



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DINÁMICA EN ESTADOS HÍBRIDOS ENTRELAZADOS
DE ESPÍN Y ÓRBITA.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS.

PRESENTA:
CARLOS IVAN OCHOA GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS
DR. FERNANDO ROJAS IÑIGUEZ.
CNyN-UNAM.

COMITE TUTORAL
DR. ERNESTO COTA ARAIZA.
CNyN-UNAM.
DR. MANUEL HERRERA ZALDIVAR.
CNyN-UNAM.

ENSENADA, B. C., MÉXICO ABRIL 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Dinámica en Estados Híbridos Entrelazados
de Espín y Órbita.

TESIS

Que para obtener el título de

Maestro en Ciencias Físicas

Presenta:

CARLOS IVAN OCHOA GUERRERO

Ensenada, Baja California

*A ti pequeña luz en mi camino, que siempre estas
ahí para ayudarme y en mis momentos de flaqueza
has sabido motivarme.*

Agradecimientos

Agradezco al apoyo incondicional de mi familia y amigos.

Al esfuerzo y diligencia de mi comité tutor:

Dr. Ernesto Cota Araiza.

Dr. Manuel Herrera Zaldivar.

A mis sinodales por sus valiosas observaciones

Dr. Eugenio Ley Koo.

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Agular.

Dr. Roberto Romo Martínez.

A mi asesor.

Dr. Fernando Rojas Iñiguez.

Carlos Ochoa.

Resumen

El entrelazamiento es la propiedad más importante en las áreas de manejo de información cuántica y encriptación cuántica¹. Este fenómeno se caracteriza por la inseparabilidad de estados que interactúan en algún momento, lo que lleva a generar nuevos estados que pueden almacenar (procesar) más información en menor tiempo.

En este trabajo estudiamos la generación de estados entrelazados utilizando el formalismo de segunda cuantización para describir el sistema de un electrón atrapado en un punto cuántico bidimensional (2D-QD) con interacción espín-órbita (IEO) tipo Rashba. Este sistema correlaciona cuánticamente dos grados de libertad distintos que son el espín del electrón y los niveles de energía del punto (órbitas). Encontramos que un 2D-QD es apropiado por la posibilidad de habilitar IEO y estudiar entrelazamiento entre distintos grados de libertad (o híbrido), lo cual no está reportado en la literatura. La IEO es el medio ideal para el estudio de entrelazamiento híbrido y es intrínseco a sistemas con distintos grados de libertad. Supusimos que el 2D-QD se encuentra bajo un campo magnético a lo largo del eje z y en condiciones tales que en todo momento hay un sólo electrón confinado. Al estudiar la dinámica del sistema analizamos las propiedades de los coeficientes de Schmidt, la Entropía de Entrelazamiento y las probabilidades de encontrar el espín abajo ($|\downarrow\rangle$) o arriba ($|\uparrow\rangle$) para un modo $|n, m\rangle$, es decir, un sistema con tres grados de libertad, uno de espín y dos espaciales, donde n y m representan los estados de ocupación del 2D-QD.

Las investigaciones realizadas se han restringido a dos casos:

- (a) Aproximación de onda rotante (RWA): Bajo esta condición, el sistema se puede estudiar en un espacio de Hilbert reducido $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n$ donde el primer subespacio corresponde a dos estados del espín y al segundo subespacio le corresponden n modos de Landau.
- (b) Método de transformaciones canónicas (MTC): En este caso se trabaja con un esquema perturbado del sistema completo, *i.e.*, con tres grados de libertad $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ correspondientes al espín y confinamiento bidimensional, donde n y m representan la cantidad de estados disponibles en el sistema.

En cada caso estudiamos tres condiciones iniciales: (1) Estado Base. El electrón se encuentra completamente polarizado hacia arriba o abajo y localizado en el estado base. (2) Estado Superpuesto. El electrón se encuentra distribuido con la misma probabilidad sobre todos los estados de ocupación disponibles en el sistema. (3) Estado Coherente. El electrón se encuentra distribuido sobre los estados de ocupación bajo una distribución de Poisson.

Para la condición (a) utilizando Coeficientes de Schmidt, encontramos que la condición inicial que genera estados con máximo entrelazamiento es la tipo (1). Los estados generados son tipo Bell (con fases complejas). La condición inicial (2) muestra una pobre generación de estados máximamente entrelazados. Mientras que la condición (3) genera estados con alto grado de entrelazamiento, los cuales poseen una estructura que acopla pares de estados distribuidos en una mayor cantidad de estados.

Para la condición (b) estudiamos la entropía de entrelazamiento del sistema. Encontramos que, en general, se comporta de manera similar al caso RWA, pero la estructura es más compleja ($2 \times n \times m$).

¹Los avances más prominentes en estas dos áreas se han dado con Óptica y Resonancia Magnética Nuclear, sin embargo, es bien sabido que un procesador de información cuántica tiene que provenir del Estado Sólido.

Para comprender la estructura de los estados generados, utilizamos gráficos de densidad que muestran a los estados con mayor entrelazamiento. Encontramos que la condición (1) es la que al evolucionar genera estados con máximo nivel de entrelazamiento, *e.g.*, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1, 1\rangle)$. La condición (2) genera estados con mucha coherencia y entrelazamiento (nunca máximo), esto se aprecia en los gráficos de densidad como patrones de interferencia. La condición (3) genera alto entrelazamiento, donde los gráficos de densidad muestran una estructura tipo modo gaussiano aplastado correspondiente al espín arriba y abajo. Otros estados que se generan tienen una estructura tipo Laguerre-Gauss.

En ambos casos (a) y (b) encontramos que los estados que poseen máximo entrelazamiento son aquellos que tienen la forma: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1\rangle)$ y $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1, 1\rangle)$, donde φ es una fase real, estos dos estados son claramente tipo Bell. También encontramos que otro tipo de estados con entrelazamiento alto, son los que poseen una estructura que acopla pares de estados en una estructura no separable pero distribuidos en una cantidad mayor de estados. Podemos imaginarlos como escaleras de estados de ocupación entrelazados (*e.g.*, $|0\rangle$ con $|1\rangle$, $|2\rangle$ con $|3\rangle$, $|4\rangle$ con $|5\rangle$, etc.), que también están compuestos por estados separables, lo que no permite obtener un máximo entrelazamiento.

Abstract

Entanglement is the most important phenomena in the fields of quantum information and quantum computation². This phenomena is characterized by the impossibility of describing independently two states that interact at certain time, which lead us to new quantum states that can store (compute) more information in less time.

In this work we studied the generation of entangled states on the 2nd quantization approach to describe an electron trapped in a bidimensional quantum dot (2D-QD) with Rashba spin-orbit coupling (SOC). The system described before correlate two different quantum degrees of freedom, one is the electron spin and the other are the energy levels of the dot. We found appropriate to use a 2D-QD because it enables SOC and study the degree of entanglement between the two degrees of freedom (or hybrid), which is barely reported in the literature. The SOC is ideal for the study of hybrid entanglement and it is intrinsic of systems with different degrees of freedom. We assume that 2D-QD was under an external magnetic field along the z -axis and in conditions such that there is only one trapped electron. We analyze the Schmit coefficients, entanglement entropy and the probabilities of finding the spin up or down on the dynamics of the system, *i.e.*, a system with three degrees of freedom, one of spin and two spatial.

All the research has been put in two scenarios:

- (a) Rotating wave approximation (RWA): Under this condition, the system can be seen as if it were on a reduced Hilbert space $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n$ where the two spin states belong to the first subspace and the second subspace is made of the n Landau modes.
- (b) Canonical Transformation Method (MTC): In this case we work with an approximation of the whole system, *i.e.*, three degrees of freedom $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ which are the spin space and bidimensional confinement, where n and m are the states availables in the system.

In each case we work with three initial conditions: (1) Base state: the electron can be found entirely polarized upward or downward and confined to the ground state. (2) Superposition state: the electron can be found in all the available energy levels with the same probability. (3) Coherent state: the electron can be found under a Poisson distribution over the energy levels.

For the condition (a) using Schmidt Coefficients, we found that the initial condition that evolve into maximally entangled states are the ones of the type (1). The entangled states are Bell-like states. Initial condition (2) Shows really poor generation of maximally entangled states. Meanwhile the condition (3) evolves into states with a high degree of entanglement, those have a distributed entanglement of several pairs of states.

For the condition (b) we studied the entanglement entropy of the system, and we found that the whole system behaves quite similar as the RWA. However, it is a more complex structure ($2 \times n \times m$), as a way to understand the structure of the states being made over time We also use density plots to show the states with higher entanglement. The condition (1) is the one that evolves into states of maximum entanglement, *e.g.*, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1, 1\rangle)$. The condition (2) generates states with a lot of quantum coherence

²Most prominent advances in those fields has been through Optics and NMR, however it is well known that a processor of quantum information has to come from the Solid State.

and entanglement, but never maximum. This can be seen on the density plots as diffraction pattern. The condition (3) generates high entanglement, where the density plots shows a spin squeezed gaussian mode structure, and the other states that possess a Laguerre-Gauss structure.

In both cases (a) and (b) we found that the maximally entangled states are those with the structure $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1\rangle)$ y $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1, 1\rangle)$, where φ is a real phase, this two states are clearly Bell states. We also found another kinds of states with high entanglement, those that entangle pairs of states but distributed in several energy levels. We can think of them as a stair of entangled energy states (*e.g.*, $|0\rangle$ con $|1\rangle$, $|2\rangle$ con $|3\rangle$, $|4\rangle$ with $|5\rangle$, etc.), which also possess separable superpositions that leads to a non maximum entanglement.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción. | 1 |
| 2. Antecedentes. | 4 |
| 2.1. Coherencia Cuántica. | 4 |
| 2.1.1. Qubit | 4 |
| 2.2. Entrelazamiento. | 5 |
| 2.2.1. Matriz de densidad. | 7 |
| 2.2.2. Matrices de Densidad Reducidas. | 13 |
| 2.2.3. Estados de Bell. | 13 |
| 2.2.4. Entrelazamiento Híbrido. | 14 |
| 2.3. Caracterización del Entrelazamiento. | 15 |
| 2.3.1. Concurrencia. | 15 |
| 2.3.2. Coeficientes de Schmidt. | 18 |
| 2.3.3. Entropía de Entrelazamiento. | 24 |
| 2.3.3.1. Entrelazamiento de formación. | 26 |
| 2.4. Interacción Espín-órbita. | 27 |
| 2.4.1. Bychkov-Rashba | 28 |
| 2.4.2. Dresselhaus. | 28 |
| 2.5. Puntos cuánticos. | 30 |
| 3. Modelo. | 32 |
| 3.1. 2D-QD | 32 |
| 3.1.1. Aproximación del tipo Onda Rotante (RWA). | 35 |
| 3.1.1.1. Propiedades de función de onda estacionaria. | 37 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.1.1.2. | Función de onda dinámica. | 37 |
| 3.1.1.3. | Dinámica de entrelazamiento (Coeficientes de Schimdt). | 39 |
| 3.1.2. | Método de transformaciones canónicas. | 42 |
| 3.1.2.1. | Construcción del método. | 42 |
| 3.1.2.2. | Propiedades estáticas. | 45 |
| 3.1.2.3. | Evolución temporal (Dinámica) | 51 |
| 3.1.2.4. | Dinámica de Entrelazamiento (Entropía de entrelazamiento) | 53 |
| 4. | Resultados. | 57 |
| 4.1. | Tratamiento tipo RWA con espacio de Hilbert reducido. | 57 |
| 4.1.1. | Otras condiciones iniciales. | 63 |
| 4.1.2. | Resumen RWA. | 79 |
| 4.2. | Tratamiento de un espacio $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ | 81 |
| 4.2.1. | Resumen MTC. | 91 |
| 4.3. | Discusión. | 91 |
| 5. | Conclusión. | 95 |
| A. | Postulados de la Mecánica Cuántica. | 97 |
| B. | Análisis del modelo Jaynes-Cummings. | 101 |
| C. | Perturbación Rayleigh-Schrödinger. | 109 |
| D. | Estado Temporal (Numérico) | 116 |
| E. | Condición $\lambda = 0$ MTC. | 121 |

Capítulo 1

Introducción.

El manejo de información día a día demanda una mayor cobertura de procesamiento en tiempos casi instantáneos y además con recursos moderados. A partir de la miniaturización de dispositivos electrónicos es claro ver que estamos llegando a un umbral importante donde la electrónica habitual ya no se rige por las mismas reglas, sino que aparecen efectos propios de la Mecánica Cuántica que gobierna a escalas nanométricas, y aunado a eso, cambia el manejo de la información misma. Este nuevo manejo de información recibe el nombre de computación cuántica.

En 1982 Richard Feynman fue pionero al presentar una publicación donde muestra que es necesario utilizar un sistema cuántico para describir algunos procesos cuánticos, ya que este podría actuar como un fiel simulador de tales procesos.[1]

Para 1985 David Deutsch se dio cuenta de que la idea de Feynman era aplicable para una computadora cuántica de uso más general que solo simular procesos cuánticos y con esta idea publicó un artículo en donde, además de mencionar el hecho de que fuera factible simular procesos cuánticos en esa máquina, mostró que esta tendría capacidades que irían mas allá de cualquier computadora tradicional. En ese mismo artículo publicó el primer algoritmo hecho para una computadora cuántica.[2]

No fue sino hasta 1994 que el término computación cuántica tomó importancia con la publicación de Peter Shor (Shor 94-97)[3, 4], donde se compara la eficiencia entre una computadora cuántica y una computadora clásica, mostrando que la primera podría factorizar números grandes más rápido que su homólogo clásico.¹ En términos de criptografía este resultado es crítico ya que los mejores códigos de encriptación se resguardan bajo largos tiempos de factorización de números para poder ser descryptados. De existir una computadora cuántica se decodificarían todos los códigos conocidos en cuestión de minutos.

¹Cuando decimos grande nos referimos a números con más de 80 dígitos de longitud.

La computación cuántica necesita de elementos primarios para procesar información, llamados qubits,² que es la unidad mínima de almacenamiento de información. Las posibles representaciones de un Qubit en sistemas físicos pueden ser: espín (electrones[5, 6, 7], átomos, núcleos[8, 9]), puntos cuánticos (niveles de energía) [10, 60], fotones, estados comprimidos (*squeezed states*) [12] y en superconductores (carga, flujo y fase).[4, 13] En este trabajo nos enfocamos en un sistema de un punto cuántico.

Para realizar computación cuántica son necesarios cientos y hasta miles de qubits, estos por su naturaleza cuántica interactúan con sus vecinos de tal manera que entre ellos comparten información, a esta interacción se le llama *Entrelazamiento*. La propiedad de entrelazamiento es pieza clave en el manejo de información, y es utilizada actualmente como motor primario de protocolos de encriptación de datos, por ejemplo: para transmitir un paquete de información se requiere enviar estados entrelazados, los cuales no pueden ser clonados, dado que por su naturaleza registran cambios cuánticos si algún usuario externo intenta acceder a esa información. Esta propiedad hace de la computación cuántica una poderosa herramienta de encriptación natural.[3, 13, 39] El entrelazamiento es una propiedad cuántica, que ocurre por la interacción de distintos qubits o estados físicos. Esta interacción se manifiesta no sólo en estados con el mismo grado de libertad, e.g., espín-espín, fotón-fotón, sino también para estados ortogonales o bien sistemas físicos con distintos grados de libertad, e.g., espín-órbita, espín-fonón. El entrelazamiento entre distintos grados de libertad recibe el nombre de *entrelazamiento híbrido*, reportado principalmente en la interacción entre la luz (fotones) y algunas cavidades electromagnéticas.[46, 47, 48, 49, 36]

En la literatura está bien documentado el hecho de que los puntos cuánticos (estructuras metálicas o semiconductoras que varían del orden de micras) presentan interacción espín-órbita. En particular nos enfocamos en este trabajo en la interacción del tipo Rashba[62, 63]. Existen múltiples trabajos orientados al estudio del transporte de carga en sistemas de puntos cuánticos en presencia de un campo magnético, el cual “ activa ” la interacción espín-órbita. Muestran que la presencia de tal interacción llega a jugar un papel dominante en la dinámica del sistema. Algunos ejemplos o propuestas de aplicaciones a este aspecto son los trabajos de Fal’ko [80], Perel [57], Romo y Ulloa [65], Tarusha [79], Debald [78].

Recientemente, en estudios de sistemas bipartitos $\mathcal{H}_{2 \times n}$, como lo son la interacción átomo-cavidad y dos modos de estados comprimidos (*two-mode squeezed state*), se reporta que estos pueden ser tratados como dos subsistemas ortogonales en los que se busca la generación de entrelazamiento [35, 36]. En otros trabajos se reporta la generalización de los sistemas anteriores, utilizando sistemas tripartitos de dimensiones $\mathcal{H}_{2 \times n \times m}$ o incluso sistemas $\mathcal{H}_{n \times n \times m}$ logrando únicamente una clasificación de los estados

²Este termino es un acrónimo en ingles de *Quantum Bit* y podemos entenderlo como una representación de un estado cuántico.

generados. Resulta muy complicado conocer todos los estados entrelazados en este tipo de sistemas[37, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 93, 90, 91, 92, 93, 94]. En ambos casos se utiliza la descomposición de Schmidt como mecanismo de medición del grado de entrelazamiento. Esta descomposición consiste en realizar trazas parciales sobre los subsistemas. A grandes rasgos la información del grado de mezcla o entrelazamiento queda englobada dentro de los eigenvalores del sistema que son llamados coeficientes de Schmidt.

A lo largo de este trabajo se detalla la caracterización del entrelazamiento utilizando la descomposición de Schmidt como herramienta primaria.

En este trabajo de tesis se estudia la dinámica de entrelazamiento³ y el papel que juegan las condiciones iniciales del sistema en la generación de entrelazamiento, tales como polarización de espín, estados de ocupación en el punto cuántico y parámetros de frecuencia de transición de estados orbitales, espín y espín-órbita (hibridación).

Conocer las condiciones que propician una mejor correlación cuántica (entrelazamiento) nos orienta al área de ingeniería de sistemas (o ambientes), sistemas en los cuales se mantengan las condiciones propicias que ayuden a llevar a cabo un manejo de información cuántica estable.

A lo largo del siguiente capítulo se hace una recopilación de las herramientas necesarias para estudiar el fenómeno de entrelazamiento.

³La dinámica del entrelazamiento se estudia a través de los coeficientes de Schmidt en un modelo de un punto cuántico bidimensional (2D-QD) pensado inicialmente como un sistema tipo bipartito y posteriormente como uno tipo tripartito restringido (perturbado).

Capítulo 2

Antecedentes.

2.1. Coherencia Cuántica.

Desde un punto de vista filosófico podemos argumentar que la coherencia cuántica traza una línea divisoria entre el mundo cuántico y el clásico. En Física el término coherencia se refiere a la propiedad de las ondas de interferir, mostrando el bien conocido patrón de interferencia¹.

Por ejemplo tomemos dos ondas que dependen de su fase relativa, pueden producir interferencia constructiva o destructiva, pero solo la fase relativa hace la diferencia. Para ser precisos debiéramos hablar acerca de coherencia de fase de estados cuánticos, y por estados cuánticos nos referimos a estados de un sistema cuántico, que a la vez puede ser constituido por más de un objeto cuántico.[29]²

A continuación se definirá a los estados cuánticos como qubits, y se verá el hecho de que para que dos estados cuánticos estén correlacionados cuánticamente (entrelazados) necesitan tener una fase coherente³.

2.1.1. Qubit

Un Qubit al igual que un bit clásico tiene dos estados primarios ($|0\rangle$ y $|1\rangle$), solo que sus propiedades no lo limitan a estar en solo una de esas dos opciones, sino que puede estar en una combinación, decimos entonces los estados están en superposición.

Por ejemplo, un sistema en principio de dos estados, puede llegar a incrementar su número de posibles estados al superponerlos entre sí[4, 13]; una manera de representar una superposición es: $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, que muestra la misma probabilidad de estar en cualquiera de los dos estados.

¹Una definición vaga sería decir que un proceso es coherente si está caracterizado por la existencia de alguna relación de fase determinista bien definida[28].

²En lo que respecta a este trabajo entenderemos al estado como un sistema físico descrito por un estado ket definido $|\alpha\rangle$.

³NOTA: viceversa no se cumple, un estado coherente no necesariamente es un estado entrelazado.

En general una superposición para un solo qubit la podemos representar de la siguiente manera $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ donde α y β son números complejos que están caracterizados por la fase relativa. De la mecánica cuántica sabemos que $|\alpha|^2$ es la probabilidad de obtener $|0\rangle$, y $|\beta|^2$ la de $|1\rangle$, además cumplen la propiedad de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Consideremos ahora un registro compuesto por dos bits clásicos. Cualquier registro de este tipo puede almacenar en algún momento dado solo una de cuatro posibles configuraciones tales como 00, 01, 10, 11. Por otro lado un registro cuántico compuesto de dos qubits puede almacenar en cierto momento los cuatro valores en una superposición cuántica.

La representación del estado general de un sistema de dos qubits es de la forma:

$$|\phi\rangle = \alpha_{00}|0\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha_{01}|0\rangle_1|1\rangle_2 + \alpha_{10}|1\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha_{11}|1\rangle_1|1\rangle_2. \quad (2.1)$$

Donde $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ son las amplitudes de probabilidad de cada uno de los estados⁴ y los subsistemas que lo generan. La capacidad de almacenamiento de un conjunto de qubits es sorprendente ya que “n” qubits pueden almacenar hasta 2^n valores a la vez [20].

Por ejemplo, imaginemos 254 qubits, esto quiere decir que podemos almacenar y/o procesar hasta $\approx 2.89 \times 10^{76}$ valores en una sola instrucción.

Existe un fenómeno que se da entre la interacción de qubits, a esta propiedad se le llama entrelazamiento la cuál se describe en la siguiente sección.

2.2. Entrelazamiento.

El entrelazamiento es una propiedad puramente cuántica y sabemos de ella gracias a la interacción no local entre partículas y/o estados cuánticos. Ya que estos comparten información entre sí. De tal manera que una vez que se separan, cada uno contiene información del otro. Así si uno se ve modificado, inmediatamente [30] el otro también se verá afectado [25].

La propiedad de entrelazamiento cuántico se ha discutido desde hace más de 70 años (Schrödinger 1935)⁵, y hoy es una de las piedras angulares que impulsa al desarrollo de la tecnología y el manejo de la

⁴Los subíndices están para diferenciar entre el primer y segundo estado, aunque su uso es potestativo.

⁵Erwin Schrödinger fue quizá el primero en hablar de el fenómeno de entrelazamiento cuántico en 1935. Artur Ekert lo definió de la siguiente manera:

“Cuando dos sistemas, de los cuales conocemos los estados por sus respectivas características, entran en una interacción física entre ellos debido a fuerzas conocidas, y después de un cierto tiempo de mutua influencia los sistemas se separan de nuevo, entonces estos ya no pueden describirse de la misma manera que antes, uno puede ver que cada uno de ellos acaba con algo representativo de sí mismo. Yo no llamaría a esto un rasgo más sino el rasgo característico de la mecánica cuántica, la

información, otorgando a cada uno de estos rubros una contraparte cuántica.

El fenómeno de entrelazamiento fue uno de los temas más criticados durante la formulación de la mecánica cuántica, ya que en apariencia viola el principio de incertidumbre de Heisenberg[31]. Esta paradoja se logró aclarar utilizando la desigualdad de Bell[32], que nos dice que una teoría cuántica será incompleta si se cumplen ciertas propiedades, en caso contrario esta estará bien fundamentada. A partir de esta desigualdad ha sido posible desarrollar experimentos que muestran la existencia del entrelazamiento, usando principalmente fotones y átomos.

Un arreglo convencional que permite comprobar este fenómeno es el que se muestra en la figura 2.1. En este sistema, se hace pasar un fotón polarizado por un semi-espejo, separando al fotón en dos fotones entrelazados, los cuales viajan a través de fibras ópticas separadas con distintos extremos. Para cada fibra habrá dos funciones de onda que representan cierta probabilidad de tener al estado inicial del fotón primario polarizado. En un extremo, hay un aparato de medición, en la imagen son los APD (*Avalanche PhotoDiode*), y en el otro hay un polarizador, en la imagen son -A y el círculo gris. Cuando un fotón llega al polarizador inmediatamente después, en el otro extremo se realiza la medición del segundo fotón. El resultado de este experimento fue que el fotón que se mide tiene esta nueva polarización, no habiendo manera de que el fotón polarizado le transmitiera información al electrón sin polarizar a menos que se viole uno de los principios de la teoría de la relatividad[32, 33]. A esta interacción se le identificó como el entrelazamiento descrito por Schrödinger.

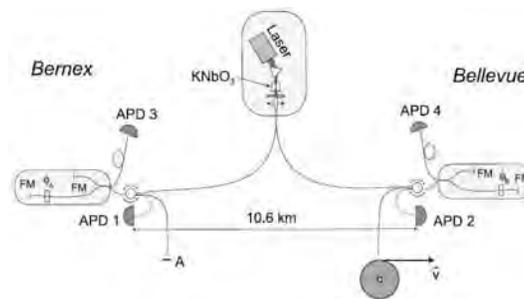


Figura 2.1: Tomada de Gisin, et. al.,[33] Esquema del experimento realizado para observar el fenómeno de entrelazamiento desde un punto de vista relativista y no relativista. En el caso no relativista una componente del fotón se encuentra primero con el polarizador -A y posteriormente se realiza una medición en el detector APD4. Para el caso relativista se tiene que una componente del fotón es primero observada (polarizada) en movimiento que es el círculo gris que se aprecia en la figura que gira con una velocidad $V = 100\text{m/s}$ y posteriormente medida en el detector APD3. Los detectores APD1 y APD2 se utilizan para calibrar el sistema con una precisión de $\pm 5\text{ps}$

Hoy día se ha mostrado que la mecánica cuántica es una teoría bien fundamentada [25], con experimentos que muestran la no localidad de los fenómenos cuánticos [25, 33], la cual es una propiedad que es explotada en otras áreas además del manejo de información.

cual refuerza su entera separación de las líneas clásicas de pensamiento. Por la interacción de dos características (los estados cuánticos) decimos que se han entrelazado”[20]

El principal problema que se tiene para manipular los sistemas cuánticos (en nuestro caso qubits) es su interacción con el medio que los rodea. Ya que no existen sistemas totalmente aislados. A este fenómeno de interacción se le llama decoherencia y podemos decir que es la pérdida de estados entrelazados debido al colapso de estados. Producido por las mediciones continuas del ambiente que les rodea. La decoherencia es un parámetro que se debe de considerar en todo experimento y hay que buscar nuevas estrategias para minimizarlo en gran medida o bien aprovecharlo.

En el caso de una computadora cuántica sería ideal que no hubiese decoherencia. Ya que esta complica la manipulación en arreglos de qubits, es por eso que hasta el día de hoy las computadoras cuánticas útiles no superan los 6 qubits, con un tiempo de coherencia muy corto. Los algoritmos que existen hasta ahora se han hecho para una manipulación máxima de hasta 8 qubits [21].

2.2.1. Matriz de densidad.

Imaginemos que existe un entorno que consistirá de muchas partículas en movimiento aleatorio efectivo, sus posiciones y movimientos los consideramos prácticamente no-observables. Existe un procedimiento matemático bien definido para manejar un sistema de este tipo, en el que hay una carencia de conocimiento sobre los estados involucrados: Lo que hace uno es una “suma sobre” los estados desconocidos del entorno y obtiene un objeto matemático conocido como *matriz de densidad*, que describe el estado físico en consideración.

La matriz de densidad combina en una expresión lo que parecieran ser dos nociones diferentes de probabilidad, una clásica y otra cuántica, y no distingue un tipo de otro. [69]

Por una parte, tenemos los números p, q, \dots, s , que son las probabilidades clásicas ordinarias para los estados alternativos $|\psi\rangle, |\phi\rangle, \dots, |\chi\rangle$, mientras que, por otro lado, tenemos las probabilidades cuánticas obtenidas por la condición de normalización:

$$\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x)\psi(x) = 1 \quad (2.2)$$

Un estado puro por definición es una colección de sistemas físicos tal que cada miembro es caracterizado por el mismo ket $|\psi\rangle$. En contraste, en un estado mezclado, una fracción de los miembros con una población relativa w_1 están caracterizados por $|\psi^{(1)}\rangle$, otra fracción con población relativa w_2 , por $|\psi^{(2)}\rangle$, y así sucesivamente. En términos generales, un estado mezclado puede ser visto como una mezcla estadística de estados puros.[22]

Matriz Densidad de estados puros y el Operador Traza

El *Operador densidad* se define:

$$\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle \langle\psi|; \quad (2.3)$$

$|\psi\rangle :=$ estado puro⁶

Si expresamos $|\psi\rangle$ como una superposición de estados base $|\psi_i\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{i,j} c_i c_j^* |\psi_i\rangle \langle\psi_j|, \quad (2.5)$$

los términos $i \neq j$ acarrearán la coherencia cuántica entre las distintas componentes $|\psi_i\rangle$, y usualmente se llaman términos de interferencia, o términos fuera de la diagonal.⁷

La *operación traza* se define:

$$\text{tr}(\hat{A}) \equiv \sum_i \langle\phi_i| \hat{A} |\phi_i\rangle, \quad (2.6)$$

donde \hat{A} es algún operador, y se escoge una base ortonormal $|\phi_i\rangle$ en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . El operador \hat{A} es lineal e independiente de la base que se tome

$$\text{tr}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{tr}(\hat{A}) + \text{tr}(\hat{B}). \quad (2.7)$$

Si aplicamos esta operación a un operador $\hat{A} = \hat{\rho}\hat{O}$, con $\hat{\rho}$ una matriz densidad de estados puros y \hat{O} un operador Hermitiano representando una observable

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{tr}(\hat{\rho}\hat{O}) &= \sum_i \langle O_i | (|\psi\rangle \langle\psi|) \hat{O} | O_i \rangle \\ &= \sum_i o_i \langle O_i | \psi \rangle \langle\psi | O_i \rangle \\ &= \sum_i o_i \langle O_i | \psi \rangle \langle O_i | \psi \rangle^* \\ &= \sum_i o_i |\langle O_i | \psi \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

⁶Estrictamente hablando, la matriz densidad se refiere a la representación matricial del operador de densidad en una base particular, el uso de “Matriz de Densidad” para el operador $\hat{\rho}$ es una terminología ampliamente utilizada.

⁷Es importante no llegar a una conclusión errónea como lo es pensar que la ausencia de términos fuera de la diagonal (términos interferencia) implica que el sistema no tiene propiedades cuánticas o se comporta clásicamente.

donde $|\langle O_i | \psi \rangle|^2$ es la probabilidad de Born de la resultante o_i . Aquí $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{O})$ representa el promedio de todas los posibles eigenvalores o_i de esta medición, pesado por las correspondientes probabilidades de Born. Este promedio es el valor esperado $\langle \hat{O} \rangle$ de la observable \hat{O} .

La regla de la traza.

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (2.9)$$

Si elegimos $\hat{O} = \hat{I} \Rightarrow \text{tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = 1$ (positividad). Este resultado refleja el hecho de que los estados puros están normalizados, *id est*, $|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = 1$.

La regla de Born, supone que un sistema es descrito por un estado puro $|\psi\rangle$. Además suponiendo que una observable es representada por un operador Hermitiano \hat{O} , con eigenestados $|O_i\rangle$ y correspondientes eigenvalores o_i (asumiendo un espectro discreto para \hat{O}).

Si el estado puro es medido en el sistema, entonces:

1. Los estados $|O_i\rangle$ y sus eigenvalores o_i son las únicas posibles resultantes al realizar una medición. Esto es el tercer postulado de la Mecánica Cuántica (ver Apéndice A).
2. La probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|O_i\rangle$ después de la medición esta dado por $|\langle O_i | \psi \rangle|^2$

Matrices de Densidad de Estados-Mezclados.

Los estados mezclados son netamente estadísticos, y corresponden a un experimento con cambios aleatorios en sus parámetros. A diferencia de los estados puros los estados mezclados pueden ser descritos como combinaciones lineales de estados, también pueden ser descritos por matrices de densidad. Cuando realizamos una medición, el resultado es descrito generalmente por una distribución de probabilidad.

Podemos decir que un estado mezclado expresa información insuficiente acerca del estado del sistema, en el sentido de que el sistema esta (antes de la medición) en uno de los estados puros $|\psi\rangle$ (el cual no necesita ser ortogonal) pero el observador simplemente no sabe cual. Esto último sin importar el origen físico del elemento probabilístico del estado mezclado, *id est*, el conjunto resultante de estados puros $|\psi_i\rangle$ con probabilidades asociadas p_i , representa un “ensamble clásico”. Con esto nos referimos a que el origen de las probabilidades es netamente clásico.

Imagine que un observador describe la estadística de las mediciones realizadas en un sistema definido por un estado mezclado; generalizando las reglas de valor esperado $\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ o $\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{O})$ con $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$ (una matriz de densidad de estados puros) combinando la probabilidad clásica, que está presente

debido la ignorancia del observador acerca de la combinación de estados puros en que se preparó el sistema y las probabilidades intrínsecas de la mecánica cuántica, dadas por el “colapso” en un eigenestado de un estado cuántico de la observable medida. Se obtiene un valor esperado de la forma:

$$\langle \hat{O} \rangle_{mez} = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (2.10)$$

con $p_i :=$ la probabilidad clásica y $\langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle :=$ valor esperado cuántico.

La Matriz de Densidad de un Estado se define:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.11)$$

la matriz de densidad de un estado-puro corresponde a todos los p_i igual a cero excepto uno, digamos $p_1 = 1$. Esto significa que no hay “ignorancia” acerca del estado del sistema en esta situación. Si decrece p_1 , entonces la condición de normalización para las probabilidades $\sum_i p_i = 1$, nos dice que debe de haber otro $p_i \neq p_1 \neq 0$, por lo que podemos decir que incrementa nuestro grado de “ignorancia” ya que no sabemos con certeza en que estado puro se ha preparado inicialmente el sistema.

Ahora, el valor esperado del observable \hat{O} puede ser calculado utilizando la regla de la traza (2.9), al igual que los estados puros. De manera similar obedece condiciones de normalización $\text{tr} \hat{\rho} = 1$, usando el hecho de que $\sum_i p_i = 1$

$$\text{tr}(\hat{\rho}) = \sum_i p_i \text{tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1. \quad (2.12)$$

Dos subsistemas están entrelazados entre sí, si el sistema compuesto está descrito por una matriz densidad (de un estado puro o mezclado) que no puede ser descrito con un producto tensorial $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$, donde $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ son matrices de densidad pertenecientes a cada subsistema individual.

Para evitar confusión entre una superposición de estados y un estado mezclado escribimos a este último de la forma:

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle, \quad (2.13)$$

en donde todos los estados que componen a $|\psi\rangle$ están presentes simultáneamente.

La matriz de densidad correspondiente al estado anterior es:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| &= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \\
&= \sum_{i=j} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j|.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

El segundo termino de (2.14) representa la interferencia entre los distintos estados $|\psi_i\rangle$.

Cuantificando el Grado de Mezcla.

Se sabe que una matriz de densidad de estados puros (2.3) es idempotente si cumple con la propiedad

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \tag{2.15}$$

lo cual constituye una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea considerado como un estado puro. Supongamos que el sistema no está en un estado puro

$$\Rightarrow \hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_j| (\langle\psi_i|\psi_j\rangle), \tag{2.16}$$

en general $\langle\psi_i|\psi_j\rangle \neq 0$ para $i \neq j$, y aún si $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$ no se cumple la propiedad (2.15)

$$\rightarrow \hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \neq \hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{2.17}$$

Existen dos medidas para cuantificar el grado de mezcla:

- **Pureza** de la Matriz Densidad

$$\varsigma \equiv \text{tr}(\hat{\rho}^2), \tag{2.18}$$

si $\hat{\rho}$ representa una matriz densidad de estados puros $\Rightarrow \varsigma = 1$, de cualquier otra manera

$$\varsigma = \sum_{i=1}^N p_i^2, \tag{2.19}$$

suponemos que los estados $\{|\psi_i\rangle\}$ forman una base ortonormal en un espacio de Hilbert de N -dimensiones. Decimos que la matriz densidad esta máximamente mezclada cuando $p_i = \frac{1}{N} \forall i = 1, \dots, N$.

- **Entropía de von Neumann.**

Puede ser vista como una adaptación de la entropía en mecánica estadística clásica, aplicada al caso

de operadores de densidad mecánico cuánticos, y se expresa por la forma:

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr}(\hat{\rho}\log_2\hat{\rho}) \equiv -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.20)$$

donde λ_i representa los eigenvalores de la matriz de densidad $\hat{\rho}$.

Por convención, para el caso $\lambda_i = 0$ se define $0\log_2(0) = 0$, de tal manera que los estados ausentes de una mezcla no se consideren en el valor de la entropía. Si $\hat{\rho}$ es puro \Rightarrow toda $\lambda_i = 0$ excepto por una $\Rightarrow S(\hat{\rho}) = 0$, es decir, un estado puro se caracteriza por tener un valor cero en la entropía de von Neumann. Por otro lado un estado máximamente mezclado corresponde a la ignorancia completa acerca de cual estado puro $|\psi_i\rangle$, $i = 1, \dots, N$ de la exclusividad⁸ mutua (y ortogonal) ha sido preparada, teniendo $\lambda_i = p_i = \frac{1}{N}$

$$\Rightarrow S(\hat{\rho}) = \log_2(N). \quad (2.21)$$

La entropía de von Neumann se relaciona con la entropía clásica (*i.e.*, termodinámica), en el sentido que la entropía es una medición de la cantidad de información, u opuestamente de la ignorancia, acerca del estado del sistema. De aquí en adelante será llamada **info-entropía de von Neumann**.

La base de Matrices de Densidad de Estados-Mezclados.

Podemos decir que una matriz de densidad de estados mezclados representa una “ignorancia interpretable” de una mezcla de estados puros.

Cualquier matriz de densidad impura (no pura) puede ser escrita en muchas formas distintas, para ilustrar esto último consideramos lo siguiente:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|0_z\rangle\langle 0_z| + |1_z\rangle\langle 1_z|), \quad (2.22)$$

donde $|0_z\rangle$ y $|1_z\rangle$ son eigenestados de σ_z , esto los podemos representar con los eigenestados de σ_x como:

$$\begin{aligned} |0_z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_x\rangle + |1_x\rangle), \\ |1_z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_x\rangle - |1_x\rangle). \end{aligned} \quad (2.23)$$

⁸Por exclusividad entiéndase que se habla de estados no degenerados.

$\Rightarrow \hat{\rho} = \frac{1}{2}(|0_x\rangle\langle 0_x| + |1_x\rangle\langle 1_x|)$ y de la misma forma la matriz de densidad también puede ser descrita en términos de $|0_y\rangle$ y $|1_y\rangle$ los eigenestados de σ_y .

2.2.2. Matrices de Densidad Reducidas.

La motivación básica de utilizar el concepto de una matriz de densidad reducida está en la descripción de un sistema \mathcal{A} que está entrelazado con un sistema \mathcal{B} . El objeto matemático adecuado en el formalismo cuántico que contiene exhaustiva y correctamente, toda información (*i.e.*, todas las mediciones estadísticas) que se pueden extraer por la observación del sistema \mathcal{A} es la matriz de densidad reducida:

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \text{tr}_{\mathcal{B}}\hat{\rho}, \quad (2.24)$$

el subíndice “ \mathcal{B} ” significa que la traza debe de realizarse usando la base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} solamente.

“ $\text{tr}_{\mathcal{B}}$ ”:= Traza parcial sobre \mathcal{B} y debe ser interpretada como un “promedio” sobre los grados de libertad del sistema no observado \mathcal{B} . “En pocas palabras, las matrices de densidad reducida proveen un método elegante para representar la medición estadística del sistema.” [70, 71]

2.2.3. Estados de Bell.

Los estados de Bell son aquellos estados del sistema de dos grados de libertad que tienen entrelazamiento máximo. Definidos como estados distintos que provienen de una misma interacción, cada uno de los estados posee información correspondiente a los demás estados, así que no se puede expresar como un estado independiente. En general cada sistema tiene su propia forma de representar estados máximamente entrelazados y esto depende del número de qubits que tenga.

Por ejemplo en el espacio de dos qubits los estados de Bell los podemos representar⁹ como las combinaciones:

$$|\Phi_{\text{Bell}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \quad (2.25)$$

$$|\Phi_{\text{Bell}}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |0\rangle_2 - |1\rangle_1 |1\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle); \quad (2.26)$$

$$|\Psi_{\text{Bell}}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); \quad (2.27)$$

⁹La representación esta hecha sobre la base computacional utilizando notación de Dirac, los subíndices sirven para representar al estado al que pertenecen, sin embargo podemos prescindir de ellos sin ninguna complicación.

$$|\Psi_{\text{Bell}}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.28)$$

Como ya se dijo estos estados tienen entrelazamiento máximo y se caracterizan por ser no separables, esto es, no se pueden describir como un producto de estados:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \neq (\alpha_1 |0\rangle_1 + \beta_1 |1\rangle_1) \otimes (\alpha_2 |0\rangle_2 + \beta_2 |1\rangle_2). \quad (2.29)$$

Una propiedad de estos estados es que una vez hecha una medición sobre alguno de los subsistemas, intrínsecamente se está fijando un valor para la pareja de componentes entrelazados. Por ejemplo, imaginemos que generamos un estado de Bell (2.27), entonces realizamos una medición sobre el primer subsistema y obtenemos que $|0\rangle_1$ es el valor de la medición o colapso (ver Postulado 3 del Apéndice A), esto implica que el segundo subsistema solo lo podemos encontrar en el estado $|1\rangle_2$, *id est*, al colapsar un estado de un subsistema estamos fijando el valor de su pareja entrelazada.

