



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS FRACTAL DE LAS FRECUENCIAS DE  
LA INTENSIDAD DE LOS RAYOS CÓSMICOS  
EN LA CIUDAD DE MÉXICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MATEMÁTICA

P R E S E N T A

LIZBETH PEÑALOZA VELASCO



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. BERNARDO VARGAS CÁRDENAS

2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**1. Datos del alumno**

Peñaloza  
Velasco  
Lizbeth  
0445522439973  
Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
302203512

**2. Datos del tutor**

Dr  
Bernardo  
Vargas  
Cárdenas

**3. Datos del sinodal 1**

Dr  
José Francisco  
Valdés  
Galicia

**4. Datos del sinodal 2**

Dr  
Luis Xavier  
González  
Méndez

**5. Datos del sinodal 3**

Dr  
Fernando  
Brambila  
Paz

**6. Datos del sinodal 4**

M en C  
César  
Carreón  
Otañez

**7. Datos del trabajo escrito**

Análisis fractal de las frecuencias de la  
intensidad de los rayos cósmicos en la  
ciudad de México  
68 p  
2014

# Análisis fractal de las frecuencias de la intensidad de los rayos cósmicos en la ciudad de México

Lizbeth Peñaloza Velasco

Abril 2014

# *Agradecimientos*

*Quiero agradecer a mi amigo, novio y ahora compañero de vida Ricardo D. Flores Pérez por estar a mi lado en todo momento, por apoyarme durante mi carrera y sobre todo por darme aliento para seguir cuando pensaba que ya no podía, gracias por confiar en mí, por tu amor y comprensión, también por ayudarme con varias traducciones y conceptos físicos para la elaboración de este trabajo.*

*A mis padres, Rogelio y Columba, por su apoyo, dedicación y por enseñarme a tener la fuerza, el coraje y el carácter para afrontar las adversidades que se presentan en la vida.*

*A mis hermanos, Sugey, Columba, Evelyn y Gustavo por estar a mi lado y apoyarme en todo momento, cada uno me ha enseñado a valorar, perseverar y sobre todo gracias por la frase que uno de ustedes me dijo y que nunca olvidaré “la vida es como una carrera de obstáculos, a veces tropiezas con ellos y caes pero levántate, sacúdete el polvo y sigue adelante”.*

*A todos mis amigos, en particular a Jesús, Veroska, Yessica y Danay por su amistad incondicional y buenos momentos a su lado, también a Danay por ser mi compañera de cuarto durante los inicios de este trabajo, gracias por todas esas noches que me permitiste mantener el cuarto iluminado hasta altas horas de la noche.*

*A mi director de tesis el Dr. Bernardo Vargas Cárdenas por invitarme a colaborar en este proyecto, por su paciencia y sobre todo por sus enseñanzas.*

*A cada uno de mis sinodales, Dr. José F. Valdés Galicia, Dr. Luis Xavier González Méndez, Dr. Fernando Brambila Paz y M. en C. César Carreón Otañez, por su paciencia y respectivas correcciones o sugerencias que me dieron para la mejoría de este trabajo. En particular al Dr. José F. Valdés Galicia quien estuvo presente desde los inicios de este proyecto, gracias por su tiempo, atención y por facilitarme material de lectura para la tesis.*

*Gracias a la UNAM, en particular a la Facultad de Ciencias por darme la oportunidad de cursar matemáticas como carrera simultánea mientras estudiaba Actuaría y así el día de hoy cumplir con mi sueño de ser una matemática.*

*Por último y no por eso la menos importante a Rosalía Castañeda por enseñarme desde que te conozco a confiar en mí, creer en mí y sobre todo por tu gran ética profesional. Sin ti este trabajo hubiera sido difícil de terminar.*

*Y a todas las personas que directa o indirectamente me ayudaron.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Exponente de Hurst y Análisis de espectro de potencias</b>	<b>1</b>
1.1. Exponente de Hurst . . . . .	1
1.1.1. Series de tiempo . . . . .	1
1.1.2. Análisis R/S . . . . .	2
1.1.3. Exponente de Hurst y movimiento browniano . . . . .	4
1.1.4. Auto semejanza y autoafinidad . . . . .	6
1.1.5. Dimensión fractal y exponente de Hurst . . . . .	8
1.2. Análisis de espectro de potencias . . . . .	11
1.2.1. Funciones periódicas y no periódicas . . . . .	12
1.2.2. Análisis del espectro de potencias . . . . .	17
<b>2. Los rayos cósmicos y el monitor de neutrones de la Ciudad de México</b>	<b>21</b>
2.1. Los rayos cósmicos . . . . .	21
2.1.1. El Sol . . . . .	21
2.1.2. Los rayos cósmicos . . . . .	27
2.2. El monitor de neutrones de la Ciudad de México . . . . .	37
2.2.1. Función de respuesta . . . . .	39
<b>3. Análisis, resultados y conclusiones</b>	<b>42</b>
3.1. Construcción de la serie de tiempo . . . . .	42
3.1.1. Interpolación por splines cúbicos . . . . .	43
3.2. Análisis de los datos . . . . .	45
3.2.1. Software BENOIT . . . . .	45
3.3. Resultados y Conclusiones . . . . .	48
<b>A. Índice geomagnético Kp</b>	<b>54</b>
<b>B. Fechas de datos modificados</b>	<b>56</b>

# Introducción

En 1951, Henry Hurst [28] encontró correlaciones de largo plazo en la fluctuación de los flujos de salida del Río Nilo. Su trabajo está basado en los métodos usados para el diseño de depósitos de agua. El diseño de un depósito busca determinar la capacidad óptima que permitirá un funcionamiento ideal en un periodo de varios años. Hurst encontró empíricamente que muchos conjuntos de datos en la naturaleza satisfacen cierta ley de potencia, a partir de la cual se define el *exponente de Hurst*.

El exponente de Hurst, cuyos valores esperados se encuentran entre 0 y 1, es un parámetro de autosemejanza que proporciona una medida de la no linealidad de una serie de tiempo a largo plazo. El exponente de Hurst también tiene relación con el movimiento browniano y la dimensión fractal. Estos conceptos y algunos más se detallan en el primer capítulo.

En el segundo capítulo se da una descripción del fenómeno de los rayos cósmicos, los cuales son partículas de alta energía que fluyen por toda la galaxia e inciden sobre la Tierra desde todas las direcciones. También se describe el monitor de neutrones con que cuenta el Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México, el cual es un detector que se utiliza para contar partículas de radiación ionizante, en este caso los rayos cósmicos, que ha estado en operación continua desde 1990. Los datos de este detector son los que se utilizaron como objeto de aplicación de los conceptos expuestos en el capítulo 1.

En el tercer capítulo se describe el método que se utilizó para analizar los datos obtenidos por el monitor de neutrones desde 1990 hasta 2013. Dicho análisis consistió en estudiar la densidad del espectro de potencias de la serie de tiempo respecto de su exponente de Hurst para determinar las periodicidades que aquélla contiene. Este análisis se realizó utilizando el software comercial BENOIT.

Antes de realizar el análisis fractal fue necesario realizar una limpieza de los datos para eliminar registros espurios y fenómenos transitorios, los cuales habrían afectado las periodicidades de mediano y largo plazo que se buscaba encontrar. Una vez realizada dicha limpieza, se aplicó una interpolación mediante *splines* cúbicos para reconstruir los registros faltantes en la serie de tiempo. Además, se determinó la persistencia de la serie de tiempo mediante el exponente de Hurst y la dimensión fractal. Las periodicidades encontradas en la serie de tiempo coinciden con las determinadas por otros experimentos.

Los resultados de este trabajo se presentaron con éxito en la 33<sup>a</sup> Conferencia Internacional de Rayos Cósmicos en Río de Janeiro en julio del 2013.

Por último, se incluyen dos apéndices. En el primero se define el índice geomagnético  $K_p$ , el cual se tomó en cuenta para la limpieza de los datos y en el segundo se enlistan las fechas en donde se presentaron registros que fue necesario interpolar.



# Capítulo 1

## Exponente de Hurst y Análisis de espectro de potencias

### 1.1. Exponente de Hurst

#### 1.1.1. Series de tiempo

Para entender mejor el concepto del exponente de Hurst primero hablaré de las series de tiempo. Una serie de tiempo es el conjunto de valores numéricos de alguna variable que cambia con el tiempo. Hay series de tiempo continuas y discretas. Una serie de tiempo continua sería un conjunto de valores  $y(t)$  que son continuos en el tiempo en un intervalo  $T$ . Una serie de tiempo discreta o no continua consiste de un conjunto de valores que no son continuos. Los fenómenos naturales no son, en general, discretos, lo que es discreto es el registro que se hace de ellos.

Una serie de tiempo se puede caracterizar por discontinuidades, un componente de tendencia, uno o más componentes periódicos, y un componente estocástico. El componente de tendencia es un incremento o decremento a largo plazo en la serie. El periodo de rotación de la tierra (duración del día) puede ser considerado como una serie de tiempo. Durante periodos largos de tiempo la duración de día se incrementa debido a la fricción de las mareas, lo cual es un componente de tendencia. Muchas series de tiempo tienen componentes periodicos; la serie de tiempo de la temperatura atmosférica tendrá fuertes periodicidades diarias y anuales. El componente estocástico lo contienen las fluctuaciones que no incluyen los componentes de tendencia y periodicidad. Un importante aspecto del componente estocástico es si este es persistente, aleatorio o antipersistente. Si los valores contiguos en la serie de tiempo no están correlacionados uno con el otro, entonces el componente estocástico es aleatorio. Si los valores contiguos están correlacionados positivamente, entonces los valores adyacentes están en promedio más cerca que una serie de tiempo aleatoria, y el componente estocástico es persistente. Si los valores adyacentes

están correlacionados negativamente, entonces los valores contiguos están en promedio más separados que en una serie de tiempo aleatoria, y el componente estocástico es anti-persistente. Una serie de tiempo continua es, por definición, persistente [71].

### 1.1.2. Análisis R/S

En 1951, Henry Hurst encontró correlaciones a largo plazo en la fluctuación de los flujos de salida del Río Nilo. Descubrió que las series de tiempo hidrológicas muestran periodos más grandes de sequías e inundaciones que las que se esperarían si el proceso tuviera varianza y memoria finitas. Su trabajo está basado en los métodos usados para el diseño de depósitos de agua. El diseño de un depósito busca determinar la capacidad óptima que permitirá un funcionamiento ideal en un periodo de varios años. La capacidad que permite al depósito producir un flujo de salida uniforme tal que nunca se vacíe o se desborde es determinada ajustando la descarga acumulativa del río por año, tomando en cuenta la muestra promedio para el conjunto de años en cuestión [5].

Los estudios de Hurst introdujeron empíricamente el concepto de *rescaled range analysis R/S*. Su método se ilustra en la fig. 1.1. Considere un embalse detrás de una presa que nunca se desborda o se vacía; el flujo en el depósito es el caudal del río aguas arriba de la presa  $Q(t)$ . El flujo que sale del depósito  $\bar{Q}(t)$  se supone es la media del flujo en el depósito en un periodo  $T$ :

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt. \quad (1.1)$$

El volumen del agua en el depósito como una función de tiempo  $V(t)$  está dado por

$$V(t) = V(0) + \int_0^t Q(s) ds - t\bar{Q}, \quad (1.2)$$

donde  $V(0)$  es el volumen de agua al tiempo  $t = 0$ . Tomando  $t = T$  y substituyendo la ecuación 1.1 en 1.2, tenemos

$$V(T) = V(0) + \int_0^T Q(s) ds - T \left( \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt \right), \quad (1.3)$$

es decir,  $V(T) = V(0)$ . El **rango**  $R(T)$  está definido como la diferencia entre el volumen máximo del agua  $V_{max}$  y el volumen mínimo de agua  $V_{min}$  durante el periodo  $T$ :

$$R(T) = V_{max}(T) - V_{min}(T). \quad (1.4)$$

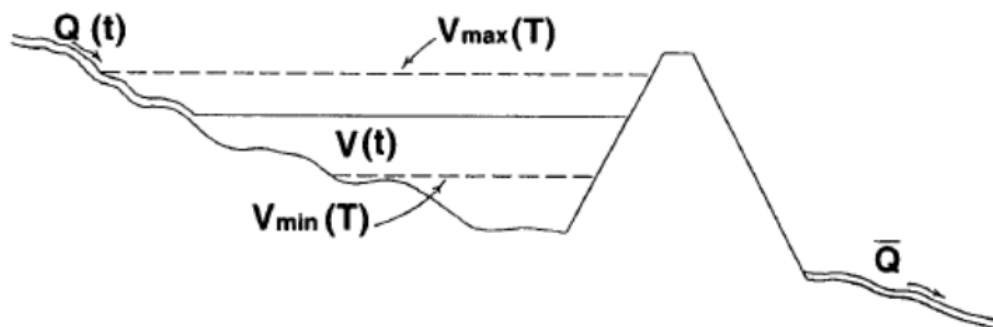


Figura 1.1: El flujo hacia el depósito es  $Q(t)$  y el flujo que sale es  $\bar{Q}$ . El volumen máximo del agua durante el período  $T$  es  $V_{max}(T)$  y el mínimo  $V_{min}(T)$ ; la diferencia es el rango  $R(T) = V_{max}(T) - V_{min}(T)$  (figura tomada de [71]).

El **análisis de rango** se define como  $R/S$  donde  $S$  es la desviación estándar del flujo  $Q(t)$  durante el periodo  $T$ :

$$S = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T (Q(s) - \bar{Q})^2 ds \right]^{1/2}. \quad (1.5)$$

Hurst encontró empíricamente que muchos conjuntos de datos en la naturaleza satisfacen la ley de potencia

$$\frac{R}{S} = \left( \frac{T}{2} \right)^H, \quad (1.6)$$

donde  $H$  es conocido como el **exponente de Hurst**.

El análisis  $R/S$  se extiende fácilmente a series de tiempo discretas

$$y_n = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_N). \quad (1.7)$$

En este caso el rango está definido por

$$R_N = (y_n)_{max} - (y_n)_{min}. \quad (1.8)$$

El exponente de Hurst  $H$  se obtiene de la relación

$$\left( \frac{R_N}{S_N} \right) = \left( \frac{N}{2} \right)^H, \quad (1.9)$$

donde  $\left(\frac{R_N}{S_N}\right)$  es el promedio de  $R_N/S_N$  [71].

### 1.1.3. Exponente de Hurst y movimiento browniano

A continuación se hablará sobre la relación que existe entre el exponente de Hurst y el movimiento browniano ordinario y el movimiento browniano fraccionario pero antes de comenzar primero se definirán ambos movimientos.

#### Movimiento browniano

El *movimiento browniano*, llamado así en honor al botánico inglés Robert Brown, quien descubrió en 1827 que el polen suspendido en agua mostraba un movimiento aleatorio continuo visto a través de un microscopio. Al principio estos movimientos fueron considerados una forma de vida, pero pronto se encontró que pequeñas partículas inorgánicas se comportaban similarmente. Más tarde, este movimiento se explicó como el resultado de los impactos entre moléculas del fluido, de esta manera las partículas suspendidas obtienen la misma energía cinética que las moléculas del fluido. En 1905, Albert Einstein desarrolló una teoría del movimiento browniano [18]. En 1923 Norbert Wiener propuso un modelo matemático riguroso que exhibe un comportamiento aleatorio similar al observado en el movimiento browniano [19].

La **traza** o imagen de una función  $f$  definida por  $f([t_1, t_2]) = \{f(t) : t_1 \leq t \leq t_2\}$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  con  $t$  un parámetro; alternatively podemos considerar la gráfica de  $f$ ,  $graf = \{(t, f(t)) : t_1 \leq t \leq t_2\}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , como un registro de la variación de  $f$  respecto del tiempo. Las trazas del movimiento browniano y su gráfica son *fractales* [19].

El **movimiento browniano ordinario** en el sentido de Bachelier, Wiener y Lévy [42], es una función aleatoria real  $B(t, w)$ , donde  $-\infty < t < \infty$  y  $w$  designa el conjunto de todos los valores de una función aleatoria, con incrementos independientes y con distribución normal con  $B(t_2, w) - B(t_1, w)$  de media cero y varianza  $|t_2 - t_1|$ , y  $B(t_2, w) - B(t_1, w)$  es independiente de  $B(t_4, w) - B(t_3, w)$ , si los intervalos  $(t_1, t_2)$  y  $(t_3, t_4)$  no se traslapan. El hecho de que la desviación estándar de los incrementos  $B(t + T, w) - B(t, w)$ , con  $T > 0$ , es igual a  $T^{\frac{1}{2}}$  es a menudo referido como la *ley*  $T^{\frac{1}{2}}$  [46].

**Definición:** Sea  $H$  tal que  $0 < H < 1$ , y  $b_0$  un número real arbitrario. Llamaremos a la función aleatoria  $B_H(t, w)$ , **movimiento browniano fraccionario (fBm** por sus siglas en inglés) con **parámetro**  $H$  y **valor inicial**  $b_0$  al tiempo cero. Para  $t > 0$ ,  $B_H(t, w)$  está definido por

- i)  $B_H(0, w) = b_0$ ,
- ii)  $B_H(t, w) - B_H(0, w) =$

$$= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB(s, w) + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s, w) \right\}$$

(y similar para  $t < 0$ ). Notemos que si  $b_0 = 0$  entonces  $B_{1/2}(t, w) = B(t, w)$ . Para otros valores de  $H$ ,  $B_H(t, w)$  es llamada **derivada fraccional o integral** de  $B(t, w)$  en el sentido de Weyl [83]. El movimiento browniano fraccional es dividido en tres familias muy diferentes correspondientes a  $0 < H < \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} < H < 1$ , y  $H = \frac{1}{2}$  [46]. A continuación hablaremos con más detalle de estas tres familias.

### El movimiento browniano y su relación con el exponente de Hurst

El exponente de Hurst  $H$  es un parámetro de autosemejanza (ver sección 1.1.4) que mide la dependencia a largo plazo en una serie de tiempo y proporciona una medida de su no linealidad [5]. Los valores esperados de  $H$  se encuentran entre 0 y 1. El movimiento browniano ordinario corresponde al caso especial de  $H = \frac{1}{2}$  [69], [4]. Sin embargo, en los casos en que el exponente de Hurst es mayor o menor que  $\frac{1}{2}$  hay dinámicas no lineales subyacentes en el sistema. Dos de las familias de procesos (fBm) que se mencionaron en (1.1.3), se distinguen del movimiento browniano ordinario en que sus incrementos sucesivos se correlacionan, es decir, no son independientes. Una correlación positiva, que corresponde a  $H > \frac{1}{2}$  significa que una tendencia creciente en el pasado probablemente sea seguida por una tendencia creciente en el futuro. En este caso, se dice que la serie es **persistente**. Por otro lado, una correlación negativa, que corresponde a  $H < \frac{1}{2}$ , significa que una tendencia creciente en el pasado probablemente sea seguida por una tendencia decreciente; se dice entonces que la serie es **antipersistente** [69], [5]. Cuando  $H$  está cerca de 0 las trazas de fBm son más rugosas, mientras que para  $H$  cerca de 1 son relativamente suaves (ver figura 1.2) [4].

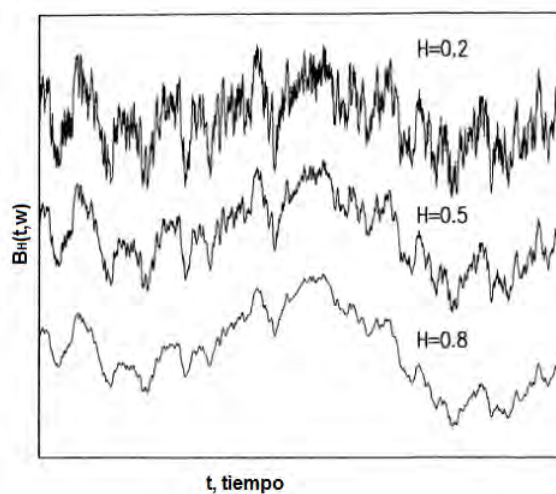


Figura 1.2: Movimiento fraccional browniano y el exponente de Hurst (figura tomada de [4]).

### 1.1.4. Autosemejanza y autoafinidad

#### Conjuntos autosemejantes

Existen dos tipos de autosemejanza, una es la *autosemejanza exacta* y la otra es *autosemejanza estadística*. Un objeto **autosemejante** se compone de  $N$  copias de sí mismo (con posibles translaciones y rotaciones), cada una de las cuales es reducida a escala por el parámetro  $r$  en todas las  $E$  coordenadas del conjunto. Más formalmente, consideremos un conjunto  $S$  de puntos en las posiciones

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_E),$$

en el espacio euclidiano de dimensión  $E$ . Bajo una transformación de semejanza con parámetro escalar  $0 < r < 1$ , el conjunto  $S$  se transforma en  $rS$  con puntos en

$$r\vec{x} = (rx_1, \dots, rx_E).$$

Un conjunto acotado  $S$  es **autosemejante** cuando  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos distintos (no superpuestos), cada uno de los cuales es congruente con  $rS$ . **Congruente** significa idéntico bajo translaciones y rotaciones.

El conjunto  $S$  es **estadísticamente autosemejante** si se compone de  $N$  subconjuntos distintos cada uno de los cuales se reduce a escala por el parámetro  $r$  del conjunto original y tiene todos sus parámetros estadísticos idénticos a los de  $rS$  [4].

#### Autoafinidad

La **autoafinidad** se produce bajo una transformación afín; por otro lado, cada una de las  $E$  coordenadas de  $\vec{x}$  pueden ser reducidas por diferentes parámetros de escala  $(r_1, \dots, r_E)$ . Por lo tanto, el conjunto  $S$  es transformado en  $r(S)$  con puntos en  $r\vec{x} = (r_1x_1, \dots, r_Ex_E)$ . Un conjunto acotado  $S$  es **autoafín** cuando  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos distintos y ajenos, cada uno de los cuales es congruente con  $r(S)$ . Similarmente,  $S$  es **estadísticamente autoafín** cuando  $S$  es la unión de  $N$  subconjuntos distintos, de los cuales cada uno es congruente en distribución con  $r(S)$ . Éste es el caso del fBm, que es estadísticamente autoafín [4].

#### El exponente de Hurst y su relación con conjuntos autoafines.

Los conjuntos autoafines difieren de los conjuntos autosemejantes en que necesitan ser re-escalados por diferentes factores en diferentes coordenadas para asemejarse al original.

Consideremos un conjunto autosemejante en el plano  $x - y$ , por ejemplo la curva de Von Koch (ver figura 1.3) [4]. Para obtener una copia exacta del original uno puede tomar una porción de la curva y extenderla por un factor  $r = 3$  en ambas coordenadas  $x, y$ . Consideremos ahora un conjunto autoafín. Si queremos una copia exacta del original, tomamos una porción de la curva y la extendemos por diferentes factores, por ejemplo,  $r_x = 3$  en el eje  $x$  y  $r_y = 2$  en el eje  $y$ . Podemos escribir esos dos factores de cambio de escala como:  $r_x = r$  y  $r_y = r^H$ , donde  $H$  es el exponente de Hurst.

Despejando  $H$

$$\log(r_y) = H \cdot \log(r),$$

$$\frac{\log(r_y)}{\log(r)} = H,$$

como  $r = r_x$ , en general, tenemos que

$$H = \frac{\log(r_y)}{\log(r_x)}.$$

Para el ejemplo:

$$H = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309 \dots$$

Notemos que, para escribir  $r_y$  como un exponente de  $r_x$ , hacemos la relación independiente de cualquier escala de longitud, es decir, la escala es invariante [70].

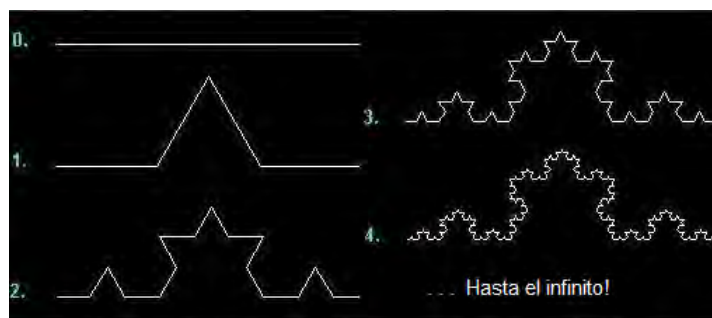


Figura 1.3: Construcción de la curva de Von Koch (figura modificada de [1]).

