregunta de si al considerar el duplicado de Alexandroff de un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, éste vuelve a ser un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$. Esta pregunta fue un problema planteado por O. G. Okunev en su artículo [**15**] de *Open Problems in General Topology II* (ver problema 15 (146)).

La búsqueda de la solución al problema anterior, motivó las investigaciones que el autor de este trabajo de tesis realizó sobre el tema, y cuyas conclusiones están plasmadas en el artículo de investigación [**5**]. La intención de este capítulo es exponer los resultados obtenidos en esta investigación. A continuación damos un resumen de los principales resultados que se exponen en el presente capítulo:

(1) Si Y es un espacio $L\Sigma(n)$ y X es un espacio $L\Sigma(m)$. Entonces el espacio $X \times Y$ es un espacio $L\Sigma(\kappa)$, con κ un valor acotado entre $n + m - 1$ y nm (Teorema 2.1).

(2) Si X es un espacio tal que su potencia X^ω pertenece a la clase $L\Sigma(< \omega)$, entonces X es un espacio cósmico (Corolario 2.4).

(3) Dadas dos familias casi ajenas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ el producto de las compactaciones de Alexandroff de sus Ψ-espacios asociados, $\alpha(\Psi(\mathcal{A})) \times \alpha(\Psi(\mathcal{B}))$ pertenece a la clase $L\Sigma(4)$ si alguna de las familias tiene cardinalidad mayor a ω_1, y será elemento de $L\Sigma(3)$ si ambas familias tienen cardinalidad ω_1 (Teorema 2.9).

(4) Si X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, lo mismo ocurre con su duplicado de Alexandroff $AD(X)$ (Teorema 2.17).

Es importante mencionar que los resultados (2) y (3) resuelven los siguientes problemas abiertos: 7.4 de [**12**] y 3(134) de [**15**], respectivamente.

2. Productos de Espacios $L\Sigma(n)$

No es complicado mostrar, utilizando el hecho de que el producto de mapeos compacto-valuados superiormente semicontinuos es un mapeo del mismo tipo, que el producto de un espacio $L\Sigma(\kappa)$ con un espacio $L\Sigma(\lambda)$ es un espacio $L\Sigma(\leq \kappa \cdot \lambda)$. Sin embargo, si λ y κ son finitos, dicho producto puede ser de un tipo menor que $\lambda \cdot \kappa$. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente (vea el Teorema 1.17): La compactación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad ω_1, $A(\omega_1)$, es un espacio de tipo $L\Sigma(2)$, y para toda $n \in \omega$, $A(\omega_1)^n$ es un espacio de tipo $L\Sigma(n + 1)$. Por todo lo anterior, resulta interesante y muy importante encontrar la clase exacta $L\Sigma(\kappa)$ a la que pertenece el producto de un espacio $L\Sigma(n)$ con un espacio $L\Sigma(m)$. A continuación presentamos una serie de resultados que contribuyen a la solución de este problema.

2.1. Teorema ([**5**]). Sean $m, n \in \omega$, X un espacio $L\Sigma(m)$ y Y un espacio $L\Sigma(n)$. Entonces el producto $X \times Y$ es un espacio $L\Sigma(\kappa)$, donde $n + m - 1 \leq \kappa \leq nm$.

Demostración. Sean $\rho_1 : M_1 \to X$ y $\rho_2 : M_2 \to Y$ mapeos superiormente semicontinuos sobreyectivos, donde M_1 y M_2 son espacios segundo numerables. Suponga además que ρ_1 es a lo más m-valuada y que ρ_2 es a lo más n-valuada. Entonces, el mapeo

$$\rho_1 \times \rho_2 : M_1 \times M_2 \to X \times Y,$$

definido mediante la regla

$$(\rho_1 \times \rho_2)(m_1, m_2) = \rho_1(m_1) \times \rho_2(m_2),$$

es superiormente semicontinuo, sobreyectivo y a lo más $(n \cdot m)$-valuado. Lo anterior muestra que $X \times Y \in L\Sigma(\leq m \cdot n)$ y por lo tanto $X \times Y$ es un espacio $L\Sigma(\kappa)$ para alguna $\kappa \leq (m \cdot n)$.

Para probar la segunda parte de la desigualdad, supongamos, para llegar a una contradicción, que $X \times Y \in L\Sigma(\kappa)$ con $\kappa \leq (n + m - 2)$. Fijemos un espacio segundo numerable M y un mapeo superiormente semicontinuo, sobreyectivo y a lo más κ-valuado $\rho : M \to X \times Y$. Sean π_X y π_Y las proyecciones asociadas al producto $X \times Y$ y definamos el subconjunto A de M de la siguiente manera:

$$A = \{z \in M : |\pi_X(\rho(z))| \leq m - 1\}.$$

Dado que la composición $\pi_X \circ \rho$ es superiormente semicontinua y $X \notin L\Sigma(m-1)$, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \pi_X(\rho(A))$, por lo que $(\{x_0\} \times Y) \cap \rho(A) = \emptyset$.

Sean $B = M \setminus A$ y $q : B \to Y$ el mapeo multivaluado definido mediante la siguiente regla:

$$q(z) = \pi_Y(\rho(z) \cap (\{x_0\} \times Y)).$$

Como $\{x_0\} \times Y$ es cerrado en $X \times Y$, el mapeo q es superiormente semicontinuo, y teniendo en cuenta que el mapeo ρ es sobreyectivo y $(\{x_0\} \times Y) \cap \rho(A) = \emptyset$ se sigue que $q(B) = Y$. Note que para toda $z \in B$, $\rho(z)$ tiene a lo más $(n + m - 2)$ puntos, y al menos $(m - 1)$ de estos puntos tienen proyecciones en X diferentes de

x_0. Por tanto, $q(z)$ tiene a lo más $(n-1)$ puntos. Resumiendo, el mapeo q es a lo más $(n-1)$-valuado, superiormente semicontinuo y sobreyectivo, pero esto último es una contradicción con la hipótesis de que $Y \in L\Sigma(n)$. Por lo tanto $\kappa \geq n+m-1$ y esto completa la demostración. $\square$

2.2. Corolario ([**5**]). Si X es un espacio $L\Sigma(n)$ para alguna $n \in \omega$, entonces X^m es un espacio $L\Sigma(\kappa)$ para alguna $\kappa \geq mn - m + 1$.

Demostración. Si $n = 1$, entonces $nw(X) \leq \omega$ y también $nw(X^m) \leq \omega$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $X^m \in L\Sigma(1)$. Por otra parte, $nm - m + 1 = 1$ por lo que la condición se cumple.

Ahora supongamos que $n > 1$ y procedamos por inducción sobre m. Si $m = 1$ no hay mucho que probar pues $X^1 = X \in L\Sigma(n)$ y $mn - m + 1 = n$. Supongamos que $X^m \in L\Sigma(k_m)$ con $k_m \geq mn - m + 1$. Entonces $X^{m+1} = X^m \times X \in L\Sigma(l)$ para alguna l que cumple la condición $n + k_m - 1 \leq l \leq k_m n$. Utilizando la hipótesis de inducción obtenemos que $n + k_m - 1 \geq n + nm - m + 1 - 1 = n(m+1) - (m+1) + 1$, lo cual demuestra que la desigualdad se cumple. $\square$

El corolario anterior tiene una serie de consecuencias bastante interesantes y que merecen ser destacadas, algunas de ellas las presentamos en la siguiente serie de resultados.

2.3. Corolario ([**5**]). Si existe $n \in \omega$ tal que X^m sea un espacio $L\Sigma(n)$ para toda $m \in \omega$, entonces X tiene una red numerable.

Demostración. Supongamos que $n > 1$, entonces $X \in L\Sigma(n)$ y por hipótesis también $X^n \in L\Sigma(n)$. Por otra parte, el corolario anterior implica que $X^n \in L\Sigma(k_n)$ con $k_n \geq n^2 - n + 1$, pero $n^2 - n + 1 > n$. Por lo tanto $n = 1$ y en consecuencia, el peso de red de X es numerable, $nw(X) \leq \omega$. $\square$

W. Kubiš, O. Okunev y P. J. Szeptycki preguntaron en [**12**] (Preguntas 4.8 y 7.4) si el hecho de que X^ω sea un espacio $L\Sigma(< \omega)$

implica que X sea un espacio cósmico. Ellos mismos establecen en [**12**] una respuesta, consistente, positiva demostrando que bajo el axioma $\mathbf{MA}_{\omega_1}$, la hipótesis $X^\omega \in L\Sigma(<\omega)$ implica que $nw(X) \leqslant \omega$ (cf. [**12**, 4.12]).

Ahora, con ayuda del Corolario 2.2, podemos demostrar esta última afirmación en el seno de **ZFC** (y con ello damos respuesta positiva a las Preguntas 4.8 y 7.4 de [**12**]).

2.4. Corolario ([**5**]). Si X^ω es un espacio $L\Sigma(<\omega)$, entonces X tiene una red numerable (y por lo tanto X^ω es un espacio $L\Sigma(\leq 1)$).

Demostración. Si $X^\omega \in L\Sigma(<\omega)$, la Proposición 1.23 implica que existe un número natural n tal que $X^\omega \in L\Sigma(n)$. Ahora, como para cada $m \in \mathbb{N}$, X^m es homeomorfo a un subespacio cerrado de X^ω se sigue que $X^m \in L\Sigma(\leq n)$. Luego supongamos que $n > 1$. El Corolario 2.2 implica que $X^n \in L\Sigma(k_n)$ con $k_n \geq n^2 - n + 1$, pero $n^2 - n + 1 > n$. Esta contradicción muestra que $n = 1$, y por lo tanto, el peso de red de X es numerable. $\square$

Otra interesante consecuencia del Teorema 2.1 es la siguiente.

2.5. Corolario ([**5**]). Si X es un espacio $L\Sigma(m)$ para algún $m \in \omega$, y Y es un espacio $L\Sigma(n)$ para algún $n \in \omega$, con $n \geq 2$, entonces $X \times Y$ no es homeomorfo a X. En particular, si X es un espacio $L\Sigma(m)$ para algún $m \in \omega$, con $m \geq 2$, entonces todas las potencias finitas de X no son homeomorfas dos a dos.

Demostración. Basta observar que, si $n > 1$, el espacio $X \times Y \notin L\Sigma(m)$, pues según 2.1 $X \times Y \in L\Sigma(k)$ para algún $k \geq m+n-1 > m$ $\square$

Una de las propiedades más destacadas de las clases $L\Sigma(\leq n)$ es la de ser invariable con respecto a tomar subespacios cerrados e imágenes continuas (Proposición 1.12). Teniendo esto presente, es posible fortalecer el corolario anterior:

2.6. Corolario ([**5**]). Si X es un espacio $L\Sigma(m)$ para algún $m \in \omega$, y Y es un espacio $L\Sigma(n)$ para algún $n \in \omega$, con $n \geq 2$, entonces $X \times Y$ no es homemorfo a ninguna imagen continua de ningún subespacio cerrado de X.

