



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

***OBSERVACIÓN DE ESTADOS Y RECONSTRUCCIÓN DE  
ENTRADAS DESCONOCIDAS PARA CIERTAS CLASES DE  
SISTEMAS CONMUTADOS***

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**Héctor Ríos Barajas**

TUTOR PRINCIPAL:  
Dr. Fridman Leonid, Facultad de Ingeniería, UNAM

COMITÉ TUTOR:  
Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A., Instituto de Ingeniería, UNAM  
Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto, Instituto de Ingeniería, UNAM  
Dr. Dávila Montoya Jorge Ángel, Programa de Maestría y Doctorado en  
Ingeniería

México, D. F. Agosto 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.

Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Fridman Leonid

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Dávila Montoya Jorge Ángel

3<sup>er</sup> Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

Lugar donde se realizó la tesis:

**Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.**

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Fridman Leonid

---

FIRMA



*Ohana* significa familia.  
La familia nunca te abandona ni te olvida.

—

愛  
族

*La familia también consiste de  
todos esos miembros  
apreciados que no forman  
parte de lo que típicamente se  
conoce como familia.*

Dedicada a toda mi *Ohana*...



## RESUMEN

---

En el presente trabajo de tesis se desarrollan esquemas de observación de estado (*continuo y discreto*) para ciertas clases de *sistemas conmutados* con presencia de entradas desconocidas. Los esquemas propuestos basan su estimación del *estado continuo* en observadores HOSM y tipo-Luenberger, mientras que el *estado discreto* es estimado a través de las propiedades de la *inyección equivalente* (*conmutación no-autónoma*), característica intrínseca de los observadores HOSM; y de la información del *estado continuo* (*conmutación autónoma*). Finalmente, se presentan algunas aplicaciones de los esquemas de observación propuestos, al problema de detección y aislamiento de fallas.





*Mientras el río corra, los montes hagan sombra,  
y en el cielo haya estrellas,  
debe durar la memoria del beneficio recibido  
en la mente del hombre agradecido.*

— **Virgilio**

## AGRADECIMIENTOS

---

Con todo mi cariño y mi amor para las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis sueños, por motivarme y darme la mano cuando la necesitaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

*Papá, Mamá y Hermanas*

A mis maestros y amigos, en especial al *Dr. Leonid Fridman* y a mi amigo *Antonio Rosales*, que en este andar por la vida, influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme como una persona de bien y preparada para los retos que pone la vida, a todos y cada uno de ellos les dedico cada una de estas páginas de mi tesis.

Agradecimiento especial al *Dr. Jorge Dávila* y al *Dr. Denis Efimov*, por toda su ayuda en la elaboración de este trabajo, sin su extraordinario apoyo este triunfo no hubiera sido posible, muchas gracias.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar mis estudios de doctorado, bajo el CVU 270504, los cuales culmino con la presentación de esta Tesis.

Finalmente, gracias a ti por tu paciencia, por tu comprensión, por tu fuerza, por ser como eres, y sobre todo; por tu amor. Me has enseñado el verdadero significado de ser feliz y seguir siempre adelante. ¡Muchas gracias!

*Marisela Salvador*



# ÍNDICE GENERAL

---

## I OBSERVACIÓN DE ESTADO EN CIERTAS CLASES DE SISTEMAS CONMUTADOS

	1		
1	MOTIVACIÓN	3	
1.1	Planteamiento Matemático del Problema	5	
1.2	Resultados Principales	6	
1.3	Estructura de la Tesis	6	
1.4	Publicación de Resultados	6	
1.5	Notación	7	
2	SISTEMAS LINEALES CONMUTADOS	9	
2.1	Introducción	9	
2.2	Planteamiento del Problema	10	
2.3	Transformación del Sistema	11	
2.4	Diseño de Observadores	12	
2.4.1	Observador de Estados $\bar{x}_{11}(t)$ y $\bar{x}_{12}(t)$	13	
2.4.2	Observador de Estado $\bar{x}_{21}(t)$	16	
2.4.3	Observador de Estado $\bar{x}_{22}(t)$	17	
2.5	Resultado Principal	18	
2.5.1	Banco de Observadores	18	
2.5.2	Estimación del Estado Discreto: Conmutación Autónoma	19	
2.5.3	Estimación del Estado Discreto: Conmutación No-Autónoma	19	
2.5.4	Estimación de Estado Continuo en los Instantes de Conmutación	21	
2.5.5	Estimación de Estado Continuo	22	
2.6	Ejemplos Numéricos	23	
2.6.1	Conmutación Autónoma	23	
2.6.2	Conmutación No-Autónoma	24	
2.7	Conclusiones	26	
3	SISTEMAS NO-LINEALES CONMUTADOS	27	
3.1	Introducción	27	
3.2	Planteamiento del Problema	28	
3.3	Diseño de Observadores	28	
3.3.1	Términos de Corrección	30	
3.4	Resultado Principal	31	
3.4.1	Estimación del Estado Continuo	31	
3.4.2	Estimación del Estado Discreto: Conmutación Autónoma	33	
3.4.3	Estimación del Estado Discreto: Conmutación No-Autónoma	33	
3.4.4	Estimación de Estado en los Instantes de Conmutación	34	
3.5	Ejemplos Numéricos	35	
3.5.1	Conmutación Autónoma	35	
3.5.2	Conmutación No-Autónoma	37	
3.6	Conclusiones	39	

## II APLICACIONES: DETECCIÓN Y AISLAMIENTO DE FALLAS 41

4	SLC: FD BASADA EN OBSERVADORES HOSM, Y FID VÍA EIV	43	
4.1	Introducción	43	
4.2	Planteamiento del Problema	44	
4.3	Esquema de Detección	45	

4.4	Esquema de Identificación	47
4.5	Ejemplo Numérico	48
4.6	Conclusiones	48
5	SNL: FDI BASADA EN MULTI-OBSERVADORES HOSM	51
5.1	Introducción	51
5.2	Planteamiento del Problema	52
5.3	Multi-Observadores HOSM	52
5.3.1	Caso Libre de Falla	52
5.3.2	Caso de Falla en Componentes	55
5.3.3	Caso de Falla en Actuadores	56
5.3.4	Banco de Observadores	57
5.4	Detección y Aislamiento de Fallas	57
5.5	Ejemplo Numérico	60
5.6	Observador Libre de Falla	61
5.7	Observador Falla en Actuador	62
5.8	Observador Falla en Actuador + Componente	62
5.9	Conclusiones	63
III	CONCLUSIONES FINALES	65
IV	APÉNDICES	67
A	CONCEPTOS PRELIMINARES	69
A.1	Conceptos para Sistema Lineales	69
A.2	Conceptos para Autómatas Híbridos	72
A.3	Diferenciador HOSM con ruido	75
B	PUBLICACIONES	77
	BIBLIOGRAFÍA	79

## ACRÓNIMOS

---

FD	Detección de Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
FDI	Detección y Aislamiento de Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
FDId	Detección e Identificación de Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
FI	Aislamiento de Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
FId	Identificación de Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
FTC	Control Tolerante a Fallas ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
HOSM	Modos Deslizantes de Orden Superior ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
SLPV	Sistemas con Parámetros Variantes ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
MRA	Masa-resorte-amortiguador
SH	Sistemas Híbridos
SLC	Sistemas Lineales Conmutados
SLIT	Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo
SMC	Control por Modos Deslizantes ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
SNL	Sistemas No-Lineales
SNLC	Sistemas No-Lineales Conmutados
STA	Algoritmo Super-Twisting ( <i>de sus siglas en inglés</i> )
EIV	Ecuación Integral de Volterra



## Parte I

### **OBSERVACIÓN DE ESTADO EN CIERTAS CLASES DE SISTEMAS CONMUTADOS**

En esta parte del trabajo se presentan los esquemas de observación de estado (*continuo* y *discreto*), que fueron desarrollados para diferentes clases de sistemas conmutados (*sistemas lineales, no-lineales*). Algunos ejemplos numéricos muestran el desempeño de dichos esquemas.





*El que no posee el don de maravillarse,  
ni de entusiasmarse,  
más le valdría estar muerto,  
porque sus ojos están cerrados.*

— **Albert Einstein**



## MOTIVACIÓN

---

Los sistemas híbridos, cuyo comportamiento puede ser representado por la interacción de dinámicas continuas y discretas, han sido fuertemente estudiados en las últimas décadas ya que este tipo de sistemas describen un gran número de fenómenos físicos. La mayor parte de la atención se ha concentrado en problemas de estabilidad y estabilización, con resultados satisfactorios y extensos (ver, e.g. [41], [44], [42]).

La primera pregunta que viene a la mente es: ¿Por qué estudiar los sistemas híbridos? La respuesta es simple; debido a que en un gran número de fenómenos naturales, así como en una extensa gama de sistemas físicos, aparecen diferentes modos de operación. Dichos modos de operación representan diferentes comportamientos y estos pueden ser representados por la interacción de dinámicas continuas y discretas (sistemas híbridos).

La segunda pregunta ¿Por qué el problema de observación? Existen diferentes razones por las cuales no es posible medir ciertas variables en un proceso, estas pueden ser: restricciones físicas, técnicas o económicas. No resulta nada extraño que las variables más importantes dentro de un proceso no estén disponibles para su medición debido a la falta de instrumentación, o bien porque los tiempos de adquisición de datos son demasiado grandes para poder hacer uso de ellos en el sistema de control. Más aún, se tienen que considerar los grandes costos debido tanto a la compra, como al mantenimiento de dicha instrumentación. Además, también hay que considerar los tiempos de mantenimiento y calibración de los equipos para garantizar la confiabilidad de las medidas. Para resolver este tipo de necesidades, el diseño e implementación de observadores permitirá el monitoreo continuo de las condiciones de funcionamiento de las variables de interés dentro de un proceso, haciendo uso de una menor cantidad de sensores.

Finalmente, ¿Por qué el problema de observación en sistemas híbridos? Existen muchas razones por las cuales los modos de operación de un sistema híbrido cambian, debido a esto resulta fundamental conocer completamente el estado del mismo. Por ejemplo, si las conmutaciones entre los diferentes modos de operación ocurren de forma natural, resulta prioritario, para ciertas tareas de control, conocer en que modo de operación está el sistema, así como las causas que ocasionan los cambios. (ver la [Figura 1.1](#)).

Por otro lado, si las conmutaciones en los modos de operación se deben presentar por necesidad, e.g. debido a una reacción del medio ambiente, resulta fundamental observar de alguna forma tanto el modo de operación como el estado continuo en este tipo de sistemas híbridos (ver la [Figura 1.2](#)).

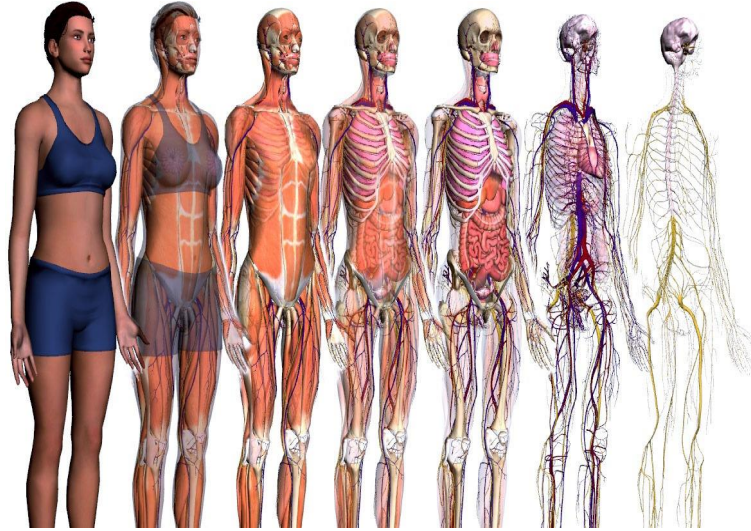


Figura 1.1: *Un ejemplo muy interesante es el cuerpo humano. El comportamiento de nuestro cuerpo puede considerarse como híbrido. Debido a diferentes razones (genero, enfermedades, habilidades, etc.) el comportamiento de los distintos sistemas del cuerpo cambia (el modo de operación cambia), entonces resulta muy importante conocer las causas que producen dichos cambios (el problema de observación).*



Figura 1.2: *Resulta claro que el comportamiento de muchos robots industriales puede ser representado mediante sistemas híbridos. En este caso, es interesante observar los modos de operación que se presentan debido a cierta interacción con el medio ambiente (e.g. evasión de obstáculos), que ocasionan cambios en el comportamiento dinámico o en los parámetros del robot.*

Otras de las razones de los cambios en el modo de operación se deben a diseño, *i.e.* modos de operación pre-diseñados para cumplir ciertas tareas especificadas con anterioridad. En este caso es interesante observar el estado continuo del sistema híbrido para así seleccionar el modo de operación más apropiado (ver la [Figura 1.3](#)).

Lo que se pretende con este trabajo es establecer diferentes esquemas de observación de estado para ciertos tipos de sistemas híbridos vía modos deslizantes de orden superior, que presenten convergencia en tiempo finito y que sean robus-



Figura 1.3: El Harrier es un avión militar a reacción de diseño británico, capaz de realizar despegues y aterrizajes verticales/cortos. En este caso, el Harrier presenta modos de operación muy distintos tanto en despegue, aterrizaje y vuelo, que están previamente diseñados para un comportamiento más apropiado.

tos ante perturbaciones; y proporcionar métodos de reconstrucción de entradas desconocidas y/o perturbaciones para dichos sistemas. De este modo, es posible desarrollar sistemas de control más sofisticados con la posibilidad de usar plataformas de implementación más económicas capaces de ofrecer mejoras reales en instalaciones industriales.

### 1.1 PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA

Considere que el siguiente sistema representa la dinámica de un sistema híbrido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)) + B_{\sigma(t)}u(t) + E_{\sigma(t)}w(t), \\ y(t) &= h_{\sigma(t)}(x(t)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado continuo,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{R}^p$  es el vector de entradas conocidas,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es la salida, y  $w \in \mathcal{W} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es la entrada desconocida. El estado discreto  $\sigma \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\} \subseteq \mathfrak{N}$  determinará el comportamiento del sistema a lo largo de los  $q$  posibles *modos de operación*, descritos por los campos vectoriales  $f_{\sigma}$  y las matrices de distribución  $B_{\sigma}$  y  $E_{\sigma}$ . El estado discreto podrá ser generado de dos maneras:

1. *Autónoma*. La dinámica del sistema cambia de forma discontinua cuando  $x(t)$  atraviesa ciertas fronteras, *i.e.*  $\sigma$  depende de  $x(t)$ .
2. *No-Autónoma*. La dinámica del sistema cambia abruptamente como respuesta a una señal de control o a una señal exógena, *i.e.*  $\sigma$  no depende de  $x(t)$ .

Los problemas que se analizarán a lo largo de este trabajo son los siguientes:

1. Estimación del estado continuo  $x(t)$ .
2. Estimación del estado discreto  $\sigma(t)$ .
3. Estimación de la entrada desconocida  $w(t)$  (aplicación para el problema de FDI).

*Dentro de los sistemas híbridos, en este trabajo; se estudiarán dos tipos: Sistemas con Conmutación Autónoma, y Sistemas con Conmutación No-Autónoma. Los otros dos tipos identificados en la literatura corresponden a los Sistemas con Saltos Autónomos, y los Sistemas con Saltos No-Autónomos.*

Como se verá más adelante, a pesar de que el problema de observación ha sido estudiado extensivamente, el problema sigue muy activo en la literatura y aún quedan muchos problemas por resolver debido a la gran gama de sistemas físicos que se pueden representar como sistemas conmutados. Particularmente, para el problema de estimación simultánea del estado *continuo* y *discreto*, en presencia de entradas desconocidas; se han presentado pocas soluciones en la literatura, y es en este punto donde radica la aportación de este trabajo.

## 1.2 RESULTADOS PRINCIPALES

Con base en los objetivos planteados, los resultados principales se enlistan a continuación:

1. Esquema de observación de estado (*continuo* y *discreto*) para cierta clase de SLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*) con entradas desconocidas. Dicho esquema está basado en observadores HOSM, que estiman la parte *fuertemente observable* de forma *exacta* y en *tiempo finito*, mientras que el resto del estado continuo es estimado asintóticamente por medio de observadores tipo-Luenberger. Para el estado discreto, se establecen dos esquemas de estimación para conmutaciones autónomas y no-autónomas, respectivamente.
2. Esquema de observación de estado para cierta clase de SNLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*) con entradas desconocidas. La solución consiste en un esquema multi-observadores robustos basados en el diferenciador HOSM. Para el estado continuo, dichos observadores HOSM estiman el estado continuo de forma *exacta* y en *tiempo finito*, mientras que el estado discreto es estimado usando los esquemas previamente propuestos.
3. Esquema de FDId para cierta clase de SLC (*conmutación autónoma*). La estrategia consiste en un generador de residuos basado en un banco de observadores HOSM, para resolver el problema de FD; mientras que la solución de una EIV establece el esquema de FId.
4. Esquema de FDI para cierta clase de SNL. Haciendo uso de la *inyección equivalente*, se generan residuos que permiten la detección de ciertas fallas actuando en el sistema. Para el problema de FI se propone un esquema multi-modelo que permite aislar dichas fallas.

## 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS

**Parte I:** El [Capítulo 2](#) presenta el problema de estimación de estado continuo y discreto para cierta clase de SLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*), y presencia de entradas desconocidas. El mismo problema ahora para una clase de SNLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*), se describe en el [Capítulo 3](#). **Parte II:** El problema de FDId para cierta clase de SLC es presentado en el [Capítulo 4](#). El [Capítulo 5](#) describe el problema de FDI para cierta clase de SNL. **Parte III:** Conclusiones finales.

## 1.4 PUBLICACIÓN DE RESULTADOS

Los resultados reportados en la Tesis han sido publicados parcialmente de la siguiente forma:

1. [Capítulo 2](#): International Journal of Adaptive Control and Signal Processing / ADHS 2012 / CDC 2012 / VSS 2012 / Book Chapter Springer (Hybrid Dynamical Systems).

2. [Capítulo 3](#): Asian Journal of Control / Journal of the Franklin Institute / IECON 2011 / Book Chapter Springer (Hybrid Dynamical Systems).
3. [Capítulo 4](#): International Journal of Adaptive Control and Signal Processing / SAFE PROCESS 2012.
4. [Capítulo 5](#): International Journal of Robust and Nonlinear Control / SAFE PROCESS 2012.

En el [Apéndice B](#) se presenta una lista detallada de las publicaciones realizadas a lo largo de los estudios de doctorado.

## 1.5 NOTACIÓN

La siguiente notación es usada a lo largo de este trabajo. La matriz Moore-Rose pseudo-inversa de  $F \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , se define como  $F^+ = (F^T F)^{-1} F^T \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . Para una matriz  $J \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  con  $n \geq m$ , y  $\text{rank}(J) = r$ ;  $J^\perp \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times n}$  se define como una matriz tal que  $\text{rank}(J^\perp) = n - r$  y  $J^\perp J = 0$ . La matriz  $J^{\perp\perp} \in \mathfrak{R}^{r \times n}$  corresponde a una de las matrices con rango renglón completo tal que  $\text{rank}(J^{\perp\perp}) = r$  y  $J^\perp (J^{\perp\perp})^T = 0$ . Es evidente que las matrices  $J^\perp$  y  $J^{\perp\perp}$  no son únicas y que  $\text{rank} \begin{bmatrix} (J^\perp)^T & (J^{\perp\perp})^T \end{bmatrix}^T = n$ . Denote por  $\mathcal{L}_\infty$  al conjunto de todas las entradas  $v$ , señales medibles, que satisfacen  $\|v(t)\| < \infty$  para casi todo  $t \geq 0$ . La matriz  $I_n$  denota la matriz identidad de  $n \times n$ . El símbolo  $\|\cdot\|$  representa la norma Euclidiana, mientras que  $\wedge$  y  $\vee$  representan las operaciones lógicas and y or, respectivamente. Finalmente, la función  $[v]^r$ , donde  $v$  y  $r$  son reales, se define como  $[v]^r = |v|^r \text{sign}(v)$ .





*Dime y lo olvido,  
enséñame y lo recuerdo,  
involúcrame y lo aprendo.*

— Benjamin Franklin

# 2

## SISTEMAS LINEALES CONMUTADOS

---

*En este capítulo se presenta el problema de estimación de estado continuo y discreto para cierta clase de SLC (conmutación autónoma/no-autónoma), en presencia de entradas desconocidas. La clase de sistemas bajo estudio puede contener ceros de fase-no mínima en algunos de sus regiones de operación. Las condiciones para las cuales es posible la estimación exacta del estado, en presencia de entradas desconocidas, se establecen con base en propiedades estructurales del sistema. Para esto, el espacio de estados se descompone en sus partes: fuertemente observable, no-fuertemente observable y no-observable. Observadores basados en HOSM estiman la parte fuertemente observable de manera exacta, mientras que observadores tipo-Luenberger estiman las partes restantes de forma asintótica. Para el caso en el que no es posible la estimación exacta, se proporcionan cotas finales (ultimate bounds) del error de estimación del estado continuo. Para la estimación del estado discreto se establecen dos esquemas para conmutaciones autónomas y no-autónomas, respectivamente. Dichos esquemas basan su estimación en la información del estado continuo e inyección equivalente. Ejemplos numéricos ilustran la eficacia de los esquemas propuestos.*

### 2.1 INTRODUCCIÓN

El problema de observación de sistemas conmutados, *i.e.* la estimación del estado continuo y discreto; y el diseño de observadores es de gran interés en muchas áreas del control. Este problema ha sido estudiado por varios autores usando diferentes tipos de enfoques. La diferencia principal radica en el conocimiento que se tiene acerca del estado discreto o modo de operación activo; algunos enfoques consideran sólo el estado continuo como desconocido y asumen que el estado discreto es completamente conocido, mientras que otros asumen que ambos estados son desconocidos.

En [2] y [13], un observador tipo-Luenberger y un observador por HOSM, para SLC, han sido propuestos para el caso en el que el estado discreto es conocido. Otro trabajo en el que se considera el estado discreto conocido es el que se presenta en [51]. En este trabajo se aborda el problema de estimación simultánea del estado continuo y la entrada por medio de un método de estimación de horizonte móvil, cuando este se encuentra sujeto a perturbaciones en la propia entrada (entradas desconocidas). Por otro lado, para el caso en el que ambos estados son desconocidos, en [9] se propone un observador, basado en el algoritmo Super-Twisting, que estima el estado de sistemas *fuertemente observables*; y el estado discreto, en tiempo finito. En ese mismo contexto, en [10], con base en propiedades



de detectabilidad fuerte y esquemas de LMI, son diseñados dos observadores para cierta clase de SLC con entradas desconocidas.

Considerando que la salida y el estado continuo inicial están disponibles, en [62] se proponen condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema de invertibilidad, *i.e.* condiciones para la estimación del estado discreto y la entrada de forma única. Haciendo uso de teoría de grafos, asumiendo que sólo se conoce la estructura del sistema, en [18] los autores estudian la observabilidad del estado discreto, el estado continuo y la entrada de SLC con entradas desconocidas. Una caracterización y un método de diseño de observadores para SLC, con salto en los estados, se presentan en [57].

El problema de observabilidad en sistema conmutados también ha sido estudiado extensivamente en la literatura. Por ejemplo, [14], [20] y [8] analizan la observabilidad de sistema híbridos, donde el estado discreto depende de las trayectorias continuas del sistema. En [25] se estudia la detectabilidad de SLC, donde el problema es reducido a estudiar la estabilidad asintótica de un sistema con conmutación exógena. En [57] se presentan condiciones necesarias y suficientes para la observabilidad, cuando el sistema evoluciona bajo una señal de conmutación (*conmutación persistente*) muy particular.

De este modo, a pesar de que el problema de observación ha sido estudiado extensivamente, el problema sigue muy activo en la literatura y aún quedan muchos problemas por resolver debido a la gran gama de sistemas físicos que se pueden representar como sistemas conmutados. Además, al solucionar diferentes problemas de observación se pueden establecer problemas de control basados en observación y/o compensación, basada en identificación de entradas desconocidas, como en el caso de sistemas sin conmutaciones.

## 2.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de SLC con entradas desconocidas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + E_{\sigma(t)}w(t), \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

El sistema (2.1) representa un caso particular de un automata híbrido [44], sin saltos en el estado continuo  $x(t)$ , ver Apéndice A.

donde  $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado continuo,  $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{R}^p$  es el vector de entradas conocidas,  $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es el vector de salidas, y  $w(t) \in \mathcal{W} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es el vector de entradas desconocidas acotadas, *i.e.*  $\|w(t)\| \leq w^+ < \infty$ . El estado discreto  $\sigma \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\} \subseteq \mathfrak{N}$  determina la dinámica actual del sistema a lo largo de los  $q$  posibles *modos de operación*, *i.e.*  $\{A_1, B_1, C_1, E_1\}, \{A_2, B_2, C_2, E_2\}, \dots, \{A_q, B_q, C_q, E_q\}$ .

El estado discreto puede ser generado por medio de una función lineal, o señal de conmutación; del estado continuo (*conmutación autónoma*<sup>1</sup>), *i.e.*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_1, \\ 2, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_2, \\ \vdots & \\ q, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_q, \end{cases}\tag{2.2}$$

donde  $H \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  es un vector renglón conocido, y  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_q \subseteq \mathcal{H} \in \mathfrak{R}$  son intervalos conocidos, disjuntos y cerrados, tales que  $\mathcal{H} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}_\sigma = \mathfrak{R}$ , *i.e.*  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_q$  cubren todos los números reales  $\mathfrak{R}$ .

Note que para cada valor del estado continuo  $x(t)$ , corresponde un sólo valor del estado discreto  $\sigma(t)$  en (2.2), *i.e.*, por definición, el estado discreto es distinguible.

<sup>1</sup> Aquí, la dinámica del sistema cambia de forma discontinua cuando  $x(t)$  atraviesa ciertas fronteras, en este caso,  $\mathcal{H}_\sigma$ .

Sin embargo, el estado discreto también puede ser generado de forma exógena o controlada, sin depender necesariamente del estado continuo (*conmutación no-autónoma*<sup>2</sup>). Para este tipo de sistemas, el estado discreto se describe sólo como  $\sigma(t) \in \Omega$ . Para ambos tipos de conmutación, *autónoma* o *no-autónoma*; se asume que las trayectorias satisfacen la condición de *Tiempo Mínimo* entre conmutaciones (ver [Definición A.9](#), [Apéndice A](#)). De este modo, se puede asumir que dicho *Tiempo Mínimo*  $T_\delta$  es suficientemente grande, o que es posible estimarlo (ver, e.g. [\[58\]](#)); de tal forma que el observador de estado pueda converger dentro de dicho *Tiempo Mínimo*.

Los problemas que se analizarán son los siguientes:

1. Estimación del estado continuo  $x(t)$ .
2. Estimación del estado discreto  $\sigma(t)$ .

### 2.3 TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA

Con base en las definiciones de observabilidad fuerte, detectabilidad fuerte, ceros invariantes, grado relativo (ver [Apéndice A](#)) las siguientes suposiciones aseguran la posibilidad de lograr la estimación del estado continuo.

**Suposición 2.1** La pareja  $(A_j, C_j)$ , para toda  $j \in \Omega$ , es detectable.

**Suposición 2.2** La salida del sistema (2.1) tiene un vector de grado relativo  $(r_1, \dots, r_m)$ , con respecto a la entrada desconocida; tal que  $r_1 + \dots + r_m = n_\nu$ , donde  $n_\nu$  corresponde a la dimensión del espacio fuertemente observable.

Como ya se mencionó, es posible descomponer el sistema en sus partes *fuertemente observable*, *no-fuertemente observable* y *no-observable*, haciendo uso del algoritmo de [B. P. Molinari](#) [\[47\]](#), que proporciona una base del espacio débilmente *no-observable*  $\mathcal{V}^*$ . Por simplicidad, el índice correspondiente al estado discreto será omitido. Sin embargo, la transformación será aplicada para cada dinámica generada por el estado discreto.

La siguiente matriz de transformación no singular es definida<sup>3</sup>:

$$T := \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T & (V_{\mathcal{N}^+})^T & (N^+)^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.3)$$

donde las matrices  $U_1 \in \mathfrak{R}^{(n_\nu - m) \times n}$  y  $U_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , se definen como:

$$U_1 = \begin{bmatrix} c_1^T & (c_1 A)^T & \dots & (c_1 A^{r_1 - 2})^T & \dots & \\ & c_m^T & (c_m A)^T & \dots & (c_m A^{r_m - 2})^T & \end{bmatrix}^T, \quad (2.4)$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} (c_1 A^{r_1 - 1})^T & \dots & (c_m A^{r_m - 1})^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.5)$$

con  $c_i$  como el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $C$ . Por medio del algoritmo de [B. P. Molinari](#) [\[47\]](#), es posible seleccionar una matriz con rango completo por columnas  $V$ , formando una base de  $\mathcal{V}^*$  adaptada al subespacio *no-observable*  $\mathcal{N}$ , i.e.

$$V = \begin{bmatrix} V_{\mathcal{N}^*} & N \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

<sup>2</sup> En este caso, la dinámica del sistema cambia abruptamente como respuesta a una señal de control o a una señal exógena.

<sup>3</sup> Los detalles para obtener la transformación se describen en el [Apéndice A](#).

El Tiempo Mínimo  $T_\delta$  es tal que los tiempos de conmutación cumplen  $t_{i+1} - t_i \geq T_\delta$  para toda  $i$ .

Como consecuencia de la [Suposición 2.1](#), cada subsistema es detectable. Más aún, el conjunto de ceros invariantes inestables, i.e.  $\text{Re}\{\lambda\} > 0$ ; no pertenecen al conjunto de  $(A_\sigma, C_\sigma)$ -eigenvalores no-observables. Sistemas con grado relativo completo satisfacen la [Suposición 2.2](#) [\[36\]](#). Si no fuera así, es posible aplicar métodos alternativos para desacoplar entradas desconocidas, e.g. [\[34\]](#).

Definiendo  $n_{\mathcal{N}} = \dim(\mathcal{N})$ , se tiene que  $V_{\bar{\mathcal{N}}} \in \mathfrak{R}^{n \times (n-n_{\mathcal{V}}-n_{\mathcal{N}})}$  y  $N \in \mathfrak{R}^{n \times n_{\mathcal{N}}}$ . Más aún, la matriz  $V$  satisface las siguientes igualdades

$$AV + EK^* = VQ \Leftrightarrow (A + EK^*)V = VQ, \quad (2.7)$$

$$CV = 0, \quad (2.8)$$

para ciertas matrices  $\bar{K}^* \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $K^* \in \mathfrak{R}^{m \times (n-n_{\mathcal{V}})}$  y  $Q \in \mathfrak{R}^{(n-n_{\mathcal{V}}) \times (n-n_{\mathcal{V}})}$ . De este modo, la transformación  $\bar{x}(t) = T\chi(t)$ , lleva al sistema (2.1) a la siguiente forma (ver Figura 2.1):

Note que  $V^+V = I$  implica  $\bar{K}^* = K^*V^+$ , por lo tanto, (2.7) se satisface.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{12}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{21}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) \\ \bar{x}_{12}(t) \\ \bar{x}_{21}(t) \\ \bar{x}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} \bar{w}(t), \quad (2.9)$$

$$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t)^T & \bar{x}_{12}(t)^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.10)$$

$$\bar{w}(t) = w(t) - K_1^* \bar{x}_{21}(t), \quad (2.11)$$

donde  $\bar{x}_{11}(t) \in \mathfrak{R}^{n_{\mathcal{V}}-m}$ ,  $\bar{x}_{12}(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\bar{x}_{21}(t) \in \mathfrak{R}^{n-n_{\mathcal{V}}-n_{\mathcal{N}}}$ ,  $\bar{x}_{22}(t) \in \mathfrak{R}^{n_{\mathcal{N}}}$ ,  $K_1^* \in \mathfrak{R}^{m \times (n-n_{\mathcal{V}}-n_{\mathcal{N}})}$  y

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} = T(A + EK^*)T^{-1}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} = TE,$$

$$C_1 = C \begin{bmatrix} (u_1^+)^T & (u_2^+)^T \end{bmatrix}^T,$$

$$K^* = \begin{bmatrix} K_1^* & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{bmatrix}^T = TB.$$

Note que la dimensión de cada uno de los subespacios puede cambiar debido a las conmutaciones. Sin embargo, la dimensión total del espacio de estados, i.e.  $n$ ; se mantiene constante.

Es posible demostrar que el conjunto de ceros invariantes, del sistema (2.9)-(2.11), que no pertenecen al subespacio *no-observable*  $\mathcal{N}$ , es igual al conjunto de eigenvalores de la matriz  $A_{33}$ , y que el conjunto de ceros invariantes que sí pertenecen al subespacio *no-observable*, es igual al conjunto de eigenvalores de la matriz Hurwitz  $A_{44}$  (ver, e.g. [12]).

## 2.4 DISEÑO DE OBSERVADORES

Considere el problema de estimación para un valor del estado discreto constante, i.e.  $\sigma(t) = \sigma^* = \text{const.}, \forall t \in [0, t_1]$ , satisfaciendo  $t_1 \geq T_{\delta}^4$ . El diseño de los observadores, para cada partición del estado  $\bar{x}(t)$ , se describe a continuación.

4  $t_1$  es el primer instante de conmutación (*switching time*), mientras que  $T_{\delta}$  es el *Tiempo Mínimo*.

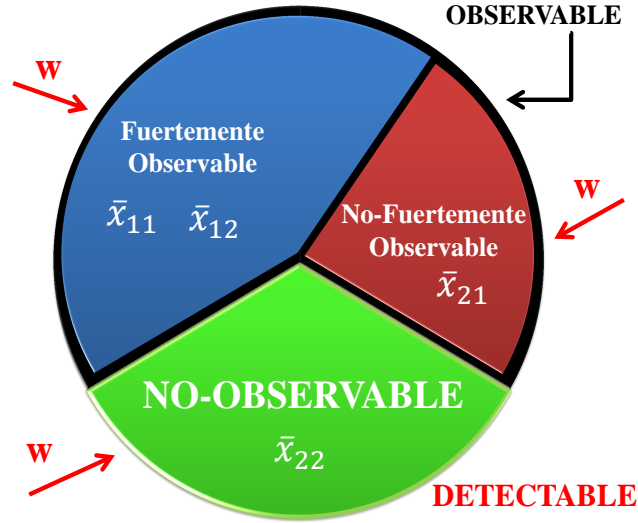


Figura 2.1: Espacio de Estados  $\bar{x}(t)$ . Los estados  $\bar{x}_{11}(t)$  y  $\bar{x}_{12}(t)$  describen la parte fuertemente observable, mientras que  $\bar{x}_{21}(t)$  la parte no-fuertemente observable pero observable, y  $\bar{x}_{22}(t)$  la parte no-observable.

