



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Valor en Riesgo con Teoría de Valores
Extremos: análisis del comportamiento
durante la Crisis Subprime y modificaciones
al modelo para mejorar su confianza

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
CARLOS ENRIQUE ARZOLA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:
AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR



2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Arzola

Gutiérrez

Carlos Enrique

56 97 11 26

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

30359160 5

2. Datos del Tutor

M. en C.

Román

Aguilar

Agustín

3. Sinodal 1

Dra.

Meda

Guardiola

Ana

4. Sinodal 2

Dra.

Gavira

Durón

Nora

5. Sinodal 3

M. en C.

Álvarez del Castillo

Penna

Raúl

6. Sinodal 4

M. en C.

Coen

Coria

Arrigo

Claro que agradezco a mi madre, ¿Quién si no me educó-obligó-insitó a venir a este lugar?

Claro que agradezco a Ellos que fueron sabiduría real. Formación pura de ejemplo. Los realmente exitosos.

Claro que agradezco a mis amigos, ellos complementaron este largo trayecto en multicolores formas.

Claro que agradezco a quien soportó mis arrebatos en los momentos complicados, a quien me dio aire fresco, a quien me guió.

Claro, agradezco a los cercanos, a los que me rodean, quienes están y estuvieron.

Pero ¿Qué hay de aquéllos? Aquéllos a quienes no conozco pero tanto debo. A quien nunca vi, pero su trabajo me trajo aquí. A quienes con su sudor construyeron ésta, nuestra casa. Quienes la defendieron con sus plumas y lenguas. Quienes dieron su vida a ella. Quienes la perdieron por ella.

¿Qué hay de él? Que pudo estar aquí hoy, en mi lugar, y no lo está porque el orden del caos en este universo así lo quiso. Porque los despojos que somos de la sociedad que fuimos no logra la mínima equidad. Porque nuestro social-individualismo no nos permite aceptar que lo “mío” pudo ser lo “suyo”. Que lo mío es nada.

¿Quién soy yo para vanagloriarme de este éxito, si no acepto que, además de mi esfuerzo, es producto del esfuerzo de muchos más, de la carencia de muchísimos más, del despojo de muchos otros más?

Al verme aquí al término de un pequeño pero arduo camino siento tristeza por todos los que no tuvieron siquiera la oportunidad. Tristeza infinita porque muchos en mi generación niegan este hecho, ni siquiera lo ven. Tristeza profunda porque estamos dejando de ser comunidad. Porque yo estoy aquí y mil más no. ¿De qué sirven el desarrollo económico, el avance tecnológico, el fortalecimiento institucional y la cooperación financiera mundial si todo eso se paga con nuestra humanidad?

Así que dedico este trabajo a los que queriendo levantarse son arrodillados, a los que hablando son acallados, a los que levantándose son asesinados, a los que buscando un cambio son ignorados, a los que desechamos como sociedad, porque ellos son el triunfo de nuestra indiferencia. Ésta, la indiferencia, es la crisis que apremia superemos.

No pretendamos que las cosas cambien si siempre hacemos lo mismo.

La crisis es la mejor bendición que puede sucederle a personas y países porque la crisis trae progresos.

La creatividad nace de la angustia como el día nace de la noche oscura.

Es en la crisis que nace la inventiva, los descubrimientos y las grandes estrategias. Quien supera la crisis se supera a sí mismo sin quedar "superado".

Quien atribuye a la crisis sus fracasos y penurias violenta su propio talento y respeta más a los problemas que a las soluciones.

La verdadera crisis es la crisis de la incompetencia.

El inconveniente de las personas y los países es la pereza para encontrar las salidas y soluciones.

Sin crisis no hay desafíos, sin desafíos la vida es una rutina, una lenta agonía. Sin crisis no hay méritos.

Es en la crisis donde aflora lo mejor de cada uno, porque sin crisis todo viento es caricia.

Hablar de crisis es promoverla, y callar en la crisis es exaltar el conformismo.

En vez de esto trabajemos duro. Acabemos de una vez con la única crisis amenazadora que es la tragedia de no querer luchar por superarla.

-Albert Einstein

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Índice de figuras | VI |
| 1. Crisis Financieras y Crisis Subprime | 6 |
| 1.1. Eventos Black Swan | 6 |
| 1.2. Crisis Financieras | 7 |
| 1.2.1. Antecedentes de la Crisis de 2008 | 11 |
| 1.2.2. Papel del VaR durante la crisis de 2008 | 15 |
| 2. VaR para medición de Riesgo de Mercado y otros tipos de Riesgo | 17 |
| 2.1. Riesgo Financiero | 17 |
| 2.2. Riesgo Crediticio | 18 |
| 2.3. Riesgo de Liquidez | 20 |
| 2.4. Riesgo de Mercado | 22 |
| 2.4.1. Cálculo de VaR Monte Carlo | 24 |
| 2.4.2. Cálculo de Var con Simulación Histórica. | 28 |
| 2.4.3. Cálculo de VaR con distribución paramétrica | 29 |
| 2.4.4. Cálculo de VaR con distribuciones generales | 30 |
| 3. Teoría de Valores Extremos. | 32 |
| 3.1. Distribución del Máximo. | 33 |
| 3.1.1. Convergencia a Familias. | 36 |
| 3.1.2. Convergencia a límites no degenerados | 40 |
| 3.2. Distribuciones de Valores Extremos. | 42 |
| 3.2.1. Distribución Weibull. | 42 |
| 3.2.2. Distribución Frechét | 43 |
| 3.2.3. Distribución Gumbel | 45 |
| 3.3. Distribución Generalizada de Valores Extremos. | 46 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 3.3.1. | Dominios de Atracción al Máximo | 47 |
| 3.3.2. | Selección de Máximos por bloques | 51 |
| 3.4. | La Distribución Generalizada de Pareto | 51 |
| 3.4.1. | Distribución Límite de Excesos. | 53 |
| 3.4.2. | Selección Peaks Over Threshold | 56 |
| 3.5. | Estimadores de las colas, el cuantil z_q | 57 |
| 3.6. | Estimación de Parámetros | 59 |
| 3.6.1. | Estimación de parámetros para la DGVE | 59 |
| 3.6.2. | Estimación de parámetros para la DGP | 61 |
| 3.6.3. | Método de Nelder & Mead | 61 |
| 3.7. | Métodos estadísticos de acercamiento a los datos. | 63 |
| 4. | Cálculo y comparación de VaR con metodologías propuestas al conjunto seleccionado de instrumentos financieros y carteras de inversión. | 66 |
| 4.1. | VaR basado en Teoría de Valores Extremos | 66 |
| 4.1.1. | Modelos ARCH | 67 |
| 4.1.2. | Análisis de las series con herramientas estadísticas | 70 |
| 4.2. | Cálculo de VaR con la DGVE | 80 |
| 4.3. | Cálculo de VaR con la DGP | 88 |
| 4.4. | Calculo de VaR con modelos convencionales | 101 |
| 4.5. | Comparación de las medidas de VaR mediante Backtest | 103 |
| 4.6. | Análisis del comportamiento del VaR con TVE durante la crisis de 2008. . . | 110 |
| 4.7. | Un intento por estabilizar la medida de VaR con TVE en periodos de alta volatilidad. | 122 |
| 4.8. | Aplicación del cálculo de VaR mediante Máximos a un Umbral a portafolios de inversión. | 134 |
| 5. | Conclusiones | 145 |
| | Bibliografía | 151 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 3.1. Distributions de colas pesadas; comparacion de las distribuciones Weibull, Frechét y Gumbel. | 38 |
| 3.2. Distributions Weibull con cambio en α | 43 |
| 3.3. Distributions Frechét con cambio en α | 44 |
| 3.4. Distributions Gumbel con distintos parámetros | 45 |
| 3.5. DGVE con distintos parámetros | 47 |
| 4.1. Gráficos de análisis inicial IPC | 71 |
| 4.2. Gráficos de análisis inicial Residuales IPC | 72 |
| 4.3. Gráficos de análisis inicial MXNUSD | 73 |
| 4.4. Gráficos de análisis inicial Residuales MXNUSD | 74 |
| 4.5. Gráficos de análisis inicial Bonos M5 | 74 |
| 4.6. Gráficos de análisis inicial Residuales M5 | 75 |
| 4.7. Parámetros ajustados para el modelo GARCH por serie. | 76 |
| 4.8. Gráficos de análisis inicial NDQ | 76 |
| 4.9. Gráficos de análisis inicial FTSE | 77 |
| 4.10. Gráficos de análisis inicial SPX | 77 |
| 4.11. Gráficos de análisis inicial MXNEUR | 78 |
| 4.12. Gráficos de análisis inicial MXNCAD | 78 |
| 4.13. Gráficos de análisis inicial MXNBRL | 79 |
| 4.14. Gráficos de análisis inicial M2 | 79 |
| 4.15. Gráficos de análisis inicial M10 | 80 |
| 4.16. QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del IPC | 81 |
| 4.17. QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del MXNUSD | 81 |
| 4.18. QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del M5 | 82 |
| 4.19. Parámetros estimados para la DGVE ajustada a la cola de cada instrumento | 83 |
| 4.20. Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a IPC | 85 |
| 4.21. Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a MXNUSD | 85 |
| 4.22. Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a M5 | 85 |
| 4.23. QQ-plot ajuste de la DGVE a Índices Bursátiles | 86 |
| 4.24. QQ-plot ajuste de la DGVE a Tipos de Cambio | 86 |
| 4.25. QQ-plot ajuste de la DGVE a curvas de Bonos Genéricos | 87 |
| 4.26. Estimador de la cola de la distribución ajustada DGVE | 87 |

| | |
|--|-----|
| 4.27. Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con ajuste de DGVE | 88 |
| 4.28. Gráficos Threshold MXNUSD | 90 |
| 4.29. Gráficos Threshold IPC | 91 |
| 4.30. Gráficos Threshold M5 | 92 |
| 4.31. Gráficos Threshold NDQ | 92 |
| 4.32. Gráficos Threshold FTSE | 93 |
| 4.33. Gráficos Threshold SPX | 93 |
| 4.34. Gráficos Threshold MXNEUR | 94 |
| 4.35. Gráficos Threshold MXNCAD | 94 |
| 4.36. Gráficos Threshold MXNBRL | 95 |
| 4.37. Gráficos Threshold M2 | 95 |
| 4.38. Gráficos Threshold M10 | 96 |
| 4.39. Umbrales seleccionados para residuales | 96 |
| 4.40. Parámetros estimados de las DGP ajustadas a las colas de instrumentos . . | 97 |
| 4.41. QQ-plot ajuste de la DGP a Índices Bursátiles | 98 |
| 4.42. QQ-plot ajuste de la DGP a Tipos de Cambio | 99 |
| 4.43. QQ-plot ajuste de la DGP a curvas de Bonos Genéricos | 99 |
| 4.44. Estimador de la cola de la DGP ajustada | 100 |
| 4.45. Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con ajuste de DGP | 101 |
| 4.46. Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con método Paramétrico Normal | 102 |
| 4.47. Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con método Histórico | 102 |
| 4.48. Backtest por Instrumento con fecha final 15 de Septiembre de 2008 | 105 |
| 4.49. Backtest de Índices Bursátiles hasta el 5 de Diciembre de 2007 | 109 |
| 4.50. Backtest por instrumento hasta el 31 de diciembre de 2008 | 111 |
| 4.51. Backtest Gráfico IPC al 31 de Diciembre de 2008 | 113 |
| 4.52. Backtest Gráfico NDQ al 31 de Diciembre de 2008 | 114 |
| 4.53. Backtest Gráfico FTSE al 31 de Diciembre de 2008 | 114 |
| 4.54. Backtest Gráfico SPX al 31 de Diciembre de 2008 | 115 |
| 4.55. Backtest Gráfico MXNUSD al 31 de Diciembre de 2008 | 115 |
| 4.56. Backtest Gráfico MXNEUR al 31 de Diciembre de 2008 | 116 |
| 4.57. Backtest Gráfico MXNCAD al 31 de Diciembre de 2008 | 116 |
| 4.58. Backtest Gráfico MXNBRL al 31 de Diciembre de 2008 | 117 |
| 4.59. Backtest Gráfico M2 al 31 de Diciembre de 2008 | 117 |
| 4.60. Backtest Gráfico M5 al 31 de Diciembre de 2008 | 118 |
| 4.61. Backtest Gráfico M10 al 31 de Diciembre de 2008 | 118 |
| 4.62. Nivel de VaR con cambio en el porcentaje de construcción de colas | 125 |
| 4.63. Backtest de Índice con colas al 2% y bloques de 40 días al 31 de Dic de 2008 | 126 |
| 4.64. Backtest IPC al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2% . . | 127 |
| 4.65. Backtest NDQ al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2% . | 127 |
| 4.66. Backtest FTSE al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2% . | 127 |
| 4.67. Backtest SPX al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2% . . | 127 |
| 4.68. Backtest al 31 de Dic de 2008 con regla para construcción de colas | 130 |
| 4.69. Comparación Backtest al 31 de Dic del IPC | 130 |
| 4.70. Comparación Backtest al 31 de Dic del NDQ | 130 |

| | |
|---|-----|
| 4.71. Comparación Backtest al 31 de Dic del FTSE | 131 |
| 4.72. Comparación Backtest al 31 de Dic del SPX | 131 |
| 4.73. SMVaR al 31 de Dic de 2008 | 132 |
| 4.74. Portafolios Construidos | 136 |
| 4.75. σ_{t+1} estimada por portafolio | 136 |
| 4.76. Umbrales seleccionados | 137 |
| 4.77. Parámetros estimados para la DGP | 137 |
| 4.78. Nivel de VaR por portafolio al 15 de Sep de 2008 | 137 |
| 4.79. Nivel de VaR por sumas ponderadas al 15 de Sept de 2008 | 139 |
| 4.80. Comparativos Backtest Gráfico de portafolios al 31 de Dic de 2008 | 140 |
| 4.81. Comparativo Backtest DGP vs Normal | 142 |
| 4.82. Backtest de VaR con regla de construcción de colas al 31 de Dic de 2009 . . | 143 |

Introducción

La correcta medición de riesgos financieros es uno de los problemas más antiguos analizados por economistas y financieros. Se han desarrollado múltiples modelos que en su mayoría se basan en herramienta estadísticas. Como resultado de la crisis de 1987 se desarrolló el modelo de Valor en Riesgo (VaR) como se conoce al día de hoy; un umbral tal que la probabilidad de que las pérdidas observadas del portafolio excedan ese umbral es un nivel dado.

A partir de esta idea se desarrolló el modelo de VaR con distintos supuestos. De entre los supuestos con más éxito en el gremio destacan el de normalidad en la distribución de los log-rendimientos de los instrumentos financieros para el desarrollo del modelo de VaR Paramétrico Normal, la correlación de los factores de riesgos a partir de una distribución Normal Multivariada para el modelo de VaR Monte Carlo y el paramétrico y la probabilidad uniforme para los niveles observados en los factores de riesgos para el modelo de VaR Histórico.

Sin embargo, muchos de estos modelos segregan las observaciones extremas. Ya sea directamente por el modelo, como el asumir distribuciones normales para los log-rendimientos, o por decisión de los administradores de riesgos, bajo el argumento de que estos eventos (como el 9/11) provocan una deformación en la medida que no permite una lectura clara de la misma.

La crisis de 2008 fue una oleada de eventos extremos, por lo que en la mayoría de las instituciones la probabilidad de exceder el nivel de VaR sobrepasó el nivel que le era dado. Además las pérdidas observadas eran mucho mayores al nivel de VaR. La medida de VaR que fue aclamada a finales de los 90's por el gremio financiero y también por las autoridades, parecía ser insuficiente, incluso errónea.

La crisis de 2008 o Crisis Subprime provocó, inicialmente, una desestimación del VaR como medida de riesgos, así como grandes cambios en regulación financiera encaminados no propiamente al control de los riesgos que enfrenta una institución, en cambio promueven, en cierto grado, la disminución de riesgos que asume la institución. También provocó nuevos desarrollos de metodologías, cambios en los supuestos de las metodologías

existentes y en general, un nuevo enfoque y apreciación de la medida.

Dentro de las metodologías que fueron retomadas y a las cuales se les dio una mayor consideración, se encuentra el VaR con Valores Extremos, el cual se basa en la Teoría de Valores Extremos. Con esta metodología se ajusta una distribución límite propia para la cola de cada serie de log-rendimientos, es decir, para los valores atípicos o extremos de ésta.

Inicialmente la Teoría de Valores Extremos tenía su aplicación en campos como meteorología e hidrología. Si, por ejemplo, se deseaba construir un edificio a la orilla del mar, la distribución ajustada a la cola de la serie de nivel del mar registrado en cierto tiempo proporcionaba una distribución para los niveles del mar máximos registrados, con la cual era posible determinar un umbral para el nivel de mar que sería excedido con un nivel de probabilidad dado. Así se podría edificar a una distancia tal que la probabilidad de que el crecimiento de la marea superara esa distancia, fuera un nivel mínimo dado.

Más tarde comenzó a aplicarse la Teoría de Valores Extremos a series financieras y en particular para el cálculo del VaR. El resultado es una metodología que ajusta una distribución a las colas de log-rendimientos que tiene una mayor convergencia a la distribución empírica de las colas que una distribución normal.

Evidentemente esto provocará un nivel de VaR que provea un umbral más adecuado para pérdidas extremas. Sin embargo, la pregunta que surge ante esta situación y la que dio pie al desarrollo de esta trabajo es: “Si el modelo Paramétrico Normal resultó insuficiente ante las pérdidas observadas durante la Crisis Subprime ¿Será suficiente para la medición de riesgos el modelo de VaR con Valores Extremos ante la misma crisis?”

Podría suceder que al ser observaciones no registradas históricamente (como lo fueron las pérdidas registradas durante 2008) el modelo con Valores Extremos también resulte insuficiente. Además ¿Cómo saber si las observaciones extremas son resultado del comportamiento propio del fenómeno que se estudia o son consecuencia de otro factor? Por ejemplo; supongamos que se da un umbral para la medición de la precipitación pluvial mínima en cierta región, el cuál será superior a las próximas mediciones con un nivel de probabilidad dado. Sin embargo, las siguientes n mediciones se registran por debajo de dicho umbral mínimo, provocando que el nivel de probabilidad de excesos observados supere al nivel de probabilidad dado. ¿Cómo saber si este fenómeno es resultado de un mal modelo

ajustado a la serie histórica de mediciones de la precipitación pluvial de la región o es resultado de una disminución en la precipitación pluvial consecuencia del deterioro ambiental? Esta misma pregunta podría trasladarse al ámbito financiero.

En el primer Capítulo de este trabajo se hace una descripción de los factores que rodearon algunas de las crisis financieras más significativas, con la intención de mostrar que la mayoría de estas crisis fueron resultado de las decisiones de los participantes de mercado y no por movimientos predecibles en el comportamiento de los instrumentos financieros. La finalidad de este Capítulo es ser conscientes de un posible fallo de la aplicación del VaR con Valores Extremos en la Crisis Subprime, el cual puede ser resultado de que, al ser el VaR una medida estadística, no podrá mostrar una eficiencia total ante observaciones que son producto del comportamiento de los participantes de mercado y no es consecuencia de una metodología poco robusta.

En el Capítulo 2 se describen algunos de los tipos de riesgos que comúnmente son vigilados por los administradores de riesgo de un fondo de inversión, como el Riesgo Crediticio o el Riesgo de Liquidez. Así podremos observar que la medida de VaR únicamente nos proveerá de un umbral para posibles pérdidas relacionadas con la fluctuación de precios. Sin embargo, debe tenerse siempre presente que existen muchos otros factores que pueden afectar los rendimientos de un fondo de inversión. Más aún, si estos factores afectan de manera generalizada a los participantes de mercado, estas afectaciones repercutirán en la volatilidad de precios, lo que se traducirá en un aumento del VaR. Debe tenerse en cuenta que este aumento de VaR no se generará a la par de las afectaciones provocadas por otros tipos de riesgo, será un movimiento secundario. En cuanto a Riesgo de Mercado, se describen detalladamente las metodologías más usuales en el medio financiero. De esta forma, cuando se realice la comparación de los resultados de cada modelo, se podrá inferir qué supuestos de los modelos causan las diferencias encontradas y podremos generar un mejor análisis de estas diferencias.

En el Capítulo 3 se describe de forma amplia la Teoría de Valores Extremos, que incluye el desarrollo de las 2 metodologías para el análisis de colas a las cuales se les ajustará una distribución límite, selección de Máximos por Bloques y Máximos a un Umbral (peak over threshold) y la descripción de las distribuciones generalizadas que ajustan

a los máximos de acuerdo a cada método de selección. Nos es de interés la descripción de ambas metodologías, pues también se analizarán las diferencias entre éstas, esperando poder fundamentar la preferencia de uso sobre alguna de ellas. Ya que el ajuste de la distribución límite se realiza a la cola de los datos y no a la serie completa, también se describen los “estimadores de colas”, los cuales generan una estimación del cuantil z_q ligado a la distribución empírica de la serie, a partir de la distribución límite ajustada a la cola. Finalmente, se describen algunas herramientas estadísticas que son de utilidad para verificar que las distribuciones límites ajustadas, concuerdan con las distribuciones empíricas de las colas.

El Capítulo 4 es el más amplio. Se aplica la Teoría de Valores Extremos al cálculo de VaR, empleando las herramientas contenidas en el Capítulo 3. Sin embargo, para la correcta aplicación de la Teoría a series financieras, se recurrirá al uso de modelos GARCH(p,q) los cuales se describen. Se calculan los niveles de VaR para distintos instrumentos financieros mediante los 2 métodos de Valores Extremos, el método Paramétrico Normal y el método Histórico y se realiza un primer análisis. Nuestro interés se centrará en la confianza de cada modelo, entendida como que el nivel de probabilidad de excedencias al VaR es respetado. Por tanto, realizaremos un Backtest móvil a cada metodología, a fin de lograr el análisis que se desea. Este Backtest se realiza en distintos periodos para observar el cambio en el comportamiento de cada modelo, y en especial de los modelos extremos. Se observan distintos periodo de análisis, previo a la Crisis Subprime, al día anterior marcado como la fecha de inicio de la Crisis Subprime y durante la Crisis Subprime. Al encontrar que los modelos extremos, si bien son más confiables que los modelos convencionales, aún muestran fallas en cuanto a los excesos observados, se probaron distintas alteraciones al modelo de Máximos a un Umbral con la intención de mejorar la confianza, encontrando que la más eficiente es una modificación a la construcción de las colas en cuanto a la cantidad de información que se selecciona. Finalmente se prueban los modelos en carteras formadas con los instrumentos tratados en el Capítulo y se realiza un nuevo Backtest. Adicionalmente se analiza la posibilidad de emplear las distribuciones ajustadas a las colas como indicadores para la disminución o aumento del VaR de una cartera.

Finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo, en las cuales se hace

hincapié en la necesidad de una regulación del sistema financiero que incite a realizar un análisis de riesgos más completo y profundo y no que se centre en regulaciones limitantes. Esto deriva de otra conclusión, los modelos matemáticos que pudieran generarse responderán acorde a la información con la que se les alimenta; así, observaciones extremas que no son propias del comportamiento de los factores de riesgos y que provienen del comportamiento y las decisiones tomadas por los participantes de mercado, de ninguna manera podrán ser previstas por algún modelo.

Capítulo 1

Crisis Financieras y Crisis Subprime

1.1. Eventos Black Swan

El término fue empleado por el financiero Nassim Nicholas Taleb en 2007 para describir eventos financieros poco probables. Un Black Swan, o Cisne Negro, hace referencia a un evento que cumple con los siguientes tres atributos:

- Es un evento que se considera atípico, pues al no contarse con registros históricos de su ocurrencia e históricamente no haber ningún indicio que nos señale convincentemente su posibilidad, está fuera de las expectativas regulares
- El impacto de estos eventos es extremo y no es previsible.
- Después de su aparición el evento se racionaliza en retrospectiva como si pudiese haber sido previsto.

De este modo, podemos decir que un evento Black Swan es un hecho poco probable y no predecible de consecuencias extremas y que, una vez sucedido, puede encontrarse evidencia para su previsión en los datos anteriores a su aparición. Es un valor extremo en la ocurrencia de eventos.

El premio nobel de economía Joseph Stiglitz plantea que los Black Swan son eventos derivados de una distribución de colas pesadas. Es decir, un Black Swan es un valor extremo en las observaciones que se tienen de los niveles de mercados, así mismo hace hincapié en el hecho de que el sistema financiero no comprende ni pone la debida atención ante estos escenarios. De modo que en la actualidad estos eventos parecen observarse cada cierto tiempo y durante periodos más prolongados cada vez.

Dadas las fechas en que se comenzó a utilizar el término Black Swan, es que a la crisis de 2008 o crisis *Subprime* es a la que se categoriza como un evento de esta naturaleza, sin embargo, a lo largo de la historia se han observado diversos eventos de crisis en los mercados que pueden considerarse como eventos Black Swan.

1.2. Crisis Financieras

En 1907 la bolsa de Nueva York cayó casi 50% haciendo quebrar a muchos bancos y empresas, lo cual provocó desconfianza en los participantes y retracción de la liquidez del mercado. La caída fue resultado de un fallido intento por manipular el precio del cobre mediante la compra masiva de acciones de la United Copper Company, pues los bancos que invirtieron grandes sumas para este esquema de arrinconamiento de mercado, sufrieron grandes pérdidas que los llevaron a la quiebra . En aquellos años Estados Unidos no contaba con un banco central y fue el banquero J.P. Morgan junto con otros banqueros quienes, empeñando su propia fortuna e inyectando capital al mercado, apuntalaron el sistema financiero para superar el descalabro.

Años después en 1929 el mercado financiero sumaba ya varios años de evolución vertiginosa, evolución que inició al comenzar la primera Guerra Mundial, pues con este acontecimiento Estados Unidos fungió prácticamente como único proveedor del mercado. Las ganancias que generaba la bolsa atrajeron a muchos inversionistas y la continua demanda hizo subir las acciones a niveles insospechados, en ese momento la cotización de la bolsa se convirtió en pura especulación generada por la alta demanda, sin reflejar en lo absoluto la verdadera solvencia de una sociedad. En octubre de 1929 la especulación no fue sostenible y la bolsa colapsó, perdiendo en días lo que se había acumulado en años. En ese momento

la Reserva Federal, FED, estaba ya en funcionamiento, su intervención fue reducir la oferta monetaria y aumentar las tasas de interés, lo que empeoró la liquidez del mercado y llevó a oleadas de quiebras bancarias iniciando así la gran depresión. La crisis y la superproducción provocaron una caída en los precios de consumo, sin que éste aumentara, por lo que se recurrió a la exportación desmesurada, lo que provocó la expansión de la gran depresión a otros países. Para 1938 el valor del comercio mundial se encontraba por debajo de la mitad del nivel de 1929. No fue hasta el fin de la segunda Guerra Mundial que la recuperación de esta crisis se consideró concluida, después de que los países afectados adoptaran medidas proteccionistas a la producción propia, como el aumento de aranceles y tipos de interés.

El 19 de octubre de 1987 la bolsa vuelve a colapsar, esta vez en un solo día de operación el índice Dow Jones cae un 22.6%. En esta ocasión fue la especulación con instrumentos derivados Futuros lo que produjo el declive. El mercado de Futuros recibía miles de millones de dólares en minutos ese día, provocando inestabilidad en los niveles de la bolsa de valores, la intención de los especuladores fue vender ese mismo día, sin embargo, la venta se realizó de forma simultánea, pero eran tantas ordenes que el mercado no pudo manejarlas al no haber compradores. En el momento se culpó al recién instalado y puesto en funcionamiento mercado electrónico, sin embargo, el origen del problema fue la especulación con instrumentos de alto apalancamiento, contratos que se realizaron sin cautela alguna. Ante tal caída la confianza de los inversionistas se perdió y el mercado se congeló. Esta vez la intervención de la FED consistió en bajar inmediatamente las tasas de interés y el mercado comenzó una rápida recuperación. Sin embargo en 1990 estos eventos repercutieron sobre la economía real.

En 1994 México fue el protagonista de una nueva crisis financiera, pues en ese año el gobierno aumentó la emisión de deuda pagadera en dólares (Tesobonos) y no en moneda nacional, la situación del país indicaba a los especuladores que el tipo de cambio aumentaría en favor del dólar y comenzó un proceso de venta de deuda en pesos para comprar estos papeles. A finales del año, el Banco de México no contaba con las reservas en dólares suficientes para solventar los pasivos a corto plazo: había un déficit en la cuenta corriente, un incremento histórico en el gasto fiscal en el año de 1994, el cuál fue sostenible también con la emisión de Tesobonos y una sobrevaluación del peso. Esas circunstancias provocaron

una depreciación del peso y un aumento en la tasa de CETES. La fuerte devaluación que empezó a sufrir el peso, esperada por los especuladores y provocada en parte por ellos mismo, se interpretó como un escenario que terminaría en catástrofe. Esta segunda especulación provocó la huida de capitales y el derrumbe de los mercados. Para marzo de 1995 la crisis había provocado ya un aumento en el tipo cambiario contra el dólar de más del 100 %, tasas CETES a 28 días de 69.54 % y una caída acumulada del IPC del 54 %. Finalmente, eventos como el levantamiento del EZLN y el asesinato de varias figuras políticas, complicaron el panorama financiero desde una perspectiva internacional. Para contrarrestar la crisis fue necesario el otorgamiento de paquetes económicos de emergencia de distintas naciones como EUA, Brasil, Canadá y el FMI, junto con controles estrictos de la política fiscal y el rescate bancario por parte del gobierno federal.

En julio de 1997 comenzó la denominada crisis Asiática, causada por la sobrevaluación de las monedas asiáticas debido a un boom financiero por inversiones en las crecientes economías del continente, dadas las altas tasas de retorno que ofrecían. Estas tasas de retorno elevadas atraían grandes afluentes de capital, lo que propició altas tasas de crecimiento en la zona. Este fenómeno fue conocido como "*milagro económico asiático*" y fue ampliamente celebrado por el FMI y el Banco Mundial. A este respecto, el economista Paul Krugman señaló desde 1994 que el crecimiento económico en la región se debía a la inversión de capital y no al crecimiento de la productividad y que solo la productividad podría generar prosperidad sostenida. El bath tailandes fue la primera moneda en comenzar una apresurada devaluación por reajuste de valuación que comenzaron tras la decisión del gobierno de hacer fluctuar su moneda y desligarla del dólar en un intento por apreciarla aún más. Por efecto dominó, se arrastró a la devaluación a las monedas de Malasia, Indonesia, Taiwán, Hong Kong y Corea del Sur. Finalmente, tres meses después dejó de ser una crisis local y se propagó mediante las inversiones sostenidas por otros países en la zona, provocando la denominada "Primera gran crisis de la globalización". La globalización de la crisis provocó disminuciones importantes en las bolsas del mundo. Otra de las causas señaladas responsabilizan a los gobiernos por medidas negligentes y altos índices de corrupción, así como la falta de regulación financiera. El Fondo Monetario Internacional, FMI, intervino en

esta crisis, brindando apoyo económico a las naciones en problemas, condicionando éste a la implementación de una serie de reformas económicas basadas en los principios económicos del neoliberalismo. Como consecuencia de esta crisis, más de un millón de tailandeses y 21 millones de indonesios, pasaron oficialmente a considerarse pobres.

En agosto de 1998 se observaron los primeros signos de una nueva crisis, la crisis Rusa, que comenzó con una abrupta devaluación del rublo ruso, que hasta entonces se había forzado a mantener una tasa fija de cambio con las divisas extranjeras para evitar confusión pública. La crisis Asiática había provocado un fuerte declive en los precios de commodities, instrumentos financieros cuyo valor depende directamente en los precios de las materias primas, lo que causó una baja en la demanda de materias primas. Aquellos países que dependían de la exportación de las materias primas, se vieron afectados por la baja en precios de éstas. El petróleo sufrió las afectaciones más severas en sus precios, de manera que al ser el recurso que mayores ingresos fiscales proporcionaba a Rusia, causó serias afectaciones en su economía. Sin embargo, la causa primordial de la crisis fue la falta de pago de impuestos por parte de la industria energética y manufacturera, lo que provocó la especulación de que el gobierno ruso se vería imposibilitado para el cumplimiento de sus obligaciones domésticas, se tradujo en huidas masivas de capital encruceciendo los problemas que los mercados financieros enfrentaban, forzando al gobierno ruso a subir las tasas de retorno en su deuda para atraer capital.

En 2001 una nueva crisis financiera golpea el mercado estadounidense. Esta vez fue la caída generada por las empresas que operaban por internet, las cuales habían tenido un crecimiento inesperado en respuesta al auge de este medio de comunicación. De igual manera que en crisis anteriores, había reventado la burbuja creada alrededor de estas empresas y las sobrevaluaciones comenzaban a ajustarse. Probablemente los impactos de esta crisis no hubiesen cobrado relevancia de no ser por el ataque terrorista del 11 de septiembre de 2001, lo que incrementó la crisis y culminó con una desaceleración de la actividad financiera y económica de dos años que ya se venía gestando desde inicios del año 2000.

1.2.1. Antecedentes de la Crisis de 2008

El primer escenario a considerar es que en aquellos momentos la atención de los bancos centrales se concentraba en el control de la inflación, dejando de lado variables como la expansión del crédito, la evolución de los precios de activos o el déficit exterior. Así, la FED decide reducir la Federal Found Rates de 6.5 % a 1 % a finales del año 2000 para combatir la recién iniciada desaceleración económica de Estados Unidos. Igualmente la tasa hipotecaria a 30 años bajo de 8 % a 5.5 %, mientras la tasa ajustable pasaba de 7 % a 4 %. Otro factor, considerado ahora como un error, fue en cuanto a regulación. Al decidir eliminar la barrera que se tenía entre la banca comercial y la banca de inversiones a finales de los noventa, sin asignarse controles de apalancamiento a la banca de inversiones, de manera que se volvió factible recurrir al público general para financiar así fondos de inversión con altos niveles de apalancamiento y de riesgo. Esto generó una sobreacumulación de capitales, creando la necesidad de nuevos instrumentos en los cuales invertir.

La respuesta fueron los *CDO's*, *Collateralized Debt Obligations*, un nuevo tipo de instrumentos derivados sintéticos, los cuales empaquetaban títulos muy diversos en cuanto a comportamiento y sector al que pertenecían, de igual forma la calidad de los instrumentos empaquetados era muy diversa. Estos títulos, que comenzaron a popularizarse rápidamente y se expandieron globalmente, contenían tantos títulos que era muy complicado seguir su comportamiento desde su conformación, los tenedores se limitaban a seguir el precio del instrumento, el cual era derivado de la rentabilidad de todos sus instrumentos contenidos.

El auge en los mercados inmobiliarios ya había comenzado en los noventas y acumulaba para el año 2000 un sostenido crecimiento en los precios, pero la burbuja inmobiliaria se volvió todo un fenómeno entre 2000 y 2002 por las condiciones que se habían creado en las tasas, reducidas recientemente. Aunado a esto, la baja rentabilidad en los mercados, así como las recientes pérdidas observadas en esas épocas, creó una orientación masiva del capital especulativo a los mercados inmobiliarios e hipotecarios. Además las cifras apoyaban esta orientación. En 1998 y 2006 los precios de bienes raíces aumentaron un 93 %, mientras en el periodo de 2000-2002 el valor de las casa había registrado un aumento de 7.5 % anual y el valor de las propiedades poseídas en Estados Unidos se elevaba drásticamente, de tal

forma que pasó de 10 billones de dólares en el 2000 a 20 billones de dólares en el 2005.

Al coincidir los 2 factores anteriores, se procedió a crear empaquetados que, dentro de su constitución, tenían títulos hipotecarios, la creciente demanda de créditos hipotecarios facilitó la creación de nuevos instrumentos que prometían altos rendimientos por el buen momento que pasaba el mercado inmobiliario. Los *CDO* 's estaban ya operándose en muchas bolsas del mundo.

El mercado se saturó, no había más créditos hipotecarios que empaquetar y el mercado vio oportunidad en los llamados créditos *SubPrime*. Los créditos *Prime* eran aquellos otorgados a individuos con un buen historial crediticio, con probabilidades de incumplimiento bajas, mientras los créditos *SubPrime* eran los otorgados a aquellos con historiales crediticios deficientes y con altas probabilidades de incumplimiento, préstamos sin garantías y con muy alto riesgo. Así la comercialización de *CDO* 's continuaron distribuyéndose entre fondos de inversión y entidades financieras de todo el mundo, ahora empaquetando deuda de muy alto riesgo dentro de los instrumentos.

La racionalización para otorgar estos créditos, era el creciente aumento de las viviendas, así si los deudores *SubPrime* no podían hacer frente a sus obligaciones tenían la opción de vender su propiedad, pagar su crédito y aún generar una plusvalía. Lo cual daba una relativa seguridad sobre los instrumentos generados a partir de estas hipotecas, dicha seguridad era confirmada por las agencias calificadoras incluso con las notas más altas (AAA).