2.2.4. Entrelazamiento Híbrido.

El entrelazamiento como se mencionó con anterioridad suele ser estudiado entre dos mismos grados de libertad, e.g., espín-espín, órbita-órbita, fotón-fotón y al entrelazamiento de estados con dos distintos grados de libertad, como: electrón-fonón, átomo-fotón, espín-órbita, se le llama entrelazamiento de estados híbridos[46, 47, 48, 49] o hiper-entrelazamiento[50, 51, 52]

La ventaja de un estado híbrido sobre un estado normal radica en el tiempo de decoherencia máximo que tiene uno sobre el otro, es decir, algunos estados híbridos han mostrado mayor tiempo de vida entrelazada que algunos sistemas puros, además de algunas propiedades de evolución del entrelazamiento en el sistema de tal manera que si se llega a perder el entrelazamiento (parcialmente) este puede recuperarse después de cierto tiempo. Esto último se mostrará detalladamente en los resultados.

En los últimos años se ha venido estudiando la hibridación de estados y se han encontrado aplicaciones como los ebit que se utilizan en canales de información cuántica [46], mostrando cómo se pueden hacer hibridaciones entre fotones aislados y un estado coherente [49]. Poco después se mostró que también se podía trabajar con fonones y estados internos iónicos[48], y recientemente se ha estudiado la generación de estados entrelazados en un sistema de un doble punto cuántico (similar al nuestro) interceptado por un campo de cavidad cuántizado [47]. En este último trabajo se indica que el estado inicial del campo de cavidad puede controlar y manipular la dinámica del entrelazamiento.

2.3. Caracterización del Entrelazamiento.

En esta sección se presentan tres propiedades usadas para medir el grado de entrelazamiento, concurrencia, coeficientes de Schmidt y Entropía de entrelazamiento. Estas son robustas en su estructura, pero como tal no son observables físicas. Estos objetos cuánticos nos ayudan a monitorear el fenómeno del entrelazamiento hasta ahora exclusivo de la Mecánica Cuántica.

2.3.1. Concurrencia.

Una manera de medir el entrelazamiento es a través de lo que se le llama concurrencia, representado por la letra “ C ”, que es un valor de la info-entropía de von Neumann (ver sección 2.2.1) y su rango esta entre cero y uno.

Si el sistema se encuentra en un entrelazamiento máximo decimos que su grado de concurrencia es uno y si tiene un grado de entrelazamiento nulo entonces su concurrencia es cero [34, 35]. La única limitante de esta propiedad es que no se puede aplicar para sistemas de más de dos estados.

Concurrencia de estados puros:

Matemáticamente, la concurrencia se define como la proyección de estados en qubits de partículas indivisibles.

$$C = |\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle|, \quad (2.30)$$

donde a $\tilde{\Psi}$ se define de la siguiente manera

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\Psi^*\rangle,$$

aquí σ_y es la matriz de Pauli (ver Apéndice A) y Ψ^* es el conjugado de Ψ .

Para los estados de Bell (2.25, 2.26, 2.27, 2.28), la concurrencia es $C = 1$. Para cada uno de los elementos de la base computacional: $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, la concurrencia es $C = 0$. Así para calcular la concurrencia (de un estado puro) de una función de onda general que se encuentra en la base computacional de dos qubits y que tiene la forma:

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle, \quad (2.31)$$

en donde

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La representación vectorial de cada uno de los elementos de la base computacional es:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $|\psi\rangle$ queda expresado:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

y $|\tilde{\psi}\rangle$ después de hacer la multiplicación queda como:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} -d^* \\ c^* \\ b^* \\ -a^* \end{pmatrix}.$$

Ahora calculando la concurrencia

$$C(\psi) = \left| \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d^* \\ c^* \\ b^* \\ -a^* \end{pmatrix} \right|$$

$$C(\psi) = |-a^*d^* + b^*c^* + c^*b^* - d^*a^*|$$

$$\Rightarrow C(\psi) = 2|b^*c^* - a^*d^*|.$$

Que es lo mismo que expresarla:

$$C(\psi) = 2|bc - ad|. \quad (2.32)$$

Para estados puros podemos considerar un sistema de bipartito \mathcal{S}^{AB} en el cual sus subsistemas o bien no están correlacionados o están entrelazados. Denotaremos la info-entropía del sistema compuesto como $S(\hat{\rho}_{AB})$ (ver (2.20)) y las info-entropías de los subsistemas como $S(\hat{\rho}_A)$ y $S(\hat{\rho}_B)$ definidas por los operadores de densidad reducidos (2.24),

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}_{AB}) &= S(\hat{\rho}_A) = -\text{tr}(\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A) = \\ &= S(\hat{\rho}_B) = -\text{tr}(\hat{\rho}_B \log_2 \hat{\rho}_B) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si tomamos a (2.31), lo evaluamos en (2.33) y utilizamos de la Teoría de Información la función de entropía binaria

$$h(x) := -[x \log_2 x + (1 - x) \log_2 (1 - x)], \quad (2.34)$$

encontramos que la info-entropía obtiene una forma

$$S(\hat{\rho}_A) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C(\psi)^2}}{2}\right) \quad (2.35)$$

donde $C(\psi)$ es (2.32).

Concurrencia de estados mezclados:

Para estados mezclados la info-entropía tiene la misma estructura que (2.35) solo que para estados mezclados no tomamos la ecuación (2.32), sino que utilizamos el Lema de [34] que nos permite escribir explícitamente a la concurrencia como

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (2.36)$$

donde λ_i son las raíces cuadradas de la matriz $R_{AB} = \hat{\rho}_{AB} \tilde{\rho}_{AB}$.¹⁰

Si bien la Concurrencia está matemáticamente bien fundamentada, su talón de Aquiles es que está únicamente definida para sistemas de dos qubits.

¹⁰para mas detalles consultar [39]

2.3.2. Coeficientes de Schmidt.

Imaginemos dos subsistemas U y V , los cuales están asociados a los espacios de estado \mathcal{H}_u y \mathcal{H}_v , y el espacio de producto tensorial $\mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_v$ con el sistema compuesto $U + V$.

Algunos vectores de estado del sistema compuesto pueden ser descompuestos en un producto tensorial de dos vectores, uno describiendo el estado del subsistema U y el otro describiendo el estado del subsistema V , e.g.:

$$|\Psi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle, \quad (2.37)$$

sin embargo, si se piensa que los dos subsistemas no fueron preparados independientemente y aislados totalmente uno respecto al otro, en general es imposible hacer tal descomposición. Por ejemplo: consideremos el estado $|\Psi\rangle$ de el sistema compuesto tal que

$$|\Psi\rangle = c_1 |u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + c_2 |u_2\rangle \otimes |v_2\rangle, \quad (2.38)$$

donde

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad (2.39)$$

$$c_1, c_2 \neq 0. \quad (2.40)$$

Claramente en este caso ningún vector de estado puede ser asignado al subsistema U o V . Decimos entonces que estos dos subsistemas están entrelazados. El ejemplo más famoso de un estado entrelazado de dos partículas es el estado EPR o estado de Bell ver sección 2.2.3.

El estado cuántico de un subsistema de un par entrelazado (independientemente del estado de su compañero) tiene que ser descrito por un operador de densidad. El operador de densidad como ya se mencionó con anterioridad es un operador lineal $\hat{\rho}$ en \mathcal{H} tal que:

- $\hat{\rho}$ sea Hermitiano;
- $\hat{\rho}$ sea positivo definido, esto es, $\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$ para cualquier $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$;
- Positividad $\text{tr}\hat{\rho} = 1$.

Para el caso particular de un estado descrito por el vector de estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, el operador densidad es un operador de proyección sobre ese estado

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (2.41)$$

y como cualquier operador de proyección, es Hermitiano e idempotente $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

Un operador de densidad puede ser asociado con cualquier subsistema, sin importar la existencia de un vector de estado asociado a tal subsistema.

Si se considera que los conjuntos $\{|a_i\rangle, i = 1, 2, 3, \dots\}$ y $\{|b_j\rangle, j = 1, 2, 3, \dots\}$ formen una base ortonormal para los subsistemas U y V , respectivamente. Cualquier estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, el cual es un estado de un sistema compuesto, puede ser escrito como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle. \quad (2.42)$$

El operador densidad para el sistema compuesto puede ser expresado en forma matricial en esta base

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* |a_i\rangle\langle a_k| \otimes |b_j\rangle\langle b_l| = \\ &= \sum_{i,j,k,l} \hat{\rho}_{i,j,k,l} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes |b_j\rangle\langle b_l|. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Supongamos que sólo uno de los subsistemas es observado y deseamos describir las propiedades de este subsistema a pesar del estado de los otros subsistemas sin observar.

Podemos asignar operadores de densidad $\hat{\rho}_u$ y $\hat{\rho}_v$ a los subsistemas U y V tomando la traza parcial del operador densidad $\hat{\rho}$,

$$\hat{\rho}_u = \text{tr}_v \hat{\rho} = \sum_j \langle b_j | \hat{\rho} | b_j \rangle = \sum_{i,j,k} \rho_{ij,kj} |a_i\rangle\langle a_k|, \quad (2.44)$$

$$\hat{\rho}_v = \text{tr}_u \hat{\rho} = \sum_i \langle a_i | \hat{\rho} | a_i \rangle = \sum_{i,j,l} \rho_{ij,il} |b_j\rangle\langle b_l|. \quad (2.45)$$

Es claro de la definición anterior que la operación de traza parcial puede ser aplicada a cualquier operador densidad $\hat{\rho}$ del sistema compuesto. Como en nuestro caso particular al operador de proyección dado en la ecuación (2.41).

Para cualquier estado del sistema total descrito por $\hat{\rho}$ y cualquier subsistema U o V , podemos asignar únicamente el operador de densidad que describa el estado de ese subsistema tomando las trazas parciales sobre todos los otros subsistemas que conforman el sistema total. Esto último nos permite calcular todas las predicciones físicas de los subsistemas bajo consideración.

El valor promedio de cualquier observable \hat{U} perteneciente a el subsistema U siendo el estado especificado por $\hat{\rho}_u$ está dado por

$$\langle \hat{U} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}_u \hat{U}). \quad (2.46)$$

La descomposición de Schmidt.

Ya hemos mencionado que cualquier estado $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_v$, el cual es el estado del sistema compuesto, puede ser escrito como:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \quad (2.47)$$

o de forma alterna, utilizando el operador densidad, como (2.43).

Mostraremos que cada $|\Psi\rangle$ puede ser representado por una suma de términos biortogonales llamada descomposición de Schmidt.

Teorema: *Si el sistema compuesto está en un estado puro descrito por un operador de proyección $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ entonces existe una base ortonormal $\{|u_i\rangle \in \mathcal{H}_u\}$ y $\{|v_j\rangle \in \mathcal{H}_v\}$, tal que*

$$|\Psi\rangle = \sum_i g_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle \quad (2.48)$$

o en términos del operador de densidad $\hat{\rho}$ para el sistema entero,

$$\hat{\rho} = \sum_{i,k} g_i g_k^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes |v_i\rangle \langle v_k|, \quad (2.49)$$

donde $\sum_i |g_i|^2 = 1$.

Demostración: Permitámonos elegir $\{|u_i\rangle\}$ tal que $\hat{\rho}$ sea diagonal en esta base y la dimensión de \mathcal{H}_u no sea mayor que la dimensión de \mathcal{H}_v . Tomemos también a $\{|v'_j\rangle\}$ como una base arbitraria en \mathcal{H}_v , entonces $\hat{\rho}$ puede ser escrito como

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j} c_{k,l}^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes |v'_j\rangle \langle v'_l|. \quad (2.50)$$

Sin embargo, $\hat{\rho} = \sum_{i,j,k} c_{ij} c_{kj}^* |u_i\rangle \langle u_k|$ tiene que ser diagonal, por lo que $\hat{\rho} = \sum_j c_{ij} c_{kj}^* = |g_i|^2 \delta_{i,k}$. Esta condición nos permite cambiarnos a cualquier otra base ortonormal en \mathcal{H}_v . Para cada $|g_i| \neq 0$ y para cada $|u_i\rangle$ podemos definir el estado relativo

$$|v_i\rangle = \sum_j \left(\frac{c_{ij}}{|g_i|} \right) |v'_j\rangle, \quad (2.51)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, y N no es mayor que la dimensión de \mathcal{H}_u . El operador de densidad para el sistema compuesto $\hat{\rho}$ puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i,j,k,l} |g_i| |g_k| |u_i\rangle \langle u_k| \otimes \left(\frac{c_{ij}}{|g_i|} \right) |v'_j\rangle \langle v'_l| \left(\frac{c'_{kl}}{|g_k|} \right) = \\ &= \sum_{i,k} |g_i| |g_k| |u_i\rangle \langle u_k| \otimes |v_i\rangle \langle v_k|, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde N vectores base $\{|v_j\rangle\}$ de \mathcal{H}_v son suficientes para expresar el vector de estado del operador de densidad del sistema compuesto, y con esto culmina la demostración. ■

Notemos las siguientes características de la descomposición de Schmidt.

- (1) La descomposición de Schmidt pertenece a un estado específico del sistema compuesto.

Para cada estado puro existe la descomposición, no obstante, para dos estados diferentes $|\Psi\rangle$ y $|\Psi'\rangle$ tenemos dos descomposiciones de Schmidt distintas.

- (2) La suma sobre un sólo índice en la descomposición de Schmidt nos lleva a la dimensionalidad más pequeña de los dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_u y \mathcal{H}_v .

Por ejemplo, cuando un subsistema de dos estados está entrelazado con un sistema de n -estados ($n > 2$) la descomposición de Schmidt tiene solo dos términos.

- (3) La descomposición de Schmidt de algún estado cuántico dado no es única.

La construcción presentada aquí emplea sólo los valores absolutos de g_i dejando las fases arbitrarias. Más aún, si tenemos múltiples $|g_i|$ iguales los vectores correspondientes $|u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$ pueden ser reemplazados por combinaciones lineales de ambos.

Por ejemplo: tomemos un estado de Bell bajo simetría esférica, puede ser descrito de las siguientes formas alternativas:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftarrow\rangle \otimes |\rightarrow\rangle - |\rightarrow\rangle \otimes |\leftarrow\rangle) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle \otimes |\searrow\rangle - |\searrow\rangle \otimes |\nearrow\rangle) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow\rangle \otimes |\swarrow\rangle - |\swarrow\rangle \otimes |\nearrow\rangle). \end{aligned}$$

Las flechas indican las diferentes orientaciones posibles del vector de espín, mostrando claramente que la descomposición de Schmidt no es única. Este hecho causa problemas con la teoría de medición cuántica.

- (4) La descomposición de Schmidt no se puede extender en general a más de dos subsistemas. Hay un trabajo en el que se trata de mostrar la generalización de la descomposición de Schmidt pero únicamente obtiene casos particulares [37]. Para estados mezclados no existe análogo a la descomposición de Schmidt.[36]
- (5) En las bases elegidas para la descomposición de Schmidt ambos $\hat{\rho}_u$ y $\hat{\rho}_v$ son diagonales y poseen el mismo espectro positivo, por lo que cualquier función del operador de densidad que dependa sólo del espectro del operador, por ejemplo: la entropía de von Neumann, tendrá el mismo valor para $\hat{\rho}_u$ y $\hat{\rho}_v$.
- (6) Los vectores $\{|u_i\rangle\}$ y $\{|v_j\rangle\}$ definen dos observables $\hat{U} = \sum_i \mu_i |u_i\rangle \langle u_i|$ y $\hat{V} = \sum_i \nu_i |v_i\rangle \langle v_i|$ (donde μ_i y ν_i son eigenvalores) las cuales están perfectamente correlacionadas en un estado $|\Psi\rangle$. Cada que \hat{U} sea medido en U y como resultado obtengamos μ_j , entonces las medidas subsecuentes de \hat{V} en V nos darán, con certeza, un valor ν_k , llamamos a \hat{U} y \hat{V} las observables de Schmidt.

A grandes rasgos la descomposición consiste en realizar una traza parcial sobre el operador de la matriz densidad (2.24), recordamos que la traza parcial de $\hat{\rho}$ sobre \mathcal{B} se interpreta como un “promedio” sobre los grados de libertad del sistema no observado \mathcal{B} . Una vez realizada la traza parcial sobre el operador densidad se calculan los eigenvalores de esta matriz reducida, y los coeficientes encontrados dan información sobre el grado de entrelazamiento entre los subsistemas;

$$\det|\text{tr}_{\mathcal{B}}\hat{\rho} - \lambda\hat{I}|, \quad (2.53)$$

los coeficientes λ son llamados coeficientes de Schmidt.

Para caracterizar el grado de entrelazamiento:

- Si todos los coeficientes son iguales decimos que la función de onda esta máximamente entrelazada.

- Si hubiera al menos uno distinto puede haber entrelazamiento entre los subsistemas, pero no es máximo.
- Si todos los coeficientes son nulos salvo uno decimos que el entrelazamiento es nulo.

Por ejemplo, calculemos el coeficiente de Schmidt para un estado de Bell, que sabemos es máximamente entrelazado, tomemos el estado

$$|\psi_{Bell}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.54)$$

$$\rho_{\psi^+} = |\psi_{Bell}^+\rangle \langle \psi_{Bell}^+|, \quad (2.55)$$

$$\rho_{\psi^+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

tomando la traza parcial ($\{\mathcal{A}; |0\rangle, |1\rangle\}$) sobre el operador de densidad

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}\mathcal{B}}) &= \text{tr}_{\mathcal{A}}(\rho_{\psi^+}) = \sum_n^{\min(\mathcal{A})} \langle n | \rho_{\psi^+} | n \rangle = \\ &= \langle I \otimes 0 | \rho_{\psi^+} | 0 \otimes I \rangle + \langle I \otimes 1 | \rho_{\psi^+} | 1 \otimes I \rangle, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\rho_{\psi^+}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Vemos que ambos coeficientes son iguales ($\frac{1}{2}$), por lo tanto el estado de Bell (2.54) es un estado máximamente entrelazado.

Tomemos ahora un estado generado por la combinación lineal de todos los estados de Bell:

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_{Bell}^+\rangle + \beta |\psi_{Bell}^-\rangle + \gamma |\phi_{Bell}^+\rangle + \delta |\phi_{Bell}^-\rangle; \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned}
\rho_\psi = & |\alpha|^2 |\psi_{Bell}^+\rangle \langle \psi_{Bell}^+| + \alpha\beta^* |\psi_{Bell}^+\rangle \langle \psi_{Bell}^-| + \alpha\gamma^* |\psi_{Bell}^+\rangle \langle \phi_{Bell}^+| + \alpha\delta^* |\psi_{Bell}^+\rangle \langle \phi_{Bell}^-| + \\
& + \beta\alpha^* |\psi_{Bell}^-\rangle \langle \psi_{Bell}^+| + |\beta|^2 |\psi_{Bell}^-\rangle \langle \psi_{Bell}^-| + \beta\gamma^* |\psi_{Bell}^-\rangle \langle \phi_{Bell}^+| + \beta\delta^* |\psi_{Bell}^-\rangle \langle \phi_{Bell}^-| + \\
& + \gamma\alpha^* |\phi_{Bell}^+\rangle \langle \psi_{Bell}^+| + \gamma\beta^* |\phi_{Bell}^+\rangle \langle \psi_{Bell}^-| + |\gamma|^2 |\phi_{Bell}^+\rangle \langle \phi_{Bell}^+| + \gamma\delta^* |\phi_{Bell}^+\rangle \langle \phi_{Bell}^-| + \\
& + \delta\alpha^* |\phi_{Bell}^-\rangle \langle \psi_{Bell}^+| + \delta\beta^* |\phi_{Bell}^-\rangle \langle \psi_{Bell}^-| + \delta\gamma^* |\phi_{Bell}^-\rangle \langle \phi_{Bell}^+| + |\delta|^2 |\phi_{Bell}^-\rangle \langle \phi_{Bell}^-|.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Matricialmente ρ_ψ se expresa:

$$\rho_\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \alpha\beta^* + \beta\alpha^* + |\beta|^2 & \gamma\alpha^* + \gamma\beta^* + \delta\alpha^* + \delta\beta^* & \gamma\alpha^* + \gamma\beta^* - \delta\alpha^* - \delta\beta^* & |\alpha|^2 - \alpha\beta^* + \beta\alpha^* - |\beta|^2 \\ \alpha\gamma^* + \alpha\delta^* + \beta\gamma^* + \beta\delta^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 + \gamma\delta^* + \delta\gamma^* & |\gamma|^2 - |\delta|^2 - \gamma\delta^* + \delta\gamma^* & \alpha\gamma^* + \alpha\delta^* - \beta\gamma^* - \beta\delta^* \\ \alpha\gamma^* - \alpha\delta^* + \beta\gamma^* - \beta\delta^* & |\gamma|^2 - |\delta|^2 + \gamma\delta^* - \delta\gamma^* & |\gamma|^2 + |\delta|^2 - \gamma\delta^* - \delta\gamma^* & \alpha\gamma^* - \alpha\delta^* - \beta\gamma^* + \beta\delta^* \\ |\alpha|^2 + \alpha\beta^* - \beta\alpha^* - |\beta|^2 & \gamma\alpha^* - \gamma\beta^* + \delta\alpha^* - \delta\beta^* & \gamma\alpha^* - \gamma\beta^* - \delta\alpha^* + \delta\beta^* & |\alpha|^2 - \alpha\beta^* - \beta\alpha^* + |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

$$\text{tr}_{\mathcal{A}}(\rho_\psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 + 2\text{Re}(\alpha\beta^* - \gamma\delta^*) & (\gamma + \delta)(\alpha^* + \beta^*) + (\alpha - \beta)(\gamma^* - \delta^*) \\ (\alpha + \beta)(\gamma^* + \delta^*) + (\gamma - \delta)(\alpha^* - \beta^*) & |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 + 2\text{Re}(\gamma\delta^* - \alpha\beta^*) \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Ahora solo falta calcular los eigenvalores, ayudándonos de la siguiente propiedad:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = \lambda^2 - \lambda\text{tr}(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{2 \times 2}, \tag{2.63}$$

$$\lambda = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \pm 2\text{Re}(\alpha\beta^* - \gamma\delta^*), \tag{2.64}$$

(2.64) son los coeficientes de Schmidt para un estado que es combinación lineal de todos los estados de Bell (2.59).

2.3.3. Entropía de Entrelazamiento.

La idea central es utilizar la entropía de subsistemas como medida del entrelazamiento. Si se consideran únicamente estados puros, siempre tendremos un máximo de información¹¹ acerca del estado compuesto

$$S(\mathcal{AB}) = 0$$

, en un producto de estados, la información máxima de los estados de cada subsistema se representa como

$$S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B}) = 0.$$

¹¹Recuerde que un máximo de información corresponde a un conocimiento total del estado en el que se encuentra el sistema, por ejemplo, los estados de la base computacional $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, sabemos con certeza que elementos individuales son los que lo componen.

Por otro lado, recuerde que la matriz densidad de los estados de Bell tiene la forma

$$\rho_{\mathcal{A}} = \rho_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\mathbb{I},$$

decimos que estos estados están completamente sin estructura. Los subsistemas de estos estados se encuentran máximamente mezclados y máximamente indeterminados¹²

$$S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B}) = 1.$$

Entre mayor sea la entropía de los subsistemas, es más fuerte la correlación de estados puros en un sistema compuesto y por lo tanto entrelazado.

Para obtener una expresión de la entropía de entrelazamiento, se toma para un estado puro de un sistema compuesto $|\psi^{AB}\rangle$ el valor $E(\psi)$ de la entropía de los subsistemas,

$$0 \leq E(\psi) := S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B}) \leq 1, \quad (2.65)$$

como una medida del entrelazamiento del estado. $E(\psi)$ es llamado también Entropía de Entrelazamiento.

Ahora si se toma una descomposición espectral de la matriz de densidad

$$\hat{\rho} = \sum_i^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i^N \lambda_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.66)$$

donde $|\psi_i\rangle$ son eigenestados de alguna observable con eigenvalores p_i .

Utilizando a la entropía de Shannon [38]

$$S(\tilde{\lambda}) = - \sum_{i=1}^d \lambda_i \log \lambda_i \geq 0, \quad (2.67)$$

de $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{n=1}^k \sqrt{p_n} |\mathbf{u}_n^A, \mathbf{w}_n^A\rangle$ utilizando una base ortonormal $|n^A\rangle$ y un vector ortonormal particular $|\psi_n^A\rangle$ de $\hat{\rho}_{\mathcal{A}}$ y la expandimos como:

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \sum_{n=1}^a p_n |\mathbf{u}_n^A\rangle \langle \mathbf{u}_n^A|, \quad (2.68)$$

¹²Decir máximamente indeterminados corresponde a tener un mínimo de información respecto al estado generado en ese momento, en el caso de los estados de Bell se sabe que se encuentran en combinaciones no separables de estados de la base computacional. Un mínimo de información se refiere a una ignorancia sobre el estado fijo (de la base computacional) el cual esta siendo generado en algún momento, un estado en superposición no separable es el que posee menor información, esto permanece así hasta que se realiza una medición en alguno de los subsistemas, y se colapsa sobre un solo estado de la base computacional, es decir, ordenamos el sistema.

con $p_n \geq 0$, $-\sum_{n=1}^a p_n = 1$, se obtiene que para el entrelazamiento

$$E(\psi) = -\sum_{n=1}^k p_n \ln p_n, \quad (2.69)$$

donde p_n son los coeficientes de Schmidt.

Esta medición cuantitativa del entrelazamiento, se sostiene sólo para qubits de estados puros. La entropía de entrelazamiento depende sólo de los coeficientes de Schmidt, además es independiente de la base y no cambia bajo transformaciones locales unitarias. Para un estado primado $|\psi^{AB'}\rangle = U^A \otimes U^B |\psi_{AB}\rangle$, se tiene que la entropía es $E(\psi') = E(\psi)$. Para estados que pertenecen al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_d \otimes \mathcal{H}_d$, para los cuales $E(\psi) = \log d$ donde se aplica que $d = \dim \mathcal{H}$, son llamados estados máximamente entrelazados, por ejemplo los estados de Bell.

2.3.3.1. Entrelazamiento de formación.

Hasta ahora se ha hablado de estados puros, pero para mezclas estadísticas de estados, ¿Cómo se calcula la entropía de entrelazamiento?. La respuesta es la cantidad $E(\hat{\rho}_{AB})$ que además de ser una generalización matemática, esta también representa una medida física razonable para el entrelazamiento de mezclas.

Para responder formalmente lo anterior, se sabe que cada matriz de densidad $\hat{\rho}_{AB}$ puede ser representada como una matriz de densidad de un ensamble de estados puros $|\psi_l\rangle$ (como se observó anteriormente)

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_l p_l |\psi_l^{AB}\rangle \langle \psi_l^{AB}|. \quad (2.70)$$

El entrelazamiento promedio de el estado $\hat{\rho}_{AB}$ se encuentra como el valor promedio de el entrelazamiento $E(\psi_l^{AB})$ de estados puros en la forma $\sum_l p_l E(\psi_l^{AB})$. El entrelazamiento de formación de $\hat{\rho}_{AB}$ está definido como el valor mínimo del entrelazamiento promedio, si uno considera todas las posibles descomposiciones de $\hat{\rho}_{AB}$

$$E_f(\hat{\rho}_{AB}) = \min \sum_l p_l E(\psi_l^{AB}). \quad (2.71)$$

Si se prepara el estado como una mezcla estadística, entonces al menos el entrelazamiento de formación $E_f(\hat{\rho}_{AB})$ debe ser producido en promedio. $E(\hat{\rho}_{AB})$ puede ser interpretado operacionalmente como una medida física razonable del entrelazamiento para estados mezclados.¹³

¹³Esta sección fue elaborada en base a [39]

2.4. Interacción Espín-órbita.

Los electrones además de masa y carga eléctrica presentan otra propiedad llamada *espín* que es el momento intrínseco del electrón (hipotesis de Goudsmit y Uhlenbeck)[53].

La propiedad de espín se puede representar vectorialmente en un espacio de Hilbert de 2 estados (\mathcal{H}_2), decimos que la componente z del espín apunta hacia arriba, se representa como $|\uparrow\rangle$, o si el espín apunta hacia abajo $|\downarrow\rangle$.

En un circuito eléctrico ordinario (macroscópico) cada uno de los electrones sobre las conexiones (*e.g.*, cables) tiene un espín asociado, orientado aleatoriamente, y no tienen efecto alguno sobre el flujo de corriente[55]. El operador de espín es $\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z)$ representan las matrices de Pauli.

El acoplamiento espín-órbita es una manifestación de la relatividad especial, por ejemplo en el marco de referencia de un electrón en movimiento, los campos eléctricos se transforman en campos magnéticos, los cuales interactúan con el espín del electrón generando una pérdida o degeneración de los estados de espín. Por ejemplo: un electrón que se mueve en un campo eléctrico, se ve afectado por un campo magnético efectivo en su marco de referencia, el cual interactúa con el espín del electrón. El campo magnético efectivo depende de la órbita que ocupa el electrón, luego entonces se tiene que el espín y la órbita estén acoplados. La naturaleza relativista de este acoplamiento se puede entender por una aproximación a bajas velocidades de la ecuación de Dirac[54]. Esta aproximación produce, con algunas correcciones de estructura fina a la ecuación de Schrödinger no-relativista, el término de interacción espín-órbita de Pauli

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{4m_0^2c^2}\mathbf{p} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \nabla V(\mathbf{r})), \quad (2.72)$$

donde m_0 es la masa del electrón libre, c es la velocidad de la luz, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ es el vector de las matrices de Pauli y $V(\mathbf{r})$ es el potencial electrostático en el cual el electrón se propaga con momento \mathbf{p} . En física atómica $V(\mathbf{r})$ es el potencial Coulombiano del núcleo atómico. En presencia de un campo magnético externo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, el momento canónico \mathbf{p} es reemplazado por el momento cinético $\mathbf{P} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$, donde \mathbf{A} es el potencial vectorial.[29]

En semiconductores con estructura cristalina zinc-blenda (*e.g.* GaAs, InAs), la cual carece de un centro de inversión espacial, el campo cristalino correspondiente posee una asimetría de inversión en el cristal en bulto (*bulk inversion asymmetry BIA*)[56]. En puntos cuánticos y heteroestructuras bidimensionales, el potencial que confina al electrón en alguna dirección espacial puede generar una asimetría de inversión estructural (*structure inversion asymmetry SIA*)[57]. El efecto de tales potenciales asimétricos en el espín

del electrón está dado por la ecuación de Pauli¹⁴. El término de Pauli es calculado en dos publicaciones clásicas del estado sólido Dresselhaus para el caso de BIA y Bychkov-Rashba para SIA. [59]

Para determinar cual es la interacción dominante en un sistema (BIA o SIA), depende de la estructura de bandas del material, la densidad electrónica y la geometría de la muestra bajo investigación.

La diferencia conceptual entre los dos términos es que BIA es esencialmente fijo para una muestra dada, mientras que el término SIA depende de los voltajes microscópicos y por lo tanto puede ser cambiado en instancias por compuertas externas.

Los estudios de la interacción espín-órbita habitualmente se llevan a cabo en Puntos Cuánticos (QD, *Quantum Dot*), que son una estructura metálica o semiconductor que tiene dimensiones de micras y que confina desde miles de electrones hasta uno solo, es por eso que se les llama átomos artificiales [11, 61]. Otras estructuras que están teniendo gran importancia para esta interacción son los Dobles Puntos Cuánticos (DQD, *Double Quantum Dot*), que para fines prácticos son solo dos puntos cuánticos separados por una barrera de potencial que los acopla.

2.4.1. Bychkov-Rashba

Como ya mencionamos que en heteroestructuras del tipo GaAs/AlGaAs se da una asimetría del potencial de confinamiento también se rompe la simetría de inversión, llevando a este tipo de interacción espín-órbita debida a una asimetría de inversión estructural.[62, 63] En un confinamiento del campo eléctrico en la dirección z , el Hamiltoniano Bychkov-Rashba es

$$\hat{H}_R = \alpha(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x). \quad (2.73)$$

2.4.2. Dresselhaus.

El estudio de sistemas con campos tipo Dresselhaus utilizado en problemas de barrera de potencial fue introducido por Perel, et.al. (2003). En el trabajo de Perel, et.al., se mostró el desarrollo de un modelo de la dependencia del espín a través de tunelaje [57] y para el año 2005 Romo y Ulloa presentan un estudio de la dinámica de polarización sobre el espín que está presente en el tunelaje (interacción espín-orbita, en un sistema de una doble barrera de potencial) presentando a este sistema como un mecanismo de filtración de espines [65].

¹⁴La ecuación de Pauli proviene del Hamiltoniano de interacción espín-órbita, para más información consultar [58] pag.61

El Hamiltoniano que describe a un sistema con una barrera, es el propuesto por G. Dresselhaus ya hace mas de 50 años [64]. También se le conoce como termino k^3 Dresselhaus:

$$\hat{H}_{Dr} = \gamma [\sigma_x k_x (k_y^2 - k_z^2) + \sigma_y k_y (k_z^2 - k_x^2) + \sigma_z k_z (k_x^2 - k_y^2)]. \quad (2.74)$$

Donde $\sigma_{\alpha=x,y,z}$ son las matrices de Pauli, γ es una constante del material y los ejes coordenados x, y, z se asume que son paralelos a los ejes cristalográficos cúbicos [100], [010], [001] respectivamente[57]. Restringiendo el movimiento a lo largo del eje z y considerando un momento en el plano $0xy$ podemos considerar el término k_z en el Hamiltoniano como un operador $-i\frac{\partial}{\partial z}$. Si asumimos que la energía cinética de los electrones sea substancialmente menor que la barrera de potencial, entonces el hamiltoniano se simplifica a:

$$\hat{H}_{Dr} = \gamma(\sigma_x k_x - \sigma_y k_y) \frac{d^2}{dz^2}. \quad (2.75)$$

Vemos que a primer orden es similar a (2.73). En representación matricial tiene la forma:

$$H_{Dr} = \begin{pmatrix} & |\uparrow\rangle & & |\downarrow\rangle \\ \epsilon & & \gamma(k_x + ik_y) \frac{d^2}{dz^2} & \\ \gamma(k_x - ik_y) \frac{d^2}{dz^2} & & \epsilon & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{matrix}. \quad (2.76)$$

Lo que se está representando en cada uno de sus elementos es la energía de cambio del momento orbital intrínseco del electrón, i.e., la energía de cambio de espín debida al tunelaje, si suponemos que el sistema esta aislado. Si el electrón no presenta tunelaje entonces no hay cambio de espín, por lo que los elementos de la diagonal son ϵ , que es la energía intrínseca de confinamiento de estado base para un electrón, dicho de otra manera no hay un cambio de energía para dejar el electrón en el mismo estado con el mismo espín. En cambio si el electrón presentara tunelaje, la energía necesaria para realizar el cambio de espín es la que se muestra en los elementos fuera de la diagonal.

Hay que tener bien presente que BIA domina en GaAs mientras que SIA prevalece en InAs o en general se sabe que el mecanismo Dresselhaus (Rashba) domina en los sistemas semiconductores de brecha ancha (brecha ajustada).

2.5. Puntos cuánticos.

Los puntos cuánticos son estructuras que se forman en la superficie de metales o en semiconductores a escala nanométrica, que confinan el movimiento, en las tres dimensiones espaciales, de electrones de la banda de conducción, o bien, huecos de la banda de valencia, o excitones (pares de enlaces entre electrones de conducción de banda y de huecos de banda de valencia). Debido a las restricciones en las tres dimensiones se dice que los puntos cuánticos tienen dimensión cero 0D. El modelo teórico de un punto cuántico se asemeja mucho al de un pozo de potencial, de esto se puede decir que sus estados energéticos están cuantizados como lo vemos también en un átomo.[61]. Las dimensiones de un punto cuántico varían de algunos nanómetros hasta algunas micras. Dentro de estos puede haber desde un electrón hasta miles de ellos. El tamaño y forma de estas estructuras e inclusive el número de electrones que estas pueden llegar a contener puede ser controlado precisamente. [66]

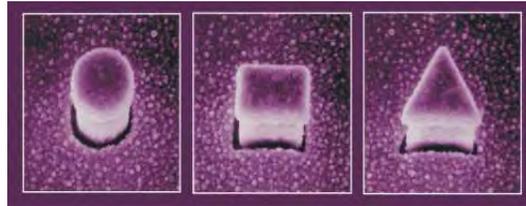


Figura 2.2: Micrografía de SEM de puntos cuánticos en forma de pilares con distintas formas. Estos tienen anchuras de aproximadamente $0,5\mu m$. Tomada de [67]

La física de los puntos cuánticos muestra muchos paralelismos con el comportamiento que ocurre en la naturaleza de sistemas cuánticos en física atómica y nuclear. Una diferencia a notar con los puntos cuánticos es que estos se pueden conectar a electrodos, a diferencia de un átomo, esto los convierte en herramientas ideales para el estudio de propiedades atómicas, ya que para un átomo el campo de flujo magnético necesario debe de ser del orden de $1 \times 10^6 T$ mientras que para un punto cuántico los campos son del orden de $1 \times 10 T$, lo cual los hace experimentalmente accesibles.

Al tener dimensionalidad cero los puntos cuánticos poseen una densidad de estados más pequeña con respecto a estructuras de dimensiones más altas y como consecuencia de esto presentan un transporte electrónico superior. Son estudiados por sus propiedades ópticas de emisión de fotones, algunas investigaciones de su uso se han hecho en diodos láser [68], amplificadores y sensores biológicos [11]. Esto debido a su alto rendimiento cuántico (*quantum yield*) esto es una medida de eficiencia cuántica al momento de recibir un grupo de fotones y estos produzcan algún efecto, como ser absorbidos y reemitidos con otra longitud de onda. En electrónica se ha probado que funcionan como un transistor de un sólo electrón y se ha mostrado el efecto de bloqueo Coulombiano [66].

Los puntos cuánticos han sido propuestos como qubits implementados en el procesamiento de información cuántica [10]. El presente trabajo parte de esta propuesta como premisa, a continuación se describe el modelo que se trabajó.

Capítulo 3

Modelo.

A lo largo de este capítulo se presenta un desarrollo analítico y no disipativo de un 2D-QD, con la finalidad de fijar un punto de partida a los resultados numéricos presentes en el capítulo de resultados.

A grandes rasgos, se construye el Hamiltoniano que nos permitirá hacer una descripción de las interacciones espín-órbita. Este Hamiltoniano lo estudiamos en los siguientes casos:

- a) Una descripción del sistema reducido es pensarlo como si fuese un sistema unidimensional para estudiar la dinámica de entrelazamiento a través de los coeficientes Schmidt.
- b) Hacer una descripción del sistema completo para lo cual recurrimos a la teoría de perturbaciones, en este caso ya no es posible estudiar la dinámica del entrelazamiento del sistema con los coeficientes de Schmidt (restringidos a sistemas unidimensionales), por lo que utilizamos la entropía de entrelazamiento para llevar acabo esta tarea.

Analicemos a detalle la dinámica de un 2D-QD con un electrón bajo la influencia de un campo magnético e interacción espín-órbita tipo Rashba.

3.1. 2D-QD

El potencial lateral en puntos cuánticos (2D-QD) es habitualmente aproximado por un potencial parabólico [76], como el que se muestra en la figura 3.1.

Partiendo de la Teoría de Fock-Darwin [78] un electrón en un gas bidimensional 2DEG de confinamiento parabólico y con energía $\hbar\omega_0$, en presencia de un campo magnético perpendicular ($\mathbf{B} = B\hat{e}_z$), se describe por el Hamiltoniano

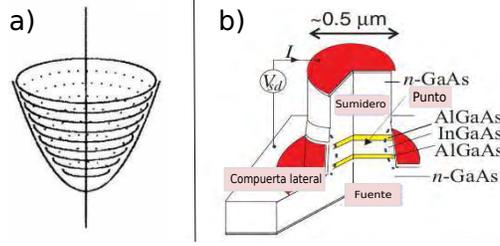


Figura 3.1: Esquemas de Puntos cuánticos bidimensionales, **a)** Representación de un punto cuántico lateral como un potencial parabólico, tomada de [77], **b)** Esquema de un punto cuántico bidimensional lateral, tomado de [67]

$$H_0 = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2), \quad (3.1)$$

donde m es la masa efectiva del electrón, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ su momento canónico, \mathbf{A} el potencial vectorial, e la carga del electrón, c la velocidad de la luz, y ω_0 la frecuencia de confinamiento.