2.7. Corolario ([**5**]). Si X es un espacio $L\Sigma(\leq n)$ para algún $n \in \omega$, y existen naturales k y m tales que $k < m$ y X^m es imagen continua de un subespacio cerrado de X^k, entonces X tiene una red numerable.

Demostración. Supongamos que X no es cósmico y consideremos los espacios $Y = X^k$ y $Z = X^r$, con $r = m - k$. Notemos que $Z \in L\Sigma(l)$ con $l \geqslant 2$. Por hipótesis tenemos que $X^m = Y \times Z$ es imagen continua de un subespacio cerrado de Y, pero esto no es posible según el corolario anterior. Por lo tanto $X \in L\Sigma(1)$. □

Un hecho interesante que se obtiene al aplicar el corolario anterior es el siguiente:

2.8. Corolario ([**5**]). Sea X el espacio dos flechas. Si $m, n \in \omega$ y $n > m$, entonces X^n no se puede encajar en una imagen continua de X^m.

En caso de ser posible tendríamos que el espacio dos flechas es cósmico.

Como mencionamos al principio de esta sección, para algunos espacios específicos, como por ejemplo para el producto de espacios $L\Sigma(n)$ dados, encontrar la clase $L\Sigma(k)$ a la cual pertenecen resulta ser una tarea nada trivial. Por ejemplo, debido a que el espacio doble flecha de Alexandroff es un espacio $L\Sigma(2)$, por la Proposición 1.16, su cuadrado X^2 es un espacio perteneciente a $L\Sigma(\leqslant 4)$. Pero aún hoy en día no es sabido si X^2 es un espacio $L\Sigma(3)$ o bien si es un espacio $L\Sigma(4)$ (vea Problema 1(132) de [**15**]).

En esta temática, presentamos a continuación un resultado relacionado al cuadrado de la compactación unipuntual de un Ψ-espacio. Es valioso mencionar que con este resultado solucionamos plenamente el Problema 3(134) de [**15**].

Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena de subconjuntos infinitos de ω. Recordemos que el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ se define como la unión $\omega \cup \mathcal{A}$ con la topología en la cual los puntos de ω son aislados, y las vecindades básicas de los puntos $A \in \mathcal{A}$ son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$ donde $F \subset A$ es finito. No es complicado mostrar que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio Hausdorff, cero-dimensional (por lo tanto Tychonoff) y localmente compacto. Sea $\alpha\Psi(\mathcal{A})$ su compactación unipuntual. Si la familia $\mathcal{A}$ tiene cardinalidad no numerable, entonces $\alpha\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio $L\Sigma(2)$, ya que es una unión numerable de conjuntos unipuntuales (los puntos de ω) y de un espacio homeomorfo a $A(|\mathcal{A}|)$, la compactación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad $|\mathcal{A}|$, el cual es un espacio de $L\Sigma(2)$, y además la clase $L\Sigma(2)$ es invariante con respecto a uniones numerables (Proposición 1.12).

El Problema 3(134) en [**15**] plantea la pregunta de si el cuadrado de un espacio $\alpha\Psi(\mathcal{A})$ puede ser un espacio $L\Sigma(3)$ o si es un elemento de $L\Sigma(4)$. Nuestro siguiente teorema da solución plena a este problema.

2.9. Teorema ([**5**]). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ familias casi ajenas no numerables de subconjuntos infinitos de ω, y sea $X = \alpha\Psi(\mathcal{A}) \times \alpha\Psi(\mathcal{B})$. Entonces:

(1) X es un espacio $L\Sigma(3)$ si y sólo si ambas familias, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, tienen cardinalidad ω_1;
(2) X es un espacio $L\Sigma(4)$ si y sólo si al menos una de las familias, $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$, tiene cardinalidad mayor que ω_1.

Demostración. Dado que ambos espacios, $\alpha\Psi(\mathcal{A})$ y $\alpha\Psi(\mathcal{B})$, son elementos de $L\Sigma(2)$, su producto es un espacio $L\Sigma(\leq 4)$. Por el Teorema 2.1, sabemos que X no puede ser un elemento de $L\Sigma(2)$, por lo que debe ser elemento de $L\Sigma(3)$ ó bien de $L\Sigma(4)$.

Si una de las familias $\mathcal{A}$ ó $\mathcal{B}$ tiene cardinalidad mayor o igual que ω_2, entonces la compactación unipuntual de su Ψ-espacio correspondiente contiene una copia cerrada de $A(\omega_2)$ mientras el otro Ψ-espacio contiene una copia cerrada de $A(\omega_1)$. Por lo tanto, el producto X contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $A(\omega_2) \times A(\omega_1)$, el cual no es un espacio $L\Sigma(\leq 3)$, según la Proposición 1.21. Como la clase de espacios $L\Sigma(\leq 3)$ es hereditaria con respecto a subespacios cerrados, esto prueba que X no puede ser un espacio de $L\Sigma(3)$.

Por otra parte, si las dos familias $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen cardinalidad ω_1, entonces cada una de ellas es la unión de un espacio numerable y el espacio $A(\omega_1)$. Se sigue que X es la unión de un conjunto numerable, una cantidad numerable de copias de $A(\omega_1)$, y una copia de $A(\omega_1) \times A(\omega_1)$. Como cada uno de estos espacios pertenece a la clase $L\Sigma(\leq 3)$, el espacio X también pertenece a $L\Sigma(\leq 3)$. $\square$

2.10. Corolario ([**5**]). Si $\mathfrak{c} = \omega_1$, entonces para cualquier par de familias casi ajenas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en ω, el producto $\alpha\Psi(\mathcal{A}) \times \alpha\Psi(\mathcal{B})$ es un espacio $L\Sigma(3)$.

3. Compactaciones Unipuntuales

Hemos ya mencionado que Kubiš, Okunev y Szeptycki obtuvieron en [**12**] una respuesta positiva consistente al Problema 7.4 de [**12**] que planteaba la siguiente pregunta:

Problema. Supóngase que $X^\omega \in L\Sigma(< \omega)$. ¿Debe ocurrir que $nw(X) \leqslant \omega$?

Como se recordará, nosotros hemos ya dado, en el Corolario 2.4, una respuesta positiva a esta pregunta en el seno de **ZFC**. No obstante, es valioso mencionar que Kubiš, Okunev y Szeptycki obtuvieron su respuesta consistente demostrando que, de existir un contraejemplo a la implicación: $X^\omega \in L\Sigma(< \omega)$ *implica que* $nw(X) \leqslant \omega$, éste debería ser un espacio $L\Sigma(n)$ (para alguna $n \in \omega$)

que adicionalmente fuera un S-espacio fuerte. (Los autores de [**12**] proceden de la siguiente forma: debido a que el axioma $\mathbf{MA}_{\omega_1}$ implica que los S-espacios fuertes no existen, concluyen que bajo el mencionado axioma, la hipótesis $X^\omega \in L\Sigma(<\omega)$ implica que X es un espacio cósmico).

La manera en que Kubiš, Okunev y Szeptycki obtuvieron su respuesta consistente genera de manera muy natural la pregunta de si existirá un espacio $L\Sigma(n)$, para alguna $n \in \omega$, que sea un S-espacio fuerte. Recuérdese que un espacio X es un S-espacio fuerte si para cada $n \in \omega$, el espacio X^n es un S-espacio. Un *S-espacio* es un espacio regular Hausdorff hereditariamente separable y no hereditariamente Lindelöf [**17**]. En esta sección presentamos una serie de resultados que muestran que bajo la hipótesis $\mathfrak{b} = \omega_1$ (cf. [**7**]) dichos espacios sí existen.

2.11. Lema. Sea X un espacio localmente compacto y no compacto. Si $p : M \to Y$ es un mapeo multivaluado superiormente semicontinuo y $j : X \to Y$ es una función continua, entonces el mapeo $q : M \to \alpha X$ dada por $q(z) = j^{-1}[p(z)] \cup \{\infty\}$ es superiormente semicontinuo.

Demostración. Sea z_0 un punto de M y U una vecindad abierta de $q(z_0)$ en αX; necesitamos encontrar una vecindad V de z_0 en M para la cual se cumpla $q(V) \subset U$.

Como $\infty \in U$, el conjunto $K = X \setminus U$ es compacto. Sea $W = Y \setminus j(K)$. El conjunto W es abierto en Y y contiene a $p(z_0)$, por lo que al utilizar la semicontinuidad superior de p, existe una vecindad V de z_0 en M tal que $p(V) \subset W$. Entonces

$$q(V) = \{\infty\} \cup j^{-1}(p(V)) \subset \{\infty\} \cup j^{-1}(W) \subset U,$$

lo cual completa la demostración. $\square$

2.12. Teorema ([**5**]). Sea X un espacio localmente compacto. Supongamos que para algunos $n, m \in \omega$ existe un espacio $Y \in L\Sigma(\leq n)$ y un mapeo continuo $j : X \to Y$ tal que $j(X) = Y$ y $|j^{-1}(y)| \leq m$ para toda $y \in Y$. Entonces la compactación unipuntual αX de X es un espacio $L\Sigma(\leq nm + 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Si X es compacto, entonces el mapeo j es perfecto, de modo que el mapeo inverso es superiormente semicontinuo y a lo más m-valuado. Si $p : M \to Y$ es un mapeo superiormente semicontinuo y a lo más n-valuado del espacio segundo numerable M sobre Y, entonces la composición $j^{-1} \circ p$ es un mapeo superiormente semicontinuo, sobreyectivo, y a lo más nm-valuado, así que X es un espacio $L\Sigma(\leq nm)$.

Supongamos ahora que X no es compacto. Sea ∞ el punto tal que $\{\infty\} = \alpha X \setminus X$.

Sea $p : M \to Y$ un mapeo superiormente semicontinuo de un espacio segundo numerable M sobre Y tal que $|p(z)| \leq n$ para toda $z \in M$. Definimos un mapeo multivaluado $q : M \to \alpha X$ del siguiente modo:

$$q(z) = j^{-1}(p(z)) \cup \{\infty\}.$$

Es claro que el mapeo q es sobreyectivo y a lo más $(nm + 1)$-valuado, de modo que para completar la prueba, basta verificar que q es superiormente semicontinuo, pero ello es consecuencia inmediata del Lema anterior. □

2.13. COROLARIO ([**5**]). Si X es un espacio localmente compacto y X admite una biyección continua sobre un espacio segundo numerable, entonces αX es un espacio $L\Sigma(\leqslant 2)$.

La línea de Kunen [**17**] y la línea de Todorčević [**20**] son espacios localmente compactos, admiten topologías segundo numerables más débiles y son S-espacios fuertes. Dado que la línea de Todorčević se construye suponiendo $\mathfrak{b} = \omega_1$, obtenemos el siguiente resultado.

2.14. COROLARIO ([**5**]). Supongamos que $\mathfrak{b} = \omega_1$. Entonces existe un S-espacio fuerte que es además un espacio $L\Sigma(\leqslant 2)$.