De tal suerte que para 2006 los créditos *SubPrime* representaban el 21 % de los préstamos otorgados y sumaban la cantidad aproximada de 600 billones de dólares. Además, como en los años anteriores recientes, las tasas de préstamo eran ínfimas y llevaban ya cerca de 4 años en esas condiciones y los precios de inmuebles seguían aumentando, los prestatarios comenzaron a solicitar segundas hipotecas sobre el valor que había ganado su inmueble.

Mientras tanto, la economía de los Estados Unidos se deterioraba rápidamente entre los años 2000 y 2003, en buena parte por los gastos de guerra que habían aumentado considerablemente al iniciar la guerra contra Irak en marzo de 2003. La deuda gubernamental aumentaba mientras los ingresos disminuían, a partir de 2003 empezaron a registrarse déficits de hasta medio billón de dólares. Así, la inflación comenzó a descontrolarse, por lo

que la FED inició a partir de Junio de 2004 un alza en las tasa de interés desde 1 % a 5.25 % en junio de 2006, provocando un aumento al costo del crédito.

Además, el sostenido crecimiento en los precios de inmuebles se detuvo, mientras los intereses de las hipotecas aumentaban de la mano de la tasa de referencia. Para ese momento se calculaba que el 45 % de la deuda *Subprime* estaba en manos de prestatarios sin ninguna solvencia ni posibilidad de pago. Esta imposibilidad de pago puso en serios problemas a las instituciones financieras que habían concedido estos préstamos y además redujo considerablemente el valor de las casas, un 25 % entre 2006 y diciembre de 2007, lo que agravó la situación y dio inicio a la crisis Inmobiliaria de 2007.

Los *CDO*'s se habían comercializado ya derivados sobre estos instrumentos, los cuales habían sido calificados como AAA, sin considerar la deuda *SubPrime* que incidiría en su rendimiento y cuya sensibilidad a la volatilidad era mucho mayor por la propia construcción de los instrumentos. Una vez que los deudores dejaron de pagar, la fuente de ingresos para mantener estos instrumentos desapareció y comenzó el caos.

Ya en 2007 era evidente que los niveles de pérdidas del mercado hipotecario estaban muy por arriba de las medidas estadísticas históricas y un mercado que procuraba financiamiento al sector inmobiliario se volvió totalmente ilíquido de forma repentina. Empezaron las declaraciones de quiebra de algunos de los fondos como en el caso de Bear Stearns o de la institución completa en el caso de New Century Financial. Así como pérdidas realizadas o pérdidas potenciales millonarias, tanto en instituciones estadounidenses como en instituciones europeas.

Durante todo el segundo semestre de 2007 y el primero de 2008 la oleada de quiebras fue continua. Cientos de entidades financieras, hipotecarias y bancarias quebraban. La inestabilidad financiera provocó la salida de la mayoría del capital público y el retiro de recursos de fondos de inversiones, lo que agravó los problemas de liquidez. De modo que algunas instituciones optaron por congelar los fondos e imposibilitar la salida de recurso.

El punto crítico de esta situación fue marcado por la quiebra de Lehman Brothers el 15 de septiembre de 2008, el cuarto mayor banco de Inversión en Estados Unidos. El banco mantenía enormes sumas de dinero en posiciones relacionadas con papel hipotecario, de forma que en el primer semestre de 2008 sus acciones perdieron el 73 % de su valor.

Pese a que la entidad estaba inundada de deuda de alto riesgo, es notable el hecho de que las agencias calificadoras la clasificaban con la más alta calidad crediticia, AAA, incluso pocos días después de comenzar el debacle de la institución. La quiebra fue cifrada en 750 mil millones de dólares y el banco fue vendido por partes a diversas instituciones, siendo Barclays la mayor compradora.

Este hecho marco el inicio de un periodo de completa iliquidez en los mercados, en un momento en que la mayoría requería financiamiento. Los capitales no circulaban, pues nadie estaba seguro de la calidad crediticia de los demás participantes de mercado, ni qué tan intoxicadas estaban sus carteras, de forma que era posible que cualquier entidad quebrara de un día a otro. Esta situación condujo a un problema generalizado de solvencia en los mercados, encrudeció la situación y comenzó a infectar a la mayoría de las bolsas de los países desarrollados.

La respuesta a esta situación fue la baja generalizada de las tasas de referencia por parte de los bancos centrales, a fin de reducir el coste del préstamo interbancario. Las intervenciones, tanto en mercados como directamente en las instituciones afectadas por parte de organismos gubernamentales e internacionales, trataban de controlar esta situación. Los bancos centrales trataban de ofrecer liquidez en los mercados locales, pero la desconfianza seguía teniendo mayor peso, mientras las ventas anticipadas ya fuera por salidas de capital o por necesidades de liquidez, seguían generando altas volatilidades, caídas en los precios de renta variable e índices bursátiles, altas volatilidades en mercados cambiarios, así como un aumento generalizado en las tasa de retorno de papeles de deuda.

No se pudo evitar la propagación de esta crisis financiera a la economía real. Los descalabros bursátiles continuaron durante los 3 primeros trimestres de 2009, año en el que se propagó una contracción de la economía global que registró un nivel de -0.6% , una actividad económica reducida jamás antes vista y una caída generalizada y profunda en los precios de materias primas, incluido el petróleo, así como altas volatilidades en los mercados cambiarios y un aumento generalizado en los papeles de deuda.

Las consecuencias de los eventos ocurridos fueron de tal magnitud que muchos economistas sostienen que la crisis de deuda gubernamental en la zona euro es derivada de los sucesos ocurridos en 2008.

1.2.2. Papel del VaR durante la crisis de 2008

El VaR es un modelo de medición de riesgos que fue adoptada y popularizada a principios de los 90's, principalmente por la firma JP Morgan. Su sencillez de cálculo y razonamiento, así como el hecho de que era aplicable a todos los activos, lo llevaron a sustituir al modelo CAPM propuesto por Markowitz e incluso el Comité de Basilea de Supervisión Bancaria lo adoptó y validó como base para fijar los requisitos de capital de entidades financieras. La idea era que si se mantenía como requisito de capital del valor de VaR de una cartera, de presentarse este nivel de pérdida, los bancos tendrían la liquidez para hacerle frente. Sin embargo, se permitió a cada entidad calcular la medida bajo sus propias suposiciones de cálculo.

Dentro de las muchas variables que los bancos debían fijar se encontraba la probabilidad con que ocurriría el nivel del VaR, el cuál fue fijado por la mayoría a un 1%. También se debía establecer un horizonte para la distribución histórica, en este caso las selecciones fueron variadas. Comúnmente se tomaban para este propósito los rendimientos observados en los 1000 días anteriores, aproximadamente los 4 años anteriores, es decir, para los cálculos de VaR realizados a finales 2006 ya no se contemplaban los escenarios de 2002.

Una vez iniciados los periodos de alta volatilidad provocados por la crisis hipotecaria en 2007, los niveles de VaR comenzaron a subir de forma generalizada, sin embargo, algunas de las pérdidas observadas eran mucho mayores a las estimadas por la medida, lo que provocó que gran parte del mercado volteara a señalar al VaR como el responsable de la iliquidez de mercado, pues los requerimientos de capital eran insuficientes comparados con las pérdidas reales.

Otro problema fue que las pérdidas se observaron de manera recurrente, aunque no todas superaban el nivel de Var, eran bastante cercanas. Así pues el VaR se mostró insuficiente como medida de riesgo.

Sin embargo, como podemos observar en los diversos acontecimientos de las crisis, el riesgo crediticio no estaba siendo medido adecuadamente, como fue evidenciado con el caso de Lehman Brothers y en general con la deuda *SubPrime*. Mientras la crisis de liquidez fue causa de las múltiples quiebras repentinas y el desconocimiento de la situación financiera de

los demás participantes de mercado, la mayoría de las quiebras repentinas fueron consecuencia directa por las minusvalías generadas por estos papeles, los cuales no tenían registros de pérdidas extremas históricas, por la burbuja hipotecaria creada por los mercados. Al basarse el VaR en la distribución histórica era imposible que la medida arrojara un nivel de pérdidas como los que empezaron a observarse. Por otra parte, la propagación tan rápida de la crisis entre sectores y mercados no fue consecuencia de la desregulación sobre la que funcionaba en ese momento, pero sí facilitó el proceso.

Además no se contemplaba una medición completa sobre el monto de las posibles pérdidas si el VaR se veía excedido. Algunas de las críticas a la medida más recurridas fue el hecho de presentar pérdidas mucho mayores a las del VaR. Al presentarse 2 de las pérdidas generalizadas más fuertes, ambas en el mes de octubre, se dijo entonces que además el cálculo de la probabilidad de exceso también era erróneo. Ambas críticas hacen notar el poco entendimiento que el mercado financiero tenía sobre la medida.

De forma que no sería imprudente suponer que el VaR no fue el responsable o el agravante de la crisis financiera de 2008, sino el mal uso de esta medida, la relajación en las suposiciones de cálculo y la interpretación incorrecta que algunos le daban.

La suposición de normalidad en las distribuciones de rendimientos de los activos financieros, pudieron incidir en los bajos niveles de VaR calculados previo a la crisis financiera.

En el presente trabajo se compararán cálculos de Var con distintos modelos de VaR, incluido un modelo utilizando distribuciones propias, a fin de analizar en qué magnitud repercutió en los cálculos el asumir Normalidad en las distribuciones. Así mismo probaremos algunos modelos en los cuales los datos serán aumentados por escenarios extremos observados, de tal suerte que la medida considere en todo momento la posibilidad de ocurrencia de valores extremos, y no únicamente en un cierto periodo posterior a la ocurrencia.

Capítulo 2

VaR para medición de Riesgo de Mercado y otros tipos de Riesgo

2.1. Riesgo Financiero

Cualquier participante del mercado financiero está expuesto a diversos factores que suponen amenazas para sus intereses, riesgos que ponen en peligro el valor de las inversiones que mantiene en el mercado. Hasta hace algunos años, se tenía la idea de que un inversionista que mantuviera únicamente inversiones en instrumentos gubernamentales locales, estaría exento de todo riesgo. Sin embargo con los eventos y niveles observados en los últimos años se ha comprobado que esta idea es completamente equívoca. Tomemos por ejemplo los Bonos del tesoro estadounidense, si bien las obligaciones del gobierno para con los tenedores de dichos instrumentos eran atendidas en su totalidad, la tasa ofrecida por estos Bonos resultaba menor a la tasa de inflación anual observada, Este comportamiento se mantuvo por varios cuatrimestres, lo que implicaba que la tasa real obtenida por los inversionistas era negativa, es decir, los inversionistas perdían dinero al invertir en Bonos del Tesoro. Otro claro ejemplo son los múltiples casos suscitados a lo largo de 2011 y 2012 en países europeos, cuyas deudas en papel gubernamental y deudas externas, se declararon problemáticas o impagables. Inversiones en países como España, Italia y Grecia, sufrieron grandes pérdidas por esta situación. Por lo tanto y con toda seguridad afirmamos; todo

participante del mercado financiero está expuesto al riesgo de perder o reducir el valor de sus inversiones.

Normalmente el riesgo financiero es definido como la incertidumbre de los flujos futuros y comúnmente es medido a través de la dispersión de los datos observados. Tal es el caso de la propuesta de Markowitz en 1952 [10] de medir la incertidumbre del valor de los instrumentos financieros, a través de la varianza muestral de los valores observados históricamente. Existe una gran variedad de riesgos identificados y actualmente considerados en el mercado financiero, Riesgo Legal, Riesgo de Concentración, Riesgo Operativo, Riesgo Informático, Riesgo Crediticio, Riesgo de Liquidez y Riesgo de Mercado. Si bien a todos éstos se les puede asignar una medida cuantitativa, es en los tres últimos (Crediticio, Liquidez y Mercado) en el que los participantes de mercado centran su mayor atención. En particular, este trabajo está enfocado a la medición de Riesgo de Mercado mediante distintas metodologías de VaR.

2.2. Riesgo Crediticio

El Riesgo Crediticio o Riesgo de Crédito es la pérdida o minusvalía potencial, en el valor de las inversiones, que derivaría de la falta de pago de las obligaciones por parte de una contraparte o el emisor de un instrumento.

En el medio financiero, el principal indicador de riesgo crediticio es la calificación que ostenta un título o instrumento. Dicha calificación es otorgada por una empresa calificadora de valores, tales como Moody's, Fitch y S&P y representa la opinión de la calificadora acerca del riesgo relativo de la capacidad o intención de que un emisor realice el pago correspondiente en el plazo acordado. Esta opinión deberá estar fundamentada en el análisis de elementos cuantitativos y cualitativos, tales como razones financieras del emisor, el entorno socio-político-económico del país origen del emisor, su posición competitiva en mercado, etc. Una vez la calificadora ha emitido una calificación, es posible que la calificadora decida degradar o mejorar la calificación inicialmente otorgada, dados los resultados de estudios realizados posteriormente.

El aliciente para que un inversionista decida tomar posición en un instrumento que ostente una calificación menor a otro es la tasa de interés prometida por el emisor. Resulta lógico pensar que un emisor peor calificado deberá ofrecer una mejor tasa de interés para colocar en el mercado sus títulos o instrumentos.

En el caso de los administradores que deben cumplir con un régimen de inversión que los limite a mantener posiciones en instrumentos de calificación mínima también se debe considerar la pérdida por venta anticipada de aquellos instrumentos que se adquirieron con una calificación dentro de los límites indicados por el régimen de inversión pero que están en riesgo de ser degradados a una calificación no permitida. La pérdida generada por este tipo de riesgo puede ser medida mediante las llamadas matrices de transición de calificaciones, en las cuales se asigna la probabilidad de que un emisor que se encuentra en la calificación, por ejemplo, AAA, pase a encontrarse en la calificación, digamos, BB, en un determinado periodo de tiempo.

Aunque generalmente la pérdida por la materialización de Riesgos Crediticios es un porcentaje del valor del instrumento en cuestión, existe la posibilidad de que el instrumento entre en *default*, lo cual sucede cuando un instrumento incumple por completo con alguno de los pagos programados, ya sea de capital o intereses, que se tenían acordados con los tenedores del instrumento. Aun en estas situaciones es posible recuperar algún porcentaje del valor del instrumento.

Evidentemente cualquier participante de mercado está expuesto a este riesgo, pues cualquier inversión realizada tendrá una contraparte y dicha contraparte siempre tendrá una probabilidad de incumplimiento, aun cuando esta sea mínima. Por lo cual, las posibles pérdidas por incumplimiento, son un factor de riesgo que no debe ser descuidado en ningún momento.

Derivado del creciente uso de escenarios extremos en años recientes también se ha realizado el análisis de Riesgo Crediticio en el caso de eventos extremos, para ello se considera la calificación que correspondería a un emisor suponiendo que su situación actual es la misma que su peor situación histórica. De modo que el administrador pueda generar un

plan de acción en caso de que estas suposiciones empiecen a observarse dada una situación de crisis financiera o económica.

2.3. Riesgo de Liquidez

Otro de los riesgos que cobran mayor relevancia en la gestión de inversiones es el Riesgo de Liquidez, el cual refiere a la posible incapacidad del administrador del fondo para hacer frente a sus responsabilidades. Principalmente estas responsabilidades se derivan del uso de instrumentos derivados, instrumentos de inversión en los que se pacta requerimiento del capital por parte del emisor del instrumento y cuyo capital deberá ser aportado por el tenedor del instrumento o simplemente por el retiro de capital causado por la salida de inversionistas del fondo. Recientemente se han popularizado los instrumentos llamados Certificados de Capital de Desarrollo, algunos de los cuales mantienen en su estructura llamadas de capital programadas a los inversionistas. Aun cuando estos requerimientos de capital son programados, el administrador del fondo debe proveer el aprovisionamiento de liquidez para hacer frente a esta obligación.

Otro factor de riesgo de liquidez se presenta en un fondo de inversión que está conformado por capitales de distintos participantes, en cuyo caso debe considerarse también la posible salida de un participante del fondo, lo que implica la salida de capital.

Dado que generalmente estas las responsabilidades del fondo no pueden ser postpuestas se debe prever la liquidez necesaria para hacerles frente, es decir, contar con los montos en efectivo necesarios para hacer frente a dichas responsabilidades. En caso contrario el fondo deberá proveer liquidez deshaciéndose de posiciones anticipadamente lo cual representa una pérdida para el fondo, considerando que en estos casos la venta se realiza a descuentos inusuales.

De forma que para monitorear el Riesgo de Liquidez se deberán contemplar los requerimientos potenciales de liquidez generada por las situaciones antes mencionadas y analizar si la liquidez del portafolio es suficiente para hacer frente a estos requerimientos.

Por otra parte se deben medir las pérdidas potenciales derivadas de la venta anticipada de instrumentos.

Normalmente las pérdidas por venta anticipada son calculadas mediante el promedio de los spreads relativos SR_i , que son la diferencia entre las posturas de compra y venta, observados a lo largo de un determinado plazo para el instrumento i que se desea vender anticipadamente, así como la volatilidad σ_i que presenta el spread. Con estos datos se genera un Factor de Pérdida FL_i que será construido como

$$FL_i = \frac{1}{2}SR_i + n\sigma_i.$$

Donde n será elegido por el administrador del fondo, dependiendo de la severidad que desee aplicar a la medida, lo cual dependerá en gran medida de la bursatilidad del instrumento y de las condiciones de mercado. Tomar un medio del spread relativo SR_i es una práctica de mercado y es consistente con la negociación de compra venta entre una postura de compra y una postura de venta. Para instrumentos con baja bursatilidad normalmente se aumenta el factor de la varianza y sucede igual cuando las condiciones de mercado son desfavorables.

Finalmente el monto de posible pérdida MR_i por la venta anticipada del instrumento i será calculado como el producto de MV_i , el monto que se desea vender del instrumento i y FL_i , el factor de pérdida calculado anteriormente. Es decir,

$$MR_i = MV_i * FL_i.$$

Así, la suma las posibles pérdidas generadas por los instrumentos que se desean vender anticipadamente para proveer liquidez al portafolio, constituirá la medida de la exposición al Riesgo de Liquidez del portafolio y es sobre este monto que se deberán establecer límites.

$$RL = \sum_{i=1}^n MR_i, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

La bursatilidad de los instrumentos incide directamente en los montos de posible pérdida por venta anticipada que generan, pues entre mayor bursatilidad tenga un instrumento el spread relativo será más cercano a 0.

Al establecerse un límite sobre el Riesgo de Liquidez, se está limitando el porcentaje de instrumentos de baja bursatilidad que el fondo puede contener simultáneamente. También podríamos decir que se está obligando al fondo a reducir sus posibles requerimientos de liquidez, lo cual podría derivarse en la reducción de posición en instrumentos derivados, pues la salida de inversionistas del fondo no es controlable.

2.4. Riesgo de Mercado

El Riesgo de Mercado es considerado por la mayoría de los participantes de mercado como el principal riesgo financiero al cual se enfrenta cualquier fondo de inversiones. Se entiende como la posibilidad de disminución o pérdida potencial en el valor de los activos que conforman la cartera, la cual es ocasionada por las variaciones o movimientos en los factores de riesgos que inciden en el nivel de los precios. Dentro de estos factores se encuentran tasa de interés, índices accionarios, tipos de cambio, inflaciones, niveles de cotización, entre muchos otros.

Si bien este tipo de riesgo es el que cuenta con un mayor modelaje matemático, así como con una gran cantidad de métodos para medirlo, no podemos decir que los niveles de riesgo estén únicamente determinados por los movimientos de mercado, pues buena parte de los cambios en niveles de mercado están determinados por decisiones humanas. Sin embargo la mayoría de los modelos diseñados para medir el Riesgo de Mercado son basados específicamente en el comportamiento histórico ya sea del precio mismo de los instrumentos financieros, o de los factores de riesgo que determinan estos precios así como las correlaciones existentes entre ellos. En este trabajo nos centraremos en el modelo Valor en Riesgo, VaR, con diferentes metodologías para su cálculo.

El VaR es una medida estadística del Riesgo de Mercado que estima un nivel de pérdida máxima, el cual no será superado en un periodo t de operación con un nivel de

confianza de $(1 - p)$ %. Dicho nivel de pérdidas, el nivel de VaR, corresponde al cuantil de $(1 - p)$ % de la distribución de pérdidas y ganancias $F(x)$.

$$VaR_q = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq q\}. \quad (2.2)$$

La pregunta sería entonces: ¿Cuánto puedo perder en un tiempo de operación t con probabilidad p ? Basados en la definición anterior de VaR y en la distribución de pérdidas y ganancias $F(x)$, decimos que el nivel de pérdida x , es el cuantil que indica que el $(1 - p)$ % de las pérdidas serán inferiores a x , mientras el p % de las pérdidas estarán por arriba de x .

Supongamos un portafolio que vale 100 millones de dólares, con un nivel de VaR de 2 mdd, un nivel de confianza del 99 % a un periodo de operación diario. Esto nos indica que el 99 % de los días de operación, la pérdida no será mayor a 2 mdd, mientras que el 1 % de las veces la pérdida podrá ser mayor a 2 mdd. Por lo tanto, el VaR no debe ser tomado como un dato específico de la pérdida sufrida por un portafolio en ese día de cada 100 de operación, sino como un umbral de pérdida que podría verse superado con 1 % de probabilidad. Un administrador de riesgos no debería perder de vista este detalle en ningún momento. Esta es una deficiencia, pues una vez que el nivel de VaR es excedido no se marca una diferencia entre pequeñas o grandes variaciones, a demás de no ser una medida de riesgo coherente, al no cumplir con la propiedad de sub-aditividad, es decir no siempre sucede que

$$VaR(x + y) \leq VaR(x) + VaR(y).$$

Sin embargo existen herramientas complementarias al VaR, como el VaR Condicional (CVaR) o *Expected Shortfall* el cual es el promedio de las posibles pérdidas mayores al VaR, lo cuál nos daría una pérdida esperada en caso de que las pérdidas en un periodo de operación excedan el VaR. De forma que si tenemos 2 portafolios A y B con el mismo nivel de VaR, al mismo nivel de confianza, pero $CVaR(A) > CVaR(B)$. entonces podemos decir que el Riesgo de Mercado de A es mayor al de B y un inversionista coherente decidiría por el Portafolio B .

Al ser el VaR una medida estadística, se debe tener en cuenta que responderá de acuerdo a los datos que sean considerados para alimentar al modelo. Esto quiere decir que si los niveles que se contemplan para el calculo de VaR son los observados en condiciones

normales de mercado, sería irresponsable esperar que el VaR nos indique un nivel de pérdida confiable cuando las condiciones de mercado corresponden a escenarios de crisis.

Otra herramienta complementaria al VaR es el Maximum Dropdown, que no es otra cosa que la máxima pérdida ocurrida, esta medida puede proporcionar una idea de las pérdidas que podrían esperarse en situaciones inusuales de mercado, a fin de que el administrador del fondo de inversión pueda analizar si la ocurrencia de esa pérdida máxima podría ser o no soportable por el fondo.

Existe una gran cantidad de metodologías para el cálculo del VaR. A continuación se describen algunas de las más usadas.

2.4.1. Cálculo de VaR Monte Carlo

El método Monte Carlo es un método no determinístico, pues con los mismos datos de entrada puede generar múltiples resultados. Sin embargo es de gran utilidad, ya que proporciona soluciones aproximadas a una gran variedad de problemas matemáticos, mediante la simulación de datos, en los cuales la evaluación exacta resulta compleja y costosa. Evidentemente, la fiabilidad del método dependerá de la correcta simulación de los datos y en la cantidad de datos simulados, ya que este método tiene un error absoluto de la estimación que decrece en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ donde N es el número de simulaciones realizadas.

Para el caso de cómputo de VaR, el método Monte Carlo consiste en generar, de manera aleatoria, escenarios simulados para los precios de los instrumentos financieros contenidos en un portafolio de inversión, estableciendo las diferencias entre el valor actual de la cartera y el valor obtenido en la valuación simulada de cada cartera, obteniéndose la distribución de pérdidas y ganancias con lo que es posible determinar el VaR mediante un percentil de esta distribución, determinado por el nivel de confianza que se le quiera otorgar a la medida.

Se supone el siguiente modelo, en este caso particular se asumen distribuciones Normales.

$$X_t = X e^{r t},$$

$$r_t \sim Normal(\mu_t, \sigma_t),$$

$$X_t \sim \text{LogNormal}(\log X_0 + \mu_t, \sigma_t).$$

Donde X_t es el precio de un instrumento al tiempo t , o el nivel de un factor de riesgo.

Equivalentemente, se puede decir que el modelo supone que los precios de los instrumentos financieros, o los niveles de los factores de riesgos se distribuyen como un movimiento browniano geométrico, es decir, tienen una distribución LogNormal

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma \sqrt{t} Z).$$

Donde Z es una distribución Normal

De tal forma que podemos generalizar a un modelo multivariado, con el vector transpuesto de los rendimientos

$$P_t = (p_t(1), \dots, p_t(n))^T.$$

Donde $p_t(i)$, $i = 1, \dots, n$ representa el rendimiento continuo del precio del instrumento financiero i al tiempo t . O, de igual forma del factor de riesgo i al tiempo t . Entonces P_t se distribuye Normal Multivariado de dimensión n , $Nn(\boldsymbol{\mu}_t, \Sigma_t)$ con función de distribución

$$f(P_t) = \left(\frac{1}{(2\pi^n |\Sigma_t|)^{\frac{1}{2}}} \right) \exp\left(-\frac{1}{2}(P_t - \boldsymbol{\mu}_t)^T \Sigma_t^{-1} (P_t - \boldsymbol{\mu}_t)\right).$$

Donde

$$\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{E}(P_t) = [\mathbf{E}(p_t(1)), \dots, \mathbf{E}(p_t(n))]^T = [\mu_t(1), \dots, \mu_t(n)]^T$$

y

$$\Sigma_t = \text{Cov}(P_t) = \mathbf{E} \left[(P_t - \boldsymbol{\mu}_t)(P_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \right],$$

representan el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas del vector de rendimientos P_t .

Esta generalización implica un modelo robusto que permite trabajar con un amplio conjunto de instrumentos, o factores de riesgos y captura la dependencia de estos.

El método de simulación Monte Carlo consiste en generar una cantidad N de escenarios para todos los factores de riesgos que afectan al portafolio, mediante sus incrementos logarítmicos de la siguiente forma.

$$R_t = \sqrt{h}A\varepsilon_t.$$

Donde h es el horizonte para el que se desea realizar la simulación, A es obtenida de la factorización de Cholesky de la matriz de covarianzas, tal que $\Sigma = AA^T$ y ε_t es el vector transpuesto de simulaciones bajo una Normal Multivariada estandarizada¹.

La factorización o descomposición de Cholesky se deriva de la descomposición LU , en la cual, cualquier matriz cuadrada A con pivotes² no nulos puede ser descrita como el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U . La factorización de Cholesky agrega que, si la matriz A es simétrica y definida positiva los factores pueden ser elegidos de tal forma que U resulte ser la transpuesta de L , de forma que $A = LL'$. Ambas factorizaciones son usadas para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, la factorización de Cholesky es dos veces más eficiente computacionalmente, cuando es aplicable, que la factorización LU , pues requiere menor cantidad de operaciones.

Se realiza la factorización de la matriz de varianzas y covarianzas mediante la factorización de Cholesky con la finalidad de convertir N variables aleatorias independiente, *v.a.i.*, en n cambios correlacionados de los precios, pues se desea generar los cambios correlacionados en los precios a partir de las *v.a.i.*

$$\begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon_j \end{bmatrix}.$$

Donde A es una matriz que depende de las volatilidades y correlaciones de los rendimientos de los instrumentos. y debe cumplir que $AA' = \Sigma$, donde Σ es la matriz de varianzas y covarianzas entre los precios de los factores de riesgos, bajo el supuesto de que Σ es definida positiva. De no cumplirse, el procedimiento continúa bajo la factorización LU .

Para el caso de 2 instrumentos i, j la matriz será

¹Estandarizar una variable $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ es aplicar la transformación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tal que $Z \sim Normal(0, 1)$.

²Se llama pivote a un elemento no nulo de la matriz que corresponde a una entrada principal de la forma escalonada de dicha matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ \sigma_j \rho_{i,j} & \sigma_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2} \end{bmatrix}$$

y cumple que

$$\begin{aligned} A * A' &= \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ \sigma_j \rho_{i,j} & \sigma_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_i & \sigma_j \rho_{i,j} \\ 0 & \sigma_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_i^2 + 0 & \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} + 0 \\ \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} & (\sigma_j \rho_{i,j})^2 + (\sigma_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2})^2 \end{bmatrix} = V. \end{aligned}$$

Con base en la matriz A , la simulación de los cambios correlacionados en los rendimientos de los factores de riesgos se traducirá en

$$\begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ \sigma_j \rho_{i,j} & \sigma_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_i \varepsilon_i \\ \sigma_j \rho_{i,j} \varepsilon_i + \sigma_j \varepsilon_j \sqrt{1 - \rho_{i,j}^2} \end{bmatrix}.$$

De modo que los cambios en el primer rendimiento, se simularán con base en el primer instrumento, mientras el segundo rendimiento se simulará con base en la correlación existente entre el segundo instrumento y el primero.

Para el caso de mas de 2 instrumentos la descomposición de la matriz de varianzas y covarianzas mediante el método de *Cholesky*, los elementos de la matriz A se calculan de manera recursiva de la siguiente forma.

$$a_{ii} = \sqrt{\left(V_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)} \quad y \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(V_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk} \right).$$

Una vez generados los rendimientos logarítmicos de los factores de riesgos P_t , se procede a generar el vector de niveles de dichos factores X_t tal que

$$X_t = X_0 e^{P_t}.$$

Donde X_0 es el nivel inicial del factor de riesgo

Con este vector de niveles de factores de riesgos se realiza un proceso *Full Valuation* de la cartera total en cada uno de los escenarios generados, para obtener los escenarios del valor futuro del portafolio. Obteniendo las diferencias del valor de la cartera en cada escenario contra el valor de la cartera en el escenario actual se obtiene la distribución de rendimientos del portafolio y es posible obtener el nivel de VaR a partir del cuantil indicado por el nivel de confianza que se seleccione.

2.4.2. Cálculo de Var con Simulación Histórica.

Este es un método ampliamente usado por los inversionistas para el cómputo de niveles de riesgo de mercado dada su sencillez. El método consiste en valuar los instrumentos de la cartera con base en los niveles de mercado observados históricamente en los N periodos de cotización anteriores al periodo de cálculo, a fin de obtener N escenarios para el valor de la cartera.

$$VP = (vp(1), vp(2), \dots, vp(N)).$$

Donde $vp(i)$ es el valor del portafolio en el escenario i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Considerando las diferencias entre el valor actual de la cartera y cada uno de los valores en los escenarios valuados se obtiene el vector de pérdidas L , con el cual se define una distribución de probabilidades para las pérdidas con la cual se puede obtener el VaR.

$$L = (l(1), l(2), \dots, l(N)).$$

Donde $l(i)$ es el rendimiento del escenario i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Si el administrador del portafolio cuenta con una base de datos en la cual almacena los precios generados diariamente, entonces se puede omitir la valuación de cada escenario, pues la valuación fue realizada cada día de cotización, y el método se reduce a la obtención

de diferencias entre el valor actual de la cartera y los valores observados en los N periodos anteriores.

Una forma sencilla y muy usada de obtener el VaR a partir del vector de pérdidas L es ordenar el vector en orden ascendente y tomar la pérdida k -ésima como el nivel del

$$\text{VaR}, \text{ tal que } \frac{1}{k} = \alpha \%,$$

donde $\alpha\%$ es la probabilidad de que la pérdida exceda el nivel de VaR, con un nivel de confianza $(1 - \alpha)\%$.

Si bien el método no considera correlaciones entre los factores de riesgos directamente, se asume que dichas correlaciones fueron contempladas automáticamente al partir de escenarios reales observados anteriormente, pues en los niveles de factores de riesgos observados las correlaciones existentes entre ellos ya han afectado los datos. Sin embargo este método presenta dos desventajas considerables. Por una parte no considera escenarios extremos que pudiesen haber ocurrido por no estar dentro del horizonte de cálculo especificado (las N observaciones). Por otro lado, se asume que los escenarios son equiprobables, lo cual podría cuestionarse si consideramos que se está dando la misma probabilidad de ocurrencia a un escenario ocurrido $N - 1$ periodos de cotización atrás, que a uno ocurrido en el periodo inmediato anterior al periodo de cálculo, ya que muy probablemente las condiciones de mercado en los periodos mencionados, sean completamente distintas.

2.4.3. Cálculo de VaR con distribución paramétrica

El cálculo de VaR mediante distribuciones paramétricas, al igual que el VaR con simulación histórica, es usado con frecuencia por los administradores de portafolios como indicador de Riesgo de Mercado. El método supone que los rendimientos de los activos se distribuyen acorde a una función de distribución, generalmente se opta por asignarse una distribución Normal con media cero, de tal forma que el nivel de VaR para un instrumento financiero será:

$$VaR = q * M * \sigma * \sqrt{t}. \tag{2.3}$$

Donde q es el cuantil asociado al nivel de confianza asignado a la medida, M es el monto invertido, σ la desviación estándar de los rendimientos diarios del instrumento financiero y t el horizonte de cálculo para el cuál se calcula la medida.

Por su sencillez de cálculo, este modelo fue aceptado y usado por muchos administradores de fondos de inversión, y fue el modelo inicial de VaR, evidentemente su principal debilidad es el supuesto de normalidad en la distribución de los instrumentos financieros, ya que se ha observado y aclarado ampliamente que esto no ocurre en realidad, pues el ajuste de los precios de instrumentos financieros bajo una distribución Normal es bastante acertado únicamente en el centro de la distribución, mientras las colas de las observaciones son, generalmente, mayores a las colas que presenta la Normal. Por tanto es sensato asumir que se está subestimando el nivel de riesgo en el que se incurre.

2.4.4. Cálculo de VaR con distribuciones generales

Como ya se ha mencionado, el VaR nos da un nivel de pérdida L el cuál será superado por la pérdida observada l con una probabilidad α a un nivel de confianza $1 - \alpha$. Asumiendo que la distribución de rendimientos de un instrumento es $f(x)$ lo anterior podría traducirse como sigue

$$\alpha = \int_L^{\infty} f(x) dx = P(l \geq L).$$

Entonces el problema de este método radica en encontrar la distribución de los rendimientos, o una distribución que se le ajuste, lo cual puede llegar a ser sumamente complicado y en caso de encontrarse una distribución adecuada esta puede resultar demasiado compleja. Para este fin existen diversas herramientas, como las pruebas de hipótesis y herramientas estadísticas gráficas que permiten ver la similitud entre la distribución muestral y la distribución poblacional sugerida, así como métodos de estimación por momentos o estimación por máxima verosimilitud. Además podría resultar demasiado costos computacionalmente y en tiempo de cálculo, pues el obtener el VaR con este método requeriría

encontrar una función de distribución apropiada para cada uno de los instrumentos del portafolio. El cómputo de VaR se mantiene igual que la ecuación (2.3) Por estas razones es que el uso de este método no se considera con frecuencia en el mercado financiero.

Existen diversos métodos para tratar de aproximar una distribución a un conjunto de observaciones. Sin embargo nos es de particular interés el empleado por la Teoría de Valores Extremos, en la cuál, se da la mayor relevancia a las observaciones localizadas en las colas de la distribución y se asigna de manera sencilla una distribución, donde los parámetros de forma, ubicación y escala de la distribución nos darán una mayor claridad sobre el comportamiento de la distribución límite de los datos extremos. Con dicha distribución, nos será posible realizar un cálculo de VaR con distribuciones generales.

Capítulo 3

Teoría de Valores Extremos.

El objetivo principal de la Teoría de Valores Extremos es realizar una extrapolación adecuada de la muestra de información histórica registrada que se tenga del fenómeno que se estudia, observando el comportamiento de la distribución asintótica de los valores extremos contenidos en la muestra. Es decir, se pretende ajustar una distribución límite a la cola de la distribución muestral.

De forma sencilla diríamos que: Dada una muestra de *v.a.i.* X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución desconocida F , se pretende estimar la cola de la mencionada distribución.

Sin embargo se presentan algunas dificultades, pues las técnicas usuales de estimación de densidades resultan en un buen ajuste cuando los datos tienen una mayor densidad y presentan sesgos considerables cuando los datos son insuficientes. Con frecuencia las observaciones que se tengan en las colas de las distribuciones que se analicen serán escasas.

Otra complicación se presenta al considerar que las estimaciones a realizar dependerán de valores que se espera resulten mayores al valor máximo de la muestra, es decir, valores que no se encuentran en la muestra, pero se desea estén contenidos en el rango de la distribución ajustada a los valores extremos.

3.1. Distribución del Máximo.

Ya que nuestra intención es encontrar una distribución límite ajustada a la cola de la distribución empírica, será de interés el estudio de la distribución del máximo y su comportamiento, así como las posibilidades de convergencia de la distribución, pues podremos partir de la distribución del máximo para encontrar la distribución de la cola.

Supongamos una sucesión $X_n; n \geq 1$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, *v.a.i.i.d.*, con función de distribución común F . Definimos entonces M_n como el máximo de la muestra

$$M_n = \max \{X_i; i \leq n\}. \quad (3.1)$$

Entonces la distribución de esta nueva variable aleatoria sería:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F_n(x).$$

De forma que si conociéramos F conoceríamos también la distribución del máximo F_n , por la construcción del máximo con variables independientes, aunque su expresión analítica sea complicada.