Si elegimos la norma simétrica para el potencial vectorial $\mathbf{A} = (-y, x, 0)B/2$, sustituimos en el Hamiltoniano y se escribe de la siguiente manera:

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla + \frac{eB}{2c}(-y, x, 0) \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2), \quad (3.2)$$

desarrollamos un poco y lo llevamos a la forma:

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{e^2 B^2}{8m c^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{-i\hbar e B}{2m c} \left(\frac{x\partial}{\partial y} - \frac{y\partial}{\partial x} \right), \quad (3.3)$$

identificamos a $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$ como la frecuencia de ciclotrón, entonces nuestro Hamiltoniano queda:

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{m\omega_c^2}{8} + \frac{m\omega_0^2}{2} \right) (x^2 + y^2) + \frac{-i\hbar\omega_c}{2} \left(\frac{x\partial}{\partial y} - \frac{y\partial}{\partial x} \right), \quad (3.4)$$

consideremos una frecuencia de la forma $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$, lo cual nos permite reescribir nuestro Hamiltoniano:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}_x^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_y^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2}(x\mathbf{p}_y - y\mathbf{p}_x). \quad (3.5)$$

Utilizando los operadores de creación y aniquilación $\hat{a}_x = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\tilde{\omega}}}(m\tilde{\omega}x + ip_x)$, $\hat{a}_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\tilde{\omega}}}(m\tilde{\omega}x - ip_x)$, $\hat{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\tilde{\omega}}}(m\tilde{\omega}y + ip_y)$, $\hat{a}_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\tilde{\omega}}}(m\tilde{\omega}y - ip_y)$ y recordando que el conmutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ podemos escribir al Hamiltoniano en la notación de segunda cuantización es

$$H_0 = \hbar\tilde{\omega}(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1) + \frac{\hbar\omega_c}{2i}(\hat{a}_y\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger). \quad (3.6)$$

Introduciendo $\hat{a}_{\pm} = 2^{-1/2}(\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)$ nos ayuda a desacoplar el sistema en eigenvalores de frecuencia $\omega_{\pm} = \tilde{\omega} \pm \omega_c/2$, reducimos a nuestro Hamiltoniano como la suma de dos osciladores armónicos con frecuencias características ω_{\pm}

$$H_0 = \hbar\omega_+ \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hbar\omega_- \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-. \quad (3.7)$$

Ahora consideramos la interacción IEO Bychkov-Rashba

$$H_{so} = -\frac{\alpha}{2} \left\{ \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times \boldsymbol{\sigma} \right\}_z, \quad (3.8)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de matrices de Pauli y la constante de acoplamiento espín-órbita Rashba ‘ α ’ está relacionada a lo que podemos interpretar como la longitud de precesión del espín: $l_{so} \equiv \hbar^2/2m\alpha$. Si escribimos la IEO en función de \hat{a}_{\pm} y \hat{a}_{\pm}^\dagger , e introducimos los proyectores de espín $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sigma_y)$ obtenemos:

$$H_{so} = \frac{\alpha}{\tilde{l}} \left\{ \gamma_+ (a_+ \sigma_+ + a_+^\dagger \sigma_-) - \gamma_- (a_- \sigma_- + a_-^\dagger \sigma_+) \right\} \quad (3.9)$$

donde $\tilde{l} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\tilde{\omega}}}$, los coeficientes $\gamma_{\pm} \equiv 1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{l}}{l_B} \right)^2$, con la longitud magnética $l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$.

Recordamos que un Hamiltoniano Zeeman tiene la forma:

$$H_z = \frac{1}{2} E_z \sigma_z, \quad (3.10)$$

donde la energía de Zeeman es $E_z = \frac{|g|m}{2m_e} \left(\frac{l_B}{l_0} \right)$, con m_e la masa del electrón.

Sumando $H_0 + H_{so} + H_z$, obtenemos:

$$H = \hbar\omega_+ a_+^\dagger a_+ + \hbar\omega_- a_-^\dagger a_- + \frac{1}{2} E_z \sigma_z + \frac{\hbar l_0^2}{2\tilde{l} l_{so}} \left[\gamma_- (a_- \sigma_+ + a_-^\dagger \sigma_-) - \gamma_+ (a_+ \sigma_- + a_+^\dagger \sigma_+) \right], \quad (3.11)$$

donde $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ es la longitud de confinamiento del punto.

Utilizamos la representación de un solo electrón motivados por la buena relación que hay entre la teoría Fock-Darwin y experimentos en casos sin espín-órbita[79], además de estudios que muestran que los efectos de muchos cuerpos en QD, juegan un rol muy pequeño con respecto a los campos magnéticos aplicados.[80, 81, 82]

El Hamiltoniano da la base para la descripción dinámica del sistema, ya que está descrito en función

de un confinamiento parabólico H_0 , en presencia de un campo magnético lo que incita a considerar el efecto Zeeman H_z e integramos el Hamiltoniano de interacción espín-órbita tipo Rashba.

Todo lo anterior descrito bajo notación de segunda cuantización, podemos observar que existen transiciones de los estados de nuestra cavidad (2D-QD) con frecuencias ω_{\pm} además de transiciones de estados de espín ligadas a transiciones de estados en la cavidad (IEO).

Es necesario hacer una descripción de la dinámica en base a las eigenfunciones y eigenenergías del sistema, o bien algún otro procedimiento como es el caso de los coeficientes de Schmidt y Entropía de Entrelazamiento que nos describen la dinámica de entrelazamiento.

Resolver este Hamiltoniano presenta complicaciones, por lo que en las siguientes secciones se muestran dos enfoques para aproximarnos a soluciones parciales a este sistema físico, que sean objetivas, congruentes y plausibles.

3.1.1. Aproximación del tipo Onda Rotante (RWA).

Utilizada en Óptica atómica y resonancia magnética, básicamente en esta aproximación se desprecian los términos de un Hamiltoniano que posean rápidas oscilaciones. Esta es una aproximación válida cuando la radiación electromagnética aplicada tiene una resonancia cercana con la resonancia atómica y la intensidad es baja.

En el estado sólido podemos aplicar directamente la aproximación de onda rotante bajo la premisa de que nuestro sistema contiene oscilaciones de menor frecuencia que la de la luz, o bien que el acoplamiento espín-órbita es pequeño comparado con el confinamiento.

Tenemos que derivando una forma aproximada del Hamiltoniano (3.11) en la cual los términos procedentes de γ_+ rotan en dirección opuesta y son entonces despreciados bajo la aproximación de onda rotante, la restricción que estamos considerando es que no hay transiciones de estados de ocupación con modo ω_+ y estados de espín.¹

Luego entonces cuando el acoplamiento espín-órbita es pequeño comparado con el confinamiento, esto desacopla el modo ω_+ del resto del sistema en el Hamiltoniano total (3.11), dando:

$$H = \hbar\omega_+ a_+^\dagger a_+ + \hbar\omega_- a_-^\dagger a_- + \frac{1}{2} E_z \sigma_z + \frac{\hbar l_0^2}{2\tilde{l}_{so}} \left[\gamma_- (a_- \sigma_+ + a_-^\dagger \sigma_-) \right], \quad (3.12)$$

reescribiendo este Hamiltoniano en la forma

¹NOTA: Es importante enfatizar que a lo largo de esta subsección estamos considerando un sistema tipo bipartito ($\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n$) o bien decimos que estamos trabajando con un punto cuántico bidimensional reducido, este nos ayuda a hacer una descripción aproximada del sistema que queremos resolver.

$$H = \hbar\omega_+n_+ + H_{JC}, \quad (3.13)$$

donde identificamos a la componente H_{JC} como el Modelo de Jaynes-Cummings (JCM por sus siglas en inglés *Jaynes-Cummings Model*) de la óptica cuántica,²

$$H_{JC} = \hbar\omega_-a_-^\dagger a_- + E_z\sigma_z + \frac{\hbar l_0^2 \gamma_-}{2\tilde{l}_{so}}(a_- \sigma_+ + a_-^\dagger \sigma_-), \quad (3.14)$$

este es completamente integrable, tiene un estado base $|\downarrow, 0\rangle$ con energía $E_G = -E_z/2$ independiente del acoplamiento. El resto del espacio de Hilbert del JCM se descompone en subespacios bidimensionales

$$\{|\uparrow, n\rangle, |\downarrow, n+1\rangle; n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

La diagonalización en cada subespacio nos da las energías:

$$E_n^\pm = (n + 1/2)\omega_- \pm R_n/2, \quad (3.15)$$

con un defasamiento del modo de transición de estado y el desdoblamiento Zeeman $\delta \equiv \omega_- - E_z$, además con $R_n = \sqrt{\delta^2 + 4g_-^2(n+1)}$ donde $g_- = \frac{l_0^2 \gamma_-}{2\tilde{l}_{so}}$, si $\delta = 0$ entonces se logra a una condición de resonancia entre el modo ω_- y la energía de Zeeman.

Los eigenestados del JCM son³:

$$|\psi_n^+\rangle = \text{sen } \theta_n |\downarrow, n\rangle + \text{cos } \theta_n |\uparrow, n+1\rangle, \quad (3.16)$$

$$|\psi_n^-\rangle = \text{cos } \theta_n |\downarrow, n\rangle - \text{sen } \theta_n |\uparrow, n+1\rangle, \quad (3.17)$$

donde $\tan \theta_n = \frac{2g_- \sqrt{n+1}}{\delta}$, $0 \leq \theta_n \leq \pi$ y los coeficientes descritos en función de los parámetros anteriores son:

$$\cos \theta_n = \frac{R_n - \delta}{\sqrt{(R_n - \delta)^2 + 4g_-^2(n+1)}}, \quad (3.18)$$

²A partir de aquí consideramos que sólo H_{JC} nos define la dinámica del sistema ya que el componente $\omega_+ a_+^\dagger a_+$ podemos interpretarlo como un desplazamiento del Hamiltoniano por lo que no afecta el despreciarlo en la descripción subsecuente.

³Para ver detalles de como obtener los eigenvalores y eigenvectores de esta sección consultar el Apéndice B.

$$\text{sen } \theta_n = \frac{2g_- \sqrt{n+1}}{\sqrt{(R_n - \delta)^2 + 4g_-^2 (n+1)}}, \quad (3.19)$$

3.1.1.1. Propiedades de función de onda estacionaria.

Antes de hacer el análisis dinámico encontramos las eigenfunciones y eigenenergías estacionarias. Supongamos que nuestro sistema se encuentra bajo un estado inicial separable con probabilidad de espín a , b y probabilidad de ocupación C_n

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n aC_n |\downarrow, n\rangle + bC_n |\uparrow, n\rangle,$$

reescribiendo los estados $|\downarrow, n\rangle$ y $|\uparrow, n\rangle$ en función de los eigenestados del JCM (3.16),(3.17):

$$\begin{aligned} |\downarrow, n\rangle &= \text{sen } \theta_n |\psi_n^+\rangle + \text{cos } \theta_n |\psi_n^-\rangle \\ |\uparrow, n\rangle &= \text{cos } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^+\rangle - \text{sen } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^-\rangle, \end{aligned} \quad (3.20)$$

reescribiendo nuestro estado inicial en función de los estados 3.20 obtenemos

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi(0)\rangle &= \sum_n aC_n (\text{sen } \theta_n |\psi_n^+\rangle + \text{cos } \theta_n |\psi_n^-\rangle) + \\ &+ bC_n (\text{cos } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^+\rangle - \text{sen } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^-\rangle), \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.1.1.2. Función de onda dinámica.

La evolución en el tiempo de (3.21) la obtenemos de aplicar el operador de evolución temporal ($e^{-iHt/\hbar}$) descrito en la eigenbase

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_n e^{-iHt/\hbar} [aC_n (\text{sen } \theta_n |\psi_n^+\rangle + \text{cos } \theta_n |\psi_n^-\rangle) + \\ &+ bC_n (\text{cos } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^+\rangle - \text{sen } \theta_{n-1} |\psi_{n-1}^-\rangle)], \end{aligned} \quad (3.22)$$

sustituyendo las energías del sistema (3.15)

$$\begin{aligned} \rightarrow |\psi(t)\rangle &= \sum_n \left[aC_n (\text{sen } \theta_n e^{-iE_n^+ t/\hbar} |\psi_n^+\rangle + \text{cos } \theta_n e^{-iE_n^- t/\hbar} |\psi_n^-\rangle) + \right. \\ &+ \left. bC_n (\text{cos } \theta_{n-1} e^{-iE_{n-1}^+ t/\hbar} |\psi_{n-1}^+\rangle - \text{sen } \theta_{n-1} e^{-iE_{n-1}^- t/\hbar} |\psi_{n-1}^-\rangle) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde las energías podemos compactarlas un poco más proponiendo

$$E_n^\pm = \underbrace{\hbar((n+1/2)\omega_-)}_{\Omega(n)} \pm \frac{R_n}{2}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto los factores temporales quedan expresados

$$e^{-iE_n^\pm t/\hbar} = e^{-i\Omega(n)t} e^{\mp iR_n t/2}, \quad (3.25)$$

si escribimos la identidad de la siguiente forma

$$e^{\mp iR_n t/2} = \underbrace{\cos\left(\frac{R_n t}{2}\right)}_{C(n)} \mp i \underbrace{\text{sen}\left(\frac{R_n t}{2}\right)}_{iS(n)}, \quad (3.26)$$

donde identificamos a R_n como la frecuencia de oscilaciones de Rabi del electrón dentro de la cavidad. Estas frecuencias tienen su representación en función de los parámetros del sistema ($R_n = \sqrt{\delta^2 + 4g_-^2(n+1)}$), por lo que varían en cada estado energético del sistema.

Finalmente la función de onda expresada en la eigenbase es:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_n [aC_n(\text{sen } \theta_n(C(n) - iS(n)) |\psi_n^+\rangle + \\ & + \cos \theta_n(C(n) + iS(n)) |\psi_n^-\rangle) e^{-i\Omega(n)t} + \\ & + bC_n(\cos \theta_{n-1}(C_{(n-1)} - iS_{(n-1)}) |\psi_{n-1}^+\rangle - \\ & - \text{sen } \theta_{n-1}(C_{(n-1)} + iS_{(n-1)}) |\psi_{n-1}^-\rangle) e^{-i\Omega(n-1)t}], \end{aligned} \quad (3.27)$$

encontramos la misma función escrita en la base de ocupación

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_n [aC_n(C(n) + i(\cos^2 \theta_n - \text{sen}^2 \theta_n)S(n)) e^{-i\Omega(n)t} |\downarrow, n\rangle + \\ & + bC_n(C_{(n-1)} - i(\cos^2 \theta_{n-1} - \text{sen}^2 \theta_{n-1})S_{(n-1)}) e^{-i\Omega(n-1)t} |\uparrow, n\rangle + \\ & - iaC_n S(n) (2 \text{sen } \theta_n \cos \theta_n) e^{-i\Omega(n)t} |\uparrow, n+1\rangle - \\ & - ibC_n S_{(n-1)} (2 \text{sen } \theta_{n-1} \cos \theta_{n-1}) e^{-i\Omega(n-1)t} |\downarrow, n-1\rangle]; \end{aligned} \quad (3.28)$$

con $\cos 2\theta_n = \cos^2 \theta_n - \text{sen}^2 \theta_n = -\frac{\delta}{R_n}$ y $\text{sen } 2\theta_n = 2 \text{sen } \theta_n \cos \theta_n = \frac{2g_- \sqrt{n+1}}{R_n}$ compactamos más la función de onda

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = \sum_n & [aC_n C_{(n)} + iS_{(n)}(aC_n \cos 2\theta_n - bC_{n+1} \sin 2\theta_n)]e^{-i\Omega(n)t} |\downarrow, n\rangle + \\
& [bC_n C_{(n-1)} - iS_{(n-1)}(aC_{n-1} \sin 2\theta_{n-1} - bC_n \cos 2\theta_{n-1})]e^{-i\Omega(n-1)t} |\uparrow, n\rangle.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para expresar la función de onda temporal en función de los estados de ocupación y espín $|\downarrow, n\rangle \wedge |\uparrow, n\rangle$, definimos:

$$\begin{aligned}
a_n(t) & := [aC_n C_{(n)} + iS_{(n)}(aC_n \cos 2\theta_n - bC_{n+1} \sin 2\theta_n)]e^{-i\Omega(n)t}, \\
b_n(t) & := [bC_n C_{(n-1)} - iS_{(n-1)}(aC_{n-1} \sin 2\theta_{n-1} - bC_n \cos 2\theta_{n-1})]e^{-i\Omega(n-1)t},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

entonces reescribimos (3.29)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a(t) |\downarrow, n\rangle + b(t) |\uparrow, n\rangle. \tag{3.31}$$

3.1.1.3. Dinámica de entrelazamiento (Coeficientes de Schimdt).

Consideremos que a un tiempo $t = 0$ la función de onda se encuentra en un estado $|\psi(0)\rangle$, vemos que su evolución en el tiempo está dada por la siguiente función de onda:

$$|\psi(0)\rangle = (a|\downarrow\rangle + b|\uparrow\rangle) \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \longrightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) |\downarrow, n\rangle + b_n(t) |\uparrow, n\rangle), \tag{3.32}$$

con los coeficientes $a_n(t)$ y $b_n(t)$ dependientes de los parámetros iniciales definidos en (3.30).

Ya que tenemos esta función de onda, podemos cotejar la evolución del entrelazamiento. Esto lo logramos aplicando una traza parcial con respecto al espacio de ocupación en el operador de densidad $\hat{\rho}(t)$. O bien calculando los coeficientes de Schmidt. Sabemos que solo serán dos coeficientes por reducirse al subsistema de espín.

Primero escribamos al operador de densidad de nuestro sistema:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(t) & = \sum_n (a_n(t) |\downarrow, n\rangle + b_n(t) |\uparrow, n\rangle)(a_n^*(t) \langle\downarrow, n| + b_n^*(t) \langle\uparrow, n|) = \\
& = \sum_n a_n(t)a_n^*(t) |\downarrow, n\rangle \langle\downarrow, n| + b_n(t)a_n^*(t) |\uparrow, n\rangle \langle\downarrow, n| + \\
& + a_n(t)b_n^*(t) |\downarrow, n\rangle \langle\uparrow, n| + b_n(t)b_n^*(t) |\uparrow, n\rangle \langle\uparrow, n|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Aplicando la descomposición de Schmidt (realizar una traza parcial):

$$\text{tr}_n(\hat{\rho}(t)) = \hat{\rho}_{n'}(t), \quad (3.34)$$

una vez hecha la traza parcial sumamos sobre todos los estados de la cavidad y obtenemos al operador de densidad en representación matricial:

$$\hat{\rho}_n(t) = \begin{pmatrix} \sum_n |a_n(t)|^2 & \sum_n a_n(t)b_n^*(t) \\ \sum_n b_n(t)a_n^*(t) & \sum_n |b_n(t)|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

podemos parametrizar al operador de densidad en función de las componentes de Bloch:

$$\hat{\rho}_n(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}); \quad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}; \quad (3.36)$$

donde definimos a las componentes como

$$S_\alpha(t) = \text{tr}[S_\alpha \rho(t)], \quad (3.37)$$

con $\alpha = x, y, z$.

Obtenemos la componente S_x usando $S_x = \langle \psi(t) | \frac{\sigma_x \otimes \mathbb{I}}{2} | \psi(t) \rangle$, aplicando el operador sobre el ket (3.31) tenemos:

$$S_x(t) = \langle \psi(t) | \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) |\uparrow\rangle \otimes |n\rangle + b_n |\downarrow\rangle \otimes |n\rangle, \quad (3.38)$$

desarrollando el bra y juntando ambas sumas:

$$S_x(t) = \sum_{n',n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (a_{n'}^*(t) \langle \downarrow | \otimes \langle n' | + b_{n'}^*(t) \langle \uparrow | \otimes \langle n' |) (a_n(t) |\uparrow\rangle \otimes |n\rangle + b_n(t) |\downarrow\rangle \otimes |n\rangle), \quad (3.39)$$

desarrollando un poco lo anterior

$$S_x(t) = a_{n'}^*(t)a_n(t)\langle \downarrow | \uparrow \rangle \otimes \langle n' | n \rangle + a_{n'}^*(t)b_n(t)\langle \downarrow | \downarrow \rangle \otimes \langle n' | n \rangle + b_{n'}^*(t)a_n(t)\langle \uparrow | \uparrow \rangle \otimes \langle n' | n \rangle + b_{n'}^*(t)b_n(t)\langle \uparrow | \downarrow \rangle \otimes \langle n' | n \rangle, \quad (3.40)$$

lo cual podemos simplificar invocando la propiedad de ortogonalidad de los estados de espín para finalmente obtener:

$$S_x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t)b_n^*(t) + b_n(t)a_n^*(t)); \quad (3.41)$$

llevamos acabo un procedimiento similar al anterior para encontrar la componente $S_y = \langle \psi(t) | \frac{\sigma_y \otimes \mathbb{I}}{2} | \psi(t) \rangle$, aplicando el operador sobre el ket (3.31) tenemos:

$$S_y(t) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t)b_n^*(t) - b_n(t)a_n^*(t)); \quad (3.42)$$

de la misma forma la componente $S_z = \langle \psi(t) | \frac{\sigma_z \otimes \mathbb{I}}{2} | \psi(t) \rangle$, aplicando el operador sobre el ket (3.31) tenemos:

$$S_z(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)|^2 - |b_n(t)|^2. \quad (3.43)$$

Ahora que tenemos las componentes del vector de Bloch, encontramos que los coeficientes de Schmidt para un sistema compuesto de dos subsistemas están dados por los eigenvalores de la matriz de densidad y al ser esta 2×2 (3.35) sabemos que estos tienen la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(1 + |S|), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(1 - |S|). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para realizar nuestros cálculos consideremos la diferencia de los eigenvalores (coeficientes de Schmidt) y observemos que esta diferencia se reduce a:

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + |S|) - \frac{1}{2}(1 - |S|) = |S|, \quad (3.45)$$

con $|S| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$, por lo que, si deseamos analizar los coeficientes de Schmidt bastará con estudiar el comportamiento de la norma de los vectores de Bloch.

En el capítulo de resultados, vamos a utilizar indistintamente a $|S|$ como los coeficientes de Schmidt, de tal manera que cuando esta tenga su valor mínimo encontraremos un estado máximamente entrelazado.

3.1.2. Método de transformaciones canónicas.

En esta sección se trabaja con el método de aproximación de transformaciones canónicas de Bogolyubov,⁴ el cual consiste en pasar del problema no perturbado al problema perturbado mediante una transformación unitaria. Con esto justificamos el hecho de aplicar una perturbación con un orden energético similar al del sistema sin perturbar.

El sistema bajo estudio ya no es un sistema tipo bipartito (como el tratado en la sección anterior), sino que se toma en cuenta un segundo subespacio de ocupación. Por lo que ahora se habla de un sistema tipo tripartito ($\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$), donde $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ caracteriza todo el espacio del punto cuántico bidimensional y \mathcal{H}_2 representa el espacio de espín $\frac{1}{2}$.

3.1.2.1. Construcción del método.

Primero que nada hablemos de los estados que describen nuestro sistema. Estos tienen la forma $|s, n_-, n_+\rangle$, con $s = \{\uparrow, \downarrow\}$, donde el primer término corresponde al estado de espín y $|n_-, n_+\rangle$ corresponden a los estados de ocupación del punto cuántico bidimensional.

Partiendo del Hamiltoniano (3.11), consideramos que el Hamiltoniano sin perturbar es (3.14) y recordamos que los vectores que conforman la base no perturbada son

$$|\varphi_{n_-n_+}^{(0)+}\rangle \equiv \sin \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_-, n_+\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle, \quad (3.46)$$

$$|\varphi_{n_-n_+}^{(0)-}\rangle \equiv \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_-, n_+\rangle - \sin \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle, \quad (3.47)$$

identificamos a estos como los eigenvectores del JCM pero pensado en un sistema tipo tripartito, donde los estados del sistema están descritos en la base de espín-órbita como:

$$|\downarrow, n_-, n_+\rangle \equiv \sin \frac{\theta_{n_-}}{2} |\varphi_{n_-n_+}^{(0)+}\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\varphi_{n_-n_+}^{(0)-}\rangle, \quad (3.48)$$

$$|\uparrow, n_-, n_+\rangle \equiv \cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} |\varphi_{n_- - 1n_+}^{(0)+}\rangle - \sin \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} |\varphi_{n_- - 1n_+}^{(0)-}\rangle. \quad (3.49)$$

Entonces suponemos que existe un operador unitario \hat{S} que transforma la base no perturbada $|\varphi_{n_-n_+}^{(0)\pm}\rangle$

⁴A grandes rasgos se busca una forma alterna de hacer el desarrollo de perturbaciones pequeñas Rayleigh-Schrödinger (ver el apéndice C)

en la perturbada $|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle$, esto es,

$$|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle = \hat{S} |\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle. \quad (3.50)$$

A continuación se presenta una descripción en la base de espín-órbita, más adelante se aplica la misma metodología a los eigenvectores tipo JCM.

De la ecuación de Schödringer notamos que

$$\langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\hat{H}_0 + \lambda\hat{V}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle = E_{n-n_+}^\pm \langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle, \quad (3.51)$$

donde $E_{n-n_+}^\pm$ es la eigenenergía perturbada, desarrollando lo anterior, tenemos

$$\langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\hat{H}_0|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle + \langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\lambda\hat{V}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle = E_{n-n_+}^\pm \langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle, \quad (3.52)$$

es decir,

$$\lambda \langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\hat{V}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle = \left(E_{n-n_+}^\pm - E_{m-m_+}^{(0)\pm}\right) \langle\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle \quad (3.53)$$

donde $E_{m-m_+}^{(0)\pm}$ es la eigenenergía no perturbada.

Al poner que $|\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}\rangle = |\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle$, tenemos

$$\lambda \langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{V}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle = \left(E_{n-n_+}^\pm - E_{n-n_+}^{(0)\pm}\right) \langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle. \quad (3.54)$$

Lo cual implica que la diferencia de energías esta descrita por

$$E_{n-n_+}^\pm - E_{n-n_+}^{(0)\pm} = \lambda \frac{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{V}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle}{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\Psi_{n-n_+}^\pm\rangle}. \quad (3.55)$$

Nos lleva inmediatamente a:

$$E_{n-n_+}^\pm - E_{n-n_+}^{(0)\pm} = \lambda \frac{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{V}\hat{S}|\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle}{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{S}|\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle} \quad (3.56)$$

Aplicando el operador de proyección y utilizando la condición de cerradura, tenemos

$$E_{n-n_+}^\pm - E_{n-n_+}^{(0)\pm} = \lambda \sum_{k-k_+} \frac{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{V}|\varphi_{k-k_+}^{(0)\pm}\rangle \langle\varphi_{k-k_+}^{(0)\pm}|\hat{S}|\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle}{\langle\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}|\hat{S}|\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle}. \quad (3.57)$$

Reescribiendo esta última ecuación obtenemos una expresión para calcular la energía perturbada

$$\begin{aligned}
E_{n-n_+}^{\pm} &= E_{n-n_+}^{(0)\pm} + \lambda \langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle + \\
&+ \lambda \sum_{k \neq n} \langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \frac{\langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle}{\langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Por otro lado, si se tiene que $|\varphi_{m-m_+}^{(0)\pm}\rangle \neq |\varphi_{n-n_+}^{(0)\pm}\rangle$, de (3.53), se sigue que

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{k \neq m} \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle + \dots \\
&\dots + \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} \rangle \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = (E_{n-n_+}^{\pm} - E_{m-m_+}^{(0)\pm}) \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{\pm} \rangle
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{k \neq m} \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = \dots \\
&\dots = (E_{n-n_+}^{\pm} - E_{m-m_+}^{(0)\pm} - \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} \rangle) \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{S} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Mediante el uso iterativo de (3.58) y (3.60) es posible encontrar la correcciones a la energía y los elementos de matriz de \hat{S} .

Para obtener E_{n-n_+} a primer orden en λ basta con poner $\hat{S} = 1$ en (3.58), lo que da:

$$\begin{aligned}
E_{n-n_+}^{\pm} &= E_{n-n_+}^{(0)\pm} + \lambda \sum_{k \neq n} \langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \frac{\langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle}{\langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle} + \\
&+ \lambda \langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$E_{n-n_+}^{\pm} = E_{n-n_+}^{(0)\pm} + \lambda \langle \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle. \tag{3.62}$$

Expandiendo a \hat{S} en potencias de λ , $\hat{S} = 1 + \lambda \hat{S}_1 + \dots$, lo sustituimos en (3.60) y obtenemos

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{k \neq m} \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | 1 + \lambda \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = \\
&= (E_{n-n_+}^{\pm} - E_{m-m_+}^{(0)\pm} - \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} \rangle) \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | 1 + \lambda \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

concentrándonos solo en el miembro de la izquierda, removiendo a $\sum_{k \neq m} |k\rangle \langle k|$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} (1 + \lambda \hat{S}_1) | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = \\
&= \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle + \lambda^2 \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

aplicando el operador de proyección, la ecuación anterior nos da

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \sum_{k \neq m} \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} \rangle \langle \varphi_{k-k_+}^{(0)\pm} | \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle + \\ & + \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = (E_{n-n_+}^\pm - E_{m-m_+}^\pm) \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde la energía perturbada esta descrita por $E_{m-m_+}^\pm \equiv E_{m-m_+}^{(0)\pm} + \lambda \langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} \rangle$, entonces podemos escribir a los elementos de matriz del operador \hat{S}_1 de la siguiente forma

$$\langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{S}_1 | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle = \lambda \frac{\langle \varphi_{m-m_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n-n_+}^{(0)\pm} \rangle}{(E_{n-n_+}^\pm - E_{m-m_+}^\pm)}. \quad (3.66)$$

Observamos que a primer orden en λ tenemos que:

$$E_{n-n_+}^\pm - E_{m-m_+}^\pm = E_{n-n_+}^{(0)\pm} - E_{m-m_+}^{(0)\pm}$$

como en la teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger (ver Apéndice C).

3.1.2.2. Propiedades estáticas.

En está sección aplicamos el método de transformaciones canónicas a los eigenestados del sistema sin perturbar, que son los estados del JCM (3.46) y (3.47), para obtener los eigenestados y eigenenergías perturbadas. Si pensamos que el Hamiltoniano de perturbación tiene una forma

$$\hat{V} = -g_+(\hat{a}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}_+^\dagger\hat{\sigma}_+), \quad (3.67)$$

donde $g_+ = \frac{l_0^2 \gamma_+}{2ll_{so}}$.

Basados en que conocemos las eigenfunciones y eigenvalores del JCM, basta considerar una perturbación como la mencionada en (3.67), y así poder aproximarnos al Hamiltoniano que contiene todas las interacciones de nuestro sistema (3.11). Continuamos nuestra descripción bajo la segunda cuantización con los operadores de transición de estados

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y).$$

Cada uno de estos operadores tiene frecuencias de transición $\omega_\pm = \tilde{\omega} \pm \frac{\omega_c}{2}$; donde $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$ es una componente que incluye a ω_0 que es la frecuencia natural de transición de estados del sistema y $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ es la frecuencia de ciclotrón.

Definimos las siguientes componentes para englobar términos dentro del Hamiltoniano $\gamma_\pm = 1 \pm$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{l}}{l_B} \right)^2 \text{ con } \tilde{l} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\tilde{\omega}}};$$

identificamos a las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} l_B &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} && \text{Longitud magnética.} \\ l_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} && \text{Longitud de confinamiento del punto.} \\ E_z &= \frac{|g|m}{2m_e} \left(\frac{l_B}{l_0} \right)^2 && \text{Energía de Zeeman.} \end{aligned}$$

En la interacción epín-órbita la constante de acoplamiento “ α ” está relacionada a lo que podemos nombrar como una longitud de precesión del espín:

$$l_{so} = \frac{\hbar^2}{2m\alpha}$$

Recordemos también que los operadores de cambio de espín σ_{\pm} están definidos como

$$\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

y actúan de la siguiente manera $\hat{\sigma}_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\hat{\sigma}_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ y $\hat{\sigma}_+ |\uparrow\rangle = \hat{\sigma}_- |\downarrow\rangle = |0\rangle$.

Consideramos al Hamiltoniano de perturbación que actúa sobre los estados de la forma:

$$\hat{V} |\downarrow, n_-, n_+\rangle = -g_+ \left(\sqrt{n_+} |0, n_-, n_+ - 1\rangle + \sqrt{n_+ + 1} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right) \quad (3.68)$$

$$\hat{V} |\uparrow, n_-, n_+\rangle = -g_+ \left(\sqrt{n_+} |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle + \sqrt{n_+ + 1} |0, n_-, n_+ + 1\rangle \right) \quad (3.69)$$

Note que el Hamiltoniano de perturbación (3.67) es justo la componente que despreciamos al hacer la aproximación tipo onda rotante en la sección anterior, ahora además de esta perturbación consideramos tres subespacios de Hilbert correspondientes a: espín ($|\downarrow\rangle \wedge |\uparrow\rangle$) y las dos componentes orbitales o bien de carga ($|n_-\rangle \otimes |n_+\rangle$).

Si $|\Phi_{n_-n_+}\rangle = \hat{S} |\varphi_{n_-n_+}^{(0)}\rangle$ y le multiplicamos por la izquierda un estado $\langle\varphi_{m_-m_+}^{(0)}|$, se tiene

$$\langle\varphi_{m_-m_+}^{(0)}|\Phi_{n_-n_+}\rangle = \langle\varphi_{m_-m_+}^{(0)}|\hat{S}|\varphi_{n_-n_+}^{(0)}\rangle. \quad (3.70)$$

Expandiendo a \hat{S} en potencias de λ

$$\hat{S} = 1 + \lambda \hat{S}_1 + \lambda^2 \hat{S}_2 + \dots$$

Tomando la aproximación a primer orden la ecuación (3.70) es descrita

$$\langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \Phi_{n_- n_+} \rangle \simeq \langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | (1 + \lambda \hat{S}_1) | \varphi_{n_- n_+}^{(0)} \rangle \quad (3.71)$$

o bien escribimos

$$\langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \Phi_{n_- n_+} \rangle \simeq \langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \varphi_{n_- n_+}^{(0)} \rangle + \lambda \langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \hat{S}_1 | \varphi_{n_- n_+}^{(0)} \rangle, \quad (3.72)$$

utilizamos (3.66) y reescribimos la ecuación anterior como

$$\langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \Phi_{n_- n_+} \rangle \simeq \langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \varphi_{n_- n_+}^{(0)} \rangle + \lambda^2 \frac{\langle \varphi_{m_- m_+}^{(0)} | \hat{V} | \varphi_{n_- n_+}^{(0)} \rangle}{(E_{n_- n_+} - E_{m_- m_+})}. \quad (3.73)$$

Lo cual implica que el eigenvector en la base perturbada puede ser representado a primer orden como:

$$|\Phi_{n_- n_+}^{(\pm)}\rangle \simeq |\varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm}\rangle + \lambda^2 \frac{\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm}\rangle}{(E_{n_- n_+}^{(\pm)} - E_{m_- m_+}^{(\pm)})}. \quad (3.74)$$

Sabemos que las eigenenergías de la base no perturbada son

$$E_{m_- m_+}^{(0)\pm} = (m_- + \frac{1}{2})\omega_- + (m_+ + \frac{1}{2})\omega_+ \pm \frac{\Delta_{m_-}}{2}, \quad (3.75)$$

donde $\Delta_{m_-} = \sqrt{\delta^2 + 4g_-^2(m_- + 1)}$. Entonces las eigenenergías perturbadas quedan descritas por

$$E_{n_- n_+}^{\pm} = E_{n_- n_+}^{\pm(0)} + \lambda \langle \varphi_{n_- n_+}^{\pm(0)} | \hat{V} | \varphi_{n_- n_+}^{\pm(0)} \rangle, \quad (3.76)$$

sustituyendo (3.75) en (3.76) se obtiene

$$E_{n_- n_+}^{(0)\pm} = (n_- + \frac{1}{2})\omega_- + (n_+ + \frac{1}{2})\omega_+ \pm \frac{\Delta_{n_-}}{2} + \lambda \langle \varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm} \rangle, \quad (3.77)$$

ahora sólo falta por determinar $\langle \varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n_- n_+}^{(0)\pm} \rangle$.

Primero haciendo operar el Hamiltoniano de perturbación sobre el eigenestado del JCM, *i.e.*, $\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)}\rangle$, se observa como opera sobre los distintos estados $|\varphi_{n_- n_+}^{(0)+}\rangle$ y $|\varphi_{n_- n_+}^{(0)-}\rangle$ por separado. Para el estado $|\varphi_{n_- n_+}^{(0)+}\rangle$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)+}\rangle &= -g_+(\text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+} |0, n_-, n_+ - 1\rangle + \\
&+ \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+ + 1} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle + \\
&+ \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \\
&+ \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+ + 1} |0, n_- + 1, n_+ + 1\rangle)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)+}\rangle = -g_+(\sqrt{n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \sqrt{n_+ + 1} \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle). \tag{3.79}$$

Por otro lado para el caso de $|\varphi_{n_- n_+}^{(0)-}\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)-}\rangle &= -g_+(\cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+} |0, n_-, n_+ - 1\rangle + \\
&+ \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+ + 1} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle - \\
&- \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle - \\
&- \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \sqrt{n_+ + 1} |0, n_- + 1, n_+ + 1\rangle),
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)-}\rangle = -g_+(-\sqrt{n_+} \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \sqrt{n_+ + 1} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle), \tag{3.81}$$

definimos $\mathcal{H}_{ij n_- n_+}^+ := \langle \varphi_{ij}^{(0)+} | \hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)+}\rangle$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ij n_- n_+}^+ &= -g_+(\sqrt{n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \langle \varphi_{ij}^{(0)+} | \downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \\
&+ \sqrt{n_+ + 1} \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \langle \varphi_{ij}^{(0)+} | \uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

después de un poco de desarrollo se encuentra que

$$\mathcal{H}_{ij n_- n_+}^+ = -g_+(\sqrt{n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen } \frac{\theta_i}{2} \delta_{i, n_- + 1} \delta_{j, n_+ - 1} + \sqrt{n_+ + 1} \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \delta_{i+1, n_-} \delta_{j, n_+ + 1}), \tag{3.83}$$

ahora calculando $\mathcal{H}_{ij n_- n_+}^- := \langle \varphi_{ij}^{(0)-} | \hat{V} |\varphi_{n_- n_+}^{(0)-}\rangle$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{ij n_- n_+}^- &= -g_+(-\sqrt{n_+} \text{sen } \frac{\theta_{n_-}}{2} \langle \varphi_{ij}^{(0)-} | \downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \\
&+ \sqrt{n_+ + 1} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \langle \varphi_{ij}^{(0)-} | \uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle),
\end{aligned} \tag{3.84}$$

luego de un poco de desarrollo

$$\mathcal{H}_{ijn_{-}n_{+}}^{-} = g_{+}(\sqrt{n_{+}} \sin \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \cos \frac{\theta_i}{2} \delta_{i,n_{-}+1} \delta_{j,n_{+}-1} + \sqrt{n_{+}+1} \cos \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \sin \frac{\theta_i}{2} \delta_{i+1,n_{-}} \delta_{j,n_{+}+1}), \quad (3.85)$$

finalmente obtenemos el valor de las energías perturbadas a primer orden sustituyendo el valor de $\langle \varphi_{n_{-}n_{+}}^{(0)\pm} | \hat{V} | \varphi_{n_{-}n_{+}}^{(0)\pm} \rangle$ en la ecuación (3.76):

$$E_{n_{-}n_{+}}^{+} = (n_{-} + 1/2)\omega_{-} + (n_{+} + 1/2)\omega_{+} + \frac{\Delta n}{2} - \lambda g_{+} \left(\sqrt{n_{+}} \cos \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \sin \frac{\theta_{n_{-}+1}}{2} + \sqrt{n_{+}+1} \sin \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \cos \frac{\theta_{n_{-}-1}}{2} \right) \quad (3.86)$$

$$E_{n_{-}n_{+}}^{-} = (n_{-} + 1/2)\omega_{-} + (n_{+} + 1/2)\omega_{+} - \frac{\Delta n}{2} + \lambda g_{+} \left(\sqrt{n_{+}} \sin \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \cos \frac{\theta_{n_{-}+1}}{2} + \sqrt{n_{+}+1} \cos \frac{\theta_{n_{-}}}{2} \sin \frac{\theta_{n_{-}-1}}{2} \right) \quad (3.87)$$

En la figura 3.2 se plasman las energías perturbadas $E_{n_{-}n_{+}}^{\pm}$, donde se aprecian los valores de frecuencias del punto cuántico para los cuales se produce la transición entre estados.

En la sección de resultados se observará que bajo los parámetros mencionados en el pie de la figura 3.2 es donde se propicia una generación de estados máximamente entrelazados.