Con argumentos muy similares a los de la demostración del Teorema 2.12 es posible demostrar las siguientes variantes del mismo:

2.15. Teorema ([**5**]). Sea X un espacio localmente compacto. Supongamos que existe un espacio $Y \in L\Sigma(< \omega)$ y una función continua $j : X \to Y$ de fibras finitas tal que $j(X) = Y$. Entonces la compactación unipuntual αX de X es un espacio $L\Sigma(< \omega)$.

Demostración.

Si X es compacto, entonces el mapeo j es perfecto, de modo que el mapeo inverso es superiormente semicontinuo y finito valuado. Si $p : M \to Y$ es un mapeo superiormente semicontinuo y finito valuado del espacio segundo numerable M sobre Y, entonces la composición $j^{-1} \circ p$ es un mapeo superiormente semicontinuo, sobreyectivo y finito valuado, así que X es un espacio $L\Sigma(< \omega)$.

Supongamos ahora que X no es compacto y sea ∞ el punto tal que $\{\infty\} = \alpha X \setminus X$.

Sea $p : M \to Y$ un mapeo superiormente semicontinuo de un espacio segundo numerable M sobre Y tal que $p(z)$ es finito para toda $z \in M$. Definimos un mapeo multivaluado $q : M \to X$ del siguiente modo:

$$q(z) = j^{-1}(p(z)) \cup \{\infty\}.$$

Es claro que el mapeo q es sobreyectivo y finito-valuado, de modo que sólo debemos verificar que q es superiormente semicontinuo. Pero esto es consecuencia del Lema 2.11. □

La demostración del siguiente teorema sigue el mismo patrón que las de los teoremas anteriores.

2.16. Teorema ([**5**]). Sea X un espacio localmente compacto. Supongamos que existe un espacio $Y \in L\Sigma(< \omega)$ y una función continua $j : X \to Y$ tal que $j(X) = Y$ y $j^{-1}(y)$ es compacto y metrizable para toda $y \in Y$. Entonces la compactación unipuntual αX de X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$.

Demostración. Si X es compacto, entonces el mapeo j es perfecto, de modo que el mapeo inverso es superiormente semicontinuo y (compacto-metrizable)-valuado. Si $p : M \to Y$ es un mapeo superiormente semicontinuo y finito-valuado del espacio segundo numerable M sobre el espacio Y, entonces la composición

$j^{-1} \circ p$ es un mapeo superiormente semicontinuo, sobreyectivo, y (compacto-metrizable)-valuado, por lo cual X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$.

Ahora supongamos que X no es compacto y sea ∞ el punto tal que $\{\infty\} = \alpha X \setminus X$.

Sea $p : M \to Y$ un mapeo superiormente semicontinuo de un espacio segundo numerable M sobre Y tal que $p(z)$ es finito para toda $z \in M$. Definimos un mapeo multivaluado $q : M \to X$ del siguiente modo:

$$q(z) = j^{-1}(p(z)) \cup \{\infty\}.$$

Es claro que el mapeo q es sobreyectivo y (compacto-metrizable)-valuado. Nuevamente aplicando el Lema 2.11, q es un mapeo superiormente semicontinuo. $\square$

Recordemos que un mapeo $j : X \to Y$ es *compacto-cubriente* si para cada conjunto compacto $K \subset Y$ existe un conjunto compacto F en X tal que $j(F) = K$. El último resultado de esta sección es el relacionado a mapeos compacto-cubrientes.

2.17. Teorema ([**5**]). Sea X un espacio localmente compacto. Supongamos que existe un espacio $Y \in L\Sigma(\leq \omega)$ y una biyección continua compacto-cubriente $j : X \to Y$. Entonces la compactación unipuntual αX de X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$.

Para la demostración de este último teorema se puede definir el mapeo q de la misma manera que en los anteriores teoremas, y para verificar que las imágenes de los puntos $q(z)$ son compactos metrizables procedemos de la siguiente manera: existe un subconjunto compacto C de X tal que $p(z) = j(C)$; como j es una condensación (esto es, una biyección continua), la restricción de j a C es un homeomorfismo. Por lo tanto, $q(z)$ es la unión del conjunto $j^{-1}(p(z))$, homeomorfo a $p(z)$, y un conjunto unipuntual, de esta forma $q(z)$ es un compacto metrizable, para toda z.

4. Duplicados de Alexandroff

Uno de los problemas más interesantes e intrincados en la teoría de los espacios $L\Sigma(\leq \kappa)$ es el siguiente:

Problema 13(144) [**15**]. *Sea X un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$ y $\rho : X \to Y$ un mapeo finito valuado, superiormente semicontinuo y tal que $p(X) = Y$. ¿Es Y un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$?*

Un caso particular del problema anterior es cuando uno considera el duplicado de Alexandroff de un espacio X que pertenece a $L\Sigma(\leqslant \omega)$. Recordemos que el *duplicado de Alexandroff* $AD(X)$ de un espacio X es el conjunto $X \times 2$ con la topología definida del siguiente modo: los puntos de $X \times \{1\}$ son aislados, y las vecindades básicas de los puntos del tipo $(x, 0)$ son de la forma $(U \times 2) \setminus \{(x, 1)\}$, en donde U es una vecindad de x en X (vea [**8**] para más detalles de la construcción). Es fácil ver que el mapeo $\pi : AD(X) \to X$ definido por la regla $\pi((x, i)) = x$ es dos-a-uno y perfecto, de modo que el mapeo inverso es 2-valuado y superiormente semicontinuo. Es por todo esto que el siguiente problema es un caso particular del Problema 13(144).

Problema 15(146) [**15**]. *Sea X un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$. ¿Es $AD(X)$ un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$?*

En esta sección presentamos una serie de resultados que fueron obtenidos en el desarrollo de nuestras investigaciones. En primera instancia incluimos un lema y posteriormente presentamos el resultado que da respuesta positiva al problema anterior.

2.18. Lema. Sean $\rho : M \to X$ un mapeo cvss y $j : X \to I$ una función inyectiva (no necesariamente continua) de X en el intervalo unitario $I = [0, 1]$. Si definimos un mapeo $q : M \times I \to AD(X)$ con la regla $q(z, t) = \big(\rho(z) \times \{0\}\big) \cup \big((\rho(z) \cap j^{-1}(t)) \times \{1\}\big)$. Entonces q es un mapeo superiormente semicontinuo. Más aún q es suprayectivo si ρ lo es.

Demostración. Sea $(z_0, t_0) \in M \times I$, y sea U una vecindad de $q(z_0, t_0)$; es necesario encontrar una vecindad V de (z_0, t_0) que cumpla la condición $q(V) \subset U$. Para cada punto $x \in \rho(z_0)$ podemos fijar una vecindad estándar abierta $(W_x \times 2) \setminus \{(x,1)\}$ de $(x,0)$ contenida en U; escojamos una subfamilia finita $W_{x_1}, \ldots, W_{x_n}$ de la familia $\{\, W_x : x \in p(z_0) \,\}$ tal que $p(z_0) \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$, esto es posible ya que $\rho(z_0)$ es compacto. Definamos $W = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$ y $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \setminus j^{-1}(t_0)$. Por lo tanto, existe una vecindad W de $\rho(z_0)$ en X y un conjunto finito $F \subset X$ tal que $F \cap j^{-1}(t_0) = \emptyset$ y $U \supset (W \times 2) \setminus (F \times \{1\})$.

Sea $S = j(F)$; entonces S es finito y $t_0 \notin S$. Por la semicontinuidad superior de ρ, existe una vecindad abierta G de z_0 en M tal que $\rho(G) \subset W$. Sea $V = G \times (I \setminus S)$. Ahora, si $(z,t) \in V$, entonces $\rho(z) \subset W$ y $\rho(z) \cap j^{-1}(t) \subset W \setminus F$, de modo que $q(z,t) \subset (W \times 2) \setminus (F \times \{1\}) \subset U$, y V es la vecindad requerida.

Ahora, si ρ es sobreyectivo, afirmamos que el mapeo q también lo es es. Efectivamente, si $x \in X$, entonces existe $z_0 \in M$ tal que $x \in \rho(z_0)$. Pongamos $t_0 = j(x)$. Entonces tanto $(x,0)$ como $(x,1)$ están en $q(z_0, t_0)$. $\square$

2.19. Teorema ([**5**]). Si X es un espacio $L\Sigma(\leq \omega)$, entonces también lo es $AD(X)$.

Demostración. Fijemos un espacio segundo numerable M y un mapeo compacto valuado y superiormente semicontinuo $p : M \to X$ tal que $p(M) = X$ y $w(p(z)) \leq \omega$ para toda $z \in M$. Como las cardinalidades de M y de $p(z)$, para cada $z \in M$, son menores o iguales que $\mathfrak{c}$, tenemos que $|X| \leq \mathfrak{c}$, y podemos fijar una función uno a uno (no necesariamente continua) $j : X \to I = [0,1]$. Definimos ahora un mapeo multivaluado $q : M \times I \to AD(X)$ por medio de la siguiente regla:

$$q(z,t) = \big(p(z) \times \{0\}\big) \cup \big((p(z) \cap j^{-1}(t)) \times \{1\}\big).$$

Como para cada $(z,t) \in M \times I$, el conjunto $j^{-1}(t)$ contiene a lo más un punto, las imágenes de los puntos bajo q son conjuntos compactos y metrizables. Para verificar que q es un mapeo superiormente semicontinuo basta aplicar el Lema 2.18.

Por lo tanto, existe un mapeo (compacto-metrizable) valuado y superiormente semicontinuo del espacio segundo numerable $M \times I$ sobre $AD(X)$ y ello muestra que $AD(X) \in L\Sigma(\leq \omega)$. $\square$

Recordemos que un espacio X es llamado *espacio* $KL\Sigma(\leq \omega)$ si existe un espacio *compacto* y segundo numerable M y un mapeo compacto valuado y superiormente semicontinuo $p : M \to X$ tal que $p(M) = X$ y $w(p(z)) \leq \omega$ para toda $z \in M$. En [**12**] se observa que un espacio compacto $L\Sigma(\leq \omega)$ no necesariamente es un espacio $KL\Sigma(\leq \omega)$. Por tal motivo tiene sentido preguntarse si el Teorema 2.19 sigue siendo válido si suponemos que X es un espacio $KL\Sigma(\leq \omega)$. A continuación verificaremos que el mismo argumento utilizado para demostrar el teorema anterior se puede usar para mostrar el resultado correspondiente al caso $KL\Sigma(\leq \omega)$.