### 1.1.5. Dimensión fractal y exponente de Hurst

En esta sección primero contestaremos la pregunta ¿qué es un fractal? Su respuesta nos llevará a introducir la dimensión fractal, y su relación con el exponente de Hurst.

#### Dimensión fractal

En 1975, Benoît Mandelbrot acuñó el término *fractal* en su ensayo fundamental [43], en el cual se menciona que la palabra fractal deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o roto. Informalmente un **conjunto fractal** es un conjunto que es más irregular que los conjuntos considerados en la geometría clásica. No importa cuánto se aumente el conjunto, sus irregularidades más pequeñas se hacen visibles [21]. Mandelbrot sostiene que tales abstracciones geométricas a menudo se ajustan mejor al mundo físico que los arreglos regulares o curvas suaves y superficies. En su libro, *The fractal geometry of nature* [45], escribe: “Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de un árbol no es suave, ni los relámpagos viajan en línea recta”.

Muchos fractales tienen algún grado de autosemejanza, es decir, se componen de partes que se asemejan a la totalidad de algún modo. A veces, la semejanza puede ser más débil que la semejanza estricta geométrica; por ejemplo, la semejanza puede ser aproximada o estadística [19].

En 1919, Felix Hausdorff postuló la dimensión de Hausdorff-Besicovitch<sup>1</sup>,  $D$  (Abram Besicovitch fue quién dio la formulación definitiva). Cada vez que trabajamos en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^E$ , la dimensión topológica  $D_T$  y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch son al menos cero y a lo más  $E$ . Sin embargo la dimensión  $D_T$  siempre es un número entero mientras que  $D$  no necesariamente. Las dos dimensiones no necesariamente coinciden; sólo satisfacen la *desigualdad de Szpilrajn* [27]

$$D \geq D_T.$$

Para todo conjunto euclidiano,  $D = D_T$  [45].

La definición formal de un fractal que Mandelbrot da en su libro, *The fractal geometry of nature*, está en términos de la **dimensión fractal** de Hausdorff, la cual se menciona a continuación:

**Definición:** Un **fractal** es un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica.

En particular, todo conjunto con  $D$  no entero es un fractal [45]. Sin embargo, en el mismo libro, posteriormente a dar esta definición Mandelbrot menciona que él continúa creyendo que uno podría trabajar mejor sin una definición. La razón inmediata es que su

---

<sup>1</sup>En [19] se encuentra una definición formal de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch



definición excluye ciertos conjuntos que uno preferiría que se incluyeran. Mandelbrot dice que su definición implica  $D$  y  $D_T$ , pero parece que la noción de estructura fractal es más básica que  $D$  o  $D_T$ . En otras palabras, uno debe ser capaz de definir estructuras fractales como invariantes bajo alguna colección adecuada de transformaciones. Pero esta tarea no parece ser fácil. La necesidad principal es diferenciar los fractales a partir de los conjuntos estándar de Euclides. Mandelbrot señala que esta es una necesidad que su definición no satisface [45]. Pero lo que es cierto es que la mayoría de las definiciones involucran la dimensión fractal.

### Autosemejanza y dimensión fractal

La propiedad de autosemejanza es uno de los conceptos centrales de la geometría fractal y está cercanamente relacionada con nuestra idea intuitiva de dimensión.

Un objeto normalmente considerado como uno-dimensional, un segmento de línea por ejemplo, también posee una propiedad similar de *autosemejanza*: éste puede ser dividido en  $N$  partes idénticas, cada una de las cuales es reducida por la razón  $r = \frac{1}{N}$  del total. Similarmente, un objeto de dimensión dos, tal como un área cuadrada en el plano, puede ser dividida en  $N$  partes autosemejantes, cada una de las cuales es reducida por el factor  $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . Un objeto de dimensión tres, como un cubo sólido, podría ser dividido en  $N$  pequeños cubos, cada uno de los cuales es reducido por la razón  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ . Un objeto con dimensión  $D$  autosemejante puede ser dividido en  $N$  copias pequeñas de sí mismo cada una de las cuales es reducida por el factor  $r$  donde  $r = \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$  o

$$N = \frac{1}{r^D} \quad (1.10)$$

Consecuentemente, dado un objeto autosemejante de  $N$  partes reducidas por la proporción  $r$  del todo, su **dimensión fractal** o **dimensión de semejanza** [4] y está dada por

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}. \quad (1.11)$$

### Dimensión fractal por cajas

Para las *curvas* fractales con dimensión topológica igual a uno, la *longitud* aparente varía con el tamaño de regla de medición. Si toda la curva autosemejante es de tamaño máximo  $L_{max}$ , entonces, en una escala más pequeña  $L = rL_{max}$  con  $r < 1$ , y la curva consiste de  $N = \frac{1}{r^D}$  segmentos de longitud  $L$ . Por lo tanto, para  $D > 1$

$$Longitud = L \cdot N = L \cdot \left(\frac{L_{max}}{L}\right)^D \propto \frac{1}{L^{D-1}}$$

La dimensión fractal  $D$  también caracteriza la cubierta del conjunto  $S$  por *cajas*  $E$ -dimensionales de tamaño lineal  $L$ . Si todo  $S$  está contenido dentro de una caja de tamaño  $L_{max}$  entonces cada uno de los subconjuntos  $N = \frac{1}{r^D}$  caerá dentro de una caja de tamaño  $L = rL_{max}$ . Por lo tanto el número de cajas de tamaño  $L$ ,  $N_{(cajas)}(L)$ , que se necesitan para cubrir  $S$  está dado por

$$N_{(cajas)}(L) = \left( \frac{L_{max}}{L} \right)^D \text{ o } N_{(cajas)}(L) \propto \frac{1}{L^D} \quad (1.12)$$

Esta definición de la **dimensión caja** es uno de los métodos más útiles para la estimación de la dimensión fractal de un conjunto dado [4].

### La dimensión fractal y su relación con el exponente de Hurst

Para relacionar el exponente de Hurst con la dimensión fractal, consideremos, por conveniencia una traza de  $B_H(t, w)$  con un intervalo de tiempo,  $\Delta t = 1$  y un intervalo vertical  $\Delta B_H(t, w) = 1$ . La gráfica de  $B_H(t, w)$  es estadísticamente autoafín cuando  $t$  es escalado por  $r$  y  $B_H(t, w)$  es escalado por  $r^H$ . Supongamos que el intervalo de tiempo es dividido en  $N$  intervalos iguales cada uno con longitud igual a  $r_t = \frac{1}{N}$ . Cada uno de esos intervalos tendrá una porción de  $B_H(t, w)$  con proporción vertical

$$r_{B_H(t,w)} = \frac{1}{N^H}.$$

Ya que  $0 < H < 1$  cada una de las nuevas secciones tendrá un intervalo vertical grande según la magnitud de la razón horizontal y la parte ocupada de cada intervalo será cubierta por

$$\frac{\frac{1}{N^H}}{\frac{1}{N}} = \frac{N}{N^H}$$

cajas cuadradas de escala lineal  $L = \frac{1}{N}$ . En términos de la dimensión caja, como  $t$  ha sido reducido por  $r = \frac{1}{N}$  el número de cajas cuadradas que cubre la traza va desde 1 hasta  $N(L)$  =número de cajas de cada intervalo de tiempo por el intervalo total, es decir

$$N(L) = N \cdot \frac{N}{N^H} = N^{2-H} = \frac{1}{L^{2-H}}$$

Por lo tanto, por comparación con la ecuación 1.12,

$$D = 2 - H \text{ para la gráfica autoafín de } B_H(t, w). \quad (1.13)$$

Los fractales, como las formas geométricas euclidianas tradicionales, típicamente reducen su dimensión en uno cuando se intersecan con un plano [4]. Así, la intersección de una esfera sólida, cuya dimensión es 3, con un plano es un área circular de dimensión 2. La intersección de esta área con otro plano es un segmento de línea de dimensión 1 y la intersección de este segmento con otro plano es un punto con dimensión 0. Similarmente, la intersección de una curva fractal plana (con dimensión fractal  $1 < D < 2$ ) con una línea recta es un conjunto de puntos de dimensión  $D - 1$ . Escogiendo la dirección de la secante para eliminar una de las coordenadas, es posible reducir una curva autoafín a un conjunto autosemejante. El **conjunto cero** del fBm es la intersección de la gráfica de  $B_H(t, w)$  con el eje  $t$ , es decir, es el conjunto de todos los puntos  $t$  tales que  $B_H(t, w) = 0$ . El conjunto cero es un conjunto disconexo de puntos con dimensión topológica cero y dimensión fractal  $D_0 = 1 - H$ , donde  $0 < D_0 < 1$ . Aunque la gráfica de  $B_H(t, w)$  es autoafín, su conjunto cero es autosemejante. La dimensión fractal,  $D = D_0 + 1$ , de un fBm autoafín está, por lo tanto, simplemente relacionada con el exponente de Hurst por la ecuación 1.13

Por tanto, la gráfica del movimiento browniano ordinario tiene una dimensión fractal  $D = 1.5$  [4].

En general, la gráfica del movimiento browniano fraccional autoafín en dimensión topológica  $E$ , tiene dimensión fractal [4]

$$D = E + 1 - H,$$

y su conjunto de ceros forman un conjunto fractal estadísticamente autosemejante con dimensión

$$D_0 = E - H.$$

## 1.2. Análisis de espectro de potencias

Cuando observamos un objeto visualmente de inmediato notamos dos cosas. Primero, notamos si el objeto está bien iluminado o no, es decir, observamos la *intensidad* de la luz emitida o reflejada por el objeto, y lo segundo que notamos es el *color* del objeto. Al hacer esas simples observaciones nuestros ojos han, de hecho, llevado a cabo una forma muy cruda de un proceso denominado **análisis espectral**. Examinemos esta operación con más detalle. Primero, ¿qué queremos decir por *color*? La definición cuantitativa común de color es expresada en términos de *frecuencia* cuando la luz es considerada como una onda electromagnética. Por lo tanto, podríamos decir que la luz azul y la luz roja parecen tener colores diferentes porque tienen diferentes frecuencias.

Sin embargo, muy pocas veces observamos luz monocromática en general, vemos una mezcla de varios colores básicos. Ahora, el ojo humano es un pobre *espectrómetro* en el

sentido que aunque podríamos ser capaces de decir si la luz parece azulada o rojiza, no podemos decir inmediatamente cuánto azul o rojo contiene relativo a los otros colores. Observamos, más bien, el efecto total, y para obtener un análisis más refinado tenemos que recurrir a dispositivos ópticos tales como un prisma. Al hacer pasar la luz a través de un prisma separamos sus diferentes colores que la componen, y determinamos la intensidad de los varios componentes que están presentes. Notemos que mediante este dispositivo obtenemos un método estándar para describir la naturaleza de cualquier forma de luz visible, es decir, indicando los colores que están presentes y sus respectivas intensidades, y a la inversa, si sabemos la intensidad de los diversos colores podremos reconstruir la luz mediante la mezcla de estos colores en sus proporciones correctas. Esta información, es decir, los colores presentes y sus intensidades, es llamada el **espectro** de la luz [62].

Hasta ahora no hemos usado el hecho de que estamos hablando sólo de ondas electromagnéticas en el rango de frecuencias para el cual el ojo humano es sensible. Por lo tanto, surge la pregunta: ¿se puede aplicar un análisis similar a cualquier tipo de alteración que parezca una onda? Sin duda, si estamos usando el concepto de frecuencia, podemos discutir sólo los fenómenos que poseen una estructura como de onda, es decir, que se pueden representar como una composición de ondas senoidales con diferentes amplitudes y frecuencias. Sin embargo, la restricción a fenómenos ondulatorios todavía nos permite considerar tan diversos procesos como las ondas de radio, ondas de sonido, registro de vibraciones en el análisis de tensión, señales de radar, registro de ruido en aparatos eléctricos, trazas de encefalogramas (ondas del cerebro), registros de las fluctuaciones de los precios de productos, fluctuaciones de las existencias y precios de las acciones de la bolsa de valores, etc. De hecho, podríamos aplicar el análisis espectral para cualquier tipo de proceso que fluctúa en alguna forma, pero que exhibe un cierto tipo de *estabilidad*, es decir, tiende a mantener un valor *estable*, y no está aumentando o disminuyendo, obviamente, de manera constante [62].

El principal objetivo del *análisis espectral* es descomponer una cantidad variable en el tiempo en sumas (o integrales) de funciones senoidales.

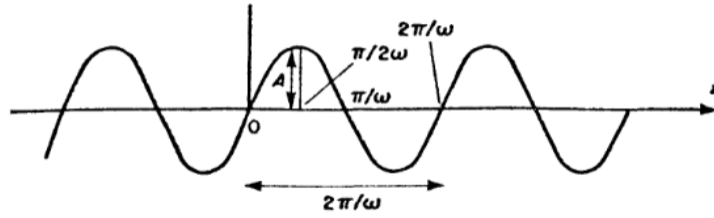
### 1.2.1. Funciones periódicas y no periódicas

Recordemos que una función se llama *periódica* cuando se cumple lo siguiente:

$$f(x) = f(x + kp), \text{ para toda } x, \quad (1.14)$$

donde  $k$  toma los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y  $p$  es el **periodo** de la función.

Si no existe un valor de  $p$  (diferente de cero) tal que la ecuación (1.14) se cumpla para toda  $x$ , se dice que la función **no es periódica**. Las funciones  $A \cdot \text{sen}(wx)$  y  $A \cdot \text{cos}(wx)$


 Figura 1.4: Función  $A \cdot \text{sen}(xw)$ .

son periódicas con  $p = 2\pi/w$ . La cantidad  $w = 2\pi/p$  es llamada **frecuencia** y la constante  $A$  es llamada la **amplitud** (ver fig. 1.4).

Una función  $f(x)$  periódica, con periodo  $p = 2T$ , se puede escribir como una *serie de Fourier* de la siguiente forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ a_r \cos\left(\frac{\pi r x}{T}\right) + b_r \text{sen}\left(\frac{\pi r x}{T}\right) \right] \quad (1.15)$$

donde

$$a_r = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{\pi r x}{T}\right) dx, r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

$$b_r = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \text{sen}\left(\frac{\pi r x}{T}\right) dx, r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

Los coeficientes  $a_r$  y  $b_r$  para  $r = 0, 1, 2, \dots$ , se llaman **coeficientes de Fourier**. El término  $r = 1$  es llamado **fundamental** y representa una onda coseno/seno cuyo periodo coincide exactamente con el de la función dada,  $f(x)$ . El siguiente término correspondiente a  $r = 2$ , se llama **primer armónico** y representa una onda coseno/seno cuyo periodo es exactamente la mitad del de la función  $f(x)$ . Los términos correspondientes a  $r = 3, 4, 5, \dots$ , son llamados **segundo, tercer, cuarto, ..., armónicos**.

A menudo es conveniente reescribir la ecuación (1.15) en forma de variables complejas, como sigue.

Sea la sucesión compleja  $\{A_r\}$  definida como

$$A_r = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_r - ib_r), & r > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & r = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{|r|} + ib_{|r|}), & r < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Entonces (1.15) se puede reescribir en la forma

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{iw_r x} \quad (1.19)$$

donde  $w_r = \pi r/p$ ,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Llamamos  $w_r$  la **frecuencia**, y  $|A_r| = (a_r^2 + b_r^2)^{1/2}$  la **amplitud** de la función compleja exponencial  $A_r e^{iw_r x}$ .

Sustituyendo las expresiones (1.16) y (1.17) para  $a_r$  y  $b_r$  en (1.18) obtenemos

$$A_r = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) e^{-iw_r x} dx \quad (1.20)$$

Regresando al caso de las funciones no periódicas, éstas se pueden pensar como funciones con periodo infinito. De esta forma podríamos suponer que una función no periódica podría ser representada como una suma de la forma (1.15) si  $p$  tiende a infinito. En otras palabras, podríamos intentar aproximar una función no periódica por una sucesión de funciones periódicas con periodos más y más grandes. Entonces, sea  $g(x)$  una función no periódica y sea  $g^*(x) = g(x)$  en el intervalo  $[-T, T]$  y  $g^*(x)$  periódica fuera del intervalo, es decir

$$g^*(x + 2tT) = g^*(x), \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

y  $g^*(x)$  tiene periodo  $2T$  por lo tanto  $g^*(x)$  se puede escribir en la forma de (1.19). Luego, por (1.20) y por las condiciones que cumple  $g^*(x)$  tenemos que

$$A_r = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g^*(x) e^{-iw_r x} dx = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) e^{-iw_r x} dx$$

Por lo tanto, para  $-T \leq x \leq T$ , podemos escribir,

$$g(x) = g^*(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left( \delta w_r \int_{-T}^T g(x) e^{-iw_r x} dx \right) e^{iw_r x}, \quad (1.21)$$

donde

$$\delta w_r = \frac{w_r - w_{r-1}}{\pi} = \frac{1}{2T}.$$

Ahora, cuando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\delta w_r \rightarrow 0$ , es decir, el conjunto discreto de frecuencias

$$(\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots)$$

se convierte en un conjunto continuo y el lado derecho de la ecuación (1.21) se vuelve una integral, por lo tanto cuando  $T \rightarrow \infty$ , se obtiene, para toda  $x$ ,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(w)e^{iwx} dw. \quad (1.22)$$

donde

$$p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iwx} dx. \quad (1.23)$$

Sin embargo, en la derivación de la ecuación (1.22) como un límite de (1.21) hemos introducido una serie de operaciones que serán válidas sólo si la función  $g(x)$  satisface ciertas condiciones. Las condiciones requeridas son que  $g(x)$  debe anularse cuando  $x$  tienda a infinito y menos infinito. Más precisamente, si  $g(x)$  es absolutamente convergente, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty,$$

entonces  $g(x)$  se puede expresar como una integral de la forma (1.22) llamada **integral de Fourier** de  $g(x)$  y la función  $p(w)$  es llamada la **transformada de Fourier** de  $g(x)$  [62].

Comparando (1.19) y (1.22) podemos observar que la diferencia esencial entre funciones periódicas y no periódicas es que mientras una función periódica puede ser expresada como una suma de senos y cosenos sobre un conjunto discreto de frecuencias,  $w_0, w_1, \dots$ , una función no periódica puede ser expresada sólo en términos de senos y cosenos sobre todo el rango continuo de frecuencias. Teniendo en cuenta que esta es la única distinción real entre series de Fourier e integrales de Fourier, podemos combinar ambas expresiones (1.19) y (1.22) en una sola fórmula por medio de la *transformada de Fourier-Stieltjes*. Por lo tanto, si  $f(x)$  es periódica (con período  $p = 2T$ ), o es no periódica (pero absolutamente integrable), la podemos expresar como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} dP(w), \quad (1.24)$$

donde  $P(w)$  es una función (con valores complejos), llamada **transformada de Fourier-Stieltjes** de  $f(x)$ , cuya forma puede ser determinada de  $f(x)$ . Cuando  $f(x)$  es no periódica la función  $P(w)$ , en general, será diferenciable, por lo tanto (1.24) se reduce a la misma forma que (1.22), con  $dP(w)/dw = p(w)$ . Por otro lado, si  $f(x)$  es periódica (con período  $p = 2T$ ), entonces  $dP(w)$  será de la forma

$$dP(w) = \begin{cases} A_r, & w = w_r, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto en este caso (1.24) se reduce a (1.19). Cuando  $dP(w)$  es de la anterior forma, la función  $P(w)$  tiene incrementos cero (es decir, es constante) excepto en el conjunto de puntos  $\{w_r\}$ ,  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , donde aumenta  $\{A_r\}$ . En la figura 1.5 se observa la gráfica de  $P(w)$  cuando  $f(x)$  es periódica [62].

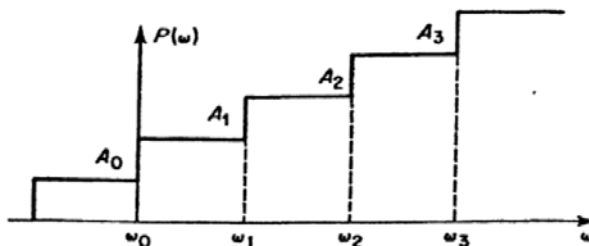


Figura 1.5: Gráfica de  $P(w)$  cuando  $f(x)$  es periódica.

Cuando  $f(x)$  sea una función no periódica se tendrá la transformada de Fourier-Stieltjes cuya forma es mostrada en figura 1.6. Cuya derivada,  $p(w)$ , se puede observar, típicamente, como se muestra en la figura 1.7.

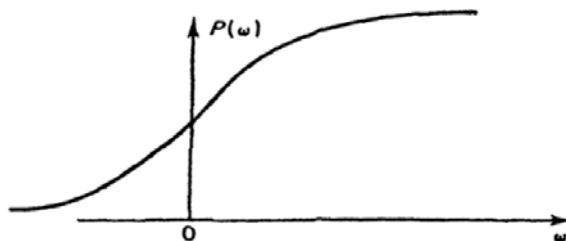


Figura 1.6: Gráfica de  $P(w)$  cuando  $f(x)$  no es periódica.

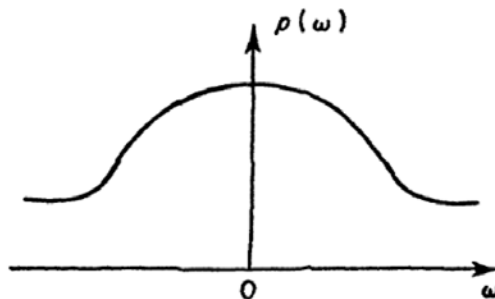


Figura 1.7: Gráfica de  $p(w)$  cuando  $f(x)$  no es periódica.



### 1.2.2. Análisis del espectro de potencias

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de procesos estocásticos es que cada realización de un proceso aleatorio puede ser expresada como una transformación de Fourier-Stieltjes, de la forma,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} dZ(w) \quad (1.25)$$

donde  $w$  es la *frecuencia* y la función  $Z(w)$  es no diferenciable y tiene la forma

$$dZ(w) = O(\sqrt{dw}), \quad (1.26)$$

de modo que el orden de magnitud del incremento de  $Z(w)$  sobre un intervalo  $dw$  es infinitesimal, pero mucho más grande que  $dw$ .

Para el análisis espectral, nuestro principal interés radica en la *distribución de energía* del proceso estocástico,  $X(t)$ , es decir, estamos interesados en las amplitudes cuadradas,  $|dZ(w)|^2$ . De acuerdo a (1.26) esperaríamos que  $|dZ(w)|^2$  fuera del orden de magnitud de  $dw$ . Por lo tanto, si definimos la función  $q(w)$  por

$$q(w) = |dZ(w)|^2/dw, \quad (1.27)$$

esperaríamos que  $q(w)$  fuera una función de  $w$  razonablemente bien comportada. La función  $q(w)$  representa, hablando en términos generales, *la densidad de energía por unidad de frecuencia*, y por lo tanto puede ser utilizada como un medio para describir las propiedades de la energía o frecuencia de  $X(t)$ .

Diferentes realizaciones de un proceso producen diferentes versiones de  $Z(w)$ . Por lo tanto,  $Z(w)$  es en sí misma un proceso aleatorio, y para cada  $w$ ,  $dZ(w)$  es una variable aleatoria. Por consiguiente, la función  $q(w)$  describe las propiedades de energía o frecuencia sólo de la realización en particular de la que partimos, y no nos dice nada acerca de las propiedades de las otras realizaciones. Con el fin de construir una función que describa las propiedades de todo el proceso (en vez de simplemente una realización) tomamos el promedio de  $q(w)$  (para cada  $w$ ) sobre todas las realizaciones. Así, definimos una nueva función,  $h(w)$ , por

$$h(w) = \overline{q(w)} = \overline{|dZ(w)|^2}/dw, \quad (1.28)$$

donde la barra superior denota el promedio tomado sobre todas las realizaciones del proceso. La función  $h(w)$  es llamada la **función de densidad del espectro de potencias** del proceso [62].

El espectro de una serie de tiempo es una función real positiva de una variable de frecuencia asociada con un proceso estocástico estacionario  $X(t)$ <sup>2</sup>. Intuitivamente el espectro descompone la serie de tiempo en diferentes frecuencias presentes en ese proceso y ayuda a identificar las periodicidades.