#### 2.4.1 Observador de Estados $\bar{x}_{11}(t)$ y $\bar{x}_{12}(t)$

Considere los primeros dos estados del sistema (2.9)-(2.11), la parte fuertemente observable, con  $\bar{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t)^T & \bar{x}_{12}(t)^T \end{bmatrix}^T$ , i.e.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= A_{1\sigma^*} \bar{x}_1(t) + E_{1\sigma^*} \bar{w}_1(t) + B_{12\sigma^*} u(t), \\ y(t) &= C_{1\sigma^*} \bar{x}_1(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde

$$A_{1\sigma^*} = \begin{bmatrix} A_{11\sigma^*} & A_{12\sigma^*} \\ A_{21\sigma^*} & A_{22\sigma^*} \end{bmatrix}, \quad E_{1\sigma^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12\sigma^*} \end{bmatrix}, \quad B_{12\sigma^*} = \begin{bmatrix} B_{1\sigma^*} \\ B_{2\sigma^*} \end{bmatrix}.$$

Entonces, se puede diseñar el siguiente observador para estimar  $\bar{x}_1(t)$  [33]

$$\hat{x}_{1\sigma^*}(t) = z_{1\sigma^*}(t) + P_{1\sigma^*}^{-1} v_{\sigma^*}(t), \quad (2.13)$$

$$\dot{z}_{1\sigma^*}(t) = A_{1\sigma^*} z_{1\sigma^*}(t) + B_{12\sigma^*} u(t) + L_{1\sigma^*} (y(t) - C_{1\sigma^*} z_{1\sigma^*}(t)), \quad (2.14)$$

$$\dot{v}_{\sigma^*}(t) = W_{\sigma^*} (y(t) - C_{1\sigma^*} z_{1\sigma^*}(t), v_{\sigma^*}(t)), \quad (2.15)$$

donde  $z_{1\sigma^*}(t), \hat{x}_{1\sigma^*}(t) \in \mathfrak{R}^{n_{\nu\sigma^*}}$ , y  $L_{1\sigma^*} \in \mathfrak{R}^{n_{\nu\sigma^*} \times m}$  es seleccionada tal que la matriz  $(A_{1\sigma^*} - L_{1\sigma^*} C_{1\sigma^*}) = A_{L_{1\sigma^*}}$  es Hurwitz. La matriz de distribución  $P_{1\sigma^*}$  tiene la siguiente estructura

$$P_{1\sigma^*} = \begin{bmatrix} c_{1\sigma^*}^T, & (c_{1\sigma^*} A_{L_{1\sigma^*}})^T, & \dots, & (c_{1\sigma^*} A_{L_{1\sigma^*}}^{r_{1\sigma^*}-1})^T, & \dots, \\ c_{m\sigma^*}^T, & (c_{m\sigma^*} A_{L_{1\sigma^*}})^T, & \dots, & (c_{m\sigma^*} A_{L_{1\sigma^*}}^{r_{m\sigma^*}-1})^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.16)$$

Debido a la Suposición 2.2 y a la Definición de Grado Relativo, la matriz  $L_{1\sigma^*}$  siempre existe.

Debido a la Suposición 2.2, la condición  $\text{rank}(P_{1\sigma^*}) = n_{\nu\sigma^*}$  se satisface.

El vector  $v_{\sigma^*}(t) = (v_{1_{\sigma^*}}, \dots, v_{1_{r_1 \sigma^*}}, \dots, v_{m_1 \sigma^*}, \dots, v_{m_{r_m \sigma^*}})$  y la función no lineal  $W_{\sigma^*}$ , se eligen usando el diferenciador HOSM (para más detalles, ver [40]):

$$\begin{aligned} \dot{v}_{k_1 \sigma^*} &= v_{k_2 \sigma^*} - \alpha_{k_1 \sigma^*} M_{k_{\sigma^*}}(t) \frac{1}{r_{k_{\sigma^*}}} \left[ v_{k_1 \sigma^*} - e_{y_{k_{\sigma^*}}} \right] \frac{r_{k_{\sigma^*}} - 1}{r_{k_{\sigma^*}}}, \\ \dot{v}_{k_i \sigma^*} &= v_{k_{(i+1) \sigma^*}} - \alpha_{k_i \sigma^*} M_{k_{\sigma^*}}(t) \frac{1}{r_{k_{\sigma^*}} - i + 1} \left[ v_{k_i \sigma^*} - \dot{v}_{k_{(i-1) \sigma^*}} \right] \frac{r_{k_{\sigma^*}} - i}{r_{k_{\sigma^*}} - i + 1}, \\ &\quad \forall i = 2, \dots, r_{k_{\sigma^*}} - 1, \\ \dot{v}_{k_{r_{k_{\sigma^*}}} \sigma^*} &= -\alpha_{k_{r_{k_{\sigma^*}}} \sigma^*} M_{k_{\sigma^*}}(t) \left[ v_{k_{r_{k_{\sigma^*}}} \sigma^*} - \dot{v}_{k_{r_{k_{\sigma^*}} - 1} \sigma^*} \right]^0, \quad \forall k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.17)$$

Otro algoritmo que puede ser utilizado es el diferenciador uniforme HOSM [7]. Este diferenciador presenta una convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales, i.e. converge en un transitorio de tiempo finito, limitado por una cota superior que es independiente de las condiciones iniciales.

donde  $e_{y_{k_{\sigma^*}}}(t) = y_k(t) - c_k z_{1_{\sigma^*}}(t)$ , las funciones continuas  $M_{k_{\sigma^*}}(t)$  se diseñan más adelante; y las constantes  $\alpha_{k_i \sigma^*}$  se eligen recursivamente. En particular, de acuerdo con [A. Levant](#), una posibilidad es la siguiente:  $\alpha_{k_6 \sigma^*} = 1.1$ ,  $\alpha_{k_5 \sigma^*} = 1.5$ ,  $\alpha_{k_4 \sigma^*} = 2$ ,  $\alpha_{k_3 \sigma^*} = 3$ ,  $\alpha_{k_2 \sigma^*} = 5$ ,  $\alpha_{k_1 \sigma^*} = 8$ ; que es suficiente para el caso  $r_{k_{\sigma^*}} \leq 6$ ,  $\forall k = 1, \dots, m$ .

**Nota Importante 2.1** De acuerdo con [39], si  $y_k(t)$  es una señal  $(r_{k_{\sigma^*}})$ -veces continuamente diferenciable con ruido medible y acotado en el sentido de Lebesgue, i.e.  $n_k(t) \in \mathcal{L}_\infty$ . Entonces, existe  $0 \leq t_{\sigma^*} < \infty$  y ciertas constantes  $\mu_{k_i \sigma^*}$ , dependientes sólo de  $\alpha_{k_i \sigma^*}$  y  $M_{k_{\sigma^*}}$ , tal que para todo  $t \geq t_{\sigma^*}$ , los componentes  $v_{k_i \sigma^*}$ , en (2.17), satisfacen

$$\left| v_{k_{(i+1) \sigma^*}} - e_{y_{k_{\sigma^*}}}^{(i)} \right| \leq \mu_{k_i \sigma^*} \|n_k\|_\infty \frac{r_{k_{\sigma^*}} - i + 1}{r_{k_{\sigma^*}} + 1}, \quad \forall i = 0, \dots, r_{k_{\sigma^*}}, \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Cada  $M_{k_{\sigma^*}}(t)$ , en el tiempo  $t$ , es una constante localmente Lipschitz para cada  $e_{y_{k_{\sigma^*}}}^{(r_{k_{\sigma^*}})}$ .

Las funciones  $M_{k_{\sigma^*}}(t)$  pueden ser calculadas de la siguiente manera:

**Proposición 2.1** Existe un tiempo  $\tilde{t}$ , funciones positivas conocidas  $\beta_{k_1 \sigma^*}(t)$ , y constantes  $\beta_{k_2 \sigma^*}$ ,  $\beta_{k_3 \sigma^*}$ ,  $k_{L_1 \sigma^*}$ ,  $\lambda_{L_1 \sigma^*}$ , tales que

$$\left| e_{y_{k_{\sigma^*}}}^{(r_{k_{\sigma^*}})}(t) \right| \leq M_{k_{\sigma^*}}(t), \quad \forall t > \tilde{t}, \quad (2.18)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{k_{\sigma^*}}(t) &= \beta_{k_1 \sigma^*}(t) + \beta_{k_2 \sigma^*} \int_0^t \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*}(t - \tau)) \|\bar{w}(\tau)\| d\tau \\ &\quad + \beta_{k_3 \sigma^*}, \quad \forall k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.19)$$

◇

**Prueba:** Ya que la matriz  $A_{L_1 \sigma^*}$  es Hurwitz, existen constantes positivas conocidas  $k_{L_1 \sigma^*}$ ,  $\lambda_{L_1 \sigma^*}$  tal que  $\|\exp(A_{L_1 \sigma^*} t)\| \leq k_{L_1 \sigma^*} \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*} t)$ . Por lo tanto, de la solución del error de estimación para el observador (2.14), i.e.  $\bar{e}_{1_{\sigma^*}}(t) = \bar{x}_1(t) - z_{1_{\sigma^*}}(t)$ , ver (2.20), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \|\bar{e}_{1_{\sigma^*}}(t)\| &\leq k_{L_1 \sigma^*} \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*} t) \|\bar{e}_{1_{\sigma^*}}(0)\| \\ &\quad + \|E_{1_{\sigma^*}}\| \int_0^t \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*}(t - \tau)) \|\bar{w}(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Para una constante arbitraria  $\lambda_{L_1 \sigma^*}$ , existe un tiempo  $\tilde{t}$ , tal que  $k_{L_1 \sigma^*} \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*} t) \times \|\bar{e}_{1_{\sigma^*}}(0)\|$  es menor que  $\Gamma_{\sigma^*}(t)$ ,  $\forall t \geq \tilde{t}$ . De este modo

$$\|\bar{e}_{1_{\sigma^*}}(t)\| \leq \Gamma_{\sigma^*}(t) + k_{L_1 \sigma^*} \|E_{1_{\sigma^*}}\| \int_0^t \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*}(t - \tau)) \|\bar{w}(\tau)\| d\tau.$$

De la desigualdad anterior y de la dinámica del error de salida  $e_{y_{k_{\sigma^*}}}^{(r_{k_{\sigma^*}})}(t)$ , ver (2.23), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| e_{y_{k_{\sigma^*}}}^{(r_{k_{\sigma^*}})}(t) \right| &\leq |c_k| \left\| A_{L_1 \sigma^*}^{r_{k_{\sigma^*}}} \right\| \left( \Gamma_{\sigma^*}(t) \right. \\ &\quad \left. + k_{L_1 \sigma^*} \|E_{1 \sigma^*}\| \int_0^t \exp(-\lambda_{L_1 \sigma^*}(t-\tau)) \|\bar{w}(\tau)\| \right) + \\ &\quad |c_k| \left\| A_{L_1 \sigma^*}^{r_{k_{\sigma^*}}-1} \right\| \|E_{1 \sigma^*}\| \|\bar{w}(t)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la [Proposición 2.1](#) queda demostrada con

$$\begin{aligned} \beta_{k_1 \sigma^*}(t) &= |c_k| \left\| A_{L_1 \sigma^*}^{r_{k_{\sigma^*}}} \right\| \Gamma_{\sigma^*}(t), \quad \beta_{k_2 \sigma^*} = k_{L_1 \sigma^*} |c_k| \left\| A_{L_1 \sigma^*}^{r_{k_{\sigma^*}}} \right\| \|E_{1 \sigma^*}\|, \quad y \\ \beta_{k_3 \sigma^*} &= |c_k| \left\| A_{L_1 \sigma^*}^{r_{k_{\sigma^*}}-1} \right\| \|E_{1 \sigma^*}\| \|\bar{w}(t)\|. \end{aligned}$$

□

Tomando en cuenta las explicaciones previas, se puede establecer el siguiente teorema:

**Teorema 2.1** Sean  $\sigma(t) = \sigma^* = \text{const.}$ , y los observadores (2.13)-(2.15), con términos de corrección (2.17); aplicados al sistema (2.12). Asumiendo que las Suposiciones 2.1 - 2.2 se satisfacen. Entonces, siempre que las constantes  $\alpha_{k_i \sigma^*}$  sean elegidas adecuadamente, y  $M_{k_{\sigma^*}}(t)$  sean seleccionadas como en la [Proposición 2.1](#), el error de estimación de estado para  $\bar{x}_1(t)$  convergerá a cero de forma exacta y en tiempo finito, i.e.  $e_{1 \sigma^*}(t) = \bar{x}_1(t) - \hat{x}_{1 \sigma^*}(t) = 0, \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1]^5$ .  $\triangle$

**Prueba:** Defina la estimación  $\bar{e}_{1 \sigma^*}(t) = \bar{x}_1(t) - z_{1 \sigma^*}(t)$ . La dinámica de  $\bar{e}_{1 \sigma^*}(t)$  está dada por:

$$\dot{\bar{e}}_{1 \sigma^*}(t) = A_{L_1 \sigma^*} \bar{e}_{1 \sigma^*}(t) + E_{1 \sigma^*} \bar{w}(t), \quad (2.20)$$

$$e_{y_{\sigma^*}}(t) = C_{1 \sigma^*} \bar{e}_{1 \sigma^*}(t). \quad (2.21)$$

Aplicando la transformación  $P_{1 \sigma^*}$  al error de estimación  $\bar{e}_{1 \sigma^*}$ , el sistema (2.20) se puede transformar en:

$$P_{1 \sigma^*} \dot{\bar{e}}_{1 \sigma^*}(t) = P_{1 \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*} \bar{e}_{1 \sigma^*}(t) + P_{1 \sigma^*} E_{1 \sigma^*} \bar{w}(t). \quad (2.22)$$

De acuerdo a la [Suposición 2.2](#), y a la estructura de la transformación, (2.22) puede re-escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{y_{1 \sigma^*}}(t) \\ \vdots \\ e_{y_{1 \sigma^*}}^{(r_{1 \sigma^*})}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_{y_{m \sigma^*}}(t) \\ \vdots \\ e_{y_{m \sigma^*}}^{(r_{m \sigma^*})}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1 \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*} \\ \vdots \\ c_{1 \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*}^{r_{1 \sigma^*}} \\ \vdots \\ c_{m \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*} \\ \vdots \\ c_{m \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*}^{r_{m \sigma^*}} \end{bmatrix} \bar{e}_{1 \sigma^*}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_{1 \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*}^{r_{1 \sigma^*}-1} E_{1 \sigma^*} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ c_{m \sigma^*} A_{L_1 \sigma^*}^{r_{m \sigma^*}-1} E_{1 \sigma^*} \end{bmatrix} \bar{w}(t). \quad (2.23)$$

Por lo tanto, si las  $M_{k_{\sigma^*}}(t)$  son seleccionadas como en la [Proposición 2.1](#), el diferenciador HOSM converge (para más detalles ver [40]), y se tiene que:

$$P_{1 \sigma^*} \bar{e}_{1 \sigma^*}(t) = v_{\sigma^*}(t). \quad (2.24)$$

La estimación de la variable  $\bar{x}_1(t)$  se obtiene por medio de manipulación algebraica, i.e.  $\hat{x}_{1 \sigma^*}(t) = z_{1 \sigma^*}(t) + P_{1 \sigma^*}^{-1} v_{\sigma^*}(t)$ . De esta manera, se obtiene la convergencia exacta a cero del error de estimación  $e_{1 \sigma^*}(t) = \bar{x}_1(t) - \hat{x}_{1 \sigma^*}(t)$ .  $\square$

5  $t_{\sigma^*}$  es el tiempo en el cual el observador (2.13)-(2.15), ha convergido a cero.

Note que si se emplea el diferenciador uniforme HOSM [7], el error de estimación para  $\bar{x}_1(t)$  convergería a cero de forma exacta y uniforme.

Debido a la [Suposición 2.2](#), siempre es posible calcular  $L_{1 \sigma^*}$  tal que  $A_{L_1 \sigma^*}$  es Hurwitz.

Note que las derivadas de  $e_{y_{k_{\sigma^*}}}(t)$  son proporcionadas por el diferenciador HOSM (2.17).

Si existiera ruido en la medición, el orden del error de estimación sería directamente proporcional al orden del ruido, ver [Nota 2.1](#).

### 2.4.2 Observador de Estado $\bar{x}_{21}(t)$

Sea  $\hat{x}_{21\sigma^*}(t)$  el estado estimado de  $\bar{x}_{21}(t)$  definido por:

$$\hat{x}_{21\sigma^*}(t) = z_{2\sigma^*}(t) + L_{2\sigma^*}\hat{x}_{12\sigma^*}(t), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{21\sigma^*}(t) = & \bar{A}_{1\sigma^*}\hat{x}_{11\sigma^*}(t) + \bar{A}_{2\sigma^*}\hat{x}_{12\sigma^*}(t) \\ & + A_{L_{2\sigma^*}}\hat{x}_{21\sigma^*}(t) + \bar{B}_{2\sigma^*}u(t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde las estimaciones de  $\hat{x}_{11\sigma^*}(t)$  y  $\hat{x}_{12\sigma^*}(t)$ , son proporcionadas por el observador (2.13)-(2.15). Las matrices en (2.26) tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1\sigma^*} &= A_{31\sigma^*} - L_{2\sigma^*}A_{21\sigma^*}, \\ \bar{A}_{2\sigma^*} &= A_{32\sigma^*} - L_{2\sigma^*}A_{22\sigma^*}, \\ A_{L_{2\sigma^*}} &= A_{33\sigma^*} - E_{21\sigma^*}K_{1\sigma^*}^* + L_{2\sigma^*}E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*, \\ \bar{B}_{2\sigma^*} &= B_{3\sigma^*} - L_{2\sigma^*}B_{2\sigma^*}. \end{aligned}$$

Entonces, se puede establecer el siguiente teorema:

**Teorema 2.2** Sea  $\sigma(t) = \sigma^* = \text{const}$ . Entonces, siempre que la matriz  $L_{2\sigma^*}$  sea elegida tal que  $A_{L_{2\sigma^*}}$  sea Hurwitz, el error de estimación para  $\bar{x}_{21}(t)$ , convergerá exponencialmente a una cota última dada por una constante  $\gamma_{\sigma^*}w^+$ , i.e.  $\|e_{21\sigma^*}(t)\| = \|\bar{x}_{21}(t) - \hat{x}_{21\sigma^*}(t)\| \leq \gamma_{\sigma^*}w^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Prueba:** De la dinámica  $\dot{\bar{x}}_{12}(t)$  en (2.9), se obtiene que

$$\begin{aligned} E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*\bar{x}_{21}(t) = & (A_{21\sigma^*}\bar{x}_{11}(t) + A_{22\sigma^*}\bar{x}_{12}(t) + B_{2\sigma^*}u(t) \\ & + E_{12\sigma^*}w(t)) - \dot{\bar{x}}_{12}(t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sumando y restando  $L_{2\sigma^*}E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*\bar{x}_{21}(t)$  en la dinámica  $\dot{\bar{x}}_{21}(t)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{21}(t) = & \bar{A}_{1\sigma^*}\bar{x}_{11}(t) + \bar{A}_{2\sigma^*}\bar{x}_{12}(t) + A_{L_{2\sigma^*}}\bar{x}_{21}(t) \\ & + \bar{B}_{2\sigma^*}u + E_{L_{2\sigma^*}}w(t) + L_{2\sigma^*}\dot{\bar{x}}_{21}(t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $E_{L_{2\sigma^*}} = E_{21\sigma^*} - L_{2\sigma^*}E_{12\sigma^*}$ . La dinámica del error  $e_{21\sigma^*}(t) = \bar{x}_{21}(t) - \hat{x}_{21\sigma^*}(t)$ , está dada por:

$$\dot{e}_{21\sigma^*}(t) = A_{L_{2\sigma^*}}e_{21\sigma^*}(t) + E_{L_{2\sigma^*}}w(t). \quad (2.29)$$

Por lo tanto,  $L_{2\sigma^*}$  tiene que ser seleccionada tal que  $A_{L_{2\sigma^*}}$  sea Hurwitz. Finalmente, es claro que  $e_{21\sigma^*}(t)$  está acotado por

$$\|e_{21\sigma^*}(t)\| \leq \gamma_{\sigma^*}w^+, \text{ cuando } t \rightarrow \infty; \text{ con } \gamma_{\sigma^*} = \frac{k_{L_{2\sigma^*}} \|E_{L_{2\sigma^*}}\|}{\lambda_{L_{2\sigma^*}}}, \quad (2.30)$$

y constantes positivas  $k_{L_{2\sigma^*}}, \lambda_{L_{2\sigma^*}}$ ; tales que  $\|\exp(A_{L_{2\sigma^*}}t)\| \leq k_{L_{2\sigma^*}} \exp(-\lambda_{L_{2\sigma^*}}t)$ . La matriz  $L_{2\sigma^*}$  siempre existe si el par  $(E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*, A_{33\sigma^*} - E_{21\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*)$  es detectable. Para probar lo anterior, considere las ecuaciones (2.7) y (2.8), que permiten separar la parte *observable* y *no-observable*; y además, la condición de observabilidad del sistema (2.9)-(2.10), i.e.

$$\begin{bmatrix} sI_n - (T(A + EK^*)T^{-1}) \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A_{11\sigma^*} & -A_{12\sigma^*} & 0 & 0 \\ C_{11\sigma^*} & C_{12\sigma^*} & 0 & 0 \\ -A_{21\sigma^*} & sI - A_{22\sigma^*} & E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^* & 0 \\ -A_{31\sigma^*} & -A_{32\sigma^*} & sI - A_{33\sigma^*} + E_{21\sigma^*}K_{1\sigma^*}^* & 0 \\ -A_{41\sigma^*} & -A_{42\sigma^*} & -A_{43\sigma^*} & sI - A_{44\sigma^*} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

La **Suposición 2.1** implica que  $A_{44\sigma^*}$  es Hurwitz, y que el rango de (2.31) es completo, excepto para  $s$  siendo un eigenvalor de  $A_{44\sigma^*}$ . Por lo tanto, el rango de la primera columna es  $n_{\mathcal{V}_{\sigma^*}}$ , ya que el par  $(C_{1\sigma^*}, A_{1\sigma^*})$  es *observable*; el rango de la tercera columna es igual a  $n_{\mathcal{N}_{\sigma^*}}$ , debido a la **Suposición 2.1**. Entonces, el rango de la segunda columna es  $n - n_{\mathcal{V}_{\sigma^*}} - n_{\mathcal{N}_{\sigma^*}}$ , lo cual implica que el par  $(E_{12\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*, A_{33\sigma^*} - E_{21\sigma^*}K_{1\sigma^*}^*)$  es detectable, y por lo tanto,  $L_{2\sigma^*}$  siempre existe.  $\square$

*Note que es posible formular un problema de optimización lineal para seleccionar  $L_{2\sigma^*}$  de tal forma que  $e_{21\sigma^*}(t)$  sea minimizado.*

### 2.4.3 Observador de Estado $\bar{x}_{22}(t)$

Sin pérdida de generalidad, se asume que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E_{12\sigma^*} \\ E_{21\sigma^*} \end{bmatrix} = \text{rank}(E_{2\sigma^*}) = m.$$

Sea  $\hat{x}_{22\sigma^*}(t)$  la estimación de  $\bar{x}_{22}(t)$ , definida de la siguiente manera:

$$\hat{x}_{22\sigma^*}(t) = z_{3\sigma^*}(t) + E_{22\sigma^*}E_{2\sigma^*}^+ \begin{bmatrix} \hat{x}_{12}(t) \\ \hat{x}_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{3\sigma^*}(t) = & A_{41\sigma^*}\hat{x}_{11\sigma^*}(t) + A_{42\sigma^*}\hat{x}_{12\sigma^*}(t) + A_{43\sigma^*}\hat{x}_{21\sigma^*}(t) \\ & + A_{44\sigma^*}\hat{x}_{22\sigma^*} + B_{4\sigma^*}u_{\sigma^*}(t) - E_{22\sigma^*}E_{2\sigma^*}^+ \times \\ & \begin{bmatrix} A_{21\sigma^*}\hat{x}_{11\sigma^*}(t) + A_{22\sigma^*}\hat{x}_{12\sigma^*}(t) + B_{2\sigma^*}u(t) \\ A_{31\sigma^*}\hat{x}_{11\sigma^*}(t) + A_{32\sigma^*}\hat{x}_{12\sigma^*}(t) + A_{33\sigma^*}\hat{x}_{21\sigma^*}(t) + B_{3\sigma^*}u(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde las estimaciones de  $\hat{x}_{11\sigma^*}(t) - \hat{x}_{12\sigma^*}(t)$  y  $\hat{x}_{21\sigma^*}(t)$ , son proporcionadas por los observadores (2.13)-(2.15) y (2.25)-(2.26), respectivamente.

Entonces, se puede establecer el siguiente teorema:

**Teorema 2.3** *Sea  $\sigma(t) = \sigma^* = \text{const.}$ , y  $\text{rank}(E_{2\sigma^*}) = m$ . Entonces, el error de estimación para  $\bar{x}_{22}(t)$ , está finalmente acotado por una constante  $\delta_{\sigma^*}w^+$ , i.e.  $\|e_{22\sigma^*}(t)\| = \|\bar{x}_{22}(t) - \hat{x}_{22\sigma^*}(t)\| \leq \delta_{\sigma^*}w^+$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\triangle$*

**Prueba:** Ya que  $\text{rank}(E_{2\sigma^*}) = m$ , de (2.9),  $\bar{w}(t)$  puede re-escribirse como:

$$\bar{w}(t) = E_{22\sigma^*}E_{2\sigma^*}^+ \times \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{12}(t) - (A_{21\sigma^*}\bar{x}_{11}(t) + A_{22\sigma^*}\bar{x}_{12}(t) + B_{2\sigma^*}u(t)) \\ \dot{\bar{x}}_{21}(t) - (A_{31\sigma^*}\bar{x}_{11}(t) + A_{32\sigma^*}\bar{x}_{12}(t) + A_{33\sigma^*}\bar{x}_{21}(t) + B_{3\sigma^*}u(t)) \end{bmatrix}.$$

La dinámica del error  $e_{22\sigma^*}(t) = \bar{x}_{22}(t) - \hat{x}_{22\sigma^*}(t)$ , substituyendo  $\bar{w}(t)$ , está dada por

$$\dot{e}_{22\sigma^*}(t) = A_{44\sigma^*}e_{22\sigma^*}(t) + A_{43\sigma^*}e_{21\sigma^*}(t). \quad (2.34)$$

Debido a que  $A_{44\sigma^*}$  es Hurwitz, usando (2.30), el error  $e_{22\sigma^*}(t)$  está acotado por:

$$\|e_{22\sigma^*}(t)\| \leq \delta_{\sigma^*}w^+, \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \text{ con } \delta_{\sigma^*} = \frac{k_{44\sigma^*} \|A_{43\sigma^*}\|}{\lambda_{44\sigma^*}} \gamma_{\sigma^*}, \quad (2.35)$$

y constantes positivas  $k_{44\sigma^*}, \lambda_{44\sigma^*}$ ; tales que  $\|\exp(A_{44\sigma^*}t)\| \leq k_{44\sigma^*} \exp(-\lambda_{44\sigma^*}t)$ .  $\square$



## 2.5 RESULTADO PRINCIPAL

### 2.5.1 Banco de Observadores

Para resolver el problema de estimación del estado continuo, correspondiente al sistema (2.1), se propone el siguiente banco de observadores:

$$\tilde{x}_{1\hat{\sigma}(t)}(t) = z_{1\hat{\sigma}(t)}(t) + P_{1\hat{\sigma}(t)}^{-1} \nu_{\hat{\sigma}(t)}(t), \quad (2.36)$$

$$\tilde{x}_{21\hat{\sigma}(t)}(t) = z_{2\hat{\sigma}(t)}(t) + L_{2\hat{\sigma}(t)} \tilde{x}_{12\hat{\sigma}(t)}(t), \quad (2.37)$$

$$\tilde{x}_{22\hat{\sigma}(t)}(t) = z_{3\hat{\sigma}(t)}(t) + E_{22\hat{\sigma}(t)} E_{2\hat{\sigma}(t)}^+ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12\hat{\sigma}(t)}(t) \\ \tilde{x}_{21\hat{\sigma}(t)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\tilde{y}_{\hat{\sigma}(t)}(t) = C_{1\hat{\sigma}(t)} \tilde{x}_{1\hat{\sigma}(t)}(t), \quad \forall \hat{\sigma}(t) = 1, \dots, q, \quad (2.39)$$

donde  $\tilde{x}_{1\hat{\sigma}(t)}(t)$ ,  $\tilde{x}_{21\hat{\sigma}(t)}(t)$ ,  $\tilde{x}_{22\hat{\sigma}(t)}(t)$ , y cada uno de sus componentes, son diseñados de acuerdo a la Sección 2.4. La siguiente suposición es requerida:

**Suposición 2.3** Se asume que el estado discreto inicial es conocido, i.e.  $\sigma(0) = \hat{\sigma}(0) = \sigma^*$  conocido.

Los Teoremas 2.1 y 2.2 establecen que el banco de observadores  $\sigma^*$  estima el estado continuo *observable*, i.e.  $\tilde{x}_{11}(t)$ ,  $\tilde{x}_{12}(t)$  y  $\tilde{x}_{21}(t)$ , con cierto error de estimación, finalmente acotado; y además, es posible modificar la velocidad de convergencia a dicha cota.

Sin embargo, es necesario saber cuando ha convergido esta parte del banco de observadores  $\sigma^*$ , para poder asegurar que el estado continuo *observable* es estimado antes de la primera conmutación. Para esto, de acuerdo con [5], considerando la parte *fuertemente observable*  $\tilde{x}_{11}(t)$  y  $\tilde{x}_{12}(t)$ , es suficiente con verificar que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\|e_{\tilde{y}_{\sigma^*}}(t)\| \leq \xi_{\sigma^*} M_{\sigma^*}^+ h^{n\nu_{\sigma^*}}, \quad \forall t \in [0, \xi_{\sigma^*} h], \quad (2.40)$$

donde  $e_{\tilde{y}_{\sigma^*}} = y - \tilde{y}_{\sigma^*}$ ,  $\xi_{\sigma^*}$  y  $\xi_{\sigma^* t}$  son constantes positivas,  $h$  es el tiempo de muestreo, y  $M_{\sigma^*}^+ = \max_{k=1, \dots, m} (M_{k\sigma^*}(t))$ . De esta manera,  $t_{\sigma^*} = \xi_{\sigma^*} h$ , y por lo tanto, es posible determinar si el  $\sigma^*$ -ésimo banco de observadores, correspondiente a la parte *fuertemente observable*, ha convergido a cero durante el intervalo de tiempo  $t \in [0, t_1)$ .

Por otro lado, para el estado  $\tilde{x}_{21}(t)$ , la ganancia  $L_{2\sigma^*}$  será diseñada de tal forma que el error  $e_{21\sigma^*}(t)$  entre a la región  $1.05\gamma_{\sigma^*} w^+$  (ver la prueba del Teorema 2.2) antes de que la parte *fuertemente observable* haya convergido a cero, i.e. antes de  $t_{\sigma^*}$ . Para esto,  $L_{2\sigma^*}$  se diseña tal que  $3/\lambda_{L_{2\sigma^*}} < t_{\sigma^*}$ , correspondiente al valor de 3 constantes de tiempo del término exponencial, i.e. 5% más de la cota final  $\gamma_{\sigma^*} w^+$ .

Finalmente, el Teorema 2.3 establece que el estado *no-observable*  $\tilde{x}_{22}(t)$  se puede estimar con un error finalmente acotado por  $\delta_{\sigma^*} w^+$ . Sin embargo, la velocidad de convergencia a dicha región está determinada completamente por la dinámica correspondiente, y no puede ser modificada. No obstante, es posible determinar si  $e_{22\sigma^*}(t)$  ya ha entrado a la región  $1.05\delta_{\sigma^*} w^+$  (ver la prueba del Teorema 2.3) antes de  $t_{\sigma^*}$ , por medio de la información de la matriz  $A_{44\sigma^*}$ . En este sentido, se establece la siguiente suposición:

**Suposición 2.4** Se asume que el conjunto de eigenvalores de  $A_{44\sigma^*}$ , y las condiciones iniciales  $x(0)$ , son tales que  $3/\lambda_{44\sigma^*} < t_{\sigma^*}$ .

Por lo tanto, el estado estimado *real*  $\hat{x}(t)$ , se define como:

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}_{\sigma^*}(t), \quad \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1). \quad (2.41)$$

Es común estimar las constantes  $\xi_{\sigma^*}$ ,  $\xi_{\sigma^* t}$ ; a través de simulaciones.

Siempre es posible diseñar las ganancias de la parte observable de tal forma que  $t_{\sigma^*} < t_1$ .

### 2.5.2 Estimación del Estado Discreto: Conmutación Autónoma

Una vez que el estado continuo es estimado antes de la primera conmutación, se propone el siguiente observador de estado discreto:

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} 1, & \forall \hat{x}(t) \mid H\hat{x}(t) \in \mathcal{H}_1 \\ 2, & \forall \hat{x}(t) \mid H\hat{x}(t) \in \mathcal{H}_2 \\ \vdots \\ q, & \forall \hat{x}(t) \mid H\hat{x}(t) \in \mathcal{H}_q \end{cases}, \quad (2.42)$$

Para cada estado discreto  $\sigma \in \mathcal{Q}$ , defina su matriz de observabilidad, *i.e.*

$$Q_\sigma = \left[ H^T, (HA_\sigma)^T, \dots, (HA_\sigma^{n-1})^T \right]^T.$$

El siguiente lema describe la estimación exacta y en tiempo finito del estado discreto.

**Lema 2.1** *Bajo las condiciones del Teorema 2.1, el estado discreto  $\sigma(t)$ , es estimado exactamente y en tiempo finito, si la siguiente condición se satisface:*

$$\mathcal{V}_\sigma^* \subset \ker(Q_\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\}. \quad (2.43)$$

Debido a la [Suposición 2.3](#), el estado discreto inicial es conocido. Sin embargo, se presenta el observador de estado discreto (2.42) ya que será requerido, como se verá en la [Subsección 2.5.5](#); para implementar ecuaciones de re-inicio.

Si se emplea el diferenciador uniforme HOSM [7], la estimación del estado discreto será exacta y uniforme.

‡ Recordar que  $\mathcal{V}_{\sigma(t)}^*$  es el subespacio débilmente no-observable, para cada  $\sigma(t)$ .

**Prueba:** Si (2.43) es cierta, entonces existe una matriz  $P_{Q_\sigma} \in \mathfrak{R}^{n \times n_{\mathcal{V}_\sigma}}$ , tal que  $Hx(t) = HT_\sigma P_{Q_\sigma} \bar{x}_1(t)$ . De acuerdo con las propiedades de convergencia de  $\hat{x}_1(t)$ , descritas en la [Subsección 2.4.1](#), por el [Teorema 2.1](#); el estado discreto puede ser estimado exactamente y en tiempo finito, por medio de (2.42), con  $Hx(t) = HT_\sigma P_{Q_\sigma} \bar{x}_1(t)$ ,  $\forall \sigma \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\}$ .  $\square$

**Nota Importante 2.2** *La condición (2.43) implica que la estimación, exacta y en tiempo finito, del estado discreto puede ser alcanzada si la función escalar  $Hx(t)$ , puede ser representada como una combinación de los estados que forman la parte fuertemente observable, *i.e.*  $\bar{x}_{11}(t)$  y  $\bar{x}_{12}(t)$ .*

### 2.5.3 Estimación del Estado Discreto: Conmutación No-Autónoma

Para este tipo de conmutación, con  $\sigma(t)$  completamente desconocida, el análisis se restringe al caso sin entradas desconocidas, *i.e.*  $w(t) = 0$ .

Bajo la [Suposición 2.1](#), y con base en la transformación dada en la [Sección 2.3](#), es posible re-escribir, para cada  $\sigma \in \mathcal{Q}$  (de nuevo se omite el índice  $\sigma$ ), la matriz  $T$  como:

$$T := \left[ \mathcal{O}_{n_\sigma}^T, N^T \right]^T, \quad (2.44)$$

donde  $\mathcal{O} \in \mathfrak{R}^{n_m \times n}$  es la matriz de observabilidad del sistema (2.1),  $\mathcal{O}_{n_\sigma} \in \mathfrak{R}^{(n_\sigma \times n)}$  es un matriz formada con los  $n_\sigma$  renglones linealmente independientes de  $\mathcal{O}$ ; y  $N = \mathcal{O}^\perp \in \mathfrak{R}^{(n-n_\sigma) \times n}$  es una base del espacio *no-observable*.