2.20. Teorema ([**5**]). Si X es un espacio $KL\Sigma(\leq \omega)$, entonces también lo es $AD(X)$.

Demostración. Fijemos un espacio compacto y segundo numerable M y un mapeo compacto valuado y superiormente semicontinuo $p : M \to X$ tal que $p(M) = X$ tal que $w(p(z)) \leq \omega$ para toda $z \in M$. Nuevamente como las cardinalidades de M y de $p(z)$, para cada $z \in M$, son menores o iguales que $\mathfrak{c}$, tenemos que $|X| \leq \mathfrak{c}$, y podemos fijar una función uno a uno (no necesariamente continua) $j : X \to I = [0,1]$. Consideremos el mapeo multivaluado $\gamma : M \times I \to AD(X)$ definido por medio de la siguiente regla:

$$\gamma(z,t) = \big(p(z) \times \{0\}\big) \cup \big((p(z) \cap j^{-1}(t)) \times \{1\}\big).$$

Como para cada $(z,t) \in M \times I$, el conjunto $j^{-1}(t)$ contiene a lo más un punto, las imágenes de los puntos bajo q son conjuntos compactos y metrizables. La semicontinuidad superior y la sobreyectividad de γ son consecuencia del Lema 2.18.

Por lo tanto, $AD(X) \in KL\Sigma(\leq \omega)$. $\square$

Desde luego, es ya notorio que el argumento anterior funciona para demostrar el siguiente resultado:

2.21. TEOREMA ([**5**]). Sea κ un cardinal infinito. Si $|X| \leq \mathfrak{c}$ y X es un espacio $L\Sigma(\leq \kappa)$ (respectivamente, un espacio $KL\Sigma(\leq \kappa)$), entonces también lo es $AD(X)$.

Es valioso observar ahora que la condición "$|X| \leq \mathfrak{c}$" en el Teorema 2.21 no puede omitirse a menos que $2^\kappa \leq \mathfrak{c}$. De hecho, si $2^\kappa > \mathfrak{c}$ podemos considerar al espacio $X = 2^\kappa$ (considerado con la topología producto). Fácilmente se muestra que $X \in KL\Sigma(\leq \kappa)$. Por otra parte, note que todo espacio $L\Sigma(\leq \kappa)$ es una unión de a lo más $\mathfrak{c}$ subespacios de peso no mayor a κ, y en espacios T_2 se cumple $|X| \leqslant 2^{w(X)}$, de modo que su peso de red no puede exceder a $\kappa \cdot \mathfrak{c}$. Obsérvese ahora que el peso de red de $AD(2^\kappa)$ es 2^κ, así que este último espacio no puede ser un elemento de la clase $L\Sigma(\leq \kappa)$.

CAPÍTULO 3

Espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados

1. Introducción

Los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados (o espacios Charming) fueron introducidos por A. V. Arhangel'skii como una generalización de los espacios Lindelöf Σ (ver [**2**]). La intención de este capítulo es presentar los resultados obtenidos por el autor en [**6**]. Nuestro estudio se basa en la idea general de que varios de los resultados válidos en la clase de los espacios Lindelöf Σ pueden ser generalizados a esta nueva clase, o alguna clase intermedia entre la clase de los espacios Lindelöf Σ y la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados.

Entre otras cosas, demostramos que la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados tiene propiedades categóricas semejantes a las de la clase de los espacios Lindelöf Σ. Por ejemplo, mostramos que esta clase es cerrada bajo uniones numerables, subespacios cerrados y bajo imágenes de mapeos compacto valuados superiormente semicontinuos.

Algunos otros resultados obtenidos en [**6**] que nos parece interesante destacar son los siguientes:

(1) Para todo espacio Lindelöf Σ X existe un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado que no es $L\Sigma$ y que cuenta con un núcleo $L\Sigma$ homeomorfo a X(Proposición 3.13).

(2) La clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados no es cerrada bajo productos finitos (Ejemplo 3.12).

(3) En la clase de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados coinciden las propiedades de ser un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado y ser un espacio $L\Sigma$ (Corolario 3.30).

(4) Para un espacio compacto X son equivalentes: $C_p(X)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estrucurado y $C_p(X)$ es un espacio $L\Sigma$ (Corolario 3.34).

Adicionalmente a lo anterior, en [**6**] también obtuvimos los siguientes resultados:

(5) Sea X un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado para el cual existe un núcleo Z con $\chi(Z, X) \leqslant \kappa$. Si X se condensa en un espacio monótonamente κ-monolítico Y, entonces X también es monótonamente κ-monolítico (Corolario 3.20).

(6) Sea κ un cardinal infinito y X un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. Si X se condensa en un espacio κ-monolítico. Entonces X es κ-monolítico (Proposición 3.26).

Es importante mencionar que los resultados (5) y (6) generalizan los resultados 2.5 y 2.1 de [**19**].

Terminología y notación. A través de este capítulo hacemos uso de la siguiente notación. Si X es un espacio topológico entonces $\tau(X)$ denotará a su topología. Si $A \subseteq X$ entonces $\tau(A, X) = \{U \in \tau(X) : A \subseteq X\}$. Si $A = \{x\}$, escribiremos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$.

En el resto del capítulo denotaremos con $\mathcal{K}$ a la clase de espacios compactos, con $\sigma\mathcal{K}$ a la clase de los espacios σ-compactos, $\mathcal{M}$ la clase de los espacios metrizables separables, $\mathcal{L}$ la clase de los espacios Lindelöf y con $L\Sigma$ a la clase de espacios Lindelöf Σ. Además, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ denotarán clases de espacios topológicos. Cuando Y sea un subespacio de X tal que Y pertenece a $\mathcal{P}$, diremos que Y es un $\mathcal{P}$-subespacio de X.

2. Propiedades Categóricas

El siguiente concepto fue introducido por A. V. Arhangel'skii en [**2**].

3.1. Definición. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ clases de espacios topológicos. Un espacio X es $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado si existe un subespacio Y de X tal que $Y \in \mathcal{P}$ y para cada vecindad abierta U de Y en X, el subespacio $X \setminus U$ pertenece a $\mathcal{Q}$. El subespacio Y se llama $\mathcal{P}$-núcleo de X.

Es claro que si $\mathcal{P}_0$ es una subclase de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}_0$ es una subclase de $\mathcal{Q}$, entonces todo espacio $(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q}_0)$-estructurado es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

En el caso particular en que $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = L\Sigma$, obtenemos la clase de los espacios charming. De forma más precisa:

3.2. Definición. Un espacio X es $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado (o Charming) si existe un subespacio Z de X tal que $Z \in L\Sigma$ y para cada vecindad abierta U de Z en X, el subespacio $X \setminus U$ pertenece a $L\Sigma$. El subespacio Z recibe el nombre de *núcleo $L\Sigma$ de X*

Evidentemente un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado puede tener varios núcleos $L\Sigma$.

Todos los espacios Lindelöf Σ son espacios $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurados. En efecto, si X es un espacio $L\Sigma$ podemos tomar como núcleo $L\Sigma$ a cualquier subespacio compacto $Z \subseteq X$, al ser la propiedad $L\Sigma$ preservada por subespacios cerrados, cualquier conjunto de la forma $X \setminus U$, con U abierto, es un espacio $L\Sigma$.

Note que todo espacio $L\Sigma$ es también un espacio $(\mathcal{M}, L\Sigma)$-estructurado, para ello basta tomar cualquier subconjunto finito como un $\mathcal{M}$-núcleo.

Una consecuencia inmediata es que *todos los espacios metrizables separables y todos los espacios Lindelöf-p pertenecen a la* *clase de espacios* $(\mathcal{M}, L\Sigma)$*-estructurados*. Recordemos que un espacio *Lindelöf-p* es la preimagen perfecta de un espacio metrizable separable.

Sin embargo, existen espacios $(\mathcal{M}, L\Sigma)$-estructurados que no pertenecen a la clase de los Lindelöf Σ.

3.3. Ejemplo. Sean $\kappa \geqslant \aleph_1$ y $X = L_\kappa$ la Lindelöficación del espacio discreto de cardinalidad κ. Entonces L_κ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado. Efectivamente, tomemos como núcleo $L\Sigma$ a $Z = \{\infty\}$, donde ∞ es el punto no aislado de X. Si U es una vecindad arbitraria de Z, evidentemente $X \setminus U$ es un subespacio numerable de X, pues es un subespacio Lindelöf discreto, y por lo tanto $L\Sigma$.

Notemos ahora que todos los posibles núcleos $L\Sigma$ de X tienen cardinalidad a lo más numerable. En efecto, si Z es un subespacio $L\Sigma$ de X que no contiene a ∞, al ser un espacio discreto y Lindelöf, debe tener cardinalidad menor o igual a ω. Por otra parte, si Z contiene a ∞ y no tiene cardinalidad numerable, no es un espacio $L\Sigma$ ya que sería homeomorfo a la Lindelöficación de un espacio discreto de cardinalidad mayor o igual a ω_1, y estos espacios no son Lindelöf Σ.

3.4. Observación. El espacio L_κ es también un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado (de hecho un espacio $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-estructurado) que no es $L\Sigma$.

Por otro lado, es importante mencionar que existen espacios Lindelöf que no pertenecen a la clase de los $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados, esto será mostrado más adelante (cf. Ejemplo 3.12).

Los siguientes hechos se siguen inmediatamente de la Definición 3.1. Sin embargo, daremos la demostración ya que serán de mucha utilidad en el resto del capítulo.

3.5. Proposición ([**6**]). Sean $\mathcal{P},\ \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{L}$. Entonces

(1) Todo espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado tiene la propiedad de Lindelöf.
(2) Si adicionalmente $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$ y son cerradas bajo imágenes continuas, subespacios cerrados. Entonces la clase de los espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados tiene las mismas propiedades.
(3) Si además de (2) $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son cerradas bajo preimágenes perfectas, entonces la clase de los espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados es cerrada bajo:
   - imágenes de mapeos compactamente valuados superiormente semicontinuos
   - la construcción del duplicado de Alexandroff.

Demostración.

(1). Sean X un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado y $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X. Tomemos un $\mathcal{P}$-núcleo Z de X. Entonces $\mathcal{C}$ también es una cubierta de Z, y al ser Z Lindelöf, existe una subcolección numerable $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ que cubre a Z. Sea $V = \cup\mathcal{C}^*$. Dado que Z es un $\mathcal{P}$-núcleo de X y V es una vecindad abierta de Z, tenemos que $X \setminus V$ es un $\mathcal{Q}$-subespacio de X, y desde luego Lindelöf. Al ser $\mathcal{C}$ una cubierta de $X \setminus V$, existe una subcolección numerable $\mathcal{C}^+ \subset \mathcal{C}$ que cubre a $X \setminus V$. Es claro que la subcolección $\mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}^+$ es numerable y cubre a X. Por lo tanto X es un espacio Lindelöf.