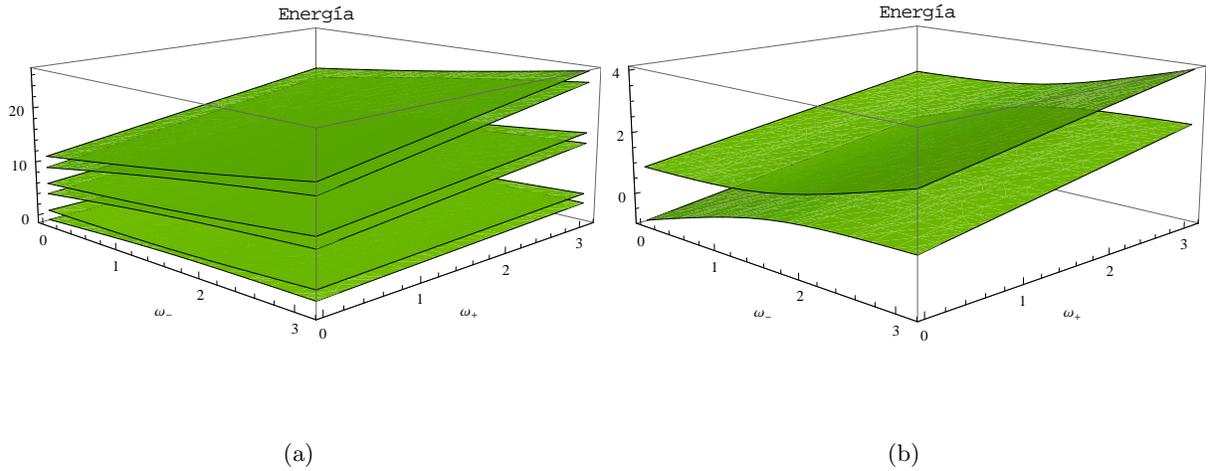


Figura 3.2: (a) Primeros seis niveles de energía perturbada a segundo orden para un caso donde el espín del electrón se encuentra polarizado inicialmente hacia abajo y se encuentra confinado en el estado base. Las energías están representadas como función de las frecuencias de transición de los estados n_{-} (ω_{-}) y n_{+} (ω_{+}). Podemos argumentar que bajo la condición inicial con $\delta = 0$ la condición de resonancia puede ser observada en la gráfica, justo donde se acercan mas los niveles de energía. Podemos adelantar que el entrelazamiento se manifiesta mayoritariamente en las transiciones de energía de los estados del sistema, además si hiciéramos un corte sobre el plano que cruza por $\omega_{+} = 0$ nos encontramos justo con la figura 4.2 del capítulo de resultados, que es la gráfica de energía sin perturbar de un sistema bipartito. (b) Ampliación de los primeros dos estados de energía donde se aprecia el acercamiento de estados (curvatura de ambos planos de energía).

Falta por calcular los eigenestados perturbados $|\Phi_{n_{-}n_{+}}^{\pm}\rangle$, estos los encontramos sustituyendo los valores

de las energías (3.86) y (3.87), así como los estados (3.79) y (3.81) en la ecuación (3.74), reescribiendo esta última ecuación observamos como toma las siguientes dos formas:

$$\begin{aligned}
|\Phi_{n_-n_+}^+\rangle &\simeq |\varphi_{n_-n_+}^{(0)+}\rangle - \\
&- \lambda^2 g_+ \left[\sqrt{n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \frac{\text{sen} \frac{\theta_{n_-}+1}{2} |\varphi_{n_-+1n_+-1}^{(0)+}\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}+1}{2} |\varphi_{n_-+1n_+-1}^{(0)-}\rangle}{(E_{n_-n_+}^+ - E_{n_-+1n_+-1}^+)} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{n_+ + 1} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \frac{\text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} |\varphi_{n_- -1n_++1}^{(0)+}\rangle - \text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} |\varphi_{n_- -1n_++1}^{(0)-}\rangle}{(E_{n_-n_+}^+ - E_{n_- -1n_++1}^+)} \right]
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_{n_-n_+}^-\rangle &\simeq |\varphi_{n_-n_+}^{(0)-}\rangle - \\
&- \lambda^2 g_+ \left[\sqrt{n_+} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \frac{\text{sen} \frac{\theta_{n_-}+1}{2} |\varphi_{n_-+1n_+-1}^{(0)+}\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}+1}{2} |\varphi_{n_-+1n_+-1}^{(0)-}\rangle}{(E_{n_-n_+}^- - E_{n_-+1n_+-1}^-)} + \right. \\
&+ \left. \sqrt{n_+ + 1} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \frac{\text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} |\varphi_{n_- -1n_++1}^{(0)+}\rangle - \text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} |\varphi_{n_- -1n_++1}^{(0)-}\rangle}{(E_{n_-n_+}^- - E_{n_- -1n_++1}^-)} \right]
\end{aligned} \tag{3.89}$$

donde las diferencias de las eigenenergías están dadas por:

$$\begin{aligned}
E_{n_-n_+}^+ - E_{n_-+1n_+-1}^+ &= -\omega_- + \omega_+ + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{2} + \\
&+ \lambda g_+ \left(\sqrt{n_+ - 1} \cos \frac{\theta_{n_-}+1}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}+2}{2} - \sqrt{n_+ + 1} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \cos \frac{\theta_{n_-}-1}{2} \right);
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
E_{n_-n_+}^+ - E_{n_- -1n_++1}^+ &= \omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{2} + \\
&+ \lambda g_+ \left(\sqrt{n_+ + 2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} \cos \frac{\theta_{n_-}-2}{2} - \sqrt{n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}+1}{2} \right);
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
E_{n_-n_+}^- - E_{n_-+1n_+-1}^- &= -\omega_- + \omega_+ + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{2} + \\
&+ \lambda g_+ \left(\sqrt{n_+ + 1} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}-1}{2} - \sqrt{n_+ - 1} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}+1}{2} \cos \frac{\theta_{n_-}+2}{2} \right);
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
E_{n_-n_+}^- - E_{n_- -1n_++1}^- &= \omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2} + \\
&+ \lambda g_+ \left(\sqrt{n_+} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \cos \frac{\theta_{n_-}+1}{2} - \sqrt{n_+ + 2} \cos \frac{\theta_{n_-}-1}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}-2}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Podemos reescribir los estados perturbados en la base de los estados de ocupación como sigue:

$$\begin{aligned}
|\Phi_{n_-n_+}^+\rangle &= \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_-, n_+\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle - \\
&- \left(\kappa_1^+ \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \kappa_2^+ \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right).
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_{n_-n_+}^-\rangle &= \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_-, n_+\rangle - \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle - \\
&- \left(-\kappa_1^- \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \kappa_2^- \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right).
\end{aligned} \tag{3.95}$$

donde κ_1^\pm y κ_2^\pm están descritos por:

$$\kappa_1^+ = \frac{\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+}}{E_{n_-n_+}^+ - E_{n_-+1n_+-1}^+} \tag{3.96}$$

$$\kappa_2^+ = \frac{\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1}}{E_{n_- n_+}^+ - E_{n_- - 1 n_+ + 1}^+} \quad (3.97)$$

$$\kappa_1^- = \frac{\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+}}{E_{n_- n_+}^- - E_{n_- + 1 n_+ - 1}^-} \quad (3.98)$$

$$\kappa_2^- = \frac{\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1}}{E_{n_- n_+}^- - E_{n_- - 1 n_+ + 1}^-} \quad (3.99)$$

3.1.2.3. Evolución temporal (Dinámica)

Supongamos que el sistema posee una condición inicial descrita en la base de espín-órbita por los estados perturbados de $|\downarrow, n_-, n_+\rangle$ (3.48) y $|\uparrow, n_-, n_+\rangle$ (3.49), entonces el estado inicial tiene la forma

$$|\phi(0)\rangle = \sum_{n_- n_+} \left[a C_{n_- n_+} (1 + \lambda \hat{S}_1) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + b C_{n_- n_+} (1 + \lambda \hat{S}_1) |\uparrow, n_-, n_+\rangle \right], \quad (3.100)$$

donde los coeficientes a y b representan la probabilidad inicial de encontrar al electrón con polarización hacia arriba o abajo respectivamente, los coeficientes $C_{n_- n_+}$ representan la probabilidad de ocupación de estados. En ambos casos se cumplen las condiciones de normalización $a^2 + b^2 = 1$ y $\sum_{n_- n_+} C_{n_- n_+}^2 = 1$. Aplicando el operador de evolución temporal

$$|\phi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\phi(0)\rangle, \quad (3.101)$$

desarrollando en función de la eigenbase del JCM perturbada (3.79) y (3.81) obtenemos

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle = & \sum_{n_- n_+} a C_{n_- n_+} \left(\text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^+\rangle + \right. \\ & \left. \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^-\rangle + \lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1} |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right) + \\ & b C_{n_- n_+} \left(\cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^+\rangle - \right. \\ & \left. \text{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^-\rangle + \lambda^2 g_+ \sqrt{n_+} |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

el operador de evolución temporal actúa de la siguiente forma en la eigenbase perturbada

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle = & \sum_{n_- n_+} a C_{n_- n_+} \left(\text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^+\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^-\rangle \right) + \\ & b C_{n_- n_+} \left(\cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^+\rangle - \text{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^-\rangle \right) + \\ & + a C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1} \left[\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right] |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right) + \\ & + b C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+} \left[\cos^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} \right] |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.103)$$

describiendo lo anterior en función de las eigenenergías perturbadas descritas por (3.86) y (3.87), obtenemos que la función de onda en el tiempo esta descrita por el estado:

$$\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle = & \sum_{n_- n_+} aC_{n_- n_+} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i(\omega_{n_- n_+} + g_{n_- n_+}^+)t/\hbar} e^{-i\Delta_{n_-} t/2\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^+\rangle + \\
& + aC_{n_- -1n_+} \text{cos} \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-i(\omega_{n_- -1n_+} + g_{n_- -1n_+}^-)t/\hbar} e^{i\Delta_{n_- -1} t/2\hbar} |\Phi_{n_- -1n_+}^-\rangle + \\
& + bC_{n_- +1n_+} \text{cos} \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i(\omega_{n_- n_+} + g_{n_- n_+}^+)t/\hbar} e^{-i\Delta_{n_-} t/2\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^+\rangle - \\
& - bC_{n_- -1n_+} \text{sen} \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-i(\omega_{n_- -1n_+} + g_{n_- -1n_+}^-)t/\hbar} e^{i\Delta_{n_- -1} t/2\hbar} |\Phi_{n_- -1n_+}^-\rangle + \\
& + aC_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1} \left[\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \text{cos}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right] |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right) + \\
& + bC_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+} \left[\text{cos}^2 \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-iE_{n_- -1n_+}^+ t/\hbar} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-iE_{n_- -1n_+}^- t/\hbar} \right] |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle \right),
\end{aligned} \tag{3.104}$$

donde $\omega_{n_- n_+} = (n_- + 1/2)\omega_- + (n_+ + 1/2)\omega_+$, y los términos $g_{n_- n_+}^\pm$ están dados por:

$$g_{n_- n_+}^\pm = \mp \lambda g_+ \left(\sqrt{n_+} \text{cos} \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_- + 1}}{2} + \sqrt{n_+ + 1} \text{cos} \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} \right). \tag{3.105}$$

Finalmente reescribiendo todo en la base de espín-órbita tenemos el estado⁵:

$$\begin{aligned}
|\phi(t)\rangle = & \sum_{n_- n_+} (1 + \lambda \hat{S}_1) [aC_{n_- n_+} \{ (\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \text{cos}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar}) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + \\
& + \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{cos} \frac{\theta_{n_-}}{2} (e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar}) |\uparrow, n_-, n_+\rangle \} + \\
& + bC_{n_- n_+} \{ \text{cos} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} (e^{-iE_{n_- - 1n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- - 1n_+}^- t/\hbar}) |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle + \\
& + (\text{cos}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^+ t/\hbar} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^- t/\hbar}) |\uparrow, n_-, n_+ - 1\rangle \}],
\end{aligned} \tag{3.106}$$

compactamos la función de onda a:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n_- n_+} a_{n_- n_+}(t) (1 + \lambda \hat{S}_1) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + b_{n_- n_+}(t) (1 + \lambda \hat{S}_1) |\uparrow, n_-, n_+\rangle \tag{3.107}$$

donde definimos a los coeficientes temporales como:

$$\begin{aligned}
a_{n_- n_+}(t) := & aC_{n_- n_+} (\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \text{cos}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar}) + \\
& + bC_{n_- + 1n_+} \text{cos} \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} (e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar}), \\
b_{n_- n_+}(t) := & bC_{n_- n_+} (\text{cos}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^+ t/\hbar} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^- t/\hbar}) + \\
& + aC_{n_- - 1n_+} \text{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} \text{cos} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} (e^{-iE_{n_- - 1n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- - 1n_+}^- t/\hbar}).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Note que si se anula el término de perturbación ($\lambda = 0$) y consideramos una representación en el espacio de Hilbert reducido podemos regresar al caso de la aproximación tipo onda rotante.

⁵para realizar los cálculos numéricos utilizamos la ecuación mostrada en el apéndice D

3.1.2.4. Dinámica de Entrelazamiento (Entropía de entrelazamiento)

Se observo la dinámica de entrelazamiento del sistema haciendo una descripción de la matriz de densidad del sistema, a través de esta calcularemos como evoluciona la entropía de entrelazamiento del sistema en el espacio de Hilbert tipo tripartito. Partimos de la definición de matriz de densidad (2.3), donde el estado que describe nuestro sistema a lo largo del tiempo es (3.107), sin embargo, encontramos conveniente hacer una descripción de la matriz de densidad en términos del estado (3.103) para después hacer una correcta descripción de la entropía de entrelazamiento. Escribimos pues la matriz de densidad

$$\hat{\rho}(t) = |\phi(t)\rangle \langle \phi(t)| = \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \{ \sum_{n_- n_+} a C_{n_- n_+} (\sin \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^+\rangle + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} |\Phi_{n_- n_+}^-\rangle) + \\ & + b C_{n_- n_+} (\cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^+\rangle - \sin \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} |\Phi_{n_- - 1 n_+}^-\rangle) + \\ & + a C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1} \left[\sin^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right] |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle \right) \} \\ & + b C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+} \left[\cos^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} + \sin^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} \right] |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle \right) \} \\ & \{ \sum_{n_- n_+} a C_{n_- n_+} (\sin \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{+iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} \langle \Phi_{n_- n_+}^+ | + \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{+iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \langle \Phi_{n_- n_+}^- |) + \\ & + b C_{n_- n_+} (\cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{+iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} \langle \Phi_{n_- - 1 n_+}^+ | - \sin \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{+iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} \langle \Phi_{n_- - 1 n_+}^- |) + \\ & + a C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+ + 1} \left[\sin^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right] \langle \uparrow, n_-, n_+ + 1 | \right) \} \\ & + b C_{n_- n_+} \left(\lambda^2 g_+ \sqrt{n_+} \left[\cos^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^+ t/\hbar} + \sin^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1 n_+}^- t/\hbar} \right] \langle \downarrow, n_-, n_+ - 1 | \right) \}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

donde inmediatamente identificamos a $|\Phi_{n_- n_+}^+\rangle$ como (3.94) y $|\Phi_{n_- n_+}^-\rangle$ como (3.95).

Aplicamos dos trazas parciales sucesivas⁶ una con respecto al subsistema de los $|n_+\rangle$ y el otro para el subsistema $|n_-\rangle$. Entonces tenemos una matriz de densidad reducida expresada en el subsistema de espín, es decir, se reduce la dinámica del sistema a un espacio de 2×2 , donde en cada elemento de la matriz se encuentran embebidas todas las interacciones de los subsistemas de ocupación.

$$\text{tr}_{n_-} [\text{tr}_{n_+} [\hat{\rho}(t)]] = \text{tr}_{n_-} [\hat{\rho}_{n_+}(t)] = \hat{\rho}_{n_- n_+}(t), \quad (3.111)$$

o bien,

$$\hat{\rho}_{n_- n_+}(t) = \begin{pmatrix} \langle \downarrow | \hat{\rho}_{n_- n_+}(t) | \downarrow \rangle & \langle \downarrow | \hat{\rho}_{n_- n_+}(t) | \uparrow \rangle \\ \langle \uparrow | \hat{\rho}_{n_- n_+}(t) | \downarrow \rangle & \langle \uparrow | \hat{\rho}_{n_- n_+}(t) | \uparrow \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

así pues tenemos que los elementos de la matriz de densidad reducida tienen las formas:

⁶Sabemos que si aplicamos una traza parcial reducimos el sistema matricial.

$$\begin{aligned}
\langle \downarrow | \hat{\rho}_{n-n_+}(t) | \downarrow \rangle = & \\
\sum_{n-n_+} [& (\alpha_{n-n_+}^{(1)}(t) + \beta_{n-n_+}^{(1)}(t)) (\alpha_{n-n_+}^{(1)*}(t) + \beta_{n-n_+}^{(1)*}(t)) + \\
& (\alpha_{n-n_+}^{(3)}(t) + \beta_{n-n_+}^{(3)}(t)) (\alpha_{n-n_+}^{(3)*}(t) + \beta_{n-n_+}^{(3)*}(t)) + \\
& + (\gamma_{n-n_+}^{(1)}(t) + \delta_{n-n_+}^{(1)}(t)) (\gamma_{n-n_+}^{(1)*}(t) + \delta_{n-n_+}^{(1)*}(t)) + \\
& + (\gamma_{n-n_+}^{(3)}(t) + \delta_{n-n_+}^{(3)}(t) + \epsilon_{n-n_+}^{(2)}(t)) (\gamma_{n-n_+}^{(3)*}(t) + \delta_{n-n_+}^{(3)*}(t) + \epsilon_{n-n_+}^{(2)*}(t))], & (3.113)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \downarrow | \hat{\rho}_{n-n_+}(t) | \uparrow \rangle = & \\
\sum_{n-n_+} [& (\alpha_{n-n_+}^{(1)}(t) + \beta_{n-n_+}^{(1)}(t)) (\gamma_{n-n_+}^{(2)*}(t) + \delta_{n-n_+}^{(2)*}(t))], & (3.114)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \uparrow | \hat{\rho}_{n-n_+}(t) | \downarrow \rangle = & \\
\sum_{n-n_+} [& (\gamma_{n-n_+}^{(2)}(t) + \delta_{n-n_+}^{(2)}(t)) (\alpha_{n-n_+}^{(1)*}(t) + \beta_{n-n_+}^{(1)*}(t))], & (3.115)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \uparrow | \hat{\rho}_{n-n_+}(t) | \uparrow \rangle = & \\
\sum_{n-n_+} [& (\alpha_{n-n_+}^{(2)}(t) + \beta_{n-n_+}^{(2)}(t)) (\alpha_{n-n_+}^{(2)*}(t) + \beta_{n-n_+}^{(2)*}(t)) + \\
& (\alpha_{n-n_+}^{(4)}(t) + \beta_{n-n_+}^{(4)}(t) + \epsilon_{n-n_+}^{(1)}(t)) (\alpha_{n-n_+}^{(4)*}(t) + \beta_{n-n_+}^{(4)*}(t) + \epsilon_{n-n_+}^{(1)*}(t)) + \\
& + (\gamma_{n-n_+}^{(2)}(t) + \delta_{n-n_+}^{(2)}(t)) (\gamma_{n-n_+}^{(2)*}(t) + \delta_{n-n_+}^{(2)*}(t)) + \\
& + (\gamma_{n-n_+}^{(4)}(t) - \delta_{n-n_+}^{(4)}(t)) (\gamma_{n-n_+}^{(4)*}(t) - \delta_{n-n_+}^{(4)*}(t))], & (3.116)
\end{aligned}$$

donde los términos de las sumas en los elementos de matriz son:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-n_+}^{(1)}(t) &= r_\alpha \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\alpha_{n-n_+}^{(2)}(t) &= r_\alpha \cos \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\alpha_{n-n_+}^{(3)}(t) &= r_\alpha \kappa_1^+ \cos \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\alpha_{n-n_+}^{(4)}(t) &= r_\alpha \kappa_2^+ \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-}}{2}, & (3.117)
\end{aligned}$$

donde $r_\alpha = aC_{n-n_+} \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-}}{2} e^{-i(\omega_{n-n_+} + g_{n-n_+}^+)t/\hbar} e^{-i\Delta_{n-}t/2\hbar}$,

$$\begin{aligned}
\beta_{n-n_+}^{(1)}(t) &= r_\beta \cos \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\beta_{n-n_+}^{(2)}(t) &= -r_\beta \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\beta_{n-n_+}^{(3)}(t) &= -r_\beta \kappa_1^- \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-}}{2}, \\
\beta_{n-n_+}^{(4)}(t) &= r_\beta \kappa_2^- \cos \frac{\theta_{n-}}{2}, & (3.118)
\end{aligned}$$

donde $r_\beta = aC_{n-n_+} \cos \frac{\theta_{n-}}{2} e^{-i(\omega_{n-n_+} + g_{n-n_+}^-)t/\hbar} e^{i\Delta_{n-}t/2\hbar}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_{n-n_+}^{(1)}(t) &= r_\gamma \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2}, \\
\gamma_{n-n_+}^{(2)}(t) &= r_\gamma \cos \frac{\theta_{n-1}}{2}, \\
\gamma_{n-n_+}^{(3)}(t) &= r_\gamma \kappa_1^+ \cos \frac{\theta_{n-1}}{2}, \\
\gamma_{n-n_+}^{(4)}(t) &= r_\gamma \kappa_2^+ \operatorname{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2}, & (3.119)
\end{aligned}$$

donde $r_\gamma = bC_{n_- - 1n_+} \cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-i(\omega_{n_- - 1n_+} + g_{n_- - 1n_+}^+)t/\hbar} e^{-i\Delta_{n_- - 1}t/2\hbar}$,

$$\begin{aligned}\delta_{n_- n_+}^{(1)}(t) &= r_\delta \cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2}, \\ \delta_{n_- n_+}^{(2)}(t) &= -r_\delta \operatorname{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2}, \\ \delta_{n_- n_+}^{(3)}(t) &= -r_\delta \kappa_1^- \operatorname{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2}, \\ \delta_{n_- n_+}^{(4)}(t) &= r_\delta \kappa_2^- \cos \frac{\theta_{n_- - 1}}{2},\end{aligned}\tag{3.120}$$

donde $r_\delta = bC_{n_- - 1n_+} \operatorname{sen} \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-i(\omega_{n_- - 1n_+} + g_{n_- - 1n_+}^-)t/\hbar} e^{i\Delta_{n_- - 1}t/2\hbar}$,

$$\epsilon_{n_- n_+}^{(1)}(t) = aC_{n_- n_+} \lambda^2 g_+ \sqrt{n_- + 1} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right),\tag{3.121}$$

$$\epsilon_{n_- n_+}^{(2)}(t) = bC_{n_- n_+} \lambda^2 g_+ \sqrt{n_-} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^- t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_- - 1}}{2} e^{-iE_{n_- - 1n_+}^+ t/\hbar} \right).\tag{3.122}$$

Recordemos que para hacer una descripción de la dinámica de entrelazamiento bajo este sistema (tipo tripartito) ya no es posible utilizar a los Coeficientes de Schmidt explícitamente, por lo que es necesario invocar a la entropía de entrelazamiento.⁷

De la sección 2.3.3 tenemos que la entropía de entrelazamiento es:

$$E(\psi) = - \sum_{n=1}^k p_n \ln p_n,\tag{3.123}$$

donde p_n son los coeficientes de Schmidt. Si bien es cierto que los coeficientes de Schmidt como tal no definen la dinámica de entrelazamiento, pero observamos como estos aparecen dentro de la entropía de entrelazamiento.

Utilizamos pues el método que tenemos para calcular los coeficientes y bastará con aplicarlo a (3.111) encontrar los coeficientes y efectuar las operaciones restantes en (3.123). Las componentes de Bloch que describen este sistema se encuentran en el área de Análisis Numérico de un espacio tripartito.

Sabemos que un estado máximamente entrelazado es aquel que posea un alto grado de desorden (mezcla), es decir, aquellos estados para los cuales nos sea imposible hacer una descripción de estados independientes (estados no separables, *e.g.*, edos. de Bell y combinaciones entre ellos) entonces decimos que el sistema tiene un máximo de entropía en nuestro caso $E(\psi) = 1$ (normalizado), luego entonces nos

⁷La entropía de entrelazamiento nos da cualitativamente el grado de entrelazamiento del sistema.

enfocaremos a cotejar los máximos de esta propiedad, entendiendo que justo en estos máximos se están generando estados con mayor correlación cuántica.

Capítulo 4

Resultados.

En este capítulo se encuentra un análisis numérico y resultados obtenidos para el modelo de un punto cuántico bidimensional de InGaAs, con interacción espín-órbita tipo Rashba con intensidad $\alpha = 1 \times 10^{-12} \text{eVm}$ e inmerso en un campo magnético externo B^1 . Consideramos un desdoblamiento Zeeman en las energías de los estados de ocupación del punto, además de distintas configuraciones iniciales donde variamos la cantidad de estados disponibles en el sistema.

Se presentan dos secciones;

- La primera dedicada al tratamiento del sistema bajo una aproximación de onda rotante, donde se considera al sistema (restringido) con sólo dos grados de libertad uno para el espín y uno para los estados de ocupación.
- La segunda sección considera al sistema completo, es decir, un sistema con tres grados de libertad, el correspondiente al espín y los dos grados de los estados de ocupación (por ser un 2DQD).

4.1. Tratamiento tipo RWA con espacio de Hilbert reducido.

A lo largo de esta sección se presenta un desarrollo numérico del análisis teórico mostrado en el capítulo anterior referente a un sistema tipo bipartito (espacio de Hilbert reducido de nuestro sistema), por lo que consideramos $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n$. Identificamos a cada uno de los subsistemas (espín (\mathcal{H}_2) y órbita (\mathcal{H}_n)), y se hace un desarrollo coherente a través de la RWA. A continuación presentamos algunos casos particulares que nos dan información respecto a la medición de entrelazamiento.

¹Consideramos un campo magnético fijo en $B_0 = 90 \text{mT}$, para garantizar un condición de resonancia en la transición de estados $\delta = \omega_- - E_z = 0$

Caso: $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$

Tomamos un sistema que se encuentra bajo una condición de resonancia del sistema $\delta = 0$, entre el modo de transición de estado energético permitido ω_- y la energía Zeeman E_z .

Sabemos que la dependencia temporal de la función de onda proviene de los coeficientes (3.30), por lo que hay que calcularlos. Tenemos las siguientes expresiones para los ángulos dobles

$$\cos(2\theta_n) = -\frac{\delta}{R_n} = 0, \quad (4.1)$$

$$\sin(2\theta_n) = \frac{2g_- \sqrt{n+1}}{R_n} = 1, \quad (4.2)$$

donde $R_n = \sqrt{\delta^2 + 4g_-^2(n+1)}$, ahora si reducimos los coeficientes de evolución temporal (3.30) a

$$\begin{aligned} a_n(t) &:= [aC_n \cos(g_- \sqrt{n+1}t) - ibC_{n+1} \sin(g_- \sqrt{n+1}t)]e^{\Omega(n)}; \\ b_n(t) &:= [bC_n \cos(g_- \sqrt{n}t) - iaC_{n-1} \sin(g_- \sqrt{n}t)]e^{\Omega(n-1)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

recordando que los vectores de Bloch justo están expresados en función de los valores promedio del operador de espín, y en términos de $a_n(t)$ y $b_n(t)$ quedan como

$$S_x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t)b_n^*(t) + b_n(t)a_n^*(t)); \quad (4.4)$$

$$S_y(t) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t)b_n^*(t) - b_n(t)a_n^*(t)); \quad (4.5)$$

$$S_z(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)|^2 - |b_n(t)|^2. \quad (4.6)$$

Ahora, consideremos una condición inicial donde el electrón se encuentre confinado en el estado base del punto cuántico con espín hacia abajo ($a = 1$)

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow, 0\rangle,$$

y solo participan dos niveles de energía permitidos $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. La función de onda es entonces:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^1 (a_n(t) |\downarrow, 0\rangle + b_n(t) |\uparrow, n\rangle). \quad (4.7)$$

Desarrollando la suma

$$|\psi(t)\rangle = a_0(t) |\downarrow, 0\rangle + b_0 |\uparrow, 0\rangle + a_1(t) |\downarrow, 1\rangle + b_1(t) |\uparrow, 1\rangle, \quad (4.8)$$

encontramos inmediatamente que la función se reduce a

$$|\psi(t)\rangle = \cos \frac{R_0 t}{2} |\downarrow, 0\rangle - i \operatorname{sen} \frac{R_0 t}{2} |\uparrow, 1\rangle. \quad (4.9)$$

Para calcular los coeficientes de Schmidt bajo esta condición encontramos que $S_x = S_y = 0$, quedando sólo por calcular la componente z de los vectores de Bloch

$$S_z = \frac{|\cos \frac{R_0 t}{2}|^2 - |i \operatorname{sen} \frac{R_0 t}{2}|^2}{2} = \frac{\cos(R_0 t)}{2}, \quad (4.10)$$

los coeficientes de Schmidt son: $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \right] = \frac{1}{2} [1 + |S|]$,

$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \right] = \frac{1}{2} [1 - |S|]$. Ahora haciendo una diferencia de los coeficientes de Schmidt obtenemos

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + |S|) - \frac{1}{2}(1 - |S|) = |S|. \quad (4.11)$$

Este último resultado es muy importante, ya que a partir de él realizamos todos los cálculos numéricos. Por lo tanto la magnitud del vector de Bloch solo depende de la componentes z .

$$|S(t)| = \frac{\cos(R_n t)}{2}. \quad (4.12)$$

Observemos que los mínimos de esta función se dan cuando $R_n t = \frac{n\pi}{2}$, para $n = 2i + 1$, $i \in \mathbb{Z}$, esto es, los valores con mayor grado de entrelazamiento se generan cuando los coeficientes de Schmidt tienen un mínimo $|S| = 0$, por lo que el valor que encontramos para el vector de Bloch nos informa que a lo largo del tiempo se generan estados máximamente entrelazados con un periodo de $\frac{2\pi}{R_n t}$.

Aprovechando que en esta condición el sistema sólo tiene cuatro estados disponibles podemos calcular concurrencia y compararla con los coeficientes de Schmidt. Utilizando la expresión de la concurrencia para estados puros (2.32), expresamos nuestra función de onda como función de los cuatro estados disponibles:

$$|\psi\rangle = a |\downarrow, \mathcal{N}^0\rangle + b |\downarrow, \mathcal{N}^0 + 1\rangle + c |\uparrow, \mathcal{N}^0\rangle + d |\uparrow, \mathcal{N}^0 + 1\rangle \quad (4.13)$$

Sustituyendo los factores a , b , c y d en la ecuación que describe la concurrencia:

$$\begin{aligned} C &= 2 | -(-C_{(0)} i S_{(0)}) | = \\ &= 2 \sqrt{C_{(0)}^2 S_{(0)}^2} = \\ &= \text{sen}(R_n t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Podemos observar para este caso en particular que existe una relación del tipo inversa entre Concurrencia y Coeficientes de Schmidt del tipo $C^2 + \frac{S^2}{1/4} = 1$. Haciendo un gráfico de estos parámetros bajo esta condición y ajustando ese factor en la medida de los coeficientes de Schmidt obtenemos la figura 4.1.

Un segundo caso donde se cumple esta relación entre la Concurrencia y los Coeficientes de Schmidt, corresponde al caso en que inicialmente se tiene la probabilidad de encontrar al espín totalmente polarizado, y también de encontrarlo en cualquiera de los dos niveles de energía disponibles con la misma probabilidad, este estado es:

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow, \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1)\rangle.$$

Vemos que tanto la Concurrencia como los coeficientes de Schmidt bajo este sistema en resonancia nos proporcionan información casi idéntica, y ahora generalicemos a casos donde la concurrencia no aplica. Estos son en donde hay más de dos estados disponibles a lo largo del punto y sin condición de resonancia.

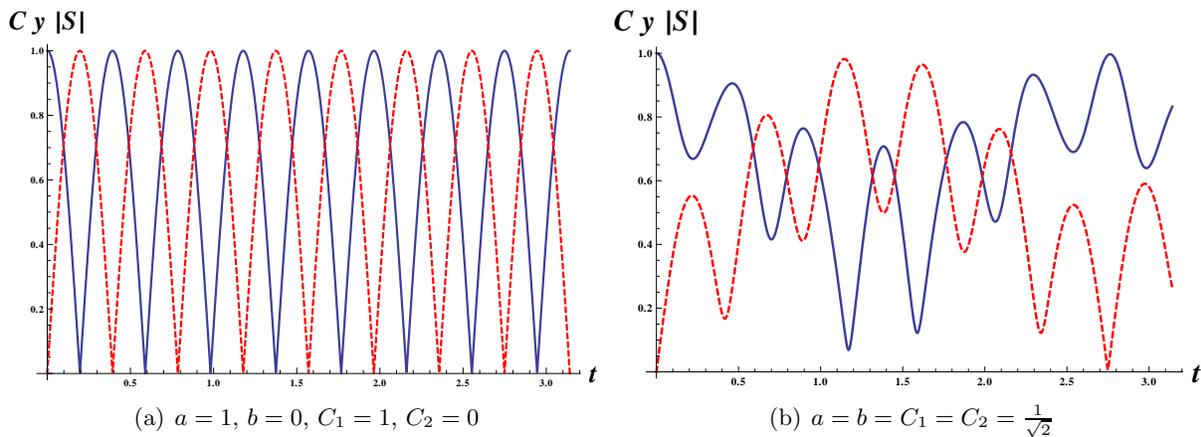


Figura 4.1: Evolución de la concurrencia (azul continua) y los coeficientes de Schmidt (rojo punteado), donde podemos observar que bajo la condición resonante $\delta = 0$ estos dos parámetros se comportan de manera similar, o bien, presentan una correspondencia cercana al punto por punto, **a)** condición inicial estado base del pozo de potencial y espín hacia arriba, **b)** condición inicial de un estado separable, espín fijo y estado de ocupación separable. En ambos casos limitamos los estados disponibles al base y el primer estado excitado.

En la figura 4.2 podemos observar en un diagrama de las energías que hay información sobre la transición de estados de ocupación cuando se grafica como función de la frecuencia de transición ω .

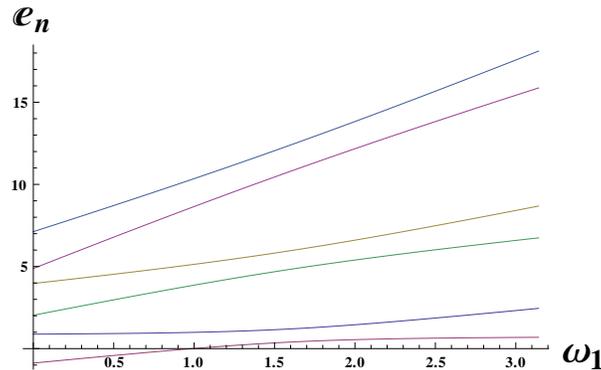


Figura 4.2: Niveles de energía para el caso aquí tratado como función de la frecuencia de transición de estados, bajo la condición inicial con $\delta = 0$ que es la condición de resonancia mencionada en el texto puede ser observada en la gráfica justo donde se acercan mas los niveles de energía, podemos decir que el entrelazamiento se manifiesta justo en las transiciones de energía de los estados del sistema.

Continuando en este caso, consideremos condiciones donde variamos el parámetro δ . Supongamos que el pozo de potencial solo tiene dos estados disponibles y el espín del electrón está orientado hacia abajo. El estado inicial que se genera posee un entrelazamiento nulo; sin embargo, conforme evoluciona en el tiempo, fluctúa de un estado sin entrelazamiento a uno con entrelazamiento máximo, como se puede observar en la figura 4.3.

Encontramos que además de la fuerte dependencia de las condiciones iniciales con las que se prepara al sistema que, la frecuencia de transición de estados $\delta = E_z - \omega_-$ juega un papel importante al momento de generar estados entrelazados, ya que al aumentar el campo magnético externo diluimos el entrelazamiento como se observa en la progresión de figuras 4.3. Tenemos dos posibles escenarios no excluyentes, visto desde el punto de vista de los estados disponibles de energía podemos pensar que el desdoblamiento de las bandas distribuye la probabilidad de los estados de máximo entrelazamiento, y en segunda instancia un campo magnético intenso afectaría de tal forma al espín del electrón que lo mantendría bajo una misma polarización durante todo el experimento. En otras palabras el estado de espín no evolucionaría como se observa en la gráfica 4.3(e).

En la figura 4.3 podemos observar que en intervalos intermitentes de tiempo se genera un estado máximamente entrelazado, sin embargo, esta condición inicial genera una serie de cuatro estados máximamente entrelazados distintos, cada uno generado a intervalos de tiempo distintos pero todos recurrentes a lo largo del tiempo, los estados están señalados en 4.3(a) con dobles flechas, los estados por orden de aparición son:

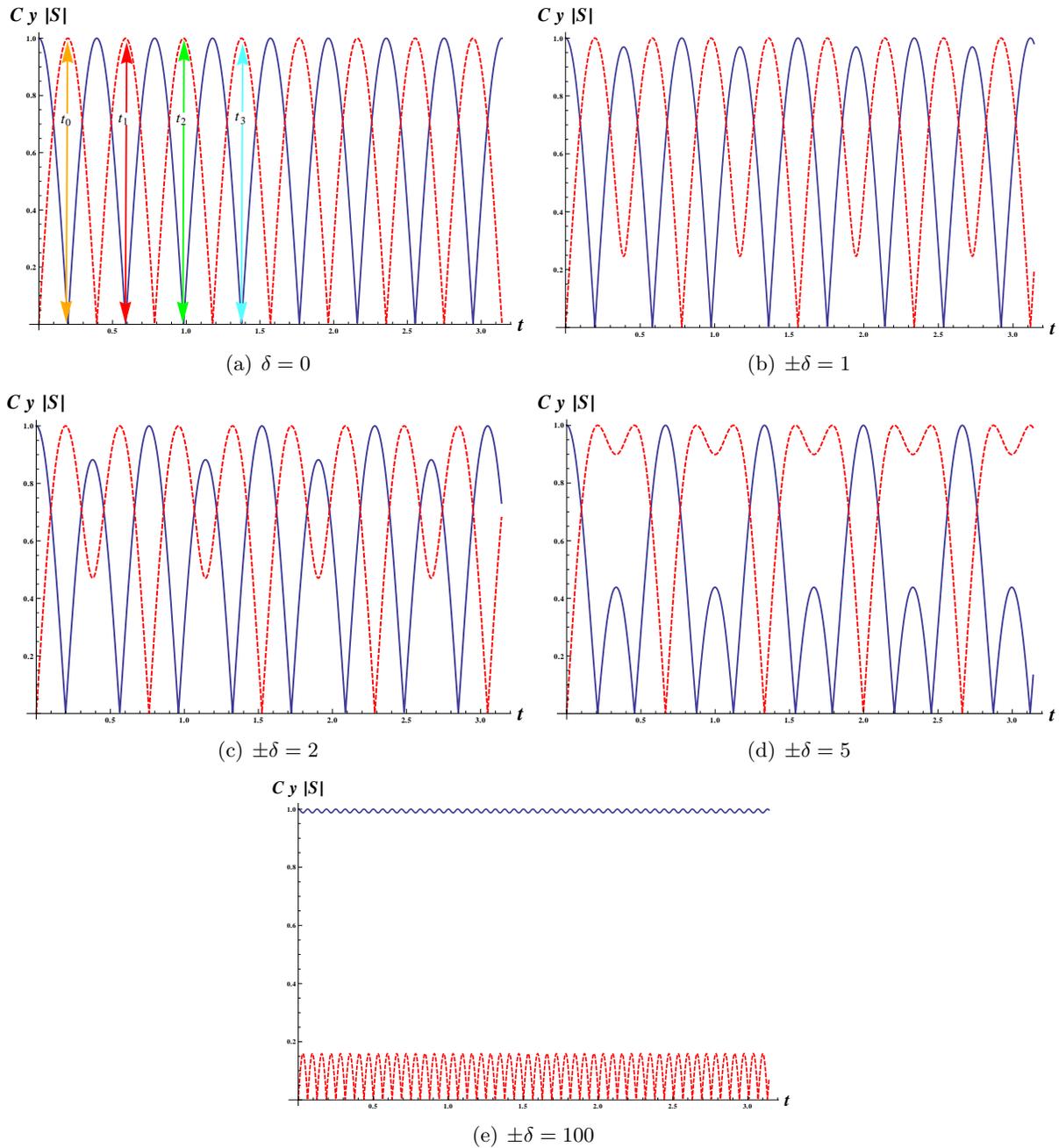


Figura 4.3: Evolución de la concurrencia(rojo punteado) y los coeficientes de Schmidt(azul). Bajo una condición inicial estado base del pozo de potencial y espín hacia abajo. En cada gráfica (a), (b), (c), (d) se muestra una progresión de $\delta = E_z - \omega_-$ y como se puede observar el entrelazamiento se diluye conforme mayor sea esta cantidad, esto lo podemos entender ya que a medida que se incrementa el campo magnético externo el entrelazamiento se ve diluido y para campos muy grandes (e) podemos decir que no existe una coherencia cuántica.

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t_0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow n\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow n+1\rangle, \\
 |\Psi(t_1)\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}} |\downarrow n\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow n+1\rangle, \\
 |\Psi(t_2)\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}} |\downarrow n\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow n+1\rangle, \\
 |\Psi(t_3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow n\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow n+1\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Estos estados nos recuerdan mucho a los estados de Bell, pero presentan fases complejas en los estados con espín hacia arriba. Aún con esas fases podemos asegurar que son estados máximamente entrelazados del sistema.

En particular este caso nos permite hacer una comparación cualitativa de la Concurrencia y los Coeficientes de Schmidt. Hay que recordar que la concurrencia no está definida para sistemas de más de dos estados; sin embargo, el sistema está restringido, por lo que hablar de Concurrencia es aplicable.

4.1.1. Otras condiciones iniciales.

En las siguientes secciones se verán tres casos recurrentes con variaciones en la cantidad de estados disponibles en el punto cuántico, además, consideramos como condición inicial espín fijo y espín superpuesto.

- Estado Base.
- Estado Superpuesto.
- Estado Coherente.