Las técnicas de estimación pueden implicar enfoques paramétricos y no paramétricos. Una técnica no paramétrica común es el *periodograma*. Una idea básica en matemáticas y estadística es tomar un objeto complejo (por ejemplo, una serie de tiempo) y dividirlo en una suma de objetos simples que puedan ser estudiados por separado, observar cuales pueden ser desechados por carecer de importancia, y luego añadir lo que queda para obtener una aproximación al objeto original. El periodograma de una serie de tiempo es el resultado de tal procedimiento.

**Definición:** Dadas  $N$  observaciones  $X_1, \dots, X_N$  la función  $I_N(w)$ , llamada **periodograma**, está definida para toda  $w$  en el intervalo  $-\pi \leq w \leq \pi$  por

$$I_N(w) = \{A(w)\}^2 + \{B(w)\}^2,$$

donde

$$A(w) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \cos(wt),$$

$$B(w) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N X_t \sin(wt).$$

Alternativamente, podemos escribir  $I_N(w)$  como,

$$I_N(w) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-iwt} \right|^2,$$

donde  $w$  es la frecuencia [62].

El propósito de la estimación de la densidad espectral es detectar cualquier periodicidad en los datos, mediante la observación de picos en las frecuencias correspondientes a estas periodicidades. Una serie de tiempo con un solo componente periódico tendrá un solo pico en su espectro correspondiente a esa frecuencia. Una serie de tiempo con varios componentes periódicos tendrá picos en su espectro en esas frecuencias [71].

---

<sup>2</sup>Un **proceso estocástico estacionario** es una colección de variables aleatorias cuyas propiedades estadísticas del proceso no cambian con el tiempo [62].

En la práctica, para obtener una estimación de la dimensión fractal, se calcula el espectro de potencias  $q(w)$  y se grafica el logaritmo de  $q(w)$  contra el logaritmo de  $w$  (ver figura 1.8). Para una serie de tiempo que es un fractal autoafín, la densidad del espectro de potencia tiene una relación de ley de potencia con la frecuencia [71], es decir,

$$q(w) \sim w^{-\beta} = \frac{1}{w^\beta},$$

donde  $\beta$  está relacionado con la dimensión fractal  $D$  de la siguiente forma [4]:

$$D = \frac{5 - \beta}{2} \text{ para } 1 < \beta < 3. \quad (1.29)$$

Igualando (1.13) con (1.29) tenemos

$$2 - H = \frac{5 - \beta}{2}, \quad 1 < \beta < 3$$

lo que implica que

$$H = \frac{\beta - 1}{2}, \quad 1 < \beta < 3 \quad (1.30)$$

ya que  $0 < H < 1$ . Para el movimiento browniano se tiene una  $\beta = 2$  [4], como se observa en la figura 1.8.

Se debe enfatizar que la obtención de una estimación adecuada del espectro de potencias de una muestra no es un asunto trivial. Por ejemplo, se puede tomar la transformación de Fourier de una serie de datos usando algoritmos de la transformación rápida de Fourier y elevar al cuadrado los coeficientes de la transformación. Esta estimación se traduce en un periodograma, que es una estimación cruda del espectro de potencias. El defecto principal del periodograma es que la estimación de la potencia en cualquier frecuencia es muy ruidosa; la amplitud del ruido es proporcional al espectro de potencias. El software BENOIT (ver 3.2.1) ofrece una mejora en la técnica de estimación espectral donde el ruido es suavizado por un promedio de periodogramas obtenidos en intervalos logarítmicos iguales del conjunto de datos.

Antes de la transformación de Fourier, se puede quitar alguna tendencia media lineal de la serie de datos, y aplicar una disminución gradual. La disminución gradual se logra al multiplicar la serie de datos por una función que tiende suavemente a cero en los extremos. Los algoritmos de la transformación rápida de Fourier suponen que la serie de tiempo es periódica (es decir, su punto final está conectado con el punto inicial). Por lo tanto, la disminución gradual se debe hacer para evitar los efectos en los extremos y minimizar las *fugas del espectro*.

Las **fugas en el espectro**, es decir, la energía que se añade a la estimación en un cierto número de onda que proviene de los números de onda vecinos, son un problema,

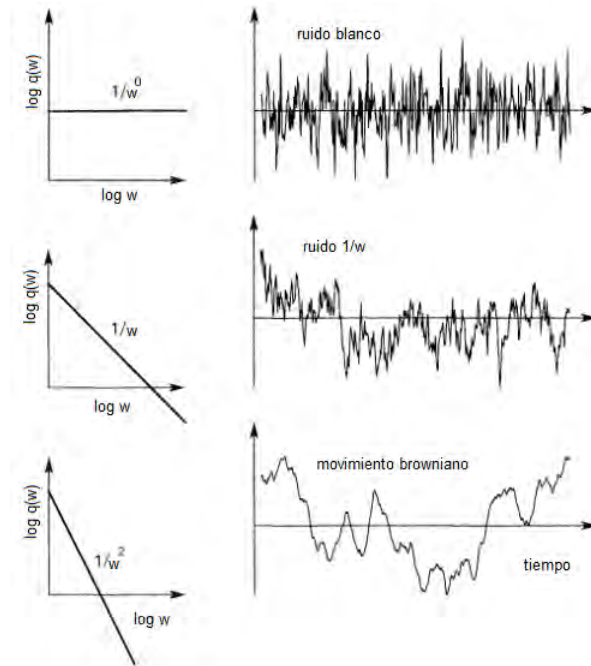


Figura 1.8: En el lado izquierdo se encuentra una representación gráfica de la densidad espectral de cada ruido que se encuentra a la derecha. El último es el ruido  $1/w^2$  o movimiento browniano (figura modificada de [4]).

en particular si el espectro es muy *rojo*, es decir, si los componentes de longitud de onda larga tienen mayor potencia que los componentes de una longitud de onda corta. Éste es siempre el caso para trazas autoafines. Notemos que los puntos en la gráfica log-log que se localizan lejos de la línea de ajuste se encuentran en frecuencias en las que se produce fuga espectral. En el software BENOIT, se puede aumentar la precisión del método quitando los puntos donde se produce la fuga espectral.

Todas esas consideraciones se aplican a la estimación espectral, usando transformadas de Fourier de la traza de datos. El algoritmo para el método de espectro de potencias en BENOIT requiere datos uniformemente espaciados [70].

# Capítulo 2

## Los rayos cósmicos y el monitor de neutrones de la Ciudad de México

### 2.1. Los rayos cósmicos

En este capítulo hablaremos de cómo fueron descubiertos los rayos cósmicos y qué son, así como algunas afectaciones que tienen por la actividad del Sol, pero antes comentaremos algunas características de este último, ya que muchas de las variaciones que se observan en aquéllos están relacionadas con la actividad de nuestra estrella.

#### 2.1.1. El Sol

El Sol es la estrella más cercana a la Tierra y es la principal fuente de energía que mantiene la vida en nuestro planeta.

La Tierra se encuentra bajo la influencia directa del Sol. En realidad se encuentra dentro de la atmósfera solar o heliosfera, de modo que algunas perturbaciones que tienen lugar en la base de la atmósfera solar pueden afectar de diversas formas a la Tierra y a su entorno cercano.

Con el desarrollo de la tecnología espacial se han estudiado las propiedades del medio que separa al Sol de la Tierra y los otros planetas (llamado medio interplanetario) y se encontró que los fenómenos solares dominan completamente lo que ahora se llama el clima del medio interplanetario. En particular, los *fenómenos eruptivos* como las *ráfagas* (también llamadas fulguraciones), las *eyecciones de masa coronal* y los *filamentos* que estallan causan grandes perturbaciones en el medio interplanetario y pueden afectar en gran medida el entorno terrestre.

El Sol se divide en dos partes principales: la interior, que es imposible observar direc-

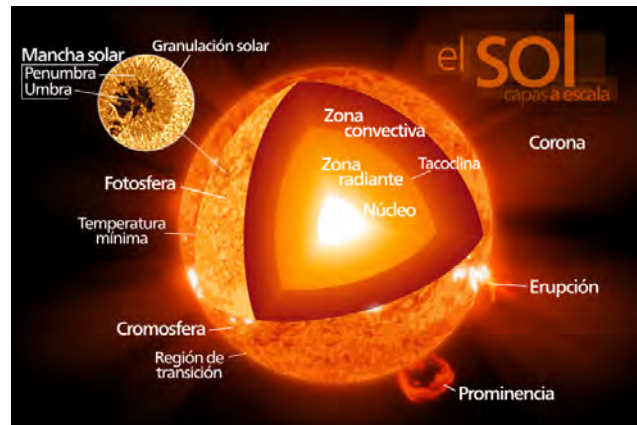


Figura 2.1: Estructura del Sol (figura tomada de [31]).

tamente, y la atmósfera que puede observarse directamente (aunque no a simple vista). Estas dos partes se subdividen en regiones que tienen diferentes características físicas dictadas por la densidad y temperatura del gas que forma el Sol (ver figura 2.1).

### Interior del Sol

En el interior del Sol se encuentra prácticamente toda la materia que lo compone. Esa región es completamente opaca y no podemos ver nada de ella, de tal forma que debemos usar modelos teóricos<sup>1</sup>, en combinación con observaciones indirectas, para entender lo que pasa en el interior.

Toda la energía que emite el Sol se genera en su centro. Es en esta región de alta presión y elevada temperatura llamada **núcleo** donde se llevan a cabo las reacciones nucleares que transforman hidrógeno en helio (fusión nuclear); en la que se pierde masa y se gana energía. La energía que se produce en el núcleo se encuentra sobre todo en forma de radiación electromagnética. Esta energía es suficiente para mantener el brillo del Sol por miles de millones de años.

Los rayos gamma<sup>2</sup> son los que acarrean la energía generada por las reacciones nucleares hacia las capas más altas. Sin embargo, su viaje hacia el exterior es bastante tortuoso debido a la enorme densidad en el núcleo solar y las capas siguientes. El camino libre medio es muy pequeño, aun para los fotones, de tal forma que las interacciones de los fotones con la materia son muy frecuentes y en ellas los fotones pierden energía. Incluso así, son estos fotones los que transportan la energía generada en el núcleo hacia las capas externas del Sol.

La presión fuera del núcleo es relativamente baja, de tal manera que ya no se produce

<sup>1</sup>En [15] se encuentra un ejemplo de un modelo teórico.

<sup>2</sup>Los rayos gamma es un tipo de radiación electromagnética, y por tanto constituida por fotones, ya que el fotón es la partícula portadora de todas las formas de radiación electromagnética.

fusión nuclear, pero es lo suficientemente alta como para no permitir movimientos de masa; sólo los fotones pueden moverse y aun así lo hacen con mucha dificultad, como ya mencionamos, debido a que el camino libre medio es muy pequeño. Un fotón tarda  $\sim 10$  millones de años en atravesar una distancia equivalente a medio radio solar (en el vacío tardaría poco más de un segundo en recorrer la misma distancia). De esta forma, en los primeros 0.7 radios solares los fotones son los únicos que pueden transportar energía; a esta región (de 0.25 a 0.7 radios solares) se le llama **zona de radiación**.

Al llegar a los 0.7 radios solares la radiación ya no es un mecanismo eficiente de transporte de energía. La temperatura y presión del gas a esa distancia ha disminuido considerablemente y debido a esta disminución algunos electrones son atrapados y se forma hidrógeno parcialmente ionizado<sup>3</sup> que aumenta la opacidad de la región. Así se genera un gradiente de temperatura tal que permite el movimiento macroscópico de masa o convección. Una vez que una “burbuja” de material empieza a moverse hacia arriba no se detiene mientras sea más ligera que el material a su alrededor, si suponemos que el movimiento es lo suficientemente lento como para que se mantenga el equilibrio de presión con el entorno, pero al mismo tiempo suficientemente rápido como para que no exista intercambio de calor entre la “burbuja” y los alrededores.

Estos movimientos forman celdas convectivas de tamaños variables, desde varios cientos de kilómetros hasta unas décimas del radio solar. A esta región se le llama **zona convectiva** y en profundidad va desde 0.7 hasta 1 radio solar. Cuando se observa la *fotosfera* con telescopios de gran resolución las celdas convectivas aparecen como gránulos de diferentes tamaños (ver figura 2.1). El centro del gránulo se ve más brillante (material caliente en ascenso) que la orilla (material frío en descenso), debido a las diferencias de temperatura. Las celdas convectivas más grandes aparecen como conjuntos de celdas pequeñas con una frontera común.

## Atmósfera

Ahora hablaremos de la parte “visible” del Sol, la llamada atmósfera solar.

Exactamente a una distancia de 1 radio solar la densidad solar disminuye, de modo que las ondas electromagnéticas que se encuentran en un intervalo pequeño del espectro<sup>4</sup>, se pueden propagar libremente y salen de Sol. Estamos hablando de la transición entre el interior y la atmósfera, es decir, la **fotosfera** o esfera de luz. Esta división es arbitraria y no hay que pensar en cambios tajantes como en el caso de la Tierra, en donde la transición Tierra sólida-atmósfera está perfectamente determinada. Hablamos de la fotosfera como

---

<sup>3</sup>La **ionización** es el fenómeno físico mediante el cual se producen iones. Éstos son átomos o moléculas cargados eléctricamente debido al exceso o falta de electrones respecto a un átomo.

<sup>4</sup>Se denomina espectro electromagnético a la distribución energética del conjunto de las ondas electromagnéticas. Referido a un objeto se denomina espectro electromagnético o simplemente espectro a la radiación electromagnética que emite (espectro de emisión) o absorbe (espectro de absorción) una sustancia.

la superficie del Sol, pero no hay que olvidar que en realidad todo el Sol es gas, aunque con diferentes condiciones físicas (temperatura y densidad). La temperatura en la fotosfera es de unos 5,700 K y su espectro de radiación es prácticamente igual al de un cuerpo negro a esa temperatura.

La fotosfera es una capa muy delgada, mide unos 500 km de espesor. Cuando se observa detenidamente, se ven unas regiones *oscuras o manchas solares*. Las **manchas** son la manifestación visible de enormes tubos de flujo magnético que cruzan la fotosfera desde la zona de convección hacia la atmósfera superior. A pesar de que la diferencia de temperatura entre el material dentro y fuera de las manchas es relativamente pequeña (cientos de grados), la radiación es menor dentro de las manchas y, en contraste, el observador le parecen regiones oscuras. Los tubos de campo magnético no se detienen en la fotosfera, sino que se extienden hacia el resto de la atmósfera solar, con lo que crean las llamadas **regiones activas**. Por lo tanto, las manchas constituyen los “pies” de estas regiones. La **umbra** es la parte más oscura en el centro de la mancha, en donde la magnitud del campo es más grande, y se encuentra rodeada de una región compuesta por filamentos oscuros llamada **penumbra**.

La temperatura decrece desde unos 15 millones de grados en el núcleo hasta 5,700 K en la fotosfera. A una altura de unos 500 km por encima de la fotosfera la temperatura alcanza su valor mínimo de unos  $\sim 4,400$  K. Esta disminución de temperatura se debe principalmente a las pérdidas por radiación. Esta región marca el límite superior de la fotosfera. Después de este límite la temperatura aumenta primero suavemente hasta alcanzar unos 6,000 K a alturas que van aproximadamente de los 1,000 a los 2,000 km. A esta región de temperatura intermedia, que se ve como un anillo de color rojo que rodea a la fotosfera durante un eclipse solar, se le llamó  **cromosfera**.

Un fenómeno magnético de gran escala, que resulta evidente en las observaciones cromosféricas, son los filamentos, también llamados **protuberancias** o **prominencias**. Éstos son tubos helicoidales (que recuerdan la estructura de una cuerda) de plasma y campo magnético. Aparentemente, se forman en la cromosfera y se expanden hacia las capas superiores, llevando consigo el material cromosférico.

A una altura de  $\sim 2,300$  km, la temperatura sube rápidamente desde unos 20,000 K hasta alcanzar un valor de más de un millón de grados. Este hecho tiene lugar en la llamada **zona de transición**, en donde la densidad cae bruscamente y aumenta la temperatura a niveles extremos.

Después de los 2,300 km, disminuyen las tasas de crecimiento en la temperatura y de decrecimiento en la densidad. A esta región la llamamos **corona solar**, dado que en los eclipses solares se aprecia como una corona de pétalos blancos que rodea el disco solar. A temperaturas coronales (de millones de grados) los átomos se encuentran altamente ionizados y emiten principalmente en ultravioleta y rayos X. Por ejemplo, en la figura 2.2 se muestra una imagen del Sol que corresponde a la emisión de un ion de Fe (hierro) que se encuentra 15 veces ionizado, esto ocurre cuando la temperatura es de 1.5 MK.



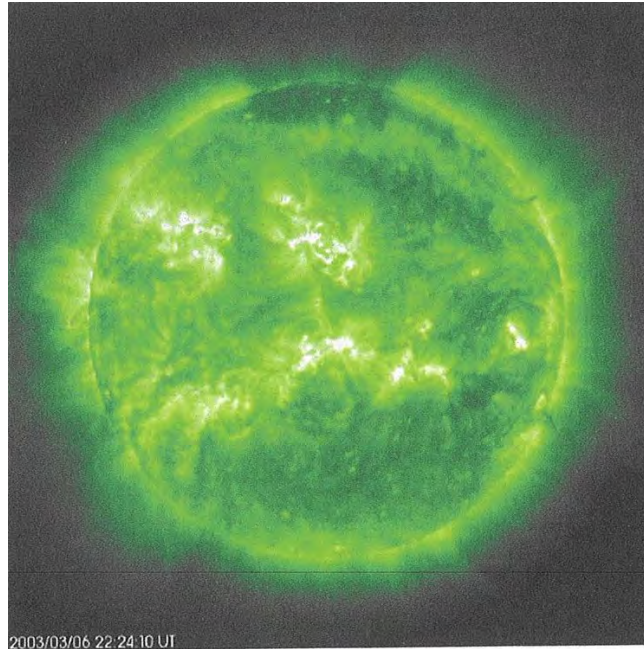


Figura 2.2: La corona vista en la línea del Fe 15 veces ionizado (figura tomada de [15]).

Las partes más brillantes en la figura 2.2 corresponden a las regiones activas, en donde el campo magnético y la densidad son más altos que en el resto de la corona. En contraste con las regiones brillantes, se encuentran las regiones oscuras como la que se ve en el polo norte solar de dicha figura. A estas regiones se les llama **hoyos coronales** y son regiones de campo magnético abierto; es decir, las líneas de campo no se cierran inmediatamente. Por lo tanto, el material coronal puede escapar con facilidad expandiéndose libremente hacia el medio interplanetario y formando lo que se conoce como **viento solar**.

El viento solar es un flujo de plasma y campo magnético que se genera en el Sol y permea todo el espacio interplanetario. Este flujo es el resultado de la gran diferencia de presiones que hay entre la corona solar y el espacio interestelar. Este viento y las perturbaciones que en él se propagan tienen gran importancia en lo que se conoce como *relaciones Sol-Tierra* y es un factor fundamental en el clima espacial. En promedio la velocidad del viento solar es de  $400 \text{ km/s}$ , pero sus variaciones pueden ser considerables, desde valores menores que cien hasta más de  $1,000 \text{ km/s}$ .

De los hoyos coronales salen haces de viento solar con velocidad más alta que en otras regiones (probablemente todo el viento solar sale de los hoyos coronales [15]), de tal forma que cuando un hoyo coronal se encuentra en latitudes bajas y de frente a la Tierra, unos días después su influencia se siente en los alrededores de la Tierra. Si el hoyo coronal en cuestión permanece en las mismas latitudes por varios meses, su influencia será recurrente, con un periodo aproximado de 27 días.

El campo magnético solar de gran escala no parece estar disminuyendo con el tiempo; por el contrario, muestra cambios que sugieren que dentro del Sol, probablemente en la

base de la zona convectiva, tiene lugar un proceso de dinamo, es decir, se genera campo magnético constantemente. Una consecuencia observable del proceso de dinamo es que el campo magnético de gran escala cambia cíclicamente entre una configuración dipolar y una configuración multipolar aproximadamente cada 5.5 años [15].

Con algunas variaciones, este proceso se ha repetido por mucho tiempo; su manifestación más clara en luz visible es el cambio del número de manchas en el disco solar. Este número aumenta conforme el campo se aleja de su forma dipolar, hasta llegar a un máximo local en el momento en el que el campo toma su forma toroidal. Después de esto el número de manchas decrece rápidamente hasta llegar a desaparecer casi por completo. Este ciclo se repite aproximadamente cada 11 años.

Los fenómenos más energéticos del sistema solar, en los que una súbita liberación de energía puede acelerar partículas hasta el régimen relativista o importantes cantidades de masa a grandes velocidades y emitir enormes destellos de radiación electromagnética en todas las longitudes de onda, tienen lugar en la atmósfera solar. Genéricamente son llamados **fenómenos eruptivos** y por lo común se dividen en *ráfagas* o *fulguraciones* y *eyecciones de masa coronal*.

Las **ráfagas** o **fulguraciones** solares son el resultado de la conversión de la energía magnética disponible (en la corona) en energía cinética de las partículas del medio [15].

El proceso de desestabilización y liberación súbita de energía se conoce como fase impulsiva. Durante la fase impulsiva el flujo electromagnético aumenta en grandes proporciones en todas las longitudes de onda. La fase impulsiva de la ráfaga es donde se lleva a cabo la conversión y liberación de energía y la aceleración de partículas (hasta velocidades relativistas). Las partículas de alta energía que se dirigen hacia las capas bajas de la atmósfera colisionan con el material, que es cada vez más denso. Por otra parte, algunas partículas salen disparadas hacia el medio interplanetario y pueden, en ciertas circunstancias, verse en los alrededores de la Tierra un tiempo después de la explosión solar. Estas partículas energéticas se conocen como **rayos cósmicos solares** (ver la sección 2.1.2).

En la atmósfera solar también hay nubes, pero se componen de plasma y campo magnético en lugar de vapor de agua. La atmósfera solar se encuentra permeada de campos magnéticos. A gran escala estos campos son dipolares, pero se observan grandes regiones que contienen una sola polaridad. La frontera entre regiones de diferente polaridad forma una línea magnéticamente neutra. Sobre esas líneas neutras el campo magnético toma formas muy complejas llamadas **cuerdas magnéticas** que se caracterizan porque las líneas de campo en su interior forman estructuras helicoidales. Las cuerdas magnéticas se forman en la cromosfera y luego suben a la corona, por lo que contienen material denso y frío comparado con el medio ambiente coronal. Los *filamentos* o *prominencias* permanecen suspendidos en la corona durante periodos de tiempo variables, desde unas cuantas horas hasta algunas semanas.

**Prominencia** o **filamento** es como se le llama a los tubos de flujo magnético según si se observan en el disco o en el limbo solar. En el disco se ven como cuerdas o filamentos

oscuros en contraste con la cromosfera que es más brillante. En el limbo parecen nubes o prominencias flotando en la corona (ver figura 2.1). Una prominencia es más densa y más fría que el material coronal que se encuentra a su alrededor.

En ocasiones los filamentos se desestabilizan bruscamente y lanzan hacia el medio interplanetario todo su material y el material coronal que se encuentra sobre ellos, produciendo lo que se conoce como una *eyección de masa coronal*.

Las **eyecciones de masa coronal** (EMC) son el fenómeno de gran escala de mayor impacto dentro de los estudios solares actuales.

La observación y estudio de las EMC es un tema de suma importancia, no solamente porque se trata de entender un fenómeno físico que puede acelerar  $\sim 10^{16}g$  de masa desde el reposo hasta velocidades de miles de kilómetros por segundo en unos cuantos minutos, sino porque afecta directamente a la Tierra, sobre todo a una parte importante de los sistemas tecnológicos actuales, como los satélites y las telecomunicaciones.

Las EMC son los fenómenos eruptivos solares más interesantes, ya que pueden afectar directamente el campo magnético de la Tierra. Hace algún tiempo se pensaba que las ráfagas solares causaban las perturbaciones observadas en el entorno terrestre. Ahora sabemos que ambos fenómenos se encuentran íntimamente relacionados, pero las EMC son las que se propagan perturbando a su paso el medio interplanetario.