(2) Sean X un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado, $Z \subseteq X$ un $\mathcal{P}$-núcleo de X y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $f(Z)$ es un $\mathcal{P}$-núcleo de Y. En efecto, sea U una vecindad abierta de $f(Z)$ en Y. Como f es continua y sobreyectiva, tenemos que $f^{-1}(U) = V$ es una vecindad abierta de Z en X y $f(X \setminus V) = Y \setminus U$. Al ser $\mathcal{Q}$ cerrada bajo imágenes continuas, se tiene que $Y \setminus U$ pertenece a $\mathcal{Q}$, de donde concluimos que Y es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Sean X un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado, Z un $\mathcal{P}$-núcleo de X y $F \subset X$ un subespacio cerrado de X. Si $F \cap Z = \emptyset$ entonces F pertenece a $\mathcal{Q}$ y por lo tanto es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Si $F \cap Z \neq \emptyset$, entonces $Z_F = F \cap Z$ es un $\mathcal{P}$-subespacio de F. Afirmamos que Z_F es un $\mathcal{P}$-núcleo de F. De hecho, sea U una vecindad abierta de Z_F en F, entonces existe un conjunto abierto $W \subset X$ tal que $W \cap F = U$. Sea $V = W \cup (X \setminus F)$. Notemos que V es una vecindad abierta de Z en X y dado que Z es un $\mathcal{P}$-núcleo de X, $X \setminus V$ es un $\mathcal{Q}$ subespacio de X. Ahora $(X \setminus V) = (F \setminus U)$, y por lo tanto $F \setminus U$ es un $\mathcal{Q}$-subespacio de F.

(3). Sean X un espacio topológico, Y un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado y $p : X \to Y$ un mapeo perfecto. Tomemos un $\mathcal{P}$-núcleo W de Y. Entonces $Z = p^{-1}(W)$ es un $\mathcal{P}$-subespacio de X. Afirmamos que Z es un $\mathcal{P}$-núcleo de X. En efecto, sea U una vecindad abierta de Z y al ser p cerrada, tenemos que $p(X \setminus Z) = F$ es un conjunto cerrado de Y tal que $F \cap W = \emptyset$. Por lo tanto F es un $\mathcal{Q}$-subespacio de Y. Ahora, $p^{-1}(F)$ es un $\mathcal{Q}$-subespacio de X y al ser $X \setminus U$ un subespacio cerrado de $p^{-1}(F)$, tenemos que $X \setminus U$ pertenece a $\mathcal{Q}$. $\square$

3.6. Observación. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son como en la Proposición 3.5 (3), es fácil ver que el producto $X \times K$ de un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado X y un espacio compacto K es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. Además, como un mapeo multivaluado $p : X \to Y$ es compacto-valuado y superiormente semicontinuo si y sólo si es la composición de la inversa de un mapeo perfecto sobre un subespacio cerrado de X y una función continua (ver, e.g., [**12**]), tenemos que la imagen de un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado bajo un mapeo compacto-valuado superiormente semicontinuo es nuevamente un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. Por lo tanto, si X es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado, entonces también lo es su duplicado de Alexandroff $AD(X)$ de X.

Notemos también que la clase de los espacios $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurados es cerrada bajo imágenes continuas y subespacios cerrados.

En el resto del capítulo supondremos que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son subclases de la clase de los espacios Lindelöf Σ. Y además que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son cerradas bajo uniones numerables e imágenes continuas.

2.1. Sumas Topológicas y Aditividad. Una propiedad que comparten las clases de espacios Lindelöf y $L\Sigma$ es que son numerablemente aditivas y las uniones numerables de espacios pertenecientes a estas clases, son nuevamente elementos de la clase. Algunas clases de espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados también comparten estas propiedades, como se muestra un poco más adelante.

En relación a la suma topológica de espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados tenemos el siguiente resultado.

3.7. Proposición ([**6**]). Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados. Entonces $X = \bigoplus\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Demostración. Dado que cada espacio X_n pertenece a la clase de los $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados, podemos tomar un $\mathcal{P}$-núcleo, $Z_n \subset X_n$, y definir a $Z = \bigcup\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces Z es un $\mathcal{P}$-subespacio de X, al ser unión numerable de $\mathcal{P}$-subespacios. Ahora consideremos una vecindad abierta U de Z en X. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \subset U_n = (X_n \cap U)$ y este conjunto U_n es una vecindad abierta de Z_n en X_n. Al ser Z_n un $\mathcal{P}$-núcleo de X_n se cumple que $X_n \setminus U_n$ es un $\mathcal{Q}$-subespacio de X_n.

Sólo es necesario notar que $(X \setminus U) = \bigcup\{(X_n \setminus U_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y hacer uso del hecho que la unión numerable de $\mathcal{Q}$-subespacios es nuevamente un $\mathcal{Q}$-subespacio para concluir que X es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. $\square$

Ahora estamos en posición de mostrar la cerradura bajo uniones numerables de la clase de los $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados.

3.8. Corolario ([**6**]). Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ clases cerradas bajo uniones numerables, X un espacio y $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subespacios de X que son $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados. Entonces el subespacio $F = \bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Demostración. Observemos que $F^+ = \bigoplus\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado, además la función

$$f : \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

definida como $f(x, n) = x$, para $x \in X_n$, es continua y suprayectiva. Finalmente, basta tener en cuenta que la propiedad de ser $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado se preserva bajo imágenes continuas por la Proposición 3.5(2). □

Otra propiedad que es importante destacar es la siguiente:

3.9. Corolario ([**6**]). Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ cerradas bajo uniones numerables y subespacios cerrados, y X un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. Entonces todo subconjunto del tipo F_σ de X es también un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

2.2. Productos. Como mencionamos anteriormente, el producto de un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado y un espacio compacto es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. Esto puede ser generalizado de la siguiente manera.

3.10. Proposición ([**6**]). Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ cerradas bajo uniones numerables, preimágenes perfectas y subespacios cerrados. Si X es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado y Z es un espacio σ-compacto, entonces $X \times Z$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Demostración. Sea bZ una compactación de Z. Entonces la proyección $\pi_1 : X \times bZ \to X$ es perfecta, y dado que la preimagen perfecta de un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado es un espacio que pertenece a la misma clase, se sigue que $X \times bZ$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Como Z es σ-compacto, podemos representarlo como $Z = \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ con K_n compacto, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $X \times K_n$ es un subespacio cerrado de $X \times bZ$, y por lo tanto un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado.

Finalmente, $X \times Z$ es la unión numerable de espacios $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurados, porque

$$X \times Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \times K_n).$$

Así que, $X \times Z$ es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado. $\square$

3.11. Corolario. Sean X un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado y Z un espacio σ-compacto. Entonces $X \times Z$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado.

Una pregunta natural que surge en virtud del Corolario 3.11 es la siguiente:

¿Es el producto de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado?

La respuesta a esta pregunta es en sentido negativo como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.12. Ejemplo. Sea $Y = L_\kappa \times L_\kappa$ (con $\kappa \geqslant \omega_1$) el cuadrado de la Lindelöficación del espacio discreto de cardinalidad κ. Entonces Y no es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe un núcleo $L\Sigma$ para el espacio Y que denotaremos por Z^*. Dado que la propiedad de ser espacio Lindelöf Σ se preserva por funciones continuas, tenemos que la proyección de Z^* en el primer factor, $Z_1 = \pi_1(Z^*)$, es un subespacio $L\Sigma$ de L_κ; por lo tanto debe ser un subconjunto numerable. Sea $y \in L_\kappa \setminus Z_1$ y tomemos como U al conjunto $Y \setminus (\{y\} \times L_\kappa)$. Entonces U es una vecindad abierta de Z^* cuyo complemento es homeomorfo a L_κ, el cual no es un espacio $L\Sigma$, y esto último contradice la propiedad de ser núcleo $L\Sigma$ de Z^* para Y. Por lo tanto, Y no es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado.

No es difícil comprobar que el espacio Y del ejemplo anterior es un espacio Lindelöf. Por otra parte, al ser L_κ un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado (∞ es un $\mathcal{K}$-núcleo para L_κ), este ejemplo muestra que incluso la clase de los espacios $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurados no es cerrada bajo productos finitos. Adicionalmente podemos utilizar el ejemplo anterior para mostrar que el producto de espacios $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-estructurados no necesariamente es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado.

En vista de la Proposición 3.10 y del Ejemplo 3.12 resulta natural la siguiente pregunta:

¿Es el producto de un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado y un espacio $L\Sigma$ un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado?

Por el momento no tenemos la respuesta. Sin embargo, tenemos un interesante resultado parcial.

3.13. Proposición ([**6**]). Sean $\mathcal{P} \subseteq L\Sigma$, X un espacio perteneciente a $\mathcal{P}$ y κ un cardinal no numerable. Entonces $L_\kappa \times X$ es un espacio $(\mathcal{P}, L\Sigma)$-estructurado.

Demostración. Sea ∞ el punto no aislado de L_κ. El subespacio $Z = \{\infty\} \times X \subset L_\kappa \times X$ es un espacio en $\mathcal{P}$. Afirmamos que Z es un $\mathcal{P}$-núcleo de $L_\kappa \times X$. Sea W una vecindad abierta de Z en $L_\kappa \times X$. Dado que Z es un espacio Lindelöf, podemos suponer que W contiene una unión numerable de conjuntos abiertos básicos de $L_\kappa \times X$ que cubre a Z, esto es $W \supseteq \bigcup\{U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\} \supset Z$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es una vecindad abierta de ∞ en L_κ por lo cual, el conjunto $U = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ también es una vecindad abierta de ∞ en L_κ. De modo que el conjunto $(L_\kappa \setminus U) \times X$ es un espacio $L\Sigma$ y el conjunto $(L_\kappa \times X) \setminus W$ es un subespacio cerrado de él, y en consecuencia un espacio $L\Sigma$. $\square$

3.14. Observación. Notemos que la Proposición 3.13 nos permite construir ejemplos de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados que no son espacios $L\Sigma$. De hecho, por 3.13, dado un espacio X que sea Lindelöf Σ, tenemos que $L_\kappa \times X$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado que no es un espacio $L\Sigma$ y que tiene un núcleo $L\Sigma$ homeomorfo a X.

3.15. Corolario ([**6**]). Sea $\mathcal{P}$ una subclase de la clase de los espacios $L\Sigma$. Entonces existe un espacio $(\mathcal{P}, L\Sigma)$-estructurado que no es un espacio $L\Sigma$.

El resultado anterior nos parece importante pues nos garantiza, para todo espacio $X \in L\Sigma$, la existencia de un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado que tiene un núcleo homeomorfo a X y no es un espacio $L\Sigma$. Adicionalmente, como veremos a continuación, nos garantiza que ciertas subclases de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados son no vacías.

Como ya hemos mencionado, en [**12**] los autores introducen las clases de espacios $L\Sigma(\leq n)$. Como una aplicación inmediata del corolario anterior presentamos el siguiente resultado:

3.16. Corolario. Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, la clase de los espacios $(L\Sigma(\leq n), L\Sigma)$-estructurados es no vacía y no está contenida en la clase $L\Sigma$.

El mismo resultado nos permite afirmar que la clase de los espacios $(L\Sigma(\leq \omega), L\Sigma)$ es no vacía y que entre los elementos de esta clase existen espacios que no son $L\Sigma$.