En el primero (Estado Base) nos referimos al estado que tiene al electrón confinado en el primer estado del punto cuántico (el estado base de ocupación). En el segundo (Estado Superpuesto) estudiamos una superposición en los estados de ocupación del punto cuántico, suponiendo que inicialmente todos los estado de ocupación disponibles tienen la misma probabilidad de alojar el electrón. En el tercero (Estado Coherente) estudiamos un estado cuya distribución de probabilidad de ocupación está dada por

$$C_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$

con esto tratamos de representar algo similar a los estados coherentes de la óptica cuántica. Identificamos a la ecuación anterior como la distribución de Poisson, centrada en $n \simeq |\alpha|^2$ con ancho $|\alpha|$.

También presentamos los resultados en forma de histogramas, con los cuales intentamos describir cual estado o bien qué clase de estado se está generando. Es decir, podría tratarse de un estado entrelazado con la probabilidad distribuida en todos los estados de ocupación disponibles, o bien la probabilidad confinada a sólo algunos estados. El código de colores y líneas en las barras² del histograma corresponden a:

- Coeficientes de a_n con espín $|\downarrow\rangle$ color: gris (continua)
- Coeficientes de b_n con espín $|\uparrow\rangle$ color: verde (discontinua)

²La magnitud de las barras nos indica cual es el valor de los coeficientes correspondientes a cada estado de ocupación. Es posible corroborar la normalización de los coeficientes haciendo una suma de las amplitudes de todas las barras involucradas para cualquier tiempo fijo.

Caso: $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$.

En esta subsección se estudia el comportamiento del sistema con únicamente tres estados disponibles en todo el punto ($n = 3$). Se supuso que siempre se encuentra bajo condición de resonancia ($\delta = 0$).

Estado Base

Consideremos un estado donde el electrón se encuentra localizado en el estado base de ocupación del punto cuántico ($C_0 = 1$) con una polarización de espín totalmente hacia abajo ($a = 1$ $b = 0$),

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow, 0\rangle$$

La dinámica de entrelazamiento la observamos en la figura 4.4, donde inmediatamente se ve una similitud del comportamiento mostrado en la evolución de los coeficientes de Schmidt $|S|$ de 4.4.(a) con los del caso base de la sección anterior mostrado en la gráfica azul de la figura 4.1.a), encontramos que los primeros cuatro mínimos de los coeficientes de Schmidt se generan a los tiempos $t_1 = 0.1963$, $t_2 = 0.5890$, $t_3 = 0.9817$, $t_4 = 1.3744$. Las otras dos figuras en 4.4.(a) son las probabilidades de encontrar al espín con polarización hacia arriba (P_{b_n}) y abajo (P_{a_n}) donde claramente se observa el desfase que posee cada uno y cómo este desfase propicia en intervalos regulares la generación de estados máximamente entrelazados (mínimos en $|S|$).

Para aclarar esto último anexamos el histograma de la figura 4.4.(b) donde se muestra la probabilidad de encontrar al estado con polarización hacia arriba (verde, discontinua) o hacia abajo (gris, continua) al tiempo fijo $t_1 = 0.1963$. El estado que se forma a este tiempo es: $|\psi(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow, 0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle$, que es un estado de Bell.

Ahora bajo el mismo estado consideremos que la polarización del espín se encuentra inicialmente diluida en los dos estados posibles, es decir, se encuentra en una superposición

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\downarrow + \uparrow), 0.$$

La evolución de esta condición se muestra en la figura 4.5.(a), inmediatamente se aprecia que ya no se generan máximos de entrelazamiento (mínimos en los coeficientes de Schmidt $|S|$) y esto lo podemos extraer de las gráficas de las probabilidades, ya que mientras que la probabilidad de encontrar al espín hacia arriba realiza oscilaciones de amplitud $\frac{1}{2}$ la de espín hacia abajo realiza media oscilación $\frac{1}{4}$, lo que

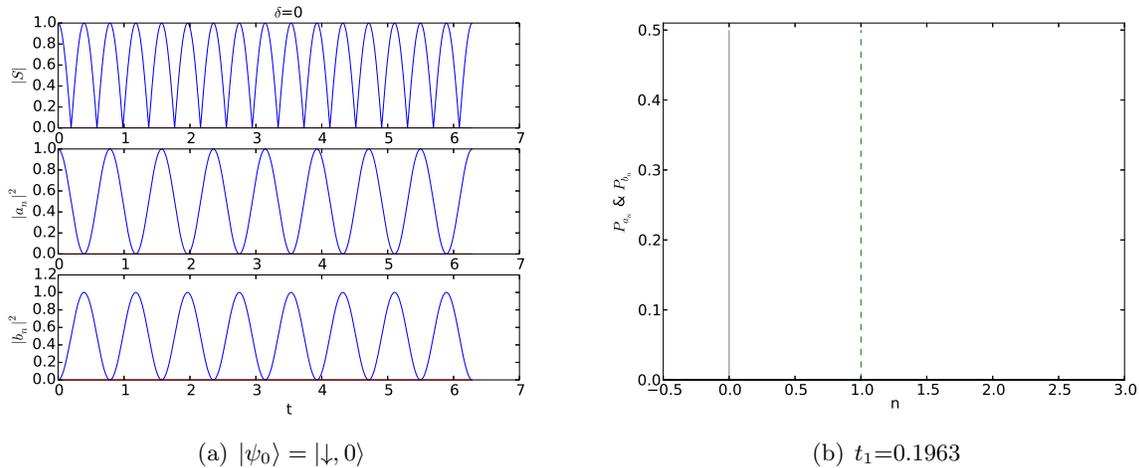


Figura 4.4: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente en el mismo estado con espín hacia abajo y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma del primer estado máximamente entrelazado generado al tiempo $t_1 = 0.1963$, donde la barra gris (continua) corresponde a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que la barra verde (discontinua) corresponde a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

lleva a estados separables o escasamente entrelazados, por ejemplo: como se muestra en el histograma 4.5.(b) el cual corresponde al primer mínimo en $|S|$ al tiempo $t_1 = 0.1952$. Aquí observemos que el estado generado que tiene la forma $|\psi(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}(|\downarrow, 0\rangle + |\uparrow, 1\rangle)$, podemos pensar en cierto momento que hay un poco de entrelazamiento entre los estados $|\downarrow, 0\rangle$ y $|\uparrow, 1\rangle$, sin embargo, el mayor peso probabilístico lo tiene un tercer estado totalmente separable $|\uparrow, 0\rangle$.

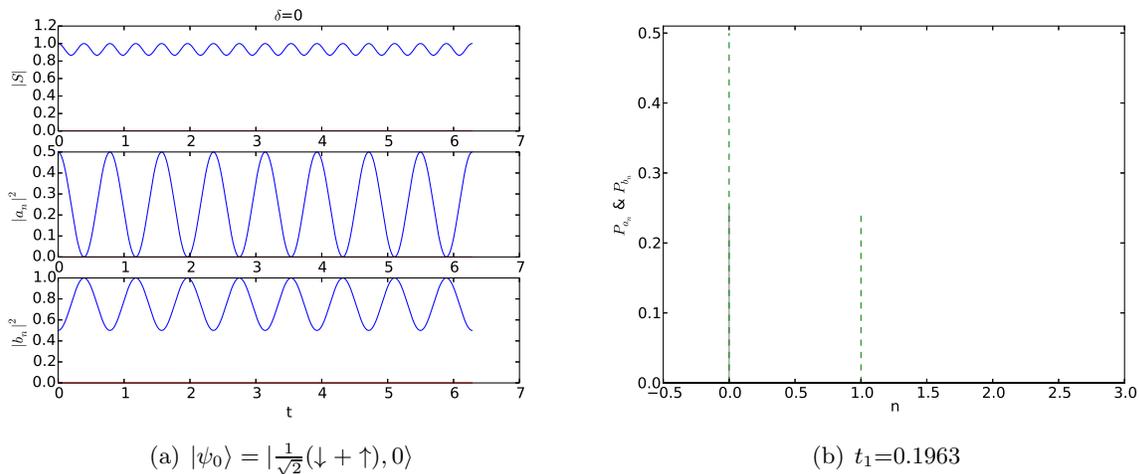


Figura 4.5: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente con espín superpuesto hacia arriba ($b = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y abajo ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma del primer estado máximamente entrelazado generado al tiempo $t_1 = 0.1963$, donde la barra gris (continua) corresponde a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que la barra verde (discontinua) corresponde a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

Estado Superpuesto

Bajo esta condición inicial suponemos que la amplitud de probabilidad de ocupación de los tres estados es la misma ($C_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$) mientras que la polarización de espín está fija hacia abajo ($a = 1, b = 0$),

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \sum_{n=0}^{N=2} \frac{1}{\sqrt{(N+1)}}(|n\rangle).$$

La evolución de entrelazamiento bajo este estado se muestra en la figura 4.6.(a). Analizando la estructura de la gráfica de $|S|$ vemos cómo sobre el tiempo posee una envolvente que la lleva a generar estados con alta coherencia cuántica, aunque no máximamente entrelazados.

Observemos también que la evolución de los estados de espín hacia arriba (b_n) y abajo (a_n) tienen una estructura similar, con oscilaciones repentinas bien marcadas sin repetición aparente.

Para observar el tipo de estados que se generan nos apoyamos en el par de histogramas: el primero, imagen 4.6.(b), muestra el estado que se genera a un tiempo $t_1 = 4.7550$. Salta a la vista el hecho de que haya un entrelazamiento ($|S| \approx 0.0117$) entre estados que no son inmediatos, esto es, el estado base ($|0\rangle$) y el segundo estado excitado ($|2\rangle$). El estado generado tiene una forma $|\psi(t_1)\rangle \approx \sqrt{0.3237}(|\downarrow, 0\rangle + |\uparrow, 2\rangle)$; el segundo, figura 4.6.(c), muestra el estado generado al tiempo $t_2 = 26.2429$ ($|S| \approx 0.0135$). Este estado posee contribuciones de los tres estados disponibles obteniendo la forma $|\psi(t_2)\rangle \approx \sqrt{0.2656}|\downarrow, 0\rangle + \sqrt{0.1686}|\downarrow, 1\rangle + \sqrt{0.3107}|\uparrow, 1\rangle + \sqrt{0.2842}|\downarrow, 2\rangle + \sqrt{0.1706}|\uparrow, 2\rangle$.

Los estados que se generan ya no poseen una estructura sencilla como en la sección anterior, vemos que la información temporal que aportan a_n y b_n ya no es suficiente para evidenciar los estados generados ya que estos se distribuyen rápidamente entre los estados de ocupación. Hay que notar que el entrelazamiento al tiempo t_1 sucede entre dos estados de ocupación no inmediatos, lo cual evidencia un acoplamiento entre estados energéticos no inmediatos.

Estudiemos la misma condición inicial pero con el espín del electrón superpuesto,

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{N=2} \frac{1}{\sqrt{(N+1)}}(|n\rangle).$$

Podemos observar su evolución en la figura 4.7 donde una vez más no se generan estados con máximo entrelazamiento como se puede ver en la figura 4.7.(a).

Notemos el hecho de que la amplitud de probabilidad de encontrar al espín hacia arriba b_n se mantenga constante en $\frac{1}{2}$, mientras que la probabilidad de encontrar al espín con polarización hacia abajo se mantiene oscilante a lo largo del tiempo, vemos que la información que arrojan estos dos comportamientos ya no

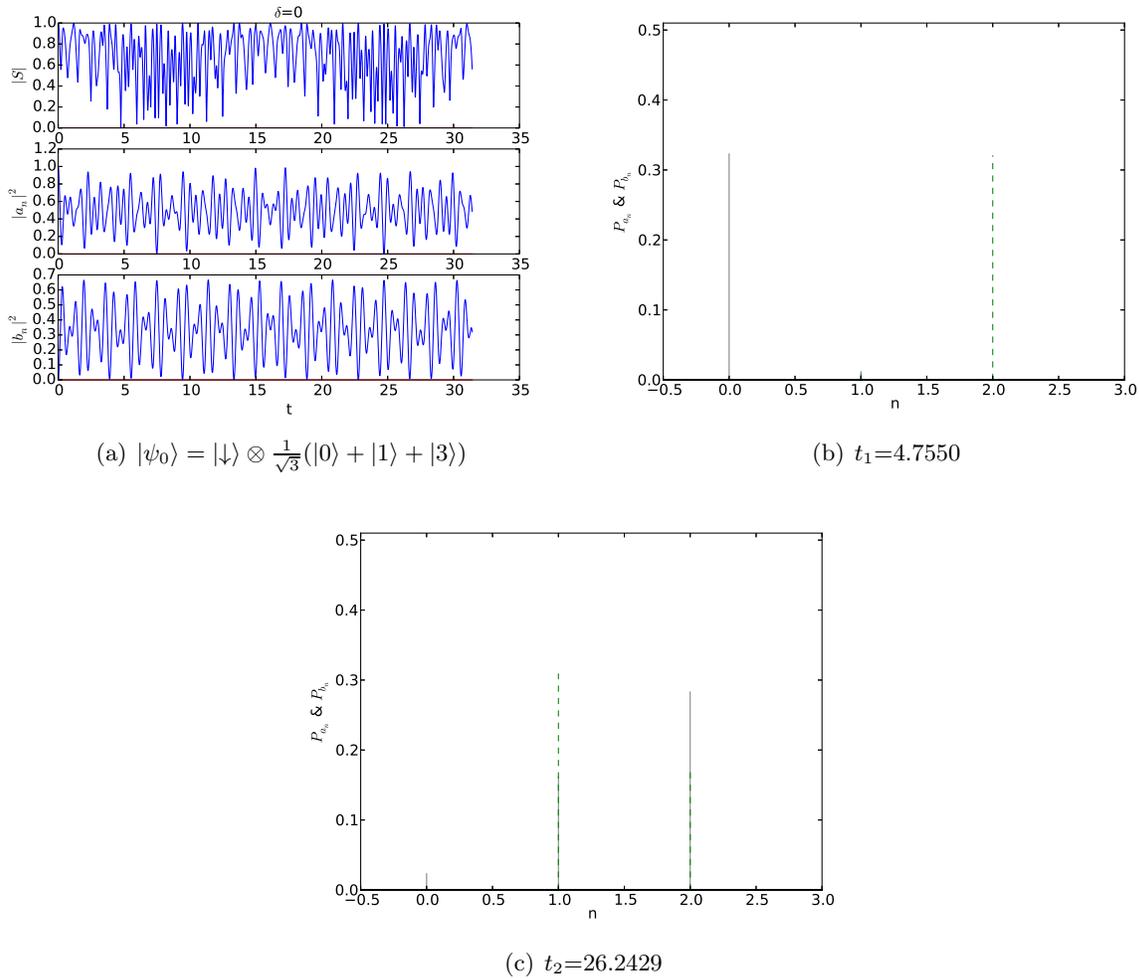


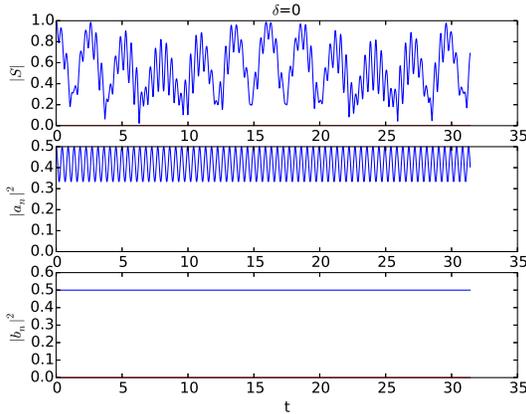
Figura 4.6: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente el mismo estado con espín hacia abajo y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma de un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 4.7550$ y (c) Histograma de un segundo estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 26.2429$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

es suficiente para concluir sobre los estados entrelazados ya que se pierde la noción sobre los estados en los cuales se encuentra el electrón con estas polarizaciones³.

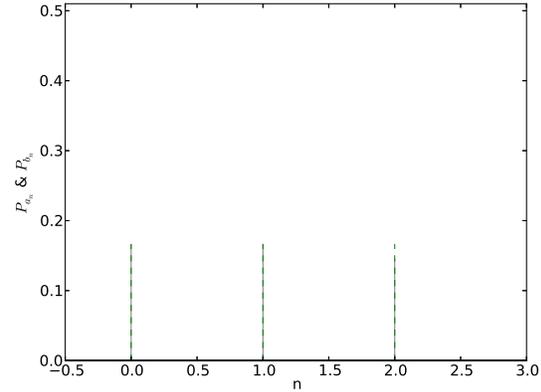
Concentrémonos ahora en el histograma de la figura 4.7.(b) que corresponde al estado generado al tiempo $t_1 = 6.2954$ ($|S| \approx 0.0229$). Este tiene una forma $|\psi(t_1)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)) + \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)) + \sqrt{0.1452}|\downarrow, 2\rangle$, o bien, para que sea evidente la forma mostrada en la figura 4.7.(a), reescribimos el estado anterior como $|\psi(t_1)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)) + \sqrt{0.1452}|\downarrow, 2\rangle$. Ahora es claro ver que esta condición arroja estados semi-entrelazados a lo largo de los tres estados de ocupación.

³Si solo poseemos la gráfica 4.7.(a), podríamos concluir que los resultados numéricos son falaces, ya que al no haber variación en el tiempo de uno de los estados implica separabilidad en todo momento (es decir, no entrelazamiento), sin embargo hay que recordar que esto es la probabilidad total y además no es nula por lo que está puede estar distribuida en los tres estados disponibles sin ningún problema

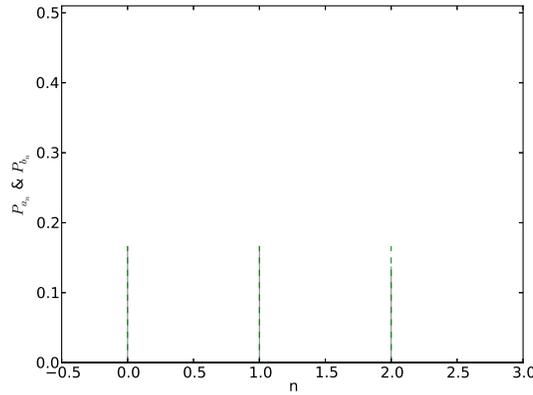
Finalmente estudiemos el estado generado al tiempo $t_2=25.9088$ ($|S| \approx 0.04386$) mostrado en la figura 4.7.(b), este estado tiene una forma muy similar al anterior, que es de esperarse ya que se mantiene la polarización de espín hacia arriba constante a lo largo del tiempo, $|\psi(t_2)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)) + \sqrt{0.1377}|\downarrow, 2\rangle$.



(a) $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$



(b) $t_1=6.2954$



(c) $t_2=25.9088$

Figura 4.7: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente con espín superpuesto hacia arriba ($b = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y abajo ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 6.2954$ y (c) Histograma de un segundo estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 25.9088$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

Estado Coherente

Imaginemos ahora un estado inicial bajo una distribución tipo Poisson y con el espín del electrón polarizado totalmente hacia abajo,

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{N=2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\downarrow, n\rangle.$$

La evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) se muestra en la figura 4.8.(a). A lo largo del tiempo genera estados con alto grado de entrelazamiento.

Una vez más los histogramas ayudan para observar los estados generados. El primero, mostrado en la figura 4.8.(b) son las probabilidades⁴ de encontrar al espín hacia arriba o abajo en cada uno de los estados de ocupación.

Tenemos que al tiempo $t_1=18.6719$ ($|S| \approx 0.1300$) se genera un estado de la forma $|\psi(t_1)\rangle \approx \sqrt{0.3492} |\downarrow, 0\rangle + \sqrt{0.2576} |\uparrow\rangle \otimes (|1\rangle + |2\rangle) + \sqrt{0.0459} |\downarrow, 1\rangle + \sqrt{0.0624} |\downarrow, 2\rangle$. Como se aprecia, posee una contribución de cada estado de ocupación y observamos que una parte del estado generado es separable con respecto al espín hacia arriba.

Un segundo histograma (figura 4.8.(c)) corresponde al estado generado en $t_2=26.8629$ ($|S| \approx 0.0080$). Este tiene una forma $|\psi(t_2)\rangle \approx \sqrt{0.3904} |\downarrow, 0\rangle + \sqrt{0.2164} |\uparrow, 1\rangle + \sqrt{0.0491} |\downarrow, 1\rangle + \sqrt{0.2563} |\uparrow, 2\rangle + \sqrt{0.0438} |\downarrow, 2\rangle$, y encontramos una contribución en cada uno de los estados de ocupación.

Probemos ahora con la condición inicial del espín superpuesto ($a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{N=2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

En la figura 4.9.(a) se aprecia la evolución de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) para este estado. Bajo esta condición no se generan estados máximamente entrelazados, pero notamos la presencia de fases complejas en los coeficientes para encontrar al espín hacia abajo (a_n) o arriba (b_n) lo que complementa a nuestro histograma de la figura 4.9.(b) que nos muestra que el estado generado en $t_1=17.2638$ ($|S| \approx 0.2565$) tiene la forma

⁴Para mantener la normalización de los estados de ocupación, utilizamos el parámetro de repetición de evento como $\alpha = \frac{3-2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

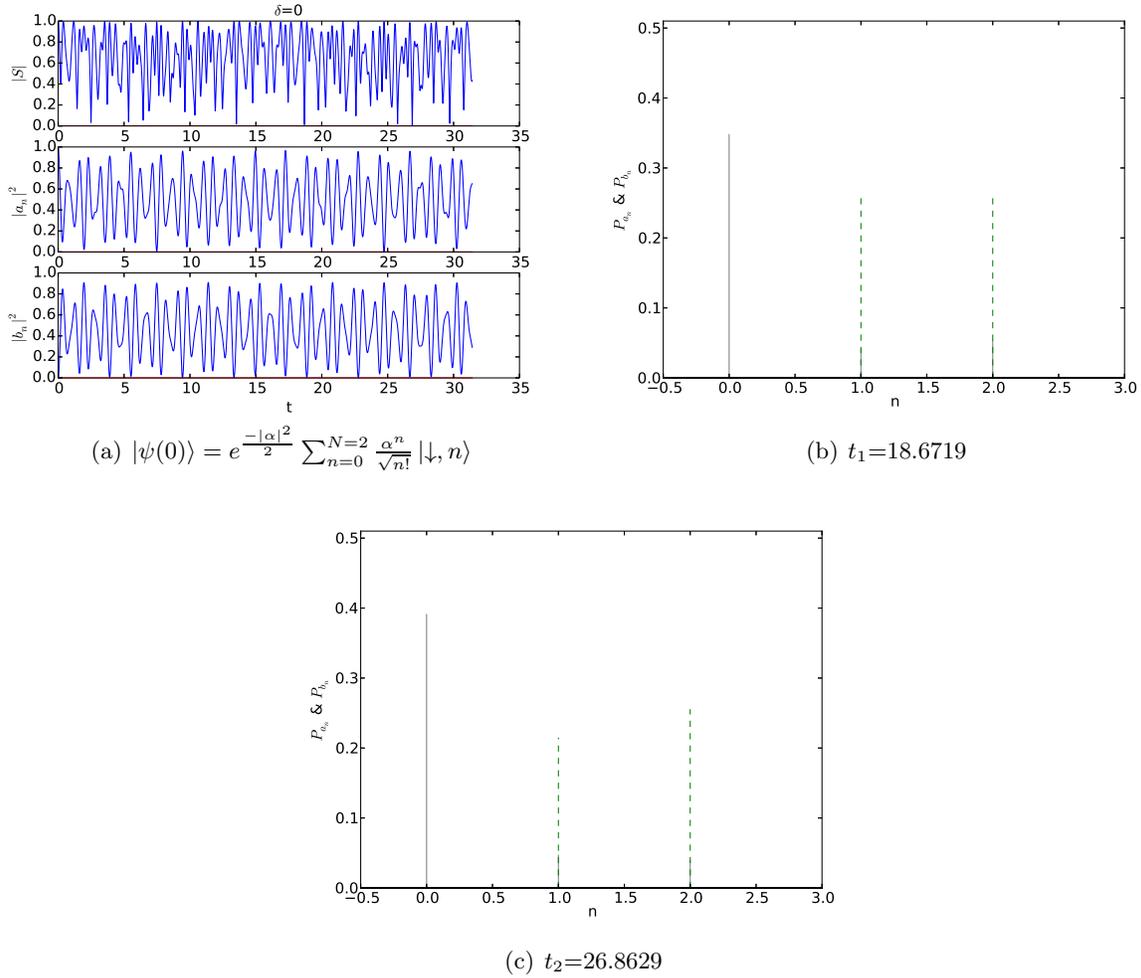


Figura 4.8: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente el mismo estado con espín hacia abajo y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 18.6719$ y (c) Histograma de un segundo estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 26.8629$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

$$\begin{aligned}
|\psi(t_1)\rangle \approx & -(0.3962 + i0.4073) |\downarrow, 0\rangle + (-0.3850 + i0.3922) |\uparrow, 0\rangle + \\
& + (-0.2354 + i0.2968) |\downarrow, 1\rangle - (0.2493 + i0.2999) |\uparrow, 1\rangle + \\
& + (0.1288) |\downarrow, 2\rangle + (-0.0618 + i0.2044) |\uparrow, 2\rangle .
\end{aligned}$$

En general se aprecia el hecho de que al incrementar un solo estado al sistema, amplía la gama de estados entrelazados que se generan, siendo estados tipo Bell los de mayor entrelazamiento cuántico (hasta ahora).

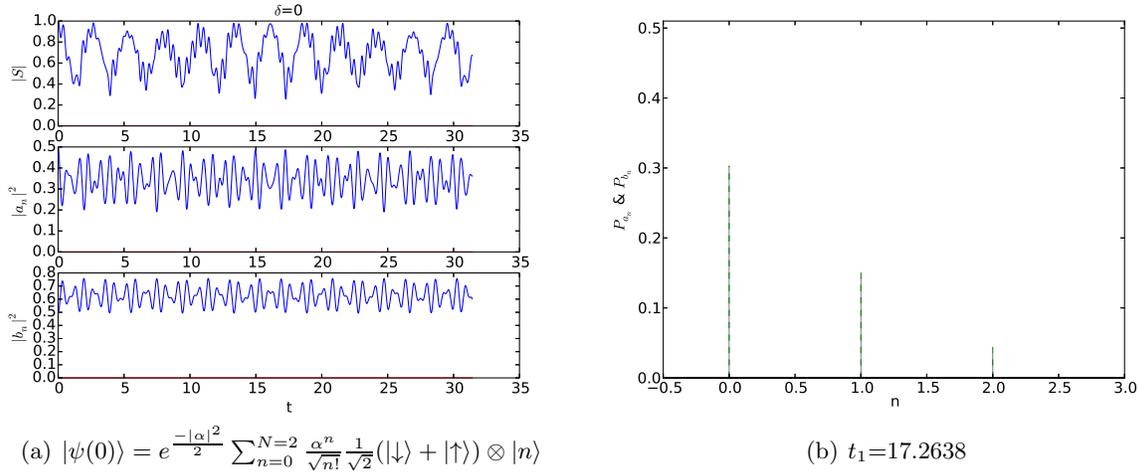


Figura 4.9: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y los coeficientes para encontrar al espín hacia abajo (a_n) o arriba (b_n) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente distribuido en los estados de ocupación del punto con espín diluido hacia abajo ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y arriba ($b = \frac{1}{\sqrt{2}}$), se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 17.2638$ donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 3 estados disponibles.

Caso: $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_{30}$.

Proseguimos con el estudio de este sistema para las mismas condiciones presentadas anteriormente pero ahora incrementando el número de estados disponibles en el punto cuántico a treinta.

Estado Base.

Nuestro caso base sucede cuando el electrón se encuentra localizado en el estado base del punto cuántico con una polarización totalmente abajo,

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow, 0\rangle.$$

Observamos en la figura 4.10.(a) el mismo comportamiento que analizamos en la sección anterior, por lo que podemos concluir inmediatamente que no importa el número de estados disponibles en el punto cuántico, siempre que partamos de el estado base, el sistema no tiene energía suficiente para pasar más allá del primer estado excitado, este salto lo podemos atribuir al desdoblamiento de energías que como tal propicia un entrelazamiento híbrido entre los primeros estados del punto y el espín del electrón.

Como los coeficientes de Schmidt no proporcionan información sobre los estados que se están generando, podemos inferir en base al histograma 4.10.(b) que el estado que se genera posee las características de un estado de Bell, o sea, el sistema se comporta como si sólo tuviera dos estados disponibles en todo

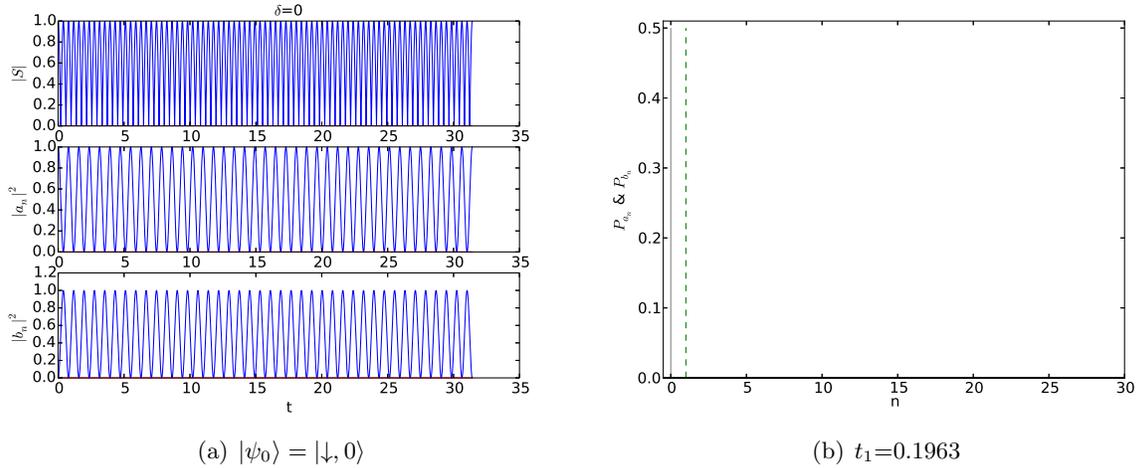


Figura 4.10: **a)** Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}), como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente en un estado con espín hacia abajo y localizado en el estado base del punto cuántico, se considera que hay 30 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. Hay que notar que no existe diferencia entre el comportamiento del entrelazamiento para el sistema restringido a dos estados disponibles en el punto cuántico con respecto a que hay 30 estados disponibles en el mismo, podemos entender esto como que no hay mecanismo de transición de estados superiores en el sistema, *id est*, no hay fluctuaciones en la energía del sistema. **b)** Histograma del primer estado máximamente entrelazado, generado al tiempo $t_1=0.19634$ donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo en los 30 estados disponibles P_{a_n} , mientras que las barras verdes (discontinua) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba en los 30 estados disponibles P_{b_n} .

el sistema. Al tiempo $t_1 = 0.1963$ se genera el estado

$$|\psi(t_1)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow, 0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow, 1\rangle.$$

Realizamos el mismo análisis para los siguientes mínimos de la figura 4.10(a) y encontramos histogramas idénticos, lo cual no significa que siempre se genera el mismo estado entrelazado, sino que pudieran generarse otros con fases complejas, que de hecho son los mismos que se generan en la figura 4.3 de la sección $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$.

Continuando con el análisis de un estado inicial similar al anterior, donde inicialmente el electrón se encuentra localizado en el estado base del punto cuántico pero esta vez el espín de electrón se encuentra diluido en $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$|\psi_0\rangle = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\downarrow + \uparrow), 0 \right\rangle.$$

Tenemos el estado base ocupado en la figura 4.11.(a). Observemos que bajo la condición de resonancia $\delta = 0$ encontramos que los coeficientes de Schmidt $|S|^2$ se mantienen confinados cerca del máximo, esto es, no se generan estados con fuerte entrelazamiento.

Encontramos del histograma presentado en 4.11.(b) que el estado que se genera en uno de los mínimos

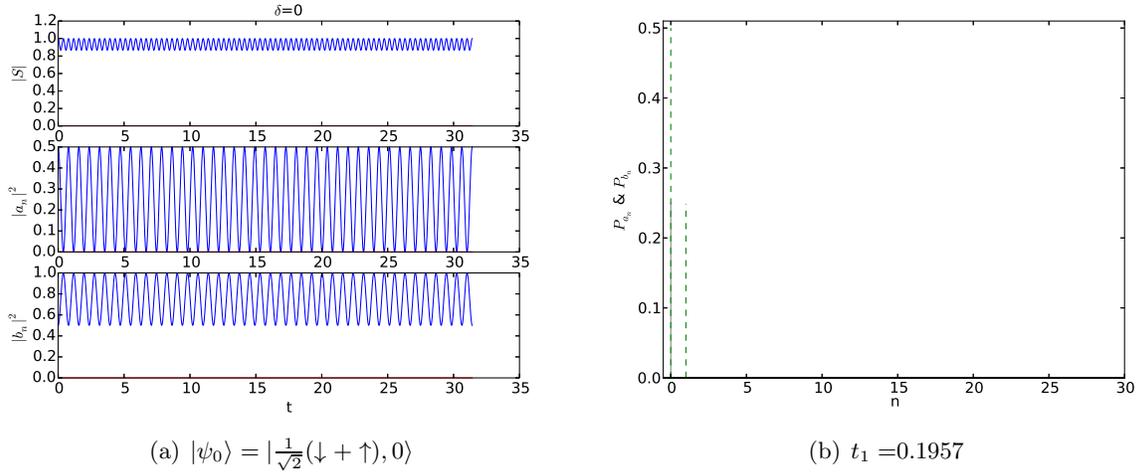


Figura 4.11: (a) Evolución de los coeficientes de polarización de espín existe uno dominante a lo largo del tiempo ($|\uparrow\rangle$) lo que no propicia una generación de estados plenamente entrelazados, pese a estar bajo la condición de resonancia, que es lo que nos indican los coeficientes de Schmidt $|S|$. (b) El histograma muestra que pese a haber 30 estados disponibles la probabilidad de ocupación solo se confina a los primeros dos estados.

de los coeficientes de Schimidt al tiempo $t_1 = 0.1957$ tiene la forma:

$$|\psi(t_1)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{4}}(|\downarrow, 0\rangle - i|\uparrow, 1\rangle) + \frac{i}{\sqrt{2}}|\uparrow, 0\rangle.$$

Si nos concentramos en el primer término vemos que el sistema posee un ligero entrelazamiento, pero se ve apantallado por la componente separable de mayor peso $|\uparrow, 0\rangle$.

En general podemos decir que existe una ligera transferencia de información entre los primeros dos estados. La dinámica de entrelazamiento bajo esta condición ($n=30$) es la misma que si estuviéramos hablando del sistema de dos estados disponibles ($n=2$).

Estado Superpuesto.

La figura 4.12.(a) corresponde a la evolución de un estado inicial con la probabilidad de ocupación diluida en todos los estados disponibles del punto $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donde existen 30 estados disponibles en el punto:

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \sum_{n=0}^{N=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)}}(|n\rangle).$$

Observamos que bajo una condición de resonancia, $\delta = 0$, los coeficientes de Schmidt $|S|$ muestran un comportamiento de muerte y anabiosis⁵ de entrelazamiento inicialmente con largos periodos de poca coherencia cuántica y conforme evolucionan los estados, su nivel de entrelazamiento incrementa.

La rápida transición de estados la podemos entender como una consecuencia de que el sistema inicialmente estuviese en una superposición de estados de ocupación.

En las figuras 4.12.(b),(c) presentamos histogramas para describir los estados con mayor grado de entrelazamiento que se están formando bajo esta condición. Observamos que el histograma 4.12.(b) corresponde a un estado generado al tiempo $t_1 = 0.2116$. Como bien se ve participan los 30 estados involucrados, además de fases imaginarias. El estado generado se encuentra en el apéndice D⁶. De igual manera se describe en el apéndice el estado generado al tiempo $t_2 = 7.2649$, que es el estado correspondiente al histograma 4.12.(c).

Con ayuda de los histogramas observamos que donde hay oscilaciones de probabilidad para encontrar al electrón con espín hacia arriba o abajo 4.12.(a) (*e.g.*, en el rango de tiempo 5-10) es necesario un desfase en las magnitudes de espín hacia arriba y abajo para proveer un alto entrelazamiento.

Consideramos ahora una condición inicial similar al anterior en los estados de ocupación, pero con el espín del electrón diluido en una superposición de polarización arriba y abajo con la misma probabilidad ($\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$),

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow + \uparrow\rangle) \otimes \sum_{n=0}^{N=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)}}(|n\rangle).$$

En la figura 4.13.(a) podemos ver cómo los coeficientes de Schmidt presentan oscilaciones muy rápidas sujetas a una envolvente que toma valores mínimos de $|S|$, lo que implica que conforme evoluciona este estado incrementa su coherencia cuántica; sin embargo, no se genera un estado con un máximo

⁵En la literatura: *death and revival of entanglement*.

⁶Se omite en esta parte del texto por su magnitud.

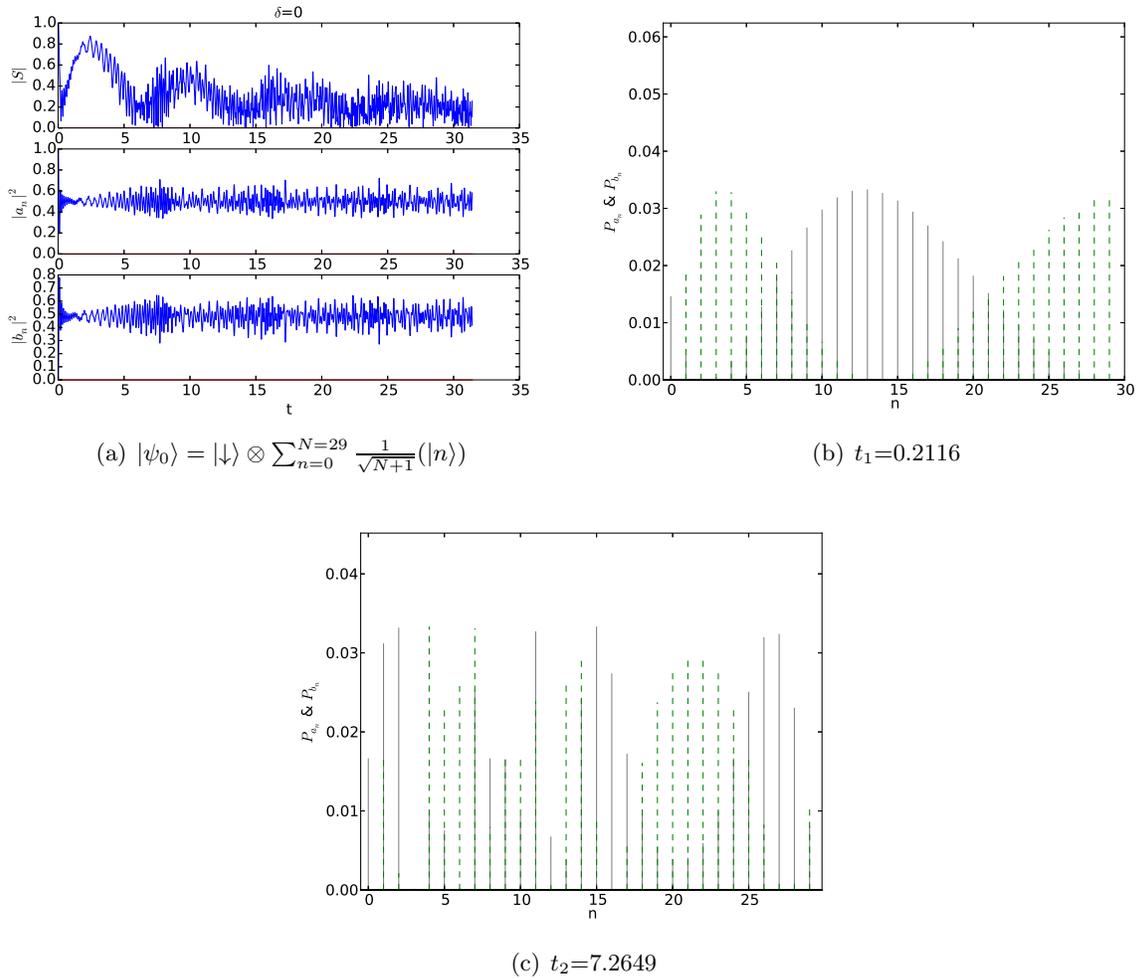


Figura 4.12: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}), como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente con espín hacia abajo y distribuido con la misma probabilidad de localización en todo el punto cuántico, se considera que hay 3 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 0.2116$ y (c) Histograma de un segundo estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 7.2649$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

entrelazamiento.

Si determinamos el estado que se genera en el mínimo de la figura correspondiente al tiempo $t_1 = 27.1434$, obtenemos el histograma mostrado en 4.13.(b). La probabilidad de encontrar el espín polarizado está distribuida en todos los estados de ocupación.⁷

Lo que llama la atención de la evolución de este estado es la probabilidad estacionaria del estado de espín hacia arriba a lo largo de todo el tiempo. Esto ya lo habíamos tratado en la sección anterior y sabemos, con ayuda del histograma, que la probabilidad de estar con espín hacia arriba se encuentra distribuida sobre todos y cada uno de los estados.

⁷El estado generado se muestra en el apéndice D por su extensión.