Las EMC son un fenómeno muy frecuente en el Sol, al grado de que en la época de gran actividad solar se pueden observar varias EMC durante un solo día. La cantidad de masa eyectada varía mucho, pero fácilmente puede llegar a unos  $10^{15}$ - $10^{16}g$ , con velocidades que van de cientos a miles de kilómetros por segundo. En ocasiones, las EMC están asociadas con filamentos que estallan. En estos casos el material expulsado durante la EMC es parte del que formaba el filamento y es posible que la estructura magnética del filamento corresponda a las nubes magnéticas observadas en el medio interplanetario como estructuras en las que la dirección del campo magnético rota suavemente 360 grados.

### 2.1.2. Los rayos cósmicos

Los rayos cósmicos son un fenómeno natural que nos acompaña todo el tiempo, pero su presencia nos resulta imperceptible. La Tierra se encuentra bombardeada constantemente por ellos y son la única información material que nos llega del universo [53].

En 1911 Victor Franz Hess emprendió una serie de ascensos en globo. La conclusión derivada de los resultados de Hess era inescapable: existía una radiación muy penetrante, hasta ese entonces desconocida, que llegaba a la atmósfera desde afuera. No podía ser de origen solar [56], dado que no se observaba diferencia alguna entre el día y la noche. Veinticuatro años más tarde Hess recibió el Premio Nobel de Física [57]; su descubrimiento desempeñaría un papel extraordinario en el desarrollo de la física moderna.

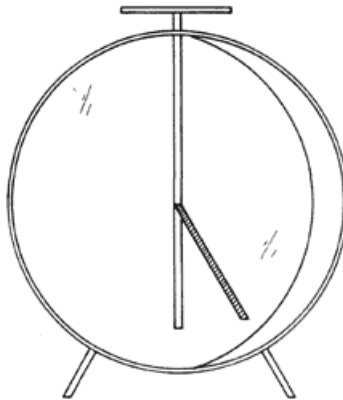


Figura 2.3: Electroscopio de panes de oro. Las dos laminillas de oro cuelgan de la barra metálica la cual se encuentra separada de la caja metálica del electroscopio por medio de un material aislante. Si se toca con una pieza de vidrio cargada la barra metálica del electroscopio, las láminas de oro se separan. Después de separar la pieza de vidrio, el electroscopio pierde gradualmente la carga y las laminillas terminan por unirse de nuevo (figura tomada de [58]).

Las alternativas más viables como constituyentes de los rayos cósmicos eran fotones de muy alta energía. Mediante el método de ensayo y error se determinó el espectro de energía (la intensidad del número de fotones en una región de frecuencias) que mejor ajustaba a las observaciones hechas en lagos a distintas profundidades de la atmósfera. Éste resultó ser compatible con el que podía producirse de la suma de tres grupos de fotones con energías de 26, 110 y 220 MeV (mega-electrón-volt). Robert Andrews Millikan y G. Harvey Cameron [48] interpretaron estos resultados como evidencia de que la radiación cósmica era una mezcla de fotones con esas energías.

Walther Bothe y Werner Kolhörster [9] habían observado que dos contadores Geiger-Müller<sup>5</sup>, uno arriba del otro, separados por una corta distancia y conectados cada uno a un electroscopio (ver imagen 2.3), a menudo se descargaban simultáneamente. Para dilucidar este problema instalaron dos contadores Geiger-Müller, uno arriba del otro, dentro de una caseta rodeada de cinco centímetros de hierro y seis centímetros de plomo. Los resultados del experimento mostraban que aun con ese blindaje, el número de coincidencias entre los telescopios se reducía sólo 25 %. La conclusión a la que llegaron Bothe y Kolhörster fue la de haber “detectado una radiación corpuscular por la cual pueden ser explicados los conocidos efectos de la radiación cósmica. Hoy en día no es imaginable una radiación  $\gamma$  con un poder de penetración comparable” [58].

<sup>5</sup>El contador Geiger-Müller, también llamado un contador Geiger, es un detector de partículas y de radiaciones ionizantes. El primer dispositivo llamado “contador Geiger”, que sólo detectaba partículas alfa, fue inventado por el físico alemán Hans Geiger y su colega neozelandés Sir Ernest Rutherford en 1908. En 1928 el propio Geiger mejoró el dispositivo con la ayuda del entonces estudiante Walther Müller, de forma que era capaz de detectar mayor número de radiaciones ionizantes.

La prueba final de que los rayos cósmicos son partículas cargadas incluyó los resultados de un experimento sugerido por Manuel Sandoval Vallarta y George Lemaître ([61] y referencias contenidas), que se efectuó en la azotea de un hotel de la ciudad de México, y de otro capitaneado por Arthur Holly Compton, el cual implicó una serie de mediciones de la intensidad de los rayos cósmicos en 69 estaciones alrededor del mundo, usando instrumentos calibrados entre sí. Con el segundo se confirmó la existencia de un efecto *latitudinal* en la intensidad de la radiación cósmica; con el primero se supo que la gran mayoría de los rayos cósmicos deberían ser partículas con cargas positivas.

La técnica de Bothe y Kolhörster de usar simultáneamente dos o más contadores, que se ha denominado telescopio contador, ha desempeñado hasta nuestros días un papel muy importante en el estudio de los rayos cósmicos. Con telescopios contadores fue posible no sólo mostrar que lo que llegaba a la superficie eran partículas cargadas, sino también observar la dirección en que viajaban dichas partículas. Al usar ese tipo de detectores muy pronto se mostró que esas partículas venían principalmente en dirección vertical y que la intensidad se reducía considerablemente al inclinar el telescopio.

Los experimentos con telescopios inclinados a  $90^\circ$  con la vertical condujeron a resultados inesperados e hicieron que la investigación sobre los rayos cósmicos diera otro paso fundamental para comprender esta misteriosa radiación. Un conjunto de contadores Geiger colocados de forma horizontal y operando simultáneamente, de manera que una sola partícula proveniente de arriba y viajando en línea recta no pudiera descargarlos al mismo tiempo, de vez en cuando se descargaban sincrónicamente. La conclusión obvia fue que las partículas de la radiación cósmica que estaban observando en la superficie no siempre llegaban solas, sino que a veces lo hacían como parte de cierto grupo que viajaba más o menos verticalmente. A esos grupos de partículas, que descendían juntos casi al mismo tiempo, se les denominó **chubasco de rayos cósmicos**.

Los experimentos que establecieron sin duda alguna la existencia de los chubascos de rayos cósmicos fueron realizados en los Alpes suizos en 1938 por el francés Pierre Auger y su grupo de estudiantes. Los contadores fueron colocados a distintas distancias y se registró el número de coincidencias por unidad de tiempo como función de la separación de los contadores. Auger pudo deducir de sus resultados que las partículas que originaban estos chubascos deberían tener energías de hasta  $10^{15}$  eV (electrón-volt)<sup>6</sup>, cantidades inimaginables en ese entonces. En estos chubascos se observan tanto electrones, positrones y fotones como partículas mucho más penetrantes.

Las partículas penetrantes no son sólo protones ni electrones. Después de una serie de experimentos se estableció sin lugar a dudas la existencia de una nueva partícula de carga unitaria y con una masa de aproximadamente 206.77 masas electrónicas, el muón.

La naturaleza de la radiación cósmica local, observada en la atmósfera, es ahora clara: las partículas penetrantes son muones; las que son fácilmente absorbidas, electrones y

---

<sup>6</sup>En [2] y [23] dicen que las energías de estas partículas varían desde  $10^8$  eV hasta más allá de  $10^{20}$  eV.

positrones, y las no ionizantes, fotones. Ellas constituyen prácticamente la totalidad de la radiación cósmica observada a nivel del mar.

### El campo geomagnético y los rayos cósmicos

Para interpretar cualquier medición de la intensidad de la radiación cósmica que se realice cerca de la superficie de la Tierra, se requiere tomar en cuenta la presencia del campo magnético terrestre (campo geomagnético). Una de las consecuencias de la existencia de éste campo es que no todas las partículas que llegan a sus inmediaciones pueden penetrar hasta la superficie de nuestro planeta. El “precio de admisión” es más bajo conforme nos acercamos a los polos, lo cual da origen al conocido efecto *latitudinal*.

Un telescopio óptico o un radiotelescopio registran radiación electromagnética que no es afectada por campos electromagnéticos, por tanto, viaja en línea recta; en contraste, un telescopio de rayos cósmicos no “ve” en la dirección que apunta. Las partículas cargadas son sometidas por el campo geomagnético a diversos movimientos de giro en su camino hacia la Tierra; así pues, la dirección de acercamiento (dirección por la cual llegan al límite de la magnetosfera<sup>7</sup>) puede resultar muy distinta de aquella a la cual apunta el instrumento.

Cuando se trata el problema de la propagación de los rayos cósmicos a través de campos magnéticos, resulta conveniente caracterizar a las partículas por su *rigidez magnética*<sup>8</sup>, puesto que partículas con la misma rigidez seguirán trayectorias idénticas.

Si los rayos cósmicos son partículas cargadas positivamente, llegarán a la Tierra en menor número desde el este del firmamento que de las regiones al oeste del punto de observación. Si, por el contrario, las partículas tienen carga negativa la situación es la opuesta. Esta asimetría se conoce como **efecto este-oeste**.

La radiación cósmica llega preferentemente de direcciones al oeste del punto de observación, pues la mayoría de estas partículas poseen carga positiva.

Consideremos ahora lo que sucede si apuntamos un detector de rayos cósmicos hacia una dirección determinada; supongamos que esta dirección es el cenit (la vertical). Veremos que el detector recibe todas las partículas de rigideces altas, como si el campo geomagnético no estuviera presente. Si medimos cada vez el flujo de rigideces magnéticas menores, veremos que existe una rigidez por debajo de la cual no se detecta ninguna; a ésta se le conoce con el nombre de **rigidez umbral**. Para cada punto de la Tierra, cada dirección de acercamiento, época del año y tiempo local existe una rigidez umbral [58]. Si desplazamos nuestro detector vertical desde el ecuador hacia los polos, observaremos

<sup>7</sup>La Tierra, como todo cuerpo magnetizado, posee una magnetosfera que se forma por la interacción entre el campo magnético, de naturaleza dipolar, y el viento solar [15].

<sup>8</sup>Al momento lineal de una partícula cargada dividida por su carga eléctrica se le puede considerar como una medida de la resistencia de la partícula a ser desviada por el campo. A esta cantidad se le conoce como **rigidez magnética** [15].

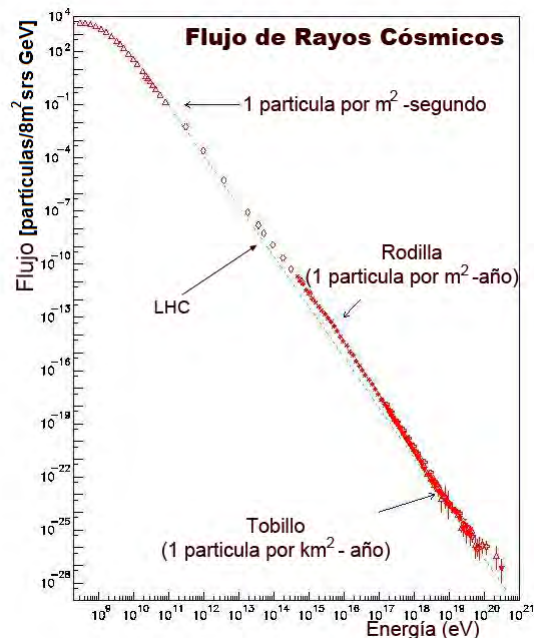


Figura 2.4: Espectro de energía de la radiación cósmica primaria. El eje horizontal representa la energía total, el vertical la intensidad de partículas primarias (figura tomada de [72]).

que la rigidez umbral se va haciendo cada vez menor; es decir, partículas con rigideces pequeñas que no pueden alcanzar puntos sobre la Tierra a bajas latitudes podrán llegar a latitudes mayores. Este fenómeno se conoce como efecto **latitudinal**.

### Características generales de la radiación cósmica primaria

Experimentos realizados en globos a gran altura confirmaron que la radiación cósmica primaria consistía principalmente de protones. Los núcleos de todos los elementos encontrados en esta radiación están completamente desprovistos de sus electrones, ya que partículas cargadas con altas energías los pierden por un proceso de ionización al atravesar pequeñas cantidades de materia.

Es importante señalar que las abundancias de los rayos cósmicos han podido determinarse sólo hasta energías de alrededor de  $10^{16}$  eV; para energías mayores no se conoce a ciencia cierta esta composición debido principalmente a la imposibilidad práctica de detectar rayos cósmicos primarios en la alta atmósfera o el espacio y a las complicaciones que acarrea su determinación a través de los chubascos atmosféricos.

**Espectro de energía.** El espectro de la radiación cósmica primaria describe el flujo de partículas por unidad de energía que llega a la Tierra. Los resultados de las mediciones del espectro de energía de la radiación cósmica se muestran en la figura 2.4.

Este espectro puede ser representado por leyes de potencia de la forma:

$$j(E) = K \cdot E^{-\gamma},$$

donde  $K$  y  $\gamma$  son constantes. Los únicos cambios que ocurren alrededor de  $10^{15}$  y  $10^{18}$  eV están relacionados con el origen de los rayos cósmicos [15]. El “aplanamiento” (ver figura 2.4 ) del espectro hacia las bajas energías ( $E \leq 10\text{GeV}$ ) refleja la influencia del Sol en la propagación de estos rayos cósmicos [15].

### Los rayos cósmicos en la atmósfera terrestre

Los rayos cósmicos primarios, en su camino a la Tierra, se encuentran con el campo geomagnético mucho antes de tener la oportunidad de chocar con las moléculas de la atmósfera. En promedio, los protones chocan después de haber atravesado aproximadamente  $80\text{g}/\text{cm}^2$  de materia o alrededor de un catorceavo de la masa total de aire sobre el nivel del mar. La probabilidad de que un rayo cósmico escape de una colisión nuclear y llegue al nivel del mar es prácticamente nula.

Cuando la radiación cósmica primaria penetra en la atmósfera, todo lo que sucede resulta de las colisiones de un protón con las moléculas del aire. Dichas colisiones pueden ser de dos tipos: con la estructura electrónica del átomo o con el núcleo. Puesto que el núcleo es tan pequeño, el segundo tipo de colisiones son menos comunes, pero involucran cambios de energía muy grandes; cuando ocurren, son éstos los que determinan la formación de los rayos cósmicos secundarios.

Cuando un rayo cósmico primario choca directamente con el núcleo de un átomo atmosférico lo desintegra. En este tipo de colisiones, el número de partículas cargadas se incrementa. Un protón primario, al llegar a la atmósfera, tendrá una probabilidad mínima de llegar hasta la superficie sin haber sufrido alguna interacción nuclear.

Cuando un rayo cósmico primario choca directamente con el núcleo de un átomo atmosférico, dependiendo de la energía de la partícula primaria, el tamaño del núcleo, etc., pueden ocurrir varios procesos. Éstos pueden dividirse en procesos de absorción y de dispersión (elástica e inelástica). La mayor parte de las partículas secundarias que se producen se propagan en la misma dirección de la primaria.

La partícula primaria forma un chubasco atmosférico a través de los procesos antes descritos y va cediendo su energía a partículas de la atmósfera hasta el nivel del mar o aún más abajo.

Debido a que el flujo de rayos cósmicos es abundante en las energías más bajas ( $E < 200\text{GeV}$ ) ha sido posible estudiar directamente las variaciones temporales en la intensidad de la radiación cósmica mediante el uso de las mediciones de la radiación cósmica secundaria detectada en la superficie. En la figura 2.5 se muestran las mediciones que se hacen a un chubasco (o cascada) atmosférico. Estas variaciones de origen extraterrestre son las más



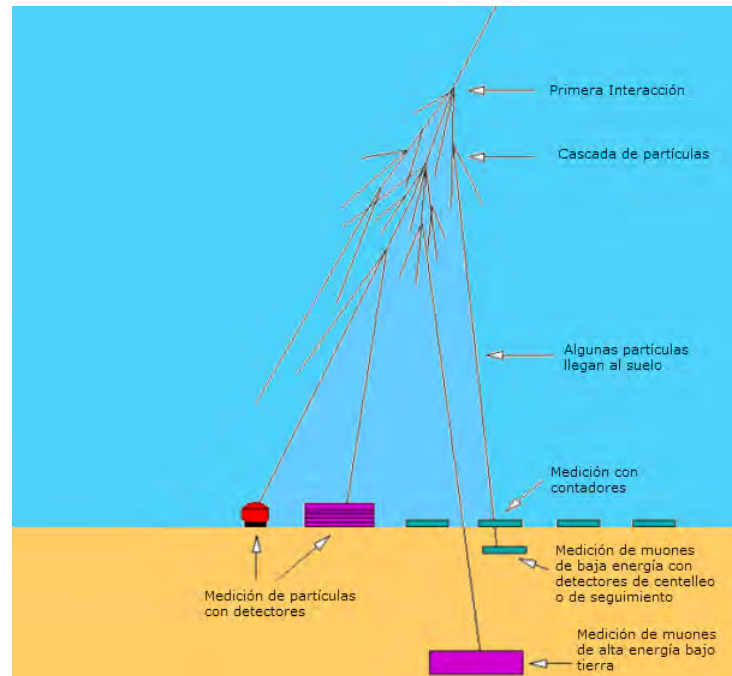


Figura 2.5: Medición de chubasco atmosférico de los rayos cósmicos (figura modificada de [8]).

interesantes, ya que a partir de ellas podemos obtener información sobre las condiciones electromagnéticas en la vecindad de la Tierra, el Sol y el medio interplanetario.

Aunque miles de rayos cósmicos atraviesan nuestros cuerpos cada minuto, los niveles de radiación resultantes son relativamente bajos. Sin embargo, la gran intensidad de los rayos cósmicos en el espacio exterior es un riesgo potencial de radiación para los astronautas [47].

### Los rayos cósmicos y el Sol

Antes de llegar a los límites de la magnetosfera terrestre, los rayos cósmicos galácticos deben atravesar el medio interplanetario, espacio ocupado por el viento solar, por ser éste un plasma de muy alta conductividad eléctrica, al expandirse “arrastra” consigo al campo magnético solar [15]. El espacio interplanetario no es un vacío por el cual las partículas de los rayos cósmicos puedan propagarse libremente; el viento solar “empuja” estas partículas hacia afuera del sistema solar, mientras que el campo magnético las guía hacia adentro. Estas dos fuerzas contrapuestas no son uniformes ni constantes en el tiempo, por lo que sus efectos en la intensidad de la radiación cósmica detectada en cualquier punto se manifiestan en forma de variaciones temporales.

Las variaciones en la intensidad de los rayos cósmicos tienen sus orígenes en el Sol. Por ser las más representativas, sólo se citarán tres de las variaciones observadas en la radiación cósmica: la variación diurna (figura 2.6), los decrementos Forbush y la variación de 11

años.

La **variación diurna**. Para explicar la variación diurna, primero debemos hablar de dos procesos importantes que relacionan la actividad solar con la intensidad de los rayos cósmicos los cuales son: (a) toda partícula cargada, al entrar a la heliósfera, ve afectado su movimiento por la presencia del campo magnético interplanetario (CMI), y (b) el CMI es “arrastrado” por el viento solar, que fluye hacia afuera del Sol. Las partículas cargadas se enfrentan a un flujo de variaciones del CMI que se mueve hacia afuera con el viento solar. Este proceso se conoce como **convección** .

Los rayos cósmicos están bajo la influencia de dos procesos: el flujo difusivo hacia adentro de la heliósfera y el flujo convectivo hacia afuera. En la figura 2.6 se representa esquemáticamente esta confrontación en la región entre el Sol y la Tierra. El flujo resultante (flujo neto) de los rayos cósmicos, como consecuencia de la difusión-convección, apunta desde una dirección cercana a las 18 horas, por lo que un detector registrará mayor cantidad de partículas provenientes de esa dirección. En consecuencia, la intensidad tendrá un máximo alrededor de esa hora (tiempo local). Unas 12 horas antes, el detector apuntaría en la dirección opuesta, desde donde es más difícil que provengan las partículas, por lo que la intensidad será mínima. El flujo de rayos cósmicos será distinto, dependiendo de la dirección en que apunte el detector que se utiliza. La intensidad máxima observada dependerá del balance entre el flujo difusivo y el convectivo.

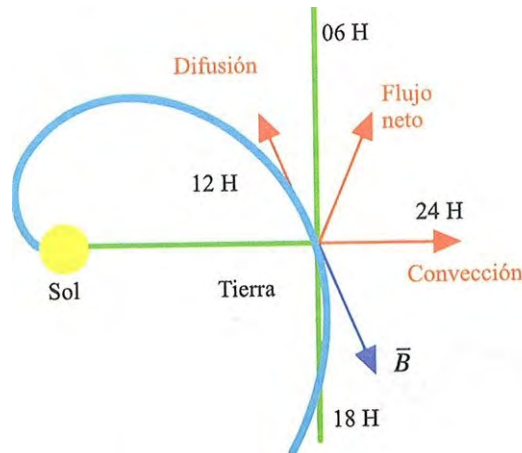


Figura 2.6: Representación de la variación diurna de los rayos cósmicos como una competencia entre los procesos difusión-convección [15].

Los **decrementos Forbush** son llamados así en honor del físico estadounidense Scott E. Forbush [20], quien dedicó buena parte de su actividad científica al estudio de las variaciones temporales de la radiación cósmica. El efecto Forbush es una de las variaciones temporales más drásticas que se observan en la radiación cósmica. En el lapso de unas cuantas horas la intensidad registrada en una estación particular puede verse reducida hasta en un 10 %, y en algunos casos 20 o 30 %; después de llegar a un mínimo, la intensidad empieza a recuperarse lentamente, lo cual puede durar desde unos días hasta semanas.

En contraste con la variación diurna, la presencia de los decrementos Forbush se siente de forma simultánea en todo el mundo.

Al principio se pensó que los decrementos Forbush estaban asociados a fenómenos puramente terrestres, como variaciones temporales del campo geomagnético [58], pero cuando fue posible hacer mediciones con satélites, fuera de la magnetosfera, se confirmó la presencia de estos decrementos más allá del ámbito terrestre.

La explicación mayormente aceptada para los decrementos Forbush es la que los asocia a la eyección coronal de plasma de grandes velocidades. Un plasma rápido, mucho más que el viento solar normal, puede provocar la formación de una onda de choque, la cual actúa como una “barredora” magnética, impidiendo parcialmente el paso de la radiación cósmica hacia la región que queda tras ella. A medida que esta onda de choque se aleja del punto de observación, menor será su influencia sobre las partículas que ahí llegan desde todas direcciones.

La **variación de 11 años**. Las condiciones magnéticas que prevalecen en la heliósfera son distintas a medida que el ciclo solar avanza y están relacionadas con el nivel de actividad del Sol. Durante periodos de “Sol quieto” la estructura del viento solar es simple. A medida que el ciclo solar avanza y la actividad se manifiesta de diversas maneras (ráfagas, eyecciones de masa coronal, etc.), las irregularidades presentes en el medio interplanetario aumentarán haciendo la estructura del viento solar cada vez más compleja. Estos cambios afectan el transporte de rayos cósmicos hacia las regiones interiores de la heliósfera a lo largo del ciclo solar de 11 años. Al aumentar el número de manchas, la intensidad de la radiación decrece y viceversa; la reducción total en el nivel de la radiación es de alrededor de 20 %, con algunas diferencias de ciclo a ciclo [15].

### Los rayos cósmicos solares

Los rayos cósmicos solares son partículas de alta energía originadas en la atmósfera solar por las ráfagas o la combinación de ésta con una eyección coronal de masa. Una ráfaga es una gran explosión del gas cromosférico, que puede durar desde unos cuantos minutos hasta una hora o más. Una eyección coronal de masa es la expulsión de una gran cantidad de materia solar que arrastra consigo el campo magnético y perturba en gran medida el medio interplanetario. Las eyecciones coronales de masa frecuentemente generan choques capaces de acelerar partículas cargadas [35].