3. Levantando propiedades topológicas

Es bien conocido que si un espacio topológico X se condensa (esto es, existe una biyección continua) sobre un espacio topológico Y con alguna propiedad $\mathcal{P}$, esto no implica que el espacio topológico X posee la propiedad $\mathcal{P}$. En este sentido, diremos que la propiedad $\mathcal{P}$ no es levantada por condensaciones (por ejemplo, la recta de Sorgenfrey se condensa sobre $\mathbb{R}$ pero la recta de Sorgenfrey es cerodimensional y $\mathbb{R}$ es conexo, de modo que la conexidad no es levantada por condensaciones). Pero es claro que si X es compacto entonces esta situación cambia drásticamente. De modo que, es natural imponer propiedades cercanas a la compacidad al espacio topológico X.

En [**19**] V.V. Tkachuk realizó un primer estudio sistemático de esta situación. Él demostró que muchas propiedades topológicas $\mathcal{P}$ pueden ser levantadas por condensaciones cuando X es un espacio Lindelöf Σ.

Dado que la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados es una generalización de la clase de los espacios Lindelöf Σ, es natural preguntarse si los resultados de Tkachuk admiten generalización a esta nueva clase de espacios o a alguna subclase que contenga a los espacios Lindelöf Σ.

En esta sección presentamos resultados que generalizan algunos resultados de [**19**]. Por ejemplo, demostramos que si κ es un cardinal infinito y X es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado que se condensa en un espacio κ-monolítico, entonces X es κ-monolítico. Además mostramos que la propiedad de ser un espacio κ-monolítico puede ser levantada a cierta clase de espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados.

A continuación presentamos algunos resultados que generalizan resultados válidos en la clase de los espacios $L\Sigma$. Primeramente establecemos una definición.

Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X es una *red* en el punto $x \in X$ si para cada $U \in \tau(x, X)$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G \subset U$. Dado un conjunto $A \subset X$ diremos que una familia $\mathcal{N}$ es una *red externa* de A en X si $\mathcal{N}$ es una red en cada punto de A.

3.17. Lema ([**6**]). Sea X un espacio topológico normal, para el cual existe una cubierta compacta $\mathcal{C}$ y una red $\mathcal{N}$ con respecto a dicha cubierta. Supongamos que $f : X \to Y$ es una condensación y $\mathcal{F}$ es una red para y en Y. Entonces la familia $\mathcal{E} = \{f^{-1}(F) \cap N : F \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ es una red para el punto $x = f^{-1}(y)$ en X.

Demostración. Sea $x = f^{-1}(y)$ y tomemos un elemento $U \in \tau(x, X)$. Dado que $\mathcal{C}$ es una cubierta compacta de X, existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$. Como la familia $\mathcal{F}$ es una red en y, es posible elegir un elemento $F \in \mathcal{F}$ para el cual se cumpla que $y \in F$

y $\overline{F} \cap f(C_x \setminus U) = \emptyset$. Sea $G = f^{-1}(F)$. Entonces se cumple $\overline{G} \cap (C_x \setminus U) = \emptyset$; por la normalidad de X, existe un conjunto $V \in \tau(C_x \setminus U, X)$ tal que $\overline{V} \cap G = \emptyset$. El conjunto $U \cup V$ es una vecindad abierta de C_x en X y como $\mathcal{N}$ es una red módulo $\mathcal{C}$, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $C_x \subset N \subset (U \cup V)$.

El conjunto $E = G \cap N$ es un elemento de $\mathcal{E}$ que cumple la condición $x \in E \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{E}$ es una red para el punto $x = f^{-1}(y)$ en X. $\square$

Vamos a demostrar que la propiedad de ser un espacio monótonamente κ-monolítico puede ser levantada en ciertos espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados (cf. Corolario 3.20). Primeramente recordemos algunas definiciones.

Para un cardinal infinito κ, diremos que X es *monótonamente κ-monolítico* si, para cada $A \subset X$ con $|A| \leq \kappa$, podemos asignar una red externa $\theta(A)$ a el conjunto $\overline{A}$ de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

(a) $|\theta(A)| \leq \kappa$;
(b) si $A \subset B$, entonces $\theta(A) \subset \theta(B)$;
(c) si $\lambda \leq \kappa$ es un ordinal y se tiene una familia $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subconjuntos de X tales que $\alpha < \beta < \lambda$ implica $A_\alpha \subset A_\beta$, entonces

$$\theta(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}) = \bigcup\{\theta(A_\alpha) : \alpha < \lambda\}.$$

Un espacio X es *monótonamente monolítico* si es monótonamente κ-monolítico para todo cardinal κ. θ será llamado *operador κ-monolítico* de X.

3.18. Teorema ([**6**]). Sean X un espacio topológico normal, $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{N}$ una red módulo $\mathcal{C}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Si existe una condensación de X en un espacio monótonamente κ-monolítico Y, entonces X también es monótonamente κ-monolítico.

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una condensación, θ un operador κ-monolítico en Y. Tomemos un conjunto $A \subset X$ de cardinalidad menor o igual a κ y definamos la familia

$$G(A) = \{f^{-1}(B) \cap N : N \in \mathcal{N}, B \in \theta(f(A))\}.$$

Es inmediato notar que la cardinalidad de $G(A)$ es menor o igual a κ, y dado que f es una condensación, las propiedades (b) y (c) del operador θ son preservadas por el operador G.

Ahora si $x \in \overline{A}$, sea $y = f(x)$. Entonces $\theta(f(A))$ es una red en el punto y, por lo que, aplicando el lema anterior, es posible concluir que $G(A)$ es una red en x. Con lo que se puede afirmar que G es un operador monótonamente κ-monolítico en X. $\square$

Sean X un espacio topológico y $Z \subseteq X$. El *carácter de Z en X* es el número cardinal

$$\chi(Z, X) = min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X) \textit{ es una base de } Z \textit{ en } X\},$$

donde $\mathcal{U} \subseteq \tau(Z, X)$ es una *base* de Z en X si para cada $W \in \tau(Z, X)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Z \subseteq U \subseteq W$.

3.19. Observación. Si X es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado y Z es un núcleo $L\Sigma$ de X de carácter menor o igual a κ, entonces X tiene una cubierta compacta y una red de cardinalidad menor o igual a κ con respecto a dicha cubierta. En efecto, sea $\mathcal{B}(Z)$ una base de X en Z. Dado que Z es un núcleo $L\Sigma$ de X, todos los conjuntos de la forma $X \setminus B$ con $B \in \mathcal{B}(Z)$ son espacios $L\Sigma$ por lo que cuentan con una cubierta compacta y una red numerable con respecto a dicha cubierta. Considerando la unión de todas las cubiertas obtenemos una cubierta compacta para X y la unión de todas las redes nos proporciona una red con respecto a dicha cubierta de cardinalidad menor o igual a κ.

El siguiente corolario es una ligera generalización de un resultado de Tkachuk en [**19**].

3.20. Corolario ([**6**]). Sean X un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado para el cual existe un núcleo Z con $\chi(Z, X) \leq \kappa$. Si X se condensa en un espacio monótonamente κ-monolítico Y, entonces X también es monótonamente κ-monolítico.

3.21. Corolario ([**19**]). Sean X un espacio $L\Sigma$. Si existe una condensación de X en un espacio monótonamente monolítico Y, entonces X también es monótonamente monolítico.

A continuación mostraremos que una variante de la propiedad Collins-Roscoe puede ser levantada en cierta subclase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados.

Primeramente recordemos la definición de la propiedad de Collins-Roscoe. Dado un espacio X, supongamos que, para cada $x \in X$, es posible asignar una familia numerable de subconjuntos $\mathcal{G}(x)$ de X. Diremos que $\{\mathcal{G}(x) : x \in X\}$ es una *colección Collins-Roscoe* si, para cada $x \in X$ y para cada $U \in \tau(x, X)$, podemos encontrar un conjunto abierto V tal que $x \in V \subset U$ y, para cada $y \in V$, existe un conjunto $P \in \mathcal{G}(y)$ tal que $x \in P \subset U$. Si un espacio X tiene una colección Collins-Roscoe, entonces diremos que tiene la *propiedad Collins-Roscoe.*

Si en lugar de asignar a cada punto $x \in X$ una colección numerable asignamos una colección de cardinalidad menor o igual a κ que cumpla las mismas condiciones (es decir, para cada $x \in X$ y para cada $U \in \tau(x, X)$, podemos encontrar un conjunto abierto V tal que $x \in V \subset U$ y, para cada $y \in V$, existe un conjunto $P \in \mathcal{G}(y)$ tal que $x \in P \subset U$), diremos X tiene la *propiedad κ-Collins-Roscoe.*

3.22. Proposición ([**6**]). Sea X un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado para el cual existe un núcleo Z con $\chi(Z, X) \leq \kappa$. Si X se condensa en un espacio Collins-Roscoe Y, entonces X tiene la propiedad κ-Collins-Roscoe.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta compacta de X y $\mathcal{N}$ una red módulo $\mathcal{C}$ de cardinalidad menor o igual a κ. Sean $f : X \to Y$

una condensación y $\{\mathcal{G}(y) : y \in Y\}$ una colección Collins-Roscoe en Y. Para cada $x \in X$, definimos la familia

$$\mathcal{G}^*(x) = \{f^{-1}(F) \cap N : N \in \mathcal{N}, F \in \mathcal{G}(f(x))\}.$$

Note que la cardinalidad de $\mathcal{G}^*(x)$ es menor o igual a κ.

Tomemos un conjunto $A \subset X$. Ahora, si $x \in \overline{A}$, entonces $\varepsilon = \bigcup\{\mathcal{G}(f(z)) : z \in A\}$ es una red en el punto $y = f(x) \in f(\overline{A})$, de modo que, aplicando el Lema 3.17, podemos concluir que la familia

$$\mathcal{G}^*(x) = \{f^{-1}(F) \cap N : N \in \mathcal{N}, F \in \mathcal{G}(f(x))\} =$$

$$\bigcup\{\mathcal{G}(f(z)) : z \in A\}$$

es una red en el punto x. Es decir $\{\mathcal{G}^*(x) : x \in X\}$ es una colección κ-Collins-Roscoe en X $\square$

Un hecho bien conocido es el siguiente; sin embargo, para tener un trabajo más completo daremos la prueba del mismo.

3.23. LEMA. Sea X un espacio de peso $\leq \kappa$ y $K \subset X$ un subespacio compacto. Entonces $\chi(K, X) \leq \kappa$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una base para X de cardinalidad menor o igual a κ y K un subespacio compacto de X. Sea $\mathcal{B}_K$ la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ que cubren a K. Note que

$$|\mathcal{B}_K| \leq |[\mathcal{B}]^{<\omega}| = |\mathcal{B}| \leq \kappa,$$

por tanto $|\mathcal{B}_K| \leq \kappa$. Afirmamos que $\mathcal{B}_K$ es una base para K en X. Efectivamente, sea $U \in \tau(K, X)$. Para cada $x \in K$ sea U_x un elemento de $\mathcal{B}$ que cumple $x \in U_x \subset U$. Sea $V_K = \bigcup\{U_x : x \in K\}$, entonces $V_K \subset U$ y existen $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subset V_K$. Es claro que $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \in \mathcal{B}_K$ y ello demuestra que $\mathcal{B}_K$ es una base para K en X. Por lo tanto, $\chi(K, X) \leq \kappa$. $\square$

Recordemos que un espacio topológico X es κ-*estable* si para cualquier imagen continua Y del espacio X, si Y se condensa sobre un espacio Z con $w(Z) \leq \kappa$ se tiene que $nw(Y) \leq \kappa$. Un espacio es *estable* si es κ-estable para todo cardinal infinito κ.