Aunque este sea el caso deseamos tener una idea concisa de la distribución del M_n . Por lo que buscamos una distribución límite que funja como aproximación a F_n . Esto puede compararse con el Teorema Central del Límite, donde la normal estándar sirve como distribución aproximada a la suma de variables aleatorias independientes con sus respectivas media y varianza.

Para este fin, definamos el punto extremo derecho del soporte de la distribución.

$$\omega(F) = \text{Sup} \{x; F(x) < 1\} \leq \infty.$$

Si $x < \omega(F)$ entonces $F(x) < 1$ por lo tanto $P(M_n \leq x) = F_n(x) \rightarrow 0$.

Si $x \geq \omega(F)$ entonces $F(x) = 1$ en consecuencia $P(M_n \leq x) = F_n(x) = 1$.

Por lo tanto

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \omega(F) \\ 0 & \text{si } x < \omega(F) \end{cases}.$$

Por lo tanto M_n no tiene una distribución continua y monótona. Sin embargo $M_n \rightarrow \omega(F)$ en probabilidad cuando $\omega(F) < \infty$ y ya que M_n es no decreciente, entonces $M_n \rightarrow \omega(F)$ con probabilidad 1. Lo que permite afirmar que los valores extremos se encuentran en la cola de la distribución, lo cual era previsible, pues los valores extremos tienen poca probabilidad de ocurrencia. Por otro lado se concluye que el máximo converge a una función degenerada.

Este resultado es comparable con el Teorema Central del Límite, donde por la Ley Fuerte de los Grandes Números, si $\mu = E(X_i)$ entonces $X_n \rightarrow \mu$.

Pero si se realiza la transformación lineal

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}.$$

Entonces hay convergencia débil a una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$.

Lo cual nos sugiere realizar una transformación similar, con las constantes apropiadas, a M_n de tal forma que, $F_n(x)$ converja a una distribución no degenerada.

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \rightarrow Y.$$

Donde Y sea una variable con f.d. no degenerada.

Por lo tanto

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(Y \leq x) = G(x).$$

Ahora bien ¿Los parámetros de la transformación son únicos? Es probable que no, sin embargo sería de esperarse que la convergencia de F_n sea siempre a una misma familia de distribuciones, dada la transformación que se le desea aplicar.

Teorema 3.1.1 (*Gnednko- Khinchin*) Sean $G(x)$ y $H(x)$ dos funciones de distribución, las cuales no se encuentran concentradas en algún punto de su dominio. Supongamos v.a. X_n con $n \geq 0$. Son v.a. con funciones de distribución F_n . Sean, también, constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n \in \mathbb{R}$. Si

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x); F_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow H(x). \quad (3.2)$$

Entonces existen constantes $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$ tales que, cuando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \rightarrow A; \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \rightarrow B. \quad (3.3)$$

y

$$H(x) = G(Ax + B). \quad (3.4)$$

Recíprocamente si se cumple 3.3 entonces cualquiera de las relaciones en 3.2 implican la otra y se cumple 3.4.

Definición 3.1.2 *Dos distribuciones F y G son del mismo tipo o pertenecen a la misma familia si para algunas constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$*

$$G(x) = H(a_n x + b_n) \quad x \in \mathbb{R}.$$

En términos de v.a., si $X \sim F$ y $Y \sim G$ entonces

$$Y = \left(\frac{X-b}{a}\right).$$

Corolario 3.1.1 *Sea F_n una sucesión de funciones de distribución y $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ sucesiones de constantes tales que*

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x).$$

En todo punto de continuidad de G , la cual es una f.d. propia y no concentrada en algún punto. Sean $c_n > 0$ y $d_n \in \mathbb{R}$ sucesiones de constantes tales que, cuando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_n}{c_n} \rightarrow 1; \frac{d_n - b_n}{a_n} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$F_n(c_n x + d_n) \rightarrow G(x).$$

De estos resultados concluimos que, si bien es posible que las constantes empleadas en la transformación pueden no ser únicas, la transformación nos permitirá aproximar la distribución de M_n por una familia de distribuciones con parámetros de ubicación y escala como podemos observar en la ecuación (3.4). O incluso, si las constantes cumplen las condiciones, transformaciones con distintas constantes convergen a la misma distribución.

3.1.1. Convergencia a Familias.

Una vez mostrado que es posible la convergencia de la f.d. de M_n , bajo una transformación lineal con las constantes adecuadas al menos a una familia de distribuciones no degeneradas, queremos conocer las posibles familias de distribuciones de convergencia, para así conocer la distribución no degenerada a la que convergen los valores extremos de una serie de datos, es decir, conocer la distribución de la cola de una serie de datos.

Para ello se cuenta con el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3 (*Fisher- Tippett*)¹. Sean X_1, X_2, \dots, X_n , variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y sea $M_n = \max \{X_i; i \leq n\}$. Si existen constantes $A_n > 0$ y $B_n \in \mathbb{R}$ para $n > 1$ y una distribución G propia y no concentrada en algún punto tal que

¹Prueba en Embrechts Paul, Klüppelberg Claudia, Mikosch Thomas (1997); "Modelling Extremal Events for Insurance and Finance", [122-123]

$$\frac{M_n - B_n}{A_n} \xrightarrow{d} G(X).$$

Entonces G pertenece a alguna de las siguientes distribución.

$$\text{Gumbel :} \quad \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

$$\text{Fréchet :} \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x \geq 0 \end{cases}, \alpha > 0. \quad (3.6)$$

$$\text{Weibull :} \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \alpha > 0. \quad (3.7)$$

El conjunto de estas tres distribuciones es comúnmente llamado Distribuciones de Valores Extremos.

Cada una de las distribuciones representan en realidad una familia de distribuciones, si agregamos parámetros de ubicación y escala, μ , σ .

$$\text{Gumbel :} \quad \Lambda_{\mu,\sigma}(x) = \exp(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

$$\text{Fréchet :} \quad \Phi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ \exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\alpha}), & x \geq \mu \end{cases}, \alpha > 0. \quad (3.9)$$

$$\text{Weibull :} \quad \Psi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-\frac{x-\mu}{\sigma})^\alpha), & x < \mu \\ 1, & x \geq \mu \end{cases}, \alpha > 0. \quad (3.10)$$

Sin embargo el teorema de Fisher-Tippett no garantiza la existencia de un límite no degenerado para M_n . Lo que implica es que, de existir una distribución límite no degenerada

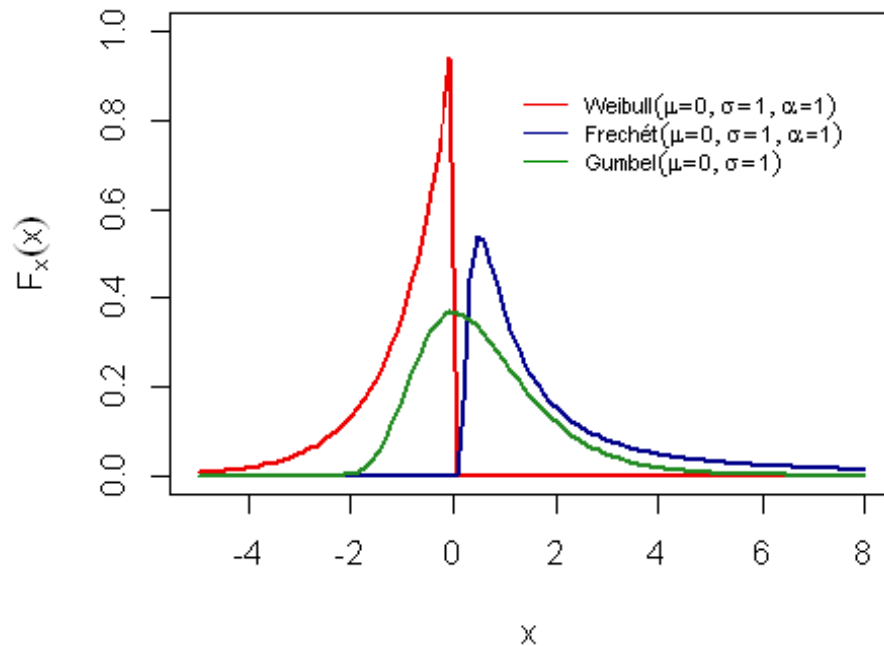


Figura 3.1: Distribuciones de colas pesadas; comparación de las distribuciones Weibull, Frechét y Gumbel.

para el máximo de la serie, este pertenece necesariamente a las Distribuciones de Valores Extremos sin importar cuál fuese la distribución inicial de la serie.

En la figura 3.1 podemos observar la forma gráfica de las distribuciones Weibull, Frechét y Gumbel, así podremos darnos una idea de la forma y la densidad de la cola de las distribuciones empíricas a las que se les ajuste alguna de estas distribuciones.

Se presentan algunos ejemplos de ajustes a las colas de ciertas funciones de distribución, mediante las distribuciones señaladas en el teorema de Fisher-Tippett.

Ejemplo 3.1.1 Sea F la distribución exponencial de parámetro 1: $F(x) = 1 - e^{-x}$ para $x > 0$, entonces $F_n(x) = (1 - e^{-x})^n$ por lo tanto si aplicamos una transformación con $a_n = 1$ y $b_n = \log n$.

$$F_n(x + \log n) = (1 - e^{-x - \log n})^n = (1 - \frac{1}{n}e^{-x})^n \rightarrow \exp\{e^{-x}\}.$$

Por lo tanto M_n tiene como límite una distribución Gumbel.

Observamos que para la distribución exponencial, la función de cuantiles es $Q(x) = -\log(1-x)$ para $0 < x < 1$, y la constante de normalización b_n son en este caso

$$b_n = \log(n) = Q\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ejemplo 3.1.2 *Consideremos la distribución de Cauchy con densidad*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1$$

y por lo tanto $\bar{F}(x) \sim (\pi x)^{-1}$. Esto implica que

$$P(M_n \leq \frac{nx}{\pi}) = (1 - \bar{F}(\frac{nx}{\pi}))^n = (1 - \frac{1}{nx} + o(1))^n \rightarrow \exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x), \quad x > 0.$$

Ejemplo 3.1.3 *Consideremos finalmente el caso de la distribución de Pareto con parámetro $\alpha : 1 - F(x) = x^{-\alpha}$, para $x > 1$. Tenemos*

$$\log P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \log F^n(a_n x + b_n) \sim -n(1 - F(a_n x + b_n))$$

donde hemos usado que $\log(1-u)$ y $-u$ son asintóticamente equivalentes cuando $u \rightarrow 1$. Para el caso de una distribución estricta de Pareto con $b_n = 0$,

$$-n(1 - F(a_n + b_n)) = -n(a_n x)^{-\alpha}.$$

Escogiendo $a_n^\alpha = n$, o sea, $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ y $b_n = 0$ obtenemos que

$$P\left(\frac{M_n}{a_n} < x\right) \rightarrow \exp\{-x^{-\alpha}\}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, converge a la distribución de Fréchet.

3.1.2. Convergencia a límites no degenerados

Analizaremos ahora bajo qué condiciones de F existe la convergencia de M_n a un límite no degenerado. Para ello consideraremos relaciones de la forma:

$$P(M_n \leq U_n).$$

Para sucesiones generales (U_n) , de forma que hallemos condiciones sobre F que aseguren la existencia del límite de $P(M_n \leq U_n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Proposición 3.1.4 *Dado $\tau \in [0, \infty]$ y una sucesión U_n de números reales, las siguientes relaciones son equivalentes.*

$$n\bar{F}(U_n) = n(1 - F(U_n)) \rightarrow \tau \tag{3.11}$$

y

$$P(M_n \leq U_n) = F_n(U_n) \rightarrow e^{-\tau}. \tag{3.12}$$

Si vale (3.11) entonces

$$P(M_n \leq U_n) = F_n(U_n) = (1 - \bar{F}(U_n))^n = (1 - \frac{\tau}{n} + o(\frac{1}{n}))^n.$$

Por lo que (3.12) se cumple

Si se cumple (3.12) entonces necesariamente $\bar{F}(U_n) \rightarrow 0$, de otra forma existiría una subsucesión (U_{n_k}) y algún $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bar{F}(U_{n_k}) > \varepsilon$$

y

$$P(M_{n_k} \leq U_{n_k}) = (1 - \bar{F}(U_{n_k}))^{n_k} \rightarrow 0$$

cuando $n_k \rightarrow \infty$ lo cual contradice (3.12).

Si tomamos logaritmos en (3.12)

$$-n \log(1 - \bar{F}(U_n)) \rightarrow \tau.$$

Como $\log(1-x) \sim -x$ cuando $x \rightarrow 0$, entonces $n\bar{F}(U_n) = \tau + o(1)$ y (3.11) se cumple

La proposición anterior se base en el teorema de aproximación de Poisson:

Teorema 3.1.5 (*Aproximación de Poisson*). *Supongamos que $0 < \tau < \infty$ y sea $B_n = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > U_n\}}$ Entonces*

$$B_n \sim \text{Bin}(n, \bar{F}(U_n)).$$

Por lo tanto

$$B_n \rightarrow \text{Pois}(\tau) \leftrightarrow E(B_n) \rightarrow n \bar{F}(U_n) \rightarrow \tau.$$

Además

$$P(M_n \leq U_n) = P(B_n = 0) \rightarrow e^{-\tau}.$$

Finalmente observamos el siguiente corolario

Corolario 3.1.2 *Supongamos que*

$$\omega(F) = \sup\{x; F(x) < 1\} \leq \infty$$

y

$$\bar{F}(\omega(F)^-) = F(\omega(F)) - F(\omega(F)^-) > 0.$$

Entonces si para alguna sucesión (U_n) se tiene que $P(M_n < U_n) \rightarrow p$

Necesariamente $p = 0$ o $p = 1$.

Este resultado muestra, en particular, que si una distribución tiene un salto en su extremo derecho, no existe una distribución límite no degenerada para M_n , no importando qué transformación se emplee.

Sin embargo nuestro contexto de trabajo es exclusivamente el ámbito financiero, de forma que las series de datos empleadas serán los rendimientos de instrumentos financieros. Un salto en el extremo derecho implicaría un valor extremo (rendimiento extremo) con una probabilidad mucho mayor (o mucho menor) a la probabilidad del valor inmediato siguiente. Lo cuál teóricamente no sucede, pues los rendimientos extremos en instrumentos financieros son de probabilidades tendientes a cero. De modo que podemos asegurar que todo Máximo de una serie de rendimientos financieros tendrá convergencia no degenerada, lo cual por el teorema de Fisher-Tippett implica que todo Máximo en estas series de datos convergen a una de las familias de las Distribuciones de Valores Extremos sin importar de qué distribución provengan.

3.2. Distribuciones de Valores Extremos.

Hemos visto hasta ahora que las colas de la distribución de una serie de datos correspondiente a los rendimientos de una serie financiera tendrán una distribución convergente a alguna de las familias de distribuciones, Weibull, Fréchet o Gumbel, siempre que la serie no implique una distribución ajustada discontinua.

Ahora hagamos una breve descripción de las Distribuciones, de forma que podamos inferir algunos puntos sobre el comportamiento de las colas de cada serie a partir de la distribución ajustada a las mismas.

3.2.1. Distribución Weibull.

La distribución *Weibull*, $\Psi_\alpha(x)$ está definida en el intervalo $(-\infty, 0)$, es decir presenta punto final derecho finito, además es una distribución que presenta colas pequeñas, o poco densas. Es común emplear esta distribución en casos de eventos extremos para mínimos, pues su cola izquierda es más pesada.

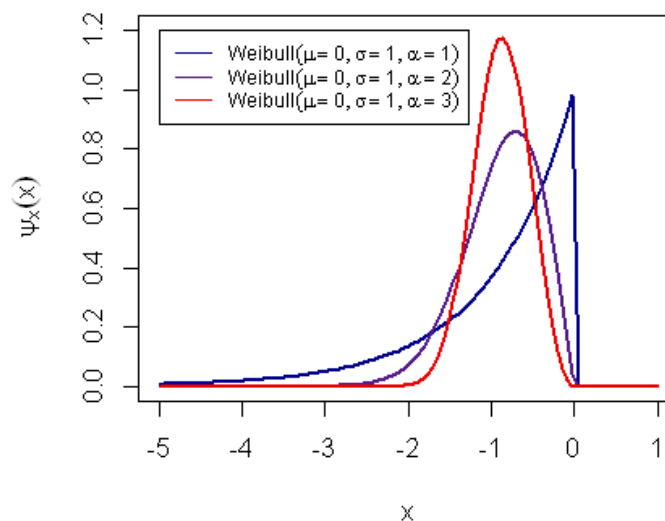


Figura 3.2: Distribuciones Weibull con cambio en α

Si observamos la familia de distribuciones $\Psi_{\alpha,\mu,\sigma}(x)$, entonces veremos que esta familia se define en el intervalo $(-\infty, \mu)$, entonces el punto final derecho será μ .

La función de densidad Weibull es

$$\psi_{\alpha}(x) = |\alpha|\Psi_{\alpha}(x) - x^{\alpha-1}, \text{ cuando } x \leq 0.$$

Y es sesgada a la derecha si $\alpha < -3,6$, sesgada a la izquierda si $\alpha > -3,6$ y aproximadamente simétrica si $\alpha = -3,6$.

Algunas distribuciones cuya distribución de colas pertenecen a la familia de distribuciones *Weibull* son la *Uniforme* y la *Beta*.

3.2.2. Distribución Frechét

La distribución *Frechét* $\Phi_{\alpha}(x)$ está definida en el intervalo $(0, \infty)$. Por lo tanto tiene punto extremo izquierdo finito. Es una distribución de colas pesadas o densas y por su intervalo de definición resulta más densa su cola derecha.

Su función de densidad es

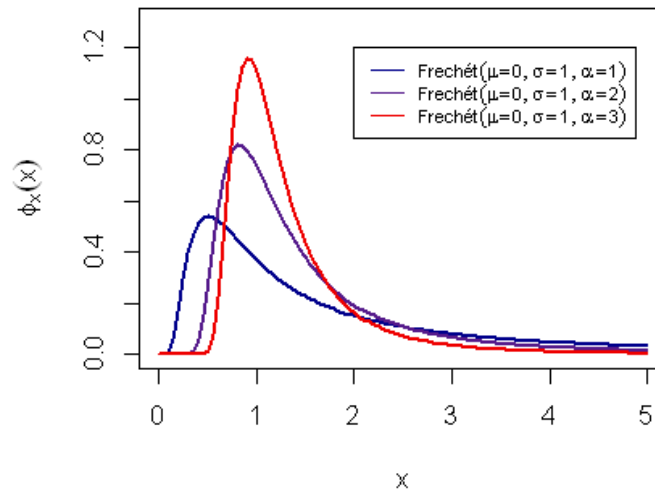


Figura 3.3: Distribuciones Fréchet con cambio en α

$$\phi(x) = \alpha\Phi(x)x^{-(1+\alpha)}, \text{ cuando } x \geq 0.$$

y es sesgada a la derecha.

De igual forma, cuando observamos la familia de distribuciones $\Phi_{\alpha,\mu,\sigma}(x)$, podemos observar que la familia se define en el intervalo (μ, ∞) , siendo el punto final izquierdo μ .

Otra particularidad de esta familia de distribuciones es que sus momentos están definidos por

$$m_k = \mu + \sigma\Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right), \text{ donde } \Gamma(z) \sim \textit{Gamma}.$$

Por lo tanto su media será

$$m = \left\{ \begin{array}{ll} \mu + \sigma\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) & \alpha > 1 \\ \infty & e.o.c. \end{array} \right\}.$$

Y su desviación estándar:

$$s^2 = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma\left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)\right)^2\right) & \alpha > 2 \\ \infty & e.o.c. \end{array} \right\}.$$

Las distribuciones *t-student*, *log-gamma* y *pareto* son algunas cuya distribución límite de las colas pertenecientes a la familia de distribuciones *Fréchet*.

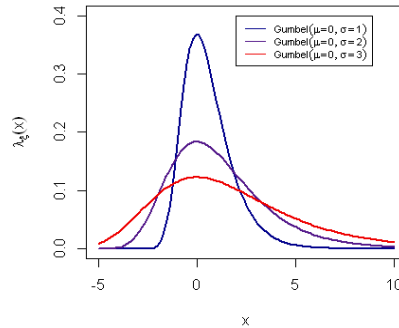


Figura 3.4: Distribuciones Gumbel con distintos parámetros

3.2.3. Distribución Gumbel

La distribución *Gumbel* $\Lambda(x)$ está definida sobre los reales, por lo que ambos puntos finales son no finitos. Sin embargo, presenta un decaimiento de forma exponencial en las colas con momentos finitos de cualquier orden. De forma que presenta colas menos densas que las de una distribución Fréchet.

Su función de densidad es:

$$\lambda(x) = \Lambda(x)e^{-x}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

y es sesgada a la derecha.

Cuando la distribución *Gumbel* incluye parámetros de ubicación y escala, tendrá media y desviación estándar:

$$m = \mu + \gamma\sigma$$

y

$$d.e. = \frac{\sigma\pi}{\sqrt{6}}.$$

Donde $\gamma = 0,577215$ y es conocida como la constante de *Euler-Mascheroni*.

Algunos ejemplos de distribuciones con distribución de colas perteneciente a esta familia son la *Normal*, *Xi - Cuadrada* y la distribución *Gamma*.

Si bien estas tres distribuciones son distintas existe una relación entre ellas, en el sentido de que es posible realizar transformaciones adecuadas a una variable aleatoria cuya distribución es alguna de las Distribuciones de Valores Extremos, para llegar a una variable aleatoria cuya distribución será alguna de las otras distribuciones de este grupo.

Supongamos una *v.a.* X entonces:

$$X \sim \Phi_\alpha(x) \Leftrightarrow -X^{-1} \sim \Psi_\alpha(x) \Leftrightarrow \ln X^\alpha \sim \Lambda(x).$$

Sea $X \sim \Phi(x)$, $X \in [0, \infty]$ y sea $Y = \ln X^\alpha$ por lo tanto $Y \in [-\infty, \infty]$. Entonces:

$$F_y(Y) = P(Y \leq y) = P(\ln X^\alpha \leq y) = P(X \leq e^{\frac{y}{\alpha}}) = F_x(e^{\frac{y}{\alpha}}) = \exp((-e^{\frac{y}{\alpha}})^{-\alpha}) = \exp(-e^y).$$

Entonces $Y \sim \Lambda(x)$.

Sea $X \sim \Phi(x)$, $X \in [0, \infty]$ y sea $Z = -X^{-1}$ por lo tanto $Z \in [-\infty, 0]$. Entonces:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(-X^{-1} \leq z) = P(X \leq -\frac{1}{z}) = F_x(-\frac{1}{z}) = \exp(-(-z^{-1})^{-\alpha}) = \exp(-(-z)^\alpha).$$

Entonces $Z \sim \Psi_\alpha(x)$.

Sea $\ln X^\alpha \sim \Lambda(x)$, $\ln X^\alpha \in [-\infty, \infty]$ y sea $Z = -X^{-1}$ por lo tanto $Z \in [-\infty, 0]$.

$$F_Z(x) = P(-X^{-1} \leq z) = P(X \leq -z^{-1}) = P(\ln X^\alpha \leq \ln(-\frac{1}{z})^\alpha) = F_{\ln X^\alpha}(-\ln(-z^\alpha)) = \exp(-\exp(\ln(-z^\alpha))) = \exp(-(-z^{-\alpha})).$$

Entonces $Z \sim \Psi_\alpha(x)$.

Basta con mostrar estas tres implicaciones para transitar entre las restantes.

3.3. Distribución Generalizada de Valores Extremos.

Los tres tipos de distribuciones descritas anteriormente pueden ser combinadas en una sola distribución con parametrización común que es conocida como la Distribución Generalizada de Valores Extremos, la cual tiene la siguiente forma.

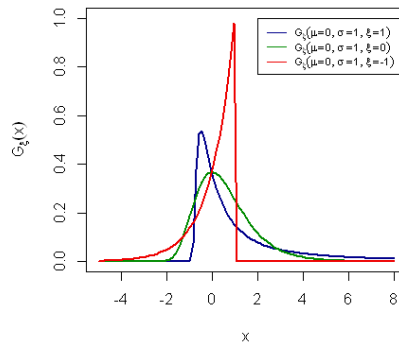


Figura 3.5: DGVE con distintos parámetros

$$G_\varepsilon(x) = \exp \left\{ (-1 + \xi x)_+^{-\frac{1}{\xi}} \right\}$$

o incluyendo los parámetros de localización y escala μ y σ ,

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \exp \left\{ (-1 + \xi (\frac{x - \mu}{\sigma}))_+^{-\frac{1}{\xi}} \right\}. \quad (3.13)$$

Entonces tendremos que si:

- Si $\xi > 0$, obtendremos la distribución *Fréchet* con $\alpha = \frac{1}{\xi}$ y extremo izquierdo $-\frac{1}{\xi}$.
- Si $\xi < 0$, obtendremos la distribución *Weibull* con $\alpha = -\frac{1}{\xi}$ y extremo izquierdo $-\frac{1}{\xi}$.
- Si $\xi \rightarrow \infty$, obtenemos la distribución *Gumbel*.

3.3.1. Dominios de Atracción al Máximo

El teorema de *Fisher – Tippet* nos dice que el máximo tendrá una distribución convergente a la familia de DVE y en general a la DVEG. Entonces nos es de interés conocer que características deben cumplir los máximos para distribuirse *Fréchet*, *Weibull* o *Gumbel*.

Para ello nos es útil el concepto de Dominios de Atracción.

Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de *v.a.i.i.d.* con función de distribución común F .
Sea $M_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$.

Decimos que la función de distribución F está en el Dominio de Atracción de la distribución de valor extremo H ($F \in D(H)$) si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$. Tales que:

$$F_n = (a_n x + b_n) = P(M_n \leq a_n x + b_n) \rightarrow H(x).$$

Ahora requerimos obtener condiciones necesarias y suficientes para determinar si una *f.d.* pertenece a alguna de las distribuciones de valores extremos.

Dominio de Atracción al Máximo de la distribución *Fréchet*.

Se dice que una función $F \in D(\Phi_\alpha(x))$ si y sólo si $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}$ ya que si observamos el comportamiento de la cola de $\Phi_\alpha(x)$ encontramos que

$$1 - \Phi_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha}) \sim x^{-\alpha}; \text{ si } x \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Es decir que una distribución α -estable pertenece al Dominio de Atracción de la distribución *Fréchet*, siempre que $\omega(F) \rightarrow \infty$. Entonces

$$F_n(a_n x) \rightarrow \Phi_\alpha(x), \text{ con } a_n = Q(1 - \frac{1}{n}) \text{ (implícitamente se toma } b_n = 0).$$

Donde $Q(x)$ es la función cuantil tal que

$$Q(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad 0 < t < 1.$$

Al ser una distribución de colas pesadas se observa que $E(X)^\gamma \rightarrow \infty$ para $\gamma > \alpha$.

Las distribuciones Pareto estricta, Cauchy y en general distribuciones estables con $\alpha > 2$ pertenecen a la clase de distribuciones generalizadas de Pareto, que satisfacen

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

para algún $K, \alpha > 0$. Entonces $F \in D(\Phi_\alpha(x))$ escogiendo como constantes de normalización. $a_n = (Kn)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Entonces

$$(Kn)^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \rightarrow \Phi_\alpha(x).$$

Otra distribución que pertenecen a la clase de las distribuciones generalizadas de Pareto, y por lo tanto satisfacen la relación anterior, es la distribución de Burr:

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa+x^\tau}\right)^\alpha, \quad \alpha, \tau, \kappa > 0.$$

Dominio de Atracción al Máximo de la distribución Weibull.

Se dice que una función $F \in D(\Psi_\alpha(x))$ si y sólo si

$$\omega(F) < \infty \tag{3.15}$$

y

$$1 - F(\omega(F) - x^{-1}) \sim x^{-1}; \text{ si } x \rightarrow \infty. \tag{3.16}$$

Entonces podemos definir $a_n = \omega(F) - Q(1 - \frac{1}{n})$ y $b_n = \omega(F)$ de modo que

$$F_n(\omega(F) + (\omega(F) - Q(1 - \frac{1}{n}))x) \rightarrow \Psi_\alpha(x).$$

Se presentan ejemplos de distribuciones con dominio de atracción al Máximo de las distribuciones Weibul, Frechét o Gumbel.

Ejemplo 3.3.1 *Consideremos la distribución uniforme $U(0, 1)$. Evidentemente*

$$\omega(F) = 1$$

y

$$\bar{F}(1 - x^{-1}) = x^{-1},$$

por lo tanto $F \in D(\Psi_\alpha(x))$.

Como $\bar{F}(1 - n^{-1}) = n^{-1}$ y $\omega(F) = 1$ las constantes de normalización serán.

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ y $b_n = 1$. Entonces

$$(n-1)(M_n - 1) \rightarrow \Psi_1(x).$$

También es posible mostrar que la distribución *Beta* pertenece al Dominio de Atracción de la distribución *Weibull*.

Dominio de Atracción al Máximo de la distribución *Gumbel*.

Las distribución *Gumbel* no tiene punto extremo derecho finito, por lo que se considera una función de colas moderadamente pesadas. Además un gran número de distribuciones pertenecen a su Dominio de Atracción por esta cualidad.

Si observamos el comportamiento de la cola derecha de la distribución *Gumbel*

$$1 - \Lambda(x) = 1 - \exp(e^{-x}) \sim e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Entonces la cola decrece a cero de forma exponencial. Distribuciones F con este comportamiento pertenecen al Dominio de Atracción de la distribución *Gumbel*, $F \in (\Lambda(x))$.

Las constantes de normalización serán elegidas como $a_n = Q(1 - \frac{1}{n})$ y $b_n = A(a_n)$.

Donde A es una función auxiliar de F , la *función media de exceso* o *vida remanente media*

$$A(x) = E(X - x \mid X > x), \quad x < x_F.$$

Ejemplo 3.3.2 Consideremos una distribución Exponencial ($\lambda = 1$), entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-x} \\ &\text{y} \\ 1 - F(x) &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $F \in (\Lambda(x))$ y las constantes de normalización serán $b_n = 1$ y $a_n = \ln(n)$, de modo que

$$M_n - \ln(n) \rightarrow \Lambda(x).$$

3.3.2. Selección de Máximos por bloques

Al momento hemos visto que el máximo de una sucesión X_n de *v.a.i.i.d.* tendrá como distribución límite la DGVE (G_ξ) donde el parámetro ξ nos indicará alguna de las 3 DVE.

Para obtener el Máximo de la sucesión a partir de nuestros datos usaremos el método de selección de Máximos por bloques, basados en este método dividiremos la muestra en secciones con la misma cantidad de observaciones cada una. Usualmente el número de observaciones será determinado por una unidad de tiempo. De esta forma tendremos nuestra sucesión X_n . De cada una de las secciones generadas, se selecciona el valor máximo, formando así la sucesión de máximos.

Aunque no se cuenta con un método específico para la generación de las secciones o bloques, es importante determinarlos mediante una medida de tiempo adecuada, o un número de observaciones adecuado. Si se considera una medida de tiempo pequeña, los bloques contarán con pocas observaciones, de forma que posiblemente se consideren datos como máximos los cuales, si son comparados con la serie completa, no lo son en realidad, pues su distancia con la media de la serie no es excesiva. Por el contrario si seleccionemos una medida de tiempo demasiado grande, se traducirá en bloques con grandes cantidades de datos, en los cuales podrían perderse datos que podrían tomarse como máximos (y encontrados en la cola de la distribuciones) pues solo se selecciona el máximo del bloque. Estas situaciones podrían desembocar en subestimación o sobrestimación de las medidas que deseamos calcular.

3.4. La Distribución Generalizada de Pareto

Dentro de la Teoría de Valores Extremos, es posible aproximar la cola de una distribución sin tomar una serie de *v.a.* y encontrando el máximo de cada una, sino estableciendo que la cola de la distribución comienza después de un valor u .

Definición 3.4.1 Sea X una v.a. con f.d. F y extremo derecho $\omega(F)$. Para $u < \omega(F)$, decimos que ocurre una excedencia de u si $X > u$. Se llama excedencia al valor X y exceso a $X - u$. Llamaremos F_u a la f.d. de los excesos y $F_{[u]}$ a la f.d. de las excedencias, que definiremos como:

$$F_u(x) = F_{[u]}(x + u) = P(X - u \leq x \mid X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0.$$

Se define la Distribución Generalizada de Pareto estándar $H_\xi(x)$ de la siguiente forma.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{si } \xi = 0 \end{cases}.$$

Ya que si $\xi \rightarrow 0$ entonces

$$(1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) \rightarrow 1 - e^{-x}.$$

donde

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \quad \text{si } \xi \geq 0, \\ 0 &\leq x \leq -\frac{1}{\xi} \quad \text{si } \xi < 0. \end{aligned}$$

Podemos también introducir una familia de ubicación y escala $H_{\xi,\nu,\beta}$ reemplazando el argumento x por $\frac{(x-\nu)}{\beta}$ para $\nu \in \mathbb{R}, \beta > 0$. Hay que modificar en cada caso el soporte.

$$H_{\xi,\nu,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{(x-\nu)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{(x-\nu)}{\beta}}, & \text{si } \xi = 0 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Al igual que en el caso de la Distribuciones de Valores Extremos, existe otra posible parametrización para la Distribución Pareto Generalizada. Las cuales se generan dependiendo del valor del parámetro de escala α o el comportamiento de la cola.

- Tipo I: Exponencial $W_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0,$
- Tipo II: Pareto $W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \alpha > 0,$

- Tipo III: Beta GP² $W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^\alpha$, $-1 \leq x \leq 0, \alpha > 0$.

Es notable la similitud de la DGP con la DGVE. Practicamente, la DGP es el logaritmo de la función de la DGVE con un desplazamiento. De forma que, la función *exponencial* de la DGP sería el logaritmo de la función *gumbel* de las familias DGVE, mientras la *Pareto* corresponde a la *Fréchet* y la *Beta* a la *Weibull*.

De forma más general diremos que

$$H(x) = 1 + \log G(x) \text{ cuando } \log G(x) > -1. \quad (3.19)$$

Donde $G(x)$ es la Distribución Generalizada de Valores Extremos.

3.4.1. Distribución Límite de Excesos.

La Distribución Generalizada de Pareto cumple ciertas propiedades. A continuación se enuncian específicamente 2 propiedades que son de gran utilidad.

1. Para $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in D(H_\xi(x))$ si y sólo si

$$\lim_{u \uparrow \omega_f} \sup_{0 < x < \omega_f - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(0)}(x)| = 0 \text{ para alguna función positiva } \beta.$$

Es decir que la DGP es buena aproximación de la distribución límite F_u para u suficientemente grande. Esta propiedad se puede reformular como:

Para alguna $\beta(\cdot)$, que se estima apartir de los datos

$$\bar{F}(x) = P(X - u > x \mid X > u) \approx \bar{H}_{\xi, \beta(u)}(x), x > 0. \quad (3.20)$$

2. Supongamos $X \sim DGP$, $\xi < 1$, y β entonces para $u < \omega_F$

²La distribución del Tipo III que se obtiene apartir de la DGP, no es la Beta comúnmente usada en la literatura estadística, es por eso que la nombramos Beta GP

$$e(u) = E(X - u \mid X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0. \quad (3.21)$$

En conjunto, estas propiedades proveen de una técnica gráfica para un umbral u suficientemente alto para que se justifique la aproximación de la *f.d.* de excesos F_u a una DGP. Entonces, dada una muestra de *v.a.i.i.d.* X_1, \dots, X_n se construye una función media de excesos empírica $e_n(u)$ como una versión muestral de la función media de excesos $e(u)$. A partir de 3.21 vemos que la función media de exceso de una DGP es lineal, entonces buscamos una región de valores u donde la gráfica de $e_n(u)$ sea aproximadamente lineal. Para estos u es razonable aproximar con una DGP.

Además las DGP son las únicas *f.d.* continua F tales que para ciertas constantes a_u y b_u , se cumple que

$$F_{[u]}(a_u x + b_u) = F(x)$$

donde $F_{[u]}$ es la *f.d.* de las excedencias. Esta propiedad se conoce estabilidad de los valores de un Umbral o pot-estabilidad e implica que la versión trunca de una DGP es del mismo tipo que la distribución original.

El modelaje paramétrico de las *f.d.* de excedencias, se base en el siguiente teorema límite.

Teorema 3.4.2 (*Balkema- de Haan*) si $F_{[u]}(a_u x + b_u)$ tiene una *f.d.* límite continua cuando $u \rightarrow \omega(F)$, entonces

$$|F_{[u]}(x) - H_{\gamma, u, \sigma_u}(x)| \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \omega(F). \quad (3.22)$$

Para parámetros de forma, ubicación y escala γ, u, σ_u .

Observamos que la *f.d.* de excedencias $F_{[u]}$ y la DGP tienen aproximadamente el mismo punto extremo izquierdo u .