Los rayos cósmicos solares son sólo una parte de las emisiones generadas en las ráfagas; principalmente se componen de protones y partículas alfa. Las energías de estas partículas van desde unos cuantos eV hasta los  $10^{10}$  eV, [81], en los eventos más energéticos; las emisiones que contienen partículas de energías hasta GeV solamente son unas cuantas en cada ciclo solar. Tanto su composición química como su espectro energético son distintos de los de la radiación cósmica galáctica.

Debido a la presencia del campo geomagnético, los rayos cósmicos solares son observados

sólo en raras ocasiones en la superficie de la Tierra; desde 1942, año en que se observaron por primera vez, y 2008, se han detectado 70 eventos de partículas solares.

### Teorías del origen de los rayos cósmicos

Desde el descubrimiento de los rayos cósmicos en 1912, múltiples han sido los intentos por explicar cómo es posible producir partículas cargadas de energías tan altas como las observadas en la radiación cósmica. Un número apreciable de investigadores han aportado ideas en este sentido y consideran diversas fuentes que van desde el Sol hasta los distantes núcleos activos de galaxias, y también han exhortado múltiples mecanismos de aceleración en cuya gama se incluye el acto original de la creación del universo [15].

### Los rayos cósmicos en México hasta 1958

Las investigaciones de los rayos cósmicos en México datan de principios de los 1930's con el trabajo de Manuel Sandoval Vallarta y sus estudiantes.

En una serie de artículos, Georges Lemaître y Sandoval Vallarta [36], [37], [39], [38] explicaron los efectos de latitud y acimut<sup>9</sup> descubiertos por J. Clay [11] y Arthur Holly Compton [14]: ellos mostraron que los rayos cósmicos, al verse afectados por el campo geomagnético, deben ser partículas cargadas, excluyendo la posibilidad de que sólo fueran rayos gama.

Una de las predicciones más importantes de los cálculos de Lemaître y Sandoval Vallarta fue el efecto asimétrico de este a oeste: el efecto del campo geomagnético no provoca sólo el acceso selectivo de las partículas a diferentes latitudes de acuerdo con su rigidez magnética, sino también la desviación de partículas en diferentes direcciones de acuerdo al signo de su carga eléctrica. Ellos predijeron que las partículas con carga positiva se desviarían al oeste y aquéllas con carga negativa se desviarían al este, como ya se había mencionado en la sección "El campo geomagnético y los rayos cósmicos". Sandoval Vallarta convenció a Compton de hacer nuevas mediciones en México para poner a prueba sus predicciones. Compton envió a su estudiante, el físico Luis W. Alvarez a conducir el experimento en las montañas alrededor de la Ciudad de México y en el techo del Hotel Genève; cerca del centro de la ciudad. A través de estos experimentos, Compton y Alvarez determinaron que había un exceso de alrededor de 10% en la intensidad de las desviaciones al oeste, lo que implicó que la radiación cósmica consistía principalmente de protones.

A partir de la década de los 1930's, durante sus frecuentes visitas a México, Sandoval Vallarta comenzó a formar un grupo de científicos interesados en la investigación de los rayos

---

<sup>9</sup>El acimut es el ángulo o longitud de arco medido sobre el horizonte celeste que forman el punto cardinal norte y la proyección vertical del astro sobre el horizonte del observador situado en alguna latitud. Se mide en grados desde el punto cardinal norte en el sentido de las agujas del reloj.

cósmicos. Entre los físicos prominentes que introdujo a este campo se puede mencionar a Jaime Lifshitz, Alberto Barajas, Carlos Graef y Alfredo Baños, por mencionar algunos.

En 1940, bajo la guía de Alfredo Baños, los jóvenes estudiantes Fernando Alba Andrade y Manuel I. Perrusquia construyeron un sistema giratorio de contadores Geiger para medir la intensidad de los rayos cósmicos respecto del acimut y la inclinación.

El 17 de Febrero de 1942, con motivo de la inauguración del Observatorio Astronómico de Tonatzintla en el estado de Puebla, se llevó a cabo el congreso Interamericano de Astrofísica . Una de las presentaciones estuvo a cargo de un grupo del Instituto de Física de la UNAM. Graef, Lifshitz, Uribe, Martínez y Baños discutieron la dinámica de las órbitas simétricas y periódicas de los rayos cósmicos en el campo magnético de la Tierra y las mediciones de la variación acimutal de la intensidad de los rayos cósmicos desde ángulos diferentes. Desafortunadamente, las memorias del congreso nunca se publicaron.

La investigación principal en los años 1954-1958 se centró en el albedo<sup>10</sup> de los rayos cósmicos.

## 2.2. El monitor de neutrones de la Ciudad de México

En 1954, J.A. Simpson de la Universidad de Chicago regaló a la UNAM un monitor de neutrones que fue instalado en el nuevo campus de Ciudad Universitaria.

En los comienzos de los 1960's, la UNAM adquirió un súper monitor de neutrones equipado con seis contadores proporcionales. En 1958, el centro para la investigación sobre los rayos cósmicos ya había sido trasladado al Instituto de Geofísica de la UNAM, donde un nuevo grupo fue organizado en 1962 por Ruth Gall, con el objetivo de desarrollar un programa dedicado a la ciencia espacial.

En la actualidad existe una red mundial de aproximadamente 55 estaciones que detectan radiación cósmica de baja energía ( $E < 500$  GeV). Una de estas estaciones está instalada en la Ciudad de México y se encuentra a cargo del Departamento de Ciencias Espaciales del Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México. En esta estación se detectan rayos cósmicos con energías desde 8 hasta aproximadamente 100 GeV, [72], con un instrumento que se conoce como **monitor de neutrones** el cual se observa en la figura 2.7.

El Monitor de Neutrones de la Ciudad de México entró en operación a mediados de 1989 debido, en su mayor parte, a los esfuerzos del ya fallecido Dr. Javier Otaola, investigador del Instituto de Geofísica. El instrumento estuvo en un período de prueba por varios meses, pero desde 1990 ha estado en operación continua.

---

<sup>10</sup>El albedo es el porcentaje de radiación que cualquier superficie refleja respecto a la radiación que incide sobre la misma.

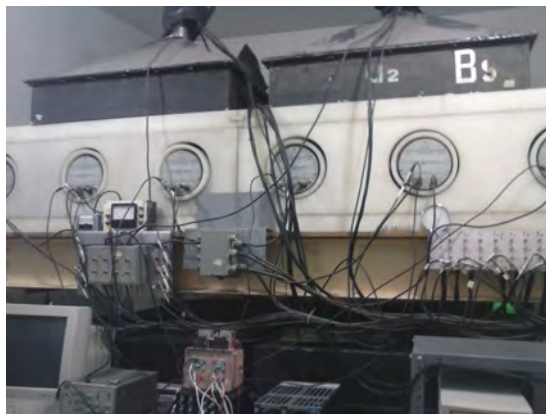
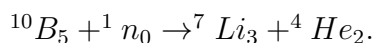


Figura 2.7: Monitor de neutrones de la Ciudad de México.

El monitor de neutrones consta de seis *tubos contadores proporcionales* (como se observa en la figura 2.7 sensibles a los neutrones, rodeados de un material moderador (la función del moderador es reducir las energías de los neutrones y dejarlos tan cerca del rango de las energías térmicas, aprox.  $\frac{1}{40}$  eV, como sea posible para aumentar la probabilidad de su detección) y un *productor* hecho de plomo; la función de este elemento es generar neutrones de evaporación y neutrones de baja energía mediante reacciones nucleares entre las partículas energéticas incidentes y el plomo e incrementar la probabilidad global de detección.

El monitor detecta neutrones casi térmicos que se producen localmente a partir de las partículas incidentes. Aun cuando los neutrones no dejan una traza de iones dentro del tubo contador, la absorción de un neutrón por un núcleo es seguida comúnmente por la emisión de partículas cargadas, las cuales pueden ser detectadas. Un tubo proporcional lleno con gas  $^{10}\text{BF}_3$ , donde  $\text{BF}_3$  es trifloruro de boro, enriquecido con el isótopo  $^{10}\text{B}$  responde a los neutrones mediante la reacción exotérmica<sup>11</sup>



El material moderador se escoge de manera que contenga una fracción significativa de hidrógeno a medida que la pérdida de energía por colisión elástica<sup>12</sup> de un neutrón se incrementa a medida que disminuye la masa atómica.

Rodeando al plomo se encuentra un moderador exterior, usualmente llamado reflector, el cual sirve para detener a los neutrones de baja energía producidos en interacciones dentro del plomo, así como para rechazar neutrones de baja energía no deseados provenientes del ambiente. En la figura 2.8 se observa un monitor de neutrones NM64 abierto, donde el polietileno es utilizado como reflector. Los tubos proporcionales se agrupan en secciones o módulos compuestos por dos o tres tubos cada uno, de manera que el número total de

<sup>11</sup>**Reacción exotérmica** es cualquier reacción química que desprende energía, ya sea como luz o como calor.

<sup>12</sup>La **colisión elástica** se define como aquella en la que no hay pérdida de energía cinética en la colisión.

tubos que componen el detector siempre sea un múltiplo de tres. En el caso del Monitor de Neutrones de la Ciudad de México, su diseño se identifica como 6-NM-64, por contar éste con seis tubos, agrupados en tres secciones de dos tubos cada una. Dichos tubos son del modelo estándar BP-28, fabricados por Chalk River Nuclear Laboratories de Canadá [79].

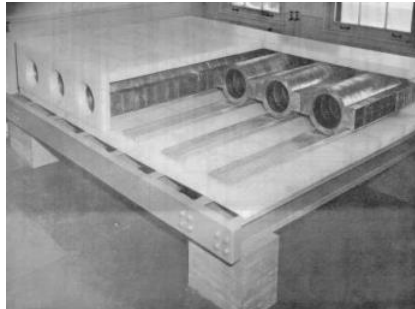


Figura 2.8: Un monitor de neutrones NM64 abierto, sin los tubos contadores. Se pueden observar los anillos de plomo y el polietileno utilizado como reflector [33].

El componente más inestable del monitor de neutrones es la atmósfera de la Tierra. La respuesta del detector depende de la masa de aire que se encuentra encima de él; por tanto, los cambios meteorológicos pueden afectar la razón de conteo. Aunque el diseño del monitor de neutrones está optimizado para detectar neutrones secundarios producidos en interacciones que ocurren principalmente en el productor, es necesario realizar correcciones debidas a dichos efectos atmosféricos [79].

### 2.2.1. Función de respuesta

Para entender al monitor de neutrones situado en tierra como detector de rayos cósmicos primarios se debe establecer una relación entre la tasa de conteo y el flujo primario. Las partículas primarias que no son rechazadas por el campo geomagnético entran a la atmósfera y sufren múltiples interacciones, las cuales resultan en cascadas atmosféricas de partículas secundarias (como se mencionó en la sección 2.1.2 en el apartado “Los rayos cósmicos en la atmósfera terrestre”) que pueden llegar hasta el suelo y ser detectadas por un monitor de neutrones. Por tanto, una *función de producción* debe incorporar la propagación de partículas en la atmósfera y la respuesta del monitor de neutrones a la detección de diversas partículas secundarias, como neutrones, protones y muones. La *función de respuesta* se puede determinar calculando la convolución<sup>13</sup> entre el espectro de los rayos cósmicos (ver sección 2.1.2) y la función de producción. La función de producción se determina calculando el número promedio de cuentas del detector por partícula primaria incidente, lo cual es esencialmente la eficiencia del monitor de neutrones respecto de las partículas primarias [79].

<sup>13</sup>La **convolución** de  $f$  y  $g$  se define como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas una distancia  $\eta$ . El intervalo de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones.

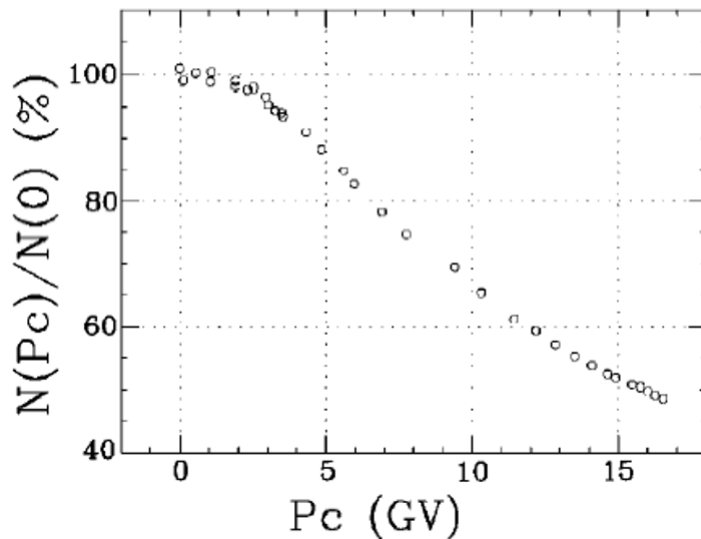


Figura 2.9: Tasas de conteo registrada durante el *Italian Antarctic Program* en 1996-97 [82].

La función de respuesta combina la eficiencia de la detección, el transporte atmosférico, la composición primaria, el espectro energético y el transporte geomagnético de las partículas.

La función integral de respuesta, es decir, la tasa de conteo, se mide directamente durante un levantamiento de latitud, que consiste en un viaje con un detector que registre los conteos mientras atraviesa un rango amplio de umbrales geomagnético [49]. Un ejemplo de tasas de conteo registradas durante un levantamiento de latitud se muestra en la fig. 2.9, en donde se observa una correlación fuerte con el umbral geomagnético.

La ecuación 2.1 representa la relación entre la tasa de conteo y la función de respuesta [13]:

$$N(P_c, z, t) = \int_{P_c}^{\infty} \sum_i (S_i(P, z) j_i(P, t)) dP = \int_{P_c}^{\infty} W_T(P, z, t) dP, \quad (2.1)$$

donde  $N(P_c, z, t)$  es la tasa de conteo del monitor de neutrones,  $P_c$  es el umbral geomagnético<sup>14</sup>,  $z$  es la profundidad atmosférica<sup>15</sup> y  $t$  representa el tiempo.  $S_i(P, z)$  es la función de producción de partículas primarias del tipo  $i$ ,  $j_i(P, t)$  representa el espectro de las partículas primarias de tipo  $i$  en el tiempo  $t$  y  $W_T(P, z, t)$  es la función total de

<sup>14</sup>El umbral geomagnético es un parámetro que describe el acceso de las partículas cargadas a través del campo magnético terrestre.

<sup>15</sup>Si estamos sobre el nivel del mar podemos decir también que estamos en el fondo de un océano de aire, a lo que llamamos profundidad atmosférica, la cual está relacionada con la presión atmosférica que es la fuerza por unidad de superficie que ejerce el aire sobre la superficie terrestre y varía según la latitud.



respuesta [79].

Se debe enfatizar que el umbral geomagnético  $P_c$  y la función de producción  $S_i(P, z)$  dependen de la dirección de incidencia de las partículas primarias. El umbral vertical suele bastar como una cota inferior para el espectro de rigidez primario.

La función total de respuesta tiene un valor máximo en el rango de 4 a 7 GeV al nivel del mar, dependiendo de la modulación solar en la época  $t$ . El levantamiento de latitud solamente provee la función de respuesta en el tiempo en que se lleva a cabo dicho levantamiento, pues se sabe que el espectro primario está correlacionado con el ciclo solar magnético de 22 años y también está sujeto a efectos transitorios como los decrementos Forbush y los eventos de partículas energéticas solares ([13] y referencias contenidas).

Tres métodos para determinar la función de respuesta de un monitor de neutrones son: a) parametrización de observaciones hechas en levantamientos de latitud, b) cálculo teórico y c) simulación de Monte Carlo del transporte de los rayos cósmicos a través de la atmósfera y del detector [12]. La fig. 2.10 muestra una comparación entre varias funciones de respuesta obtenidas mediante el método de parametrización y el de Monte Carlo.

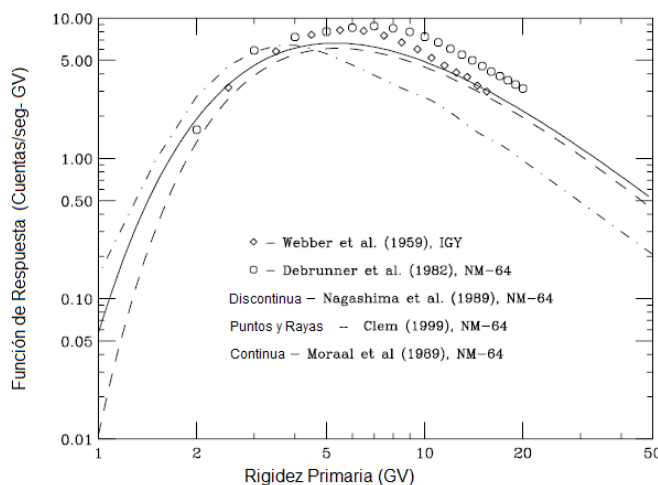


Figura 2.10: Comparación de varias funciones de respuesta para el nivel del mar durante un mínimo solar. Las curvas de Webber y Quenby(1959), Moraal *et al.* [49] y Nagashima *et al.* [52], fueron determinadas por el método de parametrización, mientras que las de Debrunner *et al.* [16] (1982) y Clem (1999) provienen de simulaciones de Monte Carlo [12].

# Capítulo 3

## Análisis, resultados y conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados y conclusiones que se obtuvieron al realizar un análisis fractal a la serie de tiempo que se construyó con los datos del monitor de neutrones tomados de la página web <http://www.cosmicrays.unam.mx/> desde 1990 hasta febrero de 2013.

Primeramente se detallará cómo se construyó la serie de tiempo estudiada. El proceso consistió en una limpieza de los datos debido a la presencia de datos nulos, espurios y a efectos temporales que afectan la intensidad de los rayos cósmicos, como son los decrementos Forbush y las condiciones geomagnéticas perturbadas.

Luego, se mencionará el método de interpolación que se usó y a continuación se dará una descripción del software comercial BENOIT que se utilizó para realizar el estudio del espectro de potencias.

### 3.1. Construcción de la serie de tiempo

Para construir la serie de tiempo se tomaron los datos diarios desde del 1 de enero de 1990 hasta el 28 febrero de 2013 del servidor del monitor de neutrones de la Ciudad de México (<http://www.cosmicrays.unam.mx/>). Luego, se eliminaron todos los datos nulos y espurios (para estos últimos se tomó el criterio de eliminar los que tuvieran una diferencia mayor del 2% respecto de los 10 días contiguos) así como los registros que fueron afectados por los decrementos Forbush o condiciones geomagnéticas altamente perturbadas las cuales se determinan por medio del índice geomagnético Kp (ver Apéndice A) y se tomó el criterio de eliminar todos los datos que correspondían a fechas en las que hubo un índice Kp igual o mayor a 40.0; los valores del índice Kp se descargaron del servidor ftp del *National Geophysical Data Center* NGDC-NOAA ([ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC\\_DATA/INDICES/KP\\_AP/](ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/GEOMAGNETIC_DATA/INDICES/KP_AP/)).

Los datos espurios son los datos que registra el monitor de neutrones cuando este puede tener alguna falla, por lo que los datos registrados en ese momento no son ciertos por lo tanto fueron eliminados para que nuestra serie de tiempo sea más confiable. Los decrementos Forbush y el índice geomagnético Kp, también fueron eliminados debido a que son efectos temporales de corto plazo y a nosotros nos interesan los de largo plazo. En particular eliminamos los Kp igual o mayor a 40.0 por que esto indica actividad en el campo geomagnético o tormentas geomagnéticas<sup>1</sup>.

Las fechas en que hubo decrementos Forbush se tomaron de Musalem ([51], tesis de maestría, en preparación, y comunicación personal). Como se mencionó en la subsección 2.1.2 el decremento Forbush es una de las variaciones temporales más drásticas por lo que la intensidad de los rayos cósmicos se recupera lentamente lo cual puede durar varios días; por lo tanto, se eliminaron todos los datos de los días siguientes a la fecha señalada en la tesis [51] hasta eliminar el pico producido por dicha variación temporal.

Para reconstruir los datos faltantes o que fueron eliminados debido a los criterios anteriores se usó una interpolación con *splines* cúbicos. En algunos casos un dato diario con valor igual a cero pudo ser reconstruido a partir de los datos horarios, siempre que se hubiesen registrado al menos 12 de ellos. En la figura 3.2 se observa la serie de tiempo que resultó después de la limpieza que se le hizo a los datos del monitor de neutrones de la Ciudad de México.

En la siguiente sección se dará una breve descripción de la interpolación *spline* cúbica que se utilizó para obtener la serie de tiempo.

### 3.1.1. Interpolación por splines cúbicos

La **interpolación** es un proceso para estimar valores que se encuentran entre puntos (datos) conocidos [22]. Es decir, a partir de  $n$  parejas de puntos  $(x_k, y_k)$ , se construye una función que ajuste los puntos

$$S(x_k) = y_k \text{ para toda } k = 1, \dots, n.$$

A los puntos  $x_k$  se les nombra **nodos**.

Una forma de realizar la aproximación de funciones en un intervalo cerrado es usando un solo polinomio, sin embargo el uso de polinomios de grados altos puede oscilar erráticamente, esto es, una fluctuación menor sobre un subintervalo pequeño puede inducir una fluctuación grande sobre todo el intervalo, introduciendo así frecuencias espurias en una serie de tiempo. Un enfoque alternativo es dividir el intervalo de aproximación en una colección de subintervalos y construir un polinomio por cada subintervalo. Esto se denomina **aproximación polinomial por trozos**.

---

<sup>1</sup>El término tormenta se refiere a los efectos geomagnéticos de una tormenta magnetosférica, la cual es cualquier perturbación prolongada del campo geomagnético debida a variaciones en el viento solar (ver sección 2.1.1).

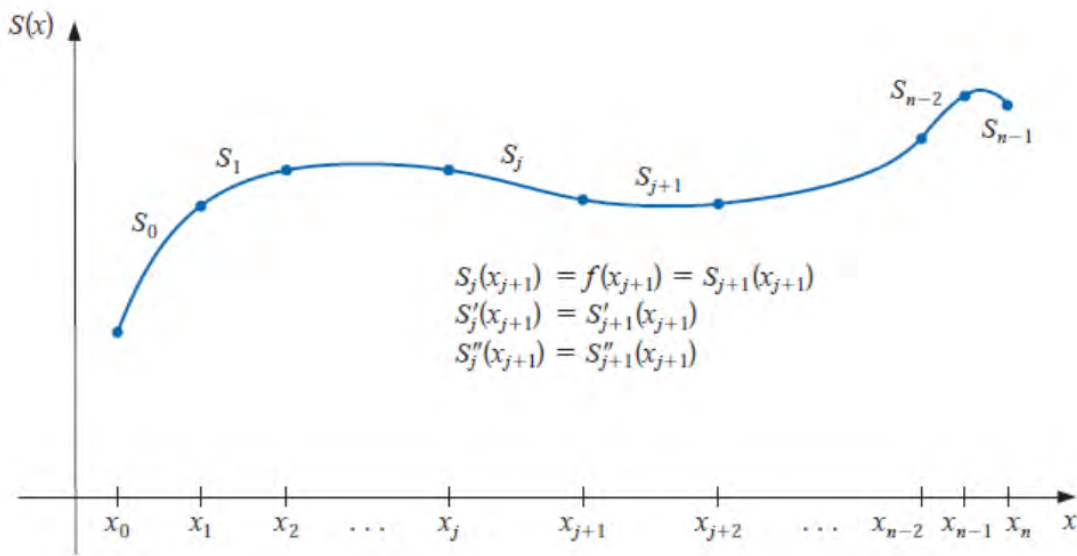


Figura 3.1: Ilustración de la definición de spline cúbica. Figura tomada de [10].

La aproximación polinómica por trozos más común utiliza polinomios cúbicos entre cada par sucesivo de nodos y se llama **interpolación spline cúbica**. Un polinomio cúbico en general contiene cuatro constantes, por lo tanto existe suficiente flexibilidad en el procedimiento del spline cúbico para asegurar que la función obtenida al interpolar no sólo es continuamente diferenciable en el intervalo, sino también tiene segunda derivada continua [10].