Sin embargo si analizamos un poco más el estado (ver apéndice D) encontramos que también posee fases complejas que contribuyen a dar esta apariencia de estado estacionario a lo largo del tiempo.

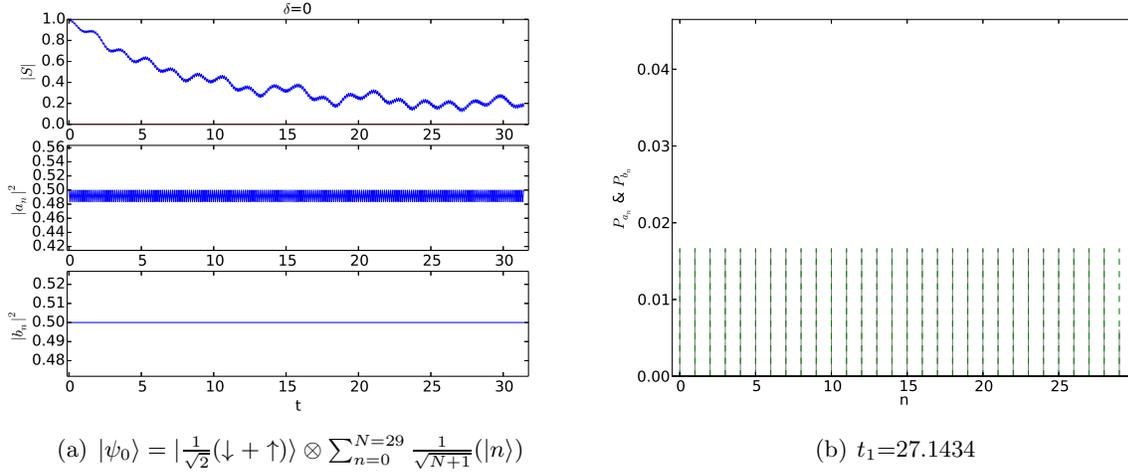


Figura 4.13: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente en un estado superpuesto en espín y distribuido con la misma probabilidad de localización en todo el punto cuántico y encontrándose en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 27.1434$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

Bajo esta condición inicial, el hecho de aparecer el espín con polarización fija o superpuesta, afecta a los estados generados, siendo el caso de espín fijo el que genera estados con alto entrelazamiento cuántico con mayor frecuencia, mientras que el estado con espín superpuesto genera estados con mediano entrelazamiento durante intervalos de tiempo largos.

Estado Coherente

Estudiemos ahora al sistema en un estado coherente, *id est*, los primeros treinta estados disponibles se encuentran bajo una distribución tipo Poisson y con el espín del electrón polarizado totalmente hacia abajo.

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{N=29} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\downarrow, n\rangle.$$

Observamos un caso donde la variable aleatoria de Poisson $\alpha_y = \frac{N-\lambda_x}{\sqrt{\lambda_x}}$, esto es, hacemos que converja a una distribución normal para valores grandes de λ_x , donde N es el número de estados de ocupación, y λ_x es un valor arbitrario que asignamos para normalizar nuestra distribución, en este caso elegimos sea $\lambda_x = 27$. Bajo estos parámetros encontramos los resultados de la condición inicial en la figura 4.14.(a). La evolución de los coeficientes de Schmidt es aleatoria y sin patrón aparente, pero genera un mínimo en los coeficientes de Schmidt. Este es un estado quasi-máximamente entrelazado. Al tiempo $t_1 = 2.5003$ ($|S| = 0.0092$), encontramos el estado que se genera en el histograma 4.14.(b), en este no participan más que los primeros 6 estados disponibles del sistema. Este tiene la forma:

$$\begin{aligned} |\psi(t_1)\rangle \approx & (-0.2222 + i0.6750) |\downarrow, 0\rangle + (0.4391 + i0.1418) |\uparrow, 1\rangle + \\ & + (0.2809 + i0.4009) |\uparrow, 2\rangle + (-0.0190 - i0.0122) |\downarrow, 3\rangle + \\ & + (-0.0067 + i0.1963) |\uparrow, 3\rangle + (-0.0367 + i0.0450) |\uparrow, 4\rangle + \\ & + (-0.0054) |\uparrow, 5\rangle. \end{aligned}$$

En este mismo esquema, imaginemos que estamos bajo nuestra distribución normal y pensemos que tenemos el espín del electrón superpuesto con la misma probabilidad de encontrarlo hacia arriba o hacia abajo ($a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$). En la figura 4.15.(a) se muestra la evolución de los coeficientes de Schmidt bajo esta condición. Se observa cierta frecuencia de generación de mínimos relativos. En la figura 4.15.(b) se presenta un histograma de un estado generado al tiempo $t_1 = 14.9616$ ($|S| = 0.4510$). En particular este estado tiene la forma:

$$\begin{aligned} |\psi(t_1)\rangle \approx & (-0,1593 + i0,5710) |\downarrow, 0\rangle + (0,1888 + i0,5604) |\uparrow, 0\rangle + \\ & + (0,3160 - i0,1168) |\downarrow, 1\rangle + (-0,0159 + i0,3426) |\uparrow, 1\rangle + \\ & + (-0,1301 - i0,0371) |\downarrow, 2\rangle + (0,1514) |\uparrow, 2\rangle. \end{aligned}$$

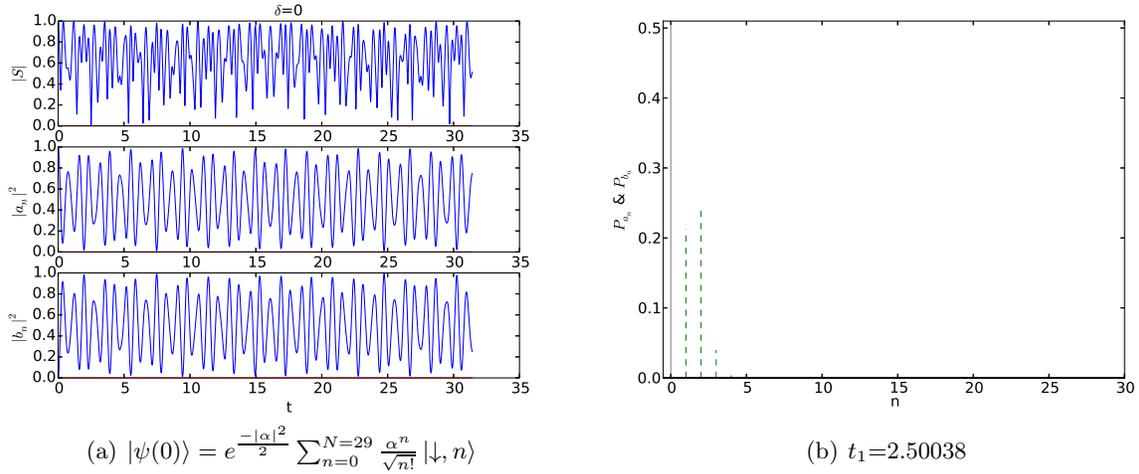


Figura 4.14: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente con espín hacia abajo y bajo una distribución de Poisson a lo largo de los estados del punto cuántico, se considera que hay 30 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 2.50038$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

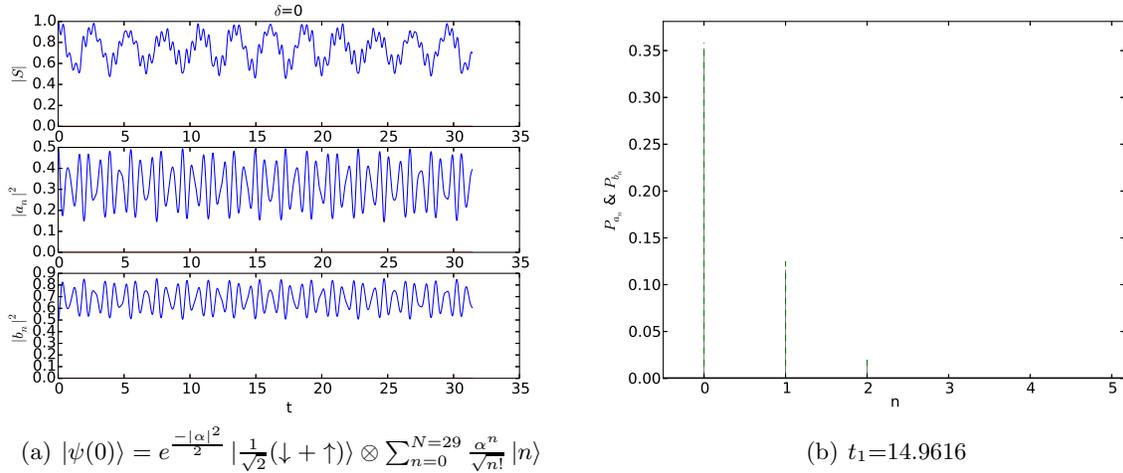


Figura 4.15: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}), como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente el mismo estado con espín en una superposición y bajo una distribución de Poisson a lo largo de los estados del punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 14.9616$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

Una vez más se aprecia que bajo la condición resonante normalizada, la distribución confina en los primeros estados de ocupación.

El grado de entrelazamiento de los estados generados a lo largo del tiempo es muy bajo como se puede observar en la figura 4.15.(b).

A continuación estudiemos de nuevo el caso base con espín totalmente polarizado, sólo que con la

variable aleatoria de Poisson fija en $\alpha = 3$. Esto no garantiza una normalización completa de los estados de ocupación, pero podríamos decir que es una buena aproximación (con un error del $2.77 \times 10^{-6} \%$). La razón de elegir ese valor en particular, es por que es bastante recurrente en la literatura (también $\alpha = 4$).

Encontramos en la figura 4.16.(a) que la evolución de los coeficientes de Schmidt es muy diferente a nuestra condición normalizada. Esta última presenta una serie de oscilaciones envolventes y justo en los gráficos de las probabilidades de encontrar al espín hacia arriba y hacia abajo, encontramos las oscilaciones características bajo condiciones similares encontradas en la literatura, solo que en este caso encontramos las oscilaciones en las probabilidades de polarización del espín (a diferencia de la literatura que se presentan en polarización de luz) y la distribución inicial se considera sobre los estados de ocupación.

Para estudiar el estado generado, nos apoyamos en el histograma de la figura 4.16.(b). Al tiempo $t_1 = 4.12026$ ($|S| = 0.0602$), el estado generado se omite por brevedad, pero se encuentra una descripción gráfica en el apéndice D. De la misma forma, encontramos un estado con mayor grado de entrelazamiento a un tiempo $t_2 = 11.1919$ ($|S| = 0.0114$), mostrado en la figura 4.16.(c).

Note que la cantidad de estados involucrados para la generación de estos estados es mucho mayor que el caso normalizado.

Si fijamos la variable aleatoria de Poisson $\alpha = 3$ bajo una condición similar pero ahora con el espín superpuesto, encontramos el comportamiento en la figura 4.17. Observamos que conforme pasa el tiempo el sistema tiende a generar estados con alto grado de entrelazamiento, por ejemplo: un estado generado al tiempo $t_1 = 14.9616$ ($|S| = 0.3509$), encontramos que participan todas las componentes disponibles del sistema. En el apéndice D, se muestra el histograma del estado con mayor entrelazamiento generado al tiempo $t = 29.945$ ($|S| = 0.0227$).

4.1.2. Resumen RWA.

Los coeficientes de Schmidt y la probabilidad de polarización del espín probaron ser herramientas suficientes para encontrar estados entrelazados y su forma respectivamente.

Un requisito para que exista entrelazamiento es que se posea acoplamiento entre pares. Ya sabemos que los estados de Bell cumplen y son los que poseen mayor grado de entrelazamiento en nuestro sistema; sin embargo, hay casos en los que participan más de dos estados de ocupación apareados y también es posible que quede alguno separable con un peso de probabilidad muy pequeño, por ejemplo:

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\downarrow, 0\rangle + e^{-i\varphi} |\uparrow, 1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow, 1\rangle + |\downarrow, 2\rangle).$$

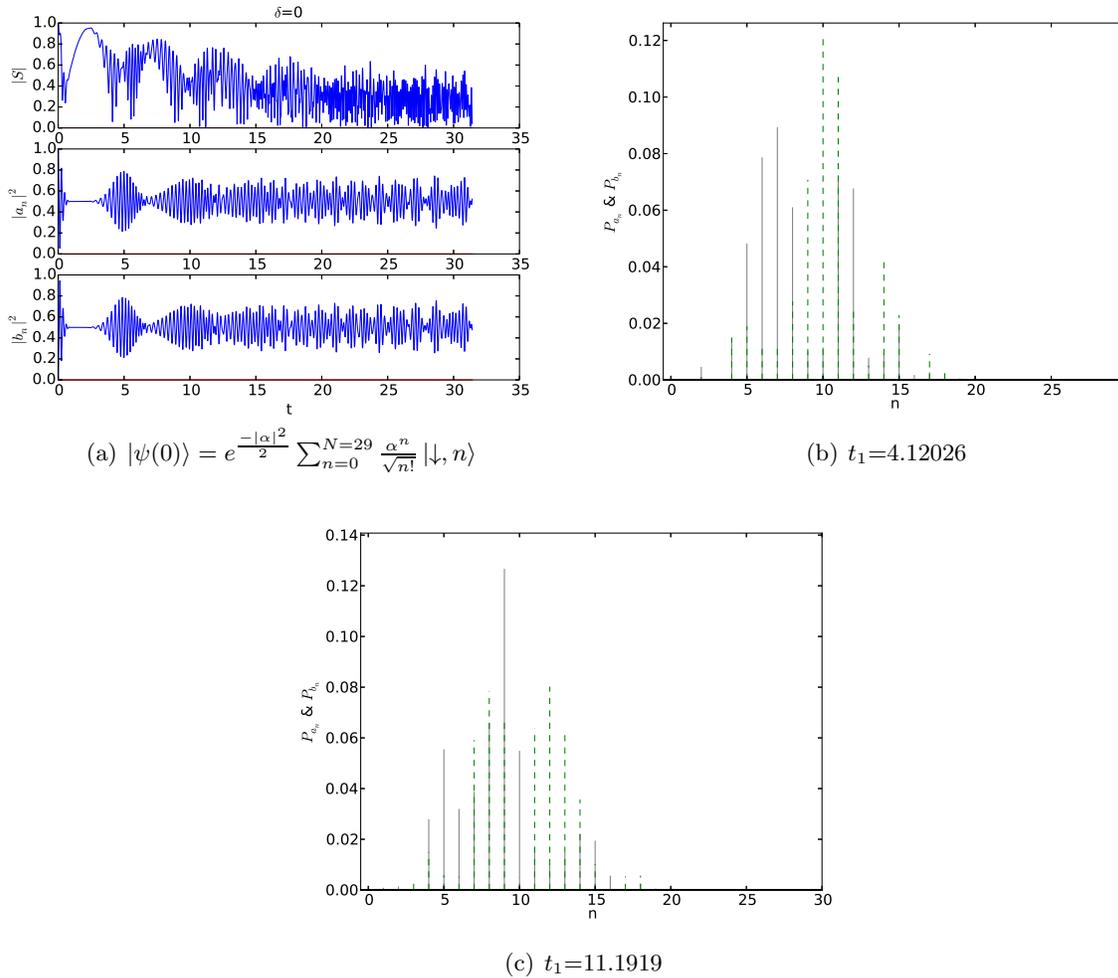


Figura 4.16: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o arriba (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente el mismo estado con espín hacia abajo y bajo una distribución de Poisson a lo largo de los estados del punto cuántico, se considera que hay 30 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma de un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 4.121026$ y (c) Histograma de un segundo estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 11.1919$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

Como se puede apreciar, el primer par de estados se encuentra en superposición tipo Bell con la probabilidad atenuada y el último par esta en una superposición separable. Los estados con entrelazamiento encontrados aquí poseen una estructura semejante a la del ejemplo.

Es posible encontrar el estado que se esté generando, siempre y cuando sea válida la aproximación de onda rotante. En caso contrario en la siguiente sección mostramos cómo trabajar con el sistema completo, es decir, sin haber despreciado el término de interacción.

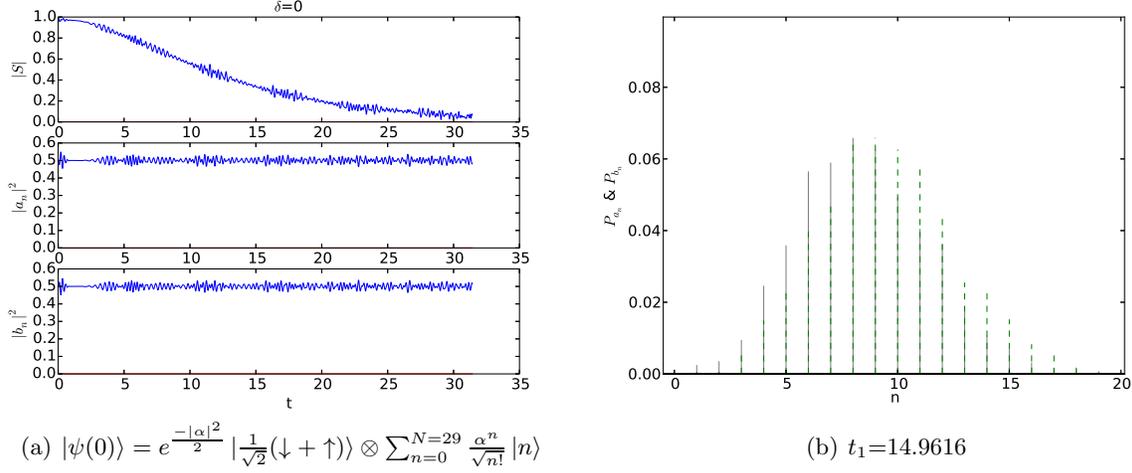


Figura 4.17: (a) Evolución temporal de los coeficientes de Schmidt ($|S|$) y las probabilidades de encontrar al espín hacia abajo (P_{a_n}) o abajo (P_{b_n}) como función del tiempo, la gráfica muestra a un electrón inicialmente con espín en una superposición y bajo una distribución de Poisson a lo largo de los estados del punto cuántico con $\alpha = 3$, se considera que hay 30 estados disponibles en el punto cuántico y se encuentra en condición de resonancia $\delta = 0$. (b) Histograma de un primer estado entrelazado, generado al tiempo $t_1 = 14.9616$, donde las barras grises (continuas) corresponden a la probabilidad de encontrar el electrón con espín hacia abajo (P_{a_n}), mientras que las barras verdes (discontinuas) corresponden a la probabilidad de encontrar al electrón con espín hacia arriba (P_{b_n}) en los 30 estados disponibles.

4.2. Tratamiento de un espacio $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$.

En esta sección nos enfocamos en los resultados obtenidos con el Método de Transformaciones Canónicas. Partimos del estado del sistema (3.103) y encontramos para este estado que la componente del vector de Bloch en x es

$$S_x(t) = \frac{1}{2} \langle \phi(t) | \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} | \phi(t) \rangle, \quad (4.16)$$

donde σ_x es una matriz de Pauli y $|\phi(t)\rangle$ es el estado del sistema, que al sustituirlo obtenemos

$$S_x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((\gamma_{n_- n_+}^{(2)}(t) + \delta_{n_- n_+}^{(2)}(t))(\alpha_{n_- n_+}^{(1)*}(t) + \beta_{n_- n_+}^{(1)*}(t)) + (\alpha_{n_- n_+}^{(1)}(t) + \beta_{n_- n_+}^{(1)}(t))(\gamma_{n_- n_+}^{(2)*}(t) + \delta_{n_- n_+}^{(2)*}(t))), \quad (4.17)$$

la componente y es

$$S_y(t) = \frac{1}{2} \langle \phi(t) | \hat{\sigma}_y \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} | \phi(t) \rangle, \quad (4.18)$$

donde σ_y es una matriz de Pauli y $|\phi(t)\rangle$ es el estado del sistema, que al sustituirlo obtenemos

$$S_y(t) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma_{n_- n_+}^{(2)}(t) + \delta_{n_- n_+}^{(2)}(t))(\alpha_{n_- n_+}^{(1)*}(t)\beta_{n_- n_+}^{(1)*}(t) + (\alpha_{n_- n_+}^{(1)}(t) + \beta_{n_- n_+}^{(1)}(t))(\gamma_{n_- n_+}^{(2)*}(t) + \delta_{n_- n_+}^{(2)*}(t))), \quad (4.19)$$

la componente z es

$$S_z(t) = \frac{1}{2} \langle \phi(t) | \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} | \phi(t) \rangle, \quad (4.20)$$

donde σ_z es una matriz de Pauli y $|\phi(t)\rangle$ es el estado del sistema, que al sustituirlo obtenemos

$$\begin{aligned} S_z(t) = \frac{1}{2} \sum_{n_-, n_+}^{\infty} [& (\alpha_{n_- n_+}^{(1)} + \beta_{n_- n_+}^{(1)}) (\alpha_{n_- n_+}^{(1)*} + \beta_{n_- n_+}^{(1)*}) - \\ & - (\alpha_{n_- n_+}^{(2)} + \beta_{n_- n_+}^{(2)}) (\alpha_{n_- n_+}^{(2)*} + \beta_{n_- n_+}^{(2)*}) + \\ & + (\alpha_{n_- n_+}^{(3)} + \beta_{n_- n_+}^{(3)}) (\alpha_{n_- n_+}^{(3)*} + \beta_{n_- n_+}^{(3)*}) - \\ & - (\alpha_{n_- n_+}^{(4)} + \beta_{n_- n_+}^{(4)} + \epsilon_{n_- n_+}^{(1)}) (\alpha_{n_- n_+}^{(4)*} + \beta_{n_- n_+}^{(4)*} + \epsilon_{n_- n_+}^{(1)*}) - \\ & + (\gamma_{n_- n_+}^{(1)} + \delta_{n_- n_+}^{(1)}) ((\gamma_{n_- n_+}^{(1)*} + \delta_{n_- n_+}^{(1)*})) - \\ & - (\gamma_{n_- n_+}^{(2)} + \delta_{n_- n_+}^{(2)}) (\gamma_{n_- n_+}^{(2)*} + \delta_{n_- n_+}^{(2)*}) + \\ & + (\gamma_{n_- n_+}^{(3)} + \delta_{n_- n_+}^{(3)} + \epsilon_{n_- n_+}^{(2)}) (\gamma_{n_- n_+}^{(3)*} + \delta_{n_- n_+}^{(3)*} + \epsilon_{n_- n_+}^{(2)*}) - \\ & - (\gamma_{n_- n_+}^{(4)} + \delta_{n_- n_+}^{(4)}) (\gamma_{n_- n_+}^{(4)*} + \delta_{n_- n_+}^{(4)*})], \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde los coeficientes están dados por $\alpha_{n_- n_+}^{(k)}$ (3.117), $\beta_{n_- n_+}^{(k)}$ (3.118), $\gamma_{n_- n_+}^{(k)}$ (3.119) y $\delta_{n_- n_+}^{(k)}$ (3.120), con $k = 1, 2, 3, 4$, que representan las combinaciones formadas al aplicar la perturbación.

Ahora para obtener una descripción de la dinámica de entrelazamiento en el sistema perturbado necesitamos calcular la entropía de entrelazamiento que la podemos describir en función de las tres componentes del vector de Bloch,

$$E(t) = -\lambda_+(t) \log_2 \lambda_+(t) - \lambda_-(t) \log_2 \lambda_-(t), \quad (4.22)$$

donde $\lambda_{\pm}(t) = \frac{1}{2} (1 \pm |\sqrt{S_x S_x^* + S_y S_y^* + S_z S_z^*}|)$. Lo que implica que si normalizamos $E(t) = 1 \Rightarrow$ un estado con entrelazamiento máximo, mientras que $E(t) = 0 \Rightarrow$ entrelazamiento nulo o bien un estado completamente separable.

En las siguientes secciones consideramos sólo las siguientes condiciones iniciales:

- Estado Base (con espín fijo y superpuesto)
- Estado Superpuesto (con espín fijo y superpuesto)
- Estado Coherente (con espín fijo y superpuesto)

Recordemos que se hizo la perturbación expandiendo en potencias de un parámetro que llamamos λ . Primero comparemos nuestros resultados perturbados considerando una perturbación nula.

Regresando al caso sin perturbar.

Entonces, si consideramos el caso donde el parámetro de perturbación es nulo regresamos a nuestro caso sin perturbar.

En la figura 4.18 se muestra el efecto de considerar una condición inicial con $\lambda = 0$ y un solo electrón localizado en el estado base del punto cuántico bidimensional, cuando únicamente existen dos estados disponibles en el el punto.

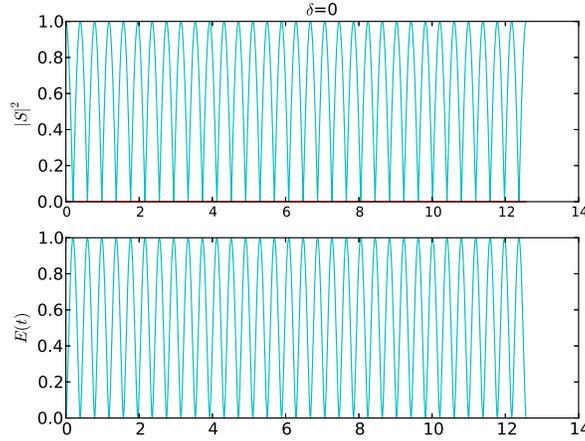


Figura 4.18: Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$) y la entropía de entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial sin perturbar ($\lambda = 0$) del punto cuántico, con la probabilidad de encontrar al espín con polarización hacia abajo ($a = 1$, $b = 0$) y situado en el estado base de ocupación, se supuso que existen sólo 2 estados de ocupación disponibles en el punto.

Observamos que nuestro estado con el término de perturbación nulo produce resultados idénticos a los ya obtenidos anteriormente (sin perturbar), por lo que los estados generados deben ser los mismos (o muy parecidos).

Recordemos que ahora estamos en un sistema tipo tripartito, pero consideramos un estado de ocupación por cada par de grados de libertad $|n, m\rangle$. La otra variante es el cálculo de la entropía de entrelazamiento $E(t)$, donde los máximos corresponden a estados con mayor entrelazamiento. Si hacemos una inspección más cercana, podemos ver cómo es muy parecido a un desfase de $|S|$ en el eje temporal.

Estado Base Perturbado y espín fijo.

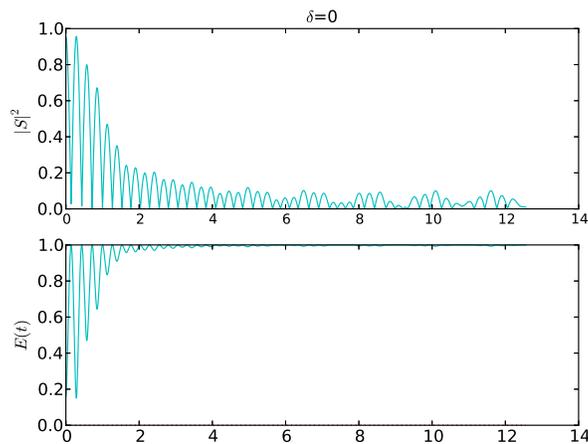
Analizaremos el caso con una perturbación $\lambda = 0.1$, donde el electrón se encuentra localizado en el estado base

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow, 0, 0\rangle,$$

observemos como el sistema evoluciona en la figura 4.19.a) donde se grafica la magnitud del vector de Bloch ($|S|$) o bien el coeficiente de Schmidt y la Entropía de entrelazamiento (E). $|S|$ y E presentan un comportamiento complementario; sin embargo, la entropía de entrelazamiento se ve atenuada y hace parecer que el sistema genera estados entrelazados durante un periodo continuo. Pero esto no es así, en la figura se aprecia que el sistema genera estados con alto entrelazamiento ($E = 0$, *i.e.*, mínimos relativos en $|S|$ y máximos relativos en E). Sabemos que el sistema se mantiene confinado en los primeros dos estados disponibles del sistema (base y excitado), recordamos que ahora son dos grados de libertad de ocupación, por lo que es claro que se trata de un estado tipo Bell de la forma

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow, 0_n, 0_m\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1_n, 1_m\rangle).$$

Un resultado similar al obtenido en la sección RWA. Pero ahora se puede ver como la perturbación propicia a que los estados que no están máximamente entrelazados mantengan un valor elevado de esta propiedad conforme evoluciona en el tiempo.



(a) $|\psi_0\rangle = |\downarrow, 0, 0\rangle$

Figura 4.19: Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$) y la entropía de entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda = 0.1$) del punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín con polarización hacia abajo ($a = 1$, $b = 0$) y situado en el estado base, se supuso que existen $n = 30$ estados de ocupación disponibles en el punto.

Estado Base Perturbado y espín diluido.

Continuando el análisis de un estado inicial similar (electrón localizado en el estado base del punto) bajo una perturbación ($\lambda = 0.1$). Pero esta vez el espín del electrón se encuentra diluido con probabilidades iguales ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$):

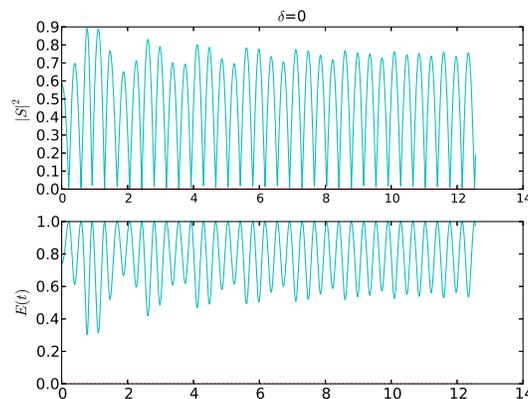
$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow + \uparrow\rangle, 0, 0).$$

Seguimos suponiendo que hay 30 estados de ocupación disponibles en el punto. Observamos en la figura 4.20 un comportamiento similar en la entropía de entrelazamiento y coeficientes de Schmidt (una es una reflexión de la otra). En general la dinámica posee mayor grado de correlación cuántica que la anterior ya que la entropía de entrelazamiento no llega a ser uno (El caso máximo $E \approx .99$). Esto último debido a la naturaleza de nuestro modelo, una ausencia de energía externa que propicie transición entre estados con mayor energía. Es decir, los estados que se generan, se encuentran confinados a los primeros dos estados de ocupación.

Comparando con los resultados de la condición anterior se aprecia que los estados que no están máximamente entrelazados poseen en mayor medida menor grado de entrelazamiento.

Una vez más los estados generados poseen la estructura:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow, 0_n, 0_m\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1_n, 1_m\rangle),$$



$$(a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow + \uparrow\rangle, 0, 0)$$

Figura 4.20: a) Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$) y la entropía de entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda=0.1$) del punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín con polarización superpuesta ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$) y situado en el estado base, se supuso que existen 30 estados de ocupación disponibles en el punto.

Estado Superpuesto Perturbado y espín fijo.

Estudiemos ahora la evolución del entrelazamiento bajo un estado inicial con la probabilidad de ocupación distribuida en todos los estados disponibles del punto $C_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{nm}}$. Supongamos que existen

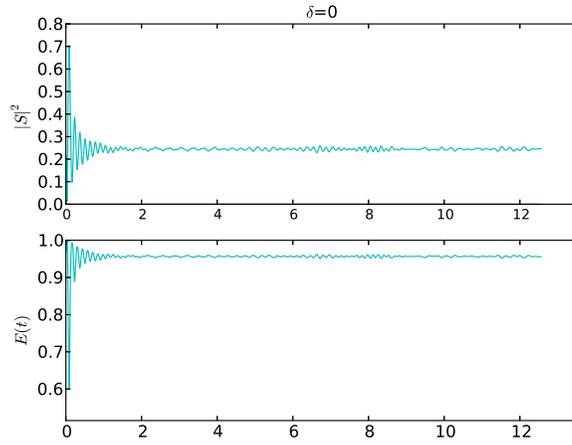
30 estados disponibles en el punto y se encuentran bajo una perturbación $\lambda = 0.1$, el estado inicial tiene la forma

$$|\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \sum_{m,n=0}^{N,M=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)(M+1)}} (|n, m\rangle).$$

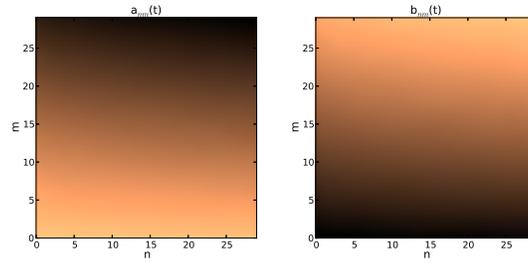
En la figura 4.21.(a) se muestra la evolución temporal de los estados entrelazados. Observamos una vez más una reflexión de los coeficientes de Schmidt con respecto a la entropía de entrelazamiento, pero esta última se encuentra desplazada y con amplitud atenuada. En general este estado inicial propicia un alto grado de entrelazamiento, ya que después de los primeros 2 ciclos (temporales), mantiene una alta estabilidad en el grado de entrelazamiento.

En los gráficos de densidad 4.21.(b), (c) y (d) observamos tres estados a distintos tiempos, los primeros $t_0 = 0.0001$ y $t_1 = 1.2022$ están en el área de las oscilaciones con mayor amplitud. Note como las franjas son una el negativo de la otra (como debe de ser). Es aún más notable el hecho de que se formen franjas bien definidas, lo que indica que al menos en los primeros dos ciclos el grado de libertad m mantiene la superposición en la que se inicia. Pero después se estabiliza en estados del tipo 4.21.(d) los cuales se aprecian un tanto más intrincados, este presenta oscilaciones que representan los estados cuyo coeficiente de Schmidt es $|S| \approx 0.25$ o bien una entropía de entrelazamiento $E \approx 0.95$, mientras que en 4.21.(b) se genera un estado con $E \approx 0.58$ y en 4.21.(c) $E \approx 0.90$.

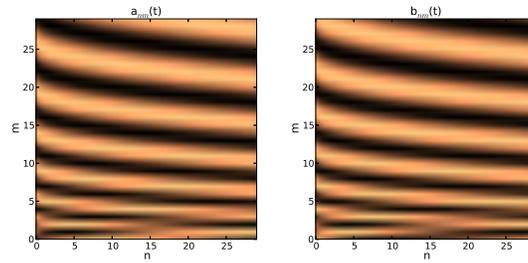
La rápida transición entre estados (con respecto a las condiciones anteriores) la podemos entender como una consecuencia de que el sistema inicialmente estuviese en una superposición de estados de ocupación.



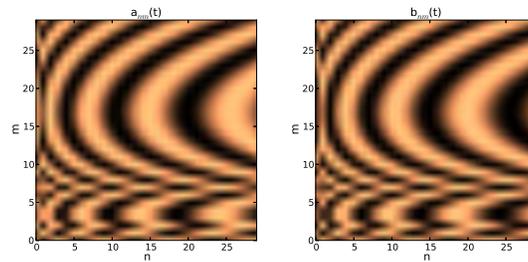
$$(a) |\psi_0\rangle = |\downarrow\rangle \otimes \sum_{m,n=0}^{N,M=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)(M+1)}} (|n, m\rangle)$$



(b) $t_0 = 0.0001$



(c) $t_1 = 1.2022$



(d) $t_2 = 6.6123$

Figura 4.21: **a)** Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$) y la Entropía de Entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda = 1$) del punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín con polarización hacia abajo ($a = 1, b = 0$) y bajo un estado superpuesto de todos los estados de ocupación, todos con la misma probabilidad, se supuso que existen $n = 30$ estados disponibles en el punto. **b)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_0 = 0.0001$, **c)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_1 = 1.2022$, **d)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_2 = 6.6123$. En los diagramas las regiones claras corresponden a la probabilidad de encontrar el espín con polarización hacia abajo y las oscuras hacia arriba.

Estado Superpuesto Perturbado espín superpuesto.

Estudiemos un caso similar al anterior pero con el espín del electrón superpuesto, el estado inicial es

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow + \uparrow\rangle) \otimes \sum_{n,m=0}^{N,M=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)(M+1)}} (|n, m\rangle).$$

En la figura 4.22.(a) observamos un comportamiento similar al anterior pero con una mayor frecuencia en la transición de estados. En general el sistema permanece con largos periodos de alto entrelazamiento, como se infiere de ver la entropía de entrelazamiento y los coeficientes de Schmidt, estos poseen una ligera curvatura a lo largo del tiempo (tipo envolvente) en el intervalo temporal [6, 8] justo en una serie de oscilaciones pronunciadas.

Una vez más podemos asociar la rápida transición de estados a el hecho de estar en una superposición de los estados de ocupación, como se observa en las figuras 4.22.b), c) y d) que son gráficos de densidad que muestran los estados generados a los tiempos $t_0 = 0.2123$, $t_1 = 6.6899$ y $t_2 = 7.6190$ respectivamente, en general vemos que los estados generados tienen una participación de los 30 estados de ocupación e inicialmente ($t_0 = 0.2123$) están estas franjas bien pronunciadas, pero después de un tiempo justo antes de entrar a la segunda zona de batimiento a $t_1 = 6.6899$ encontramos un estado muy similar al presentado en el caso anterior (4.21.d), y al tiempo $t_2 = 7.6190$ que es dentro de la segunda zona de batimiento encontramos un estado muy parecido pero desplazado a lo largo del grado de libertad m por una configuración de franjas cuasi rectas.

Esta vez los estados generados poseen aún mayor entrelazamiento cuántico con una entropía de entrelazamiento $E \approx 0.995$, *i.e.*, casi máxima y con una participación de todos los estados disponibles en el punto cuántico.

Estado Coherente Perturbado y espín fijo.

Imaginemos ahora que tenemos un estado coherente, es decir, las componentes de ocupación se encuentran bajo una distribución tipo Poisson y con el espín del electrón polarizado totalmente hacia abajo, simbólicamente el estado inicial es

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{N,M=29} \frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} |\downarrow, n, m\rangle,$$

donde $\alpha = 3$ y existen treinta estados de ocupación.

Observamos en la figura 4.23.(a) que la dinámica de entrelazamiento bajo esta condición inicialmente se encuentra en un estado de mínimo entrelazamiento ($E \approx 0$). Inmediatamente en cuanto evoluciona se generan otros estados con máximos relativos de entrelazamiento (todos los estados poseen en promedio un valor de $E \approx 0.995$).

Se observan las oscilaciones características de un estado coherente y pareciera que la simetría del sistema además de propiciar una elevada frecuencia transición de estados también induce oscilaciones cuya envolvente parece ser una Gaussiana. Estas se observan en el intervalo de tiempo $[0, 1]$ y $[4, 6]$. En el gráfico de densidad 4.23.(b) se presenta el estado generado al tiempo $t_0 = 0.7050$ ($E \approx 0.995$), note como en este instante no participan más de 15 estados de ocupación (m, n) centrados en el punto $(7_n, 7_m)$.

Al analizar otros dos estados, uno antes de entrar en la zona de oscilaciones características 4.23.(c) a $t_0 = 3.5093$ ($E \approx 0.995$), y el otro ya adentrado en la segunda zona de oscilaciones 4.23.(d) a $t_0 = 6.2196$ ($E \approx 0.995$),⁸ el sistema muestra una serie de estados con máxima entropía de entrelazamiento y en general posee alto entrelazamiento a lo largo del tiempo. Como se aprecia en los gráficos de densidad 4.23.(b), 4.23.(c) y 4.23.(d), los estados que participan se encuentran en una región de radio $r = 8$ y centrada en $(\approx 8_n, \approx 8_m)$.

⁸Elegimos este estado último por ser un mínimo en los coeficientes de Schmidt.

Estado Coherente Perturbado y espín superpuesto.

Analizando otra condición inicial similar, una distribución tipo Poisson y con el espín del electrón en una superposición de su polarización hacia arriba y abajo iguales, simbólicamente el estado inicial es

$$|\psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow + \uparrow\rangle) \otimes \sum_{n,m=0}^{N,M=29} \frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} |n, m\rangle.$$

Como se observa en la figura 4.24.(a) bajo esta condición inicial la evolución de los coeficientes de Schmidt y la entropía de entrelazamiento muestran un comportamiento similar a la condición inicial pasada cuando el espín del electrón se encuentra fija. Salvo por las pequeñas gaussianas que se forman en las oscilaciones características del estado pasado.

Analizamos los estados generados a los tiempos $t_0 = 0.5145$ ($E = 0.8994$), $t_1 = 4.8648$ ($E = 0.9201$) y $t_2 = 9.8466$ ($E = 0.9476$) correspondientes a las figuras 4.24.(b), (c) y (d). Para el tiempo t_0 encontramos pequeños modos gaussianos achatados centrados en $(8_n, 8_m)$ para el caso de espín hacia arriba, y $(10_n, 10_m)$ abajo. Los siguientes estados muestran una diferencia bastante marcada, como se aprecia de los coeficientes de Schmidt los estados generados poseen alto entrelazamiento, sin embargo, no es tanto como el presentado por el caso anterior. La estructura que presentan estos últimos dos estados (c) y (d), se asemeja a lo que podemos visualizar como medio modo Laguerre-Gauss centrado en $(10_n, 10_m)$ para ambos coeficientes de espín arriba y abajo.

Al comparar los gráficos de densidad de esta sección con la anterior observamos que en ambos se genera algo similar al caso anterior pero esta vez en la región del estado coherente oscilaciones de espín localizadas en $(\approx 9_n, \approx 9_m)$. Entendemos que esto se debe a la elección de un valor fijo de α . Si deseamos que los estados generados se encuentren centrados en algún otro punto bastara variar este parámetro.