Supongamos entonces que X_1, \dots, X_n son *i.i.d.* con *f.d.* $F \in D(G_\xi(x))$ para algún $\xi \in \mathbb{R}$. Primero escogemos un nivel suficientemente alto u y llamamos

$$N_u = \text{card} \{i : i = 1, \dots, n : X_i > u\}$$

al número de excedencia de u por X_1, \dots, X_N . Los excesos se denotaran por Y_1, \dots, Y_{N_u} .

La *f.d.* de los exceso X está dada por

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) = P(Y \leq y \mid X > u), \quad y \geq 0.$$

Esta relación puede reescribirse como

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y). \quad (3.23)$$

Además, recordando las propiedades vistas para la DGP

$$\bar{F}_u(x) \approx \bar{H}_{\xi, \beta(u)}(x). \quad (3.24)$$

Si $F \in D(G_\xi(x))$ entonces $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$. de modo que si u es suficientemente grande podemos estimar con base en el umbral a ξ y $\beta = \beta(u)$.

Algunas justificaciones para 3.24 son las siguientes:

Supongamos que X tiene una distribución $F \in D(G_{\xi, \mu, \sigma}(x))$ para n suficientemente grande,

$$F^n(z) \approx \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}.$$

Por lo tanto, si aplicamos logaritmos

$$n \log F(z) \approx - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Para valores grandes de z , haciendo el desarrollo de la serie de Taylor y por la distribución de F observamos que

$$\log F(z) \approx -(1 - F(z)).$$

Substituyendo obtenemos que

$$1 - F(u) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}.$$

De forma que para $y > 0$

$$1 - F(u + y) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u+y-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Por lo tanto si agregamos la condición, $X > u$

$$\begin{aligned} P(X > u + y \mid X > u) &\approx \frac{n^{-1} [1 + \xi(u+y-\mu)/\sigma]^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{n^{-1} [1 + \xi(u-\mu)/\sigma]^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \\ &= \left(\frac{1 + \xi(u+y-\mu)/\sigma}{1 + \xi(u-\mu)/\sigma} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \left(1 + \xi \frac{y}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Donde $\beta = \sigma + \xi(u - \mu)$.

En cualquier caso, como puede verse en los resultados mostrados, la aproximación de la distribución de los datos excedentes sobre un umbral será correcta siempre que el umbral sea lo *suficientemente* grande. Así mismo los estimadores dependerán del umbral u . Si deseamos elegir un umbral óptimo u nos encontramos con problemas de sesgo y varianza, ya que si colocamos un umbral demasiado grande obtendremos pocas excedencias y por tanto estimadores de varianza alta. Si por el contrario el umbral resulta demasiado pequeño los estimadores serán sesgados.

3.4.2. Selección Peaks Over Threshold

Mediante la selección *Peaks Over Threshold (PoT)* o Excedentes sobre un Umbral, se fija un umbral u que sea suficientemente grande, de forma que cualquier dato de la muestra que sea mayor que el valor u será considerado como un valor extremo de la muestra. Claramente ésta forma de selección se traduce en $x_i \mid x_i \geq u$, por lo que podremos ajustar los valores extremos obtenidos por la DGP.

El principal problema con la selección PoT surge cuando las series de datos presentan conglomeraciones de datos que varían entre conjuntos de valores similares que son además valores extremos, por lo que se consideran repetidamente estos valores, dando un mayor peso que a valores extremos encontrados en otras secciones de la serie. Esto se observa con frecuencia en series financieras que comprenden periodos de alta volatilidad en los mercados, son normalmente conocidos como *Clusters*.

3.5. Estimadores de las colas, el cuantil z_q

Recordemos que el q th cuantil de una distribución continua con función de distribución F , es un punto en el soporte de la distribución, para el cuál la distribución acumula el $q\%$. Esta definido como

$$x_q = F^{-1}(q)$$

donde F^{-1} es la inversa de la distribución F .

El ajuste que realizamos mediante la aproximación límites de Distribuciones Extremas fue únicamente a la cola de la distribución, no a la distribución correspondiente a la serie de datos, por lo que calcular un cuantil l_q directamente sobre la distribución límite ajustada no corresponderá a un cuantil z_q sobre los datos, por lo que requerimos una forma de estimar el cuantil z_q de los datos observados a fin de realizar el cálculo del VaR.

En el caso de la DGP el cuantil l_q dejará por encima de él un $(1 - q)\%$ de los datos de la cola, es decir $(1 - q)\% * N_u$ observaciones, mientras que el cuantil z_q tendría por encima de él $(1 - q)\% * n$ observaciones.

De la ecuación 3.23 se sigue un método para estimar la parte mas alejada de la cola de F estimando por separado a $\overline{F_u}(y)$ y a $\overline{F}(u)$. El estimador natural para $\overline{F}(u)$ estaría dado por la *f.d.* empírica

$$\widehat{\overline{F}(u)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i > u\}} = \frac{N_u}{n}.$$

Mientras para $\overline{F_u}(y)$ la aproximación descrita en 3.24 sugiere

$$\widehat{\overline{F_u}(y)} = \overline{H_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(y)} \text{ para estimadores apropiados } \hat{\xi} = \xi_{N_u}, \text{ y } \hat{\beta} = \beta_{N_u}.$$

Por lo tanto el estimador obtenido para la cola de

$$\widehat{\overline{F}(u + y)} = \frac{N_u}{n} (1 + \hat{\xi} \frac{y}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}.$$

Partiendo de este resultado, podemos obtener directamente la distribución $\widehat{\overline{F}(x)}$

$$\widehat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{x-u}{\widehat{\beta}_N}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}.$$

Así, para encontrar el cuantil z_q podemos invertir el estimador de la cola $\widehat{F}(x)$

$$\widehat{z}_q = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{q}{N_u} \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right). \quad (3.25)$$

En el caso del ajuste a la cola mediante Máximos por Bloque, puede no ser tan intuitivo el hecho de que l_q no corresponda a z_q , pues los máximos fueron seleccionados por bloques, de modo que el ajuste podría incluir datos que no forman propiamente parte de la cola, sin embargo, recordemos que la Teoría de Valores Extremos prevé el ajuste realizado como ajuste a la cola de la distribución, no a la distribución. Si bien no podríamos dar un porcentaje exacto para el número de datos por arriba de z_q observando el cuantil l_q , sí que podemos observar que el cuantil l_q no corresponderá al q th cuantil de la distribución de la serie de datos bajo análisis.

En Hidrología se utiliza un tipo de cuantil alternativo que es fácil de estimar para los modelos que estamos ajustando, el Nivel de Retorno. McNeil [15] propone que este concepto tiene un funcionamiento correcto en el área de evaluación de riesgos financieros.

Supongamos que en nuestro modelo se emplean máximos mensuales, (20 observaciones por bloque), definimos el k – mes Nivel de Retorno $R_{20,k}$ como

$$P\{M_{20} > R_{261,k}\} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

Es el nivel que esperamos sea excedido en promedio sólo en 1 bloque mensual (M_{20}) de cada k meses. En general para el Nivel de Retorno $R_{n,k}$ es el nivel que se espera sea excedido en promedio solo un n – bloque de cada k n – bloques. El bloque en el cuál el Nivel de Retorno es excedido se conoce como periodo de estrés.

Como los máximos de los bloques de longitud n siguen a la DGVE entonces $R_{n,k}$ será un cuantil de esta distribución y una función de sus parámetros estimados.

$$R_{n,k} = G_{\widehat{\xi}, \widehat{\mu}, \widehat{\sigma}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \widehat{\mu} - \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left(1 - \left(-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^{-\widehat{\xi}}\right).$$

Entonces el nivel de retorno sigue correspondiendo a l_q , el cuantil q th de a DGVE. Ahora bien, el Nivel de Retorno corresponde a la aparición de un exceso en un bloque de cada k bloques que contienen n datos, lo que se traduce a la serie de datos observada en 1 exceso por cada $k * n$ datos. Así pues, y siguiendo la idea de la estimación z_q para el caso de la DGP, se tiene la siguiente modificación al Nivel de Retorno, en base a los datos que contiene cada bloque, n , para relacionar el Nivel de Retorno con los datos observados y no solo con los bloques.

$$R_{n,k} = G_{\hat{\xi}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}}^{-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(1 - \left(-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)^{-\hat{\xi}}\right). \quad (3.26)$$

Pues estamos interesados en un cuantil que nos de una probabilidad q de excesos en proporción al número de datos, y no en proporción a los bloques.

3.6. Estimación de Parámetros

3.6.1. Estimación de parámetros para la DGVE

Como pudimos ver en la descripción de la Teoría de Valores Extremos, la distribución límite de los Valores Extremos dependerá de su forma de selección, de modo que si se seleccionan los datos excedentes a un umbral la distribución límite corresponde a la DGP, mientras que una selección de máximos de una sucesión convergerá a la DGVE. En ambos casos será necesario estimar los parámetros de forma, ubicación y escala, a fin de conocer completamente la distribución límite y poder calcular el VaR. Como ya hemos visto la estimación de dichos parámetros también nos indicará qué distribución específica ajusta a los valores extremos, y no sólo las distribuciones generalizadas.

En el caso de la DGVE ($G_{\xi, \mu, \sigma}$) tenemos 3 parámetros a estimar. El parámetro de forma ξ que indica la familia de DVE a la que pertenece el máximo de la sucesión, por lo tanto nos indica también el comportamiento de la cola. Los parámetros μ, σ de ubicación y escala respectivamente. Como primera opción pensamos en el método de Máxima Verosimilitud para estimar los parámetros requeridos.

Suponemos entonces que la serie de datos $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiene distribución G_θ y densidad g_θ . De modo que la función de Verosimilitud está dada por:

$$L(\theta; \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n g_\theta(X_i) \mathbf{1}_{\{1 + \xi(\frac{X_i - \mu}{\sigma}) > 0\}}.$$

Mientras la función de log verosimilitud será

$$\ell(\theta; \mathbf{X}) = \log L(\theta; \mathbf{X}) = .n \log \sigma - (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^n \log(1 + \xi(\frac{X_i - \mu}{\sigma})) - \sum_{i=1}^n (1 + \xi(\frac{X_i - \mu}{\sigma}))^{-\frac{1}{\xi}}. \quad (3.27)$$

Finalmente el Estimador Máximo Verosímil (EMV) para $\theta = (\xi, \mu, \sigma)$ es

$$\widehat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta; \mathbf{X}).$$

En el caso particular de la distribución *Gumbel*, cuando $\varepsilon = 0$ y derivando 3.27 respecto de μ y σ e igualando a 0 obtendremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} n - \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right\} &= 0, \\ n + \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} (\exp \left\{ -\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right\} - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto no tendremos soluciones explicitas a estas ecuaciones. Por lo que tendrán que aplicarse procedimientos numéricos.

Otra dificultad con el método de máxima verosimilitud es que la DGVE no cumple con las condiciones de regularidad para que las propiedades asintóticas sean validas, por ser los extremos de las distribuciones funciones de los parámetros. Por lo tanto la aplicación de los métodos de máxima verosimilitud no es directa. Sin embargo, en un detallado estudio sobre este problema, Richard Smith [11] mostró que cuando $\varepsilon > -0,5$ los EMV tienen las propiedades asintóticas adecuadas, cuando $-1 < \varepsilon < -0,5$ es posible encontrar estimadores aun si estos no cuentan con las propiedades asintóticas usuales, se deberá observar estos casos para verificar que los estimadores puedan emplearse. Finalmente si $\xi < -1$ puede ocurrir que los estimadores no puedan obtenerse.

3.6.2. Estimación de parámetros para la DGP

De igual manera para estimar los parámetros de la DGP ($H_{\varepsilon,\beta}$) podemos pensar en el método de máxima verosimilitud. Para los resultados que a continuación se describen, también son validas las demostraciones de Smith.

Teniendo los datos originales $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ con distribución $H(X)_{\varepsilon,\beta}$ entonces la densidad será

$$h(x) = \frac{\xi}{\beta} (1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}-1}.$$

Entonces la log-verosimilitud es

$$\ell((\xi, \beta); \mathbf{X}) = -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{\xi}{\beta} X_i\right). \quad (3.28)$$

De igual forma al derivar con respecto a cada parámetro, igualar a 0 la ecuación 3.28 y resolviendo con métodos numéricos se obtienen EMV $\hat{\xi}_n$ y $\hat{\beta}_n$.

3.6.3. Método de Nelder & Mead

Uno de los muchos métodos numéricos que pueden ser empleados para dar solución a las funciones de verosimilitud que no tienen solución explícita y así obtener estimadores maximoverosimiles, es el método heurístico desarrollado por John Nelder y Roger Mead en 1965.

Es un método basado en conceptos geométricos que busca optimizar una función a partir de la evaluación de la función en los vértices que conforman un simplex, el cual se construye con $n + 1$ vértices, donde n es el número de parámetros a estimar. Así, si la función consta de 2 parámetros, el simplex se conformara por 3 vértices para formar un triangulo, si los parámetros a estimar son 3, el simplex será el tetraedro que uno los cuatro vértices no coplanarios. Una vez evaluada la función en los vértices, se ordenarán los resultados de acuerdo a su nivel de optimización y el vértice que arroje la peor optimización será substituido, de forma que el simplex podrá expandirse, contraerse, proyectarse o una

combinación de las anteriores. Al acercarse a la solución, el simplex se contraerá hasta encontrar el punto óptimo.

En el caso cuando el simplex es un triángulo, es decir que se tienen 2 parámetros a estimar y una vez elegido el vértice que se desea substituir W , el método discurre como sigue:

- Localización del punto medio sobre la línea que une los dos vértices no rechazados.

Se debe encontrar el punto $M = \frac{B+G}{2}$, donde B es el punto que generará la segunda mejor optimización y G es el punto que genera la mejor optimización.

- Reflexión hacia el punto R .

Se elige un nuevo vértice de prueba R reflejando el triángulo sobre el lado \overline{BG} con la magnitud que existe entre \overline{WM} a esta magnitud la llamaremos d . Ahora tenemos el triángulo formado por BGR . Si la optimización en R resulta mejor que en B o en G , desechamos el vértice que ahora resulte en la peor optimización y comenzamos de nuevo.

- Expansión sobre un punto E .

Si la optimización sobre R resulta mejor únicamente que en W , R seguirá siendo la peor optimización, pero nos hemos movido en la dirección correcta, así que podemos elegir un nuevo punto de prueba E . Así que extendemos la línea que une \overline{MR} con una magnitud d y ahí encontramos el punto E . Si E ofrece una mejor optimización que R . Habremos encontrado un mejor vértice y podemos reiniciar la iteración del método.

- Contracción sobre el punto C .

Si resultase que la optimización en R fuese igual o peor que W , requerimos nuevos puntos de prueba. Consideremos los puntos medios C_1 y C_2 , de los segmentos de línea \overline{WM} y \overline{MR} . De entre estos 2 puntos medios llamaremos C al que resulte en la mejor optimización y obtendremos un nuevo triángulo RWC . La elección entre C_1 y C_2 puede parecer poco útil, sin embargo es importante en problemas mayor dimensión.

- Reducción hacia B .

Si el punto C no generará una mejor aproximación que W entonces se deberán reducir los puntos G y W hacia B Substituyendo G por M y W por S , donde S es el punto medio de \overline{BW} . En nuestro nuevo triangulo BSM se reordenan los vértices de acuerdo a su nivel de optimización y se reinicia la iteración del procedimiento.

Este método es bastante efectivo y computacionalmente eficiente si el algoritmo únicamente evalúa los puntos cuando es necesario.

3.7. Métodos estadísticos de acercamiento a los datos.

Previo al análisis de las series de datos con alguno de los métodos de valores extremos, es posible realizar un primer acercamiento a los datos con algunas herramientas estadísticas, de forma que podamos conocer a grandes rasgos el comportamiento de la serie, algunas métricas como media muestral, desviación estándar, sesgo, curtosis, etc. Nuestro mayor interés es obtener información inicial sobre el comportamiento de las colas.

La desviación estándar y la media muestral en conjunto nos dan una idea aproximada y muy general de en qué sección del dominio podremos encontrar el grueso de los datos, lo que de igual forma nos indica en que sección del dominio encontraremos las colas.

La curtosis por otro lado, es una medida de forma de la distribución, la cuál estudia que proporción de la desviación estándar es aportada por datos que se encuentran más alejados a la media, en comparación con aquellos que se encuentran en un rango cercano, es decir, qué proporción de la desviación estándar es aportada por datos extremos. Esto implica que entre mayor sea la curtosis, mayor será la concentración de datos extremos. Lo cual nos hablará del peso de las colas. En conjunto con la medida de sesgo, la cuál hace referencia a la simetría de la función respecto a la media, la curtosis nos indica si una distribución tiene colas pesadas, sólo una cola pesada, o no tiene colas pesadas.

Además podemos apoyarnos en el uso de algunas herramientas gráficas como Histogramas y QQ-plots.

Los histogramas son gráficos de barras que indican la frecuencia de observación de datos en cierto rango. Para ello se debe dividir el dominio de los datos observados en una partición $n - \text{ésima}$ y realizar el conteo de cuantos datos se encuentran en cada sección de la partición. Por lo tanto ocurrirá que si la serie que se grafica cuenta con valores extremos, estos se verán reflejados en los extremos de la gráfica y la altura de las barras nos indicarán con que frecuencia se observan esta clase de datos, lo cual nos podrá dar una idea del peso de sus colas.

Los QQ-Plots son gráficos que nos permiten comparar una serie de datos observados con alguna función de distribución, a fin de comprobar si la serie de datos proviene de al menos, esa familia de distribución.

Si F es una *f.d.* entonces podemos definir la función cuantiles (*f.c.*) correspondiente por Q donde

$$Q(y) = F^{-1}(y) = \inf \{s : F(s) \geq y\}, \text{ para cualquier } y \in (0, 1).$$

Al no contar con información sobre la distribución de los datos a analizar, podemos obtener la función de distribución empírica (*f.d.e.*) \hat{F}_n , primero se ordenan los datos x_1, x_2, \dots, x_n de tal forma que $x_i < x_{i+1}$. Es decir generamos los estadísticos de orden. Entonces

$$\hat{F}_n(x_i) = \frac{i}{n}.$$

Si bien la f.d.e. resulta no ser continua en algunos puntos, es posible realizar una regresión a $\hat{F}_n(x_i)$ esta tendería a la función de distribución continua de los datos.

De manera similar se puede calcular la función de cuantiles empírica (*f.c.e.*), que es la inversa generalizada de la *f.d.e.* : $\hat{Q}_n(x) = \hat{F}_n^{-1}(x)$.

Además sabemos que si $X \sim F$ y definimos $Y = aX + b$ se cumplen las siguientes relaciones

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

y

$$Q_Y(p) = aQ_X(p) + b.$$

La idea de los QQ-Plots es aprovechar la segunda ecuación, que relaciona linealmente las *f.c.* de X e Y para tener una idea del ajuste de una muestra a una familia de distribuciones.

Sea X_i la función de los estadísticos de orden. Sabemos que las variables $U_i = F(X_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ son iid uniformes en $(0, 1)$ y por lo tanto

$$E(F(X_i)) = \frac{i}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Para hacer un QQ-plot graficamos los puntos $(Q(p_k), \widehat{Q}_n(p_k))$, para $k = 1, 2, \dots, n$ donde $p_k = \frac{k}{n+1}$ de forma que $\widehat{Q}_n(p_k) = X_k$ y por lo tanto los puntos de la gráfica son $(Q(p_k), X_k)$. De forma que si la muestra realmente proviene de una distribución de la familia F , la gráfica que se obtiene debe ser aproximadamente una recta de lineal al rededor de la recta de 45° , de ser el caso, la pendiente y la ordenada al origen nos podrían dar estimaciones para los parámetros de ubicación y escala.

Realizar un QQ-plot contra una distribución Normal nos puede proveer de información acerca del comportamiento de las colas. Si el extremo derecho de la gráfica termino por arriba de la recta nos indica que la distribución de la serie que estamos comparando es de cola derecha pesada. En cambio, si el extremo izquierdo termina por debajo de la recta de la recta indica que la distribución de la serie que estamos comparando es de cola izquierda pesada. Si se presentan ambos caso, la serie es de colas pesadas.

Además, si en lugar de definir X_i como los estadísticos de orden de la serie, se define $Y_i = \{x_i \mid x_i > u\}$ siendo x_i los estadísticos de orden de la serie y u el umbral propuesto para la serie, entonces Y_i es la función de estadísticos de orden sobre los valores extremos y podría aplicarse una gráfica QQ-Plot contra cualquiera de los 3 tipos de distribuciones pertenecientes a la DGP. De forma similar podría hacerse para los máximos por bloque, y realizar un QQ-Plot contra alguna de las familias de distribuciones pertenecientes a la DGVE. Estas gráficas nos serán de utilidad para encontrar estimaciones para los parámetros de ubicación y escala para la función de convergencia de la cola.

Capítulo 4

Cálculo y comparación de VaR con metodologías propuestas al conjunto seleccionado de instrumentos financieros y carteras de inversión.

Una vez definidos algunos modelos de valor en riesgo, es momento de realizar los cálculos para comparar los niveles de VaR obtenidos con cada modelo, así como analizar su comportamiento en distintos periodos. Nuestra intención es concluir, con base en los datos, si el modelo basado en la Teoría de Valores Extremos produce mejores estimaciones de VaR comparando los resultados de éste con los obtenidos de los modelos Histórico o Paramétrico.

4.1. VaR basado en Teoría de Valores Extremos

Hemos explicado ya la metodología de ajuste de una distribución límite a los valores máximos de una serie de datos observada mediante el uso de la Teoría de Valores

Extremos. Ya sea mediante la Distribución Generalizada de Valores Extremos o la Distribución Generalizada de Pareto, dependiendo de la forma de seleccionar los máximos.

Ya que nuestro interés se basa en la obtención de un nivel de VaR a partir de la distribución límite ajustada a las colas de pérdidas, resulta natural pensar en el uso de la serie de rendimientos de un instrumento financiero para este fin, pues si lográramos ajustar una distribución a la cola de la serie podríamos encontrar fácilmente el cuantil al $(1 - \alpha) \%$ que deseemos para los rendimientos de dicho instrumento, es decir, podemos encontrar el nivel de pérdidas que es superado con una probabilidad $\alpha \%$. Dado que la TVE ajusta una distribución a los máximos de una serie y el nivel que nosotros buscamos es para los mínimos deberemos tomar la serie de log-rendimientos multiplicados por -1, de esta forma, los niveles mínimos se convertirán en los niveles máximos, excepto si una tasa de rendimiento positiva de un instrumento implica una pérdida para el inversionista (como en el caso de divisas y la posición corta en derivados) los máximos de la serie representan ya las pérdidas máximas, por lo que la serie no deberá ser modificada.

Sin embargo recordemos que en ambos modelos de la TVE se supone una serie de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Este supuesto nos impide utilizar directamente la serie de log-rendimientos, pues si bien podemos decir que todas las observaciones son idénticamente distribuidas, no se puede decir que sean independientes, de hecho sabemos que son dependientes, si bien no con toda la historia de la serie sí con buena parte de la historia inmediata anterior.

Este problema se puede solucionar mediante el uso de modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heterosedastic*).

4.1.1. Modelos ARCH

Los modelos ARCH son utilizados para obtener innovaciones sobre la volatilidad de una serie, dependiendo si las observaciones reflejan momentos de alta volatilidad o momentos de volatilidad estable.

Un proceso ARCH(q) está definido por la siguiente expresión:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2. \quad (4.1)$$

Donde :

- ε_t es un proceso idénticamente distribuido con media 0 y desviación estándar 1.
- Los parámetros $\omega > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ y $\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ con el fin de que las predicciones sean estables en media.

El proceso ε_t es un proceso de “ruido blanco” pues cumple que

- $E(\varepsilon_t) = 0$,
- $Var(\varepsilon_t) = 1$,
- $Cov(\varepsilon_t; \varepsilon_{t-j}) = 0$.

Por lo que podemos asegurar que no hay dependencia lineal entre las observaciones del proceso. Normalmente este proceso es nombrado residuales del modelo ARCH(q).

De este proceso surge el GARCH(p,q), que es la generalización del modelo ARCH y esta definido por las expresiones:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (4.2)$$

Al igual que en el modelo ARCH, la primera ecuación hace depender a la variable y_t de su volatilidad y un proceso de ruido blanco, mientras que la segunda ecuación hace depender el valor actual de la volatilidad (t) de los valores que haya tenido en los momentos anteriores ($t - i$) y de la fluctuación aleatoria observada ($t - j$), esto en torno a un valor medio ω .

Es decir, se parte de un valor medio a largo plazo (ω) sobre el que se genera la expectativa inmediata sobre la volatilidad afectando este valor inicial por la innovación sobre la volatilidad del termino ARCH ($\sum \alpha \varepsilon_{t-i}$) y la predicción de la volatilidad en los periodos históricos conocidos del termino GARCH ($\sum \beta \sigma_{t-j}^2$).

En el modelo GARCH(1,1) la ecuación 4.2 se reduce a:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (4.3)$$

De modo que la innovación de la volatilidad depende de la observación de la variable en el periodo anterior, así como la volatilidad del periodo anterior. Así pues, la solución del modelo se reduce a la estimación de los parámetros α , β y ω lo cual suele resolverse con métodos de máxima verosimilitud y manteniendo la condición de que la suma de estos debe ser menor a la unidad.

Con los parámetros y las observaciones, pueden calcularse recursivamente las volatilidades σ_t^2 para cada tiempo y con éstas calcular los residuales ε_t . Como ya habíamos mencionado los residuales son independientes e idénticamente distribuidos, por lo tanto pueden ser usados como serie para el ajuste de la distribución a los máximos, sobre esta distribución calcularemos el cuantil al $(1-\alpha)\%$ el cual deberá multiplicarse por σ_t^2 para adecuar el cuantil de la distribución ajustada a los residuales a un cuantil que sea comparable con la serie de log-rendimientos original.

Por otro lado en la administración de riesgos dinámica, en la cuál el VaR se calcula de manera diaria, es de importancia contar con una predicción sobre la volatilidad que afectará a cada instrumento financiero para el siguiente día de operación, que pueda ser incorporada al nivel de VaR. Así pues y dado que se cuenta con los parámetros del modelo GARCH y las observaciones de la serie en t es posible realizar la predicción para la volatilidad en el periodo $t+1$, de esta forma podemos entonces multiplicar el cuantil al $(1-\alpha)\%$ obtenido de los residuales por la predicción de la volatilidad en $t+1$, σ_{t+1}^2 , lo cual no solo adecuaría al cuantil para ser comparable con la serie original, sino que también integraría la predicción del precio para el día siguiente, la cual como ya hemos descrito, contempla la innovación sobre la volatilidad y la observación en el periodo anterior.

4.1.2. Análisis de las series con herramientas estadísticas

Así pues podemos comenzar con el análisis de datos. En el presente trabajo realizaremos el análisis de distintos instrumentos financieros, de entre los cuales seleccionaremos los que se crean convenientes, acorde al análisis, para conformar una cartera de inversión. Este conjunto de instrumentos comprende los siguientes: Los índices de renta variable: IPC de la Bolsa Mexicana de Valores, S&P Standard and Poor's 500 de la Bolsa de Nueva York, el NDQ Nasdaq 100 de la Bolsa de Nueva York y el FTSE Financial Time Stock Exchange de la Bolsa de Londres. Tipos de Cambio: MXNUSD cambio peso-dólar, MXNCAD cambio peso dólar-canadiense, MXNEUR cambio peso-euro, MXNBRL cambio peso-real brasileño. Rendimientos genéricos de Bonos Gubernamentales Mexicanos M2, M5 y M10, donde el número indica los años a vencimiento del instrumento.

Comenzamos con el análisis de los vectores de log-rendimientos con herramientas estadísticas que nos puedan dar información sobre el comportamiento de las colas de la distribución original. Usaremos las 1000 observaciones anteriores a la fecha de cálculo de VaR. Esta restricción a la información es comúnmente usada por los administradores de riesgos, pues reduce la cantidad de datos con la que se trabaja sin sesgar la información respecto a la distribución original.

La primera fecha para la cuál calcularemos será al cierre del 12 de septiembre de 2008, el día de cotización previo al anuncio de quiebra de Lehman Brothers. Si bien la fecha de inicio de la crisis comúnmente marcada por el medio financiero es el 15 de septiembre de 2008, el mercado reflejó en los precios los problemas que enfrentaba el mercado financiero desde algunos días antes, sin embargo es el 15 de septiembre donde se observa una primera caída de precios generalizada y de gran volatilidad, por lo que nos es de interés comparar los distintos niveles de VaR que se obtienen con las distintas metodologías para esta caída de precios.

Revisemos la serie de log-rendimientos del índice de la Bolsa Mexicana de Valores, el IPC, la cuál ha sido multiplicada por -1 para poder localizar máximos como pérdidas. La serie utilizada abarca del 01 de octubre de 2004 al 12 de septiembre de 2008, una serie de 1000 observaciones. En la Figura 4.1 el histograma nos indica valores extremos continuos

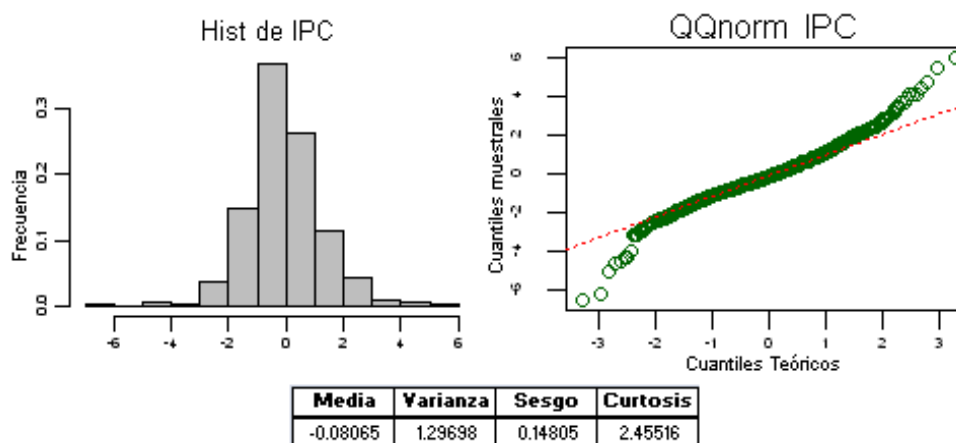


Figura 4.1: Gráficos de análisis inicial IPC

hacia las pérdidas, mientras la mayoría de los datos se centran en un rango de la media más/menos la varianza, lo cual es confirmado por un alto coeficiente de curtosis. El QQ-plot nos indica que las colas de los log-rendimientos son más pesadas que las de una normal, sobre todo la cola de pérdidas, esto lo confirma la medida de sesgo que es positiva.

Sin embargo, como se describió al inicio de este capítulo, al ser las series financieras observaciones dependientes y por lo tanto la varianza ser heterocedástica, deberán ser empleados los residuales del proceso GARCH para que el ajuste a la DGVE sea correcto, así que conviene realizar el mismo análisis sobre estos.

En la Figura 4.2 si bien observamos que para los residuales se suavizan las medidas estadísticas, mientras que el histogramas refleja una reducción en la frecuencia de los valores extremos, debido a la eliminación de clusters resultado del proceso GARCH, la lectura de las medidas y gráficos nos sigue sugiriendo el mismo comportamiento para las colas de la distribución de residuales, en resumen, las colas son mas pesadas que las de una distribución normal, por tanto tiene sentido aplicar la TVE.

Realicemos ahora el análisis a la serie de log-rendimientos del tipo de cambio peso-dólar, MXNUSD. En tipo de cambio un rendimiento positivo indica un aumento en la cantidad de divisas que serán entregadas a cambio de una unidad de la divisa recibida, es decir una depreciación de la divisa entregada. Si el inversionista mantiene una posición larga

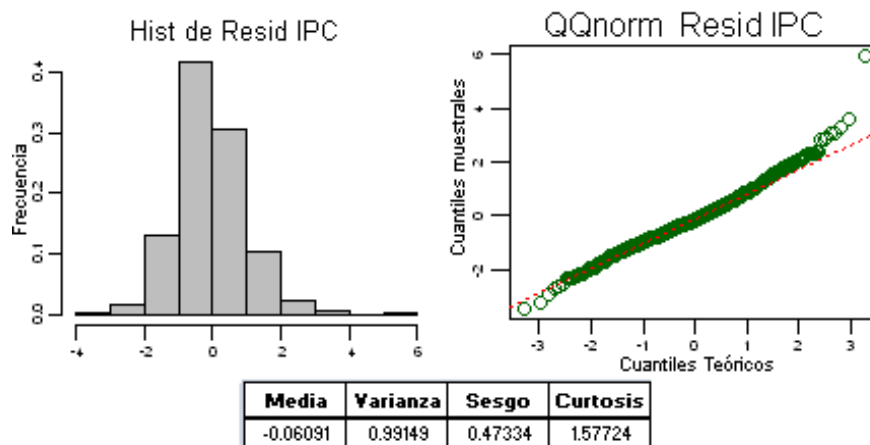


Figura 4.2: Gráficos de análisis inicial Residuales IPC

en la divisa a recibir (en este caso USD) un rendimiento positivo le generará ganancias, sin embargo si mantiene una posición corta en la divisa a recibir, un rendimiento positivo le generará pérdidas. Para el análisis del tipo de cambio conviene suponer una posición corta a la divisa extranjera, de forma que se estudia la apreciación o depreciación de la moneda local frente a la extranjera. Por lo tanto utilizaremos la serie de log-rendimientos del MXPUSD sin alterar el signo de las observaciones.

En la Figura 4.3, una vez más, el gráfico de QQ-plot nos muestra que la cola de pérdidas no corresponde a la de una normal, sino a una distribución con cola derecha pesada. De la cola izquierda, o de ganancias, pareciera indicarnos una cola más suave a la de una normal, sin embargo al final de la distribución los puntos cruzan la recta, de forma que indican una cola más pesada a la de una normal. La interpretación de este movimiento puede facilitarse con el apoyo del histograma, donde observamos en la cola izquierda una cola que decae rápidamente, pero que continúa hasta valores extremos bastante alejados de la media. El histograma junto con la medida de sesgo nos indican que la cola derecha es mucho más densa que la izquierda, mientras la medida de curtosis, mayor a cero, nos indican una distribución leptocúrtica, sin embargo basados en el histograma, en el QQ-plot y en que si bien la curtosis es positiva es menor a uno, no se esperaría una densidad en la cola mucho mayor a la de una normal.

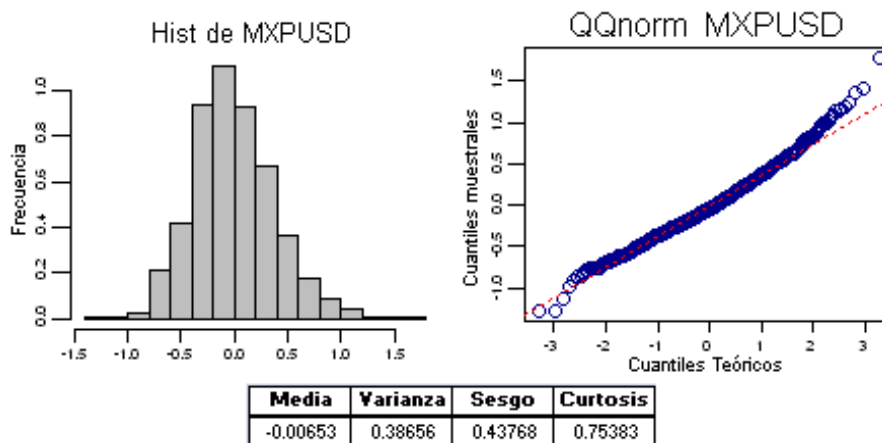


Figura 4.3: Gráficos de análisis inicial MXNUSD

Repetimos el análisis para los residuales obtenidos del proceso GARCH a la serie de log-rendimientos del tipo de cambio MXNUSD.

De nueva cuenta en la Figura 4.4 se observan cambios respecto a la serie original, se reduce la frecuencia de los valores extremos y el coeficiente de curtosis se reduce. Sin embargo el diagnóstico para el comportamiento de las colas se mantiene; cola de pérdidas pesada, no ajustables por una normal.

Para el caso de las curvas de rendimientos genéricos para Bonos Gubernamentales Mexicanos la serie será empleada sin alteraciones de signos, ya que un aumento en la tasa de rendimiento en el bono provocaría una baja en el precio del instrumento, causando una minusvalía y una posible pérdida.

El histograma nos muestra una alta concentración de los datos cerca de la media, sin embargo existen algunos datos muy alejados de la misma, lo que indica presencia de valores extremos. Una curtosis alta nos indica colas pesadas mientras el sesgo, al ser positivo, nos indica que la cola derecha es más pesada. El QQ-Plot contra una normal, nos confirma que ninguna de las colas de la distribución podría ser ajustada correctamente por una normal.