**Definición:** Dada una función  $f$  definida en  $[a, b]$  y un conjunto de nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , una **interpolación spline cúbica**  $S$  para  $f$  es una función que satisface las siguientes condiciones (ver fig.3.1) [10]

- a)  $S(x)$  es un polinomio cúbico, denotado  $S_j(x)$ , en el subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- b)  $S_j(x_j) = f(x_j)$  y  $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- c)  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
- d)  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
- e)  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
- f) Uno de los siguientes conjuntos de condiciones a la frontera se satisfacen:
  - i)  $S'''(x_0) = S'''(x_n) = 0$  (**condición a la frontera natural o libre**);
  - ii)  $S'(x_0) = f'(x_0)$  y  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (**condiciones a la frontera fijas**).

Cuando las condiciones a la frontera naturales ocurren, el spline es llamado un **spline natural** y su gráfica se aproxima a la forma de una varilla flexible que tuviera que pasar

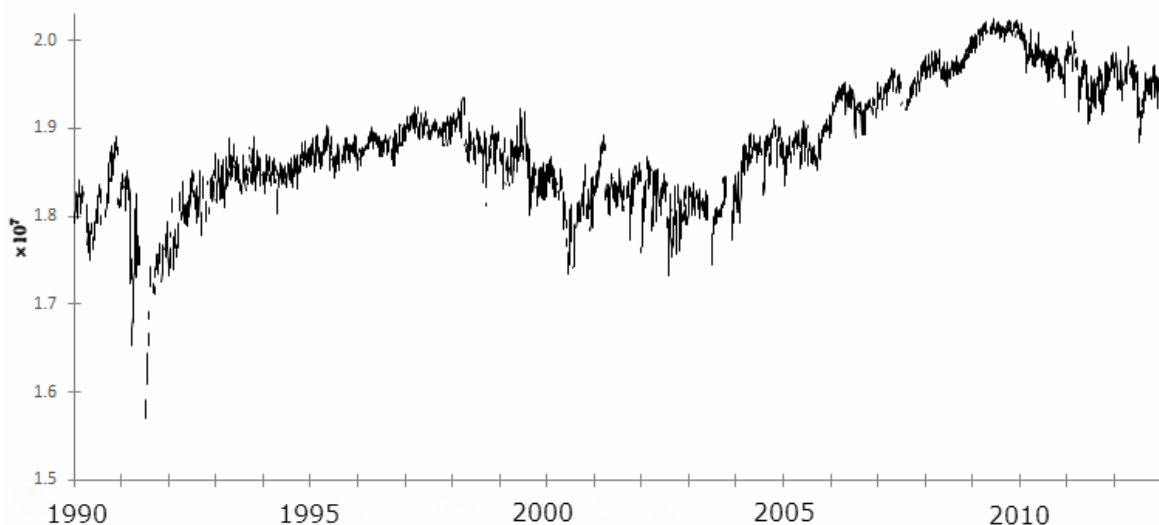


Figura 3.2: Datos desde 1 de enero de 1990 hasta 28 de febrero de 2013 antes de interpolar.

por los puntos de datos  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ .

En general, las condiciones a la frontera fijas conducen a una aproximación más precisa debido a que incluyen más información acerca de la función. Sin embargo, para este tipo de condiciones a la frontera es necesario tener los valores de la derivada en los puntos finales o una aproximación a ellos.

En el caso de este trabajo se usó un spline natural. En la figura 3.2 se observa la serie de tiempo con sus respectivos huecos que se obtuvieron al hacer la limpieza de los datos y en la figura 3.3 se muestra la serie de tiempo que se obtuvo después de hacer la interpolación.

## 3.2. Análisis de los datos

Se procedió a realizar un análisis espectro de potencias a la serie de tiempo con interpolaciones cuya gráfica aparece en la figura 3.3 para obtener las frecuencias que estuvieran contenidas en la serie. Al mismo tiempo este análisis dio el valor de la dimensión fractal y el valor del exponente de Hurst. También, a partir de la serie diaria se calcularon medias mensuales buscando con ello reducir el ruido en el espectro. Para realizar dicho análisis se utilizó el software BENOIT 1.31 cuya operación se describirá a continuación.

### 3.2.1. Software BENOIT

BENOIT (ver figura 3.4) es un programa informático de análisis fractal utilizado para determinar el orden y patrones en datos aparentemente caóticos. Es ampliamente utilizado

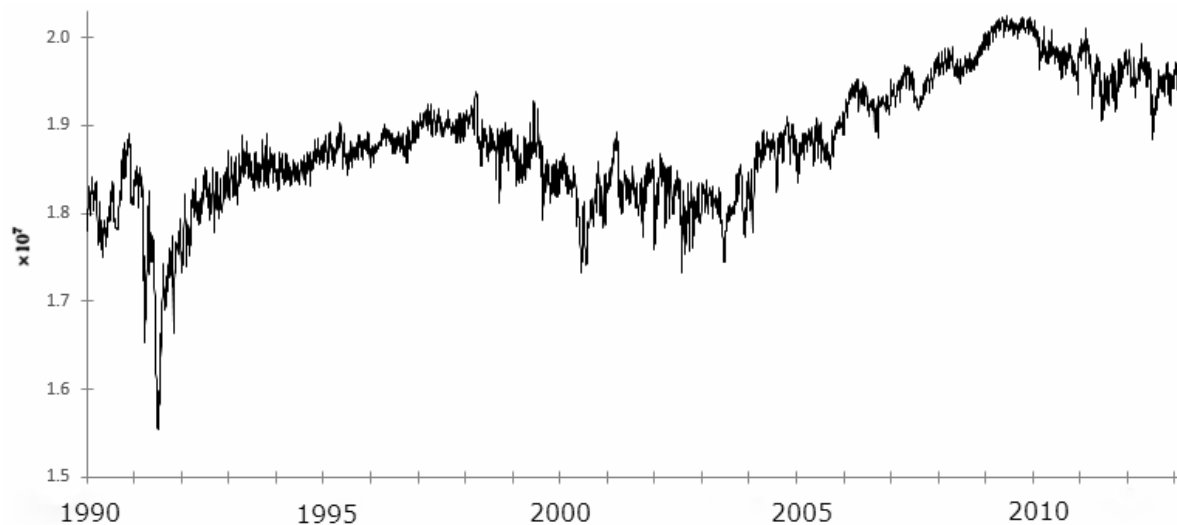


Figura 3.3: Serie de tiempo desde el 1 de enero de 1990 hasta el 28 de febrero 2013 con interpolaciones.

en disciplinas tan diversas como la biología, la química, la física, la economía, la medicina, y la geología [67]. BENOIT es un programa que permite medir la dimensión fractal y el exponente de Hurst de los conjuntos de datos introducidos utilizando los métodos para el análisis de patrones de auto-semejanza y trazos autoafines.

BENOIT representa los datos suministrados por el usuario en una gráfica log-log, y la dimensión fractal del conjunto de datos se calcula a partir de la pendiente de la recta de ajuste resultante en dicho espacio log-log. Se debe seleccionar uno de los 11 métodos de análisis disponibles en el software. Cinco de ellos se clasifican como métodos de autosemejanza o de dos dimensiones (2D), mientras que los restantes actúan sobre series de tiempo de 1D.

Los métodos de autosemejanza disponibles en BENOIT miden características invariantes en escala. Un conjunto de datos reales normalmente tiene un *límite fractal*, y más allá de ese límite, la dimensión fractal devuelve un valor trivial (1 para las series de tiempo y 2 para figuras geométricas). Los límites superiores e inferiores fractales dependen del tamaño del conjunto de datos.

Los datos de una dimensión utilizan métodos de análisis de autoafinidad. En el método de *rugosidad-longitud* (roughness-length), la variación de la raíz cuadrada de la media o la rugosidad de los datos se calcula para una variedad de escalas horizontales. La operación proporciona una estimación en una gráfica log-log del exponente de Hurst, el cual está relacionado con la dimensión fractal, como se explicó en la sección 1.1.5. Los métodos autoafines estándar disponibles son análisis *R/S*, *Power-spectrum*, *Roughness-length*, *Variogram* y *Wavelets* (ver figura 3.4) [67].

Para el análisis de frecuencias de nuestros datos usamos el método de espectro de potencias (*power-spectrum*).

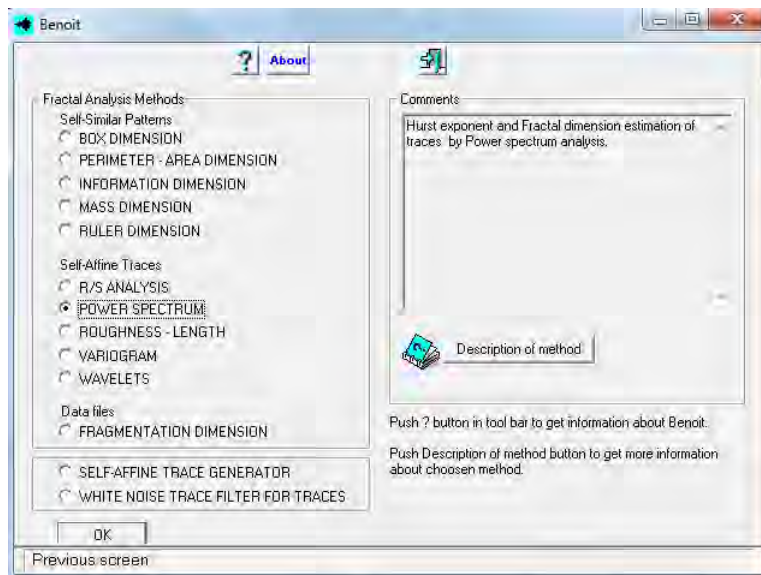


Figura 3.4: Patalla principal del software BENOIT.

### Parámetros del espectro de potencias en BENOIT

*Averaging*: Esta opción proporciona una mejora en la técnica de estimación espectral donde el promedio de los periodogramas obtenidos en intervalos logarítmicos iguales del conjunto de datos suaviza el ruido.

*Number of intervals*: Este es el número de intervalos logarítmicos iguales en el que las frecuencias de Fourier se dividen. El valor medio del espectro de potencias se calcula en cada intervalo. Una línea recta se ajusta luego a los valores medios no al propio periodograma. El número mínimo de intervalos es 2; el máximo es igual al número de puntos de datos dividido por 4. El valor predeterminado es el número de puntos analizados entre 100 o es 50, lo que sea mayor. Esta casilla sólo se acciona si la opción averaging está activada.

*Apply taper function*: La disminución gradual o ahusamiento (una función que va suavemente a cero en los extremos) es completada al multiplicar la serie de datos por una función que va suavemente a cero en los extremos. Los algoritmos de la transformación rápida de Fourier asumen que la serie es periódica, es decir, su punto final está conectado con el punto inicial. Por lo tanto la disminución gradual se debe hacer para evitar los efectos en los extremos y minimizar la fuga espectral. La fórmula de la función de disminución gradual es desplegada en el cuadro de diálogo.

*Remove linear trend*: Esta opción elimina cualquier tendencia lineal media en el seguimiento de los datos.

*Taper function*: Esta es la fórmula para la función de ahusamiento que se multiplica por la traza de la serie de datos de modo que su punto extremo está conectado a su punto de partida [70].

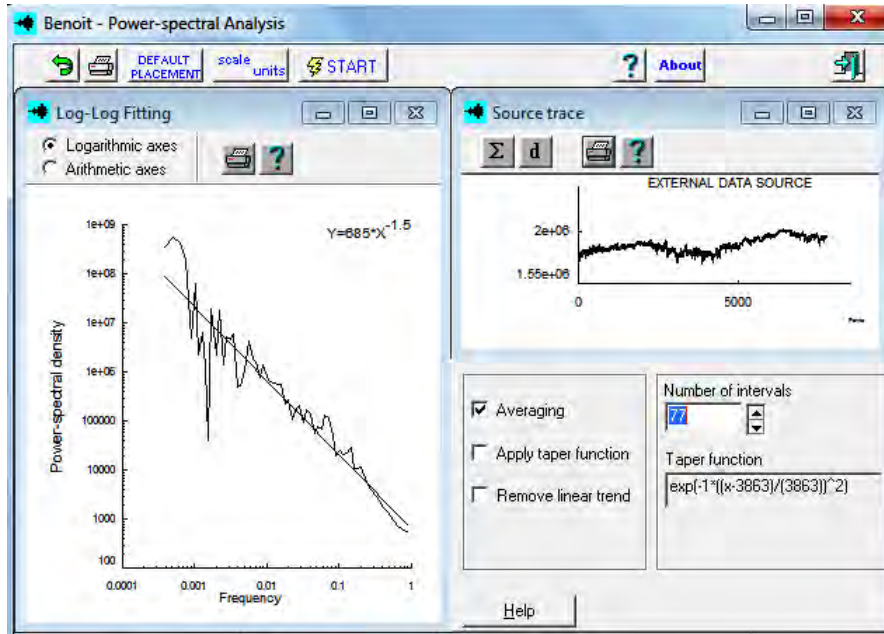


Figura 3.5: Serie de datos desde 1 enero 1992 a 28 de febrero de 2013 con análisis power-spectrum.

### 3.3. Resultados y Conclusiones

Para tener una referencia de las periodicidades encontradas mediante el análisis fractal primero realizamos un análisis de Fourier clásico a la serie de tiempo de los promedios mensuales basado en la transformada discreta de Fourier usando el software Period04. V.1.2.0, el cual es un programa especialmente dedicado al análisis estadístico de grandes series de tiempo, que posiblemente contienen huecos. Este análisis de los promedios mensuales del detector produjo nueve modos de oscilación significativos (ver tabla 3.12) en el periodo 1992-2013, cuya curva superpuesta se muestra en la figura 3.7. Así también se hizo la comparación con el método de wavelet realizado a la serie de tiempo usando la función de Morlet ([41], tesis en elaboración). Los dos primeros años no se tomaron en cuenta debido a la baja intensidad de los rayos cósmicos en junio de 1991 lo cual produce una interferencia muy fuerte que afecta a todo el espectro de las frecuencias (ver figura 3.6). Este fenómeno se pone de manifiesto en el análisis *wavelet* [80] y [41].

Al hacer el análisis de espectro de potencias a las series de datos diarios y mensuales (figuras 3.8 y 3.9 respectivamente) se observan alrededor de 10 picos significativos correspondientes a los periodos descritos en la tabla 3.11.

Para realizar el cálculo de las frecuencias con el análisis se siguió el siguiente método: Primero se analizan los picos debido a que éstos nos indican las periodicidades de las frecuencias como se mencionó en el apartado 1.2. Luego, se obtuvo la probabilidad de encontrar esa frecuencia en toda la serie, en la figura 3.10 se muestra que el pico señalado tiene probabilidad 0.0009006, después hay que dividir la probabilidad total, 1, entre



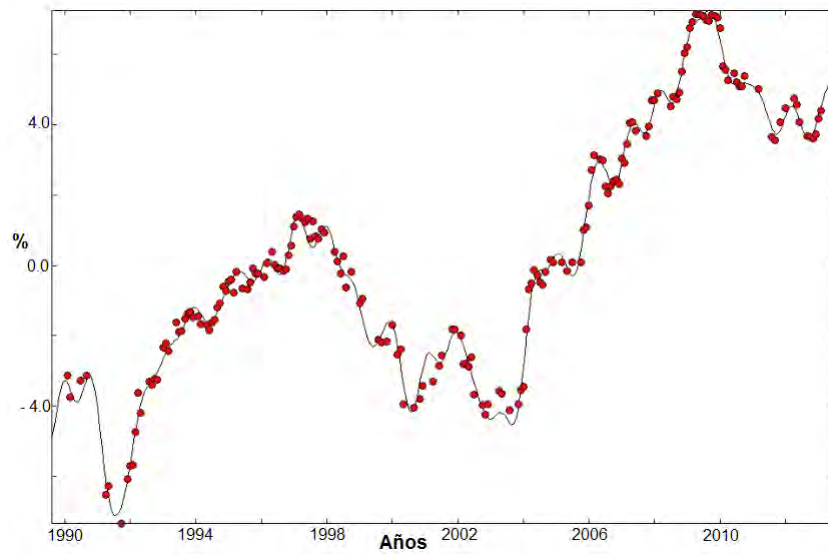


Figura 3.6: Ajuste mediante una transformada discreta de Fourier para el promedio mensual de 1990-2013.

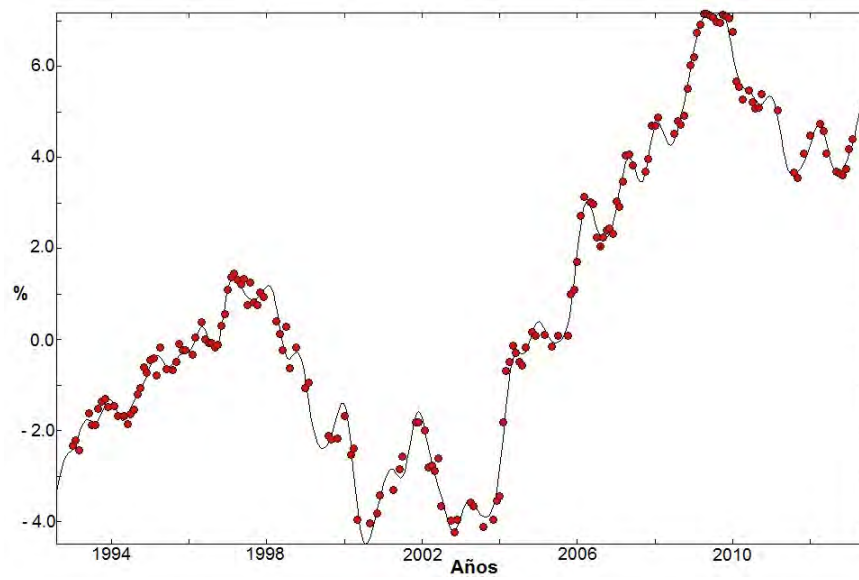


Figura 3.7: Ajuste mediante una transformada discreta de Fourier para el promedio mensual de 1992-2013.

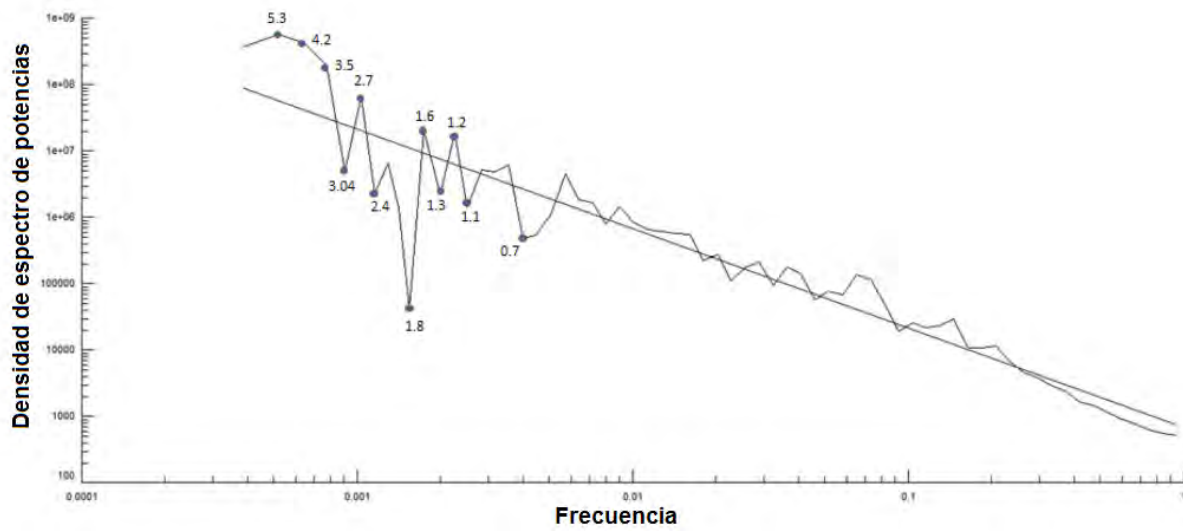


Figura 3.8: Espectro fractal de 1992-2013, datos diarios. Exponente de Hurst=0.250.

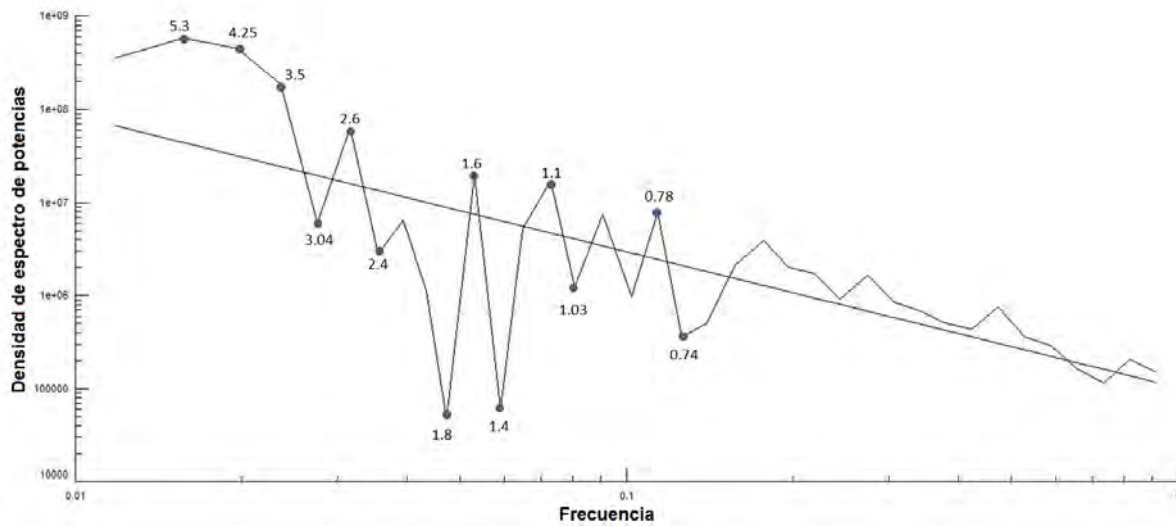


Figura 3.9: Espectro fractal de 1992-2013, datos mensuales. Exponente de Hurst=0.228.

el valor obtenido,  $\frac{1}{0,0009006} = 1110.37086$ , y finalmente este último valor se dividió entre la resolución, en este caso la resolución es de 365 por ser la serie de tiempo diaria,  $1110,37086/365 = 3.042$ , la cual es la frecuencia número 2 que aparece en la tabla 3.11.

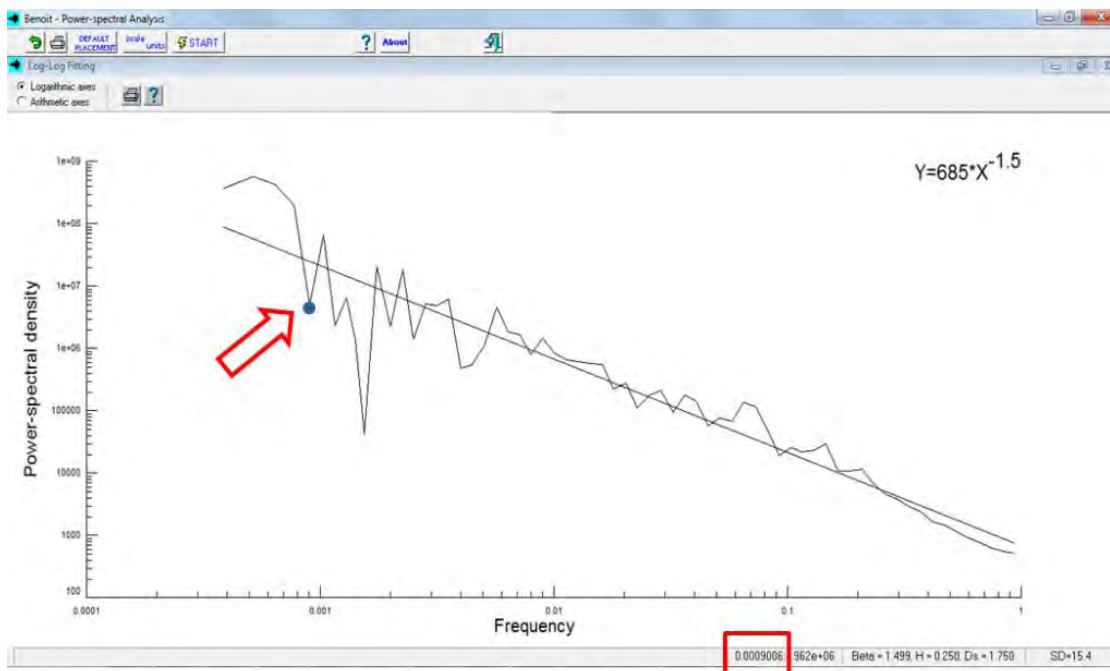


Figura 3.10: En la imagen se muestra la probabilidad que tiene el pico señalado en la serie de tiempo diaria.