De esta manera, se puede llevar al sistema (2.1) a la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t), \quad (2.45)$$

$$y(t) = C_1 \bar{x}_1(t)^T, \quad (2.46)$$

Note que el problema sin entradas desconocidas, no es menor; ya que el estado discreto  $\sigma(t)$ , puede verse como una entrada exógena al sistema.

Es posible calcular la matriz  $N$ , en Matlab, con la instrucción `N=null(O')`.

donde  $\bar{x}_1(t) \in \mathfrak{R}^{n_0}$  representa la parte *observable*,  $\bar{x}_2(t) \in \mathfrak{R}^{n-n_0}$  la parte *no-observable*, y

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix} = TAT^{-1}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = TB, \quad C_1 = CO_{n_0}.$$

Entonces, para estimar el estado del sistema (2.45)-(2.46), se puede diseñar el observador (2.13), descrito en la [Subsección 2.4.1](#), para estimar exactamente  $\bar{x}_1(t)$ . Mientras que para el estado  $\bar{x}_2(t)$ , sólo basta diseñar una *copia* de la dinámica  $\dot{\bar{x}}_2(t)$ , para estimar  $\bar{x}_2(t)$  de forma asintótica. Sin embargo, se requiere de la siguiente suposición:

Debido a la [Suposición 2.1](#),  $A_3$  es Hurwitz y, por lo tanto, la dinámica del error de estimación tiende a cero exponencialmente.

**Suposición 2.5** Se asume que el conjunto de eigenvalores de  $A_{3_{\sigma^*}}$  son tales que  $3/\lambda_{3_{\sigma^*}} < t_{\sigma^*}$ .

De este modo, se puede diseñar nuevamente el banco de observadores (2.36)-(2.39), considerando lo establecido en la [Subsección 2.5.1](#) acerca de las regiones de convergencia, de tal forma que el error de estimación de estado continuo converja a una región del origen antes del tiempo  $t_{\sigma^*}$ . Ahora se describe la estimación de estado discreto.

En el momento en el que la estimación de  $\bar{x}_1(t)$  se logra, los términos de  $v_{\hat{\sigma}^*}(t)$  toman el valor de la *inyección equivalente*. Por lo tanto, en un tiempo finito, la siguiente expresión se satisface<sup>6</sup>:

En este trabajo, las funciones  $v_{\kappa_i \hat{\sigma}^*}(t)$  que aseguran que las trayectorias del error permanezcan en la superficie, son llamadas inyecciones equivalentes (para más detalles, ver [52]).

$$v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t) = P_{1_{\hat{\sigma}^*}}(\bar{x}_1(t) - z_{1_{\hat{\sigma}^*}}) = 0. \quad (2.47)$$

La siguiente suposición es requerida:

**Suposición 2.6** Se asume que la siguiente declaración lógica se satisface:

$$A_{1_i} \neq A_{1_j} \vee B_{1_i} \neq B_{1_j}, \quad \forall i \neq j, \quad \forall i, j \in \Omega. \quad (2.48)$$

**Nota Importante 2.3** La condición (2.48) implica que el estado discreto es distinguible por medio de la parte observable. Es decir, que la dinámica entre modos de operación es distinta. Note que si la dinámica entre modos de operación sólo cambiara en la parte no-observable, no sería posible distinguir el estado discreto.

Note que cuando  $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}^*$ , la dinámica de  $\bar{e}_{1_{\sigma(t)}}(t)$ , para  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\sigma}^*$ , está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{1_{\sigma(t)}}(t) = & A_{1_{\sigma(t)}}\bar{x}_1(t) - A_{1_{\hat{\sigma}(t)}}z_{1_{\hat{\sigma}(t)}}(t) + \left( B_{1_{\sigma(t)}} - B_{1_{\hat{\sigma}(t)}} \right) u(t) \\ & - L_{\hat{\sigma}(t)} \left( C_{1_{\sigma(t)}}\bar{x}_1(t) - C_{1_{\hat{\sigma}(t)}}z_{1_{\hat{\sigma}(t)}}(t) \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dado que el estado discreto se asume distinguible, debido a la [Suposición 2.6](#), la diferencia entre las dinámicas, en los diferentes modos de operación; provocará que  $\bar{e}_{1_{\sigma(t)}}(t)$  no converja a cero. Por lo tanto,  $v_{\hat{\sigma}(t)}(t) \neq 0$ , para toda  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\sigma}^*$ ; y así, (2.47) será verdad, en tiempo finito, sólo cuando  $\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}^*$ . De este modo, se prueba lo establecido en el siguiente lema:

**Lema 2.2** Bajo las condiciones del [Teorema 2.1](#), el estado discreto  $\sigma(t)$ , puede ser estimado exactamente y en tiempo finito, si la [Suposición 2.6](#) se satisface.  $\#$

Ahora, los términos  $v_{\hat{\sigma}(t)}(t)$  serán usados para establecer una evaluación de residuos. Los residuos tienen la siguiente estructura:

El término residuo hace referencia a una señal que servirá como indicador para estimar el estado discreto.

Para el caso con entradas desconocidas,  $v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t) \neq 0$  para toda  $\hat{\sigma} \in \Omega$ .

$$r_j(t) = v_{1_j}^2(t) + \dots + v_{1_{r_{1_j}}}^2(t) + \dots + v_{m_{1_j}}^2(t) + \dots + v_{m_{r_{m_j}}}^2(t), \forall j \in \Omega. \quad (2.50)$$

Ya que (2.47) es verdad, bajo lo establecido por el [Lema 2.2](#), un simple criterio de decisión podría ser aplicado a las señales  $r_j(t)$ , y se podría estimar el estado discreto. El criterio de decisión se representa de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}(t) = \arg \min_j r_j(t). \quad (2.51)$$

Sin embargo, la señales  $r_j(t)$ , para toda  $j \neq \hat{\sigma}^*$ , pueden cruzar ocasionalmente por cero. Esto provoca que el criterio de decisión (2.51) no pueda ser tomada correctamente. Por lo tanto, se puede tomar la potencia promedio de las señales  $r_j(t)$  sobre cierto intervalo de tiempo finito, *i.e.*

$$R_j(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^t r_j(\tau) d\tau, \forall j \in \Omega, \quad (2.52)$$

donde  $\Delta T$  es una ventana de tiempo a diseñar. Entonces, la estimación del estado discreto está dada por:

$$\hat{\sigma}(t) = \arg \min_j R_j(t). \quad (2.53)$$

*La ventana  $\Delta T$  puede definirse como el intervalo de tiempo mínimo para el cual (2.52) tiene solución única. La elección de  $\Delta T$  dependerá de la dinámica del sistema.*

**Nota Importante 2.4** *Para la estimación de estado con conmutación no-autónoma no es necesario conocer el estado discreto inicial (ver [Suposición 2.3](#) para el caso autónomo). No obstante, sigue siendo necesario que la inyección equivalente  $v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t)$  converja dentro del Tiempo Mínimo del sistema.*

**Nota Importante 2.5** *Teóricamente, la inyección equivalente es el resultado de una frecuencia infinita en los términos discontinuos de  $v_{\hat{\sigma}(t)}$ . Sin embargo, la realización de los observadores produce una frecuencia alta, pero finita; haciendo necesario el uso de un filtro paso-bajas, *i.e.**

$$\tau_{\hat{\sigma}(t)} \dot{\tilde{v}}_{i_{r_i e_q \hat{\sigma}(t)}}(t) = v_{i_{r_i \hat{\sigma}(t)}}(t) - \bar{v}_{i_{r_i e_q \hat{\sigma}(t)}}(t), \forall i = 1, \dots, m; \forall \hat{\sigma}(t) \in \Omega, \quad (2.54)$$

donde  $\bar{v}_{i_{r_i e_q \hat{\sigma}(t)}}(t)$  es la estimación de  $v_{i_{r_i e_q \hat{\sigma}(t)}}(t)$ , y cada  $\tau_{\hat{\sigma}(t)}$  se diseña de acuerdo con [V. Utkin \[61\]](#), *i.e.*  $h \ll \tau_{\hat{\sigma}(t)} \ll 1$  para toda  $\hat{\sigma}(t) \in \Omega$ . Una posible opción es  $\tau_{\hat{\sigma}(t)} = \sqrt{h}$ , con  $h$  el tiempo de muestreo.

#### 2.5.4 Estimación de Estado Continuo en los Instantes de Conmutación

Sean  $t_i^+$  pequeños instantes de tiempo después de  $t_i$ . Para mantener la estimación de estado en los instantes de conmutación (*Autónoma* o *No-Autónoma*), se propone el siguiente algoritmo de re-inicio:

**Proposición 2.2** *La estimación de estado (2.1) se mantiene correcta, a pesar de las conmutaciones, si se implementan, en el banco de observadores (2.36)-(2.39), para todo  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\sigma}^*$ , las siguientes ecuaciones de re-inicio:*

$$v_{\hat{\sigma}(t_i^+)}(t_i^+) = 0, \quad (2.55)$$

$$z_{1_{\hat{\sigma}(t_i^+)}}(t_i^+) = \tilde{x}_{1_{\hat{\sigma}^*}}(t_i), \quad (2.56)$$

$$z_{2_{\hat{\sigma}(t_i^+)}}(t_i^+) = \tilde{x}_{21_{\hat{\sigma}^*}}(t_i) - L_{2_{\hat{\sigma}^*}} \tilde{x}_{12_{\hat{\sigma}^*}}(t_i), \quad (2.57)$$

$$z_{3_{\hat{\sigma}(t_i^+)}}(t_i^+) = \tilde{x}_{22_{\hat{\sigma}^*}}(t_i) - E_{22_{\hat{\sigma}^*}} E_{2_{\hat{\sigma}^*}}^+ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{12_{\hat{\sigma}^*}}(t_i) \\ \tilde{x}_{21_{\hat{\sigma}^*}}(t_i) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

◇

**Prueba:** De acuerdo con el [Teorema 2.1](#),  $\bar{x}_1(t)$  es estimada exactamente y en tiempo finito por medio de  $\bar{x}_{1\hat{\sigma}^*}$ . Entonces, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$v_{\hat{\sigma}^*}(t_i^+) = P_{1\hat{\sigma}^*}(\bar{x}_{1\hat{\sigma}^*}(t_i) - z_{1\hat{\sigma}^*}(t_i^+)). \quad (2.59)$$

Si se aplica, al diferenciador HOSM [\(2.17\)](#), la ecuación de re-inicio [\(2.55\)](#) en cada instante de conmutación, las trayectorias del error de estimación siempre permanecen en la superficie deslizante, y entonces, se establece la siguiente igualdad:

$$v_{\hat{\sigma}^*}(t_i^+) = P_{1\hat{\sigma}^*}(\bar{x}_{1\hat{\sigma}^*}(t_i) - z_{1\hat{\sigma}^*}(t_i^+)) = 0. \quad (2.60)$$

Aplicando la ecuación de re-inicio [\(2.56\)](#) a cada dinámica [\(2.14\)](#), para toda  $\hat{\sigma} \neq \hat{\sigma}^*$ , [\(2.60\)](#) se satisface en cada tiempo de conmutación  $t_i$ . Por lo tanto, la estimación para  $\bar{x}_1$  se mantiene *correcta*, a pesar de las conmutaciones.

De [\(2.25\)](#), para mantener la estimación de  $\bar{x}_{21}(t)$ , se tiene que satisfacer la siguiente igualdad:

$$\bar{x}_{21\hat{\sigma}^*}(t_i) = z_{3\hat{\sigma}^*}(t_i^+) + L_{2\hat{\sigma}^*}\bar{x}_{12\hat{\sigma}^*}(t_i). \quad (2.61)$$

Aplicando la ecuación de re-inicio [\(2.57\)](#) a [\(2.25\)](#), para toda  $\hat{\sigma} \neq \hat{\sigma}^*$ , [\(2.61\)](#) se satisface y  $e_{21_{\sigma(t)}}(t)$  permanece acotada como en [\(2.30\)](#).

Del mismo modo, de [\(2.32\)](#), para mantener la estimación de  $\bar{x}_{22}(t)$ , se tiene que satisfacer la siguiente igualdad:

$$\bar{x}_{22\hat{\sigma}^*}(t_i) = z_{3\hat{\sigma}^*}(t_i^+) + E_{22\hat{\sigma}^*}E_{2\hat{\sigma}^*}^+ \begin{bmatrix} \bar{x}_{12\hat{\sigma}^*}(t_i) \\ \bar{x}_{21\hat{\sigma}^*}(t_i) \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Aplicando la ecuación de re-inicio [\(2.58\)](#) a [\(2.32\)](#), [\(2.62\)](#) se satisface y  $e_{22_{\sigma}}$  permanece acotada como en [\(2.35\)](#). □

**Nota Importante 2.6** Una vez que el estado discreto ha sido estimado, para cualquier tipo de conmutación, es posible analizar dicha señal  $\hat{\sigma}(t)$  para saber cuando existe algún cambio. Por lo tanto, las ecuaciones de re-inicio de la [Proposición 2.2](#) siempre pueden ser implementadas cuando este cambio es detectado.

### 2.5.5 Estimación de Estado Continuo

Una vez que se ha establecido como estimar el estado continuo antes de la primera conmutación, como mantener la estimación en las conmutaciones, y el estado discreto (conmutación *autónoma* y *no-autónoma*); es posible establecer el resultado general de estimación de estado continuo.

Debido a la transformación  $\bar{x}(t) = T\chi(t)$ , la estimación del estado original  $\chi(t)$ , tiene la siguiente forma:

$$\hat{\chi}(t) = T_{\hat{\sigma}(t)}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11\hat{\sigma}(t)}^T(t), \bar{x}_{12\hat{\sigma}(t)}^T(t), \bar{x}_{21\hat{\sigma}(t)}^T(t), \bar{x}_{22\hat{\sigma}(t)}^T(t) \end{bmatrix}^T. \quad (2.63)$$

Dados los resultados establecidos previamente, el siguiente teorema presenta el resultado principal en estimación de estado continuo.

**Teorema 2.4** El error de estimación generado por el observador [\(2.63\)](#) y el sistema [\(2.1\)](#), bajo las Suposiciones [2.1-2.6](#), y el diseño de la [Proposición 2.2](#); está finalmente acotado por una constante  $\rho_{\hat{\sigma}}w^+$ , i.e.

$$\|\hat{\chi}(t) - \chi(t)\| \underset{t \rightarrow \infty}{\leq} \rho_{\hat{\sigma}(t)}w^+. \quad (2.64)$$

△

Note que en las trayectorias generadas por los observadores pueden aparecer saltos. Sin embargo, las ecuaciones de re-inicio [\(2.55\)-\(2.58\)](#), tienen como objetivo evitar estos saltos.

De acuerdo con lo establecido en las Subsecciones [2.5.2](#) y [2.5.3](#), los cambios producidos en  $\hat{\sigma}(t)$  se deben a una conmutación.

Note que los resultados del [Teorema 2.4](#) se aplican para los dos tipos de conmutación, i.e. Autónoma y No-Autónoma, con las consideraciones descritas en las secciones correspondientes.

**Prueba:** Es claro, de los Teoremas 2.1, 2.2, 2.3, de lo establecido en la Subsección 2.5.1 acerca de las regiones de convergencia, y de la combinación de coordenadas; que el error de estimación generado por el observador (2.36)-(2.39) en las coordenadas transformadas  $\bar{x}(t)$ , bajo las propiedades descritas en las Suposiciones 2.1-2.6, y en la Proposición 2.2; se propaga en todas las coordenadas originales  $x(t)$ , produciendo  $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \rho_{\hat{\sigma}} w^+$ , con una constante positiva  $\rho_{\hat{\sigma}(t)}$ , defina por  $\delta_{\hat{\sigma}(t)}$  en (2.35), y considerando el 5% de error para alcanzar las cotas finales correspondientes.  $\square$

**Nota Importante 2.7** Si la Suposición 2.4 o Suposición 2.5, que se refieren a la velocidad de convergencia de la parte no-observable para el caso Autónomo y No-Autónomo, respectivamente, no fueran satisfechas; las trayectorias del error de estimación de estado continuo, no entrarían a las regiones de convergencia correspondientes antes de la primera conmutación. Sin embargo, gracias a las ecuaciones de re-inicio de la Proposición 2.2, dichas trayectorias del error estarían finalmente acotadas, al menos con un error del 5% de la cota final, para algún tiempo posterior.

## 2.6 EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 2.6.1 Conmutación Autónoma

Para ilustrar el esquema de observación propuesto, considere la estructura del SLC (2.1), con la conmutación descrita por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \forall x \mid Hx \in [-50, 2000), \\ 2, & \forall x \mid Hx \in (-\infty, -50) \cup [2000, \infty), \end{cases}$$

donde  $Hx = -2x_1(t) + 5x_2(t)$ . Las siguientes matrices corresponden a la dinámica descrita en (2.1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad C_2 = [1.5 \ 0 \ 0 \ 0].$$

La salida y la entrada conocida son:  $y = C_{j(x(t))}x(t)$ , y  $u(t) = 5 \sin(t)$ , respectivamente. Las condiciones iniciales  $x(0) = [2 \ 3 \ 1 \ 2]^T$ , y  $\sigma(0) = 1$ . Es posible mostrar que las suposiciones requeridas se satisfacen. Los valores correspondientes a las matrices de diseño son los siguientes:

$$T_1 = I_{4 \times 4}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{11}^* = K_{12}^* = [1],$$

$$\bar{K}_1^* = \bar{K}_2^* = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad L_{11} = [33 \ 267]^T,$$

Para  $\sigma = 1$ , el sistema ya está en la forma (2.9)-(2.10), mientras que para  $\sigma = 2$ , sólo basta escalar los 2 primeros estados.

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.001 [seg].

$$L_{12} = \begin{bmatrix} 22 & -178 \end{bmatrix}^T, L_{21} = -5, L_{22} = -10,$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -34 & 1 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ -51 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

Los diferenciadores HOSM (2.17) se diseñan para  $n_{\mathcal{V}_1} = n_{\mathcal{V}_2} = 2$ , con base en la [Proposición 2.1](#), se toma  $M_1 = M_2 = 200$ . Se implementan las ecuaciones de re-iniciadas en la [Proposición 2.2](#). Los resultados para el caso sin entradas desconocidas, *i.e.*  $w(t) = 0$ , se muestran en la [Figura 2.2](#).

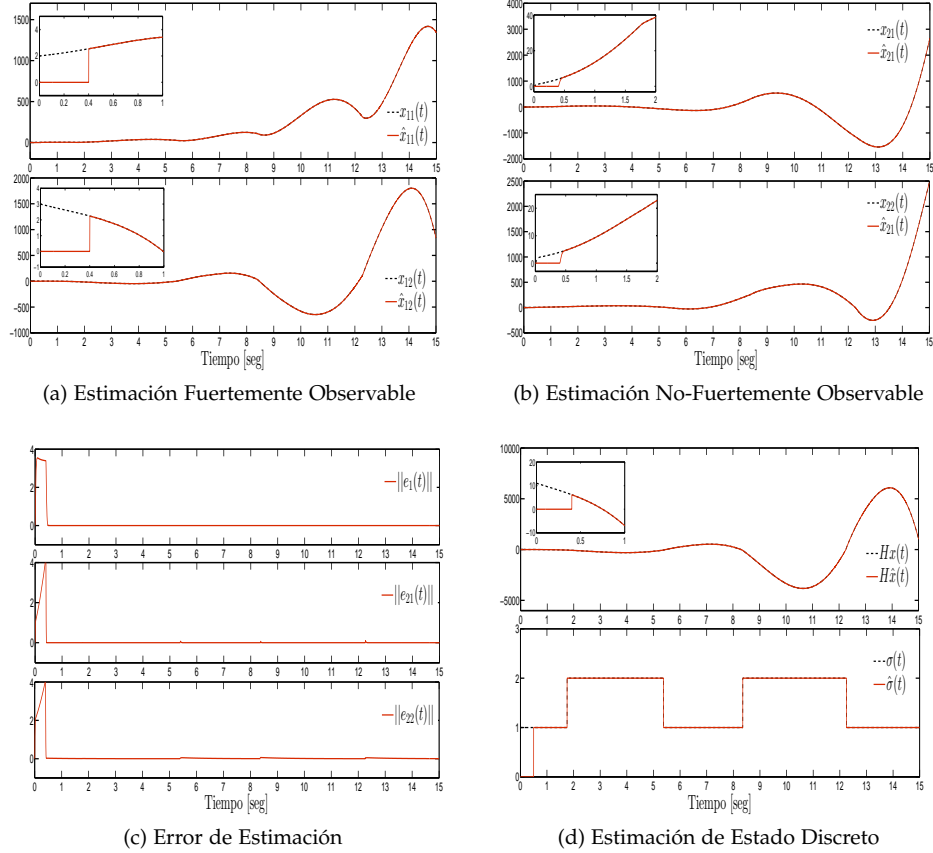


Figura 2.2: Estimación de Estado sin Entradas Desconocidas - Conmutación Autónoma. Es fácil ver que para  $x_{11}(t)$ ,  $x_{12}(t)$  y  $\sigma(t)$ , la estimación es exacta y en tiempo finito, mientras que para  $x_{21}(t)$  y  $x_{22}(t)$ , es de forma exponencial.

Ahora considere el caso en el que la entrada desconocida  $w(t) = 10 \sin(5.5t) + 4 \sin(3.5t) + 2 \sin(t) + 2$  aparece en  $t = 5[\text{seg}]$ . Los resultados se describen en la [Figura 2.3](#).

### 2.6.2 Conmutación No-Autónoma

Considere la estructura del SLC (2.1), con  $\sigma \in \mathcal{Q} = \{1, 2\}$  una señal completamente exógena (ver [Figura 2.4d](#)). Las siguientes matrices corresponden a la dinámica descrita en (2.45):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Este ejemplo fue tomado de [9], donde se propone un observador que sólo estima el estado observable y el estado discreto, en tiempo finito. Sin embargo, el algoritmo que identifica  $\sigma(t)$  está restringido al caso de mapas de observabilidad diferentes para cada modo de operación. El esquema aquí propuesto no presenta esta restricción.



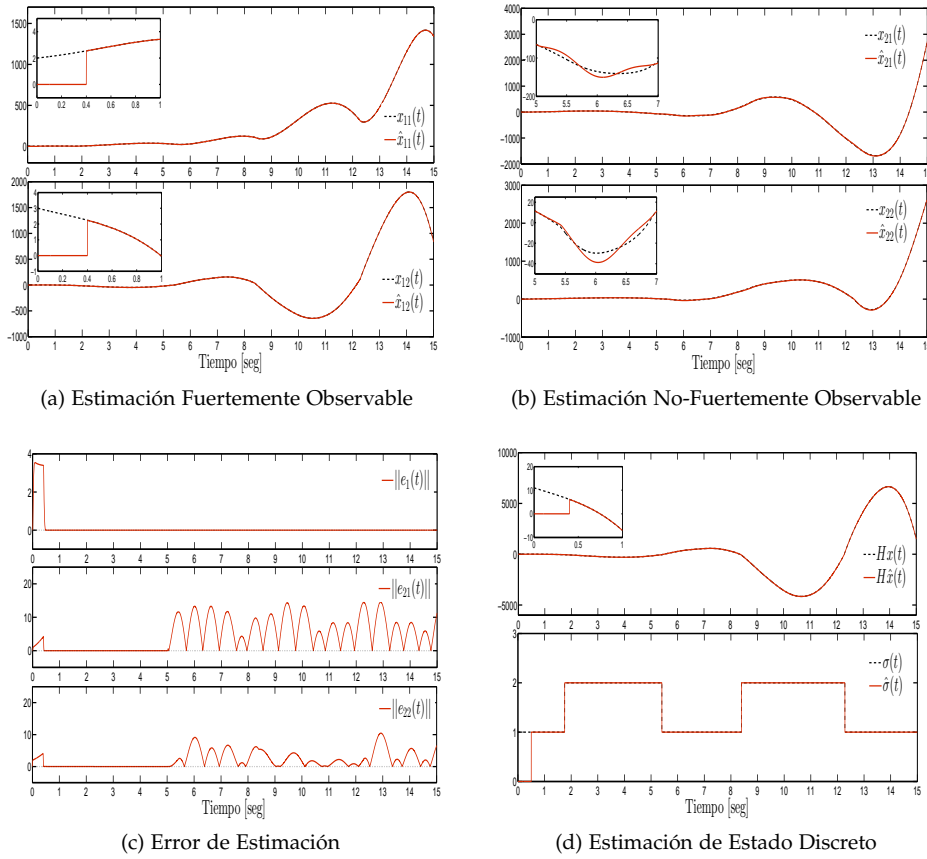


Figura 2.3: Estimación de Estado con Entradas Desconocidas - Conmutación Autónoma. La estimación para  $x_{11}(t)$ ,  $x_{12}(t)$  y  $\sigma(t)$  continua siendo exacta y en tiempo finito, mientras que los errores de estimación para  $x_{21}(t)$  y  $x_{22}(t)$ , permanecen finalmente acotados.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La salida y la entrada conocida son:  $y = C_{j(x(t))}x(t)$ , y  $u(t) = 1$ , respectivamente. Las condiciones iniciales  $x(0) = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ . Es posible mostrar que las suposiciones requeridas se satisfacen. Es fácil ver que el estado discreto es distinguible, ya que la [Suposición 2.6](#) también se satisface. Los valores correspondientes a las matrices de diseño son los siguientes:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 14 & 41 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -89 & 17 \end{bmatrix},$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -18 \end{bmatrix},$$

Los diferenciadores HOSM (2.17) se diseñan para  $n_{\nu_1} = n_{\nu_2} = 2$ , con base en la [Proposición 2.1](#), se toma  $M_1 = 30$  y  $M_2 = 25$ , respectivamente. Se implementan las ecuaciones de re-inicio dadas en la [Proposición 2.2](#). Los resultados se muestran en la [Figura 2.4](#).

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.001 [seg].



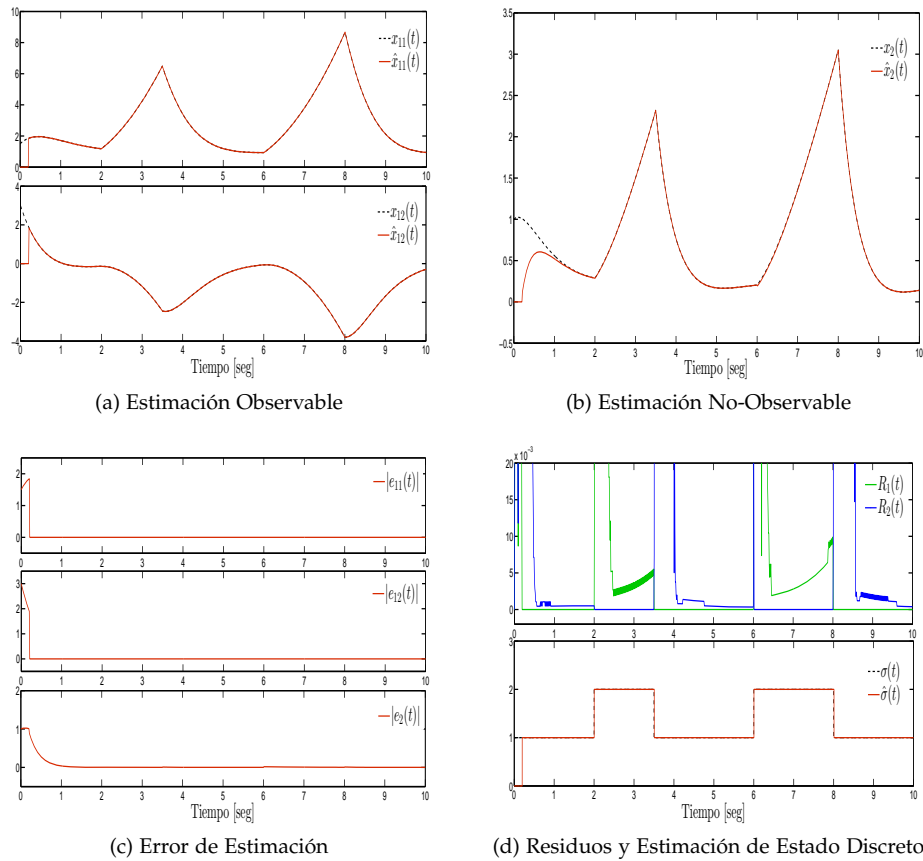


Figura 2.4: Estimación de Estado - Conmutación No-Autónoma. La estimación para  $x_{11}(t)$ ,  $x_{12}(t)$  y  $\sigma(t)$ , es exacta y en tiempo finito, mientras que para  $x_2(t)$  es de forma exponencial. Note que la velocidad de convergencia de  $e_2(t)$  está determinada completamente por la parte no-observable.

## 2.7 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una solución al problema de estimación de estado (continuos y discreto) para cierta clase de SLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*), y presencia, en algunos casos, de entradas desconocidas. La solución consiste en un esquema de multi-observadores robustos. Para el estado continuo, dichos observadores están basados en observadores HOSM, que estiman la parte *fuertemente observable* de forma *exacta* y en *tiempo finito*, mientras que el resto de los estados son estimados asintóticamente por medio de observadores tipo-Luenberger. Por otro lado, se establecen dos esquemas de estimación de estado discreto para conmutaciones *autónomas* y *no-autónomas*, respectivamente. Un par de simulaciones ilustran la eficacia de los esquemas propuestos.

*Toda persona debería tener la libertad  
de plantear cualquier cuestión,  
de dudar de cualquier afirmación,  
de buscar cualquier evidencia,  
y de corregir sus errores.*

— *adaptación de Robert Oppenheimer*

# 3

## SISTEMAS NO-LINEALES CONMUTADOS

---

*En este capítulo se presenta el problema de estimación de estado continuo y discreto para cierta clase de SNLC (autónoma/no-autónoma), y presencia de entradas desconocidas. Las condiciones para las cuales es posible la estimación exacta del estado, en presencia de entradas desconocidas, se establecen con base en propiedades estructurales del sistema. Observadores basados en el diferenciador HOSM estiman el estado continuo de manera exacta y en tiempo finito. Para la estimación del estado discreto se establecen dos esquemas para conmutaciones autónomas y no-autónomas, respectivamente. Dichos esquemas basan su estimación en la información del estado continuo e inyección equivalente. Un par de ejemplos numéricos muestran la eficacia de los esquemas propuestos.*

### 3.1 INTRODUCCIÓN

En el contexto de observación de estado para SNLC con entradas desconocidas, pocos han sido los trabajos que se han presentado en la literatura.

En [50] se presenta un algoritmo, basado en la medición del estado continuo y en teoría de SMC; que estima el estado discreto en cierta clase de SNLC con entradas desconocidas. Considerando que la salida y el estado continuo inicial están disponibles, en [21] y [56]; se proponen condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema de invertibilidad en SNLC, *i.e.* condiciones para la estimación del estado discreto y la entrada de forma única. En [21], la dinámica del sistema inverso está dada por medio de una proyección que descompone el espacio de estados en dos subespacios: uno tangente a las entradas desconocidas; y el otro transversal, mientras que en [56], se extiende el concepto de pares singulares-conmutados, y se introduce una fórmula para determinar si el SNLC es invertible. Por otro lado, considerando que no hay entradas desconocidas y que el estado discreto es conocido, un observador no-lineal, basado en el STA, que es capaz de estimar el voltaje en los capacitores de convertidores multi-celulares (*multicellular converters*), los cuales presentan una dinámica conmutada, es presentado en [26]. En el mismo contexto, sin entradas desconocidas, en [8] se presenta un observador basado en el STA que estima el estado continuo y discreto en tiempo finito, en SNLC con saltos.

Motivados por estos trabajos, bajo la suposición de que ambos estados, *i.e.* continuo y discreto; son desconocidos, se desea resolver el problema de estimación

de estado en presencia de entradas desconocidas. A nuestro saber, dicho problema no ha sido resuelto en su totalidad, o han sido pocos los trabajos presentados.

### 3.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de SNLC con entradas desconocidas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)) + E_{\sigma(t)}w(t), \\ y(t) &= h_{\sigma(t)}(x(t)),\end{aligned}\tag{3.1}$$

El sistema (3.1) también representa un caso particular de un automata híbrido [44], sin saltos en el estado continuo  $x(t)$ .

donde  $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado continuo,  $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{R}$  es la salida, y  $w(t) \in \mathcal{W} \subseteq \mathfrak{R}$  es la entrada desconocida acotada, i.e.  $\|w(t)\| \leq w^+ < \infty$ . Se asume que todos los campos vectoriales  $f_{\sigma}(x(t)) : \mathcal{X}_{\sigma} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , son suaves para todo  $\mathcal{X}_{\sigma}$  tal que  $\mathcal{X} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \mathcal{X}_{\sigma}$ ; mientras que todas las matrices columna  $E_{\sigma} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  son conocidas, y  $h_{\sigma}(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  son funciones suaves definidas en un conjunto abierto de  $\mathfrak{R}^n$ .

El estado discreto  $\sigma \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\} \subseteq \mathfrak{N}$  puede ser generado por medio de una función no-lineal, o señal de conmutación; del estado continuo (*conmutación autónoma*), i.e.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in \mathcal{H}_1, \\ 2, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in \mathcal{H}_2, \\ \vdots & \\ q, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in \mathcal{H}_q, \end{cases}\tag{3.2}$$

donde  $H(x(t)) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H} \subseteq \mathfrak{R}$  es una función escalar suave, continua y conocida, y  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_q \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathfrak{R}$  son intervalos conocidos, disjuntos y cerrados, tales que  $\mathcal{H} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}_{\sigma} = \mathfrak{R}$ , i.e.  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_q$  cubren todos los números reales  $\mathfrak{R}$ .

Para cada valor del estado continuo  $x(t)$ , corresponde un sólo valor del estado discreto  $\sigma(t)$  en (3.2), i.e. el estado discreto es distinguible.

Sin embargo, al igual que en el [Capítulo 2](#), el estado discreto también puede ser generado de forma exógena o controlada (*conmutación no-autónoma*). En este caso, el estado discreto se describe como  $\sigma(t) \in \mathcal{Q}$ . Para ambos tipos de conmutación, se asume que las trayectorias satisfacen la condición de *Tiempo Mínimo* (ver [Apéndice A](#)). Más aún, se asume que el *zeno phenomena* (ver [Apéndice A](#) para su definición) no se puede presentar en el sistema, y que, además; cumple con la [Definición A.11](#) de *Z-observabilidad*.

Los problemas que se analizarán son los siguientes:

1. Estimación del estado continuo  $x(t)$ .
2. Estimación del estado discreto  $\sigma(t)$ .

### 3.3 DISEÑO DE OBSERVADORES

Considere que el sistema (3.1), satisface las siguientes suposiciones:

La [Suposición 3.1](#) implica que todos los campos vectoriales  $f_{\sigma}(x)$  son extensiones del resto de ellos, con la propiedad de suavidad para todos los dominios correspondientes.

**Suposición 3.1** Suponga que cada campo vectorial  $f_j : \mathcal{X}_j \rightarrow \mathfrak{R}^n$  puede ser extendido a cualquiera de los subespacios  $\mathcal{X}_i, \forall j \neq i, \forall i, j \in \mathcal{Q}$ .