Una vez más observamos que los residuales del proceso GARCH para los rendimientos de Bonos M5, no presenta cambios significativos en el comportamiento de las colas,

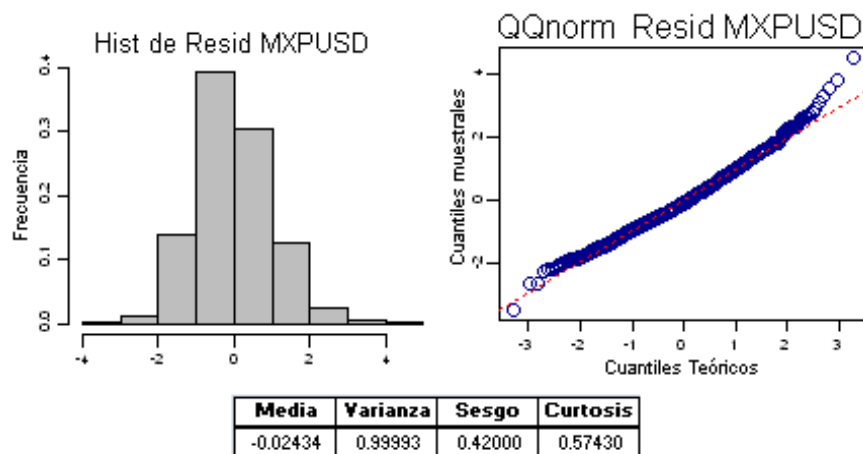


Figura 4.4: Gráficos de análisis inicial Residuales MXNUSD

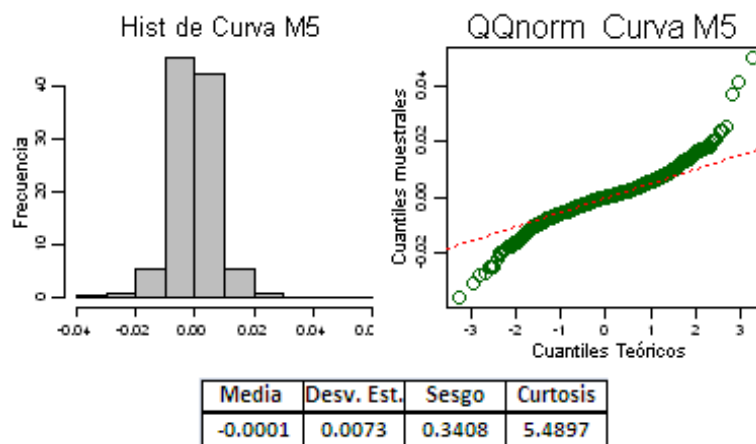


Figura 4.5: Gráficos de análisis inicial Bonos M5

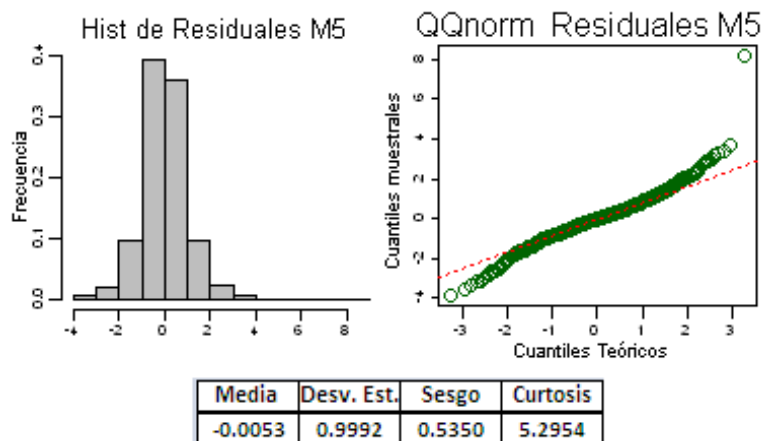


Figura 4.6: Gráficos de análisis inicial Residuales M5

respecto a la serie original.

Este análisis de diagnóstico se realiza para todos los instrumentos considerados en este trabajo, así como para los residuales obtenidos de los procesos GARCH aplicados a cada serie. Se presentan los parámetros ajustados para el modelo GARCH para cada instrumento en la Figura 4.7.

De manera generalizada los resultados indican que si bien las series de log-rendimientos son ajustables a una normal en los valores alrededor de la media, las colas correspondientes a las pérdidas resultan generalmente más pesadas. Aunque en algunos casos las colas correspondientes a las ganancias también resultan más densas que la cola que podría ajustársele mediante una distribución normal, el sesgo se mantiene en lo general positivo, mostrando una densidad mayor para las pérdidas. Así mismo los análisis para los residuales revelan que éstos mantienen el mismo comportamiento en las colas que la serie original, por lo tanto, el trabajar con los residuales en lugar de las series originales no corremos el riesgo de que el ajuste se realice a una cola con comportamiento distinto al de la cola de la serie original.

4.2. Cálculo de VaR con la DGVE

| | ω | α | β |
|--------|----------|----------|---------|
| IPC | 0.0835 | 0.1022 | 0.8481 |
| NDQ | 0.0085 | 0.0328 | 0.9612 |
| FTSE | 0.0156 | 0.0869 | 0.8982 |
| SPX | 0.0083 | 0.0505 | 0.9397 |
| MXNUSD | 0.0027 | 0.0394 | 0.9489 |
| MXNEUR | 0.0024 | 0.0274 | 0.9683 |
| MXNCAD | 0.0179 | 0.0881 | 0.8862 |
| MXNBRL | 0.0251 | 0.1669 | 0.8119 |
| M2 | 0.0001 | 0.1283 | 0.0000 |
| M5 | 0.0000 | 0.2288 | 0.7509 |
| M10 | 0.0000 | 0.2188 | 0.7169 |

Figura 4.7: Parámetros ajustados para el modelo GARCH por serie.

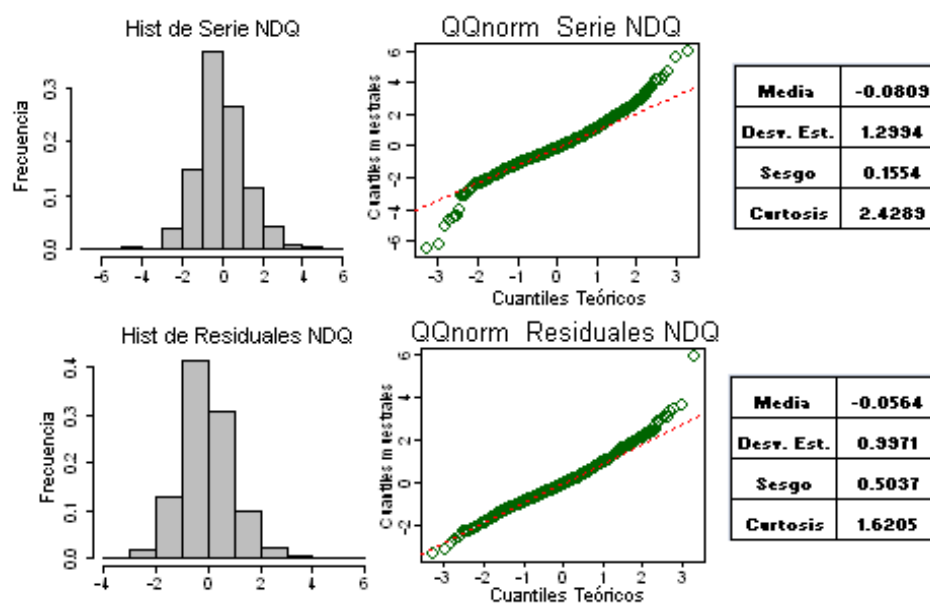


Figura 4.8: Gráficos de análisis inicial NDQ

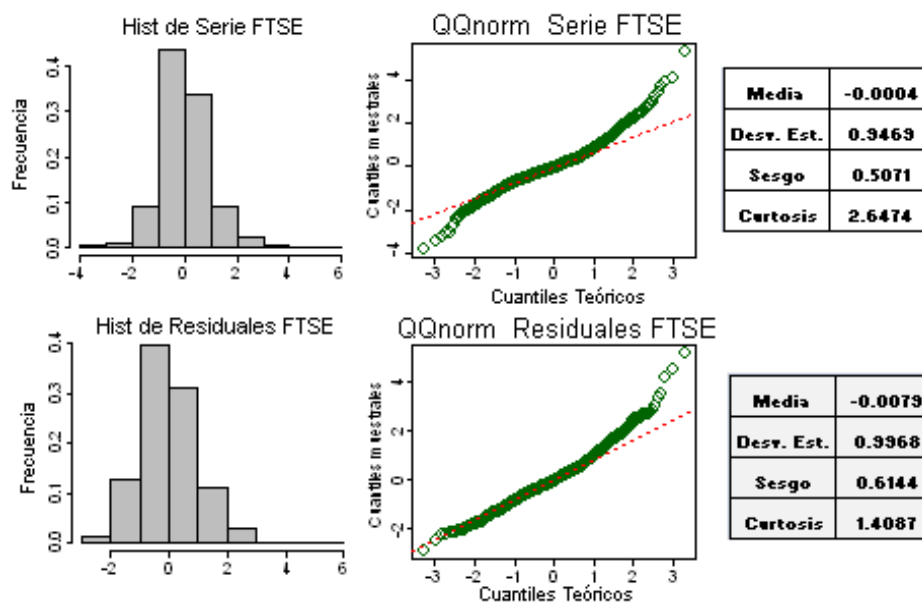


Figura 4.9: Gráficos de análisis inicial FTSE

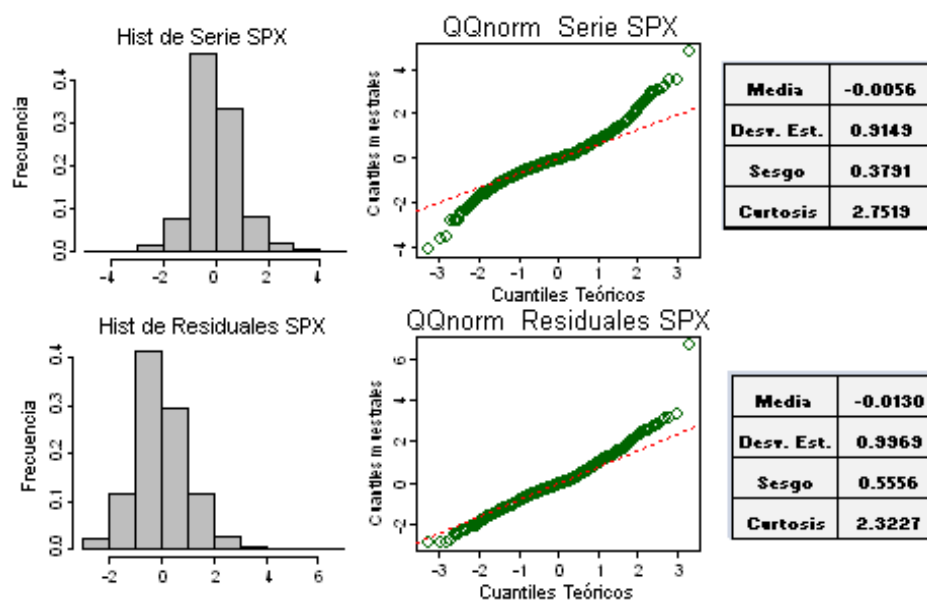


Figura 4.10: Gráficos de análisis inicial SPX

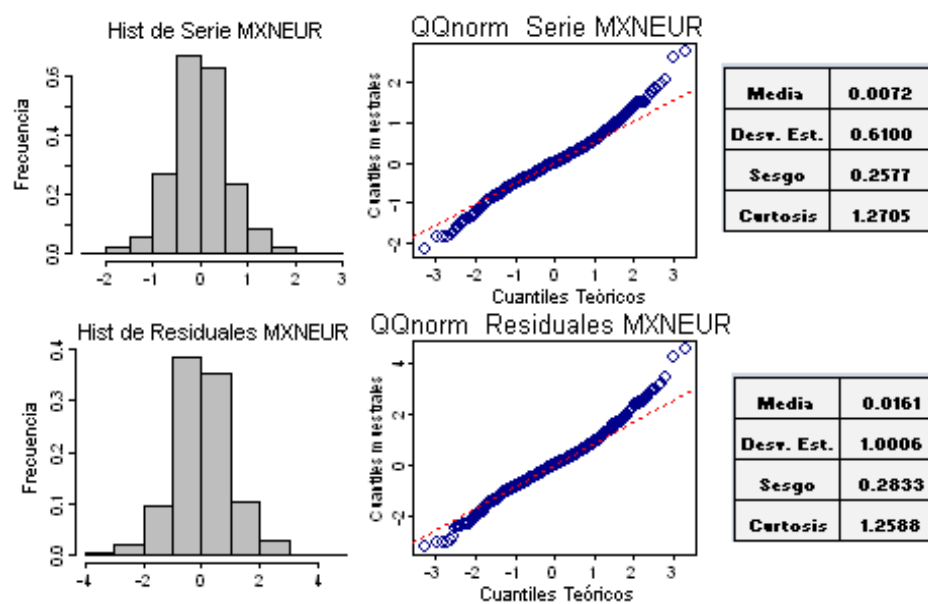


Figura 4.11: Gráficos de análisis inicial MXNEUR

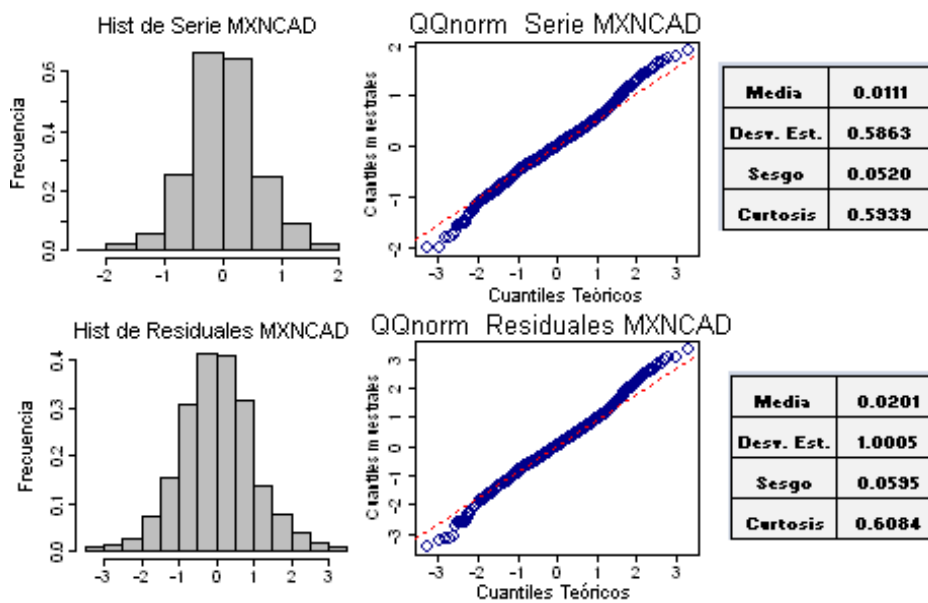


Figura 4.12: Gráficos de análisis inicial MXNCAD

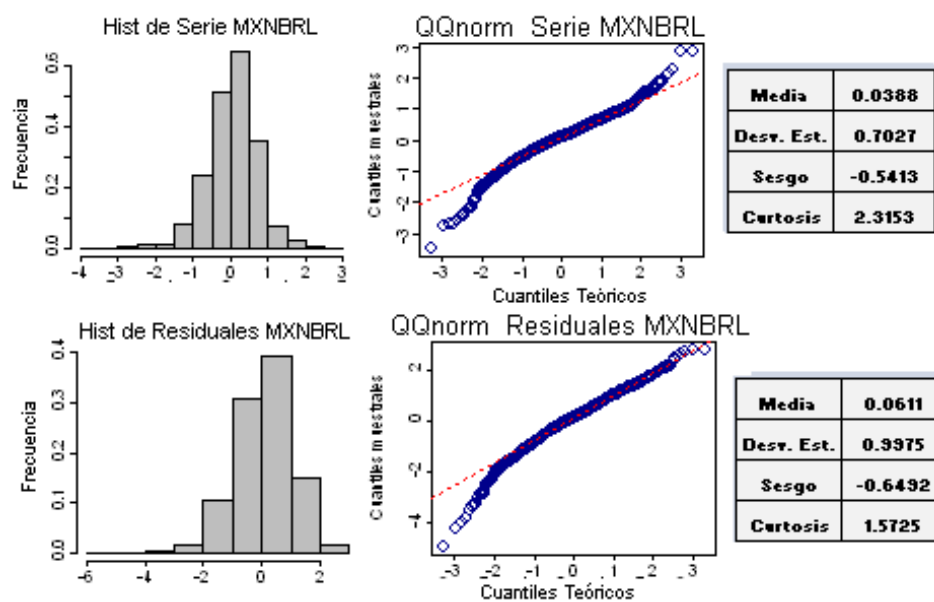


Figura 4.13: Gráficos de análisis inicial MXNBRL

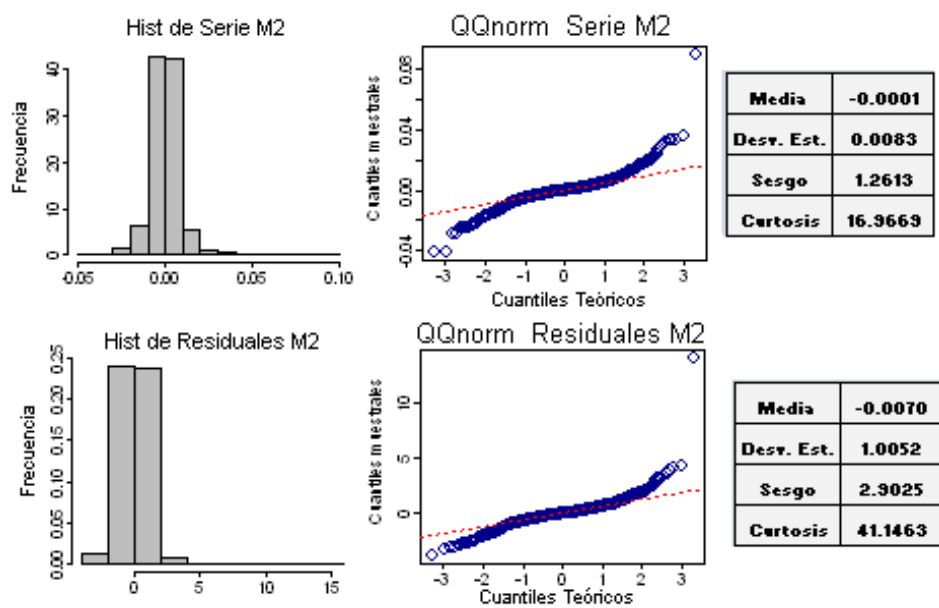


Figura 4.14: Gráficos de análisis inicial M2

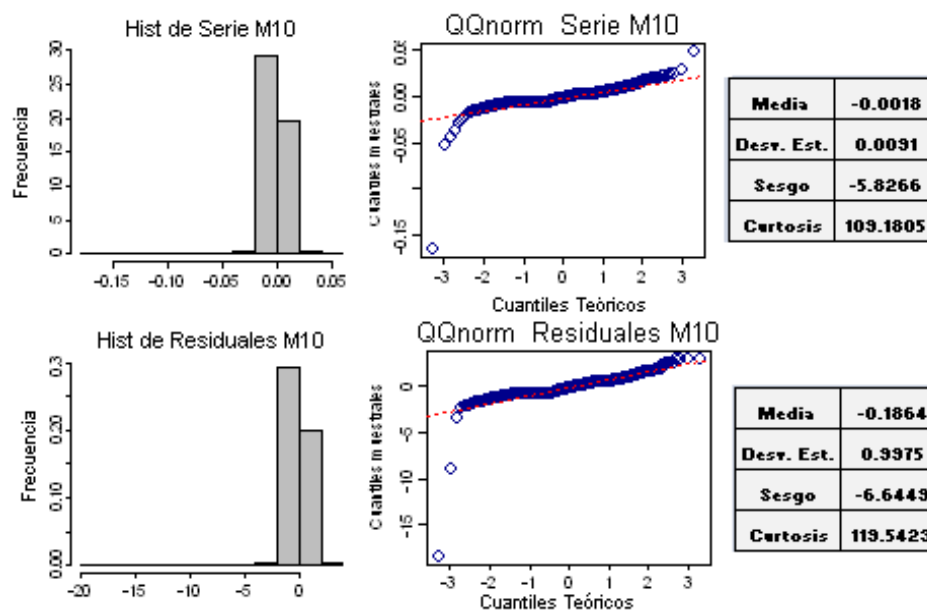


Figura 4.15: Gráficos de análisis inicial M10

Una vez que hemos concluido que las colas de pérdidas son pesadas y que el ajuste con una normal subestimaría la distribución, realizamos la selección de máximos por el método de bloques a la serie de residuales de cada instrumento. Recordemos que la selección del tamaño de bloque puede afectar el ajuste que se realice a la cola de la distribución, el bloque debe ser tal que provea una buena cantidad de máximos para el ajuste de la distribución y al mismo tiempo reduzca la cantidad de datos no máximos que puedan tomarse. Bajo esta norma para este trabajo se seleccionaron inicialmente bloques de información quincenal, sin embargo para algunos instrumentos el ajuste no resultaba suficiente, por lo que se analizaron los distintos ajustes que podrían resultar de distintos bloques mediante gráficos QQ-Plot.

Podemos observar para los ajustes realizados a la serie del IPC (Figura 4.16) que un ajuste mediante bloques de información mensual resulta más adecuados. En general esto sucede para los índices a analizar. Para la serie del Bono genérico a 5 años se observan que en general el ajuste mediante una DGVE resulta, en la mayoría de los casos analizados, deficiente (Figura 4.18). Esto se debe a la poca volatilidad que presenta esta

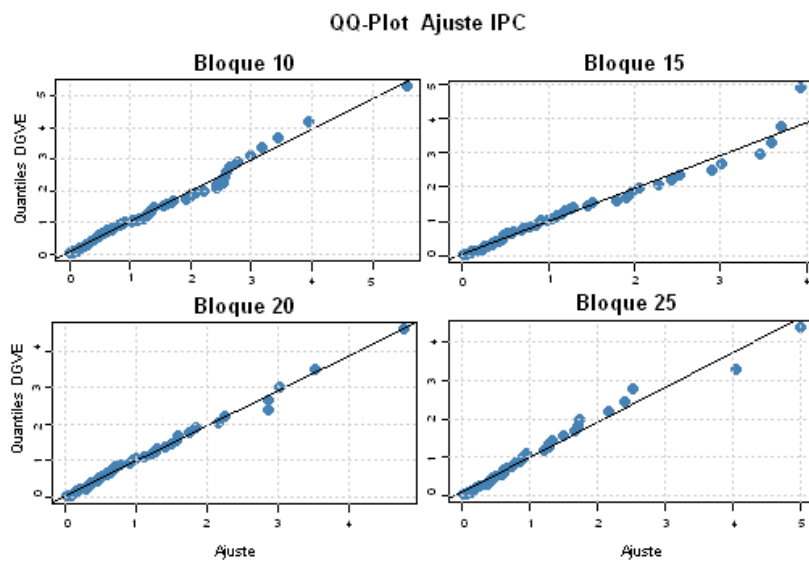


Figura 4.16: QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del IPC

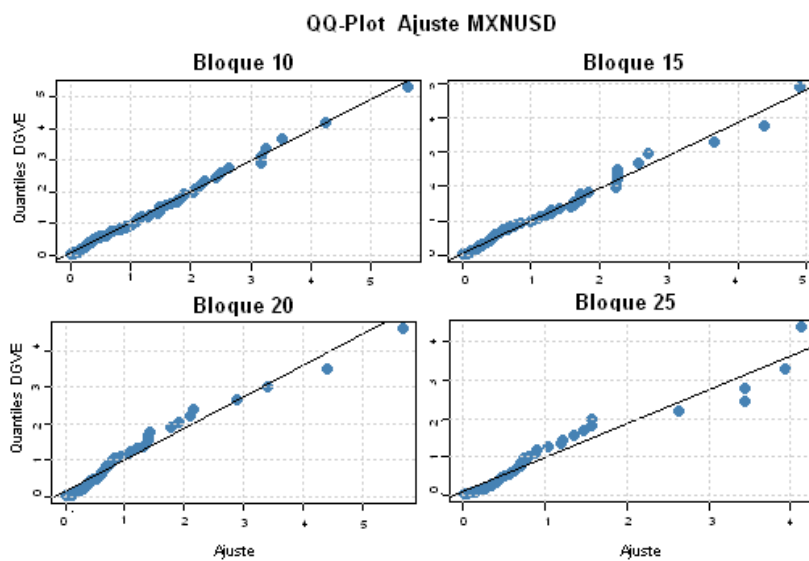


Figura 4.17: QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del MXNUSD

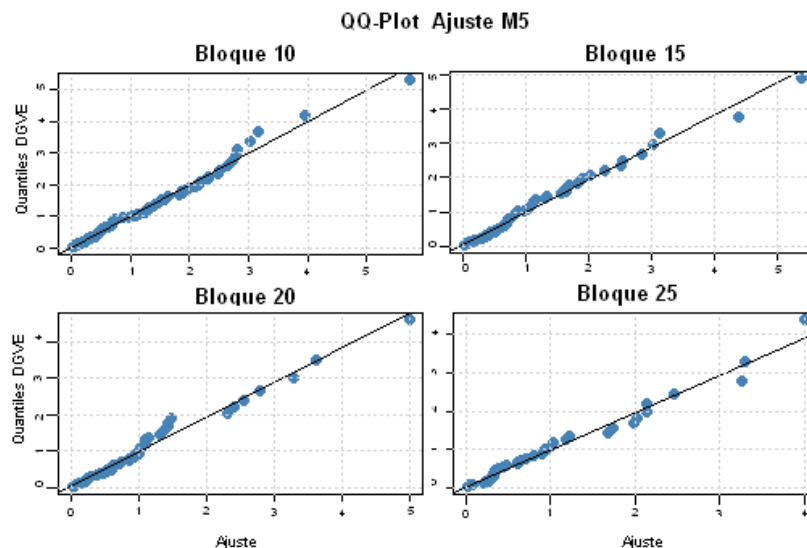


Figura 4.18: QQ-Plot del ajuste de la DGVE con distintos bloques a colas del M5

serie, así como a la poca información con la que se cuenta, sin embargo un ajuste mediante bloques de información mensual resulta suficientemente bueno. Finalmente la serie para el tipo de cambio peso-dólar resulta mas adecuado un ajuste mediante bloques de información quincenal(Figura 4.17).

Por lo tanto los bloques que se eligen son información mensual para índices y para las series de bonos genéricas y bloques de información quincenal para tipos de cambio.

Ya obtenida la serie de máximos se procede a estimar los parámetros de la DGVE, de forma que la distribución resultante ajuste correctamente a los máximos, es decir, a la cola de la distribución. Recordemos que la estimación se realiza por el método de Máxima Verosimilitud.

Se presentan los parámetros estimados para el ajuste de los residuales con una DGVE en la Figura 4.19.

Al realizar la estimación de los parámetros podemos conocer claramente cada distribución ajustada a las colas. Para los índices de bolsas tenemos parámetros de forma pequeños pero positivos, lo que nos indica que estamos ajustando distribuciones Frechet, de cola derecha pesada. Como el parámetro de forma es pequeño la densidad de la cola derecha

| | χ | μ | σ |
|--------|---------|--------|----------|
| IPC | 0.0593 | 1.6203 | 0.6039 |
| NDQ | 0.0975 | 1.6621 | 0.4512 |
| FTSE | 0.0979 | 1.6444 | 0.6075 |
| SPX | 0.0391 | 1.6324 | 0.6351 |
| MXNUSD | -0.0608 | 1.2880 | 0.6483 |
| MXNEUR | -0.0074 | 1.2678 | 0.6529 |
| MXNCAD | -0.2205 | 1.3566 | 0.6597 |
| MXNBRL | -0.1215 | 1.3213 | 0.4234 |
| M2 | 0.3516 | 1.2379 | 0.7343 |
| M5 | 0.2071 | 1.5222 | 0.5965 |
| M10 | -0.5733 | 0.7633 | 1.3135 |

Figura 4.19: Parámetros estimados para la DGVE ajustada a la cola de cada instrumento

no es tan grande. Podemos deducir de estos parámetros que la cola de pérdidas alcanza valores bastante alejados de la media aun que su probabilidad de ocurrencia observada es baja.

Para las series de Bonos genéricos a 2 y 5 años se obtienen parámetros de forma positivos , por lo que la distribución ajustada sigue, también, una distribución de tipo Frechet, sin embargo estos parámetros son mayores que los obtenidos para los índices bursátiles, esto nos indica que la cola de pérdidas tambien alcanza valores muy alejados de la media, sin embargo estos valores tienen un probabilidad de ocurrencia observada aun menor que en los correspondientes de los índices bursátiles. Este comportamiento es concistente con los datos observados en este tipo de instrumentos financieros. Sin embargo para el parámetro de la serie de Bono genérico a 10 años, el parámetro de forma es negativo, mientras el parametro de escala es mucho mayor que los demás parámetros de escala observados, esto nos indica un ajuste con una distribución Weibull, con la densidad de las colas bastante mayor. Esto nos indicaría que, si bien los valores cercanos a la media tienen mayor probabilidad de ocurrencia observada, también existen valores extremos con probabilidad de ocurrencia observada considerable, sin embargo estos valores extremos se encuentran relativamente cercanos a la media.

Finalmente los tipos de cambio son ajustados con parámetros de forma negativos,

correspondientes a distribuciones Weibull. Es decir, tienen colas izquierdas pesadas, lo que indica mayor probabilidad de ocurrencia observada en la cola para observaciones cercanas a la media, con valores extremos que no se alejan demasiado de los valores centrales de la cola. Para el caso del tipo de cambio peso-dólar y peso-euro los parámetros son pequeños y en el caso del tipo de cambio peso-euro, se asemeja más a una distribución gumbel, de colas poco densas. Por lo tanto en estos casos podríamos decir que la cola de pérdidas mantiene cierto equilibrio entre los valores más cercanos a la media y los valores extremos.

Es importante notar que en ningún caso los parámetros de forma sugieren que las series no tengan colas pesadas, solo nos dan información acerca de la distribución de las colas. Además, recordemos que en el caso de máximos por bloque, existe la posibilidad de realizar el ajuste contemplando datos que no necesariamente pertenecen a la cola.

Finalmente observemos que, exceptuando el caso de la serie de Bonos M10, el valor absoluto de los parámetros de forma son menores a $\frac{1}{2}$, por lo tanto, no tenemos problemas de convergencia para el ajuste de parámetros por Máxima Verosimilitud, de acuerdo a los estudios realizados por R. Smith [11]. El caso de la serie de Bonos M10, deberá ser observado, pues existe la posibilidad de que el ajuste no sea adecuado.

En la Figuras 4.20, 4.21 y 4.22 podemos ver que el ajuste a las colas es mejor bajo la DGVE que bajo una normal, pues considera mayor probabilidad a los valores más alejados a la media de la distribución. Por lo tanto si existe una subestimación será menor que la generada suponiendo normalidad en las colas.

Como paso final, antes de comenzar con el cálculo del VaR es conveniente revisar la bondad de ajuste de los modelos que hemos encontrado a partir de los parámetros. Para ello será suficiente revisar los gráficos de QQ-Plots, pues como ya ha sido descrito anteriormente, si los puntos graficados siguen la línea de 45° , quiere decir que los percentiles de la distribución ajustada coinciden con los percentiles de la distribución observada.

En general se puede observar que si bien los ajustes no son exactos, el ajuste es bastante cercano. En el caso de la serie genérica del Bono a 10 años, observamos en la Figura 4.25, que el ajuste de la distribución no es adecuado. Ya habíamos previsto esta posibilidad, pues el parámetro de forma en valor absoluto, era mayor a $\frac{1}{2}$. De hecho, el gráfico de QQ-

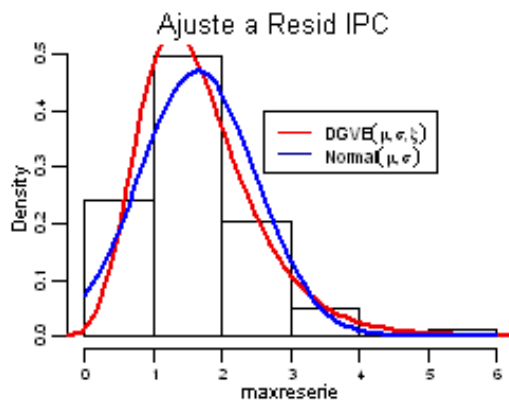


Figura 4.20: Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a IPC

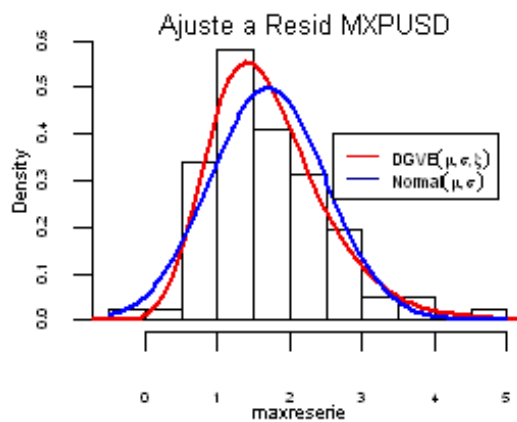


Figura 4.21: Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a MXNUSD

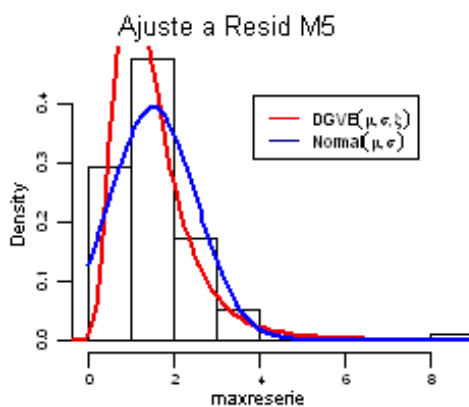


Figura 4.22: Comparación de ajuste a histograma Normal vs DGVE a M5

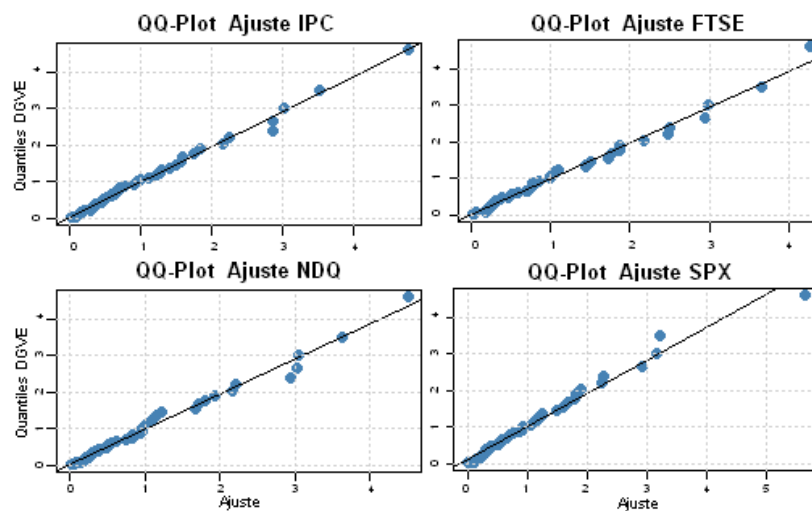


Figura 4.23: QQ-plot ajuste de la DGVE a Índices Bursátiles

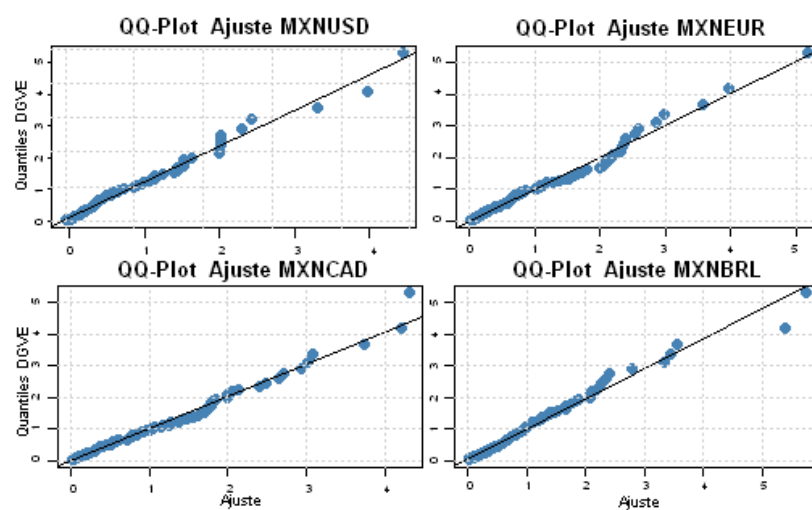


Figura 4.24: QQ-plot ajuste de la DGVE a Tipos de Cambio

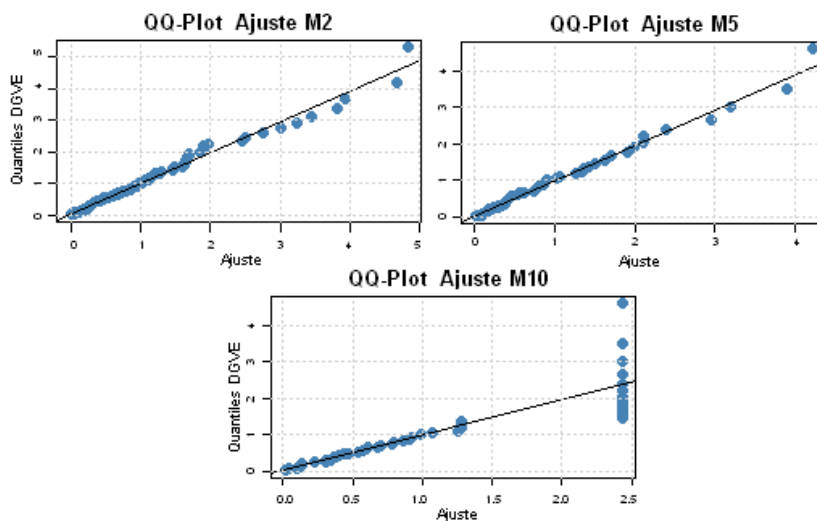


Figura 4.25: QQ-plot ajuste de la DGVE a curvas de Bonos Genéricos

| z_q | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MXUSD | MXEUR | MXCAD | MXBRL | M2 | M5 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 95% | 1.6049 | 1.6506 | 1.6289 | 1.6162 | 1.7121 | 1.7026 | 1.7662 | 1.5928 | 1.2193 | 1.5070 |

Figura 4.26: Estimador de la cola de la distribución ajustada DGVE

Plot no tiene una lectura clara, esto se debe a la poca información de la serie y a que la serie presenta muchos datos repetitivos, cabe mencionar, que esto no se debe a cluster en la serie, sino al poco movimiento que presentan los precios de estos instrumentos. Por lo tanto, descartaremos el uso del Bono genérico a 10 años en el cálculo de VaR mediante el método de Máximos por Bloque.