El algoritmo se rompe poco después del pico correspondiente al período de 5.3 años, lo que hace que no se pueda validar la periodicidad de 12.33 años (sin embargo sí se consiguió validar con el análisis *wavelet* [80]), pero todas las otras periodicidades son consistentes con las enumeradas en la tabla 3.12, nuestros resultados convalidan los resultados del análisis de Fourier y viceversa.

La periodicidad de 12.33 años que se encuentra en el espectro de Fourier corresponde claramente a los 11 años de oscilación solar [65] y [63]. Las periodicidades de 5.3-3.5  $(3.9)^2$  y 2.7 (2.81) junto con el de 3.04, debido a que pueden corresponder a un único modo de oscilación que posee una evolución particular en el tiempo [60], se interpretan como los terceros y cuartos armónicos de la periodicidad de 11 años [60] y ([29] y referencias contenidas); aunque el segundo armónico de 5,5 años no aparece podría explicarse por el hecho de que esta periodicidad parece ser más fuerte en las fases de descomposición de los ciclos solares<sup>3</sup>.

La periodicidad de 2.4 (2.3) años puede ser identificada como una oscilación cuasi-bienal

<sup>2</sup>Las periodicidades que se encuentran en paréntesis son las que se encontraron con el análisis de Fourier.

<sup>3</sup>Además esta se encuentra fuera del cono de influencia en el espectro *wavelet* [80].

	Diarios (Años)	Mensuales (Años)
1	5.3-3.5	5.3-3.5
2	3.04	3.04
3	2.7	2.6
4	2.4	2.4
5	1.8	1.8
6	1.6	1.6
7	1.4	1.4
8	1.2	1.1
9	1.1	1.03
10	0.7	0.78
11	-	0.74

Figura 3.11: Periodicidades significativas encontradas con el análisis de espectro de potencia del software BENOIT en las series de tiempo diarias y mensuales del monitor de neutrones de la Ciudad de México de 1992 a 2013.

Núm.	Amplitud [%]	Frecuencia [ciclos/año]	Período [años]	Fase [años]
1	3.03	0.08	12.33	0.28
2	0.75	0.26	3.90	0.82
3	0.58	0.36	2.81	0.24
4	0.58	0.43	2.31	0.97
5	0.48	0.58	1.72	0.72
6	0.48	0.99	1.01	0.74
7	0.41	0.65	1.53	0.15
8	0.37	0.80	1.25	0.62
9	0.24	1.62	0.62	0.50

Figura 3.12: Modos de oscilación importantes encontrados mediante un ajuste con la transformada de Fourier a los promedios mensuales de enero de 1990 a febrero de 2013 del monitor de neutrones de la Ciudad de México, ordenados por amplitud.

(QBO<sup>4</sup> por sus siglas en inglés) uno de los modos de oscilación fundamentales propuestos para los dinamos solares (ver la sección 2.1.1) [6], [7], y por lo tanto los períodos de 1.1 y 0.7 (1.01 y 0.62) años podrían interpretarse como su segundo y tercer armónicos, aunque la periodicidad de 1.1 años también podría corresponder a una oscilación solar independiente de  $0.97 \pm 0.06$  años reportada en [60].

La periodicidad de 1.8 (1.72) años corresponde a la bien conocida variación de 1.68 años de los rayos cósmicos [75], que parece estar estrechamente relacionada con fenómenos enraizados en la zona convectiva del Sol y que se reflejan en la circulación meridional de las manchas solares y los movimientos de altas latitudes meridionales [76].

El período de 1.6 (1.53) años puede ser identificado como una periodicidad de mediano plazo que se encuentra en el espectro de coherencia entre las series de tiempo de alta frecuencia de las manchas solares y el flujo solar magnético abierto ([78] y referencias

<sup>4</sup>QBO es una oscilación cuasi-periódica entre los vientos del este y del oeste en la zona tropical de la estratósfera con un período medio de 28 a 29 meses.

contenidas). Por último, el período de 1.2 (1.25) años, el cual parece estar fusionado con el de 1.1 debido a que sus fases son semejantes [80], y el período de 1.4 pueden corresponder a un único modo de oscilación que posee una evolución particular en el tiempo [60]. Este modo de oscilación puede interpretarse como la periodicidad de 1.3 años [34] detectada en la tasa de rotación solar ecuatorial en la base de la zona convectiva [26], [50], que está presente en varios índices de actividad solar, viento solar y geomagnéticos [32], [77].

## Conclusiones

La señal del monitor de neutrones de la Ciudad de México, durante el período de enero de 1990 a febrero de 2013 contiene los siguientes términos periodicos: 12.33, 5.3-3.5, 2.7, 2.4, 1.8, 1.1, 1.6, 1.2 y 0.7 (3.90, 2.81, 2.31, 1.72, 1.53, 1.25, 1.01 y 0.62) años.

De las periodicidades anteriormente mencionadas sólo 12.33, 2.4, 1.8 y 1.6 (2.31, 1.72, y 1.53) años parecen estar bien definidas y están asociadas con fenómenos solares fundamentales. La naturaleza de las oscilaciones de 1.1 y 1.2 es necesario aclararlas aún más. El resto son probablemente los armónicos de las periodicidades de 12.33 y 2.4 años.

La dimensión fractal que se obtuvo con el software BENOIT en los datos diarios fue de  $1.75 \pm 0.022$  y en los promedios mensuales se obtuvo una dimensión fractal de 1.772. Por otro lado se obtuvo  $\beta = 1.499 \pm 0.043$  para la serie de tiempo diaria y  $\beta = 1.456$  para los promedios mensuales y de acuerdo con la ecuación (1.29) se obtienen las mismas dimensiones fractales respectivamente por lo que los datos son consistentes. Por otro lado observamos que las gráficas de la serie de tiempo diaria y los promedios mensuales tienen dimensión topológica  $D_T = 1$ , luego,  $D > D_T$  por lo que de acuerdo con la definición de Mandelbrot (ver sección 1.1.5) las trazas son fractales y además son autoafines.

En los datos diarios y en los promedios mensuales obtuvimos un exponente de Hurst igual a  $0.25 \pm 0.022$  y 0.228, respectivamente. Aplicando las ecuaciones (1.30) y (1.13) (de esta última se obtiene que  $H = 2 - D$ ) se llega a los mismos valores de  $H$  por tanto los resultados son consistentes. Debido a que el valor de ambos exponentes es menor que 0.5 significa que las dos series (diaria y mensual) son antipersistentes, es decir, existe una correlación negativa entre sus respectivos incrementos y debido a que  $H$  está más cerca a cero la serie es más rugosa.

Todos los resultados se presentaron en el 33<sup>a</sup> Conferencia Internacional de Rayos Cósmicos, en Río de Janeiro en el año 2013 en la sección de Sol y heliósfera. El cartel fue presentado por el tutor del presente trabajo Bernardo Vargas Cárdenas.

# Apéndice A

## Índice geomagnético Kp

El índice planetario oficial Kp fue introducida por J. Bartels en 1949 y se deriva mediante el cálculo de una media ponderada del índice K de 13 observatorios magnéticos. Dado que estos observatorios no reportan sus datos en tiempo real, los diferentes centros de operaciones en todo el mundo estiman el índice basandose en los datos disponibles de la red local de observatorios. La escala Kp es una forma razonable de resumir el nivel global de la actividad geomagnética [54].

El índice K cuantifica las fluctuaciones máximas de los componentes horizontales observados en un magnetómetro<sup>1</sup> con relación a un día tranquilo, durante un intervalo de tres horas con un número entero en el rango de 0-9 con 1 siendo calmado y 5 o más indica una tormenta geomagnética [79]. La tabla de conversión para el magnetómetro de Boulder se muestra a continuación:

K	nT
0	0-5
1	5-10
2	10-20
3	20-40
4	40-70
5	70-120
6	120-200
7	200-330
8	330-500
9	>500

Figura A.1: Tabla de conversión de fluctuación máxima (nT) a índice-K, [55].

El **Tesla**,  $T$ , es la unidad de inducción magnética<sup>2</sup> (o densidad de flujo magnético) del

---

<sup>1</sup>Se llaman **magnetómetros** a los dispositivos que sirven para cuantificar en fuerza o dirección la señal magnética de una muestra.

<sup>2</sup>La **inducción magnética** es el flujo magnético que causa una carga eléctrica en movimiento por cada unidad de área normal a la dirección del flujo.

Sistema Internacional de Unidades y un nanotesla ,  $nT$ , es  $10^9 T$

# Apéndice B

## Fechas de datos modificados

Cuadro B.1: Fechas con  $K_p \geq 40.0$

21/03/1990	30/03/1990	10/04/1990	11/04/1990	12/04/1990	12/06/1990
13/06/1990	14/06/1990	28/07/1900	29/07/1990	22/08/1990	23/08/1990
26/08/1990	24/03/1991	25/03/1991	26/03/1991	29/04/1991	01/06/1991
02/06/1991	05/06/1991	09/06/1991	10/06/1991	11/06/1991	12/06/1991
13/06/1991	09/07/1991	13/07/1991	14/07/1991	19/08/1991	20/08/1991
02/10/1991	27/10/1991	28/10/1991	29/10/1991	31/10/1991	01/11/1991
08/11/1991	09/11/1991	19/11/1991	21/11/1991	02/02/1992	03/02/1992
09/02/1992	20/02/1992	21/02/1992	25/02/1992	27/02/1992	10/05/1992
11/05/1992	09/09/1992	10/09/1992	17/09/1992	29/09/1992	31/01/1993
09/03/1993	24/03/1993	05/04/1993	04/06/1993	16/08/1993	13/09/1993
04/11/1993	06/02/1994	07/02/1994	08/02/1994	11/02/1994	21/02/1994
07/03/1994	08/03/1994	09/03/1994	03/04/1994	04/04/1994	06/04/1994
09/04/1994	17/04/1994	30/05/1994	03/10/1994	23/10/1994	30/10/1994
07/04/1995	04/10/1995	02/05/1998	03/05/1998	04/05/1998	27/08/1998
25/09/1998	19/10/1998	09/11/1998	13/11/1998	18/02/1999	22/10/1999
12/02/2000	07/04/2000	24/05/2000	15/07/2000	12/08/2000	18/09/2000
04/10/2000	05/10/2000	20/03/2001	31/03/2001	03/10/2001	22/10/2001
06/11/2001	24/11/2001	18/04/2002	19/04/2002	20/04/2002	01/10/2002
04/10/2002	24/10/2002	02/02/2003	29/05/2003	30/05/2003	18/06/2003
11/07/2003	18/08/2003	21/08/2003	17/09/2003	18/09/2003	14/10/2003
21/10/2003	29/10/2003	30/10/2003	31/10/2003	11/11/2003	13/11/2003
20/11/2003	22/01/2004	25/07/2004	27/07/2004	08/11/2004	09/11/2004
10/11/2004	17/01/2005	18/01/2005	19/01/2005	08/05/2005	15/05/2005
30/05/2005	10/07/2005	24/08/2005	11/09/2005	12/09/2005	14/04/2006
15/12/2006	09/03/2012	15/07/2012			



Cuadro B.2: Fechas con datos espurios

18/07/1991	19/07/1991	27/02/1992	10/05/1992	10/03/1993
01/01/1994	02/01/1994	17/01/1994	18/01/1994	19/01/1994
21/01/1994	05/06/1994	22/08/1994	02/07/1995	30/01/1997
31/01/1997	18/02/1997	19/02/1997	01/07/1997	02/07/1997
03/07/1997	04/07/1997	22/08/1997	27/08/1997	01/09/1997
28/09/1997	11/11/1997	12/11/1997	14/11/1997	20/11/1997
09/09/1998	18/09/1998	19/09/1998	29/09/1998	02/10/1998
04/10/1998	05/10/1998	07/10/1998	08/10/1998	10/10/1998
14/10/1998	15/10/1998	16/10/1998	12/01/1999	13/01/1999
19/01/1999	25/02/1999	07/03/1999	08/03/1999	16/03/1999
15/04/1999	14/06/1999	16/06/1999	10/07/1999	09/08/1999
02/09/1999	10/09/1999	05/10/1999	06/10/1999	07/10/1999
09/10/1999	10/10/1999	11/10/1999	18/10/1999	13/11/1999
14/11/1999	18/09/2000	23/06/2001	24/06/2001	25/06/2001
26/06/2001	24/07/2001	25/07/2001	27/07/2001	13/08/2001
22/08/2001	25/08/2001	27/08/2001	04/09/2001	05/09/2001
06/09/2001	07/09/2001	08/09/2001	09/09/2001	10/09/2001
27/01/2003	28/01/2003	17/02/2003	18/02/2003	19/02/2003
20/02/2003	21/02/2003	31/03/2003	19/06/2003	21/06/2003
22/06/2003	23/06/2003	24/06/2003	25/06/2003	23/09/2003
22/10/2003	23/10/2003	12/11/2003	14/11/2003	15/11/2003
16/11/2003	17/11/2003	18/11/2003	19/11/2003	05/01/2004
22/01/2004	27/07/2004	10/11/2004	16/05/2005	17/05/2005
18/05/2005	19/05/2005	10/09/2005	15/12/2006	02/02/2007
03/02/2007	04/02/2007	05/02/2007	06/02/2007	10/04/2007
27/08/2007	17/07/2008	27/07/2008	28/07/2008	30/07/2008
31/07/2008	25/08/2008	10/09/2008	08/12/2008	10/12/2008
29/01/2009	10/03/2009	19/05/2009	21/05/2009	18/07/2009
19/07/2009	21/09/2009	22/09/2009	04/12/2009	07/12/2009
24/06/2010	17/08/2010	21/08/2010	09/09/2010	08/02/2011
09/02/2011	18/02/2011	08/03/2011	12/05/2011	14/05/2011
23/06/2011	24/06/2011	25/06/2011	19/09/2011	08/03/2012
09/03/2012	06/08/2012	07/08/2012	03/02/2013	10/02/2013
17/02/2013	18/02/2013	25/02/2013		

Cuadro B.3: Fechas con registros en ceros

02/01/1990	13/01/1990	20/01/1990	30/01/1990	15/02/1990	23/02/1990
05/03/1990	12/03/1990	15/03/1990	24/03/1990	25/03/1990	26/03/1990
02/04/1990	10/04/1990	29/04/1990	15/05/1990	26/06/1990	14/07/1990
15/07/1990	16/07/1990	17/07/1990	20/07/1990	24/07/1990	02/08/1990
03/08/1990	04/08/1990	05/08/1990	06/08/1990	07/08/1990	08/08/1990
09/08/1990	10/08/1990	11/08/1990	12/08/1990	13/08/1990	14/08/1990
15/08/1990	16/08/1990	17/08/1990	18/08/1990	19/08/1990	20/08/1990
21/08/1990	22/08/1990	23/08/1990	24/08/1990	25/08/1990	28/08/1990
29/08/1990	30/08/1990	01/09/1990	02/09/1990	03/09/1990	12/09/1990
13/09/1990	14/09/1990	18/09/1990	03/10/1990	04/10/1990	05/10/1990
06/10/1990	07/10/1990	08/10/1990	09/10/1990	04/12/1990	06/12/1990
01/01/1991	18/01/1991	20/01/1991	22/01/1991	23/01/1991	24/01/1991
25/01/1991	27/04/1991	28/04/1991	29/04/1991	21/05/1991	22/05/1991
23/05/1991	24/05/1991	25/05/1991	26/05/1991	27/05/1991	28/05/1991
29/05/1991	30/05/1991	31/05/1991	01/06/1991	02/06/1991	03/06/1991
04/06/1991	05/06/1991	06/06/1991	07/06/1991	08/06/1991	09/06/1991
10/06/1991	11/06/1991	12/06/1991	13/06/1991	14/06/1991	15/06/1991
16/06/1991	17/06/1991	18/06/1991	19/06/1991	20/06/1991	21/06/1991
22/06/1991	23/06/1991	24/06/1991	25/06/1991	26/06/1991	27/06/1991
28/06/1991	29/06/1991	30/06/1991	01/07/1991	02/07/1991	05/07/1991
09/07/1991	10/07/1991	11/07/1991	15/07/1991	16/07/1991	17/07/1991
25/07/1991	26/07/1991	30/07/1991	04/08/1991	05/08/1991	06/08/1991
07/08/1991	08/08/1991	09/08/1991	10/08/1991	11/08/1991	15/08/1991
17/08/1991	18/08/1991	19/08/1991	20/08/1991	21/08/1991	22/08/1991
23/08/1991	24/08/1991	25/08/1991	26/08/1991	27/08/1991	28/08/1991
29/08/1991	31/08/1991	01/09/1991	02/09/1991	03/09/1991	04/09/1991
05/09/1991	06/09/1991	07/09/1991	08/09/1991	09/09/1991	15/09/1991
16/09/1991	17/09/1991	25/09/1991	26/09/1991	01/10/1991	02/10/1991
04/10/1991	05/10/1991	06/10/1991	07/10/1991	11/10/1991	12/10/1991
14/10/1991	21/10/1991	22/10/1991	23/10/1991	24/10/1991	26/10/1991
27/10/1991	28/10/1991	01/11/1991	02/11/1991	03/11/1991	04/11/1991
05/11/1991	06/11/1991	07/11/1991	08/11/1991	23/11/1991	24/11/1991
25/11/1991	26/11/1991	27/11/1991	28/11/1991	29/11/1991	30/11/1991
01/12/1991	02/12/1991	22/12/1991	23/12/1991	31/12/1991	01/01/1992
08/01/1992	09/01/1992	10/01/1992	11/01/1992	19/01/1992	22/01/1992
31/01/1992	01/02/1992	02/02/1992	03/02/1992	04/02/1992	05/02/1992
06/02/1992	17/02/1992	01/03/1992	02/03/1992	04/03/1992	08/03/1992

06/05/1992	07/05/1992	08/05/1992	05/06/1992	21/06/1992	18/07/1992
19/07/1992	20/07/1992	21/07/1992	24/07/1992	25/07/1992	17/09/1992
18/09/1992	19/09/1992	20/09/1992	21/09/1992	22/09/1992	27/09/1992
30/09/1992	01/10/1992	02/10/1992	03/10/1992	05/10/1992	06/10/1992
07/10/1992	11/10/1992	12/10/1992	22/10/1992	23/10/1992	24/10/1992
25/10/1992	26/10/1992	30/10/1992	31/10/1992	09/11/1992	10/11/1992
11/11/1992	12/11/1992	13/11/1992	16/11/1992	17/11/1992	18/11/1992
19/11/1992	02/12/1992	10/12/1992	15/12/1992	16/12/1992	17/12/1992
21/12/1992	30/12/1992	29/01/1993	30/01/1993	31/01/1993	09/02/1993
09/03/1993	12/04/1993	19/04/1993	03/05/1993	07/05/1993	21/05/1993
23/05/1993	31/05/1993	01/06/1993	07/06/1993	21/06/1993	25/06/1993
26/06/1993	27/06/1993	28/06/1993	29/06/1993	30/06/1993	01/07/1993
02/07/1993	05/07/1993	06/07/1993	07/07/1993	08/07/1993	09/07/1993
10/07/1993	19/07/1993	20/07/1993	21/07/1993	22/07/1993	23/07/1993
24/07/1993	25/07/1993	26/07/1993	03/08/1993	08/08/1993	09/08/1993
13/08/1993	19/08/1993	07/09/1993	08/09/1993	12/09/1993	13/09/1993
14/09/1993	15/09/1993	16/09/1993	17/09/1993	20/09/1993	23/09/1993
24/09/1993	25/09/1993	26/09/1993	27/09/1993	28/09/1993	30/09/1993
03/10/1993	07/10/1993	08/10/1993	26/10/1993	02/11/1993	03/11/1993
15/12/1993	16/12/1993	17/12/1993	18/12/1993	19/12/1993	20/12/1993
21/12/1993	22/12/1993	23/12/1993	24/12/1993	09/02/1994	10/02/1994
15/02/1994	11/03/1994	19/03/1994	20/03/1994	16/04/1994	17/04/1994
25/04/1994	17/06/1994	16/07/1994	17/07/1994	18/07/1994	17/08/1994
26/09/1994	01/10/1994	06/10/1994	16/10/1994	12/03/1995	18/03/1995
19/03/1995	20/03/1995	16/05/1995	31/05/1995	12/06/1995	15/06/1995
01/07/1995	08/07/1995	09/07/1995	10/07/1995	11/07/1995	12/07/1995
15/08/1995	16/08/1995	17/08/1995	18/08/1995	19/08/1995	20/08/1995
21/08/1995	22/08/1995	23/08/1995	24/08/1995	25/08/1995	26/08/1995
27/08/1995	28/08/1995	29/08/1995	30/08/1995	31/08/1995	01/09/1995
02/09/1995	03/09/1995	04/09/1995	08/09/1995	23/09/1995	29/09/1995
25/10/1995	26/10/1995	29/10/1995	30/10/1995	15/11/1995	16/11/1995
18/11/1995	09/12/1995	10/12/1995	01/01/1996	02/01/1996	06/01/1996
10/01/1996	11/01/1996	12/01/1996	13/01/1996	14/01/1996	15/01/1996
16/01/1996	17/01/1996	03/02/1996	04/02/1996	05/02/1996	12/02/1996
22/02/1996	24/02/1996	25/02/1996	26/02/1996	29/02/1996	01/03/1996
02/03/1996	16/03/1996	19/05/1996	13/07/1996	31/08/1996	27/03/1997
20/08/1997	21/08/1997	23/08/1997	24/08/1997	02/09/1997	03/09/1997

27/09/1997	28/10/1997	29/10/1997	04/11/1997	22/09/1998	23/09/1998
19/10/1998	15/06/1999	08/08/1999	08/10/1999	17/10/1999	03/06/2000
04/06/2000	05/06/2000	11/06/2000	12/06/2000	23/12/2000	31/01/2001
13/04/2001	14/04/2001	09/02/2002	25/04/2002	17/09/2002	27/09/2002
28/09/2002	26/04/2003	04/06/2003	06/06/2003	07/06/2003	08/06/2003
09/06/2003	10/06/2003	11/06/2003	12/06/2003	13/06/2003	14/06/2003
15/06/2003	16/06/2003	17/06/2003	18/06/2003	20/06/2003	24/04/2004
12/07/2004	24/07/2004	17/10/2004	18/10/2004	23/01/2005	21/02/2005
22/02/2005	23/02/2005	02/03/2005	03/03/2005	04/03/2005	05/03/2005
06/03/2005	07/03/2005	08/03/2005	09/03/2005	11/03/2005	12/03/2005
13/03/2005	14/03/2005	15/03/2005	16/04/2005	17/04/2005	25/04/2005
26/04/2005	27/04/2005	15/05/2005	12/08/2005	13/08/2005	21/08/2005
12/10/2005	13/10/2005	01/01/2006	19/03/2006	13/04/2006	21/05/2006
19/06/2006	12/07/2006	27/07/2006	10/08/2006	21/09/2006	25/09/2006
26/09/2006	27/09/2006	28/09/2006	29/09/2006	02/10/2006	24/11/2006
25/11/2006	01/12/2006	20/12/2006	21/12/2006	08/01/2007	18/01/2007
24/01/2007	03/03/2007	30/06/2007	01/07/2007	02/07/2007	06/07/2007
07/07/2007	08/07/2007	09/07/2007	10/07/2007	11/07/2007	12/07/2007
13/07/2007	14/07/2007	15/07/2007	16/07/2007	17/07/2007	18/07/2007
19/07/2007	20/07/2007	21/07/2007	22/07/2007	23/07/2007	24/07/2007
25/07/2007	26/07/2007	27/07/2007	28/07/2007	29/07/2007	30/07/2007
31/07/2007	01/08/2007	02/08/2007	03/08/2007	04/08/2007	05/08/2007
06/08/2007	07/08/2007	08/08/2007	25/08/2007	26/08/2007	08/05/2008
01/06/2008	18/07/2008	22/09/2008	23/09/2008	02/10/2008	18/10/2008
24/11/2008	11/12/2008	10/02/2009	11/02/2009	12/02/2009	13/02/2009
25/02/2009	18/03/2009	30/03/2009	24/04/2009	25/04/2009	26/04/2009
27/04/2009	28/04/2009	29/04/2009	30/04/2009	01/05/2009	02/05/2009
03/05/2009	04/05/2009	05/05/2009	06/05/2009	07/05/2009	08/05/2009
12/05/2009	13/05/2009	14/05/2009	15/05/2009	16/05/2009	17/05/2009
18/05/2009	22/05/2009	29/05/2009	17/07/2009	20/07/2009	23/09/2009
01/10/2009	02/10/2009	06/10/2009	07/10/2009	14/10/2009	15/10/2009
16/11/2009	01/12/2009	19/12/2009	20/02/2010	21/02/2010	22/02/2010
20/04/2010	21/04/2010	11/05/2010	19/05/2010	04/07/2010	05/07/2010
23/07/2010	07/09/2010	10/09/2010	20/09/2010	02/03/2011	09/03/2011
16/03/2011	17/03/2011	18/03/2011	28/03/2011	29/03/2011	13/05/2011
15/05/2011	16/05/2011	01/06/2011	28/06/2011	08/08/2012	