Una propiedad importante de los espacios $L\Sigma$ es que son estables (cf. [**1**, II.6.21]). Ahora podemos demostrar una ligera generalización de este hecho. Mostraremos que los espacios $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurados también son estables.

3.24. Proposición ([**6**]). Sea X un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. Entonces X es estable.

Demostración. Sean K un núcleo compacto de X, $f : X \to Y$ una función continua y $g : Y \to Z$ una condensación de Y en un espacio de peso menor o igual que κ. Se debe mostrar que $nw(Y) \leq \kappa$. Notemos que Y es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado y que $f(K)$ es un núcleo compacto de Y (esto se sigue de la prueba de 3.5).

Dado que K es compacto, $K^* = g(f(K)) \subset Z$ es compacto y, aplicando el lema anterior, se tiene que $\chi(K^*, Z) \leq \kappa$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$ una base para el conjunto K^* en Z. Sea $V_\alpha = g^{-1}(U_\alpha)$ y consideremos a la familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \leq \kappa\}$, entonces $\mathcal{V}$ cumple $\bigcap \mathcal{V} = \bigcap\{V_\alpha : \alpha \leq \kappa\} = f(K)$. Si definimos los subespacios $Y_\alpha = Y \setminus V_\alpha$, podemos escribir a Y como:

$$Y = \bigcup_{\alpha \leq \kappa} Y_\alpha \cup f(K).$$

Notemos que cada espacio Y_α es $L\Sigma$ y al ser $f(K)$ compacto, todos ellos son estables y tienen i-peso menor o igual a κ, resulta que $nw(Y) \leq \kappa$ y ello demuestra que X es κ-estable. Al ser κ arbitrario, podemos afirmar que X es estable $\square$

Recordemos que un espacio X es *κ-monolítico* si se cumple que $nw(\overline{A}) \leq \kappa$ para todo subconjunto $A \subset X$ de cardinalidad menor o igual a κ. Un espacio es *monolítico* si es κ-monolítico para toda κ.

Un resultado muy importante de la teoría de los espacios C_p es el siguiente teorema de dualidad de Arhangel'skii:

3.25. Teorema. [**1**, II.6.8] El espacio $C_p(X)$ es τ-monolítico si y sólo si el espacio X es τ-estable.

Una consecuencia de este resultado es el siguiente corolario.

3.26. Corolario ([**6**]). Sea X un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. Entonces $C_p(X)$ es monolítico.

Tkachuk demostró en [**19**, Proposición 2.1] que si un espacio Lindelöf Σ X se condensa sobre un espacio κ-monolítico entonces X también es un espacio κ-monolítico. Con ayuda de la proposición 3.24 podemos dar una generalización de este hecho.

3.27. Proposición ([**6**]). Sean κ un cardinal infinito y X un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. Si X se condensa sobre un espacio κ-monolítico. Entonces X es κ-monolítico.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una condensación de X en un espacio κ-monolítico Y. Sea $A \subset X$ un subconjunto de cardinalidad menor o igual a κ. Entonces $\overline{A}$ es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado que se condensa sobre el espacio $Z = f(\overline{A})$. Utilizando el hecho de que $nw(Z) \leq \kappa$ y la estabilidad de $\overline{A}$, concluimos que $nw(\overline{A}) \leq \kappa$. Por lo tanto, X es κ-monolítico □

4. Grupos Topológicos $\aleph_0$-acotados y espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados

El propósito de esta sección es estudiar cuando el hecho de ser un espacio $L\Sigma$ y ser espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado (o pertenecer a alguna subclase de la clase de los espacios $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurados) coinciden en alguna clase de espacios topológicos. Mostramos, por ejemplo, que es equivalente ser un espacio Lindelöf Σ y ser un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado en la clase de los grupos topológicos $\aleph_0$-acotados. Como consecuencia probamos que, para cualquier espacio Tychonoff X, el espacio de funciones $C_p(X)$ es Lindelöf Σ si y sólo si es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado.

Recordemos que un grupo topológico G es $\aleph_0$-*acotado* si para toda vecindad U de la identidad de G existe un conjunto numerable $K \subseteq G$ tal que $G = K \cdot U$.

3.28. PROPOSICIÓN ([**6**]). Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ clases de espacios topológicos. Si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo uniones numerables y G es un grupo topológico $\aleph_0$-acotado tal que G es un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado con un $\mathcal{P}$-núcleo no denso, entonces G pertenece a la clase $\mathcal{Q}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \subset G$ un $\mathcal{P}$-núcleo no denso. Entonces existe un punto $g \in U = G \setminus \overline{K}$. Usando la regularidad de G, podemos encontrar una vecindad abierta V de g en G tal que $g \in V \subset \overline{V} \subset U$. Observemos que $G \setminus \overline{V}$ es una vecindad abierta de K, por lo tanto $\overline{V}$ pertenece a $\mathcal{Q}$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que V es una vecindad del elemento identidad de G. Finalmente, dado que G es $\aleph_0$-acotado, existe un conjunto numerable $N \subset G$ tal que $G = N \cdot \overline{V}$, de modo que podemos representar a G como una unión numerable de subespacios de G tales que cada subespacio pertenece a $\mathcal{Q}$. Por lo tanto, G pertenece a $\mathcal{Q}$. $\square$

3.29. COROLARIO ([**6**]). Sea $\mathcal{P}$ una subclase de $\mathcal{L}$ y sea $\mathcal{Q}$ alguna de las siguientes clases: $\sigma\mathcal{K}, L\Sigma(< n), L\Sigma(\leqslant n), L\Sigma(< \omega), L\Sigma(\leqslant \omega), L\Sigma$, $\mathcal{L}$. Si G es un grupo topológico $\aleph_0$-acotado que es, además, un espacio $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$-estructurado con un núcleo no denso, entonces G pertenece a la clase $\mathcal{Q}$.

Dado que todo grupo topológico con celularidad numerable es $\aleph_0$-acotado, podemos concluir que para cualquier espacio Tychonoff $X \neq \emptyset$ su espacio de funciones $C_p(X)$ es $\aleph_0$-acotado.

3.30. COROLARIO ([**6**]). Sea $\mathcal{Q}$ alguna de las siguientes clases: $\sigma\mathcal{K}, L\Sigma(< n), L\Sigma(\leqslant n), L\Sigma(< \omega), L\Sigma(\leqslant \omega), L\Sigma$, $\mathcal{L}$. Supongamos que $C_p(X)$ es un espacio $(\mathcal{K}, \mathcal{Q})$-estructurado, entonces $C_p(X)$ pertenece a la clase $\mathcal{Q}$.

Dado que todo espacio $L\Sigma$ es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado, tenemos el siguiente resultado.

3.31. Corolario ([**6**]). Sea G un grupo topológico $\aleph_0$-acotado. Entonces G es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado si y sólo si es un espacio Lindelöf Σ.

3.32. Corolario ([**6**]). Sea X un espacio Tychonoff. Entonces $C_p(X)$ es un espacio $(\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado si y sólo si es un espacio Lindelöf Σ.

Cuando el espacio X es compacto, podemos mejorar el Corolario 3.32.

3.33. Teorema ([**6**]). Sea $\mathcal{P}$ una subclase de $L\Sigma$ que contiene a los espacios compactos. Sea X un espacio compacto. Entonces $C_p(X)$ es un espacio $(\mathcal{P}, L\Sigma)$-estructurado si y sólo si es un espacio Lindelöf Σ.

Demostración. Supongamos que $C_p(X)$ es un espacio $(\mathcal{P}, L\Sigma)$-estructurado. Entonces $C_p(X)$ tiene un subgrupo denso que es un espacio Lindelöf Σ ([**2**, Teorema 5.2]). Pero, al ser X compacto, el hecho de que $C_p(X)$ contenga un subespacio denso Lindelöf Σ implica que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ ([**1**, IV.2.11]).

En la otra dirección, recordemos que todo espacio Lindelöf Σ es un espacio $(\mathcal{P}, L\Sigma)$-estructurado pues $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$. $\square$

En particular, tenemos los siguientes corolarios.

3.34. Corolario ([**6**]). Sea X un espacio compacto. Entonces $C_p(X)$ es un espacio $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado si y sólo si es un espacio Lindelöf Σ.

3.35. Corolario ([**6**]). Sea X un espacio compacto. Entonces $C_p(X)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado si y sólo si es un espacio Lindelöf Σ.

3.36. Corolario ([**6**]). Supongamos que $X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es la suma topológica de espacios compactos. Si $C_p(X)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado entonces $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ.

Demostración. Como $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_p(K_n)$ es homeomorfo a

$$C_p(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n) = C_p(X),$$

tenemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_p(K_n)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, el espacio $C_p(K_m)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado al ser $C_p(K_m)$ imagen continua de $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_p(K_n)$. Como K_m es compacto, por el Corolario 3.35, tenemos que $C_p(K_m)$ es Lindelöf Σ. Se sigue que $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ por la Proposición 1.7. $\square$

Considerando los Corolarios 3.34, 3.35 y 3.36, las preguntas naturales son las siguientes:

3.37. Pregunta. Sea X un espacio no compacto. Supóngase que $C_p(X)$ es un espacio $(L\Sigma, L\Sigma)$-estructurado. ¿Es cierto que $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ?

3.38. Pregunta. Sea X un espacio no compacto. Supongamos que $C_p(X)$ es un espacio $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. ¿Debe ser $C_p(X)$ un espacio Lindelöf Σ?

Una primera idea en la búsqueda de la respuesta a la Pregunta 3.38 es notar que si $C_p(X)$ es un espacio $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado con núcleo Z, siempre es posible descomponer a $C_p(X)$ de la siguiente manera:

$$C_p(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \cup \bigcup_{V\in\mathcal{B}(Z)} (C_p(X)\setminus V)$$

donde $\mathcal{B}(Z)$ es una base de Z en $C_p(X)$. Note que cada uno de los uniendos en esta descomposición es un espacio Lindelöf-Σ; de modo que si alguno de ellos tiene interior no vacío, podemos utilizar la propiedad de $\aleph_0$-acotación de $C_p(X)$ (y el método usado en la demostración de 3.28) para concluir que, además de ser un espacio $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado, es un espacio $L\Sigma$.

En caso contrario, la descomposición de $C_p(X)$ es en conjuntos cerrados con interior vacío, por lo que sus complementos son conjuntos abiertos densos. Esto nos sugiere el considerar propiedades del tipo Baire.

4.1. La propiedad κ-Baire. Recordemos que un espacio topológico X es un *espacio de Baire*, o tiene la propiedad de Baire, si para cada sucesión $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos densos en X se tiene que $\bigcap\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ también es un conjunto denso en X.