Una vez conocida la distribución buscamos el cuantil que acumule el $(1 - \alpha)\%$ de probabilidad para cada distribución correspondiente a las series empleadas mediante el uso del estimador descrito en la ecuación 3.26, recordemos que este cuantil no corresponderá al $(1 - \alpha)\%$ de probabilidad de la distribución ajustada a la cola. Se obtienen los estimadores de la cola que aproxima z_q , el cuantil del $q\%$ de probabilidad para la distribución empírica del total de la serie. Figura 4.26.

Este cuantil sería el nivel de pérdida ligado al vector de residuales, no a la serie de log-rendimientos. Por lo tanto multiplicamos este nivel por la predicción de la volatilidad

| VaR | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MZHU5D | MZMEUR | MZHCAD | MZNBRL | M2 | M5 |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 95% | 1.7921 | 2.4382 | 2.3982 | 2.3086 | 0.8197 | 1.1387 | 1.1274 | 1.7184 | 0.0080 | 0.0064 |

Figura 4.27: Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con ajuste de DGVE

σ_{t+1} , obtenido del proceso GARCH, así, el nivel resultante estará relacionado con la serie de log-rendimientos, no con los residuales, además de considerar la volatilidad para el siguiente periodo. De modo que se obtienen los niveles de VaR para el día de operación 15 de septiembre de 2008. Figura 4.27.

4.3. Cálculo de VaR con la DGP

Ahora pasemos al cálculo de VaR con el ajuste a las colas mediante una DGP. Para ello es necesario comenzar con la selección del umbral. Recordemos que es crucial la selección de un umbral adecuado, de lo contrario el ajuste podría no ser óptimo e incluso existir la posibilidad de que no pueda realizarse. Si bien no existe un método completamente desarrollado para esta selección, si existen algunas herramientas gráficas que pueden ser de gran utilidad.

Anteriormente enunciamos 2 propiedades de la DGP(3.20 y 3.21), en base a las cuales se concluía que si el umbral u era suficientemente grande la gráfica de la función media de excesos empírica $e_n(u)$ sería lineal para umbrales al rededor de u , donde la función media de excesos $e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$. Por lo cual la gráfica de ésta función para un rango de umbrales podría ser un primer indicador para obtener un umbral óptimo. A ésta gráfica la llamaremos *mrlplot* (*Mean Residual Life Plot*).

Además si $e(u)$ es lineal implicaría que si u_0 es adecuado para ajustar como distribución límite la DGP con parámetros β_0, ξ_0 , entonces para un umbral u_1 tal que $u_1 = u_0 + \varepsilon$ se podría ajustar como distribución límite una DGP con parámetros β_1, ξ_1 tal que $\beta_0 = \beta_1$ y $\xi_0 = \xi_1$, entonces $e(u)$ es lineal creciente mientras se seleccionen umbrales alrededor de un umbral óptimo. Entonces los umbrales elegidos serían también óptimos.

De lo anterior se proponen un par de gráficas. Se selecciona un conjuntos de

umbrales en (a, b) y se realiza un ajuste de la DGP basado en cada umbral, a fin de obtener los parámetros β y ξ de cada ajuste. Así, la primer gráfica representa los puntos $\{(u_i, \beta_i) : i = a \dots b\}$ mientras en la segunda corresponde a los puntos $\{(u_i, \xi_i) : i = a \dots b\}$. Lo que se busca en ambas gráficas son secciones de estabilidad donde, además, el rango de los umbrales coincida en ambas gráficas. Es decir, se buscan umbrales para los cuales los parámetros β y ξ sean constantes, lo cual nos indicaría un umbral óptimo. Ésta gráfica será referida como *tcplot* (*Threshold Choice Plot*).

Otra posibilidad para comprobar el nivel de ajuste de la distribución límite resulta de comparar los l-momentos de la distribución empírica con la distribución ajustada. Para el caso particular de la DGP se cumple que

$$\tau_4 = \tau_3 \frac{1+5\tau_3}{5+\tau_3},^1$$

Donde τ_3 es una estimación para la curtosis y τ_4 una estimación del sesgo.

Entonces si al graficar las estimaciones sobre la distribución empírica de $(\hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4)$ dado un umbral u se acercan a la curva teórica de los momentos de la distribución ajustada podemos decir que se cuenta con un umbral óptimo. Éste gráfico es conocido como *lmomplot* (*L-Moments Plot*).

Por otro lado autores como Alexander McNeil y R. Frey consideran suficiente un umbral que contemple entre el 10 % y 8 % de los datos observados para formar las colas. Lo cual para este trabajo podrá considerarse como regla de decisión pues se observa que en la mayoría de los casos los umbrales u seleccionados a través de las gráficas dividen los datos de forma que aproximadamente un 10 % de estos son mayores a u .

Entonces para la selección de un umbral adecuado que nos permita realizar un buen ajuste de la DGP a las colas de cada serie, construyendo los máximos mediante el método de *Peaks Over Threshold*, analizaremos las gráficas mencionadas.

Observemos los gráficos de la Figura 4.28 para la selección de un umbral en el caso de los residuales para el tipo de Cambio Peso-Dólar, MXNUSD, los gráficos del *tcplot* muestran estabilidad para el parámetro de forma y escala para umbrales entre 1,16 y 1,18.

¹Hosking, J. R. M. (1990) L-moment analysis and estimation of order statistics. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 52: 105–124.

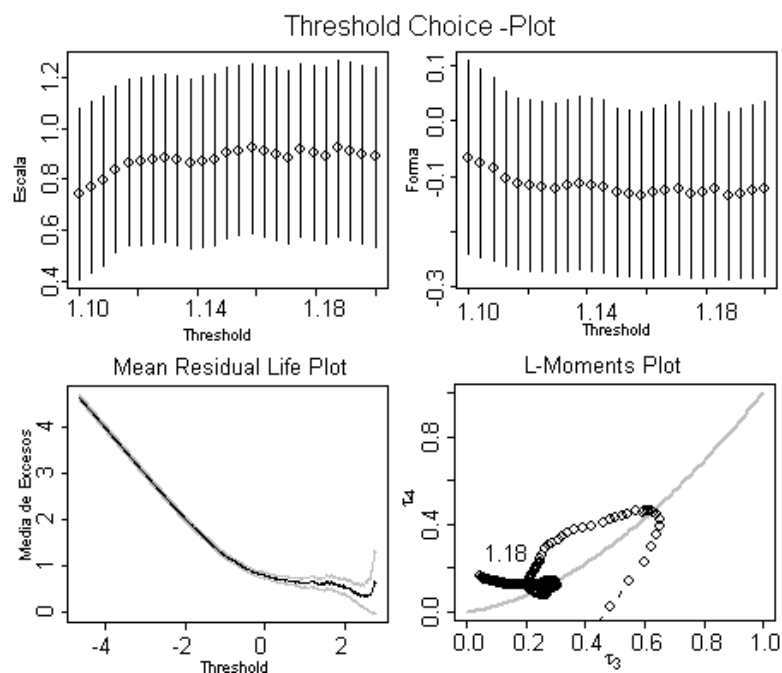


Figura 4.28: Gráficos Threshold MXNUSD

Así mismo el gráfico *mrlplot* muestra estabilidad alrededor de un umbral de 1,18. Finalmente comparando los momentos τ_3 y τ_4 de la serie de datos convergen a los l-momentos de un ajuste mediante la DGP con un umbral de 1,18. Finalmente si seleccionamos como umbral $u = 0,18$ aproximadamente el 10% de los datos de la serie de residuales seleccionada para el análisis superarían dicho umbral. En cambio si seleccionamos un umbral $u = 1,16$ se contemplará aproximadamente el 12% de los datos. Por lo tanto seleccionaremos un umbral $u = 1,17$.

En el caso de los gráficos de la Figura 4.29 el *tcplot* revela parámetros constantes de forma y escala para umbrales entre 1,20 y 1,22. Mientras la gráfica *mrlplot* muestra estabilidad desde un umbral aproximado de 1,3. En este caso el gráfico de momentos *lmomplot* pareciera mostrar convergencia a los l-momentos de los datos observados a los momentos de las distribuciones teóricas en muchos puntos, esto se atribuye a la distribución del gráfico y se confirma que para umbrales $1,19 < u < 1,22$ los momentos τ_3 y τ_4 de la serie de datos observados convergen a los momentos de un ajuste mediante la DGP con estos umbrales. Para esta serie se selecciona un umbral $u = 1,21$ con el cuál se obtiene poco más del 10%

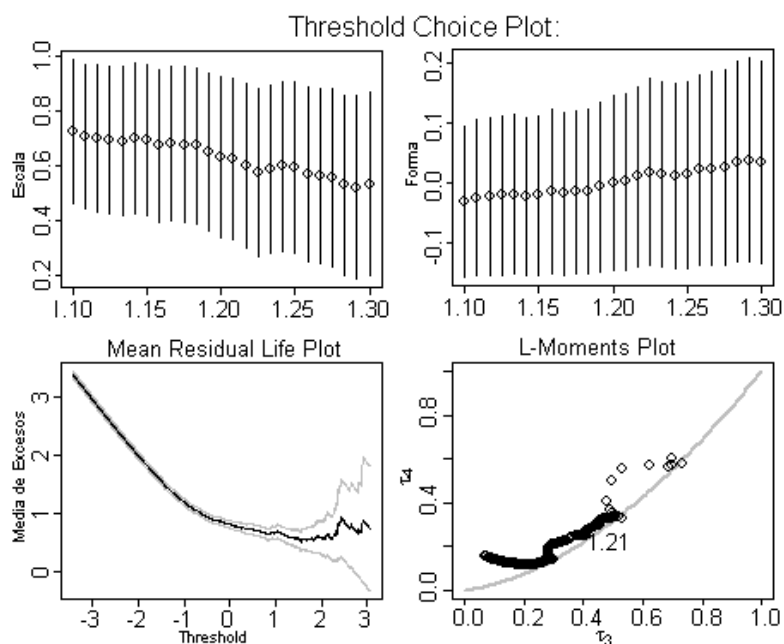


Figura 4.29: Gráficos Threshold IPC

de datos que exceden el umbral.

Para el caso de la curva genérica de Bonos M5 se presenta la Figura 4.30, la gráfica *tcplot* muestra una particularidad, pues muestra que para distintos grupos de umbrales el parámetro de forma permanecerá constante, esto se atribuye a la poca volatilidad que se presenta en la serie de rendimientos del Bono M5. Sin embargo la gráfica correspondiente al parámetro de escala muestra un comportamiento más aleatorio. En ésta se puede observar estabilidad alrededor de un umbral aproximado $u = ,1,13$. La gráfica *mrlplot* no brinda suficiente información por la escala de los datos, sin embargo muestra estabilidad alrededor del 1. Finalmente la convergencia de momentos confirma que un umbral $u = 1,13$ ofrecería un buen ajuste.

Se sigue este procedimiento de análisis a los gráficos para todos los instrumentos seleccionados.

Con base en los gráficos y el porcentaje de observaciones que superan a cada posible umbral se realiza la selección de estos para cada Instrumento. Figura 4.39.

Una vez seleccionado el umbral se obtienen los valores máximos de la serie y

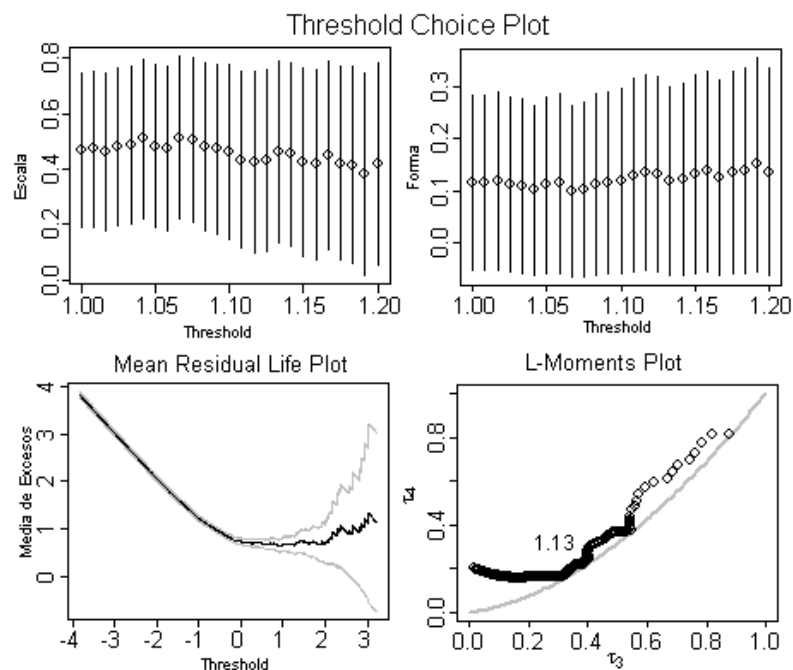


Figura 4.30: Gráficos Threshold M5

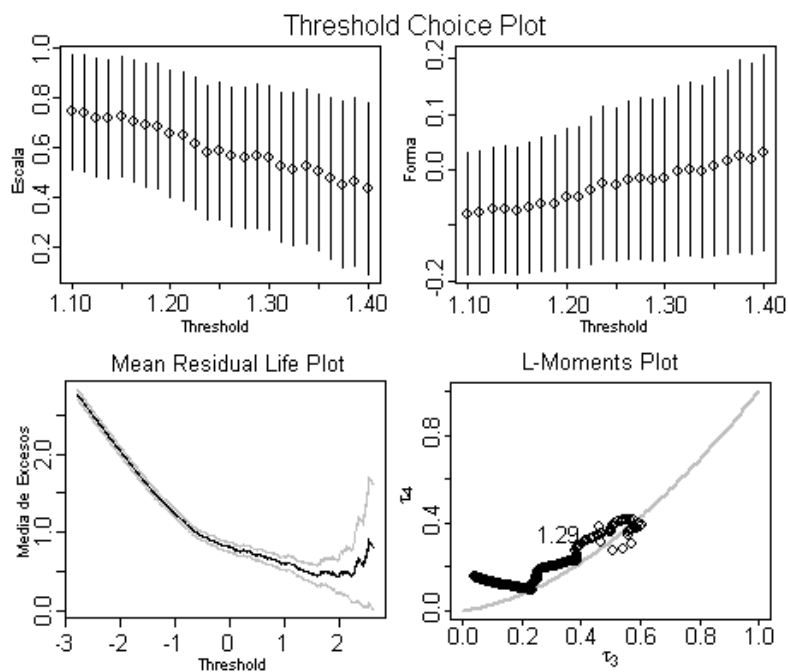


Figura 4.31: Gráficos Threshold NDQ

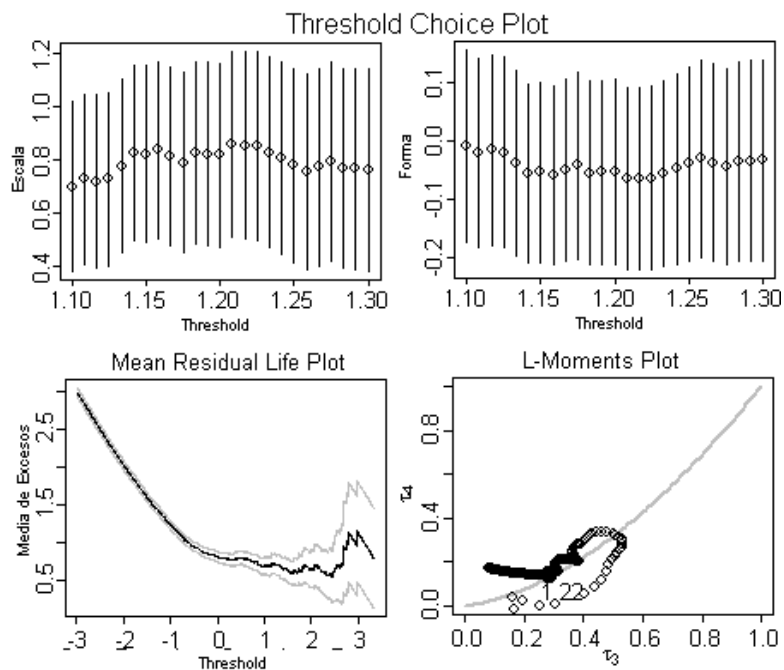


Figura 4.32: Gráficos Threshold FTSE

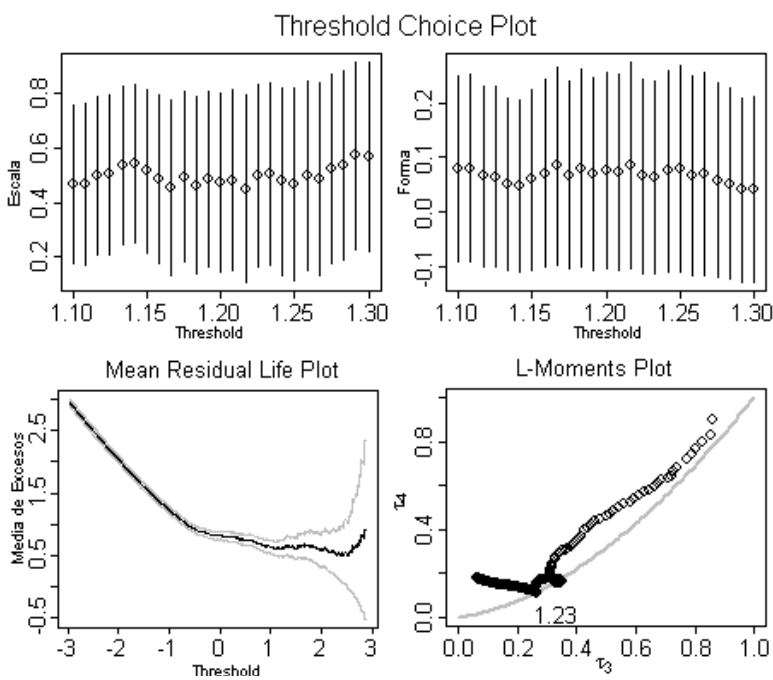


Figura 4.33: Gráficos Threshold SPX

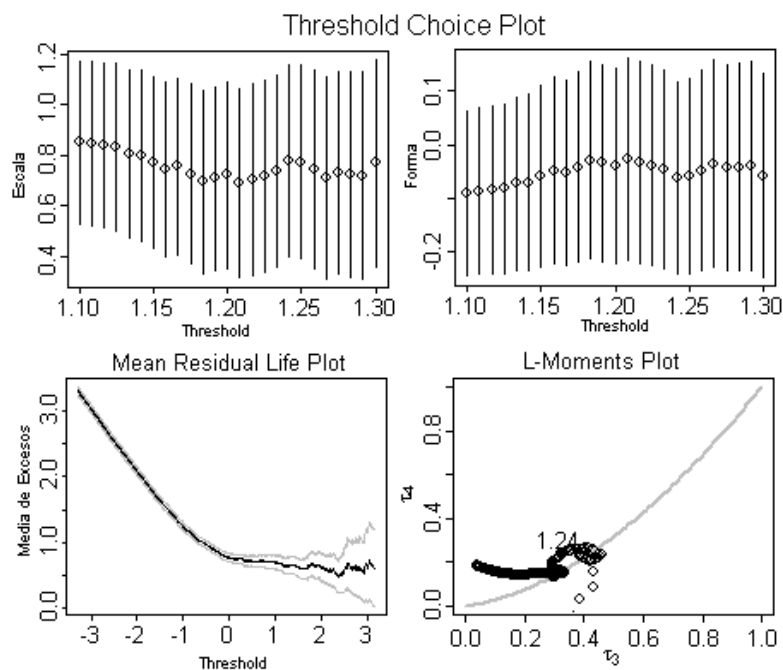


Figura 4.34: Gráficos Threshold MXNEUR

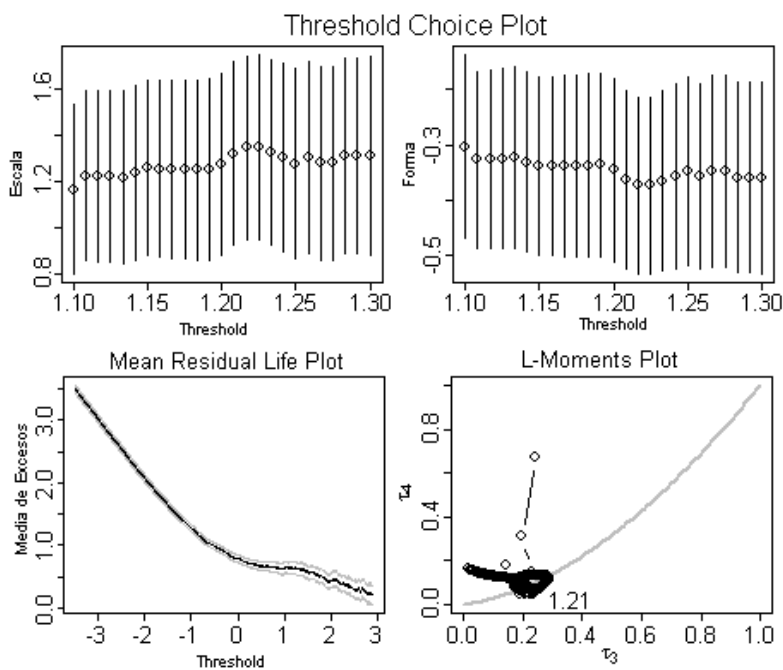


Figura 4.35: Gráficos Threshold MXNCAD

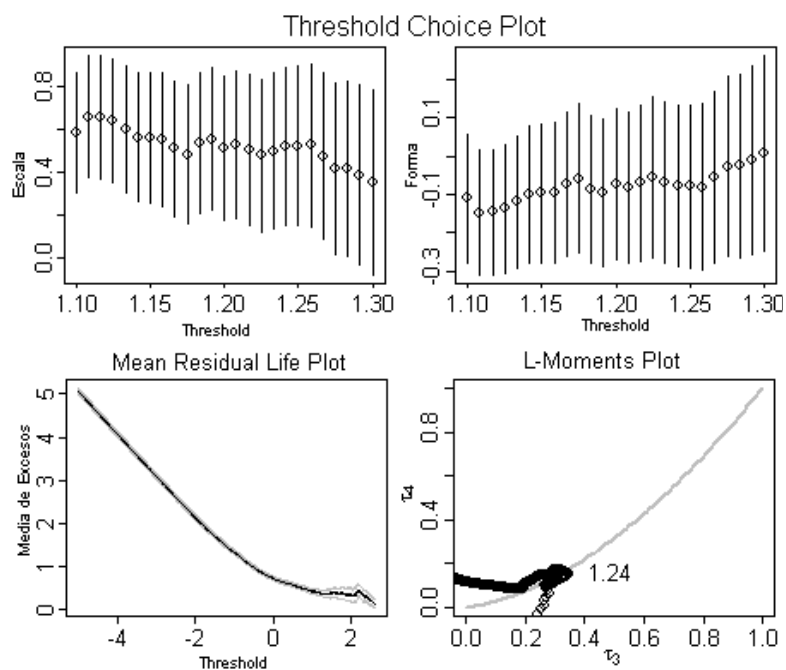


Figura 4.36: Gráficos Threshold MXNBRL

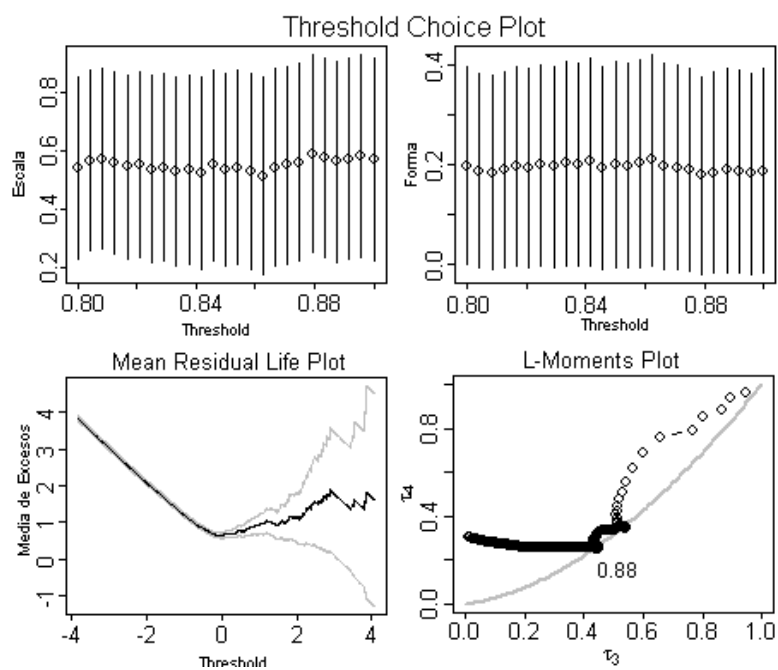


Figura 4.37: Gráficos Threshold M2

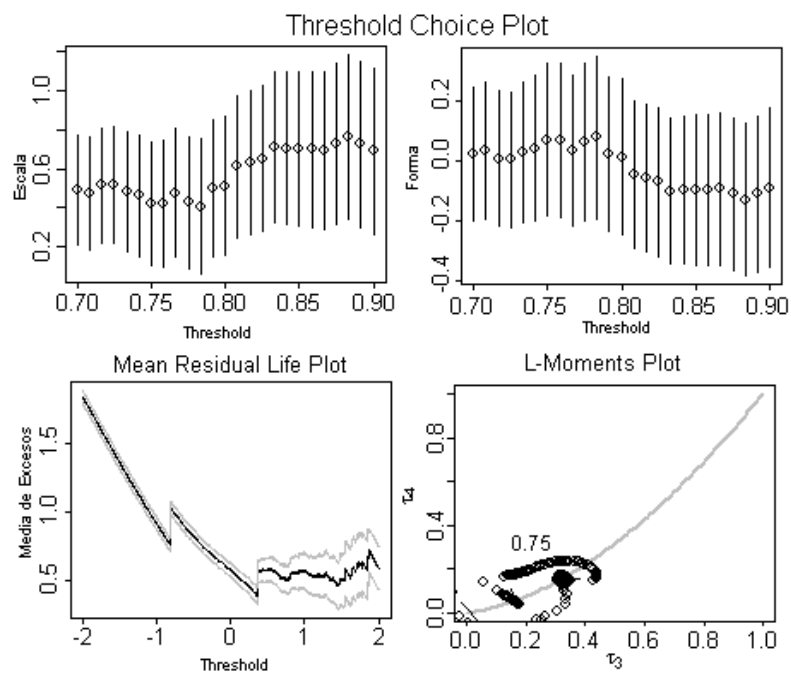


Figura 4.38: Gráficos Threshold M10

| | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MZNUSD | MZNEUR | MZNCAD | MZBRL | M2 | M5 | M10 |
|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| Umbral | 1.21 | 1.28 | 1.20 | 1.22 | 1.17 | 1.24 | 1.22 | 1.24 | 0.88 | 1.13 | 0.76 |

Figura 4.39: Umbrales seleccionados para residuales

| | χ | σ | umbral |
|--------|---------|----------|--------|
| IPC | 0.0045 | 0.6253 | 1.21 |
| NDQ | -0.0159 | 0.5372 | 1.28 |
| FTSE | -0.0527 | 0.7543 | 1.20 |
| SPX | 0.0750 | 0.5673 | 1.22 |
| MXNUSD | -0.1230 | 0.7448 | 1.17 |
| MXNEUR | -0.0657 | 0.7072 | 1.24 |
| MXNCAD | -0.3800 | 0.9032 | 1.22 |
| MXNBRL | -0.0710 | 0.4187 | 1.24 |
| M2 | 0.2389 | 0.6454 | 0.88 |
| M5 | 0.1220 | 0.5909 | 1.13 |
| M10 | -0.0397 | 0.5614 | 0.76 |

Figura 4.40: Parámetros estimados de las DGP ajustadas a las colas de instrumentos

se procede a realizar el ajuste de la DGP sobre éstos, mediante el método de Máxima Verosimilitud. Figura 4.40.

Estos parámetros nos indican una distribución límite ajustada específica para cada serie de residuales. Observamos que la serie Genérica de Bonos a 2 y 5 años, las series del índice IPC y el Standar & Poors son ajustadas mediante distribuciones exponenciales. La mayoría de las series son ajustadas mediante distribuciones Beta GP, la distribución con menor peso en la cola, recordemos que esto no significa que la serie no tenga una cola pesada, pues el ajuste es únicamente a la cola. Para hacer una deducción a partir de las distribuciones ajustadas referente a la cola de la serie, se requiere tomar la distribución ajustada en su totalidad, tomando en cuenta la magnitud del parámetro de forma.

Si bien la mayoría de las series tienen distribuciones límite ajustadas a la cola de perdidas que corresponden a una distribución Beta GP, los niveles de los parámetros de forma varía. Así, un parámetro de forma negativo pero cercano a 0 implica una cola más pesada que un parámetro de forma negativo cercano a $-\frac{1}{2}$, pues el parámetro de forma cercano a 0 nos habla de una distribución Beta que se asemeja más a una Exponencial, que la distribución con parámetro de forma $-\frac{1}{2}$.

Nuevamente todos los parámetros de forma en valor absoluto son mayores a $\frac{1}{2}$, por lo que la estimación de parámetros puede considerarse satisfactoria, según los criterios

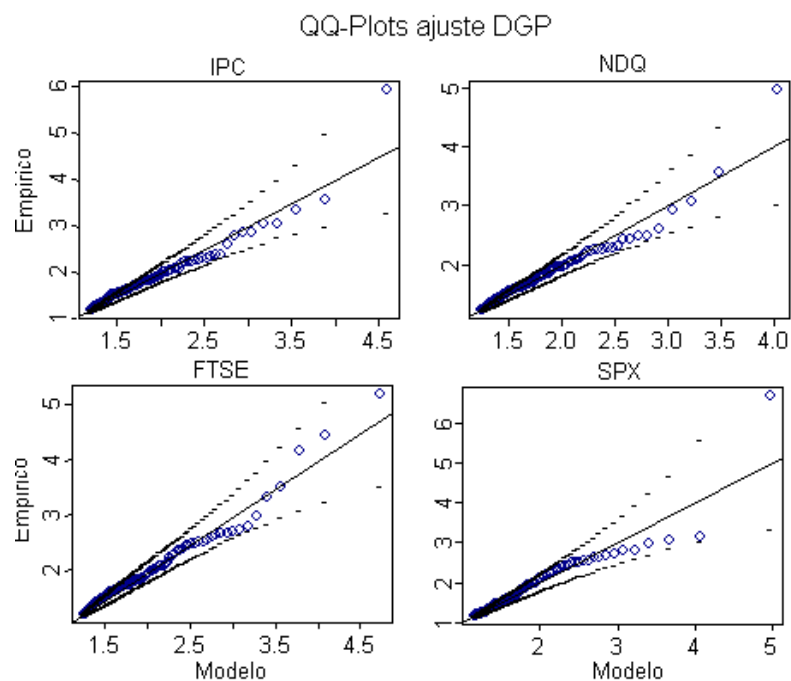


Figura 4.41: QQ-plot ajuste de la DGP a Índices Bursátiles

de R. Smith. Sin embargo se realizará un análisis de bondad de ajuste mediante gráficos QQ-plot de la distribución empírica contra el modelo ajustado.

Para las series de tipos de cambios podemos observar un buen ajuste para el caso del dólar canadiense y el euro, éste último con una ligera desviación en el último percentil de la cola (Figura 4.42). Sin embargo para el caso del peso mexicano y el real brasileño se encuentran desviaciones de mayor consideración en la parte final de la distribución, sobre todo en los últimos percentiles. Aunque podemos considerar este ajuste como útil, nos preguntamos ¿Cómo podríamos mejorar el ajuste? Con base en los gráficos, podríamos proponer el uso de un umbral más alto, lo cual cuestionaría el uso de un umbral que sea superado por el 10% de las observaciones.

En la Figura 4.41 podemos observar que, para el caso de los índices, la desviación de los cuantiles finales se generaliza. Aun cuando el ajuste resulta bueno para el resto de la distribución, estas desviaciones al final de la cola son de particular interés, pues podrían demeritar la eficacia del cálculo de VaR con estos modelos.

El caso de las series de Bonos presentan la misma desviación en el ajuste (Figura

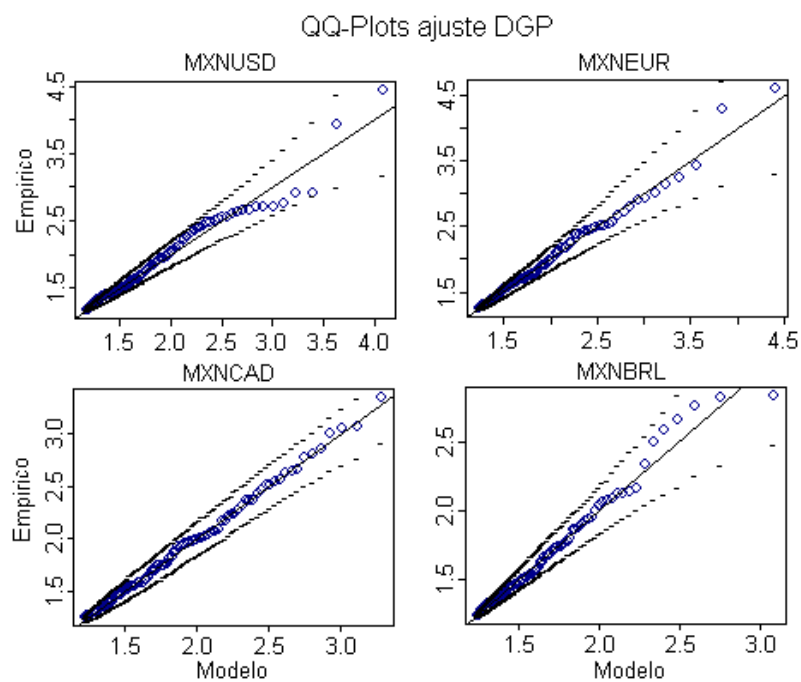


Figura 4.42: QQ-plot ajuste de la DGP a Tipos de Cambio

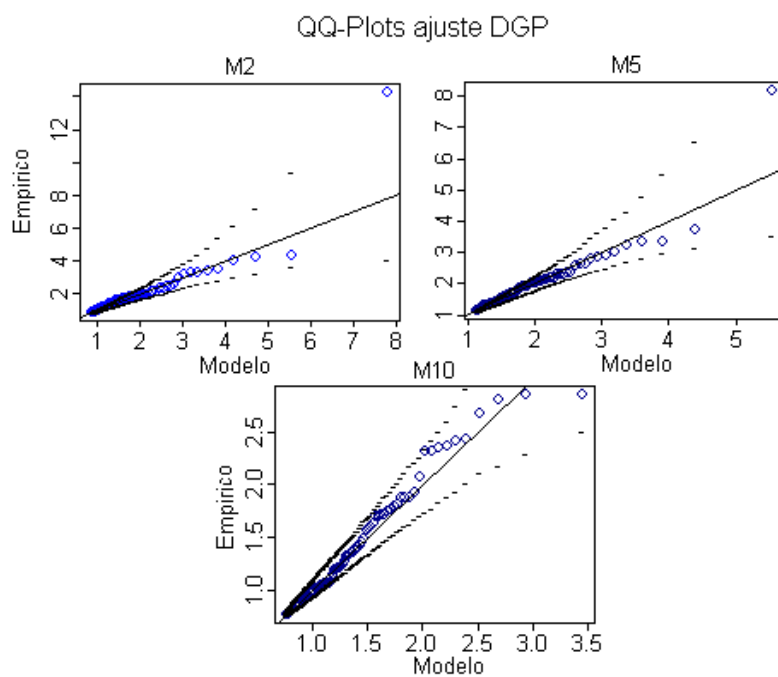


Figura 4.43: QQ-plot ajuste de la DGP a curvas de Bonos Genéricos

| z_q | IPC | MDQ | FTSE | SPX | HZNUSD | HZNEUR | HZNCAD | HZNBRL | M2 | M5 | M10 |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 95% | 1.6633 | 1.6818 | 1.7564 | 1.6703 | 1.6923 | 1.7332 | 1.7641 | 1.5276 | 1.3824 | 1.5708 | 1.1498 |

Figura 4.44: Estimador de la cola de la DGP ajustada

4.43). A diferencia de la metodología de la DGVE, con el uso de DGP el Bono a 10 años tiene un ajuste que podría resultar útil, aunque tiene algunas desviaciones a lo largo de la distribución.