**Suposición 3.2** Los campos vectoriales  $f_{\sigma(t)}(x)$ , las matrices  $E_{\sigma(t)}$ , y las funciones  $h_{\sigma(t)}(x)$ , son tales que  $\forall x \in \mathcal{X}$ , para cualquier trayectoria  $\sigma(t)$ ; se satisface que:

Los términos  $L_{f(x)}^k h(x) = \frac{\partial L_{f(x)}^{k-1} h(x)}{\partial x} f(x)$ , con  $L_{f(x)}^0 h(x) = h(x)$ ; se conocen como las Derivadas de Lie (ver [36]).

$$\begin{aligned}d(L_{f_{\sigma(t)}(x)}^k h_{\sigma(t)}(x))E_{\sigma(t)} &= 0, \quad \forall k < n-1, \\ d(L_{f_{\sigma(t)}(x)}^{n-1} h_{\sigma(t)}(x))E_{\sigma(t)} &\neq 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Defina los siguientes mapeos:

$$\Phi_\sigma(x) = \begin{bmatrix} h_\sigma(x) \\ L_{f_\sigma(x)} h_\sigma(x) \\ \vdots \\ L_{f_\sigma(x)}^{n-1} h_\sigma(x) \end{bmatrix}, \quad \forall \sigma \in \Omega, \quad (3.4)$$

y sus correspondientes matrices Jacobianas

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} dh_\sigma(x) \\ dL_{f_\sigma(x)} h_\sigma(x) \\ \vdots \\ dL_{f_\sigma(x)}^{n-1} h_\sigma(x) \end{bmatrix}, \quad \forall \sigma \in \Omega. \quad (3.5)$$

Considere que la siguiente suposición, sobre las matrices Jacobianas, se satisface.

**Suposición 3.3** Cada matriz (3.5) es tal que

$$\begin{aligned} \text{rank} \left( \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} \right) &= n, \quad \forall x \in \mathcal{X}_1, \\ \text{rank} \left( \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x} \right) &= n, \quad \forall x \in \mathcal{X}_2, \\ &\vdots \\ \text{rank} \left( \frac{\partial \Phi_q(x)}{\partial x} \right) &= n, \quad \forall x \in \mathcal{X}_q. \end{aligned}$$

Además, se asume que cada mapeo  $\Phi_\sigma(x)$  es un difeomorfismo, pero sólo en su correspondiente dominio  $\mathcal{X}_\sigma$ ,  $\forall \sigma \in \Omega$  (ver, e.g. [36]).

Tomando en cuenta las suposiciones previas, es posible diseñar el siguiente banco de observadores:

$$\dot{\bar{x}}_j(t) = f_j(\bar{x}_j(t)) + \left( \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j} \right)^{-1} v_j(t), \quad \forall j \in \Omega \quad (3.6)$$

$$\bar{y}_j(t) = h_j(\bar{x}_j(t)), \quad (3.7)$$

donde  $\bar{x}_j(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el estado continuo estimado,  $\bar{y}_j(t) \in \mathfrak{R}$  la salida estimada, y los términos de corrección se representan con  $v_j(t) \in \mathfrak{R}^n$  y se diseñan más adelante. Las soluciones de (3.6), se entienden en el sentido de A. Filipov [30], para proporcionar la posibilidad de usar señales discontinuas en el observador, y que las soluciones coincidan con las soluciones usuales; cuando el lado derecho es continuo. También se asume que los términos de corrección permiten la existencia y extensión de soluciones para todo  $t \geq 0$ .

Es claro que debido a la Suposición 3.3, puede existir algún observador, fuera de su región de operación, para el cual la correspondiente matriz  $(\partial \Phi_j(\bar{x}_j)/\partial \bar{x}_j)^{-1}$  no esté bien determinada. En este sentido, se introduce la siguiente suposición.

**Suposición 3.4** Se considera que las trayectorias de todos los observadores (3.6)-(3.7), fuera de su correspondiente región de operación, no presentan escape a infinito, en tiempo finito.

Si los  $q$  mapeos de observabilidad son iguales, sólo sería necesario diseñar un observador para estimar el estado continuo. Si  $q - 1$  mapeos de observabilidad son iguales, sólo sería necesario diseñar dos observadores; y así sucesivamente.

La Suposición 3.4 se requiere debido a problemas computacionales. Sin embargo, no es necesario que los observadores (3.6)-(3.7) estén bien definidos fuera de su correspondiente región de operación, ya que, como se verá en la Subsección 3.4.4; las ecuaciones de re-inicio llevarán las trayectorias, de todos los observadores, al valor exacto del estado continuo.

**Nota Importante 3.1** Note que, debido a la [Suposición 3.2](#) y [Suposición 3.3](#), los  $q$  subsistemas deben ser localmente observables sólo en su correspondiente dominio.

La siguiente suposición asegura la estimación exacta y en tiempo finito, de cada observador en su correspondiente modo de operación.

**Suposición 3.5** Existen constantes conocidas  $M_j > 0, \forall j \in \mathcal{Q}$ ; tales que, las siguientes desigualdades se satisfacen:

Para que el sistema satisfaga la [Suposición 3.5](#), es necesario que el sistema sea Bounded-Input Bounded-State (ver, e.g. [38]); o que sea posible estabilizarlo de alguna manera. No obstante, es suficiente que exista una cota  $M_j$  en el correspondiente dominio  $\mathcal{D}_j$ , y no fuera de él.

$$\begin{aligned} \left| L_{f_1}^n(\bar{x}_1) h_1(\bar{x}_1) - L_{f_1}^n(x) h_1(x) - d(L_{f_1}^{n-1} h_1(x)) E_1 w \right| &< M_1, \forall x \in \mathcal{X}_1, \\ \left| L_{f_2}^n(\bar{x}_2) h_2(\bar{x}_2) - L_{f_2}^n(x) h_2(x) - d(L_{f_2}^{n-1} h_2(x)) E_2 w \right| &< M_2, \forall x \in \mathcal{X}_2, \\ &\vdots \\ \left| L_{f_q}^n(\bar{x}_q) h_q(\bar{x}_q) - L_{f_q}^n(x) h_q(x) - d(L_{f_q}^{n-1} h_q(x)) E_q w \right| &< M_q, \forall x \in \mathcal{X}_q. \end{aligned}$$

**Nota Importante 3.2** Desde el punto de vista físico (e.g. sistemas mecánicos), la [Suposición 3.5](#) implica conocer una cota de la aceleración y cierta cota del error de estimación inicial, para cada modo de operación. En este sentido, todos los sistemas realizables físicamente presentan dichas cotas, por lo tanto; es posible tener cierto conocimiento de donde inician las trayectorias del sistema.

### 3.3.1 Términos de Corrección

Los términos de corrección  $v_\delta(t)$  serán diseñados haciendo uso del diferenciador HOSM, como una dinámica auxiliar, i.e.

Otro algoritmo que puede ser utilizado como dinámica auxiliar es el diferenciador uniforme HOSM [7].

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{1j} &= \vartheta_{2j} - \alpha_{1j} M_j^{\frac{1}{n}} \left[ e_{y_j} \right]^{\frac{n-1}{n}}, \\ \dot{\vartheta}_{ij} &= \vartheta_{(i+1)j} - \alpha_{ij} M_j^{\frac{1}{n-i+1}} \left[ \vartheta_{ij} - \dot{\vartheta}_{(i-1)j} \right]^{\frac{n-i}{n-i+1}}, \\ &\forall i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\vartheta}_{nj} &= -\alpha_{nj} M_j \left[ \vartheta_{nj} - \dot{\vartheta}_{n-1j} \right]^0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $e_{y_j}(t) = \bar{y}_j - y(t), \forall j \in \mathcal{Q}$ ; son los errores de salida para cada observador. De este modo, los términos de corrección se extraen de (3.8) como:

$$v_j(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_{1j} M_j^{\frac{1}{n}} \left[ e_{y_j} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ -\alpha_{2j} M_j^{\frac{1}{n-1}} \left[ \vartheta_{2j} - \dot{\vartheta}_{1j} \right]^{\frac{n-2}{n-1}} \\ \vdots \\ -\alpha_{nj} M_j \left[ \vartheta_{nj} - \dot{\vartheta}_{n-1j} \right]^0 \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

donde las constantes  $\alpha_{i_\delta}$  se eligen recursivamente de acuerdo con [A. Levant](#) (ver [Subsección 2.4.1](#)), y las ganancias  $M_\delta$  satisfaciendo la [Suposición 3.5](#).

### 3.4 RESULTADO PRINCIPAL

#### 3.4.1 Estimación del Estado Continuo

La estimación del estado continuo será descrita durante el intervalo de tiempo entre una conmutación y otra. Considere que  $\sigma(t) = \sigma^* = \text{const.}, \forall t \in [0, t_1)$ , satisfaciendo  $t_1 \geq T_\delta^1$ . La dinámica del sistema en el modo de operación  $\sigma^*$  está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_{\sigma^*}(x(t)) + E_{\sigma^*}w(t), \\ y(t) &= h_{\sigma^*}(x(t)).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Tomando en cuenta el diseño del observador descrito en la Sección 3.3, se puede establecer el siguiente teorema:

**Teorema 3.1** Considere que el  $\sigma^*$  –ésimo observador (3.6), con los términos de corrección (3.9), es aplicado al sistema (3.10); y que las Suposiciones 3.1-3.3 se satisfacen. Entonces, siempre que las constantes  $\alpha_{i_{\sigma^*}}$  sean elegidas apropiadamente, y  $M_{\sigma^*}$  satisfaga la Suposición 3.5, el error de estimación del estado continuo convergerá a cero de forma exacta y en tiempo finito, i.e.  $e_{\sigma^*}(t) = \bar{x}_{\sigma^*}(t) - x(t) = 0, \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1)^2$ .  $\triangle$

*Si se emplea el diferenciador uniforme HOSM, el error de estimación  $e_{\sigma^*}(t)$  convergerá a cero de forma exacta y uniforme.*

**Prueba:** El sistema (3.10), bajo las Suposiciones 3.2 y 3.3, puede ser representado, en coordenadas  $z$ , como:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + B\varphi_{\sigma^*}(z, w), \\ y_z(t) &= Cz(t),\end{aligned}\quad (3.11)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]_{1 \times n},$$

$$\varphi_{\sigma^*}(z, w) = \left[ L_{f_{\sigma^*}}^n(x) h_{\sigma^*}(x) + d(L_{f_{\sigma^*}}^{n-1}(x) h_{\sigma^*}(x)) E_{\sigma^*} w \right] \Big|_{x=\Phi_{\sigma^*}^{-1}(z)}.$$

Por otro lado, los observadores (3.6), bajo las Suposiciones 3.2 y 3.3, se pueden representar de la siguiente forma:

*Las funciones  $\varphi_{\sigma^*}(z, w)$  contienen el efecto de la entrada desconocida.*

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_j(t) &= A\bar{z}_j(t) + B\bar{\varphi}_j(\bar{z}_j) + v_j(t), \\ y_{\bar{z}_j}(t) &= C\bar{z}_j,\end{aligned}\quad (3.12)$$

donde  $\bar{\varphi}_j(\bar{z}_j) = \left[ L_{f_{\sigma^*}}^n(\bar{x}_j) h_j(\bar{x}_j) \right] \Big|_{x_j=\Phi_j^{-1}(z_j)}$ . Defina los errores de estimación de estado como  $e_{\bar{z}_j}(t) = \bar{z}_j(t) - z(t)$ . Por lo tanto, la dinámica del error tiene la siguiente forma:

$$\dot{e}_{\bar{z}_j}(t) = Ae_{\bar{z}_j}(t) + B\Psi_j(\bar{z}_j, z, w) + v_j(t), \quad (3.13)$$

donde  $\Psi_j(\bar{z}_j, z, w) = \bar{\varphi}_j(\bar{z}_j) - \varphi_{\sigma^*}(z, w)$ . Si es posible diseñar los términos de corrección  $v_j(t)$  tal que,  $e_{\bar{z}_j}(t)$  converja a cero, entonces la igualdad  $\bar{z}_j(t) = z(t)$ , será verdad sólo para el caso  $j = \sigma^*$ .

Defina el vector de error de salida como:

$$\varepsilon_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1j} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_j}(t) \\ \vdots \\ e_{y_j}(t)^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

*Si los  $q$  mapeos de observabilidad son iguales, los  $q$  observadores podrían estimar el estado continuo (con  $M_j$  suficientemente grandes). Si  $q - 1$  mapeos de observabilidad son iguales,  $q - 1$  observadores podrían estimar el estado continuo; y así sucesivamente.*

<sup>1</sup>  $t_1$  es el primer instante de conmutación (switching time), mientras que  $T_\delta$  es el Tiempo Mínimo.  
<sup>2</sup>  $t_{\sigma^*}$  es el tiempo en el cual, el observador (3.6), ha convergido a cero.

Debido a la [Suposición 3.3](#), la dinámica (3.13), toma la siguiente forma:

$$\dot{\varepsilon}_j = A\varepsilon_j + B\Psi_j(\Phi_j(\bar{x}_j), \Phi_{\sigma^*}(x), w) + \nu_j, \quad (3.15)$$

y de forma extendida:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{1j} &= \varepsilon_{2j} + \nu_{1j}, \\ \dot{\varepsilon}_{2j} &= \varepsilon_{3j} + \nu_{2j}, \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{nj} &= \Psi_j(\Phi_j(\bar{x}_j), \Phi_{\sigma^*}(x), w) + \nu_{nj}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Es claro que la estructura dinámica (3.16) es igual a la que presenta el diferenciador HOSM (3.8).

Por lo tanto, sustituyendo los términos de corrección (3.9), se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{1j} &= \varepsilon_{2j} - \alpha_{1j} M_j^{\frac{1}{n}} \left[ \varepsilon_{1j} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ \dot{\varepsilon}_{2j} &= \varepsilon_{3j} - \alpha_{2j} M_j^{\frac{1}{n-1}} \left[ \varepsilon_{2j} - \dot{\varepsilon}_{1j} \right]^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{nj} &= \Psi_j(\Phi_j(\bar{x}_j), \Phi_{\sigma^*}(x), w) - \alpha_{nj} M_j \left[ \varepsilon_{nj} - \dot{\varepsilon}_{n_j-1} \right]^0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Eligiendo los parámetros  $\alpha_{i\sigma^*}$  de acuerdo con [A. Levant](#), y  $M_{\sigma^*}$  satisfaciendo la [Suposición 3.5](#); entonces, cuando  $j = \sigma^*$ , la siguiente igualdad se satisface en tiempo finito:

$$[\varepsilon_{1\sigma^*}, \varepsilon_{2\sigma^*}, \dots, \varepsilon_{n\sigma^*}] \equiv [0, 0, \dots, 0].$$

Siempre es posible diseñar las ganancias de los diferenciadores HOSM de tal forma que  $t_{\sigma^*} < t_1$ .

Debido a las propiedades de los HOSM, la condición  $\varepsilon_{1\sigma^*} \equiv 0, \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1)$ , implica que  $[\varepsilon_{2\sigma^*}, \dots, \varepsilon_{n\sigma^*}] \equiv [0, \dots, 0], \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1)$  con  $t_1 \geq T_\delta$ . Para probar esto, asuma que  $\varepsilon_{1\sigma^*} \equiv 0$  es verdad en cierto intervalo de tiempo distinto de cero. Esta condición implica que  $\dot{\varepsilon}_{1\sigma^*} \equiv 0$ , para el mismo intervalo. Por lo tanto, del primer renglón de (3.17), se obtiene que  $\varepsilon_{2\sigma^*} \equiv 0$ , lo que implica  $\dot{\varepsilon}_{2\sigma^*} \equiv 0$ . Por lo tanto, del segundo renglón de (3.17), se tiene que  $\varepsilon_{3\sigma^*} \equiv 0$ , y esto implica que  $\dot{\varepsilon}_{3\sigma^*} \equiv 0$ . Siguiendo el mismo método, se obtiene  $\varepsilon_{i\sigma^*} \equiv 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

De este modo, de acuerdo con [A. Levant \[39\]](#), la dinámica (3.17), para  $j = \sigma^*$ , converge a cero, después de un transitorio de tiempo finito, *i.e.*  $\varepsilon_{\sigma^*} \equiv 0 \forall t > t_{\sigma^*}$ ; y debido a la [Suposición 3.3](#), se asegura que el error de estimación del estado continuo  $e_{\sigma^*}(t)$ , también converge a cero en tiempo finito, a pesar de la entrada desconocida.  $\square$

**Nota Importante 3.3** Es muy importante mencionar que para diseñar los observadores (3.6)-(3.7), sólo es necesario calcular las matrices inversas, *i.e.*  $(\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j})^{-1}$ ; y no las transformaciones inversas, *i.e.*  $\Phi_j^{-1}(\bar{z}_j)$ .

El [Teorema 3.1](#) establece que el observador  $\sigma^*$  estima el estado continuo *exactamente*, pero no establece cual es dicho observador. Como se vio en la [Subsección 2.5.1](#), para detectar cual de los  $q$  observadores ha convergido es suficiente con verificar cual de las siguientes desigualdades se satisface:

$$\left| e_{y_j}(t) \right| \leq \xi_j M_j^+ h^n, \quad \forall t \in [0, \xi_j h), \quad \forall j \in \mathcal{Q}, \quad (3.18)$$

Como se mencionó en la [Subsección 2.5.1](#), las constantes  $\xi_j$  y  $\xi_{jt}$  se estiman a través de simulaciones.

donde  $\xi_j$  y  $\xi_{jt}$  son constantes positivas, y  $h$  es el tiempo de muestreo. De esta manera,  $t_{\sigma^*} = \xi_{j\sigma^*} h$ , y por lo tanto, es posible determinar cuando y que observador ha convergido, durante el intervalo de tiempo  $t \in [0, t_1)$ . El observador que satisfaga (3.18) será el  $\sigma^*$  -ésimo observador.

Por lo tanto, el estado estimado *real*  $\hat{x}(t)$ , se define como:

$$\hat{x}(t) = \bar{x}_{\sigma^*}(t), \quad \forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1). \quad (3.19)$$

### 3.4.2 Estimación del Estado Discreto: Conmutación Autónoma

Una vez que el estado continuo es estimado, se define el siguiente observador de estado discreto:

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} 1, & \forall \hat{x}(t) \mid H(\hat{x}(t)) \in \mathcal{H}_1 \\ 2, & \forall \hat{x}(t) \mid H(\hat{x}(t)) \in \mathcal{H}_2 \\ \vdots \\ q, & \forall \hat{x}(t) \mid H(\hat{x}(t)) \in \mathcal{H}_q \end{cases}, \quad (3.20)$$

Dado que, de acuerdo con el [Teorema 3.1](#), se tiene  $\hat{x}(t) = x(t)$ ,  $\forall t \in [t_{\sigma^*}, t_1]$ ; el siguiente lema refleja la estimación exacta y en tiempo finito del estado discreto.

**Lema 3.1** *Bajo las condiciones del [Teorema 3.1](#), el estado discreto  $\sigma(t)$ , es estimado exactamente y en tiempo finito por medio del observador (3.20), sólo con la información de los subconjuntos  $\mathcal{H}_\sigma$ .*  $\#$

*Si se emplea el diferenciador uniforme HOSM [7], la estimación del estado discreto será exacta y uniforme.*

**Prueba:** Ya que el estado continuo  $x(t)$ , es estimado exactamente y en tiempo finito; haciendo uso de la información de  $H(\hat{x}(t))$  y  $\mathcal{H}_\sigma$ , la estimación exacta y en tiempo finito del estado discreto, es consecuencia de las propiedades de estimación del estado continuo descritas en el [Teorema 3.1](#).  $\square$

### 3.4.3 Estimación del Estado Discreto: Conmutación No-Autónoma

Como en la [Subsección 2.5.3](#), el análisis se restringe al caso sin entradas desconocidas, *i.e.*  $w(t) = 0$ .

En el momento en el que la estimación de  $x(t)$  se logra, los términos de  $v_{\hat{\sigma}^*}(t)$  toman el valor de la *inyección equivalente*. Por lo tanto, en un tiempo finito, se satisface que<sup>3</sup>:

$$\dot{e}_{\hat{\sigma}^*}(t) = f_{\hat{\sigma}^*}(\bar{x}_{\hat{\sigma}^*}) + \left( \frac{\partial \Phi_{\hat{\sigma}^*}(\bar{x}_{\hat{\sigma}^*})}{\partial \bar{x}_{\hat{\sigma}^*}} \right)^{-1} v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t) - f_{\sigma^*}(x(t)) = 0, \quad (3.21)$$

lo que implica:

$$v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t) = 0. \quad (3.22)$$

La siguiente suposición es requerida para la estimación del estado discreto:

**Suposición 3.6** *Se asume que la siguiente desigualdad se satisface:*

$$f_i(x(t)) \neq f_j(x(t)), \quad \forall i \neq j, \quad \forall i, j \in \Omega, \quad \text{para casi todo } t \geq 0. \quad (3.23)$$

*Más aún, se considera que el siguiente conjunto:*

$$\mathcal{M} = \{x(t) \in \mathfrak{X}^n \mid f_i(x) = f_j(x), \quad \forall i \neq j, \quad \forall i, j \in \Omega\}, \quad (3.24)$$

*es un conjunto discreto.*

*El conjunto  $\mathcal{M}$  está formado por todos los puntos (aislados) de  $x(t)$ , donde la trayectoria generada por  $f_i(x)$  y  $f_j(x)$  es exactamente igual.*

**Nota Importante 3.4** *La condición (3.24) implica que la dinámica entre modos de operación sólo es igual en puntos aislados. Por lo tanto, el estado discreto es distinguible.*

Note que cuando  $\sigma(t) \neq \hat{\sigma}^*$ , la dinámica de  $e_{\hat{\sigma}}(t)$ , para  $j \neq \hat{\sigma}^*$ , está dada por:

$$\dot{e}_{\sigma(t)}(t) = f_j(\bar{x}_j) + \left( \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j} \right)^{-1} v_j - f_{\sigma(t)}(x(t)). \quad (3.25)$$

*Note que aunque dos mapeos de observabilidad sean iguales, las inyecciones equivalentes correspondientes difieren entre sí, debido a la [Suposición 3.6](#); aún si sus errores de estimación convergen a cero.*

<sup>3</sup> En el caso con entradas desconocidas,  $v_{\hat{\sigma}^* e_q}(t) \neq 0$  para toda  $\hat{\sigma}(t)$ .



Dado que el estado discreto es distinguible, debido a la [Suposición 3.6](#), la diferencia entre las dinámicas, en los diferentes modos de operación; provocará que  $e_{\sigma(t)}(t)$  no converja a cero. Por lo tanto,  $v_j(t) \neq 0$ , para toda  $j \neq \hat{\sigma}^*$ ; y así, [\(3.21\)](#) se satisface, en tiempo finito, sólo cuando  $\hat{\sigma}(t) = \hat{\sigma}^*$ . De este manera, se prueba lo establecido en el siguiente lema:

**Lema 3.2** *Bajo las condiciones del [Teorema 3.1](#), el estado discreto  $\sigma(t)$ , puede ser estimado exactamente y en tiempo finito, si la [Suposición 3.6](#) se satisface.  $\#$*

Como en la [Subsección 2.5.3](#), los términos  $v_{\hat{\sigma}(t)}(t)$  serán usados para establecer la evaluación de residuos. Los residuos tienen la estructura propuesta en [\(2.52\)](#), i.e.

*La construcción de los residuos  $r_j(\tau)$  se presenta en [\(2.50\)](#), [Subsección 2.5.3](#).*

$$R_j(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^t r_j(\tau) d\tau, \quad \forall j \in \Omega, \quad (3.26)$$

donde  $\Delta T$  es una ventana de tiempo a diseñar. Entonces, la estimación del estado discreto está dada por:

$$\hat{\sigma}(t) = \arg \min_j R_j(t). \quad (3.27)$$

**Nota Importante 3.5** *Para la estimación de estado con conmutación autónoma y no-autónoma, no es necesario conocer el estado discreto inicial. No obstante, es necesario que el observador converja dentro del Tiempo Mínimo del sistema.*

**Nota Importante 3.6** *De nueva cuenta, la estimación de  $v_{\hat{\sigma}(t)} e_q$  es proporcionada por el filtro paso-bajas propuesto en [\(2.54\)](#), [Subsección 2.5.3](#).*

#### 3.4.4 Estimación de Estado en los Instantes de Conmutación

Sean  $t_i^+$  pequeños instantes de tiempo después de  $t_i$ . Para mantener la estimación de estado en los instantes de conmutación (Autónoma o No-Autónoma), se propone el siguiente algoritmo de re-inicio:

**Proposición 3.1** *La estimación de estado [\(3.1\)](#) se mantiene correcta, a pesar de las conmutaciones, si se implementan, en el banco de observadores [\(3.6\)](#)-[\(3.7\)](#), para toda  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\sigma}^*$ , la siguiente ecuación de re-inicio:*

$$\bar{x}_{\hat{\sigma}(t)}(t_i^+) = \hat{x}(t_i^-), \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

◇

*Debido a que el sistema no presenta saltos en el estado continuo, los difeomorfismos  $\Phi_\sigma(x)$ , tampoco presentan saltos en los tiempos de conmutación. Sin embargo, en las trayectorias generadas por los observadores pueden aparecer dichos saltos. La ecuación de re-inicio [\(3.28\)](#), tiene como objetivo evitar este fenómeno.*

**Prueba:** Considere la dinámica [\(3.17\)](#), en los instantes antes y después del tiempo de conmutación  $t_1$ , i.e.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{1_{\Delta\sigma(t)}} &= \varepsilon_{2_{\Delta\sigma(t)}} - \alpha_{1_{\Delta\sigma(t)}} M_{\Delta\sigma(t)}^{\frac{1}{n}} \left[ \varepsilon_{1_{\Delta\sigma(t)}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ \dot{\varepsilon}_{2_{\Delta\sigma(t)}} &= \varepsilon_{3_{\Delta\sigma(t)}} - \alpha_{2_{\Delta\sigma(t)}} M_{\Delta\sigma(t)}^{\frac{1}{n-1}} \left[ \varepsilon_{2_{\Delta\sigma(t)}} - \varepsilon_{1_{\Delta\sigma(t)}} \right]^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n_{\Delta\sigma(t)}} &= \Psi_{\Delta\sigma(t)}(\cdot) - \alpha_{n_{\Delta\sigma(t)}} M_{\Delta\sigma(t)} \left[ \varepsilon_{n_{\Delta\sigma(t)}} - \varepsilon_{n_{\Delta\sigma(t)}-1} \right]^0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $\varepsilon_{i_{\Delta\sigma(t)}} = \varepsilon_{i_{\hat{\sigma}^*}} - \varepsilon_{i_{\hat{\sigma}(t)}}$ , y  $\Psi_{\Delta\sigma(t)}(\cdot) = \Psi_{\hat{\sigma}^*}(\cdot) - \Psi_{\hat{\sigma}(t)}(\cdot)$ , para toda  $\hat{\sigma}(t) \neq \hat{\sigma}^*$ . Entonces, si la ecuación de re-inicio [\(3.28\)](#), es aplicada en cada tiempo de conmutación, las trayectorias de [\(3.29\)](#) permanecen en la *superficie deslizante*, i.e.  $\varepsilon_{i_{\Delta\sigma(t)}} = 0$ . Por lo tanto, la estimación del estado continuo se mantiene a pesar de las conmutaciones.  $\square$

**Nota Importante 3.7** Como se mencionó en la *Nota 2.6, Subsección 2.5.5*, una vez que el estado discreto ha sido estimado, es posible analizar  $\hat{\delta}(t)$  para saber cuando existe algún cambio. Por lo tanto, la ecuación de re-inicio (3.28) siempre puede ser implementada cuando este cambio es detectado.

**Nota Importante 3.8** En el presente capítulo, por brevedad, sólo se ha presentado el caso Single-Input Single-Output. Sin embargo, el caso Multiple-Input Multiple-Output se presenta en [53], y para el caso no-conmutado; en el *Capítulo 5*. Básicamente, se realiza el mismo diseño por bloques correspondientes a cada salida (ver *Subsección 3.5.2*).

### 3.5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

#### 3.5.1 Conmutación Autónoma

Considere un modelo simplificado de 2 grados de libertad (2-DOF) de un taladro rotacional vertical para pozos petroleros (la *Figura 3.1* ilustra el modelo n-dimensional del taladro rotacional, ver [49] para más detalles).

*El comportamiento del taladro rotacional es descrito por medio de un péndulo rotacional controlado por un motor eléctrico, y el contacto de la broca sobre la superficie es descrito por un término de fricción seca. Los tubos del taladro son modelados por medio de un resorte rotacional lineal, con rigidez torsional  $k_t$ ; y un amortiguamiento rotacional  $c_t$  los cuales conectan las inercias  $J_r$  y  $J_b$ . Además, se considera que existe un par con amortiguamiento viscoso  $c_{r,x_1}$  en la parte superior del sistema.*

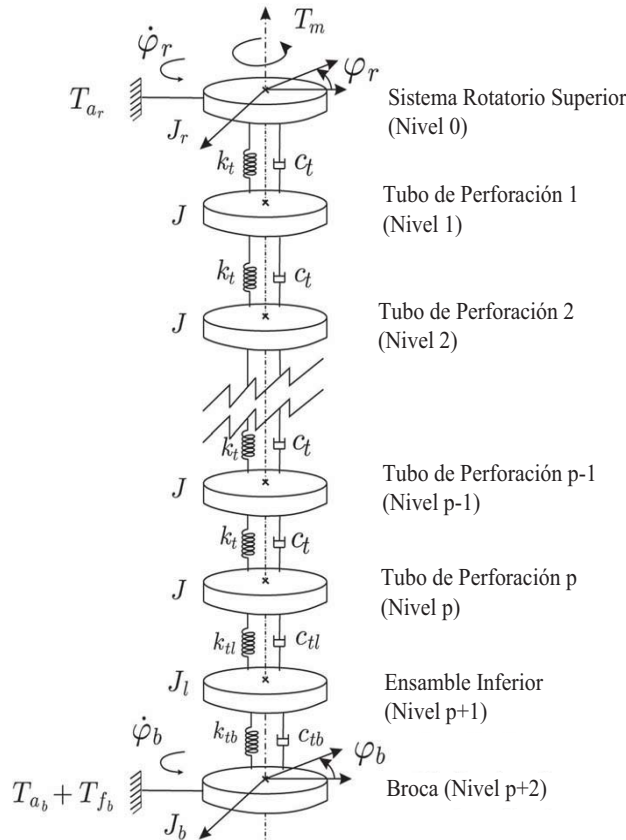


Figura 3.1: Modelo Mecánico del Taladro Rotacional.

El vector de estados  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  está compuesto por los desplazamientos angulares  $(\varphi_r(t)$  y  $\varphi_b(t))$  y velocidades angulares  $(\dot{\varphi}_r(t)$  y  $\dot{\varphi}_b(t))$  de la parte superior del sistema rotacional y la broca, *i.e.*  $x(t) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r(t), & \varphi_r(t) - \varphi_b(t), & \dot{\varphi}_b(t) \end{bmatrix}^T$ . La entrada se considera como un par constante aplicado por un motor en la superficie, *i.e.*  $T_m = u(t)$ . El par en la broca es  $T_b(x_3(t)) = c_b x_3(t) + T_{fb}(x_3(t))$

donde  $c_b x_3(t)$  se aproxima a la influencia del lodo de perforación en la broca, y  $T_{f_b}(x_3(t))$  es el modelo de fricción del contacto de la broca sobre la superficie, donde  $T_{f_b}(x_3(t)) = f_b(x_3(t))\text{sign}(x_3(t))$  con:

$$f_b(x_3(t)) = W_{ob} R_b \left[ \mu_{c_b} + (\mu_{s_b} - \mu_{c_b}) \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\nu_f} |x_3(t)|\right) \right],$$

donde  $W_{ob} > 0$  es una constante de peso de la broca, y  $R_b > 0$  es el radio de la broca. Los coeficientes de fricción estática y de Coulomb asociados con  $J_b$  son representados por  $\mu_{s_b}, \mu_{c_b} \in (1, 0)$ , y las constantes positivas  $0 < \gamma_b < 1$  y  $\nu_f > 0$ . Además, el par de fricción de Coulomb y estática se consideran como  $T_{c_b} = W_{ob} R_b \mu_{c_b}$  y  $T_{s_b} = W_{ob} R_b \mu_{s_b}$ , respectivamente.

De este modo, la dinámica conmutada del taladro rotacional con entradas desconocidas es:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} [-(c_t + c_r)x_1(t) - k_t x_2(t) + c_t x_3(t) + u(t)] \\ x_1(t) - x_3(t) \\ \frac{1}{J_b} [c_t x_1(t) + k_t x_2(t) - (c_t + c_b)x_3(t) - T_{f_b}^+(x_3(t))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_t}{J_r} \\ \frac{k_t}{J_r} \end{bmatrix} w(t), \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} [-(c_t + c_r)x_1(t) - k_t x_2(t) + c_t x_3(t) + u(t)] \\ x_1(t) - x_3(t) \\ \frac{1}{J_b} [c_t x_1(t) + k_t x_2(t) - (c_t + c_b)x_3(t) - T_{f_b}^-(x_3(t))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_t}{J_r} \\ \frac{k_t}{J_r} \end{bmatrix} w(t), \end{cases}$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_r} [-(c_t + c_r)x_1(t) - k_t x_2(t) + u(t)] \\ x_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_t}{J_r} \\ \frac{k_t}{J_r} \end{bmatrix} w(t), \end{cases}$$

La entrada desconocida  $w(t)$  representa algunas oscilaciones no deseadas.

donde  $T_{f_b}^+$  y  $T_{f_b}^-$ , corresponden a los valores de  $T_{f_b}(x_3(t))$  para  $x_3(t) > 0$  y  $x_3(t) < 0$ , respectivamente. La salida y la entrada desconocida son:  $y(t) = [x_1(t), x_3(t)]^T$ , y  $w(t) = 2 \cos(1.5t) + 6\text{square}(0.5t) + 1$ , respectivamente. El estado discreto tiene la siguiente forma:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in (T_{s_b}, \infty) \\ 2, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in (-\infty, -T_{s_b}) \\ 3, & \forall x(t) \mid H(x(t)) \in [-T_{s_b}, T_{s_b}] \end{cases}, \quad (3.30)$$

donde  $H(x(t)) = c_t x_1(t) + k_t x_2(t)$ . Los parámetros del sistema se muestran en la [Tabla 3.1](#).

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.0001 [seg].

Las condiciones iniciales para el sistema son  $x(0) = [-10 \quad -50 \quad -10]^T$ . Para diseñar los observadores 1 y 2 se hará uso únicamente de la salida  $y_1(t) = x_1(t)$  para reconstruir todo el vector de estados, mientras que para el observador 3 se usará la salida  $y_1(t) = x_1(t)$  para reconstruir el estado  $x_2(t)$ , asumiendo que la dinámica es de orden 2; y la información del tercer estado se obtendrá de la salida  $y_2(t) = x_3(t)$ .

Es fácil mostrar que la [Suposición 3.2](#) se satisface para cada modo de operación. Las matrices de la [Suposición 3.3](#), para  $\sigma = 1, 2$ , toman la siguiente estructura:

Es claro que para  $\sigma = 1, 2$ , los mapeos de observabilidad son iguales. Por lo tanto, basta con diseñar un sólo observador para estos dos modos de operación.