Un espacio X es de la *primera categoría de Baire*, o simplemente de primera categoría, si se puede expresar como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un espacio X es de la *segunda categoría de Baire*, o simplemente de segunda categoría, si la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos abiertos densos es no vacía.

Algunos hechos conocidos sobre espacios de Baire son los siguientes.

(1) La propiedad de Baire se hereda a los subespacios abiertos.
(2) X es de primera categoría de Baire si y sólo si no es de segunda categoría de Baire.
(3) Un espacio X no vacío es de Baire si y sólo si todo abierto no vacío de X es de la segunda categoría de Baire.
(4) En un espacio homogéneo X coinciden las propiedades de Baire y segunda categoría de Baire.

Las primeras tres propiedades se pueden encontrar en [**9**, 3.9.J] y para la propiedad (4) se presenta una generalización de la misma en 3.45.

Una generalización a estos conceptos se obtiene al incrementar la cantidad de conjuntos densos. Con ello surge el concepto de espacio κ-Baire.

3.39. Definición ([**10**]). Sea κ un cardinal infinito. Un espacio κ-Baire es aquel en el cual la intersección de menos de κ conjuntos densos abiertos, arbitrarios, es un subespacio denso del mismo.

Con esta definición, los espacios de Baire son los espacios $\aleph_1$-Baire.

3.40. Definición. Sea κ un cardinal infinito. Un espacio X es de la $(1,\kappa^+)$-categoría de Baire, o simplemente de la $(1,\kappa^+)$-categoría, si es unión de a lo más κ conjuntos densos en ninguna parte.

3.41. Definición. Sea κ un cardinal infinito. Un espacio X es de la $(2,\kappa^+)$-categoría de Baire, o simplemente de la $(2,\kappa^+)$-categoría, si la intersección de cada familia de a lo más κ conjuntos abiertos densos es no vacía.

3.42. Observación. Sea X un espacio topológico. Un conjunto A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X. Entonces X pertenece a la $(1,\kappa^+)$-categoría de Baire si y sólo si contiene una familia $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de subconjuntos densos y abiertos para los cuales se cumple $\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} = \emptyset$. Esto es, X pertenece a la $(1,\kappa^+)$-categoría de Baire si y sólo si no pertenece a la $(2,\kappa^+)$-categoría de Baire.

3.43. Observación. Sean U y V conjuntos abiertos en un espacio topológico X, con $V \subseteq U$. Entonces, si V es de la $(2,\kappa^+)$-categoría de Baire, U también lo es. En efecto, si $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en U y definimos $V_\alpha = G_\alpha \cap V$ para cada $\alpha < \kappa$. Entonces $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en V. Por lo tanto, $\emptyset \neq \bigcap\{V_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y esto implica que U pertenece a la $(2,\kappa^+)$-categoría de Baire.

El resto de las propiedades enunciadas para los espacios de Baire también admiten generalización.

3.44. Proposición. Un espacio topológico X no vacío es κ^+-Baire si y sólo si todo subconjunto abierto no vacío de X pertenece a la $(2,\kappa^+)$-categoría de Baire.

Demostración.

$\Rightarrow \rfloor$ Sean V un abierto no vacío en X y $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos densos en V. Definimos a los conjuntos G_α

como $G_\alpha = V_\alpha \cup (X \setminus \overline{V})$, para cada $\alpha < \kappa$. Dado que $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos en X y X es un espacio κ^+-Baire, resulta que $\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto denso de X y al ser V un abierto no vacío, resulta que $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} \bigcap V = \bigcap\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es denso en V. Por lo tanto, U es κ^+-Baire y pertenece a la $(2, \kappa^+)$-categoría de Baire.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos densos en X y U un subconjunto abierto, arbitrario y no vacío, de X. Es inmediato notar que $\{G_{\alpha,U} : \alpha < \kappa\}$ es una familia de abiertos densos de U, donde $G_{\alpha,U} = G_\alpha \cap U$ para cada $\alpha < \kappa$. Por hipótesis, U pertenece a la $(2, \kappa^+)$-categoría y ello implica que

$$\emptyset \neq \bigcap\{G_\alpha \cap U : \alpha < \kappa\} = (\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}) \cap U.$$

Por lo tanto, $\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto denso de X y X es un espacio κ^+-Baire. $\square$

3.45. Proposición. Sea X un espacio homogéneo, entonces X pertenece a la $(2, \kappa^+)$-categoría de Baire si y sólo si X es κ^+-Baire.

Demostración. Sea X un espacio perteneciente a la $(2, \kappa^+)$-categoría de Baire. Supóngase que X no tiene la propiedad κ^+-Baire. Por la proposición anterior, existe un conjunto abierto no vacío $U \subseteq X$ que pertenece a la $(1, \kappa^+)$-categoría de Baire. Sea $x \in U$. Entonces x tiene una base de vecindades formada por abiertos pertenecientes a la $(1, \kappa^+)$-categoría. Dado que X es homogéneo, podemos tomar una base $\mathcal{B}$ para todo el espacio X, formada por conjuntos pertenecientes a la $(1, \kappa^+)$-categoría. Por el lema de Zorn, existe una familia maximal γ de conjuntos abiertos disjuntos, todos ellos elementos de $\mathcal{B}$. Se cumple que $\overline{\bigcup \gamma} = X$. Como cada $U \in \gamma$ es un conjunto perteneciente a la $(1, \kappa^+)$-categoría, podemos elegir una familia $\{G_{\alpha,U} : \alpha < \kappa\}$ de abiertos densos en U tales que $\bigcap\{G_{\alpha,U} : \alpha < \kappa\} = \emptyset$. Sea $G_\alpha = \bigcup\{G_{\alpha,U} : U \in \gamma\}$, para cada $\alpha < \kappa$. Entonces $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$

es una familia de subconjuntos abiertos y densos de X, sin embargo:

$$\bigcap\{G_\alpha : \alpha < \kappa\} = \bigcap_{\alpha<\kappa}\bigcup\{G_{\alpha,U} : U \in \gamma\} = \bigcup_{U\in\gamma}\bigcap\{G_{\alpha,U} : \alpha < \kappa\}$$

es igual al $\emptyset$, una contradicción. Por lo tanto X tiene la propiedad κ^+-Baire. La otra implicación es inmediata. $\square$

3.46. Corolario. Sea G un grupo topológico. Entonces G pertenece a la $(2, \kappa^+)$-categoría de Baire si y sólo si tiene la propiedad κ^+-Baire.

En virtud del corolario anterior tenemos que las propiedades κ^+-Baire y $(2, \kappa^+)$-categoría de Baire coinciden en los espacios del tipo $C_p(X)$.

Dado que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, tenemos el siguiente resultado relacionado a 3.38

3.47. Proposición ([**6**]). Sea G un grupo topológico $\aleph_0$-acotado, $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado. Sea Z un núcleo σ-compacto de G de carácter $\chi(Z, G) = \kappa$. Si G tiene la propiedad κ^+-Baire, entonces G es Lindelöf Σ.

Demostración. Sean G un grupo topológico $(\sigma\mathcal{K}, L\Sigma)$-estructurado y $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ un núcleo σ-compacto de G de carácter $\chi(Z, G) = \kappa$. Entonces podemos representar a G de la siguiente forma:

$$G = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big) \cup \bigcup_{V\in\mathcal{B}} (G \setminus V),$$

donde $\mathcal{B}$ es una base para Z en G de cardinalidad α. Dado que todos los elementos de la unión son subespacios cerrados Lindelöf Σ, y G tiene la propiedad κ^+-Baire, existe algún elemento en la unión con interior no vacío. Como G es homogéneo y $\aleph_0$-acotado, podemos aplicar el método utilizado en la demostración de 3.28 para mostrar que G es un espacio Lindelöf Σ. $\square$

Bibliografía

[1] A. V. Arhangel'skii: *Topological function spaces*, Mathemathics and its Applications (Soviet Series), 78, Dordretch (1992)

[2] A. V. Arhangel'skii: *Remainders of metrizable spaces and generalizations of Lindelöf* Σ*-spaces*, Fundamenta Mathematicae, Volumen 215, páginas 87-100 (2011)

[3] A. V. Arhangel'skii, M. Tkachenko : *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathemathics, Volumen 1, Ed. Atlantis Press/World Scientific (2008)

[4] A. V. Arhangel'skii, O. G. Okunev: *Function Spaces with the Topology of Pointwise Convergence*, manuscito.

[5] F. Casarrubias Segura, O. Okunev, C. G. Paniagua Ramírez: *Some results on* $L\Sigma(\kappa)$*-spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin, Volumen 49, Número 4, páginas 667-675 (2008)

[6] F. Casarrubias-Segura, C. G. Paniagua Ramírez: *Some results on the* $(L\Sigma, L\Sigma)$*-structured spaces*, enviado para su publicación a Central European Journal of Mathematics.

[7] E. K. van Douwen: *The Integers in Topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen, J. Vaughan (Editores), North Holland, páginas 111-167 (1984)

[8] R. Engelking: *On the double circumference of Alexandroff*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Astron. Math. Phys. Volumen 16, Número 8, páginas 629-634 (1968)

[9] R. Engelking: *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathemathics, Volumen 6, Ed. Verlag Helderman (1989)

[10] A. Fedeli: *On the* κ*-Baire property*, Comment. Math. Univ. Carolin, Volumen 34, Número 3, páginas 525-527 (1993)

[11] C. Good: *The Lindelöf Property*, Encyclopedia of General Topology, K. P. Hart, J. Nagata, J. Vaughan (Editores), Elsevier North Holland, páginas 182-184 (2004)

[12] W. Kubiš, O. Okunev, P. J. Szeptycki: *On some classes of Lindelöf Σ-spaces*, Topology and its Applications, Volumen 153, Número 14, páginas 2574-2590 (2006)

[13] K. Kuratowski: *Sur une caractérisation des Alephs*, Fund. Math, Volumen 38, páginas 14-17 (1951)

[14] K. Nagami: *Σ-spaces*, Fundamenta Mathemathicae, Volumen 65, Número 2, páginas 169-192 (1969)

[15] O. G. Okunev: *$L\Sigma(\kappa)$-spaces*, Open Problems in Topology II, Ed. E. Pearl, Elsevier, páginas 47-50 (2007)

[16] D. Repovš, P.V. Semenov: *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Mathematics and Its Applications, Volumen 455, Kluwer Academic Publishers (1998)

[17] J. Roitman: *Basic S and L*, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen, J. Vaughan (Editores), North Holland, páginas 295-326 (1984)

[18] V. V. Tkachuk: *Lindelöf Σ-spaces: an omnipresent class*, Revista de la Real Académia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Volumen 104, Número 2, páginas 221-244 (2010)

[19] V. V. Tkachuk: *Lifting the Collins-Roscoe property by condensations*, Topology Proceedings, Volumen 42, páginas 1-15 (2013)

[20] S. Todorcevic: *Partition Problems in Topology*, Ed. AMS, (1989)

Índice de materias