Se podría pensar que estas desviaciones son causadas por una estimación paramétrica deficiente y que tomando parámetros distintos el ajuste sería exacto, sin embargo cualquier alteración a los parámetros de forma y escala, con el fin de extender el dominio de las distribuciones y minimizar las desviaciones en los cuantiles finales, provocarían una deformación en el resto de la distribución, generando desviaciones a lo largo de la distribución ajustada, principalmente en la cresta de la distribución. Otra solución a este conflicto sería el uso de de una serie de observaciones mayores (más de 1000 observaciones) sin embargo este trabajo se realiza asumiendo que estos cálculos serán implementados para el manejo de riesgos de una cartera real, de modo que el uso de mas observaciones aumentaría el tiempo de cálculo y complicaría la implementación. Por lo tanto se trabajará, inicialmente, con los parámetros antes mostrados.

Procedemos a calcular la estimación para el cuantil z_q correspondiente al 95 % de la distribución empírica de la serie observada, este cálculo se realiza con el estimador descrito en la ecuación 3.25.

Si comparamos los cuantiles de la Figura 4.44 con los obtenidos bajo el método de Máximos por Bloques (Figura 4.26), podemos observar que difieren en una pequeña magnitud. El proceso de GARCH no cambia en las metodologías, por lo que los niveles de VaR obtenidos bajo una y otra metodología serán similares. Esto podría indicarnos que las desviaciones observadas en el ajuste con DGP no estropean nuestro cálculo de VaR.

Para obtener el VaR al 95 % de confianza hace falta añadir la σ_{t+1} estimada con el proceso GRARCH.

Comparando los resultados obtenidos para el VaR al 95 % de confianza con el

| VaR | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MZNUSD | MZNEUR | MZCAD | MZBRL | M2 | M5 | M10 |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 95% | 1.8572 | 2.4844 | 2.5860 | 2.3859 | 0.8102 | 1.1592 | 1.1261 | 1.6481 | 0.0091 | 0.0067 | 0.0071 |

Figura 4.45: Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con ajuste de DGP

método de Máximos sobre un Umbral (Figura 4.45), comprobamos que existe una mínima diferencia con los obtenidos mediante el método de Máximos por Bloque (Figura 4.27).

Esta observación podría interpretarse como un indiferencia entre el uso del método de Máximos por Bloque y el de Máximos sobre un Umbral. Sin embargo debemos considerar que, aun que las diferencias encontradas en los cálculos de VaR son mínimas, existen tales diferencias. Recordemos también que para el caso de la serie de Bono Genérico a 10 años el ajuste por Máximos por Bloques no fue satisfactorio, mientras que con Máximos sobre un Umbral si obtuvimos un ajuste útil. Esto nos da una preferencia para el uso del Método de Máximos a un Umbral cuando se cuenta con series poco volátiles, o con observaciones de muy alta frecuencia. Además se compara únicamente el VaR en una fecha específica, sin observar que sucede en otras fechas donde el uso de uno u otro método podría ser significativo debido a las condiciones de mercado.

4.4. Cálculo de VaR con modelos convencionales

A modo de comparación se realizará el cálculo de VaR con metodologías usadas más frecuentemente, como cálculo de VaR Paramétrico Normal y el llamado VaR Histórico, ambos son ampliamente seguidos por instituciones financieras e incluso utilizadas como referentes a límites de inversión por algunos reguladores financieros.

Calcularemos el VaR a la misma fecha asumiendo normalidad en las series y con el uso de un modelo GARCH, a fin de reducir posibles diferencias por el uso de la volatilidad estimada. El ajuste de la normal se realiza sobre la distribución empírica generada por la serie observada y no únicamente a la cola de la distribución. Se obtiene un nivel de VaR al 95% de confianza para cada instrumento. Figura 4.46

Anteriormente se mostraron los QQ-plot de los residuales para cada serie contra

| VaR | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MXNUSD | MXNEUR | MXCAD | MXBRL | M2 | M5 | M10 |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 95% | 1.7639 | 2.3942 | 2.3991 | 2.3198 | 0.7981 | 1.0920 | 1.0380 | 1.7036 | 0.0109 | 0.0070 | 0.0111 |

Figura 4.46: Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con método Paramétrico Normal

| VaR | IPC | NDQ | FTSE | SPX | MXNUSD | MXNEUR | MXCAD | MXBRL | M2 | M5 | M10 |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 95% | 2.0685 | 1.9966 | 1.6505 | 1.5134 | 0.6940 | 1.0182 | 1.0185 | 1.0063 | 0.0122 | 0.0113 | 0.0102 |

Figura 4.47: Nivel de VaR para el 15 de Septiembre de 2008 con método Histórico

una distribución Normal, donde se pudo observar que el ajuste era bueno para el centro de la distribución, no así para las colas.

Se observa que los niveles de VaR a un 95% de confianza obtenidos mediante un modelo Normal, con la aplicación de un modelo GARCH y el uso de la estimación de la volatilidad para $t + 1$ resultan también cercanos a los obtenidos con modelos de valores extremos. Partiendo de esta similitud, podemos decir que, para un nivel de VaR al 95% de confianza, los estimadores empleados para obtener cuantiles para la distribución empírica a partir de la distribución límite ajustada a las colas tienen sentido. Sin embargo es de esperarse que se presenten diferencias significativas entre los niveles de VaR obtenidos mediante una Normal y los obtenidos con método de valores extremos.

Finalmente calculamos el VaR mediante el método histórico con probabilidad de ocurrencia uniforme en las distintas observaciones, es decir se asume que es igualmente probable que se observe una pérdida ocurrida en los últimos 7 días de operación que una ocurrida 700 días de operación atrás. Si bien es posible agregar a esta metodología un proceso previo de GARCH y el uso de la volatilidad estimada en $t + 1$, sin embargo lo usual es aplicar el método sobre la serie original. Por lo tanto no aplicaremos el proceso garch para este cálculo.

Los niveles de VaR al 95% de confianza bajo el método histórico (Figura 4.47) presenta diferencias considerables respecto a los niveles obtenidos por los otros métodos. Este resultado no es sorprendente, pues el método es bastante distinto a los demás. La presencia de estas diferencias no deberán interpretarse como un error en el modelo histórico, recordemos que el VaR es solo un nivel de referencia, por tanto es posible que el VaR histórico resulte

útil si mantiene un número de excedencias correspondientes con el nivel al que se calcula.

4.5. Comparación de las medidas de VaR mediante Backtest

Evidentemente la funcionalidad de los modelos radica en que efectivamente el nivel de VaR sea excedido únicamente un α % de los días de operación observados. De forma que una comparación entre las metodologías empleadas tendría sentido, primeramente, respecto a los excesos al nivel de VaR obtenido por cada método para un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ %. Para esta comparación resulta adecuada una prueba de Backtest móvil a los modelos empleados.

Para realizar estas pruebas es conveniente usar distintos niveles de confianza para el cálculo de VaR, pues entre mayor sea el nivel de confianza más nos acercaremos a la cola de la distribución empírica, de forma que si bien el modelo de VaR Normal, por ejemplo, resulta adecuado para un nivel de significancia del 95 % es probable que no sea adecuado para un nivel del 99 % pues ya hemos mostrado que la desviación en el ajuste de una distribución Normal a una serie financiera ocurre justo en las colas. En general es posible que los distintos modelos empleados resulten adecuados para un cierto grado de confianza pero no para otro más elevado. Por lo tanto usaremos 3 distintos niveles de confianza para estas pruebas, 95 %, 97,5 % y 99 %.

Para la prueba de Backtest comenzaremos con un número inicial de N observaciones para cada serie de las cuales se tomarán subseries móviles de tamaño 1000, la selección de las subseries será ordenada respecto a las fechas. De modo que tendremos $N - 1000$ subseries, con cada una de las cuáles se obtendrá un nivel de VaR, cada nivel será comparado con la pérdida observada del día de operación inmediato siguiente de forma que si la pérdida observada resulta mayor que el nivel de VaR se considera un exceso al VaR.

Para el caso de Máximos por Bloques se le aplica un proceso GARCH y se obtiene la estimación de la volatilidad en $t + 1$ para cada subserie. El ajuste para la DGVE se realizará con el mismo tamaño de bloque para todas las subseries, el cuál ya ha sido definido para cada instrumento.

En el caso de Máximos sobre un Umbral también se aplicará un proceso GARCH a cada subserie con su respectiva estimación de volatilidad en $t + 1$. De igual forma, el umbral se ajustará para cada subserie. Dada la complejidad de realizar el análisis de los gráficos presentados para la selección del umbral éste será definido por el $k - \text{ésimo}$ estadístico de orden para el cuál los estadísticos mayores a él deberán computar el $u\%$ del total de la subserie, inicialmente se trabajara con un 10% .

Para el cálculo de VaR asumiendo Normalidad se realizará el proceso GARCH, se calculará la estimación de la volatilidad en $t + 1$ y ajustará una distribución Normal para cada subserie.

Para el VaR Histórico se aplica la metodología para cada subserie.

Además de realizarse el Backtest para los distintos modelos a distintos niveles de confianza, se genera una prueba de bondad de ajuste binomial a cada Backtest. Para la prueba, se establece la hipótesis nula como la distribución binomial donde los valores mayores al VaR cuentan con probabilidad α y los menores al VaR tiene probabilidad $1 - \alpha$. El rechazo o aceptación de la hipótesis nula se basará en los $p - \text{values}$, de forma que si el $p - \text{value}$ resulta mayor o igual a 0,5, la hipótesis nula no se rechaza. Esta prueba mantendrá un nivel de confianza del 95% .

Antes de comenzar con el análisis de la tabla del Backtest (Figura 4.48), recordemos que el ajuste de los modelos de Valores Extremos a las distintas series se concluyó como correcto con ayuda de los gráficos QQ-Plots. Lo que se quiere identificar con el Backtest es si la evolución del ajuste respecto al tiempo y a los distintos escenarios observados mantiene el mismo grado de ajuste.

Comencemos con el modelo de Máximos por Bloque. En general para el caso de los índices bursátiles, observamos muchos más excesos de los esperados para todos los niveles de confianza y la prueba binomial rechaza la hipótesis nula, por lo que no podemos decir que los excesos al VaR tengan una probabilidad α correspondiente a cada nivel de confianza, sin embargo y exceptuando la serie del SPX resulta que al aumentar el nivel de confianza los excesos observados tienden a los excesos esperados.

En el caso de los tipos de cambios la prueba binomial solamente rechaza la hipótesis

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Bloques | | | Max. Umbral | | | Normal | | | Histórico | | |
|--------|-------|-------------|--------------|-------|---------|-------------|-------|---------|---------|-------|---------|-----------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| IPC | 1195 | 95% | 90 | 7.53% | 0.000 | 82 | 6.86% | 0.003 | 88 | 7.36% | 0.000 | 76 | 6.36% | 0.021 |
| | | 97.5% | 52 | 4.35% | 0.000 | 40 | 3.35% | 0.042 | 56 | 4.69% | 0.000 | 43 | 3.60% | 0.013 |
| | | 99% | 15 | 1.26% | 0.223 | 10 | 0.84% | 0.755 | 27 | 2.26% | 0.000 | 19 | 1.59% | 0.035 |
| NDQ | 1195 | 95% | 79 | 6.61% | 0.008 | 71 | 5.94% | 0.079 | 72 | 6.03% | 0.063 | 49 | 4.10% | 0.936 |
| | | 97.5% | 39 | 3.26% | 0.059 | 37 | 3.10% | 0.112 | 34 | 2.85% | 0.246 | 29 | 2.43% | 0.590 |
| | | 99% | 18 | 1.51% | 0.060 | 14 | 1.17% | 0.313 | 17 | 1.42% | 0.098 | 23 | 1.92% | 0.003 |
| FTSE | 1195 | 95% | 80 | 6.69% | 0.006 | 71 | 5.94% | 0.079 | 82 | 6.86% | 0.003 | 67 | 5.61% | 0.184 |
| | | 97.5% | 41 | 3.43% | 0.029 | 40 | 3.35% | 0.042 | 50 | 4.18% | 0.000 | 34 | 2.85% | 0.246 |
| | | 99% | 17 | 1.42% | 0.098 | 16 | 1.34% | 0.151 | 34 | 2.85% | 0.000 | 15 | 1.26% | 0.223 |
| SPX | 1195 | 95% | 74 | 6.19% | 0.037 | 69 | 5.77% | 0.124 | 72 | 6.03% | 0.063 | 67 | 5.61% | 0.184 |
| | | 97.5% | 49 | 4.10% | 0.001 | 44 | 3.68% | 0.008 | 47 | 3.93% | 0.002 | 42 | 3.51% | 0.020 |
| | | 99% | 22 | 1.84% | 0.006 | 20 | 1.67% | 0.020 | 28 | 2.34% | 0.000 | 26 | 2.18% | 0.000 |
| MXNUSD | 1195 | 95% | 56 | 4.69% | 0.709 | 52 | 4.35% | 0.864 | 62 | 5.19% | 0.401 | 39 | 3.26% | 0.999 |
| | | 97.5% | 29 | 2.43% | 0.590 | 28 | 2.34% | 0.661 | 39 | 3.26% | 0.059 | 13 | 1.09% | 0.999 |
| | | 99% | 9 | 0.75% | 0.843 | 9 | 0.75% | 0.843 | 24 | 2.01% | 0.001 | 8 | 0.67% | 0.909 |
| MXNEUR | 1195 | 95% | 45 | 3.77% | 0.982 | 45 | 3.77% | 0.982 | 52 | 4.35% | 0.864 | 33 | 2.76% | 1.000 |
| | | 97.5% | 26 | 2.18% | 0.788 | 26 | 2.18% | 0.788 | 30 | 2.51% | 0.516 | 16 | 1.34% | 0.998 |
| | | 99% | 12 | 1.00% | 0.533 | 11 | 0.92% | 0.649 | 20 | 1.67% | 0.020 | 5 | 0.42% | 0.992 |
| MXNCAD | 1195 | 95% | 56 | 4.69% | 0.709 | 59 | 4.94% | 0.558 | 56 | 4.69% | 0.709 | 47 | 3.93% | 0.965 |
| | | 97.5% | 31 | 2.59% | 0.442 | 30 | 2.51% | 0.516 | 39 | 3.26% | 0.059 | 18 | 1.51% | 0.993 |
| | | 99% | 9 | 0.75% | 0.843 | 8 | 0.67% | 0.909 | 14 | 1.17% | 0.313 | 5 | 0.42% | 0.992 |
| MXNBRL | 1195 | 95% | 32 | 2.68% | 0.999 | 35 | 2.93% | 1.000 | 26 | 2.18% | 1.000 | 26 | 2.18% | 0.999 |
| | | 97.5% | 15 | 1.26% | 0.999 | 17 | 1.42% | 0.996 | 12 | 1.00% | 1.000 | 17 | 1.42% | 0.996 |
| | | 99% | 8 | 0.67% | 0.909 | 8 | 0.67% | 0.909 | 6 | 0.50% | 0.979 | 8 | 0.67% | 0.909 |
| M2 | 866 | 95% | 46 | 5.31% | 0.358 | 26 | 3.00% | 0.999 | 8 | 0.92% | 1.000 | 24 | 2.77% | 1.000 |
| | | 97.5% | 14 | 1.62% | 0.255 | 11 | 1.27% | 0.234 | 8 | 0.92% | 0.032 | 13 | 1.50% | 0.453 |
| | | 99% | 1 | 0.12% | 0.999 | 1 | 0.12% | 1.000 | 1 | 0.12% | 0.999 | 1 | 0.12% | 1.000 |
| M5 | 861 | 95% | NA | NA | NA | 43 | 4.99% | 0.525 | 28 | 3.25% | 0.995 | 46 | 5.34% | 0.343 |
| | | 97.5% | NA | NA | NA | 19 | 2.21% | 0.739 | 16 | 1.86% | 0.911 | 27 | 3.14% | 0.140 |
| | | 99% | NA | NA | NA | 6 | 0.70% | 0.860 | 11 | 1.28% | 0.248 | 10 | 1.16% | 0.361 |
| M10 | 784 | 95% | NA | NA | NA | 38 | 4.85% | 0.601 | 30 | 3.83% | 0.949 | 36 | 4.59% | 0.723 |
| | | 97.5% | NA | NA | NA | 20 | 2.55% | 0.495 | 16 | 2.04% | 0.825 | 21 | 2.68% | 0.405 |
| | | 99% | NA | NA | NA | 8 | 1.02% | 0.525 | 9 | 1.15% | 0.385 | 10 | 1.28% | 0.263 |

Figura 4.48: Backtest por Instrumento con fecha final 15 de Septiembre de 2008

nula en el caso del MXNCAD para un nivel de confianza del 97,5 %. Esto no nos preocupa, ya que solo observamos un exceso más que el número de excesos esperados. Para el resto de las divisas y niveles de confianza, la prueba binomial no rechaza la hipótesis nula, aun que es notable que en la mayoría de los casos los excesos observados son menores a los esperados. Evidentemente es preferible tener menos excesos observados que exceder el número de excesos esperados por lo tanto diremos que nuestro modelo a resultado satisfactorio para el caso de los tipos de cambio.

Finalmente revisemos las series Genéricas de Bonos. Mientras la serie del Bono M2 resultó un Backtest excedido levemente para un nivel de confianza del 95 % y para los niveles del 97,5 % y 99 % se observaron muchos menos excesos a los excesos esperados, para las series de los Bonos M5 y M10, no fue posible realizar el Backtest. Recordemos que el ajuste inicial del Bono M10 no fue satisfactorio y por lo tanto se rechazo su uso, esta situación se presento en múltiples fechas cuando se realizaba el cálculo de nivel de VaR para realizar el Backtest. Lo que nos indica, una vez más, que el método de Máximos por Bloques no resulta útil cuando las series tienen poca volatilidad, o las observaciones no cambian en una ventana de tiempo amplia, que es el caso de las serie M5.

Observando los resultados obtenidos del Backtest en el bloque de los índices bursátiles podríamos sugerir que el ajuste por medio de una DGVE para series financieras resulta insuficiente, lo cuál podría respaldarse con la imposibilidad de ajustar esta distribución a los Bonos Genéricos, sin embargo tanto el ajuste inicial como el Backtest fue satisfactorio en el caso de los tipos de cambio. Este hecho descarta inicialmente que se hayan cometido errores en el transcurso de la aplicación de la metodología, o la presencia de algún error de programación, pues de ser el caso, también se presentarían errores en la aplicación del modelo a series de tipo de cambio. Por lo tanto concluimos que es el comportamiento de la serie lo que genera un número de excesos observados mucho mayor a los excesos esperados.

El método de Máximos a un Umbral para las series de índices bursátiles presenta más excesos q los esperados, sin embargo es importante notar que las diferencias entre excesos observados y esperados son generalmente menores a las registradas por el método de Máximos por Bloque. Esto nos señala una nueva diferencia entre el uso de estos métodos.

Para los Máximo a un Umbral cuando se aumenta el nivel de confianza para el VaR, el Backtest se asemeja mucho más a lo esperado, de hecho para el caso del IPC a un nivel de confianza del 99 % la hipótesis nula no es rechazada.

Para los tipos de cambio la prueba binomial no rechaza la hipótesis nula en ningún caso, además el número excesos observados es más cercano al número de excesos esperados en comparación con el método de Máximos por Bloque. Para las series de Bonos Genéricos la prueba binomial tampoco rechaza la hipótesis nula en ningún caso, sin embargo es notable que existen muy pocos excesos, por lo que podemos pensar en una sobrevaluación del nivel del VaR, sin embargo recordemos que los Bonos presentan en general poca volatilidad.

El caso del modelo Paramétrico Normal resulta un tanto más catastrófico en el Backtest que los modelos de Valores Extremos. En cuanto a los índices bursátiles la única diferencia es la presencia de mayor número de excesos que en los modelos anteriores. Para el caso de los tipos de cambio se obtiene un número de excesos más cercano a los esperados, aun que en algunos casos resulta mayor el numero de excesos observados. Además en general cuando se aumenta el nivel de confianza la prueba binomial rechaza la hipótesis nula con $p - values$ más cercanos a cero, pues el cociente de la diferencia entre excesos observados y excesos esperados entre los excesos esperados aumenta cuando el nivel de confianza para el nivel del VaR aumenta.

De modo que el uso del modelo Paramétrico Normal resulta adecuado en ciertas ocasiones, pero únicamente para niveles de confianza de 95 %, para un nivel de confianza de 97,5 %, resulta adecuado para una minoría de instrumentos, por lo que su uso generalizado desembocaría en una constante subestimación del nivel de VaR. Finalmente resulta evidente que para el nivel de confianza de 99 % el modelo falla de forma generalizada, lo cual hace sentido con el hecho de que las series financieras puedan ser ajustadas en buena parte por una normal, pero no en las colas de la distribución.

Finalmente en el modelo histórico si bien el Backtest resulta excedido para los índices bursátiles el número excesos registrado es menor a los registrados en los modelos anteriores, sigue siendo mayor al número de excesos esperados y la prueba binomial rechaza la hipótesis nula. Para los tipos de cambio y Bonos Genéricos no se rechaza la hipótesis nula, sin embargo se observa que el número de excesos observados, en general, es mucho

menor al número de excesos esperados y menos a los registrados por los otros modelos.

Si bien el modelo histórico no llevaría a la continua presencia de niveles excedentes al VaR es muy probable que se deba a una sobreestimación del nivel de VaR, lo que provocaría un menor margen de maniobra con instrumentos de riesgo en los portafolios, lo cual tampoco es deseable. Otra observación importante es que al aumentar el nivel de confianza para el nivel de VaR, el modelo Histórico presenta un comportamiento inverso al comportamiento del modelo Normal, es decir, que mientras más se eleva el nivel de confianza, los excesos observados son cada vez menores en relación a los excesos esperados para cada nivel de confianza.

Dejando de lado los índices bursátiles de momento, concluimos que los modelos de Valores Extremos no solamente pueden ser empleados para el cálculo de VaR, si no que además generan mejores resultados en las pruebas de Backtest que los modelos Paramétrico Normal e Histórico. Por otro lado si se desea obtener niveles de VaR con altos niveles de confianza, el modelo Paramétrico Normal resulta en una subestimación y el modelo Histórico en una sobreestimación, mientras los modelos de Valores Extremos mantiene una mejor semejanza entre el número de excesos observados y esperados.

Por lo tanto, y en respuesta a una de las preguntas iniciales planteadas en este trabajo, el uso de modelos de Valores Extremos en el cálculo del VaR podría generar niveles más adecuados que otros métodos, lo que provocaría que en situaciones de alta volatilidad en mercados, como fue el caso de la crisis de 2008, el número de excesos al nivel de VaR podría disminuirse usando los modelos de Valores Extremos, lo cual se reflejaría en una mejor estimación del monto que podría perder un manejador de fondos frente a estos escenarios.

Retomando las dificultades encontradas en el grupo de índices bursátiles intentaremos identificar la razón por la cuál el Backtest está excedido, a fin de concluir si el empleo de los modelos extremos resulta eficiente o no para el cálculo de VaR de estos instrumentos.

Hemos descartado ya la posibilidad de algún error operativo en la aplicación de los métodos y modelos, pues el mismo proceso operativo nos ha mostrado resultados coherentes para los otros 2 grupos de instrumentos, los tipos de cambio y los Bonos Genéricos. Entonces la causa probable para estos resultados son clusters en las series, recordemos que aún cuando estamos analizando el periodo anterior a la crisis Subprime, desde inicios del tercer trimestre

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Bloques | | | Max. Umbral | | | Normal | | | Histórico | | |
|------|-------|-------------|--------------|-------|---------|-------------|-------|---------|---------|-------|---------|-----------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test |
| IPC | 1000 | 95% | 75 | 7.50% | 0.000 | 68 | 6.80% | 0.007 | 71 | 7.10% | 0.002 | 61 | 6.10% | 0.067 |
| | | 97.5% | 41 | 4.10% | 0.002 | 31 | 3.10% | 0.134 | 44 | 4.40% | 0.000 | 35 | 3.50% | 0.032 |
| | | 99% | 11 | 1.10% | 0.417 | 7 | 0.70% | 0.871 | 19 | 1.90% | 0.007 | 14 | 1.40% | 0.134 |
| NDQ | 1000 | 95% | 59 | 5.90% | 0.111 | 54 | 5.40% | 0.300 | 51 | 5.10% | 0.462 | 17 | 1.70% | 1.000 |
| | | 97.5% | 31 | 3.10% | 0.134 | 29 | 2.90% | 0.234 | 26 | 2.60% | 0.447 | 10 | 1.00% | 1.000 |
| | | 99% | 15 | 1.50% | 0.082 | 11 | 1.10% | 0.417 | 13 | 1.30% | 0.207 | 9 | 0.90% | 0.668 |
| FTSE | 1000 | 95% | 54 | 5.40% | 0.300 | 52 | 5.20% | 0.406 | 57 | 5.70% | 0.172 | 32 | 3.20% | 0.998 |
| | | 97.5% | 34 | 3.40% | 0.048 | 33 | 3.30% | 0.069 | 38 | 3.80% | 0.008 | 17 | 1.70% | 0.964 |
| | | 99% | 14 | 1.40% | 0.134 | 14 | 1.40% | 0.134 | 27 | 2.70% | 0.000 | 7 | 0.70% | 0.871 |
| SPX | 1000 | 95% | 53 | 5.30% | 0.351 | 50 | 5.00% | 0.520 | 52 | 5.20% | 0.406 | 33 | 3.30% | 0.996 |
| | | 97.5% | 35 | 3.50% | 0.032 | 33 | 3.30% | 0.069 | 33 | 3.30% | 0.069 | 19 | 1.90% | 0.911 |
| | | 99% | 17 | 1.70% | 0.026 | 16 | 1.60% | 0.048 | 19 | 1.90% | 0.007 | 15 | 1.50% | 0.082 |

Figura 4.49: Backtest de Índices Bursátiles hasta el 5 de Diciembre de 2007

de 2008 se observaron pérdidas que podríamos considerar como eventos extremos. Sería lógico pensar que estos escenarios fueron más marcados en los índices bursátiles que, por ejemplo, en los tipos de cambio, debido a la naturaleza de mayor volatilidad en los primeros.

Por lo tanto un análisis a un periodo que no contemple el año 2008 podría indicarnos si realmente el gran número de excesos al VaR es debido a altas volatilidades de mercado, inusuales para el tipo de instrumento que se refiera, o si los modelos extremos no son adecuados para el cálculo de VaR de instrumentos de mayor volatilidad. Se realiza un nuevo Backtest que irá del 26 de diciembre de 2003 al 5 de diciembre de 2007, generando así 1000 niveles de VaR para cada índice bursátil a distintos niveles de confianza.

De la Figura 4.49, podemos observar que el número de excesos observados se asemeja mucho más al número de excesos esperado. La prueba binomial sigue rechazando en la mayoría de los casos la hipótesis nula, sin embargo Tanto el modelo de Máximos por Bloque, Máximos a un Umbral, e incluso el Paramétrico Normal, muestran una significativa mejoría. Para el caso del IPC se siguen teniendo demasiados excesos al 95% para los modelos extremos, esto se atribuye a periodos de alta volatilidad presentados por este instrumento en fechas que aun se contemplan en el Backtest. En particular el método Histórico presenta nuevamente muy pocos excesos, respecto a los esperados, mantiene la sobreestimación al

VaR.

Podemos entonces concluir que la presencia de un gran número de excesos es debida a altas volatilidades de mercado y no a una falla en el modelo. Como esperábamos, los modelos extremos registran un menor número de excesos al VaR, sobre todo para niveles de confianza altos, que los modelos convencionales. Sin embargo, el número de excesos sigue superando al esperado. Ahora bien, si de manera general todos los modelos fallan cuando nos adentramos en altos niveles de volatilidad de mercado sería prudente pensar que las observaciones durante estos periodos, no corresponden al comportamiento normal del instrumento, y por lo tanto no podrán ser modelados, ni estimados de alguna forma si sólo consideramos los factores del comportamiento propio del instrumento.

4.6. Análisis del comportamiento del VaR con TVE durante la crisis de 2008.

Una vez concluido que los métodos de la Teoría de Valores Extremos pueden ser empleados para el cálculo del VaR y que los niveles arrojados por estos modelos son adecuados, analicemos el comportamiento de estos niveles en periodos de alta volatilidad, como la crisis Subprime acaecida en 2008. Para ello realizaremos un nuevo análisis de Backtest el cuál comprenderá el periodo entre el 26 de diciembre de 2003 al 31 de diciembre de 2008. Una vez más esperamos que los excesos observados superen los esperados por las situación de mercado que se sucedió en aquel momento, también esperamos que la diferencia entre excesos observados y excesos esperados sea menor para las metodologías de Valores Extremos que para la metodología Paramétrica Normal.

Los resultados mostrados en la Figura 4.50 del Backtest para el periodo que abarca la crisis de 2008 podemos observar nuevamente que, para las metodologías de VaR con Valores Extremos, el grupo de los tipos de cambio se mantiene estable en cuando a los excesos esperados, pues en la mayoría de los casos, no son superados por los excesos observados, y cuando son superados la diferencia entre ambos no es demasiada. También observamos que el modelo de VaR Paramétrico Normal presenta un mayor numero de excesos observados que las metodologías de VaR con Valores Extremos y que este fenómeno se acentúa con

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Bloques | | | Max. Umbral | | | Normal | | | Histórico | | |
|--------|-------|-------------|--------------|-------|---------|-------------|-------|---------|---------|-------|---------|-----------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| IPC | 1268 | 95% | 96 | 7.57% | 0.000 | 87 | 6.86% | 0.002 | 94 | 7.41% | 0.000 | 95 | 7.49% | 0.000 |
| | | 97.5% | 55 | 4.33% | 0.000 | 43 | 3.39% | 0.031 | 59 | 4.65% | 0.000 | 58 | 4.57% | 0.000 |
| | | 99% | 17 | 1.34% | 0.142 | 12 | 0.95% | 0.616 | 29 | 2.29% | 0.000 | 31 | 2.44% | 0.000 |
| NDQ | 1268 | 95% | 86 | 6.78% | 0.003 | 77 | 6.07% | 0.050 | 79 | 6.23% | 0.029 | 71 | 5.59% | 0.181 |
| | | 97.5% | 44 | 3.47% | 0.021 | 41 | 3.23% | 0.062 | 40 | 3.15% | 0.085 | 50 | 3.94% | 0.001 |
| | | 99% | 21 | 1.65% | 0.019 | 17 | 1.34% | 0.142 | 20 | 1.58% | 0.034 | 40 | 3.15% | 0.000 |
| FTSE | 1268 | 95% | 86 | 6.78% | 0.003 | 75 | 5.91% | 0.080 | 88 | 6.93% | 0.002 | 88 | 6.93% | 0.002 |
| | | 97.5% | 42 | 3.31% | 0.044 | 41 | 3.23% | 0.062 | 54 | 4.26% | 0.000 | 51 | 4.02% | 0.001 |
| | | 99% | 18 | 1.42% | 0.092 | 17 | 1.34% | 0.142 | 35 | 2.76% | 0.000 | 28 | 2.21% | 0.000 |
| SPX | 1268 | 95% | 82 | 6.46% | 0.012 | 75 | 5.91% | 0.080 | 78 | 6.15% | 0.038 | 92 | 7.25% | 0.000 |
| | | 97.5% | 53 | 4.18% | 0.000 | 48 | 3.78% | 0.004 | 52 | 4.10% | 0.000 | 61 | 4.81% | 0.000 |
| | | 99% | 23 | 1.81% | 0.006 | 21 | 1.65% | 0.019 | 30 | 2.36% | 0.000 | 43 | 3.39% | 0.000 |
| MXNUSD | 1268 | 95% | 67 | 5.28% | 0.341 | 62 | 4.89% | 0.592 | 73 | 5.75% | 0.123 | 64 | 5.04% | 0.490 |
| | | 97.5% | 36 | 2.84% | 0.244 | 34 | 2.68% | 0.365 | 49 | 3.86% | 0.002 | 35 | 2.76% | 0.301 |
| | | 99% | 12 | 0.95% | 0.616 | 12 | 0.95% | 0.616 | 30 | 2.36% | 0.000 | 25 | 1.97% | 0.001 |
| MXNEUR | 1268 | 95% | 54 | 4.26% | 0.902 | 54 | 4.26% | 0.902 | 61 | 4.81% | 0.642 | 48 | 3.78% | 0.983 |
| | | 97.5% | 34 | 2.68% | 0.365 | 34 | 2.68% | 0.365 | 39 | 3.07% | 0.114 | 29 | 2.29% | 0.713 |
| | | 99% | 18 | 1.42% | 0.092 | 17 | 1.34% | 0.142 | 28 | 2.21% | 0.000 | 15 | 1.18% | 0.293 |
| MXNCAD | 1268 | 95% | 64 | 5.04% | 0.490 | 67 | 5.28% | 0.341 | 66 | 5.20% | 0.389 | 62 | 4.89% | 0.592 |
| | | 97.5% | 37 | 2.92% | 0.193 | 36 | 2.84% | 0.244 | 45 | 3.55% | 0.014 | 28 | 2.21% | 0.773 |
| | | 99% | 13 | 1.02% | 0.503 | 12 | 0.95% | 0.616 | 19 | 1.50% | 0.057 | 13 | 1.02% | 0.503 |
| MXNBRL | 1268 | 95% | 35 | 2.76% | 1.000 | 40 | 3.15% | 0.999 | 29 | 2.29% | 1.000 | 48 | 3.78% | 0.983 |
| | | 97.5% | 17 | 1.34% | 0.999 | 19 | 1.50% | 0.995 | 14 | 1.10% | 1.000 | 36 | 2.84% | 0.244 |
| | | 99% | 9 | 0.71% | 0.886 | 10 | 0.79% | 0.814 | 7 | 0.55% | 0.970 | 21 | 1.65% | 0.019 |
| M2 | 939 | 95% | 54 | 5.74% | 0.165 | 32 | 3.40% | 0.993 | 13 | 1.38% | 1.000 | 29 | 3.09% | 0.998 |
| | | 97.5% | 19 | 2.02% | 0.853 | 16 | 1.70% | 0.959 | 13 | 1.38% | 0.993 | 17 | 1.81% | 0.934 |
| | | 99% | 2 | 0.21% | 0.999 | 2 | 0.21% | 0.999 | 4 | 0.43% | 0.984 | 4 | 0.43% | 0.984 |
| M5 | 934 | 95% | NA | NA | NA | 49 | 5.24% | 0.388 | 34 | 3.64% | 0.981 | 54 | 5.78% | 0.156 |
| | | 97.5% | NA | NA | NA | 23 | 2.46% | 0.560 | 20 | 2.14% | 0.788 | 32 | 3.42% | 0.050 |
| | | 99% | NA | NA | NA | 9 | 0.96% | 0.590 | 14 | 1.50% | 0.092 | 13 | 1.39% | 0.150 |
| M10 | 857 | 95% | NA | NA | NA | 47 | 5.49% | 0.276 | 35 | 4.09% | 0.907 | 51 | 5.96% | 0.115 |
| | | 97.5% | NA | NA | NA | 24 | 2.80% | 0.313 | 20 | 2.34% | 0.651 | 32 | 3.74% | 0.018 |
| | | 99% | NA | NA | NA | 12 | 1.40% | 0.155 | 13 | 1.52% | 0.094 | 21 | 2.45% | 0.000 |

Figura 4.50: Backtest por instrumento hasta el 31 de diciembre de 2008

forme se eleva el nivel de confianza asignado al nivel de VaR. Para el modelo Histórico se observa un buen resultado del Backtest para los niveles de confianza de 95 % y 97,5 %, sin embargo al aumentar al 99 % el nivel de confianza, al estimación del Nivel de VaR se ve excedida en un numero mayor de veces a lo esperado, aun cuando para este nivel el número de excesos observados no es mucho mayor al número de excesos esperado, esto contrasta con el Backtest de la Figura 4.48, en el cuál el modelo Histórico mantenía un número de excesos observados muy por debajo a los esperados.

Para el grupo de las series de Bonos Genéricos los resultados del Backtest son en general satisfactorios para los modelos de Excesos a un Umbral y el modelo Paramétrico Normal y se puede observar que el modelo Paramétrico Normal presentó un número de excesos observados mucho menor a los registrados por el modelo de Excesos a un Umbral, sin embargo el número de excesos observados con este último modelo se asemeja más al número de excesos esperados, lo cual se puede interpretar como un mejor ajuste, pues en caso de existir una sobreestimación del nivel de VaR resultaría menor en el modelo de la DGP que en modelo Normal. Por su parte, el modelo Histórico ajusta aceptablemente la serie del Bono Genérico M2, que es la serie con mayor información y la cuál presento menos volatilidad, sin embargo el ajuste falla a todos los niveles de confianza empleados, para las otras dos series, el M10 y el M5.