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x(t))}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.26608 & -0.32896 & 6.5795 \times 10^{-2} \\ -0.23870 & 0.18484 & 0.35134 \exp(-0.9|x_3(t)|) + 0.28502 \end{bmatrix},$$

Parámetro	Valor	Unidades
$J_r$	2122	$\text{kgm}^2$
$J_b$	471.9698	$\text{kgm}^2$
$R_b$	0.155575	m
$k_t$	698.063	$\text{Nm/rad}$
$c_t$	139.6126	$\text{Nms/rad}$
$c_r$	425	$\text{Nms/rad}$
$c_b$	50	$\text{Nms/rad}$
$T_m$	6	$\text{kNm}$
$W_{ob}$	60	$\text{kN}$
$T_{s_b}$	7.4676	$\text{kNm}$
$\mu_{c_b}$	0.5	—
$\mu_{s_b}$	0.8	—
$\gamma_b$	0.9	—
$\nu_f$	1	—

Tabla 3.1: Parámetros del Taladro Rotacional.

y para  $\sigma = 3$  la matriz es

$$\frac{\partial \Phi_3(x(t))}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.26608 & -0.32896 \end{bmatrix}$$

Es claro que  $\text{rank}\left(\frac{\partial \Phi_\sigma(x(t))}{\partial x(t)}\right) = 3, \forall x(t) \in \mathfrak{R}^3$  para  $\sigma = 1, 2$ , y  $\text{rank}\left(\frac{\partial \Phi_3(x(t))}{\partial x(t)}\right) = 2, \forall x(t) \in \mathfrak{R}^2$ . Se considera que el primer instante de conmutación  $t_1 \geq T_\delta$  es conocido ( $t_1 = 1.146[\text{sec}]$ ). Los observadores (3.6)-(3.7) son implementados, con los términos de corrección (3.9) diseñados para  $\hat{\sigma}(t) = 1$ , considerando que  $n = 3$ ; y para  $\hat{\sigma}(t) = 3$  asumiendo que  $n = 2$ . Las ganancias son seleccionadas satisfaciendo la Suposición 3.5, i.e.  $M_1 = 100$ , y  $M_3 = 1.4$ . Los resultados se describen en la Figura 3.2.

### 3.5.2 Conmutación No-Autónoma

Considere el sistema no lineal compuesto por la interconexión de un circuito Chua y un oscilador de Rössler, i.e.

*Este sistema representa una versión conmutada de un sistema caótico Chua-Rössler.*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_{\sigma(t)}c_{\sigma(t)}x_1(t) + \alpha_{\sigma(t)}x_2(t) - \alpha_{\sigma(t)}x_1^3(t) \\ x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ -\beta_{\sigma(t)}x_2(t) \\ -x_5(t) - x_6(t) + x_1(t) \\ x_4(t) + a_{\sigma(t)}x_5(t) \\ b_{\sigma(t)} + x_6(t)(x_4(t) - d_{\sigma(t)}) \end{bmatrix},$$

donde el estado discreto  $\sigma \in \Omega = \{1, 2, 3\}$  es una señal completamente exógena (ver Figura 3.3f), mientras que  $a_\sigma = \{0.2, 0.2, 0.2\}$ ,  $b_\sigma = \{0.2, 0.1, 0.5\}$ ,  $c_\sigma = \{-0.143, -0.5, -0.2\}$ ,  $d_\sigma = \{6, 2, 4\}$ ,  $\alpha_\sigma = \{10, 8, 12\}$  and  $\beta_\sigma = \{16, 16, 16\}$ , son parámetros que varían con respecto al valor de  $\sigma(t)$ . La salida es  $y(t) = [x_3(t) \quad x_5(t)]^T$ .

4 Estos parámetros producen un tiempo de convergencia en los observadores menor a 1.146[sec].

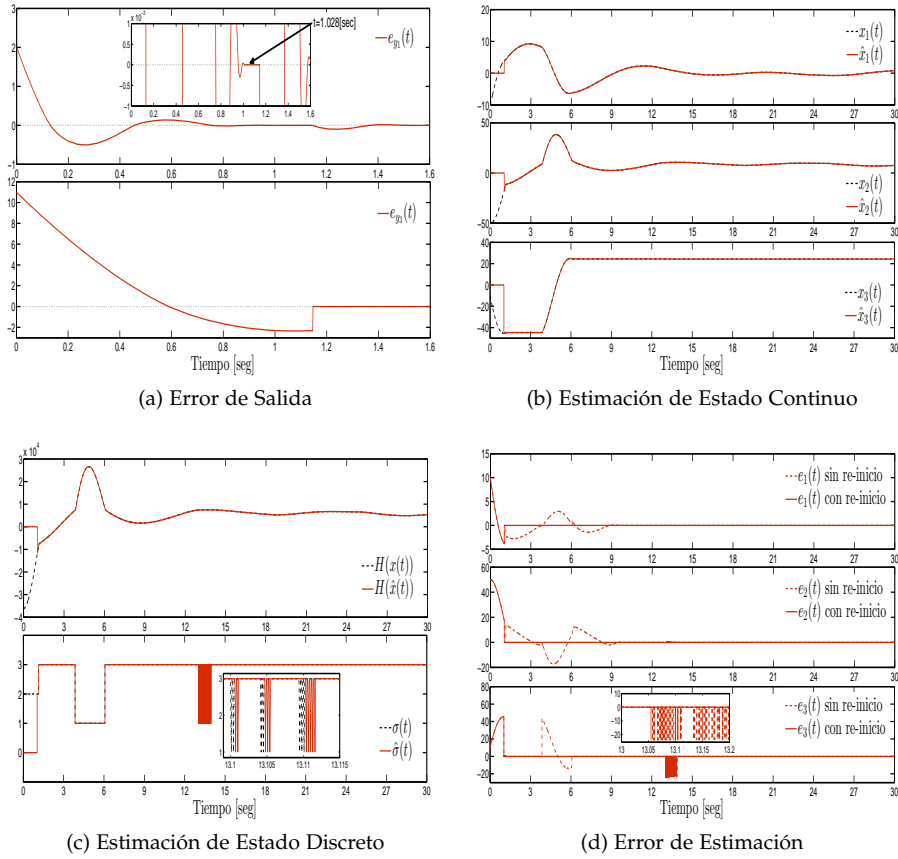


Figura 3.2: Estimación de Estado con Entradas Desconocidas - Conmutación Autónoma.

En la [Figura 3.2a](#) se aprecia que  $e_{y1}$  satisface la desigualdad (3.18) después de  $t = 1.028[\text{sec}]$  y antes de  $t_1 = 1.146[\text{sec}]$ . La estimación de estado continuo se muestra en la [Figura 3.2b](#), donde es evidente que dicha estimación se mantiene en los instantes de conmutación. La estimación de estado discreto se muestra en [Figura 3.2c](#), donde se presenta una frecuencia de conmutación grande. Sin embargo, la estimación del estado continuo se mantiene. Finalmente, una comparación entre error de estimación con y sin la ecuación de re-inicio (3.28) se muestra en la [Figura 3.2d](#).

Las condiciones iniciales del sistema son  $x(0) = \begin{bmatrix} 3.9 & -3.2 & 0.03 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$ . Para este ejemplo, el caso MIMO será diseñado. Las matrices de la [Suposición 3.3](#), para  $\sigma = 1, 2, 3$ , toman la siguiente estructura:

Las matrices  $\frac{\partial \Phi_\sigma(x(t))}{\partial x(t)}$  se forman a partir de (3.5), con los primeros tres renglones haciendo uso de  $h_{1\sigma(t)} = x_3(t)$ , mientras que los últimos renglones con la información de  $h_{2\sigma(t)} = x_5(t)$ .

$$\frac{\partial \Phi_\sigma(x(t))}{\partial x(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_\sigma & \beta_\sigma & -\beta_\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_\sigma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_\sigma & (a_\sigma^2 - 1) & -1 \end{bmatrix}.$$

Es claro que los mapeos de observabilidad son idénticos, y que  $\frac{\partial \Phi_\sigma(x(t))}{\partial x(t)}$  es no-singular; para toda  $\sigma \in \Omega$ . Por lo tanto, si las ganancias  $M_{\hat{\sigma}(t)}$ , se seleccionan suficientemente grandes; todos los observadores estimarán el estado continuo sin error. Debido a la dinámica del sistema, la [Suposición 3.6](#) se satisface, por lo tanto, el estado discreto es distinguible. Se considera que el primer instante de

conmutación  $t_1 \geq T_\delta$  es conocido ( $t_1 = 20[\text{sec}]$ ). Los observadores (3.6)-(3.7) son implementados, con los términos de corrección (3.9) diseñados para  $\hat{\sigma}(t) = 1, 2, 3$ , de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{\hat{\sigma}(t)}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_{1_{1_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^{\frac{1}{r_1}} \left[ e_{y_{1_{\hat{\sigma}(t)}}} \right]^{\frac{r_1-1}{r_1}} \\ -\alpha_{1_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^{\frac{1}{r_1-1}} \left[ \vartheta_{1_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} - \dot{\vartheta}_{1_{\hat{\sigma}(t)}} \right]^{\frac{r_1-2}{r_1-1}} \\ -\alpha_{1_{r_1_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{1_{\hat{\sigma}(t)}} \left[ \vartheta_{1_{r_1_{\hat{\sigma}(t)}}} - \dot{\vartheta}_{1_{r_1_{\hat{\sigma}(t)}-1}} \right]^0 \\ -\alpha_{2_{1_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{2_{\hat{\sigma}(t)}}^{\frac{1}{r_2}} \left[ e_{y_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} \right]^{\frac{r_2-1}{r_2}} \\ -\alpha_{2_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{2_{\hat{\sigma}(t)}}^{\frac{1}{r_2-1}} \left[ \vartheta_{2_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} - \dot{\vartheta}_{2_{1_{\hat{\sigma}(t)}}} \right]^{\frac{r_2-2}{r_2-1}} \\ -\alpha_{2_{r_2_{\hat{\sigma}(t)}}} M_{2_{\hat{\sigma}(t)}} \left[ \vartheta_{2_{r_2_{\hat{\sigma}(t)}}} - \dot{\vartheta}_{2_{r_2_{\hat{\sigma}(t)}-1}} \right]^0 \end{bmatrix},$$

donde  $e_{y_{1_{\hat{\sigma}(t)}}}(t) = \bar{x}_{3_{\hat{\sigma}(t)}}(t) - x_3(t)$ , y  $e_{y_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t) = \bar{x}_{5_{\hat{\sigma}(t)}}(t) - x_5(t)$ , con  $r_1 = r_2 = 3$ , tal que  $r_1 + r_2 = n$ . Los parámetros  $\alpha_{k_{r_k \hat{\sigma}(t)}}$ , son seleccionados como en (2.17), Subsección 2.4.1; mientras que las ganancias  $M_{k_{\hat{\sigma}(t)}}$  son seleccionadas satisfaciendo la Suposición 3.5 para cada salida, i.e.  $M_{1_{\hat{\sigma}(t)}} = 180$ , y  $M_{2_{\hat{\sigma}(t)}} = 100.5$ . Los resultados se describen en la Figura 3.3.

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.0001 [seg].

### 3.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una solución al problema de estimación de estado (continuos y discreto) para cierta clase de SNLC (*conmutación autónoma/no-autónoma*), y presencia, en algunos casos, de entradas desconocidas. La solución consiste en un esquema de multi-observadores robustos basados en el diferenciador HOSM. Para el estado continuo, dichos observadores HOSM estiman el estado continuo de forma *exacta* y en *tiempo finito*. Por otro lado, se establecen dos esquemas de estimación de estado discreto para conmutaciones *autónomas* y *no-autónomas*, respectivamente. Resultados de simulación ilustran la eficacia de los esquemas propuestos.

5 Estos parámetros producen un tiempo de convergencia en los observadores menor a 20[sec].

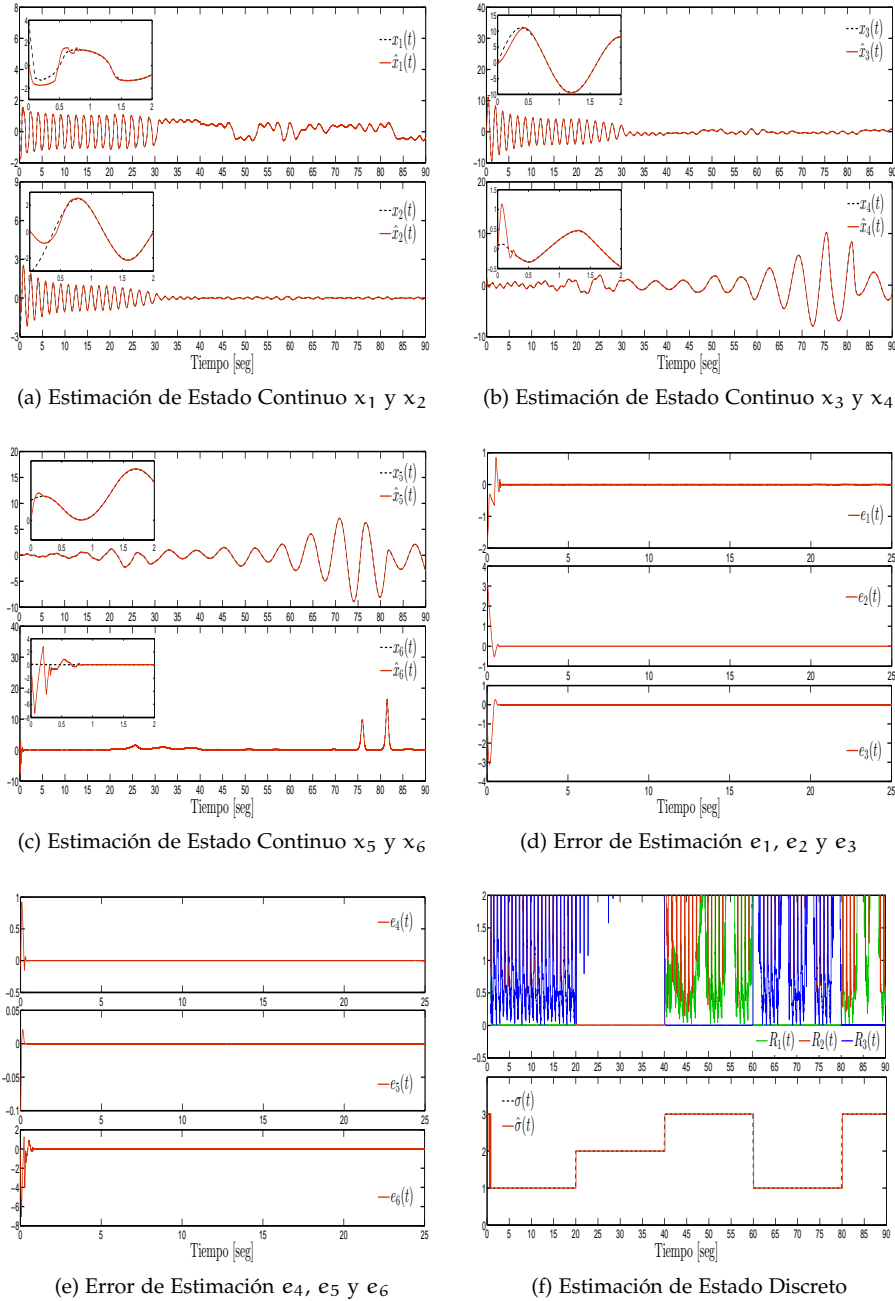


Figura 3.3: Estimación de Estado - Conmutación No-Autónoma. En la *Figura 3.3a*, *Figura 3.3b*, y *Figura 3.3c*; se aprecia la estimación de estado continuo, donde es evidente que dicha estimación se mantiene en los instantes de conmutación. La convergencia a cero y en tiempo finito del error de estimación se presenta en la *Figura 3.3d* y *Figura 3.3e*. Finalmente, los residuos y la estimación del estado discreto se muestran en *Figura 3.3f*.

## Parte II

### **APLICACIONES: DETECCIÓN Y AISLAMIENTO DE FALLAS**

Algunas aplicaciones de los esquemas de observación presentados previamente se muestran a continuación. Principalmente se abordó el problema de detección y aislamiento de fallas.





*Comprendió que el momento presente  
debe ser siempre un momento preciado.  
No porque se encuentre libre de fallas,  
sino porque jamás es perfecto.*

— **Spencer Johnson**

# 4

## SLC: FD BASADA EN OBSERVADORES HOSM, Y FID VÍA EIV

---

*El problema de FDI para cierta clase de SLC es presentado en este capítulo. La estrategia consiste en un esquema de FD basado en observadores HOSM, presentados en el [Capítulo 2](#); y un esquema de FDI que consiste en la solución de una EIV. La efectividad de la estrategia propuesta se ilustra por medio de un ejemplo numérico.*

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Nuestra sociedad depende fuertemente de la disponibilidad y el buen funcionamiento de procesos tecnológicos complejos. A menudo, los procesos clave necesitan ser monitoreados para prevenir modos de operación incorrectos que puedan causar algún daño importante en los componentes del sistema, o incluso, en casos críticos; evitar consecuencias fatales. El objetivo principal de un esquema de FDI es indicar que algo en el sistema está mal (*i.e.* generar una alarma cuando una falla ocurre: *detección*) y determinar que subsistema o componente ha desarrollado o sufrido una falla (*i.e.* identificar su localización: *aislamiento*). Las mejoras en las técnicas de modelado han permitido el uso de esquemas de FDI basados en el modelo. Dichos métodos han sido considerados muy efectivos para el desarrollo de esquemas de FDI tanto en teoría, como en la práctica (ver e.g. [22], [15], [27], [35] y [70]). En particular, los esquemas que se emplean más comúnmente son los basados en observador, donde la información generada por este es usada para extraer información acerca de las fallas (*generación de residuos*).

En los esquemas de generación de residuos, el error entre la salida del sistema y el observador se analiza para formar residuos. Cuando el sistema está libre de falla el residuo debe ser pequeño (*aproximadamente cero*), no obstante, cuando ocurre una falla este debe ser *considerablemente* distinto de cero. Existe una gran lista de publicaciones que describen diferentes métodos de FDI basada en generación de residuos, e.g. en [32] se presenta una visión general, el diseño de filtros para FD se presenta en [71], mientras que algunos tutoriales se pueden ver en [22] y [15].

En el contexto de SH y el problema de FDI, en [23] se presenta una metodología de FDI que usa residuos de paridad estructurados para sistemas conmutados. En [69] se propone una arquitectura de diagnóstico de fallas que integra el modelado, la predicción y el diagnóstico (detección y aislamiento) de fallas para un

modelo automata híbrido. Una metodología de FDI, basada en la noción y condiciones de diagnosticabilidad; para control de SH usando un automata híbrido que genera una señal cuando ocurre alguna falla se presenta en [31]. Con base en un esquema de *bond-graphs*, en [48] se desarrollan algunas técnicas para el diagnóstico de fallas en SH. En [63] se propone un esquema de diagnóstico de fallas, basado en un observador híbrido robusto, para cierta clase de SNLC con incertidumbres donde las fallas se modelan como puntos de operación (*estado discreto*). Para cierta clase de SNLC con fallas e incertidumbre paramétrica, en [67] se diseña un observador cuyo error de estimación no es afectado por las fallas, y un FTC que es capaz de hacer seguimiento en la salida. En [21] se propone un algoritmo de invertibilidad de SNLC para reconstruir y detectar fallas. Un filtro robusto de detección de fallas se propone en [1], con el objetivo de diseñar sistemas de FD para SH con entradas desconocidas y con señales de conmutación conocidas. En [43] se presentan algunos algoritmos de estimación de estado y FDI para cierta clase de SH estocásticos con conmutaciones autónomas y no-autónomas.

En la mayoría de los trabajos mencionados, las fallas son modeladas por medio del estado discreto (*submodelos*), *i.e.* se crea un SH como resultado de la interacción entre el sistema y las posibles fallas (Sistema + Fallas = SH). En este capítulo se presenta un esquema de FD basado en observadores HOSM, y con base en la solución de una EIV; se propone una solución al problema de FId, en SLC con fallas (SH + Fallas).

## 4.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la siguiente clase de SLC con fallas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + E_{\sigma(t)}f(t), \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

El sistema (4.1) tiene la misma estructura presentada en el Capítulo 2. La diferencia radica en que las entradas desconocidas son vistas ahora como fallas.

donde  $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado continuo,  $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{R}^p$  es el vector de entradas conocidas,  $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es el vector de salidas, y  $f(t) \in \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{R}^m$  es el vector de fallas acotadas, *i.e.*  $\|f(t)\| \leq f^+ < \infty$ . El estado discreto  $\sigma(t) : \mathfrak{R} \rightarrow \Omega = \{1, \dots, q\}$  determina la dinámica actual del sistema a lo largo de los  $q$  posibles modos de operación, de forma autónoma, *i.e.*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_1, \\ 2, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_2, \\ \vdots & \\ q, & \forall x(t) \mid Hx(t) \in \mathcal{H}_q, \end{cases}\tag{4.2}$$

donde  $H$  es una matriz conocida, y  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_q \subseteq \mathcal{H} \in \mathfrak{R}$  son subconjuntos conocidos, convexos y disjuntos. Se asume que las trayectorias satisfacen la condición de *Tiempo Mínimo*.

Los problemas que se analizarán son los siguientes:

1. Detección de Fallas.
2. Identificación de Fallas.

La identificación de falla implica conocer el valor y la forma de la misma. Por lo tanto, la identificación implica, de alguna forma; aislamiento.

El esquema de FDI está basado en el banco de observadores descrito en el Capítulo 2, Sección 2.5. Una vez que el estado (*continuo y discreto*) ha sido estimado, es posible definir un criterio de decisión para determinar la ocurrencia y posible identificación de fallas.

### 4.3 ESQUEMA DE DETECCIÓN

Considere que el sistema (4.1) se ha llevado a la forma (2.9), presentada en la Sección 2.3, i.e.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{12}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{21}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) \\ \bar{x}_{12}(t) \\ \bar{x}_{21}(t) \\ \bar{x}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} \bar{f}(t), \quad (4.3)$$

Todas las variables y dimensiones correspondientes han sido descritas en la Sección 2.3, por brevedad; estos detalles son omitidos.

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) \\ \bar{x}_{12}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (4.4)$$

$$\bar{f}(t) = f(t) - K_1^* \bar{x}_{21}(t). \quad (4.5)$$

De la dinámica  $\bar{x}_{12}(t)$  en (4.3), se obtiene que:

$$\dot{\bar{x}}_{12}(t) - \left( A_{21_{\sigma(t)}} \bar{x}_{11}(t) + A_{22_{\sigma(t)}} \bar{x}_{12}(t) + B_{2_{\sigma(t)}} \mathbf{u} + E_{12_{\sigma(t)}} \bar{f}(t) \right) = 0. \quad (4.6)$$

Sustituyendo  $\bar{f}(t)$ , y el correspondiente estado estimado; en (4.6), para el caso libre de falla, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (\dot{\hat{x}}_{12}(t) + \dot{e}_{12}(t)) - \left[ A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} (\hat{x}_{11}(t) + e_{11}(t)) + A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} (\hat{x}_{12}(t) + e_{12}(t)) \right. \\ \left. + B_{2_{\hat{\sigma}(t)}} \mathbf{u} - E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* (\hat{x}_{21}(t) + e_{21}(t)) \right] = 0, \quad (4.7) \end{aligned}$$

donde  $e_{ij} = \bar{x}_{ij} - \hat{x}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ; son los correspondientes errores de estimación de estado continuo. Defina la siguiente señal de residuo:

$$\begin{aligned} r_{\hat{\sigma}(t)}(t) = \dot{\hat{x}}_{12}(t) - \left[ A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} \hat{x}_{11}(t) + A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} \hat{x}_{12}(t) \right. \\ \left. + B_{2_{\hat{\sigma}(t)}} \mathbf{u} - E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* \hat{x}_{21}(t) \right]. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Todas las variables del lado derecho en (4.8) están disponibles, excepto  $\dot{\hat{x}}_{12}(t)$ , que será estimada usando el diferenciador HOSM (2.17), para  $n_V = 1$ .

Por lo tanto, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \|r(t)_{\hat{\sigma}(t)}\| \leq \|\dot{e}_{12}(t)\| + \|A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} e_{11}(t)\| + \\ \|A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} e_{12}(t)\| + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* e_{21}(t)\|, \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\|r(t)_{\hat{\sigma}(t)}\| \leq r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t), \quad \text{a.e.}, \quad (4.10)$$

donde  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$  es una constante para cada  $\hat{\sigma}(t) \in \mathcal{Q}$ , que depende del tiempo de muestro  $h$ , y de los parámetros del sistema y del observador, respectivamente. De este modo, la decisión sobre la ocurrencia de falla  $f(t)$  se lleva a cabo cuando la norma de  $r_{\hat{\sigma}(t)}(t)$  excede su correspondiente umbral o *threshold*  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$ .

Es posible estimar cada  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$  calculando, por medio de simulación, el valor de la expresión del lado derecho en (4.8).

**Nota Importante 4.1** Note que (4.10) está directamente relacionada con la falla más pequeña que es posible detectar, i.e. una condición de detectabilidad de la falla. Es claro que aquellas fallas, cuya magnitud sea menor que  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$ ; no serán detectables.

Por lo tanto, el instante de tiempo  $t_f$ , tal que  $\|r_{\hat{\sigma}(t)}(t_f)\| > r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$  para  $t_f > t_{\hat{\sigma}^*}$ , con  $t_{\hat{\sigma}^*}$  el tiempo en el cual el observador ha convergido; se define como el tiempo de FD. El siguiente teorema establece el tipo de fallas que pueden ser detectadas por este esquema.

Es claro que la FD sólo puede llevarse a cabo una vez que el banco de observadores (2.36)-(2.39) ha convergido.

**Teorema 4.1** Sean el banco de observadores (2.36)-(2.39), y (2.42), así como el criterio de decisión de falla (4.10), aplicados al sistema (4.3). Para todo instante de tiempo  $t_f > t_{\hat{\sigma}^*}$ , tal que  $f(t)$  satisfice

$$E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} f(t) \neq E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* \int_{t_{\hat{\sigma}^*}}^{t_f} \exp(A_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t_f - t_{\hat{\sigma}^*} - \tau)) E_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} f(\tau) d\tau, \quad (4.11)$$

entonces, la falla  $f(t)$  será detectada, i.e.  $\|r_{\hat{\sigma}(t)}(t_f)\| > r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$ , en el tiempo  $t = t_f$ .  $\triangle$

**Prueba:** En el caso de falla, de (4.7) se tiene que

$$\begin{aligned} (\hat{x}_{12}(t) + \hat{e}_{12}(t)) - [A_{21_{\hat{\sigma}(t)}}(\hat{x}_{11}(t) + e_{11}(t)) + A_{22_{\hat{\sigma}(t)}}(\hat{x}_{12}(t) + e_{12}(t)) \\ + B_{2_{\hat{\sigma}(t)}} u - E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^*(\hat{x}_{21}(t) + e_{21}(t))] = E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} f(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sustituyendo la solución de  $\hat{e}_{21}(t)$  (2.29), en (4.12)

$$\begin{aligned} (\hat{x}_{12}(t) + \hat{e}_{12}(t)) - [A_{21_{\hat{\sigma}(t)}}(\hat{x}_{11}(t) + e_{11}(t)) + A_{22_{\hat{\sigma}(t)}}(\hat{x}_{12}(t) + e_{12}(t)) + B_{2_{\hat{\sigma}(t)}} u \\ - E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* (\hat{x}_{21}(t) + e_{21}(t_{\hat{\sigma}^*})) \exp(A_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t - t_{\hat{\sigma}^*})) \\ + \int_{t_{\hat{\sigma}^*}}^{t_f} \exp(A_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t_f - t_{\hat{\sigma}^*} - \tau)) E_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} f(\tau) d\tau] = E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} f(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

De (4.13), se obtiene el criterio de decisión (4.10), i.e.  $\|r_{\hat{\sigma}(t)}(t)\| \leq r_{\hat{\sigma}(t)}^+$ . Cuando ocurre una falla, de (4.13), se tiene que:

$$\begin{aligned} \|r_{\hat{\sigma}(t)}(t)\| > \|\hat{e}_{12}(t)\| + \|A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} e_{11}(t)\| + \|A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} e_{12}(t)\| \\ + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* e_{21}(t)\| + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} f(t)\|, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \|r_{\hat{\sigma}(t)}(t)\| > r_{\hat{\sigma}(t)}^+ + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* \int_{t_{\hat{\sigma}^*}}^{t_f} \exp(A_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t_f - t_{\hat{\sigma}^*} - \tau)) E_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} f(\tau) d\tau \\ + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} f(t)\|, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\|r_{\hat{\sigma}(t)}(t)\| > r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t) + (\gamma_{\hat{\sigma}(t)} + \|E_{12_{\hat{\sigma}(t)}}\|) f^+, \quad \text{a.e.} \quad (4.16)$$

Con base en (4.13) y (4.16), si existe un instante de tiempo  $t_f > t_{\hat{\sigma}^*}$ , tal que (4.11) sea verdad, entonces, se puede concluir que  $\|r_{\hat{\sigma}(t)}(t_f)\| > r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$  en el tiempo  $t = t_f$ , y por lo tanto; la falla  $f(t)$  es detectada.  $\square$

De esta manera, las ecuaciones (4.10) y (4.11), son llamadas *condiciones estructurales de detectabilidad*. Por lo tanto, todas las fallas que satisfagan dichas condiciones, podrán ser detectadas.

Para el caso de mediciones con ruido, sería necesario extender las condiciones de detectabilidad, para obtener unas condiciones desde el punto de vista de sensibilidad.

**Nota Importante 4.2** Es evidente que (4.10) y (4.16), no se satisfacen durante los instantes de conmutación. Sin embargo, ya que el estado discreto es estimado en presencia de fallas (ver Lema 2.1), es posible ignorar los valores de (4.10) y (4.16), en dichos tiempos de conmutación. De esta forma, el criterio de ocurrencia de falla no se ve alterado por las conmutaciones.

#### 4.4 ESQUEMA DE IDENTIFICACIÓN

Ahora, se analiza el problema de FId. Note que, de (4.13); se puede establecer la siguiente EIV tipo 2:

$$\Lambda_{\hat{\sigma}(t)} f(t) + \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} \int_{t_f}^t K_{\hat{\sigma}(t)}(t, \tau) f(\tau) d\tau = \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t), \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda_{\hat{\sigma}(t)} &= E_{12_{\hat{\sigma}(t)}}, \\ \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} &= E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^*, \\ K_{\hat{\sigma}(t)}(t, \tau) &= \exp(\Lambda_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}(t - t_f - \tau)) E_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}}, \\ \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t) &= \hat{x}_{12}(t) - A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} \hat{x}_{11}(t) - A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} \hat{x}_{12}(t) - B_{2_{\hat{\sigma}(t)}} \mathbf{u} \\ &\quad + E_{12_{\hat{\sigma}(t)}} K_{1_{\hat{\sigma}(t)}}^* \hat{x}_{21}(t) + e_{21}(t_{\hat{\sigma}^*}) \exp(\Lambda_{L_{2_{\hat{\sigma}(t)}}} t) + \epsilon(t). \end{aligned}$$

El problema de FId se puede resolver encontrando la solución de (4.17), i.e.  $f(t)$ ; tomando en cuenta que los parámetros  $\Lambda_{\hat{\sigma}(t)}$ ,  $\Gamma_{\hat{\sigma}(t)}$ ,  $K_{\hat{\sigma}(t)}(t, \tau)$ , y  $\Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t)$ <sup>1</sup> son conocidos. Es bien sabido que encontrar una solución analítica para este tipo de ecuaciones es muy difícil, algunas veces *impossible*; además, la alternativa numérica requiere un gasto computacional importante. En este trabajo, se presenta la siguiente solución numérica.

Considere la representación en tiempo discreto, en un intervalo de tiempo  $[t_f, t_f + T]$ ; de (4.17), i.e.

$$\Lambda_{\hat{\sigma}(t)} f(t_i) + \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} \sum_{k=1}^N K_{\hat{\sigma}(t)}(t_i, t_k) f(t_k) = \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t_i), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (4.18)$$

donde  $t_i = t_f + \zeta i$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ , y  $\zeta = \frac{T}{N}$ . De este modo, (4.18) se puede reescribir como:

$$\mathbf{K}_{\hat{\sigma}(t)}(\Lambda, \delta\Gamma, \mathbf{K}) \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t_1) \\ \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t_2) \\ \vdots \\ \Phi_{\hat{\sigma}(t)}(t_N) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

donde

$$\mathbf{K}_{\hat{\sigma}(t)}(\Lambda, \delta\Gamma, \mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \Lambda_{\hat{\sigma}(t)} + \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_1, t_1) & \cdots & \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_1, t_N) \\ \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_2, t_1) & \cdots & \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_2, t_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_N, t_1) & \cdots & \Lambda_{\hat{\sigma}(t)} + \zeta \Gamma_{\hat{\sigma}(t)} K_{\hat{\sigma}(t)}(t_N, t_N) \end{bmatrix}.$$

El problema de FId se reduce entonces al de resolver una ecuación matricial de la forma  $\mathbf{K}f = \Phi$ , para  $f$ . No obstante, el problema puede ser mal-condicionado (*ill-conditioned*), si la condición de número (*condition number*) asociada con (4.19) es grande.

La condición de número de una matriz proporciona una medida de sensibilidad, de la solución de un sistema de ecuaciones lineales; a errores en los datos. También proporciona un indicador de la exactitud de los resultados debidos a la inversión matricial. Valores de la condición de número cercanos a 1, indican un problema bien-condicionado (*well-conditioned*). La condición de número puede ser vista como la velocidad con la cual, la solución  $f$ ; cambiará debido a  $\Phi$ . Por lo tanto, si la condición de número es grande, pequeños errores en  $\Phi$  pueden ocasionar errores muy grandes en  $f$ . En el otro extremo, si la condición de número es pequeña, el error en  $f$  no será mucho más grande que el error en  $\Phi$ .

<sup>1</sup> El término  $\epsilon(t) = \hat{e}_{12}(t) - A_{21_{\hat{\sigma}(t)}} e_{11}(t) - A_{22_{\hat{\sigma}(t)}} e_{12}(t)$  contiene todos los errores computacionales producidos por el proceso de estimación de estado continuo. Teóricamente, para los estados  $\bar{x}_{11}(t)$  y  $\bar{x}_{12}(t)$ , se tiene una estimación exacta.

**Nota Importante 4.3** La condición de número está directamente relacionada con la condición de identificabilidad de la falla. Es claro que una buena condición de número, i.e. cerca de 1, permitirá resolver el problema de FId.

Para reducir la condición de número de  $\mathbf{K}$ , es posible obtener una matriz  $\mathbf{P}$  (*preconditioner*), tal que la matriz  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}$  tiene una condición de número más pequeña  $\mathbf{K}$ . Sin embargo,  $\mathbf{P}$  no puede ser expresada explícitamente. Esta tiene que ser calculada con métodos iterativos (ver, e.g. [16]).

#### 4.5 EJEMPLO NUMÉRICO

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.001 [seg].

Considere el mismo ejemplo dado en la Sección 2.6, Capítulo 2. Bajo las mismas condiciones y con los mismos parámetros de diseño, se puede calcular, por medio de simulaciones; la señal de residuo  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$ . El comportamiento del criterio de ocurrencia de falla  $r_{\hat{\sigma}(t)}^+(t)$ , para el caso libre de falla, i.e.  $f(t) = 0$ , se muestra en la Figura 4.1.