4.2.1. Resumen MTC.

Por medio del uso de la Entropía de entrelazamiento nos ayudamos a encontrar los estados con mayor entrelazamiento; sin embargo, la estructura de los mismos no fue posible plasmarla explícitamente. Optamos por plasmar los estados en diagramas de densidad de ocupación. A partir de estos diagramas podemos inferir el número de estados que participan para formar estados entrelazados.

En la primer condición inicial sólo participan dos estados de ocupación por lo que los estados poseen una estructura similar a los casos sin perturbar.

Para la condición inicial de un estado superpuesto. Se aprecia una participación de todos los estados en todo momento. Aquí se aprecian estados con alta coherencia y nulo o muy poco entrelazamiento.

En cambio para la condición inicial coherente. Se observa una estructura diferente para estados altamente entrelazados. Esta presenta confinamiento en un radio de dieciséis estados de ocupación centrados en $(9_n, 9_m)$ y con una distribución similar a modos Gaussianos.

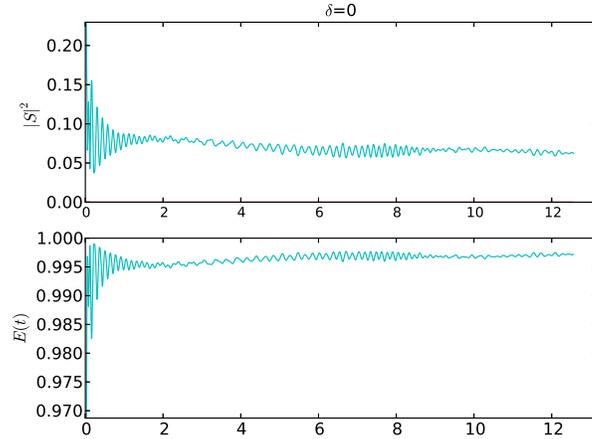
4.3. Discusión.

Si comparamos los estado iniciales confinados con respecto a los extendidos dan mayor entrelazamiento, siendo ideales para generación de entrelazamiento.

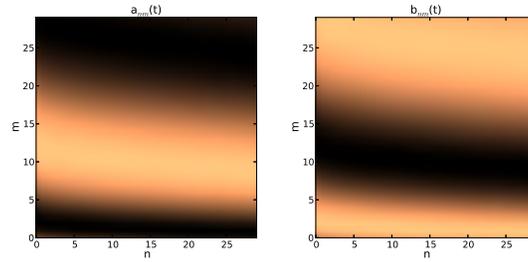
Pareciera que los estados con alto grado de entrelazamiento son aquellos que mantienen correlaciones complejas entre pares de estados inmediatos.

También encontramos que algunos de los estados entrelazados que se están generando en el sistema involucran superposición entre estados de ocupación no inmediatos, *e.g.*, superposiciones entre el tercer estado y el décimo sexto estado de ocupación.

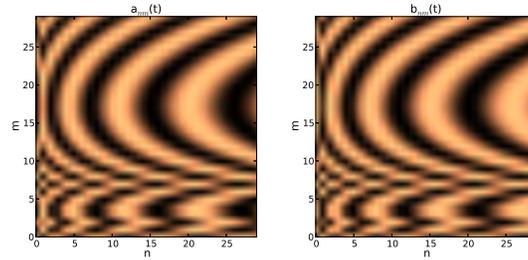
En general sabemos que los estados iniciales determinan la dinámica del sistema, además existe una relación por determinar entre el entrelazamiento y la magnetización intrínseca.



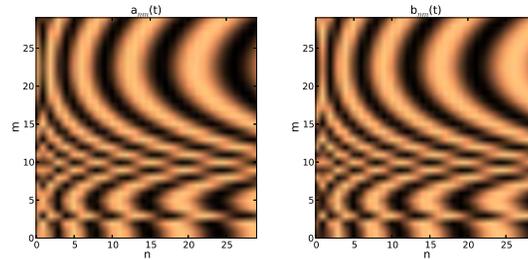
$$(a) |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow + \uparrow\rangle) \otimes \sum_{m,n=0}^{N,M=29} \frac{1}{\sqrt{(N+1)(M+1)}} (|n, m\rangle)$$



(b) $t_0 = 0.2123$

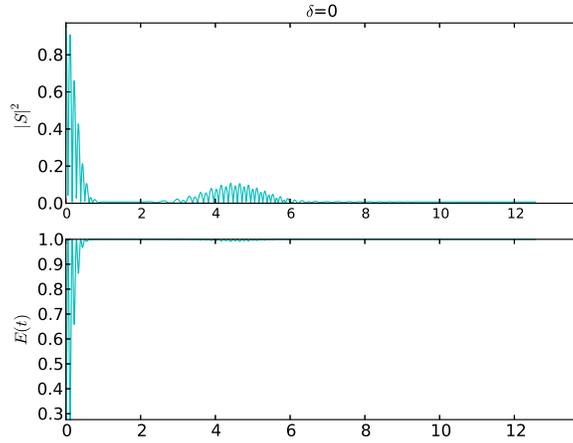


(c) $t_1 = 6.6899$

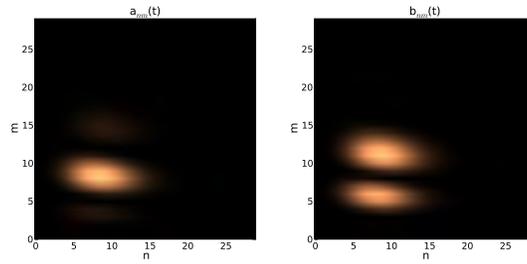


(d) $t_2 = 7.6190$

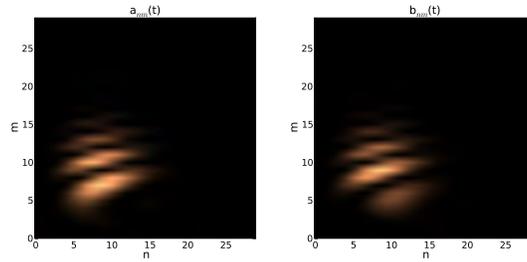
Figura 4.22: Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$), sus componentes y la Entropía de Entrelazamiento $E(t)$, como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda = 0.1$) en un punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín en una superposición ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$) bajo un estado superpuesto en todos los estados de ocupación todos la misma probabilidad, se supuso que existen $n = 30$ estados disponibles en el punto. **b)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_0 = 0.2123$. **c)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_1 = 6.6899$. **d)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_2 = 7.6190$. En los diagramas las regiones claras corresponden a la probabilidad de encontrar el espín con polarización hacia abajo y las oscuras hacia arriba.



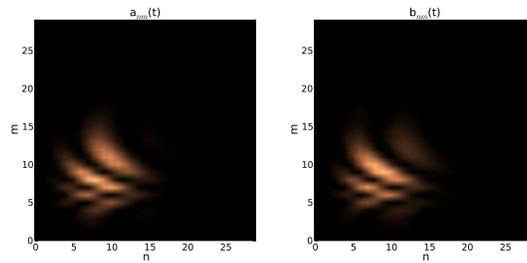
(a) $e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{N,M=29} \frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} |\downarrow, n, m\rangle$



(b) $t_0 = 0.7050$



(c) $t_1 = 3.5093$



(d) $t_2 = 6.2196$

Figura 4.23: Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$) y la Entropía de Entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda = 0.1$) en un punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín con polarización hacia abajo ($a = 1$, $b = 0$) bajo un estado de ocupación coherente, se supuso que existen $n = 30$ estados de ocupación disponibles en el punto. **b)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_0 = 0.7050$. **c)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_1 = 3.5093$. **d)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_2 = 6.2196$. En los diagramas las regiones claras corresponden a la probabilidad de encontrar el espín con polarización hacia abajo y las oscuras hacia arriba.

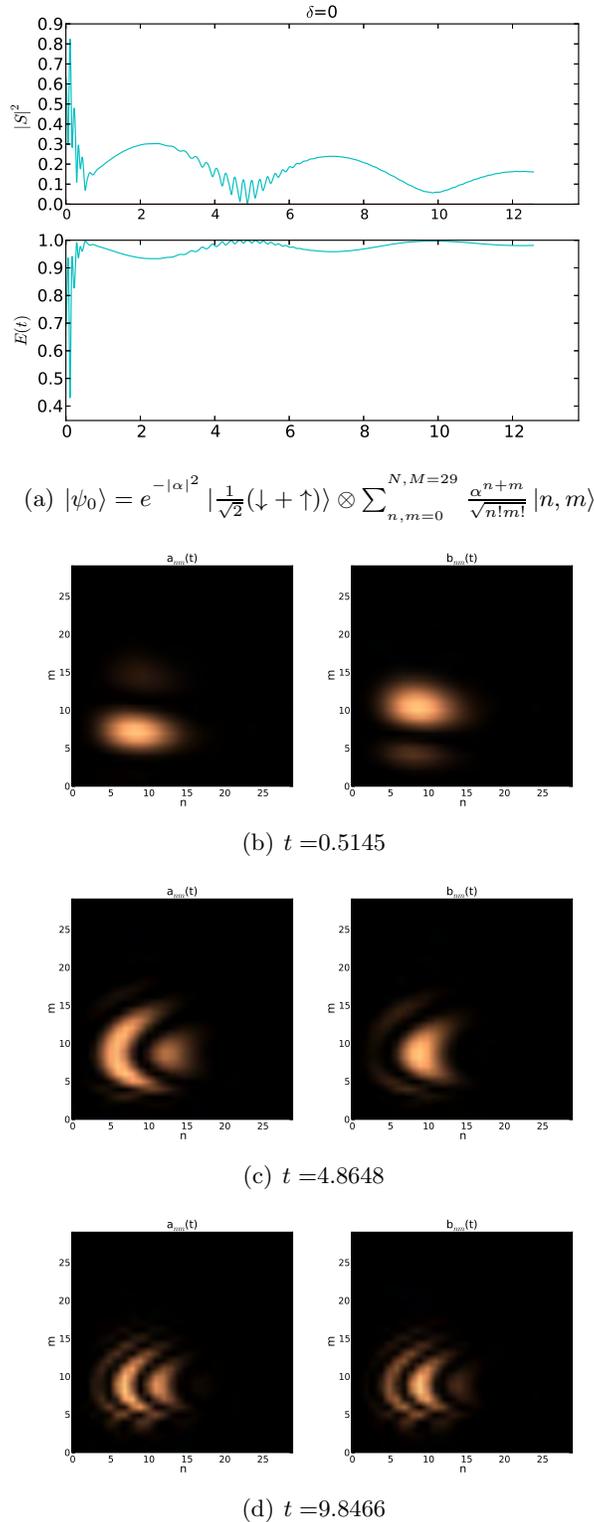


Figura 4.24: Evolución temporal de la magnitud del vector de Bloch ($|S|^2$), sus componentes y la Entropía de Entrelazamiento $E(t)$ como función del tiempo, para un estado inicial perturbado ($\lambda = 1$) del punto cuántico con la probabilidad de encontrar al espín con polarización superpuesta ($a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$) bajo un estado de ocupación coherente, se supuso que existen $n = 30$ estados de ocupación disponibles en el punto. **b)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_0 = 0.5145$. **c)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_1 = 4.8648$. **d)** Diagrama de densidad de un estado generado a un tiempo $t_2 = 9.8466$. En los diagramas las regiones claras corresponden a la probabilidad de encontrar el espín con polarización hacia abajo y las oscuras hacia arriba.

Capítulo 5

Conclusión.

Hemos estudiado el modelo de un punto cuántico bidimensional que confina un solo electrón con interacción espín-órbita, enfocándonos en el grado de entrelazamiento que se da entre los grados de libertad espín y órbita.

Llevamos a cabo dos líneas de trabajo. En la primera estudiamos la dinámica del sistema bajo una aproximación de onda rotante; para esto, el sistema que originalmente está en un espacio de Hilbert de $\mathcal{H}_{2 \otimes n \otimes m}$ lo reducimos a uno de $\mathcal{H}_{2 \otimes n}$. Para la segunda estudiamos el sistema completo utilizando el método de transformaciones canónicas que es un método de perturbaciones.

a) Para la aproximación de onda rotante.

Encontramos que la función de onda que produce máximo entrelazamiento bajo un estado inicial es $|\psi\rangle = |\downarrow, 0\rangle$, que es el electrón confinado en el estado base y con polarización hacia abajo. Los estados generados bajo esta condición son estados de Bell. La condición inicial del estado de ocupación superpuesto muestra una pobre generación de estados máximamente entrelazados. La condición de estados coherentes genera estados con alto grado de entrelazamiento. Estos poseen una estructura que acopla pares de estados diluidos en una mayor cantidad de estados.

Bajo esta aproximación encontramos una sensibilidad en cuanto a la evolución del sistema debida a los estados iniciales, *i.e.*, encontramos una fuerte dependencia de los parámetros iniciales sobre los estados que puede generar el sistema. Como se ve en el capítulo anterior, ligeras variaciones nos dan acceso a nuevos estados de ocupación y por ende potencialmente entrelazables.

Al trabajar los coeficientes de Schmidt en función de los vectores de Bloch, nos da indicios de una posible relación entre el grado de entrelazamiento y la magnetización intrínseca del sistema. Esta

hipótesis es plausible ya que los vectores de Bloch los podemos considerar como vectores de estado de espín.

b) **Para el Método de transformaciones canónicas.**

Tenemos un sistema con tres grados de libertad ($2 \times n \times m$). Notemos que aún cuando ahora la portadora del sentido físico de nuestro sistema es la entropía de entrelazamiento. La entropía es dependiente de los coeficientes de Schmidt. Por lo que es plausible seguir describiendo la dinámica de entrelazamiento de sistemas similares pero con más de dos grados libertad.

Encontramos que la condición inicial del electrón completamente polarizado y confinado al primer estado base es la que al evolucionar genera estados con máximo nivel de entrelazamiento, *e.g.*, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow, 0, 0\rangle + e^{i\varphi} |\uparrow, 1, 1\rangle)$. En el caso de la condición inicial superpuesta genera estados con mucha coherencia y poco entrelazamiento, esto se aprecia en los gráficos de densidad como patrones de interferencia. Mientras que la condición inicial de estados coherentes genera alto entrelazamiento. En los gráficos de densidad observamos una estructura gaussiana aplastada correspondiente al espín arriba y abajo. Otros estados que se generan tienen una estructura tipo Laguerre-Gauss.

Bajo el esquema perturbado tenemos que los estados generados se ven afectados por contribuciones de todos los estados en el punto cuántico y aún así presentar un alto grado de entrelazamiento.

Apéndice A

Postulados de la Mecánica Cuántica.

Las bases de mecánica cuántica que se requieren para comprender los procesos de la computación cuántica se pueden resumir en 4 postulados, dentro de estos postulados se está asumiendo que el espacio en donde se representan es en un espacio de Hilbert de dimensión finita.¹

Postulado 1. Se asocia a cualquier sistema físico aislado que es un espacio vectorial complejo con producto interno (que es, un espacio de Hilbert) conocido como el espacio de estados de el sistema. Este estado del sistema está completamente descrito por un vector unitario en este espacio.

Los qubits son el ejemplo de tal sistema. En su realización física como la polarización de un fotón tenemos dos vectores base: $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ representando vertical y horizontal respectivamente. En este vector base polarizado a un ángulo θ puede ser expresado como $\cos(\theta)|\leftrightarrow\rangle - \sin(\theta)|\updownarrow\rangle$.

Una propiedad importante de un sistema cuántico es que al multiplicar un estado cuántico por un factor unitario complejo ($e^{i\theta}$) nos arroja el mismo estado complejo. Entonces $e^{i\theta}|\uparrow\rangle$ y $|\uparrow\rangle$ representan esencialmente el mismo estado.

Notación 1. El estado χ se denota por $|\chi\rangle$ es un vector columna, e.g.,

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|\chi\rangle^\dagger = \langle\chi|$ denota el conjugado transpuesto de $|\chi\rangle$. A partir del ejemplo anterior obtendríamos el

¹Toda la sección de Postulados de la Mecánica Cuántica, se ha tomado de las notas del curso de Computación Cuántica en el Departamento de Matemáticas del MIT (2003).

siguiente vector:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ y en general $\langle x | y \rangle \leq 1$.

Postulado 2. La evolución de un sistema cuántico cerrado esta descrita por una transformación unitaria. Si $|\psi\rangle$ es un estado a tiempo t y $|\psi'\rangle$ es el de un tiempo t' , entonces la relación entre ambos estados esta dada por: $|\psi'\rangle = U |\psi\rangle$ para algún operador unitario U que depende solo de t y t' .

Definición 1. Un operador unitario es un operador lineal que va de vectores unitarios a vectores unitarios. Para cada ψ , $\langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = 1$ y con $U^\dagger U = 1$. Donde A^\dagger lo denotamos como el operador adjunto de A , que es el operador que satisface $(\langle x | A^\dagger)^\dagger = A | x \rangle$ para toda x .

Definición 2. Un operador Hermitiano es un operador que satisface $A^\dagger = A$. Los operadores comúnmente usados sobre qubits son: la matriz identidad (\mathbb{I}), matrices de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) y la transformada de Hadamard (H_{Had}), todas estas descritas como sigue.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mapea : } |0\rangle \rightarrow |1\rangle \wedge |1\rangle \rightarrow |0\rangle ; \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Mapea : } |0\rangle \rightarrow i|1\rangle \wedge |1\rangle \rightarrow -i|0\rangle ; \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Mapea : } |0\rangle \rightarrow |0\rangle \wedge |1\rangle \rightarrow -|1\rangle ; \\ H_{Had} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Mapea : } |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \wedge |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle); \end{aligned}$$

A todos estos operadores mencionados se les conoce también como Compuertas Cuánticas.

El segundo postulado proviene de la ecuación de Shrödinger para sistemas físicos,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle$$

donde H es un operador hermitiano fijo, conocido como el Hamiltoniano de un sistema cerrado.

Postulado 3. Las medidas en mecánica cuántica están descritas por una colección $\{M_m\}$ de operadores de medición. Estos son operadores actuando en un estado del sistema a ser medido. El subíndice

m se refiere a los resultados de medición que pueden ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es $|\psi\rangle$ inmediatamente antes de la medición, entonces la probabilidad de que resulte m esta dada por:

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle}}$$

El operador de mediciones satisface la ecuación de completéz,

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I.$$

La ecuación de completéz expresa el hecho de que la suma de probabilidades sea uno:

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle = 1.$$

Podemos ver los siguientes tipos de mediciones. Supongamos que $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, \dots, |\nu_d\rangle$ forman una base ortonormal. Entonces $\{M_i = |\nu_i\rangle \langle\nu_i|\}$ es una medición cuántica. Del estado $|\psi\rangle$ en esta medición obtenemos:

$$\frac{|\nu_i\rangle \langle\nu_i|\psi\rangle}{|\langle\nu_i|\psi\rangle|}$$

con probabilidad $|\langle\nu_i|\psi\rangle|^2$.

Definición 3. Un proyector es una matriz Hermitiana con eigenvalores 0 y 1. El subespacio con eigenvalor 1 es el subespacio asociado con este operador.

Suponga que S_1, S_2, \dots, S_k son subespacios ortogonales que atraviesan el estado. Entonces $\{P_i\}$ es una medición cuántica donde P_i es el proyector de S_i . Podemos escribir $|\psi\rangle = \alpha_1 |\psi_1\rangle + \alpha_2 |\psi_2\rangle + \dots + \alpha_k |\psi_k\rangle$, donde $|\psi\rangle \in S_i$. Entonces esta medida lleva $|\psi\rangle$ a $|\psi_i\rangle$ con probabilidad $|\alpha_i|^2$.

Postulado 4. El espacio del estado de un sistema cuántico compuesto es el producto tensorial de los estados de la componente de estado de los sistemas físicos. Por otra parte, si tenemos sistemas numerados del 1 hasta n , y el sistema número i esta preparado en el estado $|\psi_i\rangle$, entonces el estado unión del total de sistemas es $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.

Definición 4. Sean S_1 y S_2 espacios de Hilbert con bases $|e_1\rangle, \dots, |e_k\rangle$ y $|f_1\rangle, \dots, |f_l\rangle$ respectivamente. Entonces el producto tensorial de S_1 y S_2 (denotado por $S_1 \otimes S_2$) es un espacio de dimensión kl conformado de todas las combinaciones lineales de todos lo posibles pares de los elementos de las bases originales, esto es, de $\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle\}_{i \leq k, j \leq l}$ ($|v\rangle \otimes |w\rangle$ se simplifica a menudo $|v\rangle |w\rangle$ o $|vw\rangle$). Con una representación

matricial mas concreta el producto tensorial de dos vectores es el producto de Kronecker de vectores, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{-3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{-4}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

El producto tensorial satisface la propiedad de que el producto de dos vectores unitarios es un vector unitario. Esto se verifica como sigue. Sean $|\nu_1\rangle = \sum a_i |e_i\rangle$ y $|\nu_2\rangle = \sum b_j |f_j\rangle$ dos vectores unitarios, entonces:

$$|\nu_1\rangle \otimes |\nu_2\rangle = \sum a_i |e_i\rangle \otimes \sum b_j |f_j\rangle = \sum a_i b_j |e_i\rangle |f_j\rangle.$$

De aquí entonces,

$$||\nu_1\rangle \otimes |\nu_2\rangle|^2 = \sum |a_i b_j|^2 = \sum |a_i|^2 \sum |b_j|^2 = ||\nu_1\rangle|^2 ||\nu_2\rangle|^2$$

Otra importante propiedad del espacio del producto tensorial es que contiene vectores que no son producto tensorial entre ellos. Por ejemplo, puede ser fácilmente verificado que el vector

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1\rangle |f_2\rangle - |e_2\rangle |f_1\rangle)$$

no es un producto tensorial en si mismo. Estos vectores se les llaman “Entrelazados”.

Apéndice B

Análisis del modelo Jaynes-Cummings.

Partimos de tener un átomo acoplado a un solo modo cuantizado del campo. Sabemos que el Hamiltoniano de interacción entre un átomo y un campo clásico en la aproximación dipolar esta dado por:

$$v = -e\vec{r} \cdot \vec{E},$$

donde $-e\vec{r}$ es el operador de momento dipolar atómico y \vec{E} es el campo eléctrico.

Para un modo del campo $\mathcal{H}_s = \hbar\Omega_s(a_s^\dagger a_s + 1/2)$ el Hamiltoniano de interacción se convierte:

$$v = \hbar(a + a^\dagger)(g\sigma_+ + g^*\sigma_-),$$

donde $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son las matrices u operadores de cambio de espín (No-Hermitianos), donde el elemento de matriz del dipolo eléctrico es:

$$g = \frac{\wp\varepsilon\Omega}{2\hbar} \text{sen } k_z$$

Entonces el Hamiltoniano total átomo-campo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \quad (\text{B.1})$$

donde el primer término de la derecha $\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$ corresponde a un Hamiltoniano del sistema de dos niveles sin perturbar con una frecuencia de transición ω . El segundo término $\hbar\Omega a^\dagger a$ es la energía de un modo de

campo con frecuencia Ω (Hamiltoniano de campo libre sin energía de punto cero), $\mathfrak{H} = \hbar\Omega(a^\dagger a + 1/2)$ ya que si apagamos el campo $\Omega = 0$ el átomo deja de ser afectado y tiene su energía característica. El tercer término corresponde a un Hamiltoniano de interacción o acoplamiento átomo-campo; donde tenemos que:

- $a\sigma_+ :=$ absorción de un fotón y excitación del átomo del estado base $|b\rangle$ al estado superior $|a\rangle$.
- $a^\dagger\sigma_- :=$ emisión de un fotón y des-excitación del átomo.

Sin pérdida de generalidad para sistemas de dos niveles en reposo, podemos elegir el eje de cuantización atómica tal que el elemento de matriz $g \in \mathbb{R}$.

Explícitamente los términos en el Hamiltoniano que oscilen con frecuencias $\omega_L + \omega_0$ son despreciadas, mientras que los términos que oscilan con frecuencias $\omega_L - \omega_0$ se conservan, donde ω_L es la frecuencia de la luz y ω_0 es la frecuencia de transición.

El Hamiltoniano toma su forma en el esquema de interacciones, como en cierto sentido en el esquema de interacciones se puede pensar como si rotara con el Ket del sistema, sólo aquella parte de la onda electromagnética que co-rote aproximadamente es conservada; la componente contra-rotada es despreciable.

Sin embargo, estos argumentos no son enteramente válidos en el estado sólido, para esto hay que considerar la evolución libre ($g = 0$) de los operadores $a\sigma_+$ y $a^\dagger\sigma_+$, en el esquema de Heisenberg. Los operadores de creación y aniquilación tienen la dependencia temporal de:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}}(a(t) + a^\dagger(t)); \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2}}(a(t) - a^\dagger(t))$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega q + ip)e^{-i\omega t};$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega q - ip)e^{+i\omega t}.$$

Similarmente los operadores de cambio de espín tienen dependencia temporal de Heisenberg:

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm(0)e^{\pm i\omega t}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a(t)\sigma_-(t) &= a(0)\sigma_-(0)e^{-i(\Omega+\omega)t}, \\ a(t)^\dagger\sigma_+(t) &= a^\dagger(0)\sigma_+(0)e^{i(\Omega+\omega)t}, \\ a(t)\sigma_+(t) &= a(0)\sigma_+(0)e^{-i(\Omega-\omega)t}, \\ a(t)^\dagger\sigma_-(t) &= a^\dagger(0)\sigma_-(0)e^{i(\Omega-\omega)t}, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Evolucionan a Frecuencias ópticas.} \\ \text{Varian poco en resonancia cercana.} \end{array}$$

Por lo tanto $a\sigma_-$ y $a^\dagger\sigma_+$ son despreciables en la aproximación de onda rotante.

Bajo la premisa anterior el Hamiltoniano (B.1) se reduce a:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)}_{\mathcal{H}_v} \quad (\text{B.2})$$

Hamiltoniano sin Hamiltoniano de
perturbar. interacción.

Del Hamiltoniano sin perturbar vemos que satisface las ecuaciones de eigenvalores:

$$\mathcal{H}_0 |\Psi\rangle = E_0 |\Psi\rangle$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |a, n\rangle &= (\tfrac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a) |a, n\rangle = \\ &= \tfrac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |n\rangle + \hbar\Omega n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |n\rangle = \\ &= \hbar(\tfrac{\omega}{2} + \Omega n) |a, n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |b, n\rangle &= (\tfrac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega a^\dagger a) |b, n\rangle = \\ &= \tfrac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \otimes |n\rangle + \hbar\Omega n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \otimes |n\rangle = \\ &= \hbar(\tfrac{-\omega}{2} + \Omega n) |b, n\rangle \end{aligned}$$

La energía de interacción \mathcal{H}_v acopla los estados del sistema átomo-campo $|a, n\rangle$ y $|b, n+1\rangle$ para cada valor de n , pero no acopla $|a, n\rangle$ y $|b, n-1\rangle$. Entonces podemos considerar la interacción átomo-campo para cada variedad¹ $\varepsilon_n = \{|a, n\rangle, |b, n+1\rangle\}$ independientemente y escribir el Hamiltoniano total como:

$\mathcal{H} = \sum_n \mathcal{H}_n$, donde \mathcal{H}_n actúa solo sobre la variedad ε_n .

¹variedad: objeto geométrico estándar que generaliza la noción intuitiva de una curva (1-variedad) y de superficie (2-variedad) a cualquier dimensión y sobre cuerpos variados, no necesariamente \mathbb{R}

Veamos como actúa el Hamiltoniano de interacción con los estados:

$$\mathcal{H}_v = \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \quad (\text{B.3})$$

sabemos que $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, $\hat{\sigma}_+|a\rangle = |0\rangle$, $\hat{\sigma}_-|a\rangle = |b\rangle$, $\hat{\sigma}_+|b\rangle = |a\rangle$, $\hat{\sigma}_-|b\rangle = |0\rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)|b, n+1\rangle &= \hbar g(a\sigma_+|b, n+1\rangle + a^\dagger\sigma_-|b, n+1\rangle) = \\ &= \hbar g(\sqrt{n+1}|a, n\rangle + \sqrt{n+2}|0, n+2\rangle) = \\ &= \hbar g\sqrt{n+1}|a, n\rangle \end{aligned}$$

De manera matricial podemos escribir los estados

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & |n\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |b\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & |n+1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

entonces:

$$|a, n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |b, n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |b, n+1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

por lo tanto:

$$\mathcal{H}_1 = \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)|a, n\rangle\langle a, n| = \hbar g\sqrt{n+1}|b, n+1\rangle\langle a, n| = \hbar g\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 &= \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)|b, n+1\rangle\langle b, n+1| = \hbar g\sqrt{n+1}|a, n\rangle\langle b, n+1| = \\ &= \hbar g\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{H}_3 = \hbar\left(\frac{\omega}{2} + n\Omega\right) |a, n\rangle \langle a, n| = \hbar\left(\frac{\omega}{2} + n\Omega\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{H}_4 = \hbar\left(\frac{-\omega}{2} + (n+1)\Omega\right) |b, n+1\rangle \langle b, n+1| = \hbar\left(\frac{-\omega}{2} + (n+1)\Omega\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \sum_n \mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} \hbar\left(\frac{\omega}{2} + n\Omega\right) & 0 & 0 & \hbar g\sqrt{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hbar g\sqrt{n+1} & 0 & 0 & \hbar\left(\frac{-\omega}{2} + (n+1)\Omega\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

que la podemos reescribir como:

$$\mathcal{H} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 2g\sqrt{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2g\sqrt{n+1} & 0 & 0 & -\delta \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

donde $\delta = \omega - \Omega$.

Calculando sus eigenvalores:

$$\det(\mathcal{H} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\Omega + \frac{\hbar}{2}\delta - \lambda & 0 & 0 & \hbar g\sqrt{n+1} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \hbar g\sqrt{n+1} & 0 & 0 & \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\Omega - \frac{\hbar}{2}\delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Donde rápidamente observamos que las energías (eigenvalores) son:

$$E_{1n} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\Omega + \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad (\text{B.11})$$

$$E_{2n} = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)\Omega - \frac{\hbar}{2}\sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad (\text{B.12})$$

Introduciendo la frecuencia de transición entre estados (frecuencia de Rabi)

$$R_n = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)}. \quad (\text{B.13})$$

Entonces, las eigenenergías quedan descritas por:

$$E_n^\pm = \hbar(n + \frac{1}{2})\Omega \pm \frac{\hbar}{2}R_n \quad (\text{B.14})$$

Ahora calculemos los eigenvectores de \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \hbar(n + \frac{1}{2})\Omega\mathbb{I} + \frac{\delta\hbar}{2}\mathbb{K}, \quad (\text{B.15})$$

$$\text{donde } \mathbb{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

A partir de (B.15) vemos que \mathcal{H} y \mathbb{K} tienen los mismos eigenvectores, sean entonces $|\Psi_\pm\rangle$ estos vectores:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}|\Psi_\pm\rangle &= E_n^\pm |\Psi_\pm\rangle \\ \mathbb{K}|\Psi_\pm\rangle &= \kappa_\pm |\Psi_\pm\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

De (B.15) podemos concluir que:

$$E_\pm = \hbar(n + \frac{1}{2})\Omega + \frac{\delta\hbar}{2}\kappa_\pm. \quad (\text{B.18})$$

Finalmente la primera matriz que aparece al lado derecho de la ecuación (B.9) juega un rol menor; podremos hacerla desaparecer escogiendo el origen de los eigenvalores en $\hbar(n + \frac{1}{2})\Omega$.

Sean $\tan \theta_n = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta}$ con $0 \leq \theta_n \leq \pi$,

$$\Rightarrow \mathbb{K} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tan \theta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tan \theta_n & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

A partir de $\det[\mathbb{K} - \kappa\mathbb{I}] = \kappa^2 - 1 - \tan^2 \theta_n = 0$,

$$\kappa^2 = 1 + \tan^2 \theta_n,$$

$$\cos^2 \theta_n \kappa^2 = \cos^2 \theta_n + \sen^2 \theta_n,$$

$$\therefore \kappa^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta_n}.$$

Lo que implica que los eigenvalores en función del ángulo θ_n sean

$$\kappa_{\pm} = \pm \frac{1}{\cos \theta_n} \quad (\text{B.20})$$

Calculamos los eigenvectores como sigue:

$$(A - \kappa \mathbb{I})V = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tan \theta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tan \theta_n & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \theta_n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

$$a \left(1 - \frac{1}{\cos \theta_n} \right) + d \tan \theta_n = 0,$$

$$\Rightarrow d = a \tan \frac{\theta_n}{2}.$$

Si $a = \cos \frac{\theta_n}{2} \Rightarrow d = \sen \frac{\theta_n}{2}$.

Recordemos que

$$|a, n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge |b, n+1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Por lo que el primer eigenvector es:

$$|\Psi_+\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |a, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |b, n+1\rangle \quad (\text{B.24})$$

Para calcular el segundo partimos de la siguiente expresión

$$\left(1 + \frac{1}{\cos \theta_n}\right) a + d \tan \theta_n = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\Rightarrow a = -d \tan \frac{\theta_n}{2} \quad (\text{B.26})$$

Si $d = \cos \frac{\theta_n}{2} \Rightarrow a = -\sin \frac{\theta_n}{2}$,

$$|\Psi_-\rangle = -\sin \frac{\theta_n}{2} |a, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |b, n+1\rangle \quad (\text{B.27})$$

Apéndice C

Perturbación Rayleigh-Schrödinger.

Para esta sección consideramos un sistema tipo tripartito $(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m)$, donde $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_m$ caracteriza todo el espacio del punto cuántico bidimensional y \mathcal{H}_2 representa el espacio de espín.

Propiedades estáticas.

Primero que nada hablemos de los estados que describen nuestro sistema, estos tienen la forma $|s, n, m\rangle$, con $s = \{\uparrow, \downarrow\}$, donde el primer termino corresponde al estado de espín y los siguientes dos corresponden a los estados de ocupación del punto cuántico bidimensional.

Utilizaremos la teoría de perturbaciones cuántica habitual, partiendo de nuestro Hamiltoniano (3.11), consideramos que nuestro Hamiltoniano sin perturbar es (3.14), entonces la perturbación tiene una forma:

$$\hat{H}' = -g_+(\hat{a}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}_+^\dagger\hat{\sigma}_+); \quad (\text{C.1})$$

donde $g_+ = \frac{l_0^2\gamma_+}{2\hbar l_{so}}$.

Basados en que conocemos las eigenfunciones y eigenvalores del JCM, basta considerar una perturbación como la mencionada en (C.1), y así poder aproximarnos al Hamiltoniano que contiene todas las interacciones de nuestro sistema (3.11).

Continuamos nuestra descripción bajo la segunda cuantización con los operadores de transición de estados:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y),$$

asociamos a estos operadores frecuencias de transición $\omega_\pm = \tilde{\omega} \pm \frac{\omega_c}{2}$; donde $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$ es una

componente que incluye a ω_0 que es la frecuencia natural de transición entre estados del sistema y $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ es la frecuencia de ciclotrón.

Definimos las siguientes componentes para englobar términos dentro del Hamiltoniano $\gamma_{\pm} = 1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{l}}{l_B} \right)^2$ con $\tilde{l} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\tilde{\omega}}}$;

E identificamos a las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} l_B &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} && \text{Longitud magnética.} \\ l_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} && \text{Longitud de confinamiento del punto.} \\ E_z &= \frac{|g|m}{2m_e} \left(\frac{l_B}{l_0} \right)^2 && \text{Energía de Zeeman.} \end{aligned}$$

En la interacción epín-órbita la fuerza de acoplamiento constante “ α ” está relacionada a la longitud de precesión del espín:

$$l_{so} = \frac{\hbar^2}{2m\alpha}$$

Recordemos también que los operadores de rotación del espín son σ_{\pm} , definidos como:

$$\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

y actúan de la siguiente manera $\hat{\sigma}_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, $\hat{\sigma}_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ y $\hat{\sigma}_+ |\uparrow\rangle = \hat{\sigma}_- |\downarrow\rangle = |0\rangle$.

Consideramos al Hamiltoniano de perturbación que actúa sobre los estados de la forma:

$$\hat{H}' |\downarrow, n, m\rangle = -g_+ (\sqrt{n} |0, n-1, m\rangle + \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1, m\rangle) \quad (\text{C.2})$$

$$\hat{H}' |\uparrow, n+1, m\rangle = -g_+ (\sqrt{n} |\downarrow, n-1, m\rangle + \sqrt{n+1} |0, n+1, m\rangle) \quad (\text{C.3})$$

Entonces actuando sobre los estados que describen el sistema sin perturbar (eigenestados del JCM)

$$\hat{H}' |\Psi_n^{+(0)}, m\rangle = -g_+ \left(\cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1, m\rangle + \text{sen} \frac{\theta_n}{2} \sqrt{n} |\downarrow, n-1, m+1\rangle \right) \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{H}' |\Psi_n^{-(0)}, m\rangle = -g_+ \left(\cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{n+1} |\uparrow, n+1, m\rangle + \text{sen} \frac{\theta_n}{2} \sqrt{n} |\downarrow, n-1, m+1\rangle \right) \quad (\text{C.5})$$

Sabemos que los elementos de matriz del Hamiltoniano de perturbación tiene la forma:

$$H_{ijnm}^{\pm} = \langle \Psi_i^{\pm(0)}, j | \hat{H}' | \Psi_n^{\pm(0)}, m \rangle \quad (\text{C.6})$$

Explícitamente para nuestro caso los encontramos haciendo un ligero desarrollo, primero encontremos H_{ijnm}^+ :

$$\begin{aligned} H_{ijnm}^+ &= -g_+ \left(\cos \frac{\theta_i}{2} \langle \downarrow, i, j | + \sin \frac{\theta_i}{2} \langle \uparrow, i+1, j | \right) \times \\ &\times \left(\cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} | \uparrow, n, m+1 \rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} | \downarrow, n+1, m-1 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

el cual se puede escribir utilizando propiedades de ortogonalidad como:

$$H_{ijnm}^+ = -g_+ \left(\sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} \delta_{j,m+1,i+1,n} + \cos \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} \delta_{j,m-1,i,n+1} \right) \quad (\text{C.8})$$

Ahora H_{ijnm}^- tiene una forma:

$$\begin{aligned} H_{ijnm}^- &= -g_+ \left(-\sin \frac{\theta_i}{2} \langle \downarrow, i, j | + \cos \frac{\theta_i}{2} \langle \uparrow, i+1, j | \right) \times \\ &\times \left(-\sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} | \uparrow, n, m+1 \rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} | \downarrow, n+1, m-1 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

utilizando propiedades de ortogonalidad lo reescribimos como:

$$H_{ijnm}^- = -g_+ \left(-\sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} \delta_{j,m-1,i,n+1} - \cos \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} \delta_{j,m+1,i+1,n} \right) \quad (\text{C.10})$$

Calculamos ahora la corrección a primer orden de la función de onda, recordemos que esta dada por:

$$\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \underbrace{\sum_{i \neq n, j \neq m} \frac{\hat{H}_{in,jm}}{E_{nm}^{(0)} - E_{ij}^{(0)}} \varphi_i^{(0)}}_{\varphi_n^{(1)}} \quad (\text{C.11})$$

Entonces la corrección a primer orden para los estados $|\Psi_n^+\rangle$ y $|\Psi_n^-\rangle$ son:

$$\begin{aligned} |\Psi_n^{+(1)}, m\rangle &= \frac{-g_+ \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1}}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{2}} \left(\cos \frac{\theta_{n-1}}{2} | \downarrow, n-1, m+1 \rangle + \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} | \uparrow, n, m+1 \rangle \right) - \\ &+ \frac{-g_+ \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} \sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m}}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{2}} \left(\cos \frac{\theta_{n+1}}{2} | \downarrow, n+1, m-1 \rangle + \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} | \uparrow, n+2, m-1 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_n^{-(1)}, m\rangle = & \frac{g_+ \operatorname{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m}}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{2}} \left(-\operatorname{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} |\downarrow, n+1, m-1\rangle + \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} |\uparrow, n+2, m-1\rangle \right) + \\
 & + \frac{g_+ \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1}}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2}} \left(-\operatorname{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} |\downarrow, n-1, m+1\rangle + \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} |\uparrow, n, m+1\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

La corrección a primer orden de la energía es nula, por lo que tenemos:

$$E_{nm}^{\pm} = E_{nm}^{\pm(0)} \tag{C.14}$$

Eigenestados perturbados a segundo orden.