Cuadro B.4: Fechas con decrementos Forbush

18/03/1990	30/03/1990	09/04/1990	19/05/1990	27/10/1990
21/12/1990	26/01/1992	25/02/1992	17/03/1992	01/04/1992
28/05/1992	12/07/1992	30/10/1992	17/01/1994	18/04/1994
19/06/1994	15/07/1994	21/08/1994	06/09/1994	27/09/1994
04/09/1996	08/09/1996	26/11/1996	24/02/1997	25/02/1997
26/02/1997	27/02/1997	10/04/1997	11/04/1997	12/04/1997
13/04/1997	07/06/1997	08/06/1997	09/06/1997	22/06/1997
23/06/1997	24/06/1997	25/06/1997	26/06/1997	22/09/1997
23/09/1997	24/09/1997	01/10/1997	02/10/1997	10/10/1997
11/10/1997	12/10/1997	13/10/1997	07/11/1997	08/11/1997
09/11/1997	22/11/1997	23/11/1997	24/11/1997	25/11/1997
26/11/1997	30/12/1997	31/12/1997	07/01/1998	28/01/1998
17/02/1998	21/03/1998	25/03/1998	04/04/1998	16/04/1998
26/04/1998	02/05/1998	15/05/1998	29/05/1998	02/06/1998
04/07/1998	10/08/1998	26/08/1998	25/09/1998	23/10/1998
08/11/1998	12/12/1998	13/12/1998	22/12/1998	26/12/1998
23/01/1999	24/01/1999	25/01/1999	26/01/1999	27/01/1999
12/02/1999	13/02/1999	14/02/1999	17/02/1999	18/02/1999
19/02/1999	20/02/1999	21/02/1999	01/03/1999	19/03/1999
20/03/1999	21/03/1999	22/03/1999	23/03/1999	24/03/1999
25/03/1999	05/05/1999	06/05/1999	07/05/1999	08/05/1999
09/05/1999	10/05/1999	11/05/1999	22/05/1999	23/05/1999
24/05/1999	25/05/1999	26/06/1999	27/06/1999	28/06/1999
29/06/1999	02/07/1999	03/07/1999	04/07/1999	27/07/1999
28/07/1999	29/07/1999	19/08/1999	20/08/1999	21/08/1999
22/08/1999	15/09/1999	16/09/1999	17/09/1999	12/12/1999
13/12/1999	14/12/1999	15/12/1999	12/02/2000	22/03/2000
06/04/2000	01/05/2000	22/05/2000	23/05/2000	24/05/2000
08/06/2000	13/07/2000	15/07/2000	19/07/2000	05/08/2000
10/08/2000	12/08/2000	15/09/2000	17/09/2000	12/10/2000
28/10/2000	29/10/2000	07/11/2000	26/11/2000	27/11/2000
23/01/2001	24/01/2001	25/01/2001	03/03/2001	04/03/2001
05/03/2001	06/03/2001	19/03/2001	20/03/2001	21/03/2001
22/03/2001	27/03/2001	28/03/2001	29/03/2001	30/03/2001
31/03/2001	04/04/2001	05/04/2001	08/04/2001	09/04/2001
10/04/2001	11/04/2001	12/04/2001	15/04/2001	16/04/2001
17/04/2001	18/04/2001	28/04/2001	29/04/2001	30/04/2001
01/05/2001	02/05/2001	12/05/2001	13/05/2001	14/05/2001
15/05/2001	16/05/2001	22/05/2001	23/05/2001	24/05/2001
25/05/2001	26/05/2001	27/05/2001	28/05/2001	29/05/2001
30/05/2001	17/08/2001	18/08/2001	19/08/2001	28/08/2001

29/08/2001	30/08/2001	31/08/2001	01/09/2001	02/09/2001
25/09/2001	26/09/2001	27/09/2001	28/09/2001	29/09/2001
30/09/2001	01/10/2001	02/10/2001	11/10/2001	12/10/2001
13/10/2001	14/10/2001	25/10/2001	26/10/2001	06/11/2001
07/11/2001	08/11/2001	19/11/2001	20/11/2001	21/11/2001
22/11/2001	23/11/2001	24/11/2001	25/11/2001	26/11/2001
27/11/2001	03/12/2001	04/12/2001	05/12/2001	06/12/2001
07/12/2001	08/12/2001	09/12/2001	15/12/2001	16/12/2001
17/12/2001	18/12/2001	29/12/2001	30/12/2001	31/12/2001
10/01/2002	27/01/2002	18/03/2002	17/04/2002	18/05/2002
23/05/2002	17/07/2002	19/08/2002	07/09/2002	03/10/2002
10/11/2002	17/11/2002	26/11/2002	07/12/2002	17/12/2002
22/12/2002	09/01/2003	10/01/2003	11/01/2003	01/02/2003
02/02/2003	03/02/2003	20/03/2003	21/03/2003	09/04/2003
10/04/2003	11/04/2003	12/04/2003	13/04/2003	14/04/2003
15/04/2003	16/04/2003	29/05/2003	30/05/2003	31/05/2003
01/06/2003	02/06/2003	03/06/2003	26/07/2003	27/07/2003
24/10/2003	25/10/2003	26/10/2003	27/10/2003	28/10/2003
29/10/2003	30/10/2003	31/10/2003	01/11/2003	02/11/2003
03/11/2003	04/11/2003	05/11/2003	06/11/2003	07/11/2003
08/11/2003	09/11/2003	10/11/2003	20/11/2003	21/11/2003
22/11/2003	23/11/2003	24/11/2003	25/11/2003	26/11/2003
27/11/2003	07/01/2004	22/01/2004	10/03/2004	12/07/2004
22/07/2004	23/07/2004	24/07/2004	27/07/2004	13/09/2004
07/11/2004	09/11/2004	05/12/2004	03/01/2005	04/01/2005
05/01/2005	06/01/2005	17/01/2005	18/01/2005	19/01/2005
20/01/2005	21/01/2005	22/01/2005	08/05/2005	09/05/2005
10/05/2005	15/05/2005	29/05/2005	30/05/2005	31/05/2005
16/07/2005	17/07/2005	18/07/2005	19/07/2005	20/07/2005
06/08/2005	07/08/2005	08/08/2005	24/08/2005	25/08/2005
26/08/2005	27/08/2005	11/09/2005	12/09/2005	13/09/2005
14/09/2005	15/09/2005	16/09/2005	17/09/2005	18/09/2005
19/09/2005	25/01/2006	13/04/2006	20/08/2006	09/11/2006
14/11/2006	08/12/2006	14/12/2006	18/05/2007	19/05/2007
20/05/2007	21/05/2007	22/05/2007	23/05/2007	19/10/2007
20/10/2007	21/10/2007	22/10/2007	23/10/2007	24/10/2007
19/11/2007	20/11/2007	21/11/2007	22/11/2007	08/03/2012
14/03/2012	05/04/2012	23/04/2012	30/04/2012	16/06/2012
19/07/2012	04/09/2012	09/10/2012	21/11/2012	23/11/2012

# Bibliografía

- [1] *A Geometria Fractal*. [http://cubodegelo.no.sapo.pt/matematica\\_ficheiros/fractal.htm](http://cubodegelo.no.sapo.pt/matematica_ficheiros/fractal.htm).
- [2] Abraham, J., P. Abreu, M. Aglietta, C. Aguirre, D. Allard, I. Allekotte, J. Allen, P. Allison, C. Alvarez, J. Alvarez-Muniz y et al.: *Correlation of the Highest-Energy Cosmic Rays with Nearby Extragalactic Objects*. *Science*, 318(5852):938–943, November 2007.
- [3] Alok, J.: *Cosmic ray mystery solved*. *The Guardian*, February 2013. <http://www.theguardian.com/science/2013/feb/14/cosmic-ray-mystery-solved>.
- [4] Barnsley, M. F., R. L. Devaney, B. Mandelbrot, H.O. Peitgen, D. Saupe y R.F. Voss: *The Science of Fractal Images.*, capítulo 1. Fractals in nature: From characterization to simulation., páginas 21–70. Springer, 1988.
- [5] Beard, R. y S. Millen: *Estimation of the Hurst Exponent for the Burdekin River using the Hurst-Mandelbrot Rescaled Range Statistic*. <http://espace.library.uq.edu.au/eserv.php?pid=UQ:10831\&dsID=beard.pdf>.
- [6] Benevolenskaya, E. E.: *A model of the double magnetic cycle of the sun*. *The Astrophysical Journal*, 509:L49–L52., 1998.
- [7] Benevolenskaya, E.E.: *A mechanism of helicity variations on the Sun*. *Solar Physics*, 191(2):247–255, 2000.
- [8] Bernlöhr, K.: *Shower detection.png*. [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shower\\_detection.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shower_detection.png).
- [9] Bothe, W. y W. Kolhörster: *Die Natur der Höhenstrahlung*. *Die Naturwissenschaften*, 17(17):271–273, Apr 1929, ISSN 1432-1904. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01507590>.
- [10] Burden, R.L. y J.D. Faires: *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 2010.
- [11] Clay, J.: *Die korpuskulare Natur der Ultrastrahlung und ihr erdmagnetischer Effekt*. *Naturwissenschaften*, 21(3):43–44, 1933.

- [12] Clem, J.M. y L.I. Dorman: *Neutron monitor response functions*. Space Science Review, 93:335–359, 2000.
- [13] Clem, John M y Lev I. Dorman: *Neutron Monitor Response Functions*. Space Science Reviews, 93(1-2):335–359, 2000, ISSN 0038-6308. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1026508915269>.
- [14] Compton, A.H.: *Variation of the Cosmic Rays with Latitud*. Physical Review, 41(1):111–113, 1932.
- [15] Cordero Tercero, M.G., A. Lara Sánchez, M.D Maravilla Meza, B.E. Mendoza Ortega, J.F. Valdés Galicia y V.M. Velasco Herrera: *Introducción a la Física Espacial*. Publicaciones Fomento Editorial, 2013.
- [16] Debrunner, H., J. Lockwood y E. Flückiger: *8th Europe Cosmic Ray Symp*. Roma, no publicado., 1982.
- [17] Dorman, L.I.: *Coupling and barometer coefficients for measurements of cosmic ray variations at altitudes of 260-400 mb*. Acta Phys. Acad. Sci. Hung, 29:233, 1970.
- [18] Einstein, Albert.: *Investigations in the Theory of the Brownian Movement*. Dover Publications, Inc, 1956.
- [19] Falconer, K.: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2003.
- [20] Forbush, S.E.: *On the Effects in Cosmic-Ray Intensity Observed During the Recent Magnetic Storm*. Physical reviews, 51(12):1108–1109, 1937.
- [21] Gerald, E.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer, 2008.
- [22] Gilat, A.: *MATLAB: Una introducción con ejemplos prácticos*. Reverté, 2006.
- [23] Hague, J. D.: *Correlation of the highest energy cosmic rays with nearby extragalactic objects in Pierre Auger Observatory data*. Proceedings of the 31st International Cosmic Ray Conference., páginas 6–9, 2009. [http://www.auger.org/technical\\_info/ICRC2009/arxiv\\_astrophysics.pdf](http://www.auger.org/technical_info/ICRC2009/arxiv_astrophysics.pdf).
- [24] Heber, B. y B. Klecker: *Sun, Corona and Transient Phenomena in the Heliosphere*. Proceedings of the 31st International Cosmic Ray Conference., Invited, Rapporteur and Highlight Papers:23–37, 2009.
- [25] Helmholtz Centre Potsdam, GFZ: *Indices of Global Geomagnetic Activity*. [http://www-app3.gfz-potsdam.de/kp\\_index/index.html](http://www-app3.gfz-potsdam.de/kp_index/index.html).
- [26] Howe, R., J. Christensen Dalsgard, F. Hill, R.W. Komm, R.M. Larsen, J. Schou, M.J. Thompson y J. Toomre: *Dynamic Variations at the Base of the Solar Convection Zone*. Science, 287:2456–2460, 2000.
- [27] Hurewicz, W. y H. Wallman: *Dimension theory*. Princeton University Press, 1941.



- [28] Hurst, H.E.: *Long-term storage capacity of reservoirs*. Transactions of the American Society of Civil Engineers, (116):770–779, 1951.
- [29] Kane, R. P.: *Short-Term Periodicities in Solar Indices*. Solar Physics, 227(1):155–175, Mar 2005, ISSN 1573-093X. <http://dx.doi.org/10.1007/s11207-005-1110-x>.
- [30] Kaye, B.H.: *A Random Walk Through Fractal Dimensions*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, 1994.
- [31] Kelvinsong: *Afiche del sol.svg*. [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Afiche\\_del\\_sol.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Afiche_del_sol.svg).
- [32] Krivova, N.A. y S.K. Solanki: *The 1.3-year and 156-day periodicities in sunspot data: Wavelet analysis suggests a common origin*. Astronomy and Astrophysics, 394:701–706, 2002.
- [33] Kryakunova, O.: *Monitores de Neutrones*, December 2009. <http://www.nmdb.eu/?q=node/380>.
- [34] Kudela, Karel, Helen Mavromichalaki, Athanasios Papaioannou y Maria Gerontidou: *On mid-term periodicities in cosmic rays: utilizing the NMDB archive*. Proceedings of the 31st International Cosmic Ray Conference. Lodz. Polonia, 2009.
- [35] Lang, K.R.: *The Cambridge encyclopedia of the sun*. Cambridge University Press, 2001.
- [36] Lemaitre, G. y M.S. Vallarta: *On Compton's latitude effect of cosmic radiation*. Physical Review, 43(2):87–91, 1933.
- [37] Lemaitre, G. y M.S. Vallarta: *On the North-South Asymmetry of Cosmic Radiation*. Physical Review, 47(6):434–436, 1935.
- [38] Lemaitre, G. y M.S. Vallarta: *On the Allowed Cone of Cosmic Radiation*. Physical Review, 50(6):493–504, 1936.
- [39] Lemaitre, G. y M.S. Vallarta: *On the Geomagnetic Analysis of Cosmic Radiation*. Physical Review, 49(10):719–726, 1936.
- [40] Lockwood, J., W. Webber y L. Hsieh.: *Solar flare proton rigidity spectra deduced from cosmic ray neutron monitor observations*. J. Geophys. Res., 79:4149–4155, 1974.
- [41] López Bonifacio, José Gerardo: *Teoría de ondoletas de Morlet con una aplicación a los rayos cósmicos*. 2014. Tesis de Licenciatura de Matemáticas.
- [42] Lévy, P.: *Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions*. Univ. California Publ. Statist., 1:331–390, 1953.
- [43] Mandelbrot, B. B.: *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, 1975.

- [44] Mandelbrot, B. B.: *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W.H. Freeman, San Francisco, 1977.
- [45] Mandelbrot, B. B.: *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Company, 1983.
- [46] Mandelbrot, B. B. y J. W. van Ness: *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, volumen 10. SIAM Review, 1968.
- [47] Mewaldt, R.A.: *Cosmic Rays*. California Institute of Technology. [http://www.srl.caltech.edu/personnel/dick/cos\\_encyc.html](http://www.srl.caltech.edu/personnel/dick/cos_encyc.html).
- [48] Millikan, R. A. y G. Harvey Cameron: *High Frequency Rays of Cosmic Origin III. Measurements in Snow-Fed Lakes at High Altitudes*. Phys. Rev., 28(5):851–868, Nov 1926, ISSN 1536-6065. <http://dx.doi.org/10.1103/physrev.28.851>.
- [49] Moraal, H., M.S. Potgeiter, P.H. Stoker y A.J. van der Walt: *Neutron monitor latitude survey of cosmic ray intensity during the 1986/1987 solar minimum*. J. Geophys. Res, 94:1459–1464, 1989.
- [50] Mursula, K. y B. Zieger: *The 1.3-year variation in solar wind speed and geomagnetic activity*. Advances in Space Research, 25(9):1939–1942, Jan 2000, ISSN 0273-1177. [http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177\(99\)00608-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0273-1177(99)00608-0).
- [51] Musalem Ramírez, O.: *Catálogo de decrecimientos Forbush de la radiación cósmica durante el periodo de 1997-2007*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2012. Tesis de Licenciatura.
- [52] Nagashima, K., S. Sakakibara y K. Murakami: *Response and yield functions of neutron monitor, galactic cosmic ray spectrum and its solar modulation, derived from all the available world-wide surveys*. Nuovo Cimento, 12C:173, 1989.
- [53] NASA.: *Cosmic Rays, What are cosmic rays?* Goddard Space Flight Center. [http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/known\\_11/cosmic\\_rays.html](http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/known_11/cosmic_rays.html).
- [54] NOAA: *Space Weather Scales*. <http://www.swpc.noaa.gov/NOAAscales/>.
- [55] NOAA: *NOAA / Space Weather Prediction Center*, December 2011. <http://www.swpc.noaa.gov/info/Kindex.html>.
- [56] Nobelprize.org: *The Nobel Prize in Physics 1936. Victor F. Hess, Carl D. Anderson*. Award Ceremony Speech. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1936/press.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/press.html).
- [57] Nobelprize.org: *The Nobel Prize in Physics 1936. Victor F. Hess, Carl D. Anderson*. Victor F. Hess - Facts. [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1936/hess-facts.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1936/hess-facts.html).

- [58] Otaola, J. A. y J.F. Valdés-Galicia: *Los rayos cósmicos: mensajeros de las estrellas*, volumen 108. Fondo de Cultura Económica., 1992. [http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/108/htm/sec\\_8.htm](http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/108/htm/sec_8.htm).
- [59] Pinholster, G.: *Science: Evidence Shows That Cosmic Rays Come From Exploding Stars*. American Association for the Advancement of Science., February 2013. [http://www.aaas.org/news/releases/2013/0214\\_supernova\\_cosmicrays.shtml](http://www.aaas.org/news/releases/2013/0214_supernova_cosmicrays.shtml).
- [60] Polygiannakis, J., P. Preka-Papadema y X. Moussas: *On signal-noise decomposition of time-series using the continuous wavelet transform: application to sunspot index*. Mon. Not. R. Astron. Soc., 343:725–734, 2003.
- [61] Pérez Peraza, J.: *Reminiscences of Cosmic Ray Research in Mexico*. Advances in Space Research, 2009.
- [62] Priestley, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*, volumen 1 y 2. Academic Press, 1981.
- [63] Prince, Aswathy Mary., Sanish. Thomas, Er. Ravi Jon y D.P Jayapandian: *A Study on Midrange Periodicity of Sunspot Number during Solar Cycles 21, 22, 23 & 24*. International Journal of Scientific and Research Publications (JSRP), 3(2), Feb. 2013.
- [64] Raubenheimer, B., F. Van Niekerk y M. Poitiger: *The calculation of differential response functions from latitude surveys*. I: Theory, Proc. 17th Int. Cosmic Ray Conf., París, 4:321, 1981.
- [65] Richards, Mercedes T., Michael L. Rogers y Donald St. P. Richards: *Long-term Variability in the Length of the Solar Cycle*. PUBL ASTRON SOC PAC, 121(881):797–809, Jul 2009, ISSN 1538-3873. <http://dx.doi.org/10.1086/604667>.
- [66] Sandström, A.E.: *Cosmic ray physics*. North Holland Publishing Company., 1965.
- [67] Seffens, W.: *Order From Chaos*. Science, 285(5431):1228, August 1999. <http://www.sciencemag.org/content/285/5431/1228.1.full>.
- [68] Smart, D.F. y M.A. Shea: *A review of geomagnetic cutoff rigidities for earth-orbiting spacecraft*. Advances in Space Research, 36(10):2012–2020, Jan 2005, ISSN 0273-1177. <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2004.09.015>.
- [69] Torre, K., D. Delignières y L. Lemoine: *Detection of long-range dependence and estimation of fractal exponents through AFIRMA modelling*. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 60:85–106, 2007.
- [70] TruSoft: *Benoit menus*. Copyright © TruSoft Int'l Inc., 1997-1999. Disponible en la página web: [http://sunandclimate.files.wordpress.com/2010/01/benoit\\_menus.pdf](http://sunandclimate.files.wordpress.com/2010/01/benoit_menus.pdf).
- [71] Turcotte, D. L.: *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge University Press, 1997.

- [72] UNAM. Instituto de Geofísica. Grupo de Rayos Cósmicos. Ciencias Espaciales. ¿Qué son los rayos cósmicos? Página web: [http://www.geofisica.unam.mx/observatorios/rayos\\_cosmicos/grupo\\_raycos/antecedentes.html](http://www.geofisica.unam.mx/observatorios/rayos_cosmicos/grupo_raycos/antecedentes.html).
- [73] UNAM. Geofísica. México City, Cosmic Ray, Observatory. <http://132.248.105.25/index.php>.
- [74] Valdez Cepeda, R. D., D. Hernández Ramírez, B. Mendoza, J. Valdés Galicia y D. Maravilla: *Fractality of monthly extreme minimum temperature*. World Scientific, 11(2):137–144, 2003.
- [75] Valdés Galicia, J., R. Pérez Enríquez y J. A. Otaola: *The cosmic-ray 1.68-year variation: A clue to understand the nature of the solar cycle?* Solar Physics, 167:409–417, 1996.
- [76] Valdés Galicia, J. F. y B. Mendoza: *On the role of large scale solar photospheric motions in the cosmic ray 1.68-yr intensity variation*. Solar Physics, 178:183–191, 1998.
- [77] Valdés-Galicia, J.F., A. Lara y B. Mendoza: *The solar magnetic flux mid-term periodicities and the solar dynamo*. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, 67(17-18):1697–1701, Dec 2005, ISSN 1364-6826. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jastp.2004.11.012>.
- [78] Valdés Galicia, J.F. y V. M. Velasco: *Variations of mid-term periodicities in solar activity physical phenomena*. Adv. Space. Res, 41:297–305, 2008.
- [79] Vargas Cárdenas, B.: *Detección de rayos cósmicos solares con el monitor de neutrones de la ciudad de México*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.
- [80] Vargas Cárdenas, B., J. F. Valdés Galicia, L. Peñaloza Velasco, J.G. López Bonifacio, J.A. Osorio Rosales, A. Hurtado y O. F. Musalem: *Wavelet and fractal frequency analysis of the Mexico City neutron monitor signal*. 33RD International Cosmic Ray Conference, Rio de Janeiro 2013. The Astroparticles Physics Conference., 2013.
- [81] Vargas Cárdenas, B. y J.F. Valdés Galicia: *Identification of high energy solar particle signals on the Mexico City neutron monitor database*,. Advances in Space Research, 49(11):1593–1597, 2012.
- [82] Villaresi, G., N. Iucci, M.I. Tyasto, L.I. Dorman, F. Re, F. Signoretti, N. Zangrilla, S. Cecchini, M. Parisi, C. Signorini, O.A. Danilova y N.G. Ptitsyna: *Latitude survey of cosmic ray nucleonic component (Italy-Antartic, 1996-1997)*. Proc. 25th Int. Cosmic Ray Conf., Durban,, 2:421–424, 1997.
- [83] Weyl, H.: *Bemerkungen zum Begriff der Differential-Quotienten gebrochener Ordnung*. Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 62:296–302, 1967.