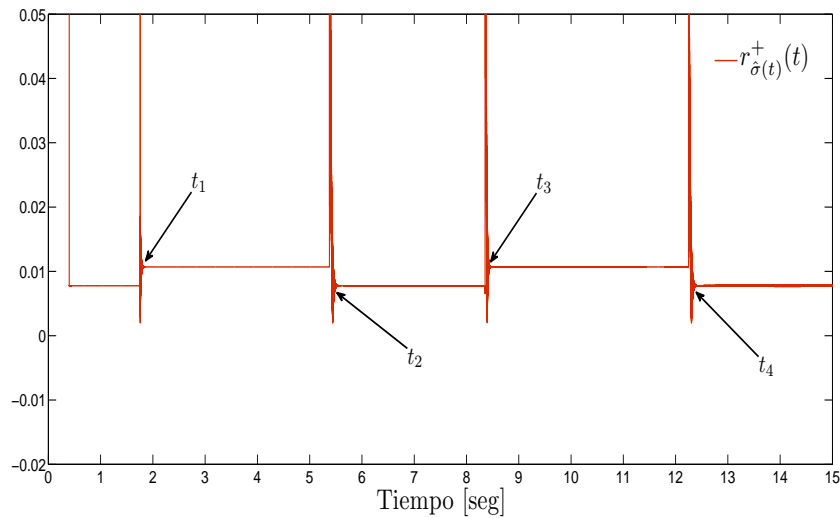


Figura 4.1: Criterio de Ocurrencia de Falla - Caso sin Falla. Es claro que en los instantes de conmutación, la condición (4.10) no se satisface, como se menciona en la Nota 4.2.

Considere ahora que ocurre una falla en el instante de tiempo  $t = 5$ [seg]. La norma de la señal de residuo  $r_{\hat{\sigma}(t)}(t)$ , para diferentes tipos de falla (oscilatoria, abrupta, incipiente e intermitente), se muestra en la Figura 4.2.

Finalmente, los resultados, para cada tipo de falla, del esquema de FId propuesto en (4.19), se muestra en la Figura 4.3.

#### 4.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una solución al problema de FDI en cierta clase de SLC. La estrategia consiste en un generador de residuos, proporcionado por un banco de observadores HOSM para resolver el problema de FD; mientras que la solución de una EIV establece el esquema de FId. Resultados de simulación avalan los métodos propuestos para diferentes tipos de fallas.

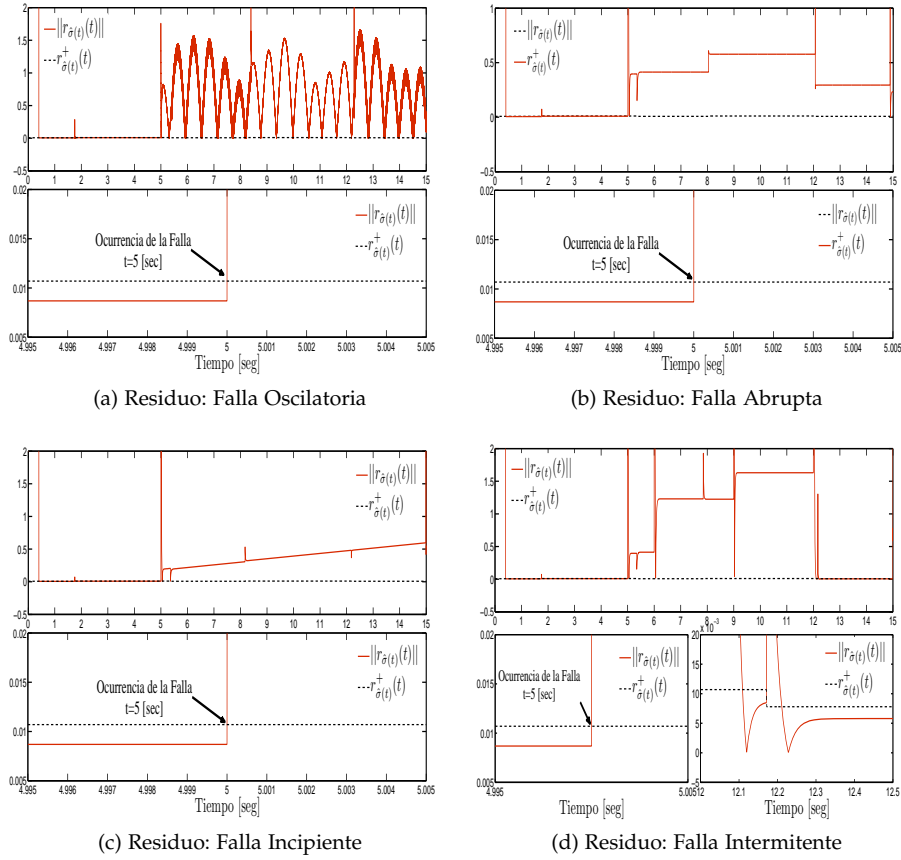


Figura 4.2: Criterio de Ocurrencia de Falla - Caso con Fallas. El término  $\|r_{\delta(t)}(t)\|$  indica cuando ha ocurrido la falla una vez que su valor excede el threshold  $r_{\delta(t)}^+(t)$ . Es claro que las fallas son detectadas, casi, de forma inmediata. Para la falla intermitente, [Figura 4.2d](#), el término  $\|r_{\delta(t)}(t)\|$  permanece por debajo del threshold  $r_{\delta(t)}^+(t)$ , una vez que la falla desaparece.



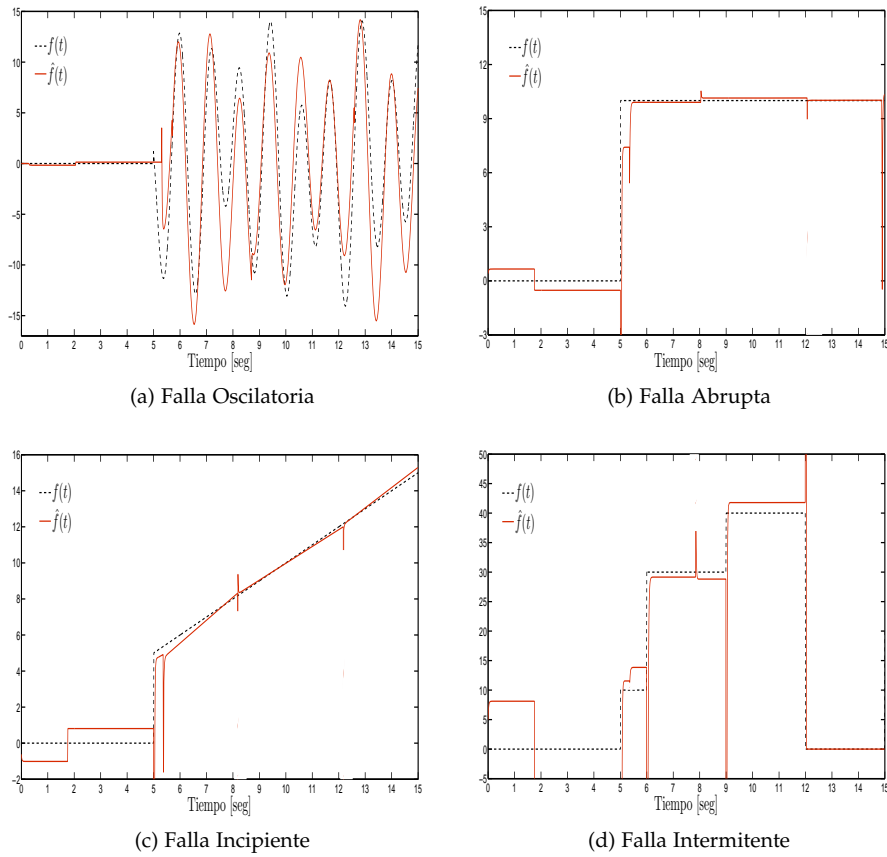


Figura 4.3: Identificación de Fallas. El esquema de FId proporciona una estimación aproximada de la falla  $f(t)$ . Es posible mejorar dicha estimación disminuyendo los errores computacionales (paso de muestreo), y mejorando la condición de número de la matriz  $\mathbf{K}_{\hat{\sigma}(t)}(\Lambda, \delta\Gamma, \mathbf{K})$ .

*Serenidad para aceptar  
las cosas que no puedo cambiar,  
valor para cambiar las cosas que puedo,  
y sabiduría para conocer la diferencia.*

— Reinhold Niebuhr

# 5

## SNL: FDI BASADA EN MULTI-OBSERVADORES HOSM

---

*Un problema de FDI para cierta clase de SNL se presenta en este capítulo. Se propone, bajo ciertas propiedades estructurales del sistema, un esquema multi-observador para resolver el problema. El valor de la inyección equivalente es usado para FD, mientras que el esquema multi-modelo para realizar FI. El método proporciona una rápida detección y aislamiento de fallas en actuadores y en componentes. Un ejemplo numérico ilustra la efectividad del esquema propuesto.*

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Inicialmente la investigación del problema de FDI se direccionó hacia los SL, sin embargo, en las últimas décadas se han realizado diferentes estudios dirigidos hacia SNL. Particularmente, los esquemas de FDI basados en observador han tenido un mayor auge. En [24], [68], y [28]; se describen esquemas basados en geometría diferencial, esquemas algebraicos, esquemas de control por realimentación, para FD, respectivamente. Por otro lado, esquemas basados en estimación adaptable también han sido desarrollados para FD, generación de residuos y FTC (ver e.g. [65], [19] y [29]).

En el contexto de SMC las contribuciones más recientes se han presentado en [66], [3], [55], y [4]. La mayoría de estos trabajos formulan el problema de FDI como un problema de reconstrucción de entradas desconocidas con grado relativo uno. En este capítulo se explotan las cualidades de los observadores HOSM y se usa un esquema multi-modelo que permite aislar fallas, incluso si el grado relativo cambia debido a dichas fallas.

El esquema multi-modelo presenta varias ventajas para el desarrollo de métodos de FDI en sistemas complejos (ver e.g. [45], [60] y [54]). La razón principal para usar este tipo de esquemas radica en que muchas veces no resulta práctico representar el comportamiento del sistema, en casos de fallas; por medio de un sólo modelo. La idea principal de este esquema es crear un conjunto de modelos que contengan todas las posibles fallas en el sistema en forma de *modelos locales* o *sub-modelos*, además del modelo libre de falla. Las fallas son identificadas por medio de la estimación del modelo activo. Es evidente que algunas aplicaciones requieren un gran número de modelos para representar todas las posibles fallas, lo que resulta en un costo computacional elevado. No obstante, el esquema multi-modelo ha sido aplicado en muchos problemas de FDI en sistemas aeroespaciales,

incluyendo sistemas de control de vuelo en aviones [46], [17]; y en sistemas de navegación [64].

Motivados por todo esto, y tomando en cuenta que el esquema multi-modelo ha sido muy exitoso, en este capítulo se hace uso de multi-observadores HOSM para estimar el estado del sistema en tiempo finito, se explota la información de la *inyección equivalente* para resolver el problema de FD, y finalmente; usando el esquema multi-modelo se resuelve el problema de FI.

## 5.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema no lineal sujeto a fallas, *i.e.*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + Bu(t) + F_k(x(t))\omega_k(t), \quad k = 1, \dots, q, \\ y(t) &= h(x(t)), \quad \psi(t) = y(t) + n(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{R}^p$  es el vector de entradas,  $y(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathfrak{R}^m$  el vector de salidas, y  $n(t) \in \mathfrak{R}^m$  representa ruido medible en el sentido de *Lebesgue*. La variable  $\psi(t)$  representa la verdadera información que se obtiene de las mediciones de salida. El campo vectorial  $f(x(t))$ , y la función  $h(x(t)) = [h_1(x(t)) \cdots h_m(x(t))]^T$  se asumen suficientemente suaves; mientras que  $B = [B_1 \cdots B_p] \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  es una matriz constante y conocida.

Se considera que los escenarios de fallas son conocidos a-priori, y que sus efectos pueden ser modelados por medio de términos aditivos, *i.e.*

$$F_k(x(t))\omega_k(t) \in \mathcal{F}, \quad \text{donde } \mathcal{F} = \{F_1(x(t))\omega_1(t), \dots, F_q(x(t))\omega_q(t)\}.\tag{5.2}$$

Por lo tanto, existen  $q$  posibles casos de fallas representados por  $q$  términos de falla  $F_k(x(t))\omega_k(t)$ . Dichos términos de falla pueden cambiar las propiedades del sistema (*fallas en componentes*), y/o las propiedades de la entrada del sistema (*fallas en actuadores*). Se asume que  $\omega_k(t) \in \mathfrak{R}^m$ , y los  $m$  campos vectoriales de  $F_k(x(t))$ , *i.e.*  $F_k(x(t)) = [F_{k_1}(x(t)), \dots, F_{k_m}(x(t))]$ , son suaves, casi en todos lados (a.e.). Todas las posibles fallas permiten la existencia y unicidad de las soluciones para todo  $t \geq 0$ .

Los problemas que se analizarán son los siguientes:

1. Detección de Fallas.
2. Aislamiento de Fallas.

## 5.3 MULTI-OBSERVADORES HOSM

En esta sección serán estudiados los diferentes tipos de fallas, así como el caso libre de fallas; que pueden aparecer en el sistema (5.1). Entonces, se establecen las condiciones para diseñar los observadores, en cada uno de los casos.

### 5.3.1 Caso Libre de Falla

El sistema (5.1), para el caso libre de fallas, toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + Bu(t), \\ y(t) &= h(x(t)), \quad \psi(t) = y(t) + n(t).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Considere que las siguientes suposiciones se satisfacen.

**Suposición 5.1** Los campos vectoriales  $f$ , las matrices  $B$ , y las funciones  $h$ , son tales que  $\forall x \in \mathcal{X}$ , se satisface que:

$$\begin{aligned} d(L_{f(x)}^k h_i(x))B_j &= 0, \quad \forall k < r_i - 1, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, p, \\ d(L_{f(x)}^{r_i-1} h_i(x))B_j &\neq 0, \quad \text{para al menos una } 1 \leq j \leq p, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Defina los siguientes mapeos y sus correspondientes matrices Jacobianas

$$\Phi(x(t)) = \begin{bmatrix} h_1(x(t)) \\ L_{f(x(t))} h_1(x(t)) \\ \vdots \\ L_{f(x(t))}^{r_1-1} h_1(x(t)) \\ \vdots \\ h_m(x(t)) \\ L_{f(x(t))} h_m(x(t)) \\ \vdots \\ L_{f(x(t))}^{r_m-1} h_m(x(t)) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \Phi(x(t))}{\partial x(t)} = \begin{bmatrix} dh_1(x(t)) \\ dL_{f(x(t))} h_1(x(t)) \\ \vdots \\ dL_{f(x(t))}^{r_1-1} h_1(x(t)) \\ \vdots \\ dh_m(x(t)) \\ dL_{f(x(t))} h_m(x(t)) \\ \vdots \\ dL_{f(x(t))}^{r_m-1} h_m(x(t)) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

La [Suposición 5.2](#) implica que  $r_1 + \dots + r_m = n$ .

**Suposición 5.2** Asuma que la matriz Jacobiana en (5.5) es tal que  $\text{rank} \left( \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right) = n$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ . Más aún, el mapeo  $\Phi(x)$  es un difeomorfismo  $\forall x \in \mathcal{X}$ .

Con base en estas suposiciones, es posible diseñar el siguiente observador

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t)) + B u(t) + \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^{-1} v(t), \\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

Previamente, en el [Capítulo 3](#), [Sección 3.3](#), se ha presentado este observador para el caso SISO.

donde  $\bar{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el estado estimado,  $\bar{y}(t) \in \mathfrak{R}$  la salida estimada, y los términos de corrección se representan con  $v(t) \in \mathfrak{R}^n$ . Las soluciones de (5.6), se entienden en el sentido de [A. Filipov \[30\]](#), para proporcionar la posibilidad de usar señales discontinuas en el observador, y que las soluciones coincidan con las soluciones usuales; cuando el lado derecho es continuo. También se asume que los términos de corrección permiten la existencia y extensión de soluciones para todo  $t \geq 0$ .

La siguiente suposición asegura la estimación exacta y en tiempo finito.

**Suposición 5.3** Existen constantes conocidas  $\{M_i\}_{i=1}^m > 0$ ; tales que, la siguiente desigualdad se satisface:

$$\left| \left\{ L_{f(\bar{x})}^{r_i} h_i(\bar{x}) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x) \right\}_{i=1}^m \right| < \{M_i\}_{i=1}^m.$$

Como se mencionó en la [Sección 3.3](#), para que el sistema satisfaga la [Suposición 5.3](#), es necesario que el sistema sea BIBS; o que sea posible estabilizarlo de alguna manera.

Los términos de corrección  $v(t)$  serán diseñados haciendo uso del diferenciador HOSM, como una dinámica auxiliar, *i.e.*

El comportamiento del diferenciador HOSM (5.7), con presencia de ruido, se describe en la [Sección A.3](#), [Apéndice A](#).

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_{1,1} &= \vartheta_{1,2} - \alpha_{1,1} M_1^{\frac{1}{r_1}} [e_{y_1}(t)]^{\frac{r_1-1}{r_1}}, \\
\dot{\vartheta}_{1,j} &= \vartheta_{1,j+1} - \alpha_{1,j} M_1^{\frac{1}{r_1-j+1}} [\vartheta_{1,j} - \dot{\vartheta}_{1,j-1}]^{\frac{r_1-j}{r_1-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_1 - 1, \\
\dot{\vartheta}_{1,r_1} &= -\alpha_{1,r_1} M_1 [\vartheta_{1,r_1} - \dot{\vartheta}_{1,r_1-1}]^0, \\
&\vdots \\
\dot{\vartheta}_{m,1} &= \vartheta_{m,2} - \alpha_{m,1} M_m^{\frac{1}{r_m}} [e_{y_m}(t)]^{\frac{r_m-1}{r_m}}, \\
\dot{\vartheta}_{m,j} &= \vartheta_{m,j+1} - \alpha_{m,j} M_m^{\frac{1}{r_m-j+1}} [\vartheta_{m,j} - \dot{\vartheta}_{m,j-1}]^{\frac{r_m-j}{r_m-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_m - 1, \\
\dot{\vartheta}_{m,r_m} &= -\alpha_{m,r_m} M_m [\vartheta_{m,r_m} - \dot{\vartheta}_{m,r_m-1}]^0, \tag{5.7}
\end{aligned}$$

donde  $\{e_{y_i}(t)\}_{i=1}^m = \{\bar{y}_i(t) - \psi_i(t)\}_{i=1}^m$ , son los errores de salida. Entonces, los términos de corrección se extraen de (5.7) como:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_{1,1} M_1^{\frac{1}{r_1}} [e_{y_1}(t)]^{\frac{r_1-1}{r_1}} \\ -\alpha_{1,j} M_1^{\frac{1}{r_1-j+1}} [\vartheta_{1,j} - \dot{\vartheta}_{1,j-1}]^{\frac{r_1-j}{r_1-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_1 - 1 \\ -\alpha_{1,r_1} M_1 [\vartheta_{1,r_1} - \dot{\vartheta}_{1,r_1-1}]^0 \\ \vdots \\ -\alpha_{m,1} M_m^{\frac{1}{r_m}} [e_{y_m}(t)]^{\frac{r_m-1}{r_m}} \\ -\alpha_{m,j} M_m^{\frac{1}{r_m-j+1}} [\vartheta_{m,j} - \dot{\vartheta}_{m,j-1}]^{\frac{r_m-j}{r_m-j+1}}, \quad i = 2, \dots, r_m - 1 \\ -\alpha_{m,r_m} M_m [\vartheta_{m,r_m} - \dot{\vartheta}_{m,r_m-1}]^0 \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Las constantes  $\{M_i\}_{i=1}^m$  son elegidas de acuerdo a la [Suposición 5.3](#), mientras que las constantes  $\{\alpha_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$  se eligen recursivamente de acuerdo con [A. Levant](#) (ver [Subsección 2.4.1](#)).

Tomando en cuenta el diseño del observador, se puede establecer el siguiente lema:

**Lema 5.1** *Considere que el observador (5.6), con los términos de corrección (5.8), es aplicado al sistema (5.3); y que las Suposiciones 5.1-5.3 se satisfacen. Entonces, siempre que las constantes  $\{\alpha_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$  sean elegidas apropiadamente, y  $\{M_i\}_{i=1}^m$  satisfagan la [Suposición 5.3](#), el error de estimación de estado, convergerá a una  $\beta$ -vecindad del origen; en tiempo finito, i.e.  $\|e(t)\| = \|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq \beta$ , para  $\beta > 0^t$  y,  $\forall t \in [t^*, t_1]^2$   $\#$*

**Prueba:** Defina  $\{\bar{y}_i^{(j-1)}(t) - y_i^{(j-1)}(t)\}_{i=1,j=1}^{m,r_i} = \{M_i \epsilon_{i,j}(t)\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$ . Entonces, la dinámica del error de salida, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
M_1 \dot{\epsilon}_{1,1} &= M_1 \epsilon_{1,2} - \alpha_{1,1} M_1^{\frac{1}{r_1}} [M_1 \epsilon_{1,1} - n_1(t)]^{\frac{r_1-1}{r_1}}, \\
M_1 \dot{\epsilon}_{1,j} &= M_1 \epsilon_{1,j+1} - \alpha_{1,j} M_1^{\frac{1}{r_1-j+1}} [M_1 \epsilon_{1,j} - M_1 \dot{\epsilon}_{1,j-1}]^{\frac{r_1-j}{r_1-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_1 - 1, \\
M_1 \dot{\epsilon}_{1,r_1} &= \Psi_1(\bar{x}, x, u) - \alpha_{1,r_1} M_1 [M_1 \epsilon_{1,r_1} - M_1 \dot{\epsilon}_{1,r_1-1}]^0, \\
&\vdots \\
M_m \dot{\epsilon}_{m,1} &= M_m \epsilon_{m,2} - \alpha_{m,1} M_m^{\frac{1}{r_m}} [M_m \epsilon_{m,1} - n_m(t)]^{\frac{r_m-1}{r_m}}, \\
M_m \dot{\epsilon}_{m,j} &= M_m \epsilon_{m,j+1} - \alpha_{m,j} M_m^{\frac{1}{r_m-j+1}} [M_m \epsilon_{m,j} - M_m \dot{\epsilon}_{m,j-1}]^{\frac{r_m-j}{r_m-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_m - 1, \\
M_m \dot{\epsilon}_{m,r_m} &= \Psi_m(\bar{x}, x, u) - \alpha_{m,r_m} M_m [M_m \epsilon_{m,r_m} - M_m \dot{\epsilon}_{m,r_m-1}]^0, \tag{5.9}
\end{aligned}$$

1 El parámetro  $\beta$  dependerá de la amplitud del ruido y de los parámetros de diseño del observador.

2  $t^*$  es el tiempo en el cual el observador ha convergido a cero.

donde  $\{\Psi_i(\bar{x}, x, u)\}_{i=1}^m = \left\{ L_{f(\bar{x})}^{r_i} h_i(\bar{x}) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x) \right\}_{i=1}^m$ . Dividiendo (5.9) por  $M_i$ , se obtienen las siguientes inclusiones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{1,1} &= \epsilon_{1,2} - \alpha_{1,1} \left[ \epsilon_{1,1} - n_1(t)/M_1 \right]^{\frac{r_1-1}{r_1}}, \\ \dot{\epsilon}_{1,j} &= \epsilon_{1,j+1} - \alpha_{1,j} \left[ \epsilon_{1,j} - \dot{\epsilon}_{1,j-1} \right]^{\frac{r_1-j}{r_1-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_1 - 1, \\ \dot{\epsilon}_{1,r_1} &\in [-1, 1] - \alpha_{1,r_1} \left[ \epsilon_{1,r_1} - \dot{\epsilon}_{1,r_1-1} \right]^0, \\ &\vdots \\ \dot{\epsilon}_{m,1} &= \epsilon_{m,2} - \alpha_{m,1} \left[ \epsilon_{m,1} - n_m(t)/M_m \right]^{\frac{r_m-1}{r_m}}, \\ \dot{\epsilon}_{m,j} &= \epsilon_{m,j+1} - \alpha_{m,j} \left[ \epsilon_{m,j} - \dot{\epsilon}_{m,j-1} \right]^{\frac{r_m-j}{r_m-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_m - 1, \\ \dot{\epsilon}_{m,r_m} &\in [-1, 1] - \alpha_{m,r_m} \left[ \epsilon_{m,r_m} - \dot{\epsilon}_{m,r_m-1} \right]^0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde la forma del último renglón de cada bloque de inclusión se debe a la [Suposición 5.3](#), i.e.  $\{\Psi_i(\bar{x}, x, u)\}_{i=1}^m \in \{[-M_i, M_i]\}_{i=1}^m$ . Por lo tanto, del Teorema (Diferenciador HOSM con ruido), existen parámetros  $\{\alpha_{i,k}\}_{i=1,k=1}^{m,r_i}$  y un tiempo  $t^* > 0$  tal que, para todo  $t \geq t^*$

$$\left| \{\epsilon_{i,j}(t)\}_{i=1,j=1}^{m,r_i} \right| \leq \left\{ \xi_{i,j} M_i \gamma_i^{r_i-j+1} \right\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}, \quad (5.11)$$

para algunas constantes positivas  $\{\xi_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$  y  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ . Entonces, de acuerdo con [A. Levant \[39\]](#), cada elemento de la dinámica (5.10), converge a una región cerca de cero, proporcional a la magnitud del ruido; en tiempo finito. Note que cada  $\epsilon_{i,k}(t)$  se encuentra acotada por  $\xi_{i,j} M_i \gamma_i^{r_i-j+1}$ , en otros palabras; cada  $\epsilon_{i,j}(t)$  se encuentra dentro de una vecindad de radio  $\xi_{i,j} M_i \gamma_i^{r_i-j+1}$ . Así, de acuerdo con la [Suposición 5.2](#); es posible encontrar una  $\beta$ -vecindad de  $x$ , i.e.

$$N(x, \beta) = \{\bar{x}(t) \in \mathfrak{R}^n \mid \|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \beta\}. \quad (5.12)$$

Es claro que el valor de  $\beta$  dependerá de las constantes  $\{\xi_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$  y de la manera en que los elementos de  $v$  se combinan debido a la matriz  $\left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^{-1}$ . No obstante,  $\beta$  siempre puede ser calculada ya que depende de los parámetros del observador y de la amplitud del ruido.  $\square$

Para conocer cuando ha convergido el observador a la  $\beta$ -vecindad, como se vio en la [Subsección 3.4.1, Capítulo 3](#); es suficiente con verificar que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\|e_y(t)\| \leq \xi M^+ \gamma^{r^+}, \quad \forall t \in [0, \xi_t h], \quad (5.13)$$

donde  $e_y(t) = \bar{y}(t) - \psi(t)$ ,  $\xi$  y  $\xi_t$  son constantes positivas,  $\gamma$  es una constante positiva tal que  $\|n(t)\| \leq k_n M^+ \gamma^{r^+}$  y  $h \leq k_h \gamma$ , con  $k_n, k_h$  constantes positivas (ver el [Teorema A.1, Sección A.3, Apéndice A](#));  $M^+ = \max_{i=1, \dots, m} (M_i)$ , y  $r^+ = \max_{i=1, \dots, m} (r_i)$ . Por lo tanto, cuando (5.13) se satisfaga, el observador habrá convergido, y  $t^* = \xi_t h$ .

*Las constantes positivas  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$  son tales que  $|\{n_i(t)\}_{i=1}^m| \leq \{k_{n_i} M_i \gamma_i^{r_i}\}_{i=1}^m$  y  $h \leq k_h \gamma$ , con  $k_{n_i}, k_h$  constantes positivas (ver el [Teorema A.1, Sección A.3, Apéndice A](#)).*

*Es natural estimar las constantes  $\xi, \xi_t$ ; a través de simulaciones.*

### 5.3.2 Caso de Falla en Componentes

Considere que el sistema (5.1) presenta fallas en componentes, i.e.  $F_k(x(t))\omega_k(t) = \Delta_k f_k(x(t))$ , donde  $\Delta_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz de distribución y  $f_k(x(t))$  son campos vectoriales que contienen dicha falla. De este modo, el sistema (5.1) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\Delta,k}(x(t)) + Bu(t), \\ y(t) &= h(x(t)), \quad \psi(t) = y(t) + n(t), \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde  $f_{\Delta,k}(x(t)) = f(x(t)) + \Delta_k f_k(x(t))$ . Se asume que la [Suposición 5.1](#) y [Suposición 5.2](#) se satisfacen para el nuevo campo vectorial  $f_{\Delta,k}(x(t))$ . Entonces, es posible diseñar el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= f_{\Delta,k}(\bar{x}(t)) + Bu(t) + \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^{-1} v(t), \\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t)),\end{aligned}\tag{5.15}$$

donde los términos de corrección  $v(t)$  se diseñan de acuerdo a [\(5.8\)](#), con un nuevo conjunto de ganancias  $\left\{ M_{i,f_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m$ , satisfaciendo la siguiente suposición.

**Suposición 5.4** *Existen constantes conocidas  $\left\{ M_{i,f_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m > 0$ ; tales que, la siguiente desigualdad se satisface:*

$$\left| \left\{ L_{f_{\Delta,k}(\bar{x})}^{r_i} h_i(\bar{x}) - L_{f_{\Delta,k}(x)}^{r_i} h_i(x) \right\}_{i=1}^m \right| < \left\{ M_{i,f_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m.$$

Entonces, de acuerdo al [Lema 5.1](#), el error de estimación de estado convergerá a una  $\beta_{f_{\Delta,k}}$ -vecindad, proporcional a la magnitud del ruido; en tiempo finito, *i.e.*  $\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \beta_{f_{\Delta,k}}$ , para  $\beta_{f_{\Delta,k}} > 0$  y  $\forall t > t_{f_{\Delta,k}}^*$ <sup>3</sup>.

### 5.3.3 Caso de Falla en Actuadores

Considere que el sistema [\(5.1\)](#) tiene alguna falla en actuadores, *i.e.*  $F_k(x(t))\omega_k(t) = B_{\alpha_k}u(t)$ , donde  $B_{\alpha_k}$  son matrices conocidas que reflejan el nivel de falla. Así, el sistema [\(5.1\)](#) presenta la siguiente estructura

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + B_{\Delta,k}u(t), \\ y(t) &= h(x(t)), \quad \psi(t) = y(t) + n(t),,\end{aligned}\tag{5.16}$$

donde  $B_{\Delta,k} = B + B_{\alpha_k}$ . Asumiendo que la [Suposición 5.1](#) y [Suposición 5.2](#) se satisfacen para la nueva matriz  $B_{\Delta,k}$ , entonces; se puede diseñar el siguiente observador:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= f(\bar{x}(t)) + B_{\Delta,k}u(t) + \left( \frac{\partial \Phi(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^{-1} v(t), \\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t)),\end{aligned}\tag{5.17}$$

donde los términos de corrección  $v(t)$  se diseñan de acuerdo a [\(5.8\)](#), para un conjunto de ganancias  $\left\{ M_{i,B_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m$ , satisfaciendo la siguiente suposición.

**Suposición 5.5** *Existen constantes conocidas  $\left\{ M_{i,B_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m > 0$ ; tales que, la siguiente desigualdad se satisface:*

$$\left| \left\{ L_{f(\bar{x})}^{r_i} h_i(\bar{x}) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x) \right\}_{i=1}^p \right| < \left\{ M_{i,B_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m.$$

Por lo tanto, de acuerdo al [Lema 5.1](#), el error de estimación de estado convergerá a una  $\beta_{B_{\Delta,k}}$ -vecindad, proporcional a la magnitud del ruido; en tiempo finito, *i.e.*  $\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \beta_{B_{\Delta,k}}$ , para  $\beta_{B_{\Delta,k}} > 0$  y  $\forall t > t_{B_{\Delta,k}}^*$ <sup>4</sup>.

<sup>3</sup>  $t_{f_{\Delta,k}}^*$  es el tiempo de convergencia del observador [\(5.15\)](#), a la  $\beta_{f_{\Delta,k}}$ -vecindad, defina por las constantes  $\left\{ \xi_{i,j} \right\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$ , las ganancias  $\left\{ M_{i,f_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m$ , y la amplitud del ruido.

<sup>4</sup>  $t_{B_{\Delta,k}}^*$  es el tiempo de convergencia del observador [\(5.17\)](#), a la  $\beta_{B_{\Delta,k}}$ -vecindad, defina por las constantes  $\left\{ \xi_{i,j} \right\}_{i=1,j=1}^{m,r_i}$ , las ganancias  $\left\{ M_{i,B_{\Delta,k}} \right\}_{i=1}^m$ , y la amplitud del ruido.

### 5.3.4 Banco de Observadores

De acuerdo a lo propuesto en la [Subsección 5.3.1](#), [Subsección 5.3.2](#) y [Subsección 5.3.3](#), es posible diseñar el siguiente banco de  $q + 1$  observadores HOSM, i.e.

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_\sigma(t) &= f_\sigma(\bar{x}_\sigma(t)) + B_\sigma u(t) + \left( \frac{\partial \Phi_\sigma(\bar{x}_\sigma(t))}{\partial \bar{x}_\sigma(t)} \right)^{-1} v_\sigma(t), \\ \bar{y}_\sigma(t) &= h(\bar{x}_\sigma(t)),\end{aligned}\quad (5.18)$$

Para que todas las trayectorias generadas por los observadores (5.18) estén bien definidas, se asume que la [Suposición 3.1](#) y la [Suposición 3.4](#) se satisfacen.

con el vector de estados estimados  $\bar{x}_\sigma(t) \in \mathfrak{R}^n$ , la salidas estimadas  $\bar{y}_\sigma(t) \in \mathfrak{R}^m$ , y los términos de corrección  $v_\sigma \in \mathfrak{R}^n, \forall \sigma = 0, 1, \dots, q$ . La estructura de  $f_\sigma$  y  $B_\sigma$  dependerá del tipo de falla que se considere<sup>5</sup>.

**Nota Importante 5.1** El vector de grado relativo  $(r_1, \dots, r_m)$  puede cambiar debido a las diferentes fallas. Sin embargo, mientras la [Suposición 5.1](#) y la [Suposición 5.2](#), se satisfagan, siempre será posible diseñar un observador que converja en tiempo finito.

## 5.4 DETECCIÓN Y AISLAMIENTO DE FALLAS

Defina el error de estimación de salida como:

$$\left\{ \bar{y}_{\sigma_i}^{(j-1)}(t) - y_i^{(j-1)}(t) \right\}_{i=1, j=1}^{m, r_i} = \left\{ \epsilon_{\sigma_i, j}(t) \right\}_{i=1, j=1}^{m, r_i}, \quad \forall \sigma = 0, 1, \dots, q. \quad (5.19)$$

Suponga que el escenario activo es el correspondiente al caso libre de falla. Por lo tanto, la dinámica del error de salida, entre el sistema (5.3) y el observador  $\sigma = 0$ ; está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{0,1} &= \epsilon_{0,2} - \alpha_{1,1} M_{0,1}^{-1} \left[ \epsilon_{0,1} - v_1(t) \right]^{\frac{r_1-1}{r_1}}, \\ \dot{\epsilon}_{0,j} &= \epsilon_{0,j+1} - \alpha_{1,j} M_{0,1}^{\frac{1}{r_1-j+1}} \left[ \epsilon_{0,j} - \dot{\epsilon}_{0,j-1} \right]^{\frac{r_1-j}{r_1-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_1 - 1, \\ \dot{\epsilon}_{0,r_1} &= L_{f(\bar{x}_0)}^{r_1} h_1(\bar{x}_0) - L_{f(x)}^{r_1} h_1(x) - \alpha_{1,r_1} M_{0,1} \left[ \epsilon_{0,r_1} - \dot{\epsilon}_{0,r_1-1} \right]^0, \\ &\vdots \\ \dot{\epsilon}_{0,m,1} &= \epsilon_{0,m,2} - \alpha_{m,1} M_{0,m}^{-1} \left[ \epsilon_{0,m,1} - v_m(t) \right]^{\frac{r_m-1}{r_m}}, \\ \dot{\epsilon}_{0,m,j} &= \epsilon_{0,m,j+1} - \alpha_{m,j} M_{0,m}^{\frac{1}{r_m-j+1}} \left[ \epsilon_{0,m,j} - \dot{\epsilon}_{0,m,j-1} \right]^{\frac{r_m-j}{r_m-j+1}}, \quad j = 2, \dots, r_m - 1, \\ \dot{\epsilon}_{0,m,r_m} &= L_{f(\bar{x}_0)}^{r_m} h_m(\bar{x}_0) - L_{f(x)}^{r_m} h_m(x) - \alpha_{m,r_m} M_{0,m} \left[ \epsilon_{0,m,r_m} - \dot{\epsilon}_{0,m,r_m-1} \right]^0.\end{aligned}\quad (5.20)$$

La dinámica del error de salida, entre el sistema (5.3) y el resto de los observadores, no presenta una estructura en particular. Sin embargo, si los mapeos de observabilidad son los mismos para cada  $\sigma$ , la dinámica del error correspondiente a cada observador, será igual a (5.20). No obstante, los términos  $\left\{ L_{f(\bar{x}_\sigma)}^{r_i} h_i(\bar{x}_\sigma) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x) \right\}_{i=1}^m$  serán diferentes,  $\sigma \neq 0$ , debido a la estructura del sistema.