Calculando las energías a segundo orden.

$$E_{nm}^{\pm} = E_{nm}^{\pm(0)} + \sum_{i \neq n, j \neq m} \frac{|H_{ni, mj}^{\pm}|^2}{E_{nm}^{\pm(0)} - E_{ij}^{(0)}} \tag{C.15}$$

El elemento de matriz ya lo conocemos (C.6), ahora solo hace falta calcular los elementos $|H_{ni, mj}^{\pm}|^2$, que descritos ya utilizando propiedades de ortogonalidad son:

$$|H_{ijnm}^+|^2 = g_+^2 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos^2 \frac{\theta_n}{2} (m+1) \delta_{i+1, n, j, m+1} + \cos^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_n}{2} m \delta_{i, n+1, j, m-1} \right) \tag{C.16}$$

$$|H_{ijnm}^-|^2 = g_+^2 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos^2 \frac{\theta_n}{2} m \delta_{i, n+1, j, m-1} + \cos^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_n}{2} m \delta_{i+1, n, j, m+1} \right) \tag{C.17}$$

Ahora sustituyendo y evaluando los elementos (C.16) y (C.17) en el segundo termino de (C.15) obtenemos las dos energías características del sistema :

$$\begin{aligned}
 E_{nm}^+ = & \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_- + \left(M + \frac{1}{2} \right) \omega_+ + \frac{\Delta_n}{2} + \\
 & + g_+^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos^2 \frac{\theta_n}{2} (m+1)}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_n}{2} m}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
 E_{nm}^- = & \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_- + \left(M + \frac{1}{2} \right) \omega_+ - \frac{\Delta_n}{2} + \\
 & + g_+^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos^2 \frac{\theta_n}{2} m}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_n}{2} (m+1)}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Para la corrección de segundo orden en la energía vemos que la corrección entre niveles nm e ij es importante y si $E_{ij}^{(0)} > E_{nm}^{(0)}$, la energía E_{nm}^{\pm} desciende, mientras que si $E_{ij}^{(0)} < E_{nm}^{(0)}$, E_{nm}^{\pm} asciende

respecto a $E_{nm}^{(0)}$; en ambos casos los niveles E_{nm} y E_{ij} tienden a separarse más, a este fenómeno se le conoce como repulsión de niveles.

En la figura C.1 gráficamos estas energías para un caso particular, donde podemos apreciar que existen valores para los cuales los planos de transición de energía son muy cercanos, es decir, se propicia la transición de un estado de energía siguiente o viceversa bajo condiciones peculiares. Más adelante veremos que justo bajo estos parámetros es donde se propicia la generación de estados máximamente entrelazados.

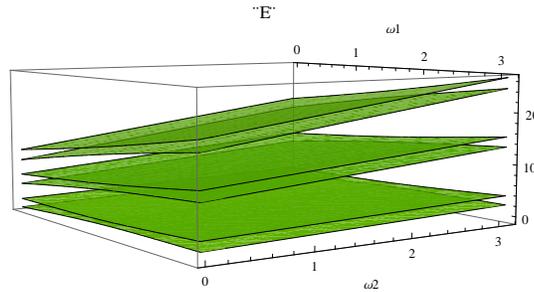


Figura C.1: Primeros seis niveles de energía perturbada a segundo orden para un caso donde el espín del electrón se encuentra polarizado inicialmente hacia abajo y se encuentra confinado en el estado base, las energías están representadas como función de las frecuencias de transición de los estados n ($\omega_1 \equiv \omega_-$) y m ($\omega_2 \equiv \omega_+$), podemos argumentar que bajo la condición inicial con $\delta = 0$ la condición de resonancia puede ser observada en la gráfica; justo donde se acercan mas los niveles de energía, podemos adelantar que el entrelazamiento se manifiesta mayoritariamente en las transiciones de energía de los estados del sistema, además si hiciéramos un corte sobre el plano que cruza por $\omega_2 = 0$ nos encontramos justo con la figura 4.2 del capítulo de resultados.

Eigenvectores perturbados a segundo orden.

Recordamos que para calcular la perturbación de nuestra función de onda a segundo orden necesitamos de:

$$\varphi_n^{(2)} = \sum_{k \neq n, l} \frac{V_{l,k} C_{n,k}^{(1)} - (V_{nm} - V_{ll}) C_{nl}^{(1)}}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}} \varphi_i^{(0)}, \quad (\text{C.20})$$

donde $C_{n,l}^{(1)} = \frac{V_{l,n}}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}}$, reescribiendo lo anterior en la notación usada hasta ahora, este ultimo termino es $C_{nm,ij}^{(1)} = \frac{\hat{H}_{injm}}{E_{nm}^{(0)} - E_{ij}^{(0)}}$, entonces (C.20) se expresa:

$$\varphi_{nm} = \varphi_{nm}^{(0)} + \varphi_{nm}^{(1)} + \frac{1}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}} \left[\sum_{k \neq n, l} \frac{V_{lk} - V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} + \frac{(V_{ll} - V_{nm}) V_{ln}}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}} \right] \varphi_l^{(0)} \quad (\text{C.21})$$

Recordemos que el elemento de matriz del Hamiltoniano de perturbación es:

$$H_{ijnm}^{\pm} = \langle \Psi_i^{\pm(0)}, j | \hat{H} | \Psi_n^{\pm(0)}, m \rangle; \quad (\text{C.22})$$

Entonces $V_{lk} \equiv H'_{ik,jl}$; $V_{kn} \equiv H'_{kn,lm}$; $V_{ll} - V_{nn} \equiv H'_{ii,jj} - H'_{nn,mm}$ $V_{lm} \equiv H'_{in,jm}$.

Haciendo las correspondientes sustituciones y después de algunas manipulaciones obtenemos las eigenfunciones del sistema perturbado:

$$\begin{aligned} |\psi_n^+, m\rangle &= |\psi_n^{+(0)}, m\rangle - \\ &- g_+ \left[\text{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} \frac{|\psi_{n-1}^{+(0)}, m+1\rangle}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{2}} + \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} \frac{|\psi_{n+1}^{+(0)}, m-1\rangle}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{2}} \right] + \\ &+ g_+^2 \left[\text{sen} \frac{\theta_{n-2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} (m+1) \frac{|\psi_{n-2}^{+(0)}, m+2\rangle}{(E_{nm}^{+(0)} - E_{n-1, m+1}^{+(0)}) (E_{nm}^{+(0)} - E_{n-2, m+2}^{+(0)})} + \right. \\ &+ \cos \frac{\theta_{n+2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} (m) \frac{|\psi_{n+2}^{+(0)}, m-2\rangle}{(E_{nm}^{+(0)} - E_{n+1, m-1}^{+(0)}) (E_{nm}^{+(0)} - E_{n+2, m-2}^{+(0)})} + \\ &+ \left(\cos^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} (m) - \text{sen}^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_{n+2}}{2} \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} (m-1) \right) \frac{|\psi_{n+2}^{+(0)}, m-2\rangle}{(E_{nm}^{+(0)} - E_{n+2, m-2}^{+(0)})^2} + \\ &\left. + \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} (m+1) - \cos^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n-2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} (m+2) \right) \frac{|\psi_{n-2}^{+(0)}, m+2\rangle}{(E_{nm}^{+(0)} - E_{n-2, m+2}^{+(0)})^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} |\psi_n^-, m\rangle &= |\psi_n^{- (0)}, m\rangle + \\ &+ g_+ \left[\text{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m} \frac{|\psi_{n+1}^{- (0)}, m-1\rangle}{\omega_+ - \omega_- + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{2}} + \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} \sqrt{m+1} \frac{|\psi_{n-1}^{- (0)}, m+1\rangle}{\omega_- - \omega_+ + \frac{\Delta_{n-1} - \Delta_n}{2}} \right] + \\ &+ g_+^2 \left[\text{sen} \frac{\theta_{n+2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} (m) \frac{|\psi_{n+2}^{- (0)}, m-2\rangle}{(E_{nm}^{- (0)} - E_{n+1, m-1}^{- (0)}) (E_{nm}^{- (0)} - E_{n+2, m-2}^{- (0)})} + \right. \\ &+ \cos \frac{\theta_{n-2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} (m+1) \frac{|\psi_{n-2}^{- (0)}, m+2\rangle}{(E_{nm}^{- (0)} - E_{n-1, m+1}^{- (0)}) (E_{nm}^{- (0)} - E_{n-2, m+2}^{- (0)})} + \\ &+ \left(\cos^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n-1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_n}{2} (m+1) - \text{sen}^2 \frac{\theta_{n-1}}{2} \cos \frac{\theta_{n-2}}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} (m+2) \right) \frac{|\psi_{n-2}^{- (0)}, m+2\rangle}{(E_{nm}^{- (0)} - E_{n-2, m+2}^{- (0)})^2} + \\ &\left. + \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_{n+1}}{2} \cos \frac{\theta_n}{2} (m) - \cos^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n+2}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n+1}}{2} (m+1) \right) \frac{|\psi_{n+2}^{- (0)}, m-2\rangle}{(E_{nm}^{- (0)} - E_{n+2, m-2}^{- (0)})^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Falta por conocer algunos de los denominadores (las diferencias entre eigenenergías) los cuales los calculamos a partir de:

$$E_{n,m}^{\pm(0)} = \omega_-(n+1/2) + \omega_+(m+1/2) \pm \frac{\Delta_n}{2} \quad (\text{C.25})$$

Las cuales encontramos que son:

$$\begin{aligned}
 \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n-1,m+1}^{\pm(0)}\right) \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n-2,m+2}^{\pm(0)}\right) &= \left(\omega_- - \omega_+ \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{2}\right) \left(2\omega_- - 2\omega_+ \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n-2}}{2}\right); \\
 \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n+1,m-1}^{\pm(0)}\right) \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n+2,m-2}^{\pm(0)}\right) &= \left(\omega_+ - \omega_- \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n+1}}{2}\right) \left(2\omega_+ - 2\omega_- \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n+2}}{2}\right);
 \end{aligned}
 \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
 \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n+2,m-2}^{\pm(0)}\right)^2 &= \left(2\omega_+ - 2\omega_- \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n+2}}{2}\right)^2; \\
 \left(E_{nm}^{\pm(0)} - E_{n-2,m+2}^{\pm(0)}\right)^2 &= \left(2\omega_- - 2\omega_+ \pm \frac{\Delta_n - \Delta_{n-2}}{2}\right)^2;
 \end{aligned}
 \tag{C.27}$$

Apéndice D

Estado Temporal (Numérico)

Este es el estado temporal, que se utilizó para los cálculos numéricos es:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \alpha_{n_-n_+}^{(1)}(t) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + \alpha_{n_-n_+}^{(2)}(t) |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle + \\ & + \alpha_{n_-n_+}^{(3)}(t) |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \alpha_{n_-n_+}^{(4)}(t) |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle + \\ & + \beta_{n_-n_+}^{(1)}(t) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + \beta_{n_-n_+}^{(2)}(t) |\uparrow, n_- + 1, n_+\rangle + \\ & + \beta_{n_-n_+}^{(3)}(t) |\downarrow, n_- + 1, n_+ - 1\rangle + \beta_{n_-n_+}^{(4)}(t) |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle + \\ & + \gamma_{n_-n_+}^{(1)}(t) |\downarrow, n_- - 1, n_+\rangle + \gamma_{n_-n_+}^{(2)}(t) |\uparrow, n_-, n_+\rangle + \\ & + \gamma_{n_-n_+}^{(3)}(t) |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle + \gamma_{n_-n_+}^{(4)}(t) |\uparrow, n_- - 1, n_+ + 1\rangle + \\ & + \delta_{n_-n_+}^{(1)}(t) |\downarrow, n_- - 1, n_+\rangle + \delta_{n_-n_+}^{(2)}(t) |\uparrow, n_-, n_+\rangle + \\ & + \delta_{n_-n_+}^{(3)}(t) |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle + \delta_{n_-n_+}^{(4)}(t) |\uparrow, n_- - 1, n_+ + 1\rangle + \\ & + \epsilon_{n_-n_+}^{(1)}(t) |\uparrow, n_-, n_+ + 1\rangle + \epsilon_{n_-n_+}^{(2)}(t) |\downarrow, n_-, n_+ - 1\rangle. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Estados en Superposición ($\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_{30}$)

El estado $|\psi(t_1)\rangle$ corresponde a la condición inicial de la sección 4.1.1 al tiempo $t_1 = 0.2116$:

$$\begin{aligned}
|\psi(t_1)\rangle \approx & (0,2110 - i0,0080) |\downarrow, 0\rangle + (0,0636) |\downarrow, 1\rangle + \\
& + (-0,098 - i0,1353) |\uparrow, 1\rangle + (0,0170) |\downarrow, 2\rangle + \\
& + (-0,0511 - i0,1587) |\uparrow, 2\rangle + (-0,0170 + i0,0116) |\downarrow, 3\rangle + \\
& + (-0,0815 - i0,1515) |\uparrow, 3\rangle + (-0,0349 + i0,0439) |\downarrow, 4\rangle + \\
& + (-0,1192 - i0,1264) |\uparrow, 4\rangle + (-0,0313 + i0,0815) |\downarrow, 5\rangle + \\
& + (-0,0313 + i0,1049) |\downarrow, 6\rangle + (-0,1300 - 0,0959) |\uparrow, 5\rangle + \\
& + (-0,1425 - i0,0546) |\uparrow, 6\rangle + (i0,1300) |\downarrow, 7\rangle + \\
& + (-0,1282 - i0,0224) |\uparrow, 7\rangle + (0,0349 + i0,1461) |\downarrow, 8\rangle + \\
& + (-0,1228 + i0,0026) |\uparrow, 8\rangle + (0,0708 + i0,1443) |\downarrow, 9\rangle + \\
& + (-0,0977 + i0,0170) |\uparrow, 9\rangle + (0,1049 + i1371) |\downarrow, 10\rangle + \\
& + (-0,0726 + i0,0331) |\uparrow, 10\rangle + (0,1353 + i0,1120) |\downarrow, 11\rangle + \\
& + (-0,0331 + i0,0331) |\uparrow, 11\rangle + (0,1587 + i0,0833) |\downarrow, 12\rangle + \\
& + (0,0242 + i0,0260) |\uparrow, 12\rangle + (0,1748 + i0,0511) |\downarrow, 13\rangle + \\
& + (-0,0062 + i0,0098) |\uparrow, 13\rangle + (0,1802 + i0,0098) |\downarrow, 14\rangle + \\
& + (0,1748 - i0,0246) |\downarrow, 15\rangle + (0,0026 - i0,0242) |\uparrow, 15\rangle + \\
& + (0,1609 - i0,0564) |\downarrow, 16\rangle + (-0,0044 - i0,0385) |\uparrow, 16\rangle + \\
& + (0,1407 - i0,0797) |\downarrow, 17\rangle + (-0,0116 - i0,0582) |\uparrow, 17\rangle + \\
& + (0,1102 - i0,1049) |\downarrow, 18\rangle + (-0,0331 - i0,0654) |\uparrow, 18\rangle + \\
& + (0,0815 - i0,1210) |\downarrow, 19\rangle + (-0,0564 - i0,0636) |\uparrow, 19\rangle + \\
& + (0,0475 - i0,1210) |\downarrow, 20\rangle + (-0,0797 - i0,0546) |\uparrow, 20\rangle + \\
& + (0,0206 - i0,1210) |\downarrow, 21\rangle + (-0,1049 - i0,0403) |\uparrow, 21\rangle + \\
& + (-i0,0941) |\downarrow, 22\rangle + (-0,1282 - i0,0152) |\uparrow, 22\rangle + \\
& + (-0,0349 - i0,0887) |\downarrow, 23\rangle + (-0,1425 + i0,0026) |\uparrow, 23\rangle + \\
& + (-0,0385 - i0,0636) |\downarrow, 24\rangle + (-0,1497 + i0,0331) |\uparrow, 24\rangle + \\
& + (-0,0421 - i0,0421) |\downarrow, 25\rangle + (-0,1407 + i0,0744) |\uparrow, 25\rangle + \\
& + (-0,0403 - i0,0152) |\downarrow, 26\rangle + (-0,1282 + i0,1049) |\uparrow, 26\rangle + \\
& + (-0,0367 - i0,0170) |\downarrow, 27\rangle + (-0,1049 + i0,1389) |\uparrow, 27\rangle + \\
& + (-0,0331) |\downarrow, 28\rangle + (-0,0762) |\uparrow, 28\rangle + \\
& + (-0,0349 + i1694) |\uparrow, 29\rangle .
\end{aligned}$$

En el histograma D.1 se muestra la distribución que presentan los estados de ocupación del espín al

instante $t_1 = 0.2116$.

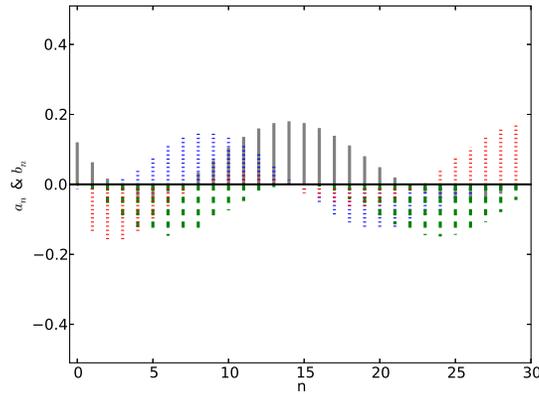


Figura D.1: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 0.2116$, donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinua gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinua delgada) corresponde a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

Analizando el mismo estado, pero a un tiempo ulterior $t_2 = 7.2649$, encontramos una participación de todos los estados de ocupación en el punto mostrados en el histograma D.2.

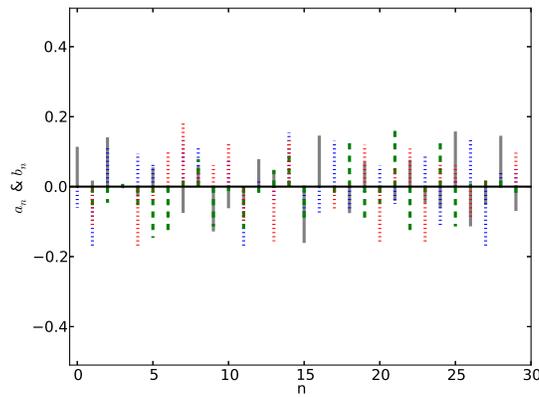


Figura D.2: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 7.2649$, donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinua gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinua delgada) corresponde a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

Bajo la misma condición inicial solo que con el espín del electrón en una superposición arriba y abajo, encontramos en el histograma D.3 que el estado posee una vez más contribuciones de todos los estados de ocupación disponibles en el punto, por lo que solo mostramos un histograma similar al anterior para ver el comportamiento del espín con todo y fases.

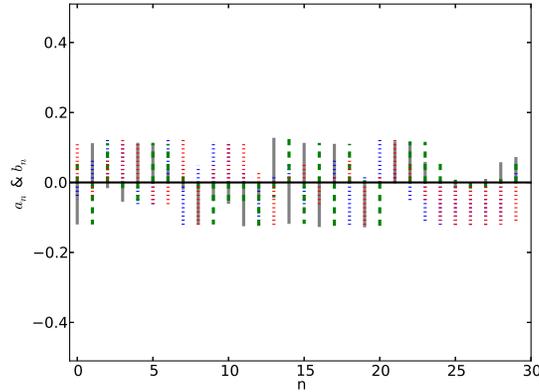


Figura D.3: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 7.2649$, donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinuas gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinuas delgada) corresponden a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

Estados Coherentes ($\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_{30}$)

Las gráficas D.4 y D.5 corresponden a dos estados entrelazados, generados a partir de una condición inicial de estados de ocupación bajo una distribución de Poisson, con el espín del electrón fijo.

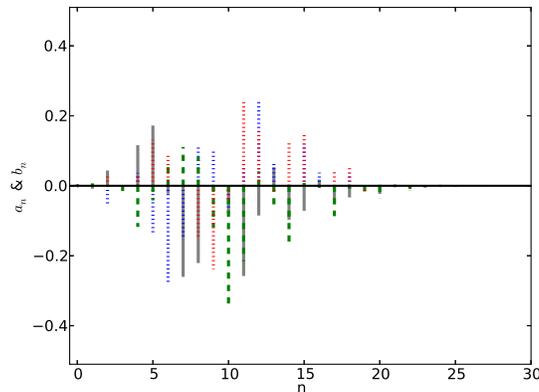


Figura D.4: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 4.1202$, donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinuas gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinuas delgada) corresponden a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

La siguiente gráfica D.6 corresponde a una condición similar a la anterior con la diferencia que ahora el espín del electrón se encuentra en una superposición.

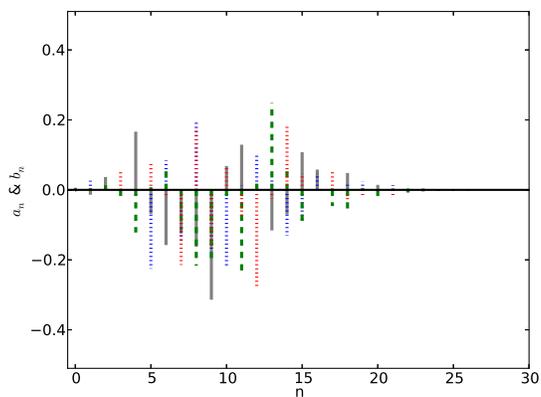


Figura D.5: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_2 = 11.1919$, donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinuas gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinuas delgada) corresponden a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

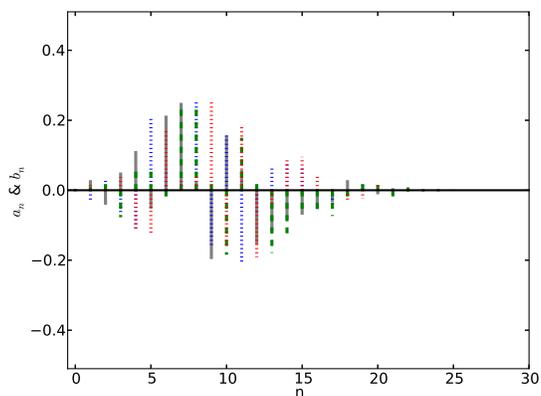


Figura D.6: Histograma de un estado entrelazado generado al tiempo $t_1 = 29.045$ ($|S| = 0.0227$), donde las barras grises (continuas) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia abajo, mientras que las barras azules (discontinua delgada) corresponden a la parte imaginaria (a_n), las barras verdes (discontinuas gruesa) corresponden al valor del coeficiente real para encontrar el electrón con espín hacia arriba, mientras que las barras rojas (discontinuas delgada) corresponden a la parte imaginaria (b_n) en las 30 componentes de ocupación disponibles.

Apéndice E

Condición $\lambda = 0$ MTC.

En este apéndice se presenta el desarrollo álgebraico para mostrar que una condición de perturbación nula $\lambda = 0$ bajo el Método de Transformaciones Canónicas conduce al caso analizado en la sección 3 de esta tesis, es decir, el caso sin perturbar.

Partimos del estado perturbado (3.107), donde es inmediato ver que bajo $\lambda = 0$ tenemos los estados iniciales deseados, ahora solo falta revisar los coeficientes que los acompañan

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n_- n_+} a_{n_- n_+}(t)(1 + \lambda \hat{S}_1) |\downarrow, n_-, n_+\rangle + b_{n_- n_+}(t)(1 + \lambda \hat{S}_1) |\uparrow, n_-, n_+\rangle, \quad (\text{E.1})$$

recordamos que los coeficientes de espín temporales son:

$$\begin{aligned} a_{n_- n_+}(t) := & aC_{n_- n_+} \left(\sin^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar} \right) + \\ & + bC_{n_- +1n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \sin \frac{\theta_{n_-}}{2} (e^{-iE_{n_- n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- n_+}^- t/\hbar}), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} b_{n_- n_+}(t) := & bC_{n_- n_+} \left(\cos^2 \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-iE_{n_- -1n_+}^+ t/\hbar} + \sin^2 \frac{\theta_{n_- -1}}{2} e^{-iE_{n_- -1n_+}^- t/\hbar} \right) + \\ & + aC_{n_- -1n_+} \sin \frac{\theta_{n_- -1}}{2} \cos \frac{\theta_{n_- -1}}{2} (e^{-iE_{n_- -1n_+}^+ t/\hbar} - e^{-iE_{n_- -1n_+}^- t/\hbar}). \end{aligned}$$

En primer lugar analicemos las eigenenergías, tenemos que tomar en cuenta que junto con la perturbación agregamos un grado de libertad más dentro del punto (para hacerlo bidimensional) por lo que ahora, suprimimos este grado de libertad considerando que su frecuencia de transición de estados es nula, es decir, $\omega_+ = 0$, luego entonces las eigenenergías tienen la forma:

$$E_{n_- n_+}^\pm = \omega_- \left(n_- + \frac{1}{2} \right) + \cancel{\omega_+} \left(n_+ + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{\Delta_{n_-}}{2} \quad (\text{E.3})$$

por lo que el coeficiente de espín hacia abajo cambia a:

$$\begin{aligned}
 a_{n_-n_+}(t) := & aC_{n_-n_+} \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i(\omega_-(n_-+\frac{1}{2})+\frac{\Delta_{n_-}}{2})t/\hbar} + \right. \\
 & + \left. \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} e^{-i(\omega_-(n_-+\frac{1}{2})-\frac{\Delta_{n_-}}{2})t/\hbar} \right) + \\
 & + bC_{n_-+1n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \times \\
 & \times \left(e^{-i(\omega_-(n_-+\frac{1}{2})+\frac{\Delta_{n_-}}{2})t/\hbar} - e^{-i(\omega_-(n_-+\frac{1}{2})-\frac{\Delta_{n_-}}{2})t/\hbar} \right),
 \end{aligned} \tag{E.4}$$

si escribimos una parte de las exponenciales en la notación de Euler, tenemos:

$$e^{\pm i \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar}} = \cos \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar} \pm i \text{sen} \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar}$$

y además consideramos que $-i\omega_-(n_-+\frac{1}{2})t/\hbar$, entonces reescribimos al coeficiente de espín hacia abajo como:

$$\begin{aligned}
 a_{n_-n_+}(t) := & aC_{n_-n_+} \left[\left(\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} + \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} \right) \cos \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar} + \right. \\
 & + \left. \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} - \cos^2 \frac{\theta_{n_-}}{2} \right) \text{sen} \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar} \right] e^{\Omega(n)} + \\
 & + bC_{n_-+1n_+} \cos \frac{\theta_{n_-}}{2} \text{sen} \frac{\theta_{n_-}}{2} \left(e^{\frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar}} - e^{-\frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar}} \right) e^{\Omega(n)},
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

con ayuda de un par de identidades trigonométricas y reagrupando en contribuciones reales y complejas tenemos que el coeficiente para espín abajo es:

$$a_{n_-n_+}(t) = \left\{ aC_{n_-n_+} \cos \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar} + i \text{sen} \frac{\Delta_{n_-} t}{2\hbar} [aC_{n_-n_+} \cos \theta_{n_-} - bC_{n_-+1n_+} \text{sen} \theta_{n_-}] \right\} e^{\Omega(n)}. \tag{E.6}$$

Utilizando los mismos argumentos e identidades podemos ver como cambia el coeficiente de espín hacia arriba cuando suprimimos la perturbación

$$b_{n_-n_+}(t) = \left\{ bC_{n_-n_+} \cos \frac{\Delta_{n_-1} t}{2\hbar} + i \text{sen} \frac{\Delta_{n_-1} t}{2\hbar} [bC_{n_-n_+} \cos \theta_{n_-1} - aC_{n_-1n_+} \text{sen} \theta_{n_-1}] \right\} e^{\Omega(n-1)}. \tag{E.7}$$

Si comparamos (E.6) y (E.7) con (3.30) vemos que son totalmente equivalentes (por no decir iguales) ya que en los cálculos sin perturbación consideramos que $\frac{\theta_{n_-}}{2} \equiv \theta_{n_-}$.

Bibliografía

- [1] R. Feynman, Simulating Physics with computers, *Int. Journal of theoretical physics*, Vol. 21/No 6/7, (1982).
- [2] D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, *Proc. R. Soc. London*, (1985).
- [3] P. W. Shor, Algorithms for Quantum Computation: Discrete logarithms and Factoring., *IEEE Computer Society Press*, pp. 124-134 (1994).
- [4] E. Rieffel, W. Polak, An introduction to Quantum Computing for Non-Physicists, *ACM Computing Surveys*, Vol. 32, No. 3, Sept 2000, pp. 300-335.
- [5] N.A. Gershenfeld, I. L. Chuang, Bulk spin-resonance quantum computation, *Science* (1997), vol. 275, 350-356.
- [6] C.H.W. Barnes, et.al., Quantum computation using electrons trapped by surface acoustic waves, *Physical Review B* (2000), vol 62, no. 12.
- [7] R. E. Vrijen, et.al., Electron-spin-resonance transistors for quantum computing in silicon-germanium heterostructures, *Physical Review A* (2000), vol 62, 012306.
- [8] B. Kane, A silicon-based nuclear spin quantum computer, *Nature* (1998), vol. 393, pp. 133-137.
- [9] D.G. Cory, et.al., NMR Based Quantum Information Processing: Achievements and Prospects, *Forts. Phys.* (2000), vol. 48, pp. 875-907.
- [10] D. Loss, D.P. Vincenzo, Quantum computation with quantum dots, *Physical Review A* (1998), vol 77, 1.
- [11] L. D. Contreras, Tesis Doctoral, Director de tesis F. Rojas, UNAM(2008), Cap 1 pp. 4-8.
- [12] R. J. Hughes, et.al., Quantum key distribution over a 48km optical fiber network, *Journal of Modern Optics*, vol. 47, pp. 533-547.
- [13] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ Press 2000 pp.30-32.
- [14] J. Cirac, P. Zoller, Quantum computations with cold trapped ions, *Physical Review Letters* (1995), Vol. 74, No. 20, pp 4091-4094.
- [15] A. Rauschenbeutel, et.al., Coherent Operation of a Tunable Quantum Phase Gate in Cavity QED, *Physical Review Letters*, Vol. 83, No. 24 (1999).
- [16] Q. A. Truchette, et.al., Deterministic Entanglement of two Trapped Ions, *Physical Review Letters*, Vol. 81, No. 17 (1998).
- [17] D.V. Averin, Adiabatic Quantum Computation with Cooper pairs, *Solid State Communications* (1998), vol. 105, no. 10.
- [18] Y.A.Pashkin, et.al., Quantum oscillations in two coupled charge qubits, *Nature* (2003), vol 421, p.823-826.
- [19] A. Shnirman, et.al., Quantum Manipulations of Small Josephson Junctions, *Physical Review Letters* (1997), Vol. 79, No. 12.
- [20] *The New Physics for the 21st century*, Edited by Gordon Fraser Cambridge Univ Press 2006 pp. 257-283, Anton Zeilinger, Artur Ekert.
- [21] E. Häffner, et.al., Scalable multiparticle entanglement of trapped ions, *Nature* (2005), vol. 438, pp. 643-646.
- [22] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, pp. 174-182, 1994
- [23] Justin Mullins, The topsy Turvy World of Quantum Computing, *IEEE Spectrum* Feb 2001, Advanced Technology.
- [24] Susan Loepf, William Wothers, *Protecting Information: From Classical Error Correction to Quantum Cryptography*, Cambridge Univ Press 2006.
- [25] Amir D. Aczel, *Entrelazamiento: El mayor misterio de la física*, Drakontos 2004.
- [26] T. D. Ladd, et. al., Quantum Computers, *NATURE reviews*, vol. 464, doi:10.1038/nature08812 (2010)
- [27] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The theory of Open Quantum Systems*, Reprint 1st Ed, OXFORD University Press (2003).

- [28] P. Meystre, M. Sargent III, Elements of Quantum Optics, 2nd Ed, Springer-Verlag pp. 19-25, 1991.
- [29] L. Chirolli & G. Burkard, Decoherence in solid-state qubits, Advances in Physics, Vol. 57, No. 3, pp 225-285, 2008.
- [30] D. Salart, et. al., Testing the speed of 'spooky action at a distance', Nature (2008), vol. 454, pp. 861-864.
- [31] A. Einstein, et. al., Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Phys. Rev. 1935, v 47, pp777-780.
- [32] John Bell, Speakable and unspeakable of Quantum Mechanics, Cambridge Univ Press 1989.
- [33] N. Gisin, V. Scarani, W. Tittel, H. Zbinden, Optical tests of quantum nonlocality: from EPR-Bell tests towards experiments with moving observers, Annalen der Physik, vol. 9, 11-12, 831-841 (2000)
- [34] William K. Wootters, Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, Physical Review Letters, Vol. 80, No.10, pp2245-2248 (1998).
- [35] Scott Hill and William K. Wootters, Entanglement of a Pair of Quantum Bits, Phys. Rev. Lett., vol 78, No. 26 (1997).
- [36] Artur Ekert & Peter L. Knight, Entangled quantum Systems and the Schmidt decomposition, Am. J. Phys, vol 63(5) (1995).
- [37] M. Hossein Partovi, Universal Measure of Entanglement, PRL, vol. 92, no. 7, 077904-1 (2004).
- [38] E. T. Jaynes, Information Theory and Statistical Mechanics, Physical Review, vol 106, No. 4 (1957).
- [39] Jürgen Audretsch, Entangled Systems new directions in Quantum Physics, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2007).
- [40] Karol Życzkowski, et. al., Volume of the set of separable states, Phys. Rev. A, vol. 58, 8837892 (1998).
- [41] Anthony Chefles, Quantum operations, state transformations and probabilities, Phys. Rev. A, vol. 65, 052314 (2002).
- [42] Lee, J., Kim, M.S., Park, Y.J., Lee, S.: Partial teleportation of entanglement in a noisy environment. J. Mod. Opt., vol. 47, 2151-2164 (2000).
- [43] Suranjana Rai, Jagdish R. Luthra, Negativity and Concurrence as complete entanglement measures for two arbitrary qudits, arXiv:quant-ph/0508045v1 (2005).
- [44] Suranjana Rai, Jagdish R. Luthra, Negativity and Concurrence for two qutrits, arXiv:quant-ph/0507263v1(2005).
- [45] Asher Peres, Separability Criterion for Density Matrices, Phys. Rev. Lett., vol. 77, 141371415 (1996).
- [46] Zeng-Bing Chen, et.al, Quantum nonlocality and applications in quantum-information processing of hybrid entangled states, Physical Review A, Vol. 65, No. 032317 (2002).
- [47] Yong Dong, Le-Man Kuang, Quantum entanglement between a double quantum dot and photons, Physics Letters A 367(2007) 40-46.
- [48] Jie-Qiao Liao, et.al., Preparation of hybrid entangled states and entangled coherent states for a single trapped ion in a cavity, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 39 (22), art. no. 014, pp. 4709-4718.
- [49] Yan Li, et.al., Optical generation of hybrid entangled state via entangling single-photon-added coherent state, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 39 (9), art. no. 001, pp. 2107-2113.
- [50] Xi-Feng Ren, et.al., Engineering of multi-dimensional entangled states of photon pairs using hyper-entanglement, CHIN.PHYS.LETT., Vol. 23, No. 3 (2006) 552.
- [51] Jonathan Leach, et.al., Interferometric Methods to Measure Orbital and Spin, or the Total Angular Momentum of a Single Photon, PRL, vol 92, no. 1, 2004.
- [52] Julio T. Barreiro, Generation of Hyperentangled Photon Pairs, PRL, vol 95, 260501 (2005).
- [53] Eugene Merzbacher, Quantum Mechanics 3rd edition, Chapter 16, The Spin p372, WILEY (1998).
- [54] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, Relativistic quantum theory, Vol 4 of Course of theoretical physics, Pergamon Press, Oxford (1971).
- [55] David D. Awschalom, et.al., Spintronics, Scientific American, Jun 2002, Vol. 286, No. 6 pp 67-73.
- [56] M.M. Glazov, et. al., Spin-dependent resonant tunneling in symmetrical double-barrier structures., Physical Review B (2005), vol. 71, 155313.
- [57] V. I. Perel, et.al., Spin-dependent tunneling through a symmetric semiconductor barrier, Physical Review B, Vol. 67, No. 291304(R) (2003).
- [58] Roland Winkler, Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems, Springer-Verlag Berlin (2003).
- [59] L. Meier, et. al., Measurement of Rashba and Dresselhaus spin-orbit magnetic fields., Nature (London) Vol. 3, p650, 2007.

- [60] L. D. Contreras, F. Rojas, Dynamic generation of Bell states in a double-quantum-dot array including electron-phonon interaction, *Physical Review A* (2008), vol 77, 1.
- [61] V. Arriola, *Computación Cuántica*, Facultad de Ciencias, UNAM Ed Las Prensas de ciencias.
- [62] Emmanuel I. Rashba, *Soviet Physics Solid State*, Vol 2, p-1109 (1960).
- [63] Yu. A. Bychkov & E.I. Rashba, Properties of a 2D electron gas with lifted spectral degeneracy, *JETP Lett.*, Vol 39, No. 2, pp. 78-81 (1984).
- [64] G. Dresselhaus, Spin-Orbit Coupling Effect in Zinc Blende Structures. *Phys Rev.*, Vol. 100, No. 2, pp. 580-586 (1955).
- [65] R. Romo y S. Ulloa, Dynamic polarization tunneling: A spin filtering mechanism, *Physical Review B* (2005), Vol. 72, 121305(R).
- [66] K. C. Nowak, Coherent Control of a Single Electron Spin with Electric Field, *Science* 2007, vol 318, pp. 1430-1433.
- [67] L. P. Kouwenhoven, et. al., Few electron quantum dots., *Rep. Prog. Physics.* (2001), Vol. 64. pp. 701-736.
- [68] E.D. Minot, *et alibi*, Single quantum dot nanowire LEDs, *Nano Letters*, vol 7 (2): 367-371 (2007).
- [69] R. Penrose, *El camino a la realidad*, Circulo de Lectores, 2006.
- [70] M. Schlosshauer, *Decoherence and the quantum-to-classical transition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [71] G. Mahler, V. A. Weberruß, *Quantum Networks Dynamics of open nanostructures*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp.174,175, 1995.
- [72] Wojciech Hubert Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Rev. Mod. Phys.*, vol 75, 715-775 (2003).
- [73] Wojciech Hubert Zurek, Environment-Assisted Invariance, Entanglement, and Probabilities in Quantum Physics, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, 120404 (2003).
- [74] Wojciech Hubert Zurek, Probabilities from entanglement, Born's rule $p_k = |\psi_k|^2$ from envariance, *Phys. Rev. A*, vol. 71, 052105 (2005).
- [75] H-P Breuer, W. Huber, F. Petruccione, Stochastic Wave-Function Method versus Density Matrix: a Numerical Comparison., *Computer Physics Communications*, Volume 104, Issues 1-3, August 1997, pp. 46-58.
- [76] Arvind Kumar, et. al., Electron states in a GaAs quantum dot in a magnetic field, *PRB*, vol 42, 5166-5175 (1990)
- [77] R. C. Ashoori, Electrons in artificial atoms, *Nature*, vol 379, 413-419 (1996)
- [78] S. Dehdal, C. Emary, Spin-Orbit-Driven Coherent Oscillations in a Few-Electron Quantum Dot, *PRL*, vol. 94, 226803(2005)
- [79] L. P. Kouwanhoven, D. G. Austing and S. Tarucha, Few-electron quantum dots, *Rep. Prog. Phys.*, vol. 64, 701 (2001)
- [80] J. Konemann, R. J. Haug, D. K. Maude, V. I. Fal'ko, B. L. Altshuler, Spin-orbit coupling and anisotropy of spin splitting in quantum dots, *Phys. Rev. Lett.* 94, 226404 (2005)
- [81] Tapash Chakraborty, Pekka Pietilainen, Electron Correlations in a Quantum Dot with Bychkov-Rashba Coupling, *arXiv:cond-mat/0410248v1* (2004)
- [82] U. Merkt, J. Huser and M. Wagner, Energy spectra of two electrons in a harmonic quantum dot, *Phys. Rev. B* 43, 7320 - 7323 (1991)
- [83] Marcio F. Cornelio and A. F. R. de Toledo Piza, Classification of tripartite entanglement with one qubit, *PRA*, vol. 73, 032314 (2006)
- [84] Ashish V. Thapliyal, On multipartite pure-state entanglement, *arXiv:quantum-ph/9811091v4* (1999).
- [85] A. Acín, A. Adrianov, L. Costa, E. Jané, J.I. Latorre, R. Tarrach, Generalized Schmidt Decomposition and classification of three-quantum-bit states, *PRL*, vol. 85, No. 7 (2000)
- [86] LI XiKun, LI JunLi, LIU Bin and QIAO CongFeng, The parametric symmetry and numbers of the entanglement, *Science China*, vol. 54, No. 8, pp 1417-1475 (2011)
- [87] Shuo Cheng, Junli Li, and Cong-Feng Quiao, Classification of the entangled states of $2 \times N \times N$, *arXiv:0804.2291v2* (2009)
- [88] Shuo Cheng, Junli Li, and Cong-Feng Quiao, Classification of the entangled states of $2 \times N \times N$, *J. Phys. A: Math. Theor*, vol 43, 055303 (2010)
- [89] Lin Chen, Yi-Xin Chen, and Yu-Xue Mei, Classification of multipartite entanglement containing infinitely many kinds of states, *PRA*, vol. 74, 052331 (2006)
- [90] W. Dur, G. Vidal, and J. I. Cirac, Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *PRA*, vol. 62, 062314 (2000)
- [91] Junli Li and Cong-Feng Qiao, Classification of the entangled states $2 \times M \times N$, *arXiv:1001.0078v1* (2009)

- [92] Xikun Li, Junli Li, Bin Liu, Cong-Feng Qiao, The parametric Symmetry and numbers of the entangled class of $2 \times M \times N$ system, arXiv:1008.4274v1 (2010)
- [93] Lin chen and Yi-Xin Chen, Range criterion and classification of true entanglement in a $2 \times M \times N$ system, PRA, vol. 73, 052310 (2006)
- [94] Arun Kumar Pati, Existence of the schmidt decomposition for tripartite systems, arXiv:quant-ph/9911073v2 (2000)