De (5.20), todos los términos  $\left\{ \epsilon_{0_i, r_i}(t) \right\}_{i=1}^m$  están afectados directamente por los términos discontinuos  $\left\{ \epsilon_{0_i, r_i}^y(t) \right\}_{i=1}^m = \left\{ \left[ \epsilon_{0_i, r_i} - \dot{\epsilon}_{0_i, r_i-1} \right]^0 \right\}_{i=1}^m$ . Cuando la estimación de estado se alcanza, los términos discontinuos  $\left\{ \epsilon_{0_i, r_i}^y(t) \right\}_{i=1}^m$  toman el valor de la *inyección equivalente*, y, para el caso sin ruido; son iguales a cero en promedio, i.e.

$$\begin{aligned}0 &= -\alpha_{1,r_1} M_{0,1} \epsilon_{0,1,r_1}^{y,eq}(t), \\ 0 &= -\alpha_{2,r_2} M_{0,2} \epsilon_{0,2,r_2}^{y,eq}(t), \\ &\vdots \\ 0 &= -\alpha_{m,r_m} M_{0,m} \epsilon_{0,m,r_m}^{y,eq}(t).\end{aligned}\quad (5.21)$$

<sup>5</sup> El observador  $\sigma = 0$  corresponde al caso libre de falla.



De este modo, tomando en cuenta ahora el efecto del ruido y lo establecido en el [Teorema A.1](#), [Sección A.3](#), [Apéndice A](#); (5.21) se re-escribe como:

$$\begin{aligned}
\xi_{0_1, r_1+1} M_{0_1} \gamma_{0_1}^2 &\geq \left| \alpha_{1, r_1} M_{0_1} \epsilon_{0_1, r_1}^{\vee \text{eq}}(t) \right|, \\
\xi_{0_2, r_2+1} M_{0_2} \gamma_{0_2}^2 &\geq \left| \alpha_{2, r_2} M_{0_2} \epsilon_{0_2, r_2}^{\vee \text{eq}}(t) \right|, \\
&\vdots \\
\xi_{0_m, r_m+1} M_{0_m} \gamma_{0_m}^2 &\geq \left| \alpha_{m, r_m} M_{0_m} \epsilon_{0_m, r_m}^{\vee \text{eq}}(t) \right|.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Entonces, las inyecciones equivalentes satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left| \epsilon_{0_1, r_1}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{0_1, r_1+1}}{\alpha_{1, r_1}} \gamma_{0_1}^2, \quad \forall t > t^* \\
\left| \epsilon_{0_2, r_2}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{0_2, r_2+1}}{\alpha_{2, r_2}} \gamma_{0_2}^2, \quad \forall t > t^* \\
&\vdots \\
\left| \epsilon_{0_m, r_m}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{0_m, r_m+1}}{\alpha_{m, r_m}} \gamma_{0_m}^2, \quad \forall t > t^*.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

De acuerdo con las explicaciones previas, sólo la inyección equivalente que corresponde al observador  $\sigma = 0$  cumplirá las desigualdades (5.23). En general, la dinámica del error de salida generada por el resto de los observadores no tendrá la estructura (5.20), debido a la diferencia entre las dinámicas de cada escenario, y debido también a que el vector de grado relativo puede cambiar en cada escenario, además; la [Suposición 5.1](#), [Suposición 5.2](#), [Suposición 5.4](#) o [Suposición 5.5](#), no necesariamente se satisfacen para un escenario distinto. Consecuentemente, las trayectorias asociadas con los observadores  $\sigma \neq 0$ , serán diferentes de aquellas generadas en el escenario activo, por lo tanto; las inyecciones correspondientes no cumplirán (5.23).

Sin embargo, para el caso particular en el que dos mapeos de observabilidad sean iguales, e.g. para el escenario  $\sigma = 1$ ; ambas dinámicas de error de salida tendrán la estructura (5.20). Por lo tanto, las expresiones para  $\{\epsilon_{1_i, r_i}(t)\}_{i=1}^m$  estarán dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{1_1, r_1} &= L_{f(\bar{x}_1)}^{r_1} h_1(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_1} h_1(x) - \alpha_{1, r_1} M_{1_1} \epsilon_{1_1, r_1}^{\vee}(t), \\
\dot{\epsilon}_{1_2, r_2} &= L_{f(\bar{x}_1)}^{r_2} h_2(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_2} h_2(x) - \alpha_{2, r_2} M_{1_2} \epsilon_{1_2, r_2}^{\vee}(t), \\
&\vdots \\
\dot{\epsilon}_{1_m, r_m} &= L_{f(\bar{x}_1)}^{r_m} h_m(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_m} h_m(x) - \alpha_{m, r_m} M_{1_m} \epsilon_{1_m, r_m}^{\vee}(t).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Es claro que si las ganancias  $\{M_{1_i}\}_{i=1}^m$ , se diseñan tal que  $\{L_{f(\bar{x}_1)}^{r_i} h_i(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x)\}_{i=1}^m \leq \{M_{1_i}\}_{i=1}^m$  se satisface para el escenario  $\sigma = 0$ , entonces; el observa-

donde  $\sigma = 1$  también estimará el estado con un error proporcional a la magnitud del ruido. De este modo, (5.24) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \xi_{1,r_1+1} M_{1_1} \gamma_{1_1}^2 &\geq \underbrace{\left| L_{f(\bar{x}_1)}^{r_1} h_1(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_1} h_1(x) \right|}_{|\varepsilon_{1_1}|} + \left| \alpha_{1,r_1} M_{1_1} \varepsilon_{1_1}^{\vee \text{eq}}(t) \right|, \\ \xi_{1_2,r_2+1} M_{1_2} \gamma_{1_2}^2 &\geq \underbrace{\left| L_{f(\bar{x}_1)}^{r_2} h_2(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_2} h_2(x) \right|}_{|\varepsilon_{1_2}|} + \left| \alpha_{2,r_2} M_{1_2} \varepsilon_{1_2}^{\vee \text{eq}}(t) \right|, \\ &\vdots \\ \xi_{1_m,r_m+1} M_{1_m} \gamma_{1_m}^2 &\geq \underbrace{\left| L_{f(\bar{x}_1)}^{r_m} h_m(\bar{x}_1) - L_{f(x)}^{r_m} h_m(x) \right|}_{|\varepsilon_{1_m}|} + \left| \alpha_{m,r_m} M_{1_m} \varepsilon_{1_m}^{\vee \text{eq}}(t) \right|, \end{aligned}$$

donde  $\{\varepsilon_{1_i}\}_{i=1}^p$  son las diferencias en el modelo correspondientes al observador  $\sigma = 1$  (recuerde que el escenario activo es el  $\sigma = 0$ ).

El siguiente lema establece la clase de fallas que pueden ser detectadas y aisladas, para el caso de mapeos de observabilidad iguales, para diferentes valores de  $\sigma$ .

**Lema 5.2** *Sea el banco de observadores (5.18) aplicado al sistema (5.1)-(5.2). Para toda  $\eta \neq \lambda$ , posibles escenarios del sistema; con la propiedad de tener el mismo mapeo de observabilidad, si las trayectorias  $\{\varepsilon_{\eta_i}\}_{i=1}^m$  y  $\{\varepsilon_{\lambda_i}\}_{i=1}^m$  son suficientemente grandes fuera de su correspondiente escenario, entonces; las fallas  $\eta$  y  $\lambda$  pueden ser detectadas y aisladas por medio de  $\varepsilon_{\eta}^{\vee \text{eq}}(t) = [\varepsilon_{\eta_1,r_1}^{\vee \text{eq}}(t), \dots, \varepsilon_{\eta_m,r_m}^{\vee \text{eq}}(t)]^T$  y  $\varepsilon_{\lambda}^{\vee \text{eq}}(t) = [\varepsilon_{\lambda_1,r_1}^{\vee \text{eq}}(t), \dots, \varepsilon_{\lambda_m,r_m}^{\vee \text{eq}}(t)]^T$ . #*

**Prueba:** Es claro que si los escenarios  $\eta$  y  $\lambda$  tienen el mismo mapeo de observabilidad, sus correspondientes dinámicas de error de salida tendrán la estructura (5.20), y la única diferencia vendrá de los términos  $\{\varepsilon_{\eta_i}\}_{i=1}^m$  y  $\{\varepsilon_{\lambda_i}\}_{i=1}^m$ . Por lo tanto, si la diferencia entre los modelos es suficientemente grande fuera de su correspondiente escenario, entonces; suponiendo que el escenario activo es  $\eta$ , su correspondiente inyección equivalente cumplirá con las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon_{\eta_1,r_1}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{\eta_1,r_1+1} \gamma_{\eta_1}^2}{\alpha_{1,r_1}} < \frac{\xi_{\lambda_1,r_1+1} \gamma_{\lambda_1}^2}{\alpha_{1,r_1}} + \frac{1}{\alpha_{1,r_1} M_{1_1}} |\varepsilon_{\lambda_1}|, \\ \left| \varepsilon_{\eta_2,r_2}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{\eta_2,r_2+1} \gamma_{\eta_2}^2}{\alpha_{2,r_2}} < \frac{\xi_{\lambda_2,r_2+1} \gamma_{\lambda_2}^2}{\alpha_{2,r_2}} + \frac{1}{\alpha_{2,r_2} M_{1_2}} |\varepsilon_{\lambda_2}|, \\ &\vdots \\ \left| \varepsilon_{\eta_m,r_m}^{\vee \text{eq}}(t) \right| &\leq \frac{\xi_{\eta_m,r_m+1} \gamma_{\eta_m}^2}{\alpha_{m,r_m}} < \frac{\xi_{\lambda_m,r_m+1} \gamma_{\lambda_m}^2}{\alpha_{m,r_m}} + \frac{1}{\alpha_{m,r_m} M_{1_m}} |\varepsilon_{\lambda_m}|. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Note que todos los términos que dependen de la amplitud del ruido tienen el mismo orden, i.e.  $O(\gamma_{\lambda_i}^2)$ , por lo tanto; el orden de los términos  $\{\varepsilon_{\lambda_i}\}_{i=1}^m$  tiene que ser notablemente más grande para poder detectar y aislar las fallas  $\eta$  y  $\lambda$ . De este modo, las fallas serán distinguibles por medio de la información de  $\varepsilon_{\eta}^{\vee \text{eq}}(t)$  y  $\varepsilon_{\lambda}^{\vee \text{eq}}(t)$ .  $\square$

De esta manera, como en la Subsección 2.5.3, los términos  $v_{\sigma}(t)$  serán usados para establecer la evaluación de residuos. Los residuos tienen la estructura propuesta en (2.52), i.e.

$$R_{\sigma}(t) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^t r_{\sigma}(\tau) d\tau, \quad \forall \sigma = 0, \dots, q, \quad (5.26)$$

*Para el caso de mapeos de observabilidad diferentes, las desigualdades (5.25) se satisfacen trivialmente.*

*La construcción de los residuos  $r_j(\tau)$  se presenta en (2.50), Subsección 2.5.3.*

donde  $\Delta T$  es una ventana de tiempo a diseñar. Entonces, el criterio de FDI se establece como el valor de  $\hat{\sigma}$  para el cual  $R_{\sigma}(t)$  es mínimo, *i.e.*

$$\hat{\sigma} = \arg \min_{\sigma} R_{\sigma}(t). \quad (5.27)$$

Así,  $\hat{\sigma}$  representa el escenario activo. Evidentemente, cada residuo es sensible, *i.e.* satisface (5.23) o (5.25), dependiendo de los mapeos de observabilidad; únicamente al escenario correspondiente. De este modo, es posible resolver el problema de FDI usando la información de la *inyección equivalente* (detección) y el esquema multi-observador (aislamiento).

**Nota Importante 5.2** De nueva cuenta, la estimación de  $v_{\sigma_{eq}}(t)$  es proporcionada por el filtro paso-bajas propuesto en (2.54), *Subsección 2.5.3*. En este caso, además de otorgar una estimación de  $v_{\sigma_{eq}}(t)$ ; el filtro reduce el efecto del ruido.

**Nota Importante 5.3** Para el caso de que exista una falla fuera de  $\mathcal{F}$ , si esta satisface la *Suposición 5.1*, y las suposiciones correspondientes al caso de falla en componentes o en actuadores, para algún observador previamente diseñado, dicho observador estimará el estado. Sin embargo, las inyecciones equivalentes se verán afectadas por esta falla, y debido a sus propiedades, será posible concluir que una falla fuera de  $\mathcal{F}$  está activa en el sistema, *i.e.* FD pero no FI.

Por el contrario, si la falla no satisface la *Suposición 5.1*, ya sea para el caso de falla en componentes o en actuadores; ningún observador estimará el estado cuando dicha falla esté activa. Sin embargo, la FD aún se podrá llevar a cabo debido a las propiedades de la inyección equivalente.

**Nota Importante 5.4** Para el caso de incertidumbres en el modelo, es evidente que se requiere un estudio más detallado y formal, ya que las incertidumbres afectan directamente, y posiblemente de formas distintas; a los residuos propuestos. Por otro lado, el diseño de residuos tendría que cambiar o tendría que ser necesario realizar un estudio, *e.g.* estadístico; del efecto de las incertidumbres en los residuos, y de esta forma; establecer algunos umbrales (*thresholds*) que permitan realizar el proceso de FDI. Sin embargo, para mostrar que el esquema aquí propuesto puede funcionar, bajo ciertas incertidumbres; se presentan algunos resultados de simulación.

## 5.5 EJEMPLO NUMÉRICO

Considere el sistema MRA de la *Figura 5.1*. La dinámica del sistema se puede

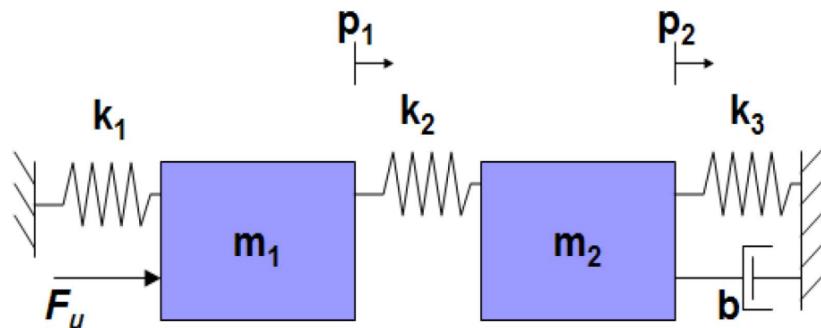


Figura 5.1: Diagrama del Sistema MRA.

representar como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1(t) + \frac{k_2}{m_1} x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{k_2}{m_2} x_1(t) - \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_3(t) - \frac{b}{m_2} \tanh(x_4(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

donde  $x(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ p_2(t) \ \dot{p}_2(t)]^T$  es el vector de estado,  $u(t) = F_u$  es la entrada,  $y(t) = [x_1(t) \ x_3(t)]^T$  el vector de salidas. Los parámetros del sistema MRA se muestran en la [Tabla 5.1](#). Las condiciones iniciales son  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Las variables  $p_1$  y  $p_2$  describen las posiciones,  $F_u$  es la fuerza de entrada actuando en el sistema,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  representan las constantes elásticas de los resortes, y  $b$  es el coeficiente de fricción seca.

Parámetro	Valor	Unidades
$m_1$	1.28	kg
$m_2$	1.05	kg
$k_1$	450	N/m
$k_2$	175	N/m
$k_3$	450	N/m
$b$	15	Ns/m

Tabla 5.1: Parámetros del Sistema MRA.

La simulación consiste de 3 escenarios: el caso libre de falla, seguido de una falla en actuador (10% de su capacidad) a los 5[seg], y finalmente, a los 10[seg] una falla en componentes (resorte 1 completamente dañado) adicional a la falla en actuador. A continuación se diseñan los observadores correspondientes.

Las simulaciones han sido realizadas en MATLAB Simulink, con método de discretización: Euler, y paso de muestreo: 0.001[seg].

## 5.6 OBSERVADOR LIBRE DE FALLA

Considere el caso libre de falla ( $\sigma = 0$ ). Es fácil ver que la matriz Jacobiana (5.5) es  $\frac{\partial \Phi_0(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} = I_4$ , cuyo rango es igual a 4  $\forall \bar{x}_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathfrak{R}^4$ . Por lo tanto, la [Suposición 5.2](#) se satisface. En cuanto a la [Suposición 5.1](#), todo sistema mecánico satisface dicha suposición.

Entonces, el observador  $\sigma = 0$  toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{01}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{02}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{03}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{04}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{02}(t) \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} \bar{x}_{01}(t) + \frac{k_2}{m_1} \bar{x}_{03}(t) \\ \bar{x}_{04}(t) \\ \frac{k_2}{m_2} \bar{x}_{01}(t) - \frac{k_2 + k_3}{m_2} \bar{x}_{03}(t) - \frac{b}{m_2} \tanh(\bar{x}_{04}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \left( \frac{\partial \Phi_0(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0} \right)^{-1} v_0(t),$$

$$\bar{y}_0(t) = [ \bar{x}_{01}(t) \ \bar{x}_{03}(t) ]^T,$$

con condiciones iniciales  $\bar{x}_0(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . Los términos de corrección se diseñan con  $r_1 = r_2 = 2$  (grado relativo correspondiente a cada salida), y; con base en la aceleración del sistema y el error en condiciones iniciales, las ganancias  $M_{01} = 1$  y  $M_{02} = 0.5$  son tales que la 5.3 se satisface para cada salida.

### 5.7 OBSERVADOR FALLA EN ACTUADOR

Considere el caso en el que ocurre una falla en actuador ( $\sigma = 1$ ), correspondiente al 10% de su capacidad, *i.e.*  $F_1(x)\omega_1 = B_{\alpha_1}u$ . De este modo, la dinámica del sistema presenta la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1(t) + \frac{k_2}{m_1}x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{k_2}{m_2}x_1(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_3(t) - \frac{b}{m_2}\tanh(x_4(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ \frac{0.1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Es evidente que el mapeo de observabilidad es el mismo que para el caso libre de falla. Por lo tanto, la [Suposición 5.2](#) y [Suposición 5.1](#) se satisfacen. Entonces, el observador  $\sigma = 1$  toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{12}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{13}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{14}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{12}(t) \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1}\bar{x}_{11}(t) + \frac{k_2}{m_1}\bar{x}_{13}(t) \\ \bar{x}_{14}(t) \\ \frac{k_2}{m_2}\bar{x}_{11}(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2}\bar{x}_{13}(t) - \frac{b}{m_2}\tanh(\bar{x}_{14}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ \frac{0.1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ + \left( \frac{\partial \Phi_1(\bar{x}_1)}{\partial \bar{x}_1} \right)^{-1} v_1(t), \\ \bar{y}_1(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) & \bar{x}_{13}(t) \end{bmatrix}^T,$$

con condiciones iniciales  $\bar{x}_1(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . Los términos de corrección se diseñan con  $r_1 = r_2 = 2$ , y las ganancias  $M_{1,f_{\Delta,1}} = 1$  y  $M_{2,f_{\Delta,1}} = 0.5$  tales que la [5.3](#) se satisface para cada salida.

### 5.8 OBSERVADOR FALLA EN ACTUADOR + COMPONENTE

Considere el caso en el que, adicional a la falla en actuador, ocurre una falla en componentes ( $\sigma = 2$ ), correspondiente a la pérdida del efecto del resorte 1, *i.e.*  $F_2(x)\omega_2 = B_{\alpha_1}u + \Delta_2 f_2(x)$ . Así, la dinámica del sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k_2}{m_1}x_1(t) + \frac{k_2}{m_1}x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{k_2}{m_2}x_1(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_3(t) - \frac{b}{m_2}\tanh(x_4(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ \frac{0.1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

El mapeo de observabilidad es el mismo que para el caso libre de falla. De este modo, la [Suposición 5.2](#) y [Suposición 5.1](#) se satisfacen de igual forma. Entonces, el observador  $\sigma = 2$  toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{21}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{22}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{23}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{24}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{22}(t) \\ -\frac{k_2}{m_1}\bar{x}_{21}(t) + \frac{k_2}{m_1}\bar{x}_{23}(t) \\ \bar{x}_{24}(t) \\ \frac{k_2}{m_2}\bar{x}_{21}(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2}\bar{x}_{23}(t) - \frac{b}{m_2}\tanh(\bar{x}_{24}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \left( \frac{\partial \Phi_1(\bar{x}_2)}{\partial \bar{x}_2} \right)^{-1} v_2(t), \\ \bar{y}_2(t) &= \begin{bmatrix} \bar{x}_{21}(t) & \bar{x}_{23}(t) \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $\bar{x}_2(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . Los términos de corrección se diseñan con  $r_1 = r_2 = 2$ , y las ganancias  $M_{1,B_{\Delta,2}} = 1$  y  $M_{2,B_{\Delta,2}} = 0.5$  tales que la [5.3](#) se satisface para cada salida. Los resultados se muestran en la [Figura 5.2](#).

Para mostrar el desempeño del esquema de FDI frente a incertidumbres en el modelo, considere el siguiente sistema MRA incierto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1(t) + \frac{k_2}{m_1}x_3(t) \\ x_4(t) \\ \frac{k_2}{m_2}x_1(t) - \frac{k_2+k_3}{m_2}x_3(t) - \frac{b}{m_2}\tanh(x_4(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 20 & 2 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

donde el último término representa incertidumbre. Para esta simulación las ganancias de los observadores se eligen como:  $M_{0_1} = 10$  y  $M_{0_2} = 5$  para el caso libre de falla;  $M_{1,f_{\Delta,1}} = 10$  y  $M_{2,f_{\Delta,1}} = 5$ , para falla en actuador;  $M_{1,B_{\Delta,2}} = 10$  y  $M_{2,B_{\Delta,2}} = 5$  para el caso de actuador + componente. La constante del filtro  $\tau_\sigma = 0.06$  para cada observador, y  $\Delta T = 0.1$ . Los resultados se presentan en la [Figura 5.2d](#).

## 5.9 CONCLUSIONES

Para resolver el problema de FDI en una clase de SNL se ha propuesto una combinación de observadores HOSM y un esquema multi-modelo. Bajo condiciones estructurales del sistema, y haciendo uso de las propiedades principales de los observadores HOSM; el valor de la *inyección equivalente* es usado para construir residuos que permiten la detección de ciertas fallas actuando en el sistema. Para el problema de FI se propone un esquema multi-modelo que permite aislar dichas fallas. El método proporciona una rápida detección y aislamiento de fallas en actuadores y en componentes, además; se ha estudiado el problema considerando ruido en la medición. La eficiencia del método propuesto queda ilustrada por medio de simulaciones.

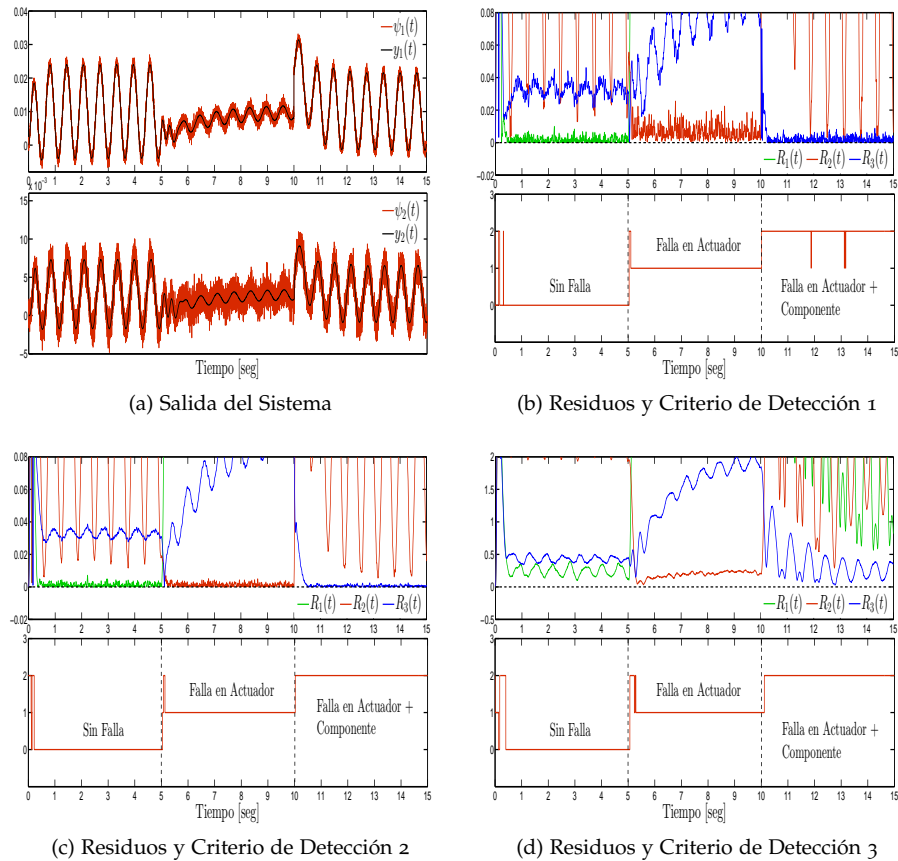


Figura 5.2: Esquema de FDI. En la [Figura 5.2a](#) se presenta la salida con un ruido generado por la suma de sinusoides de alta frecuencia y amplitud  $3 \times 10^{-3}$ . La [Figura 5.2b](#) muestra los residuos y el criterio de detección con la constante de tiempo del filtro (2.54), [Subsección 2.5.3](#),  $\tau_\sigma = 0.06$  para  $\sigma = 0, 1, 2$ ; y el parámetro correspondiente a la venta de tiempo de los residuos  $\Delta T = 0.01$ . En la [Figura 5.2c](#) se presentan los residuos y el criterio de detección para  $\tau_\sigma = 0.0775$  para  $\sigma = 0, 1, 2$  (la mejora en el criterio de detección es evidente). Finalmente, el caso con incertidumbres se muestra en la [Figura 5.2d](#). Es evidente que el esquema propuesto puede funcionar para cierto tipo de incertidumbres.

*Sólo existe una persona capaz de librarnos  
de las barreras que nos detienen,  
esa persona es uno mismo.*

— **H.R.B.**

### Parte III

## CONCLUSIONES FINALES

Se han presentado diferentes esquemas de observación para ciertas clases de sistemas conmutados. Los esquemas propuestos basan su estimación del *estado continuo* en observadores HOSM y tipo-Luenberger, mientras que el *estado discreto* es estimado a través de las propiedades de la *inyección equivalente*, para la (*conmutación no-autónoma*), y de la información del *estado continuo* para el caso de (*conmutación autónoma*). Bajo ciertas propiedades estructurales del sistema, se puede conseguir una estimación exacta y en tiempo finito del estado (*continuo y discreto*). Finalmente, se proporcionan un par de soluciones al problema de detección y aislamiento de fallas (en *sistemas conmutados* y *sistemas no-lineales*), basadas en los esquemas de observación propuestos.





Parte IV

**APÉNDICES**





## CONCEPTOS PRELIMINARES

---

En este apéndice se presentan los conceptos preliminares que se usaron a lo largo de este trabajo. Se introducen algunas definiciones de observabilidad fuerte, detectabilidad fuerte, ceros invariantes, grado relativo; para SL. Por otro lado, en cuanto a SH; se introducen definiciones y conceptos acerca de autómatas híbridos. Finalmente, se introducen un teorema que describe el comportamiento del diferenciador HOSM en condiciones de ruido.

### a.1 CONCEPTOS PARA SISTEMA LINEALES

Considere el siguiente SLIT:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), \\ y &= Cx(t),\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados,  $y(t) \in \mathfrak{R}^m$  es la salida,  $w(t) \in \mathfrak{R}^m$  es la entrada desconocida, mientras que  $A$ ,  $C$  y  $E$  son matrices conocidas con dimensiones correspondientes. En este caso, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que  $u(t) = 0$ .

**Definición A.1** [59] El sistema (A.1) se dice fuertemente observable si para cualquier condición inicial  $x(0)$  y para toda entrada desconocida  $w(t)$ , la igualdad  $y(t) \equiv 0 \forall t \geq 0$ , implica que  $x(t) \equiv 0 \forall t \geq 0$ .

**Definición A.2** [59] El sistema (A.1) se dice fuertemente detectable si para cualquier condición inicial  $x(0)$  y para toda entrada desconocida  $w(t)$ , la igualdad  $y(t) \equiv 0 \forall t \geq 0$ , implica que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición A.3** [59] El número complejo  $s_0 \in \mathbb{C}$  se dice un cero invariante de la tripleta  $(A, E, C)$ , si  $\text{rank}(R(s_0)) < n + \text{rank}(E)$ , donde  $R(s)$  representa la matriz de Rosenbrock del sistema (A.1), i.e.

$$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -E \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes [34]:

- i) El sistema (A.1) es fuertemente observable.
- ii) La tripleta  $(A, E, C)$  no tiene ceros invariantes.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes [34]:

- i) El sistema (A.1) es fuertemente detectable.

ii) El sistema (A.1) es de *fase-mínima* (i.e. los *ceros invariantes* de la tripleta  $(A, E, C)$  satisfacen  $\text{Re}\{s\} < 0$ ).

Con base en lo anterior, se pueden definir los *ceros invariantes inestables* del sistema (A.1), como el conjunto de *ceros invariantes* de la tripleta  $(A, E, C)$  que satisfacen  $\text{Re}\{s\} \geq 0$ . Más aún, si existen *ceros invariantes inestables*, entonces el sistema (A.1) no es *fuertemente detectable* y es de *fase-no mínima*.

Para el caso  $E = 0$ , las nociones de *observabilidad* y *detectabilidad fuerte*, coinciden con las de *observabilidad* y *detectabilidad*, respectivamente. Defina la matriz de *observabilidad*, i.e.

$$O = \left[ C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T \right]^T.$$

El sistema (A.1) es *observable*, independientemente de la entrada desconocida; si y sólo si  $\text{rank}(O) = n$ . El subespacio *no-observable* del par  $(C, A)$  se denota por  $\mathcal{N}$  y se define como  $\mathcal{N} = \ker(O)$ .

**Definición A.4** [59] *El valor  $\lambda_0 \in \mathcal{I}$  se dice un eigenvalor  $(C, A)$ -no-observable si*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda_0 I - A \\ C \end{pmatrix} < n.$$

**Definición A.5** [59] *Un punto  $x_0$  se dice débilmente no-observable si existe una entrada  $w(t)$ , tal que, la salida correspondiente satisface  $y_w(t, x_0) \equiv 0 \forall t \geq 0$ . El conjunto de todos los puntos débilmente no-observables del sistema (A.1) se denotan por  $\mathcal{V}^*$  y se denomina como el subespacio débilmente no-observable.*

El subespacio *débilmente no-observable* satisface las siguientes relaciones:

$$A\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{E}, \quad C\mathcal{V}^* = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathcal{E}$  denota la imagen de  $E$ . Para cualquier subespacio  $(A, E)$ -invariante de salida nula, existe un mapeo  $\bar{K} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$ , tal que

$$(A + E\bar{K})\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*, \quad C\mathcal{V}^* = 0. \quad (\text{A.3})$$

**Definición A.6** [34] *La salida  $y(t)$  se dice que tiene un vector de grado relativo  $(r_1, \dots, r_m)$ , con respecto a la entrada desconocida  $w(t)$ , si*

$$c_i A^k E = 0, \quad \forall k < r_i - 1, \quad (\text{A.4})$$

$$c_i A^{r_i-1} E \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.5})$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} E_1 & \dots & c_1 A^{r_1-1} E_m \\ & \ddots & \\ c_m A^{r_m-1} E_1 & \dots & c_m A^{r_m-1} E_m \end{bmatrix}, \quad \det Q \neq 0, \quad (\text{A.6})$$

donde  $c_i$  es el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $C$ , y  $E_j$  es la  $j$ -ésima columna de la matriz  $E$ .

Ahora, se presenta una transformación para descomponer el sistema en sus partes *fuertemente observable*, *no-fuertemente observable* e *no-observable* (ver e.g. [47] y [34]).

Primeramente, se busca una base del subespacio *débilmente no-observable*  $\mathcal{V}^*$  por medio del calculo de las matrices  $M_i$  definidas por el siguiente algoritmo recursivo de [B. P. Molinari](#) [47]:<sup>1</sup>

$$M_{i+1} = N_{i+1}^{\perp\perp} N_{i+1}, \quad M_1 = C,$$

$$N_{i+1} = G_i \begin{pmatrix} C \\ M_i A \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 0_{p \times q} \\ M_i E \end{pmatrix}^{\perp}.$$

El algoritmo termina una vez que  $\text{rank}(M_{i+1}) = \text{rank}(M_i)$ . Por lo tanto, es posible definir  $M_n = M_{n-1} = \dots = M_i$ . En [47] ha sido probado que  $\mathcal{V}^* = \ker(M_n)$ . De este modo, defina  $n_{\mathcal{V}} := \text{rank}(M_n)$  con  $M_n \in \mathfrak{R}^{n_{\mathcal{V}} \times n}$ . Entonces, se forma la matriz  $V \in \mathfrak{R}^{n \times (n-n_{\mathcal{V}})}$ , cuyas columnas forman una base de  $\mathcal{V}^*$ .

Asumiendo que el sistema (A.1) satisface la [Definición A.6](#), es posible formar la siguiente matriz  $U \in \mathfrak{R}^{n_{\mathcal{V}} \times n}$

$$U = \begin{bmatrix} c_1^T, & (c_1 A)^T, & \dots, & (c_1 A^{r_1-1})^T, & \dots, \\ & c_m^T, & (c_m A)^T, & \dots, & (c_m A^{r_m-1})^T \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.7})$$

Es fácil ver que  $\text{rank}(U) = n_{\mathcal{V}}$ . Ahora, de la matriz  $U$ , forme las siguientes matrices  $U_1 \in \mathfrak{R}^{n_{\mathcal{V}}-m \times n}$  y  $U_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$

$$U_1 = \begin{bmatrix} c_1^T, & (c_1 A)^T, & \dots, & (c_1 A^{r_1-2})^T, & \dots, \\ & c_m^T, & (c_m A)^T, & \dots, & (c_m A^{r_m-2})^T \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.8})$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} (c_1 A^{r_1-1})^T, & \dots, & (c_m A^{r_m-1})^T \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, forme la matriz  $N$ , cuyas columnas forman una base del subespacio *no-observable*  $\mathcal{N}$ . Es claro, por la [Definición A.5](#) que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}^*$ . Entonces, es posible seleccionar una matriz con rango columna completo  $V$ , formando una base de  $\mathcal{V}^*$  adaptada a  $\mathcal{N}$ , i.e.

$$V = \begin{bmatrix} V_{\mathcal{N}}, & N \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Defina  $n_{\mathcal{N}} = \dim(\mathcal{N})$ . Entonces,  $V_{\mathcal{N}} \in \mathfrak{R}^{n \times (n-n_{\mathcal{V}}-n_{\mathcal{N}})}$  and  $N \in \mathfrak{R}^{n \times n_{\mathcal{N}}}$ . Más aún, la matriz  $V$  satisface las siguientes igualdades:

$$AV + EK^* = VQ \Leftrightarrow (A + EK^*)V = VQ, \quad (\text{A.11})$$

$$CV = 0, \quad (\text{A.12})$$

para algunas matrices  $\bar{K}^* \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $K^* \in \mathfrak{R}^{m \times (n-n_{\mathcal{V}})}$  y  $Q \in \mathfrak{R}^{(n-n_{\mathcal{V}}) \times (n-n_{\mathcal{V}})}$ . Note que (A.11)-(A.12) son representaciones matriciales del mapeo (A.3), y que  $V^+V = I$  implica  $\bar{K}^* = K^*V^+$ , satisfaciendo (A.11).

<sup>1</sup> La matriz  $N_{i+1}^{\perp\perp}$  se introduce para excluir los términos linealmente independientes  $N_{i+1}$ . Por lo tanto,  $M_{i+1}$  tiene rango renglón completo (ver [11]).

De este modo, se define la siguiente transformación no-singular:

$$T := \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{u}_1^T & \mathbf{u}_2^T & (\mathbf{V}_{\mathcal{N}^+})^T & (\mathbf{N}^+)^T \end{array} \right]^T. \quad (\text{A.13})$$

La transformación  $\bar{\mathbf{x}}(t) = T\mathbf{x}(t)$ , lleva al sistema (A.1) a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{12}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{21}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) \\ \bar{x}_{12}(t) \\ \bar{x}_{21}(t) \\ \bar{x}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}(t), \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \left[ \begin{array}{cc} \bar{x}_{11}(t)^T & \bar{x}_{12}(t)^T \end{array} \right]^T, \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(t) - K_1^* \bar{x}_{21}(t), \quad (\text{A.16})$$

donde  $\bar{x}_{11}(t) \in \mathfrak{R}^{n_v - m}$ ,  $\bar{x}_{12}(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\bar{x}_{21}(t) \in \mathfrak{R}^{n - n_v - n_N}$ ,  $\bar{x}_{22}(t) \in \mathfrak{R}^{n_N}$ ,  $K_1^* \in \mathfrak{R}^{m \times (n - n_v - n_N)}$  y

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} = T(A + E\bar{K}^*)T^{-1}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} = TE,$$

$$C_1 = C \left[ \begin{array}{cc} (\mathbf{u}_1^+)^T & (\mathbf{u}_2^+)^T \end{array} \right]^T,$$

$$K^* = \left[ \begin{array}{cc} K_1^* & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cccc} B_1^T & B_2^T & B_3^T & B_4^T \end{array} \right]^T = TB.$$

Es posible demostrar que el conjunto de ceros invariantes, del sistema (A.14)-(A.16), que no pertenecen al subespacio no-observable  $\mathcal{N}$ , es igual al conjunto de eigenvalores de la matriz  $A_{33}$ , y que el conjunto de ceros invariantes que sí pertenecen al subespacio no-observable, es igual al conjunto de eigenvalores de la matriz  $A_{44}$  (ver, e.g. [12]).

## a.2 CONCEPTOS PARA AUTÓMATAS HÍBRIDOS

Denote  $\mathcal{U}$  como un subconjunto de un espacio topológico,  $P(\mathcal{U})$  denota el conjunto de todos los subespacios de  $\mathcal{U}$ , y  $T\mathcal{U}$  denota el *fibrado tangente* (tangent bundle) de  $\mathcal{U}$ .

El tangent bundle es una unión disjunta de espacios tangentes.

**Definición A.7** [44] Un autómata híbrido  $\mathcal{H}$  es una colección  $\mathcal{H} = (Q, X, f, \text{Init}, D, E, G, R)$ , donde  $Q$  es un conjunto finito de variables discretas;  $X$  es un conjunto finito de variables continuas;  $f : Q \times X \rightarrow T\mathcal{X}$  es un campo vectorial;  $\text{Init} \subseteq Q \times X$  es el conjunto de condiciones iniciales;  $D : Q \rightarrow P(X)$  es el dominio;  $E \subseteq Q \times Q$  es el conjunto de bordes;  $G : E \rightarrow P(X)$  es la condición de guardia, y  $R : E \times X \rightarrow P(X)$  es el mapeo de re-inicio (ver Figura A.1 y Figura A.2).

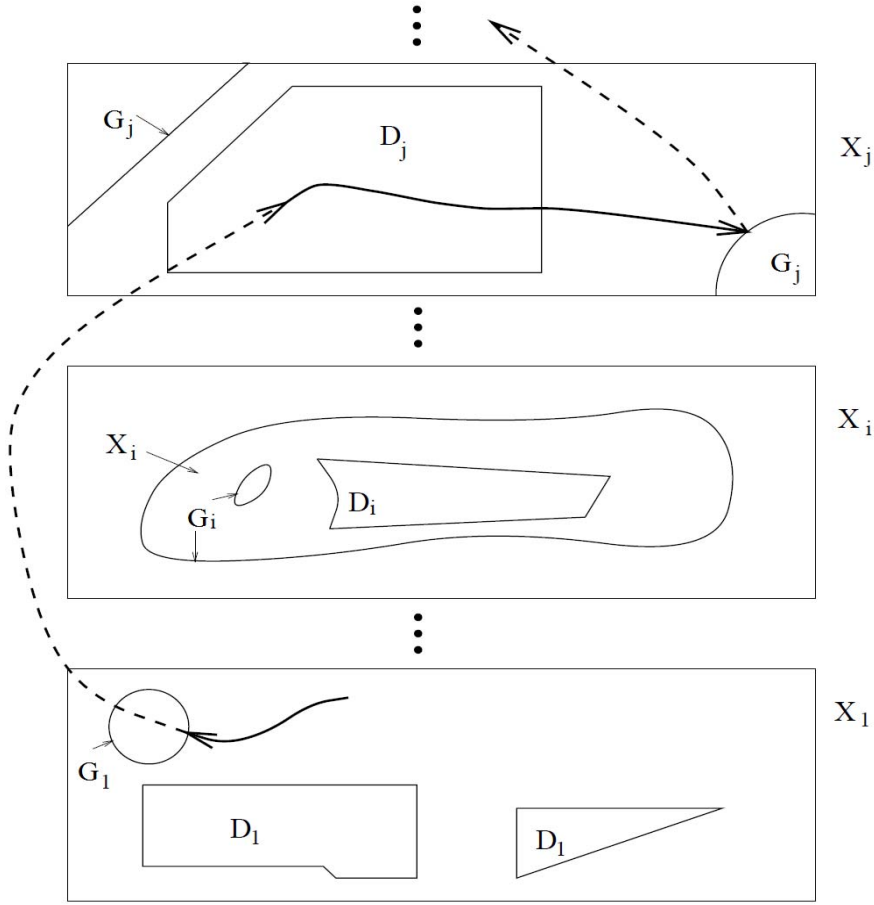


Figura A.1: Ejemplo de la dinámica de un Autómata Híbrido. En este caso la condición de guardia  $G$  determina las conmutaciones del sistema.

De acuerdo con la [Definición A.7](#), los sistemas analizados en el [Capítulo 2](#) y [Capítulo 3](#) representan casos particulares de un autómata híbrido, con las siguientes propiedades:

- $Q \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, q\}$ ,
- $X \in \mathcal{X} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \mathcal{X}_\sigma$  con  $\mathcal{X}_\sigma = \{x \mid H(x) \in \mathcal{H}_\sigma\}$ ,
- $f_\sigma : \mathcal{X}_\sigma \rightarrow T_\sigma \mathcal{X}_\sigma \subseteq \mathfrak{R}^n$ ,
- $\text{Init} = \{\mathcal{Q} \times \mathcal{X}\}$ ,
- $D = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} D_\sigma$ , con  $D_\sigma = \{x \mid x \in \mathcal{X}_\sigma\}$ ,
- $E = \{(\kappa, \iota) \mid \kappa, \iota = 1, 2, \dots, q; \forall \kappa \neq \iota\}$ ,
- $G = H(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H} \subseteq \mathfrak{R}$ , donde

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \mathcal{H}_\sigma,$$

$$\mathcal{H}_\kappa \cap \mathcal{H}_\iota = \emptyset, \forall \kappa, \iota = 1, \dots, q, \kappa \neq \iota,$$



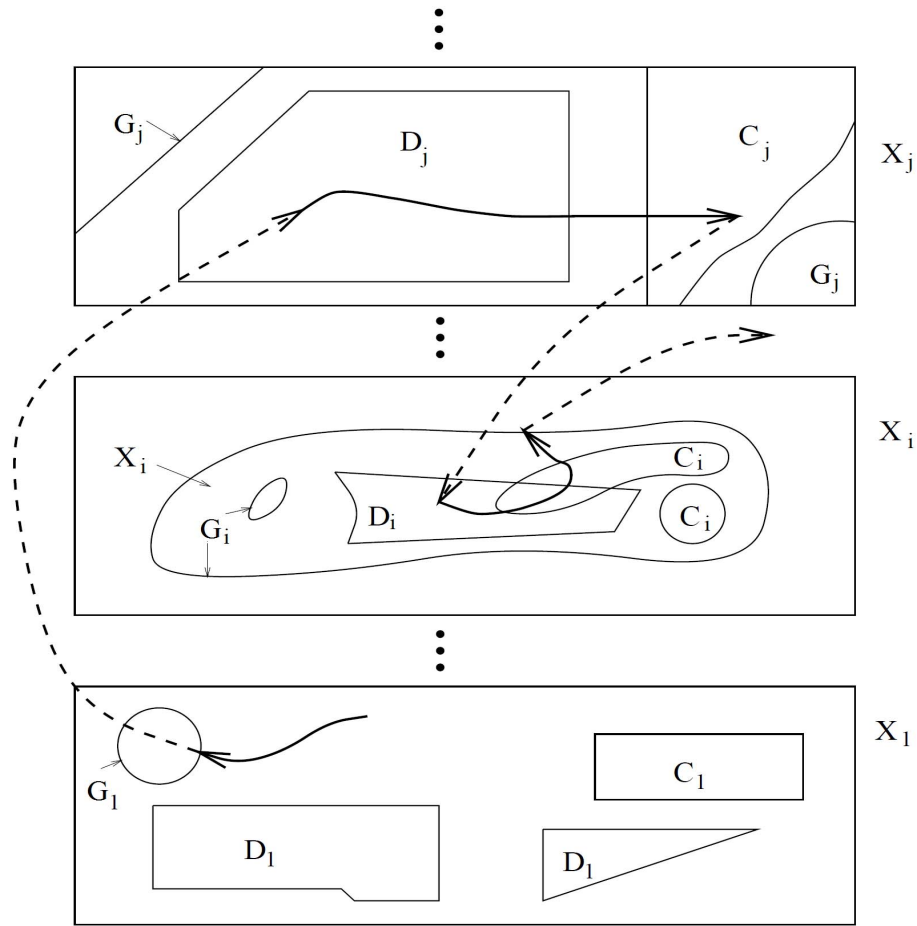


Figura A.2: Ejemplo de la dinámica de un Autómata Híbrido Controlado. En este caso los conjuntos  $C_i$  denotan subespacios donde la conmutación es controlada.

- $R(\kappa, \iota, x) = x$ , i.e. el mapeo identidad para  $x$ .

Para el caso de conmutación no-autónoma la condición de guardia no depende del estado continuo, sino de una señal exógena.

**Definición A.8** [44] Una trayectoria de tiempo híbrida es una secuencia finita o infinita de intervalos  $\tau = \{I_\sigma\}_{\sigma=0}^N$ , tales que:

- $I_\sigma = [\tau_\sigma, \tau'_\sigma]$ , para toda  $\sigma < N$ ;
- si  $N < \infty$ , entonces  $I_N = [\tau_N, \tau'_N]$ , o  $I_N = [\tau_N, \tau'_N)$ ;
- $\tau_\sigma \leq \tau'_\sigma = \tau_{\sigma+1}$  para toda  $\sigma$ .

En otras palabras, una trayectoria de tiempo híbrida es una secuencia de intervalos de una línea real, cuyos puntos finales se traslapan. Para una trayectoria  $\tau = \{I_\sigma\}_{\sigma=0}^N$ , defina  $\langle \tau \rangle$  como el conjunto  $\{1, \dots, N\}$  si  $N$  es finita, y  $\{1, 2, \dots\}$  si  $N = \infty$ ; y  $|\tau| = \sum_{\sigma \in \langle \tau \rangle} (\tau'_\sigma - \tau_\sigma)$ .

**Definición A.9** [41] El Tiempo Mínimo es un número  $T_\delta > 0$ , tal que las clases de señales de conmutación admisibles, satisfacen la propiedad de que los tiempo de conmutación  $t_1, t_2, \dots$  cumplen la desigualdad  $t_{i+1} - t_i \geq T_\delta$  para toda  $i$ .

En todo este trabajo se estudian sistemas cuyas trayectorias de tiempo híbridas satisfacen la [Definición A.9](#).

**Definición A.10** [44] Una ejecución de  $\mathcal{H}$  es una colección  $\xi = (\tau, q, x)$ , donde  $\tau$  es una trayectoria de tiempo híbrida,  $q : \langle \tau \rangle \rightarrow Q$  es un mapeo,  $y x = \{x^\sigma : \sigma \in \langle \tau \rangle\}$  es una colección de mapeos diferenciales  $x^\sigma : I_\sigma \rightarrow X$ , tales que:

- $(q(0), x^0(0)) \in \text{Init}$  ;
- para todo  $t \in [\tau_\sigma, \tau'_\sigma), \dot{x}^\sigma(t) = f_{q(\sigma)}(x^\sigma(t))$  y  $x^\sigma(t) \in X$ ;
- para toda  $\sigma \in \langle \tau \rangle \setminus \{N\}$ ,  $e = (q(\sigma), q(\sigma+1)) \in E$ ,  $x^\sigma(\tau'_\sigma) \in G(e)$ ,  $y x^{\sigma+1}(\tau_{\sigma+1}) \in R(e, x^\sigma(\tau'_\sigma))$ .

La ejecución de un autómata híbrido es similar al concepto de solución de un sistema dinámico continuo. Note que para cualquier ejecución infinita es necesario que  $|\tau| = \infty$ . Esta condición la satisfacen los sistemas analizados en el [Capítulo 2](#) y [Capítulo 3](#), i.e. ejecuciones tipo *Zeno* no son permitidas. Es claro que el *zeno phenomena* puede ser descrito como una ejecución infinita con  $|\tau| < \infty$ , o, equivalentemente; si esta toma un número infinito de transiciones discretas en una cantidad de tiempo finita.

Considere la siguiente siguiente representación de un autómata híbrido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma(t)}(x(t)) + E_{\sigma(t)}w(t), \\ y(t) &= h_{\sigma(t)}(x(t)), \end{aligned} \tag{A.17}$$

La siguiente definición de observabilidad es adaptada de [37].

**Definición A.11** Considere el sistema (A.17) y la variable  $x = x(t, x)$ . Sea  $x(t, x^1)$  la trayectoria de un autómata  $\mathcal{H}$  con una trayectoria de tiempo híbrida  $T_N$  y  $\langle T_N \rangle$ . Suponga que cualquier trayectoria  $(t, x^2)$  de  $\mathcal{H}$  con la misma trayectoria de tiempo híbrida  $T_N$  y  $\langle T_N \rangle$ , la igualdad  $y(t, x^1) = y(t, x^2)$ , a.e. en  $[t_{ini}, t_{end}]$  implica que  $x(t, x^1) = x(t, x^2)$ , a.e. en  $[t_{ini}, t_{end}]$ , entonces,  $x = x(t, x)$  es  $Z(T_N)$  observable a lo largo de la trayectoria  $x(t, x^1)$ .

### a.3 DIFERENCIADOR HOSM CON RUIDO

Los resultados aquí presentados deben de entenderse en un sentido *component-wise*. Para estimar la derivada de una señal  $y(t)$  con base en la medición de otra señal  $\psi(t) = y(t) + n(t)$ , donde  $n(t)$  es una señal acotada en el sentido de Lebesgue; se introduce el siguiente diferenciador HOSM [39]:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}_1 &= \vartheta_2 - \alpha_1 M^{\frac{1}{r}} [\vartheta_1 - \psi(t)]^{\frac{r-1}{r}}, \\ \dot{\vartheta}_i &= \vartheta_{i+1} - \alpha_i M^{\frac{1}{r-i+1}} [\vartheta_i - \dot{\vartheta}_{i-1}]^{\frac{r-i}{r-i+1}}, \quad i = 2, \dots, r-1, \\ \dot{\vartheta}_r &= -\alpha_r M [\vartheta_r - \dot{\vartheta}_{r-1}]^0, \end{aligned} \tag{A.18}$$

donde  $M$  es una cota superior de  $y^{(r)}(t)$ , y el conjunto de parámetros  $\{\alpha_k\}_{k=1}^r$  se eligen de forma recursiva y suficientemente grandes. En particular, de acuerdo con [A. Levant](#) [39], una opción es  $\alpha_6 = 1.1$ ,  $\alpha_5 = 1.5$ ,  $\alpha_4 = 2$ ,  $\alpha_3 = 3$ ,  $\alpha_2 = 5$ ,  $\alpha_1 = 8$  (para el caso  $r \leq 6$ ). El siguiente teorema [6], describe las propiedades del diferenciador HOSM en presencia de ruido y tiempo de muestreo.

**Teorema A.1** Considere el diferenciador HOSM (A.18) de orden  $r - 1$ , con unos parámetros  $\alpha_k$  adecuados. Sea

$$\left| \mathbf{y}^{(r)}(t) \right| < M, \quad |\mathbf{n}(t)| \leq \kappa_v M \gamma^r, \quad (\text{A.19})$$

donde  $\gamma$  es un parámetro positivo. Suponga que  $\psi$  es muestreada con un tiempo de muestreo, posiblemente variable;  $\tau_s > 0$ , y  $\tau_s \leq \kappa_\tau \gamma$ , con  $\kappa_v, \kappa_\tau$  siendo algunas constantes positivas. Entonces, para cualesquiera constantes positivas  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ , y cualquier  $\kappa_\psi$ ,  $0 < \kappa_\psi < \xi_1$ , existe  $\kappa_v, \kappa_\tau, \xi_t > 0$ , tal que la desigualdad:

$$|\vartheta_1 - \psi(t)| \leq \kappa_\psi M \gamma^r, \quad (\text{A.20})$$

se satisface para todos los instantes de muestro dentro del intervalo de tiempo finito  $\xi_t \xi$ . De ese modo, desde el inicio de dicho intervalo, las siguientes desigualdades:

$$\left| \vartheta_k - \mathbf{y}^{(k-1)}(t) \right| \leq \xi_k M \gamma^{r-k+1}, \quad k = 1, \dots, r, \quad (\text{A.21})$$

se satisfacen y se mantienen para todo tiempo futuro.  $\triangle$

**Nota Importante A.1** El diferenciador HOSM (A.18) proporciona la mejor precisión asintótica posible en presencia de ruido [39]. Las estimaciones correspondientes sólo están disponibles después de un transitorio de tiempo finito  $\gamma_t \gamma$ . En ausencia de ruido y tiempo de muestreo, el diferenciador HOSM proporciona una estimación exacta de las derivadas en tiempo finito.

De este modo, el diferenciador HOSM (A.18) estima las derivadas hasta el orden  $r - 1$ , por medio del vector  $\vartheta$ , i.e.  $[\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \dots \ \vartheta_r]^T = [\hat{\mathbf{y}}(t) \ \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) \ \dots \ \hat{\mathbf{y}}^{(r-1)}(t)]^T$ , donde  $\left\{ \hat{\mathbf{y}}^{(k)} \right\}_{k=0}^{r-1}$  son las derivadas estimadas.

## PUBLICACIONES

## PUBLICACIONES EN CONGRESOS INTERNACIONALES:

1. **H. Ríos, J. Davila and L. Fridman.** “*Unknown Input Reconstruction for Non-linear Autonomous Switched Systems via High-Order Sliding Modes Observers*”. In the 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2014), Melbourne, Australia, 2011, pp. 781-786.
2. **H. Ríos, J. Davila and L. Fridman.** “*High-Order Sliding Modes Observers for Linear Autonomous Switched Systems with Unknown Inputs*”. In the 12th IEEE Workshop on Variable Structure Systems (VSS 2012), Mumbai, India, 2012, pp. 428-433.
3. **H. Ríos, D. Efimov, J. Davila, T. Raïsi, L. Fridman and A. Zolghadri.** “*State Estimation for Linear Switched Systems with Unknown Inputs*”. In the 4th IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS 2012), 2012. Eindhoven, The Netherlands, pp. 271-276.
4. **H. Ríos, D. Efimov, J. Davila, T. Raïsi, L. Fridman and A. Zolghadri.** “*State Estimation and Fault Detection for Linear Switched Systems with Unstable Internal Dynamics*”. In the 8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS 2012), 2012. Mexico City, Mexico, pp. 522-527.
5. **H. Ríos, C. Edwards, J. Davila and L. Fridman.** “*Fault Detection and Isolation for Nonlinear Systems via HOSM Multiple Observer*”. In the 8th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS 2012), 2012. Mexico City, Mexico, pp. 534-539.
6. **H. Ríos, J. Davila, L. Fridman and D. Efimov.** “*State estimation for linear switched systems with unstable invariant zeros and unknown inputs*”. In the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2012), Maui, Hawaii, USA, 2012, pp. 5499-5504.
7. **H. Ríos, J. Davila and L. Fridman.** “*Discrete state identification for mechanical switched systems using High-Order Sliding-Mode identification techniques*”. In the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2012), Maui, Hawaii, USA, 2012, pp. 7395-7400.
8. **H. Ríos, D. Mincarelli, D. Efimov, W. Perruquetti and J. Davila.** “*Discrete State Estimation for Switched LPV Systems using Parameter Identification*”, Accepted to The 2014 American Control Conference (ACC 2014), Portland, OR, USA, 2014.

9. **H. Ríos, E. Punta and L. Fridman.** *“Fault Detection for Nonlinear Non-affine Systems via Sliding-Mode Output-Feedback and HOSM Differentiator”*. Accepted to the 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS 2014), Nantes, France, 2014.
10. **H. Ríos, D. Efimov, L. Fridman, J. Moreno and W. Perruquetti.** *“Uniform Stability Analysis for Time-Varying Systems Applying Homogeneity”*. Accepted to the 53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2014), Los Angeles, CA, USA, 2014.

## PUBLICACIONES EN REVISTAS:

1. **A. Ferreira de Loza, H. Ríos and A. Rosales.** *“Robust Regulation for a 3-DOF Helicopter via Sliding-Mode Observation and Identification”*. Journal of the Franklin Institute 349 (2012), pp. 700-718.
2. **J. Davila, H. Ríos and L. Fridman.** *“State Observation for Nonlinear Switched Systems using Nonhomogeneous High-Order Sliding Mode Observers”*. Asian Journal of Control, Vol. 14, No. 4, pp. 911-923, July 2012.
3. **H. Ríos, J. Davila and L. Fridman.** *“High-Order Sliding Modes Observers for Nonlinear Autonomous Switched Systems with Unknown Inputs”*. Journal of the Franklin Institute 349 (2012), pp. 2975-3002.
4. **H. Ríos, D. Efimov, J. Davila, T. Raïssi, L. Fridman and A. Zolghadri.** *“Non-minimum Phase Switched Systems: HOSM-based Fault Detection and Fault Identification via Volterra Integral Equation”*. International Journal of Adaptive control and Signal Processing (2013), DOI: 10.1002/acs.2448.
5. **H. Ríos, J. Davila, L. Fridman and C. Edwards.** *“Fault Detection and Isolation for Nonlinear Systems via HOSM Multiple-Observer”*, Accepted to the International Journal of Robust and Nonlinear Control (2014).

## Citas: 19 (Fuente Scopus)

## PUBLICACIONES EN REVISIÓN:

1. H. Ríos, S. Kamal, L. Fridman and A. Zolghadri, *“Fault Tolerant Control Allocation via Continuous Integral Sliding-Modes: A HOSM-Observer approach”*, **Submitted to Automatica**, State: 2nd Review.
2. H. Ríos, D. Mincarelli, D. Efimov, W. Perruquetti and J. Davila, *“Discrete and Continuous State Estimation for Switched LPV Systems using Parameter Identification”*, **Submitted to Automatica**, State: 2nd Review (Partially Accepted).
3. H. Ríos, J. Davila and L. Fridman, *“State Estimation on Switching Systems via High-Order Sliding-Modes”*, **Book Chapter submitted to Springer (Hybrid Dynamical Systems)**.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] A. Abdo, W. Damlakhi, J. Saijai, and S. X. Ding. Design of robust fault detection filter for hybrid switched systems. In *2010 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, pages 161–166, 2010.
- [2] A. Alessandri and P. Coletta. Design of observers for switched discretetime linear systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 2785–2790, Denver, CO, USA, 2003.
- [3] H. Alwi, C. Edwards, and C.P. Tan. Sliding mode estimation schemes for incipient sensor faults. *Automatica*, 45(7):1679–1865, 2009.
- [4] H. Alwi, C. Edwards, and C.P. Tan. *Fault Detection and Fault-tolerant Control Using Sliding Modes*. AIC Seriese. Springer-Verlag, 2011.
- [5] M.T. Angulo, L. Fridman, and A. Levant. Robust exact finite-time output based control using high-order sliding modes. *International Journal of System Science*, 42(11):1847–1857, 2011.
- [6] M.T. Angulo, L. Fridman, and A. Levant. Output-feedback finite-time stabilization of disturbed lti systems. *Automatica*, 48(4):606–611, 2012.
- [7] M.T. Angulo, J. A. Moreno, and L. Fridman. Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator. *Automatica*, 49(8):2489–2495, 2013.
- [8] J.P. Barbot, H. Saadaoui, M. Djemai, and N. Manamanni. Nonlinear observer for autonomous switching systems with jumps. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(4):537–547, 2007.
- [9] F. J. Bejarano and L. Fridman. State exact reconstruction for switched linear systems via a super-twisting algorithm. *International Journal of Systems Science*, 42(5):717–724, 2011.
- [10] F. J. Bejarano and A. Pisano. Switched observers for switched linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):681–686, 2011.
- [11] F. J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Unknown input and state estimation for unobservable systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(2):1155–1178, 2009.
- [12] F.J. Bejarano. Partial unknown input reconstruction for linear systems. *Automatica*, 47(8):1751–1756, 2011.
- [13] F.J. Bejarano, A. Pisano, and E. Usai. Finite-time converging jump observer for switched linear systems with unknown inputs. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(2):174–188, 2011.

- [14] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10):1864–1876, 2000.
- [15] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault tolerant control*. Springer, New York, 2003.
- [16] E.G. Boman and B. Hendrickson. Support theory for preconditioning. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(3):694–717, 2003.
- [17] J. D. Boskovic and R. K. Mehra. Multiple-model adaptive flight control scheme for accommodation of actuator failures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(4):712–724, 2002.
- [18] T. Boukhobza and F. Hamelin. Observability of switching structured linear systems with unknown input. a graph theoretic approach. *Automatica*, 47(2):395–402, 2011.
- [19] A. Casavola, D. Famularo, and G. Franze. Robust fault detection of uncertain linear systems via quasi-lmis. *Automatica*, 44(1):289–295, 2008.
- [20] S. Chaib, D. Boutat, A. Benali, and J.P. Barbot. Observability of the discrete state for dynamical piecewise hybrid systems. *Nonlinear Analysis*, 63(3):423–438, 2005.
- [21] S. Chaib, D. Boutat, A. Benali, and F. Kratz. Failure detection and reconstruction in switched nonlinear systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(3):225–238, 2009.
- [22] J. Chen and R.J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1999.
- [23] V. Cocquempot, T. El-Mezyani, and M. Staroswiecki. Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals. In *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*, 2004.
- [24] C. De-Persis and A. Isidori. A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6):853–865, 2001.
- [25] E. De-Santis, M.D. Di-Benedetto, and G. Pola. A structural approach to detectability for a class of hybrid systems. *Automatica*, 45(5):1202–1206, 2009.
- [26] M. Defoort, M. Djemai, T. Floquet, and W. Perruquetti. Robust finite time observer design for multicellular converters. *International Journal of System Science*, 38(10):773–791, 2011.
- [27] S.X. Ding, editor. *Model-based Fault Diagnosis Techniques. Design Schemes, Algorithms, and Tools*. Springer, Heidelberg, Berlin, 2008.
- [28] D. Efimov, A. Zolghadri, and T. Raïssi. Actuator fault detection and compensation under feedback control. *Automatica*, 47(8):1699–1705, 2011.
- [29] D. Efimov, J. Cieslak, and D. Henry. Supervisory fault-tolerant control with mutual performance optimization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 27(4):251–279, 2013.
- [30] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988.

- [31] G.K. Fourlas, K.J. Kyriakopoulos, and N.J. Krikelis. Fault diagnosis of hybrid systems. In *Proc. of the 13th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 832–837, 2005.
- [32] P.M. Frank and X. Ding. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *International Process Control*, 7(6):403–424, 1997.
- [33] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of System Science*, 38(10):773–791, 2007.
- [34] L. Fridman, J. Davila, and A. Levant. High-order sliding-mode observation for linear systems with unknown inputs. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(2):189–205, 2011.
- [35] I. Hwang, S. Kim, and Y. Kim. A survey of fault detection, isolation, and reconfiguration methods. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(3):636–653, May 2010.
- [36] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, England, 1996.
- [37] W. Kang, J.P. Barbot, and L. Xu. On the observability of nonlinear and switched systems. In B. Ghosh, C. Martin, and Y. Zhou, editors, *Emergent Problems in Nonlinear Systems and Control*, Lecture Notes in Control and Information Science, pages 199–216. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.
- [38] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A., 2002.
- [39] A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003.
- [40] A. Levant and M. Livne. Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):1076–1080, 2012.
- [41] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- [42] H. Lin and P. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2):308–322, 2009.
- [43] W. Liu and I. Hwang. Robust estimation and fault detection and isolation algorithms for stochastic linear hybrid systems with unknown fault input. *IET Control Theory & Applications*, 5(12):1353–1368, 2011.
- [44] J. Lygeros, K. H. Johansson, S. N. Simić, J. Zhang, and S. S. Sastry. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1):2–17, 2003.
- [45] P. S. Maybeck. Multiple model adaptive algorithms for detecting and compensating sensor and actuator/surface failures in aircraft flight control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(14):1051–1070, 1999.
- [46] T. E. Menke and P. S. Maybeck. Sensor/actuator failure detection in the vista f-16 by multiple model adaptive estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 31(4):1218–1229, 1995.



- [47] B. P. Molinari. A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5):761–764, 1976.
- [48] S. Narasimhan and G. Biswas. Model-based diagnosis of hybrid systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 37(3):348–361, April 2007.
- [49] E.M. Navarro-Lopez. Hybrid-automaton models for simulating systems with sliding motion: still a challenge. In *Proceedings of the 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, Zaragoza, Spain, 2009*.
- [50] N. Orani, A. Pisano, M. Franceschelli, A. Giua, and E. Usai. Robust reconstruction of the discrete state for a class of nonlinear uncertain switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(2):220–232, 2011.
- [51] L. Pina and M.A. Botto. Simultaneous state and input estimation of hybrid systems with unknown inputs. *Automatica*, 42(5):1755–762, 2006.
- [52] A. Polyakov and L. Fridman. Stability notions and lyapunov functions for sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1831–1865, 2014.
- [53] H. Ríos, J. Davila, and L. Fridman. High-order sliding mode observers for nonlinear autonomous switched systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 349(10):2975–3002, 2012.
- [54] M. Rodrigues, D. Theilliol, M. Adam-Medina, and D. Sauter. A fault detection and isolation scheme for industrial systems based on multiple operating models. *Control Engineering Practice*, 16(2):225–239, 2008.
- [55] C.P. Tan and C. Edwards. Robust fault reconstruction in uncertain linear systems using multiple sliding mode observers in cascade. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):855–867, 2010.
- [56] A. Tanwani and D. Liberzon. Invertibility of switched nonlinear systems. *Automatica*, 46(12):1962–1973, 2010.
- [57] A. Tanwani, H. Shim, and D. Liberzon. Observability for switched linear systems: Characterization and observer design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(4):891–904, 2013.
- [58] Y. Tian, T. Floquet, L. Belkoura, and W. Perruquetti. Algebraic switching time identification for a class of linear hybrid systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 5(2):233–241, 2011.
- [59] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel, and M. Hautus. *Control theory for linear systems*. Springer-Verlag, London, Great Britain, 2001.
- [60] F. J. Uppal and Ron J. Patton. Neuro-fuzzy uncertainty de-coupling: a multiple-model paradigm for fault detection and isolation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 19(4):281–304, 2004.
- [61] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London, 1999.
- [62] L. Vu and D. Liberzon. Invertibility of switched linear systems. *Automatica*, 44(4):949–958, 2008.

- [63] W. Wang, L. Li, D. Zhou, and K. Liu. Robust state estimation and fault diagnosis for uncertain hybrid nonlinear systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(1):2–15, 2007.
- [64] N. A. White, P. S. Maybeck, and S. L. DeVilbiss. Detection of interference/jamming and spoofing in a dgps-aided inertial system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(4):1208–1217, 1998.
- [65] A. Xu and Q. Zhang. Nonlinear system fault diagnosis based on adaptive estimation. *Automatica*, 40(7):1181–1193, 2004.
- [66] X.-G. Yan and C. Edwards. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observer. *Automatica*, 43(9):1605–1614, September 2007.
- [67] H. Yang, V. Cocquempot, and B. Jiang. Robust fault tolerant tracking control with application to hybrid nonlinear systems. *IET Control Theory & Applications*, 3(2):211–224, 2009.
- [68] Q. Zhang, M. Basseville, and A. Benveniste. Fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems: A combined input output and local approach. *Automatica*, 34(11):1359–1373, 1998.
- [69] F. Zhao, X. Koutsoukos, H. Haussecker, J. Reich, and P. Cheung. Monitoring and fault diagnosis of hybrid systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 35(6):1225–1240, 2005.
- [70] A. Zolghadri. Advanced model-based fdir techniques for aerospace systems: Today challenges and opportunities. *Progress in Aerospace Sciences*, 53:18–29, 2012.
- [71] A. Zolghadri, F. Castang, and D. Henry. Design of robust fault detection filters for multivariable feedback systems. *International Journal of Modeling and Simulation*, 26(1):17–26, 2006.

## COLOFÓN

Este documento fue compuesto usando la tipografía look-and-feel `classicthesis` desarrollada por André Miede. El estilo está inspirado en el libro de Robert Bringhurst: *"The Elements of Typographic Style"*. El archivo `classicthesis` está disponible para L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y L<sup>Y</sup>X en:

<http://code.google.com/p/classicthesis/>

*Versión Final:* 4 de agosto de 2014 (`classicthesis` version 4.0).