Finalmente el grupo de los índices bursátiles, para los modelos de Valores Extremos y el modelo Paramétrico Normal, aún se presenta un número considerablemente mayor de excesos observados en relación a los excesos esperados, sin embargo es importante notar que esta diferencia no es mucho mayor de forma porcentual, a la observada en este mismo grupo en el Backtest al 12 de septiembre de 2008 de la Figura 4.48 , lo que nos indica que la diferencia entre excesos observados y excesos esperados no es originada por el periodo de crisis de 2008. Por otro parte observamos nuevamente que esta diferencia es, en general, menor para los modelos de Valores Extremos que para el modelo Paramétrico Normal, sobre todo en comparación con el modelo de Excesos a un Umbral. Este comportamiento no se mantiene en el caso del modelo Histórico pues los resultados del Backtest muestran un aumento generalizado y de gran relevancia en los excesos observados, esto para todos los niveles de confianza, de forma que para este modelo si podríamos concluir que su de-

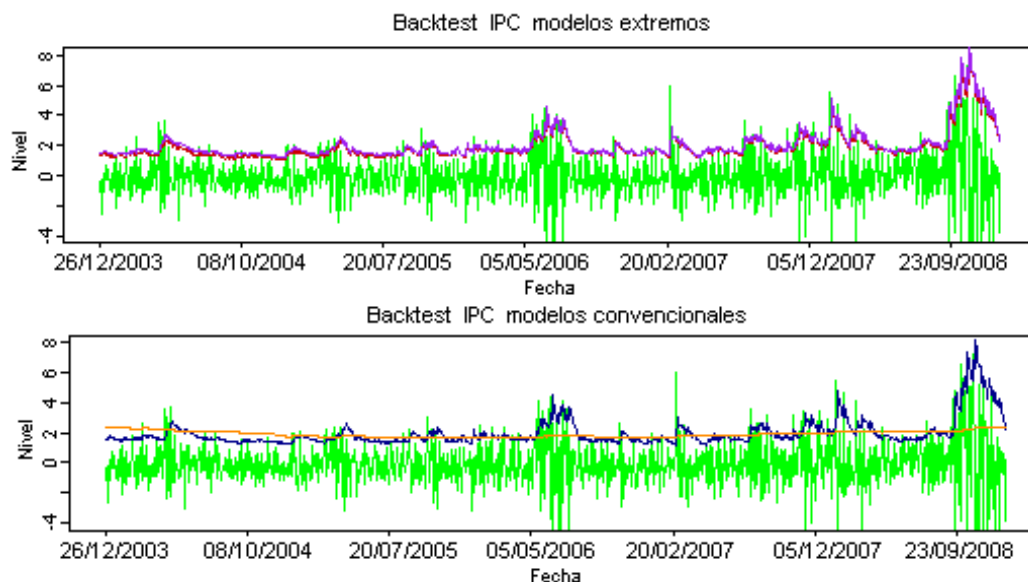


Figura 4.51: Backtest Gráfico IPC al 31 de Diciembre de 2008

sempañó a sido fuertemente afectado por el periodo de crisis de 2008. En comparación con los resultados obtenidos en los otros 2 grupos de instrumentos, concluimos que el modelo Histórico es fuertemente afectado por altas volatilidades en mercado, al punto de volverlo en un modelo poco útil para la medición de Riesgo de Mercado en momentos de crisis.

Ampliamos ahora el análisis observando el resultado gráfico del Backtest de forma que podamos detectar los periodos en los cuales se presentan los excesos al nivel de VaR, analizar el comportamiento de las metodologías en el periodo de la crisis de 2008 y analizar la sensibilidad de cada modelo a aumentos en la volatilidad. Se presenta la gráfica para el Backtest para los distintos niveles de VaR con un 95 % de confianza. Se presentan 2 gráficas por instrumento, para los modelos extremos se presenta el VaR mediante Bloques en marrón, el VaR con Máximos a un Umbral en purpura. Para los modelos convencionales en azul el VaR paramétrico Normal y en naranja el VaR Histórico. En ambos casos se muestran, en verde, los rendimientos observados.

En las gráficas del Backtest con un nivel de confianza del 95 % observamos que los excesos al VaR con Valores Extremos y Paramétrico Normal, no están concentrados en el periodo de Crisis, en cambio se reparten a lo largo de la serie y se encuentran principalmente

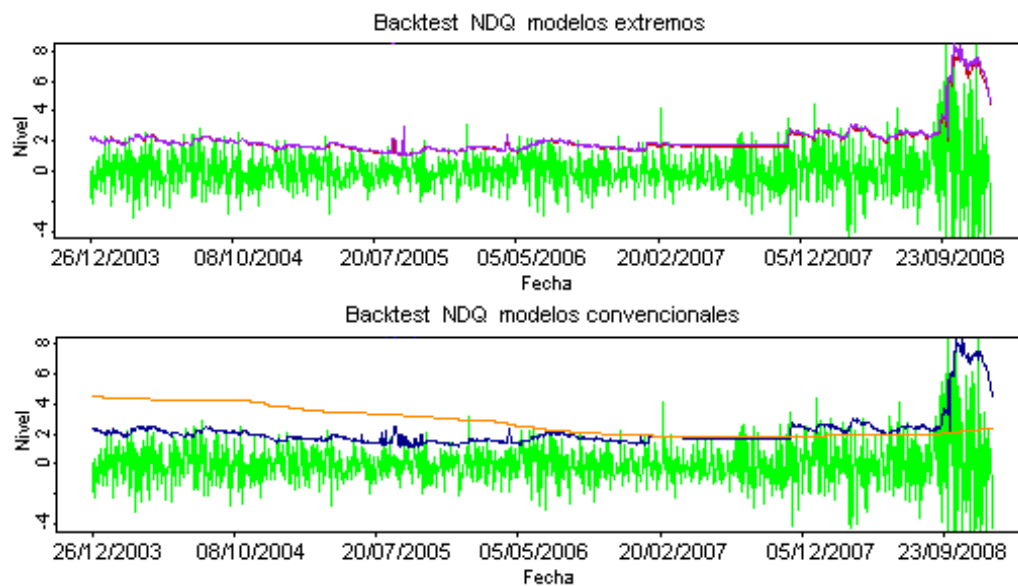


Figura 4.52: Backtest Gráfico NDQ al 31 de Diciembre de 2008

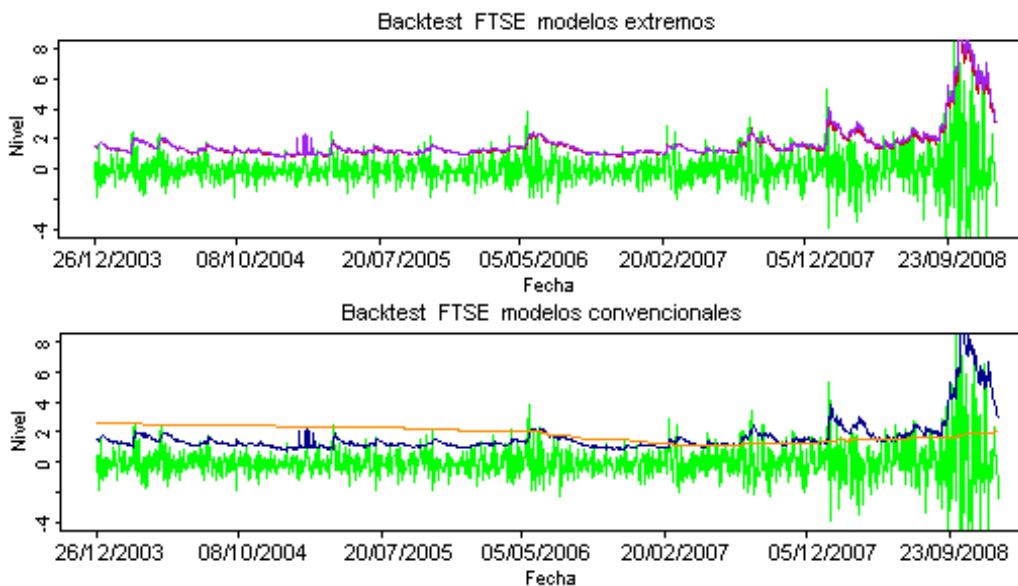


Figura 4.53: Backtest Gráfico FTSE al 31 de Diciembre de 2008

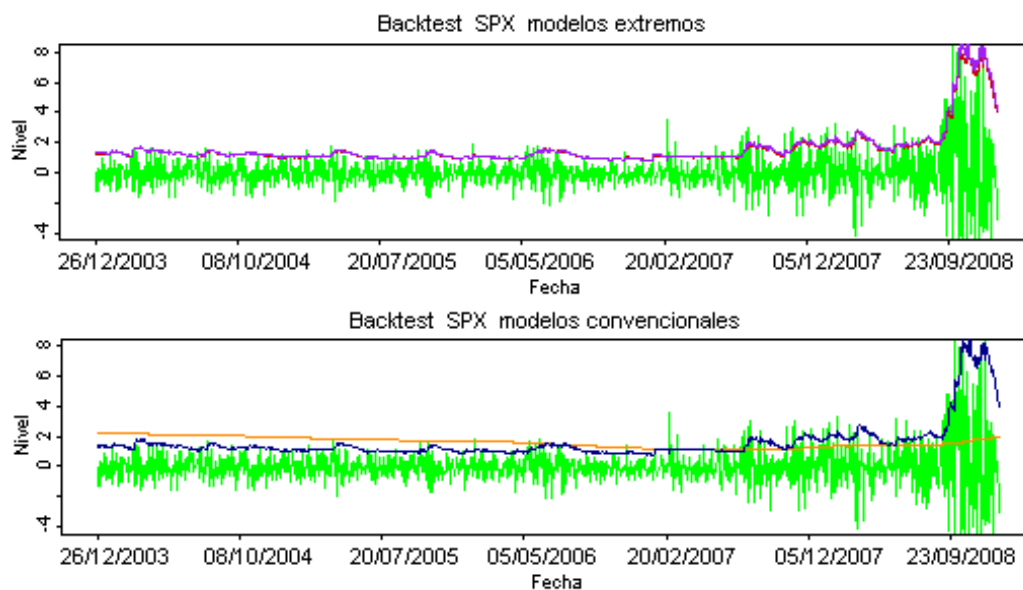


Figura 4.54: Backtest Gráfico SPX al 31 de Diciembre de 2008

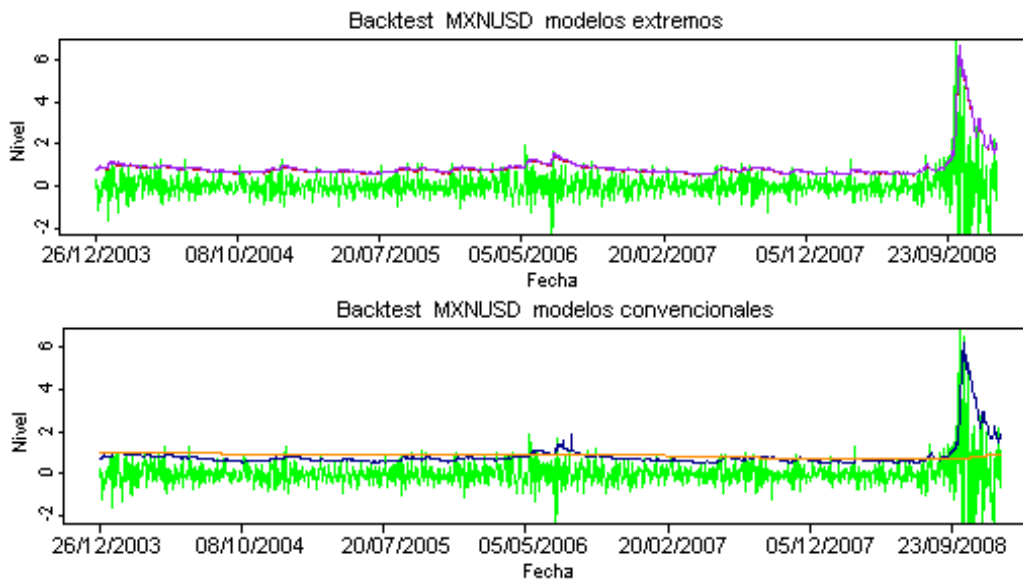


Figura 4.55: Backtest Gráfico MXNUSD al 31 de Diciembre de 2008

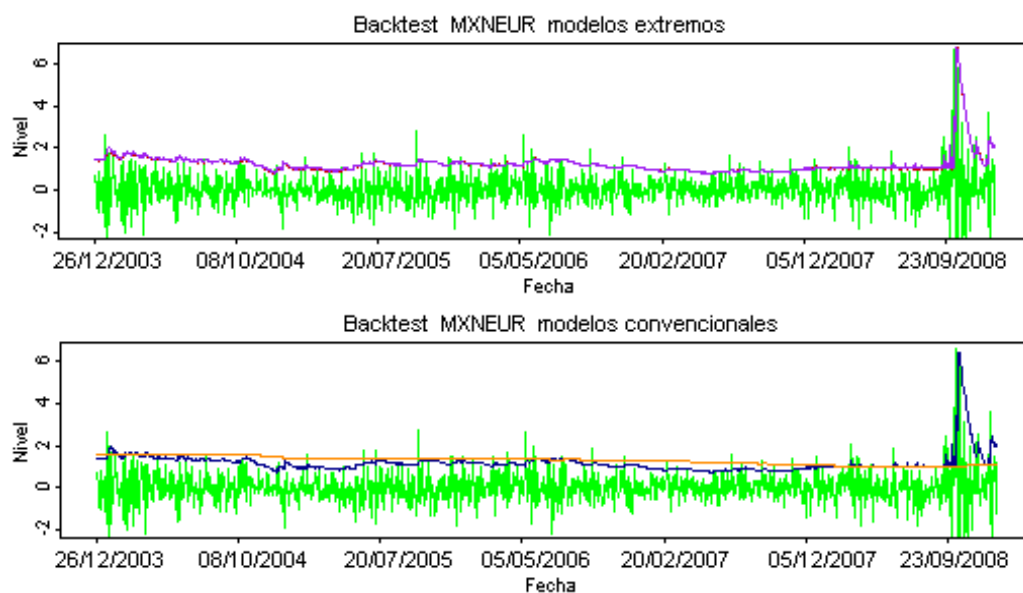


Figura 4.56: Backtest Gráfico MXNEUR al 31 de Diciembre de 2008

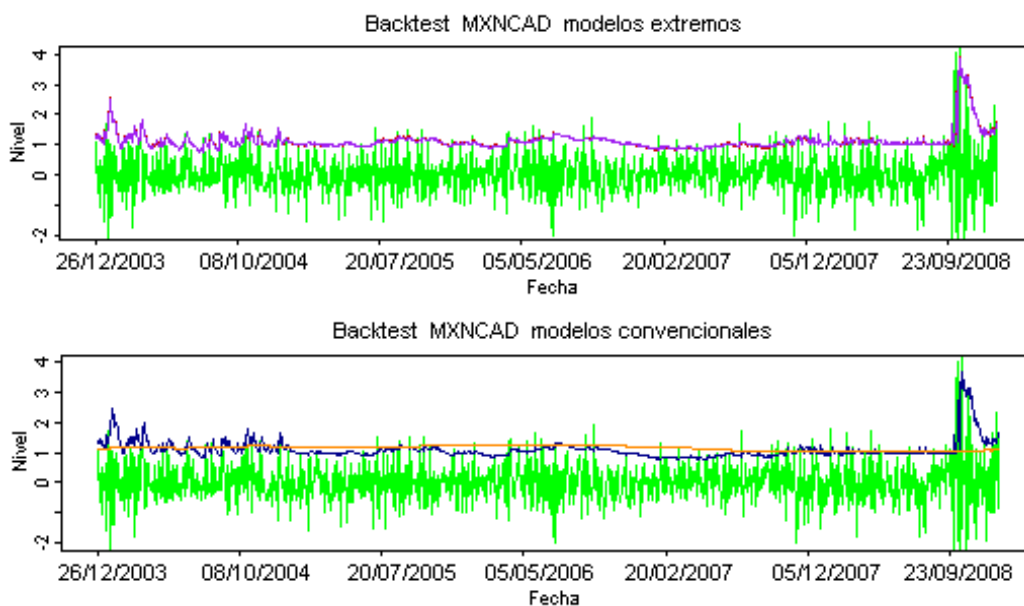


Figura 4.57: Backtest Gráfico MXNCAD al 31 de Diciembre de 2008

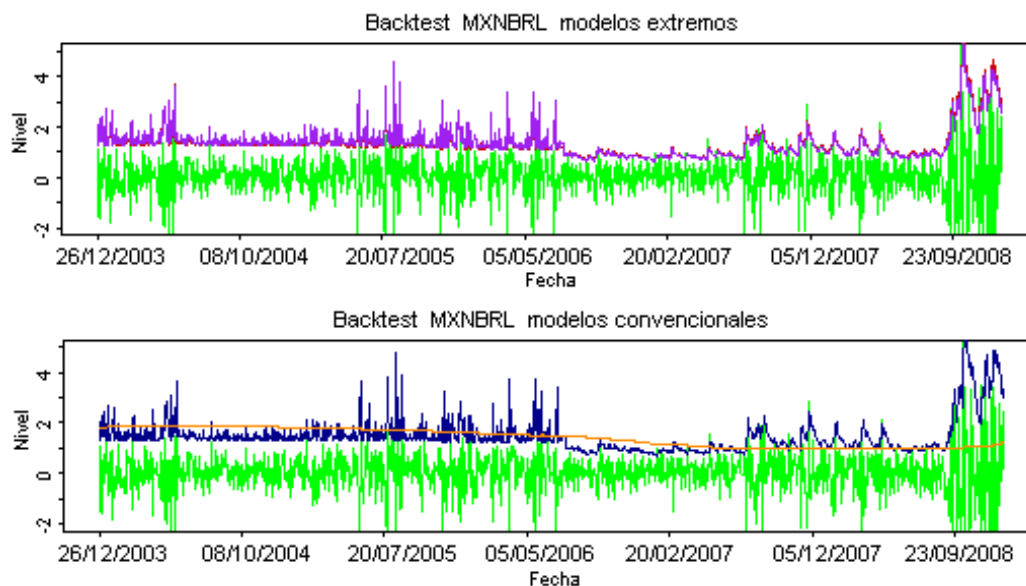


Figura 4.58: Backtest Gráfico MXNBRL al 31 de Diciembre de 2008

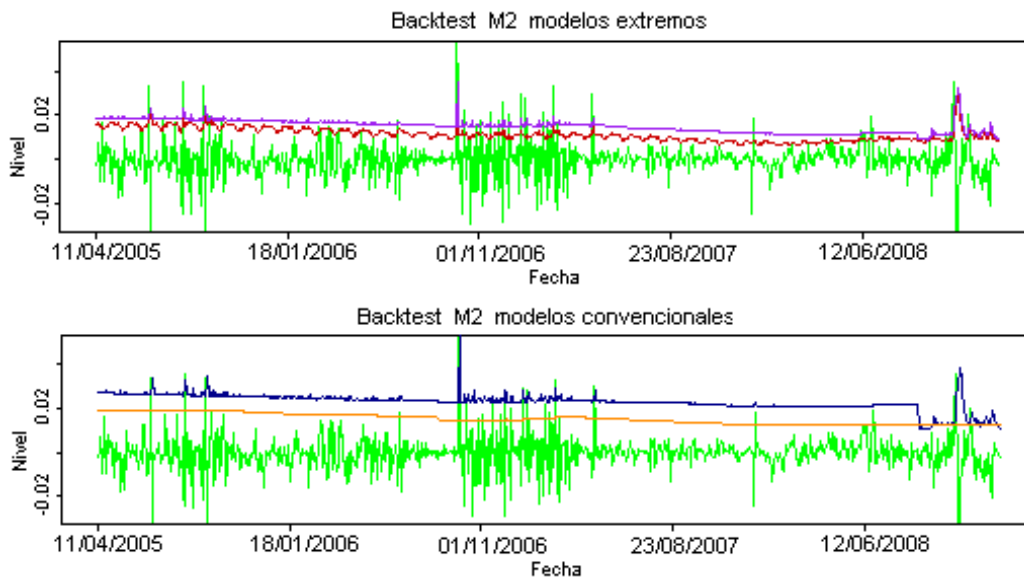


Figura 4.59: Backtest Gráfico M2 al 31 de Diciembre de 2008

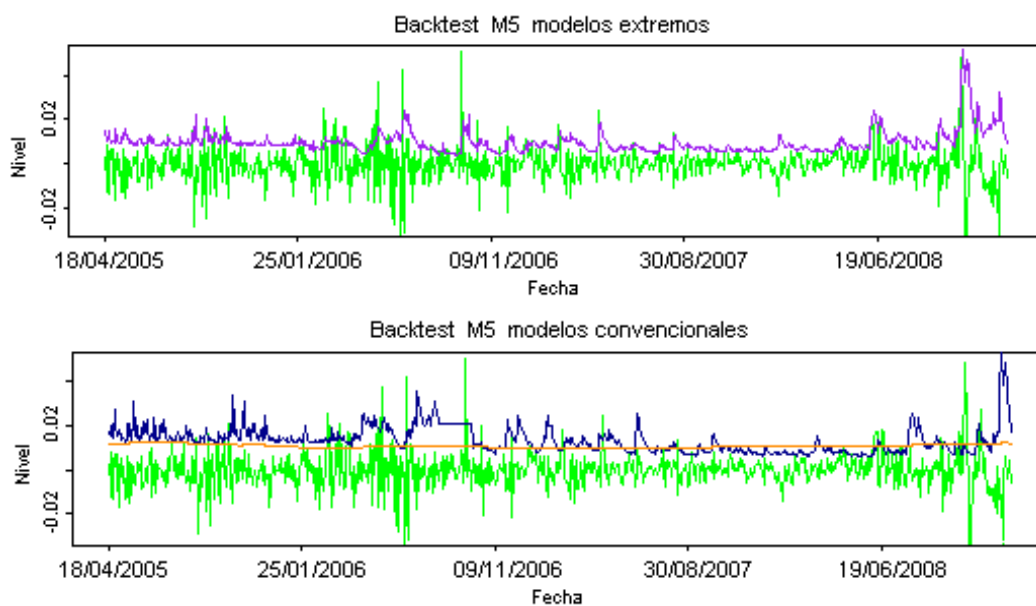


Figura 4.60: Backtest Gráfico M5 al 31 de Diciembre de 2008

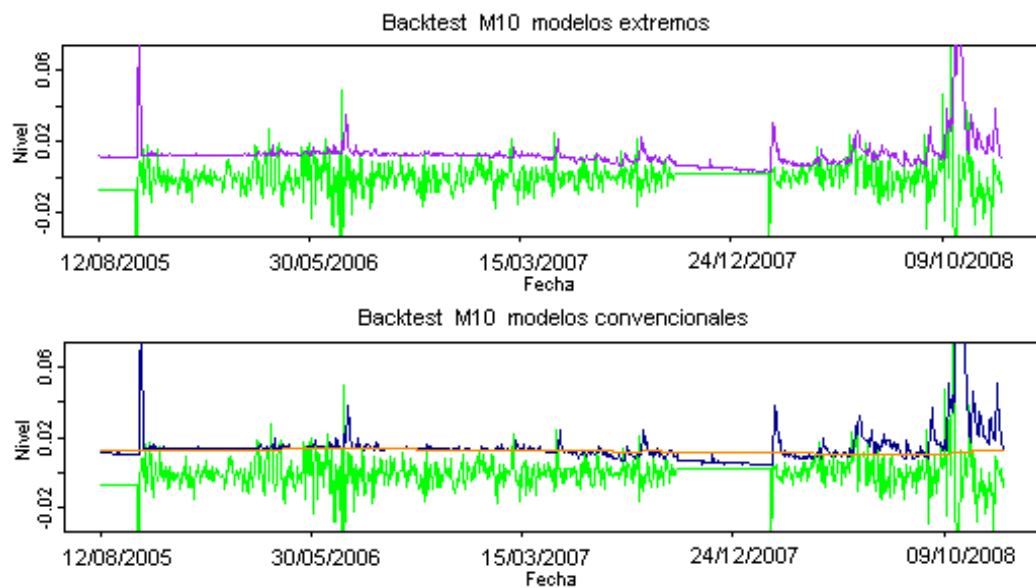


Figura 4.61: Backtest Gráfico M10 al 31 de Diciembre de 2008

en las observaciones iniciales de los clusters, después el nivel de VaR se ajusta por dos factores, el primero es la introducción de mayor información de observaciones extremas a los modelos de valores Extremos (El VaR Paramétrico Normal no se beneficia de este factor, y es por eso que registra un mayor número de excesos al nivel de VaR).

El segundo factor es la estimación de la volatilidad, la cuál ayuda al seguimiento del nivel de VaR a la serie. Respecto a este factor es importante mencionar que es aquí donde se explica el uso de un modelo GARCH(1,1) pues de asignarle un mayor grado al termino GARCH, o al factor de la volatilidad, se provocaría una suavización en la reacción del nivel de VaR a la volatilidad de mercado. Esta suavización se presentaría tanto al aumento de la volatilidad, como a la reducción, de forma que se podrían reducir excesos para escenarios volátiles que se presenten poco después de un cluster pero se aumentaría el número de excesos al inicio de los clusters, pues la estimación de la volatilidad consideraría aun escenarios poco volátiles.

Así pues y en general se observa un comportamiento adecuado de las medidas extremas aún en escenarios de Crisis, de forma que realizar un Backtest en el cuál los excesos observados de todos los instrumentos a todos los niveles de confianza fueran siempre cercanos a los excesos esperados, se reduciría a seleccionar un periodo más amplio, o un periodo que tenga un numero bajo de clusters de información.

Podemos observar que la medida de VaR bajo modelos Extremos mantiene un comportamiento que sigue el movimiento de la volatilidad observada en la serie, tanto a la alza como a la baja. Esto ofrece al inversor sujeto a régimen de inversión, un margen de maniobra mayor con instrumentos de riesgo y al mismo tiempo reacciona con un aumento del nivel de VaR frente a posibles escenarios de alta volatilidad. Podemos concluir que la reacción a la volatilidad de mercado de la medida es oportuna, en cuanto se cuenta con la información, evidentemente sería imposible pronosticar la aparición de valores extremos sin información observada.

En cuanto al modelo Paramétrico Normal se observa un buen seguimiento de la serie, sin embargo es importante destacar que este seguimiento es proporcionado al modelo por la estimación de la volatilidad y no por que el ajuste del modelo a la serie seá adecuado, es más, es gracias a esa deficiencia en el ajuste de las colas que el número de excesos al nivel

de VaR observados en esta medida resulta mayor.

Para el modelo Histórico se observa que la reacción ante cambios en la volatilidad es prácticamente nula. Mantiene altos niveles de VaR después de una gran número de observaciones volátiles y se mantiene hasta que dichas observaciones salen de la ventana de tiempo que se considera para el modelo, lo que provoca que un inversor sujeto a régimen de inversión pierda, reiteradamente, oportunidad de operación con instrumentos de riesgo. De igual forma, cuando se presentan altas volatilidades en mercado de manera reiterada, el modelo no recoge esta información en el nivel de VaR hasta que el número de observaciones extremas es suficiente para afectar el cuantil histórico que contempla el modelo, lo que provoca múltiples excesos al VaR sin que el nivel aumente. Este comportamiento es fácilmente observable en la Figura 4.52.

En las gráficas correspondientes a los tipos de cambio, para los modelos Extremos y Paramétrico Normal se observan un número menor de clusters a lo largo de las series, razón por la cual no se presenta un elevado número de excesos observados. Frente al periodo de crisis el número de excesos al VaR es moderado y el nivel de VaR comienza a descender en cuanto comienza a observarse mayor estabilidad en la volatilidad de la serie.

El modelo Histórico presenta una vez más sobreestimación del VaR en periodos posteriores a escenarios de alta volatilidad y subestimación en el periodo de crisis. Este comportamiento puede observarse en la Figura 4.58. En esta misma gráfica, notamos como el nivel de VaR para los modelos Extremos y el modelo Normal es bastante mayor a las observaciones de rendimientos. Esto se debe a que a observaciones previas de muy alta volatilidad, sin embargo el seguimiento a la serie se mantiene por la estimación de la volatilidad y se observa como se reduce el nivel de VaR cuando las observaciones de alta volatilidad ya no son contempladas en la ventana de tiempo del modelo. Esto nos muestra que una forma de aumentar el nivel de VaR, sería manteniendo observaciones extremas de tal forma que la cola de pérdidas sea más pesada y el estimador de la cola empleado para el cálculo de VaR sea mayor.

En las gráficas de Bonos Genéricos se mantiene en general los comportamientos descritos. Adicional a esto es notable que en estos casos los modelos Extremos presentan un mejor seguimiento de las series que el modelo Normal. Esto es un indicador de que para

series poco volátiles y con observaciones repetitivas el ajuste con modelos Extremos presenta una gran ventaja sobre el modelo Normal. En el caso de este tipo de series la estimación de la volatilidad no resulta tan adecuada, pues carece de información, por lo que el mejor ajuste a las colas de los modelos Extremos cobra un mayor peso en el cálculo del nivel de VaR. Además se observa una reacción a volatilidades provocadas por altos rendimientos, lo cual prevé una posible pérdida extrema por un ajuste de mercado en los precios.

Finalmente observamos que para la mayoría de los instrumentos el nivel de VaR calculado mediante el método de Máximos por Bloque y el calculado mediante el método de Máximos a un Umbral no presentan grandes diferencias, sin embargo resulta mejor el ajuste mediante Máximos a un Umbral, pues presenta un menor número de excesos al nivel de VaR. Además, como ya se mencionó, existen instrumentos con ciertas características para los cuales el método de Máximos por Bloque no permite realizar un ajuste, o el ajuste es insuficiente, por lo cual el nivel de VaR es excedido frecuentemente. Por lo anterior concluimos que resulta más conveniente utilizar la DGP para ajustar los residuales de las series y así obtener un nivel de VaR.

De igual forma concluimos que el cálculo de nivel de VaR con modelos de Valores Extremos nos ofrece una mejor predicción de las posibles pérdidas que los modelos convencionales. Esto sucede de forma general, sin embargo estos modelos son especialmente útiles en periodos de crisis, ya que reflejan de una mejor manera, y con una reacción más rápida, la información de observaciones de alta volatilidad.

En general la Teoría de Valores Extremos en su aplicación a cálculo de VaR a resultado satisfactoria en el sentido de que provee una medida con buena sensibilidad a cambios en la volatilidad de la serie, con una mejora significativa en cuanto al ajuste de las colas de las series y un nivel de VaR que refleja mejor las posibles pérdidas y que, además, da un buen margen de operación con instrumentos de riesgo a inversores sujetos a régimen de inversión.

Sin embargo aún con todos estos puntos a favor, para instrumentos de alta volatilidad, la medida muestra cierta deficiencia frente a clusters y periodos de crisis. Es cierto que esta deficiencia es menor que la observada en los modelos convencionales y que se corrige con relativa rapidez, de forma que el nivel de VaR termina siendo una buena referencia una

vez sucedidas las primeras observaciones del cluster, pero la deficiencia existe y genera un número de excesos al VaR mayor al esperado.

Por lo anterior, para este trabajo, se analizaron distintas opciones de alteración a la medida de VaR, con la finalidad de reducir el número de excesos al VaR. Esta decisión no debe interpretarse como un fracaso en el intento de producir una buena medida de VaR mediante la TVE, pues como ya mencionábamos, el lograr que el número de excedencias observadas se asemeje al número de excedencias esperadas depende del periodo que se seleccione para el Backtest, así pues si se elige un periodo que abarque de inicios de 2003 a finales de 2013, tendremos un número de excedencias mucho más cercano al esperado.

4.7. Un intento por estabilizar la medida de VaR con TVE en periodos de alta volatilidad.

La decisión de alterar el cálculo de VaR con la intención de reducir los excesos en el Backtest responde al interés de mostrar que es posible producir una medida de VaR cuyo nivel sea adecuado incluso en momentos de crisis de mercados.

Recordemos que ya concluimos que los niveles de VaR obtenidos mediante una metodología de VaR con TVE resultan ser estimaciones para las posibles pérdidas mucho más acertadas que las obtenidas por métodos de VaR más convencionales. En particular el método de Máximos a un Umbral mostró mejores estimaciones que el método de Máximos por Bloque, además de las ventajas observadas en casos de poca información o series poco volátiles. Es por esto que el intento por estabilizar el VaR se realizará al método de Máximos a un Umbral y ajustes a colas mediante la DGP.

Evidentemente la intención es que las modificaciones o alteraciones al cálculo no sean estructurales, de forma que el modelo no sea propiamente alterado y el proceso de cálculo se mantenga, de forma que el nivel de VaR obtenido después de las alteraciones sea válido y realmente refleje una estimación a las posibles pérdidas y no simplemente un nivel de VaR tan alto que no pueda ser excedido.

Iniciamos analizando nuestras opciones de alteraciones. Como el nivel de VaR

básicamente se compone de 2 factores, las alteraciones serán en el sentido de alguno de ellos.

El primer factor es la estimación de la volatilidad obtenido con los parámetros del proceso GARCH, así como la observación y la volatilidad en un periodo anterior al estimado. Por lo tanto una modificación válida a este factor no es viable, al menos en los componentes mencionados. Una posibilidad sería alterar el estimador de la volatilidad en proporción a la volatilidad observada en el periodo, sin embargo es probable que esa proporción requiera ser ajustada en cada caso acorde a las condiciones de mercado, lo que resultaría muy costoso computacionalmente. Por otro lado la proporción empleada debería ser la justa para que el nivel de VaR no sea excedido, sin resultar en un aumento tal que la estimación de las posibles pérdidas dejen de ser una buena referencia, es decir, que el nivel de VaR resultante sea exageradamente alto. De igual forma la selección de esa proporción dependería del comportamiento de cada serie y de la volatilidad en cada periodo estimado. De forma que descartamos una alteración a la estimación de la volatilidad.

El segundo factor es el estimador de la cola, donde sus variables son los parámetros estimados de la distribución ajustada a la cola de la serie. Así pues, para modificar los parámetros de la distribución ajustada se requiere modificar la cola misma de la serie.

Si la intención es aumentar el VaR resulta evidente que se requiere una cola más pesada. Esto resultaría de, por ejemplo, contemplar observaciones extremas que no están contenidas en la ventana de tiempo que corresponde a la fecha de cálculo. Otra opción sería aumentar la frecuencia de las observaciones extremas mayores, aumentando así el peso de la cola y por lo tanto aumentando el valor del estimador de la cola y en consecuencia el nivel de VaR.

Si bien estas alteraciones no son estructurales al modelo, si representan una alteración a la información obtenida de mercado en cuanto a la serie de log-rendimientos, lo que podría ser cuestionable o refutable en distintos grados y llevaría a la desacreditación como medida válida de nuestro cálculo de VaR.

La idea de agregar observaciones extremas de la serie que no formen parte de la ventana de tiempo correspondiente puede resultar más viable, pues al final estas observaciones son parte del comportamiento histórico de la serie, sin embargo los resultados obtenidos con

esta alteración no resultan de gran utilidad, pues los niveles de VaR obtenidos siguen siendo excedidos con una frecuencia mucho mayor a la esperada.

Si buscamos una opción en la cuál no se requiera aumentar la información de la cola puede resultar útil modificar el porcentaje de datos que son empleados para la construcción de la cola, así no se altera la información en forma alguna, simplemente se recorta la cantidad de observaciones.

Anteriormente se revisó la importancia de fijar un umbral adecuado para la construcción de colas y se acordó que el uso del 10 % de los datos mayores nos proporcionaban un umbral óptimo en el sentido de que proporcionaba una cola cuyo ajuste mediante la DGP proporcionaba un nivel de VaR adecuado.

El principal problema que podría generar el uso de un umbral inadecuado es la imposibilidad de realizar el ajuste de la DGP a la cola construida bajo dicho umbral, imposibilitando el cálculo de VaR. Una vez que el ajuste a la cola es posible, existe la posibilidad de que éste no refleje de forma suficiente el comportamiento de las colas y por lo tanto el nivel de VaR obtenido no sea adecuado. Deberemos tener en cuenta estas 2 posibilidades al modificar los umbrales.

Si el umbral seleccionado no permite el ajuste de la DGP a la cola, evidentemente no será de utilidad. Si por otro lado el ajuste se logra, aún existe la posibilidad de que el nivel de VaR estimado no sea adecuado para la serie que se trate, sin embargo para el fin que ahora nos ocupa, puede resultar de utilidad comparar el nivel de VaR obtenido con la modificación del umbral con los log-rendimientos observados, cuidando siempre que el nivel de VaR mantenga cierta coherencia con la serie.

Se analizó el comportamiento del Nivel de VaR obtenido a una fecha específica fijando distintos umbrales en base a distintos porcentajes de datos para la construcción de la cola (Figura 4.62). Consistentemente se observa que el nivel de VaR presenta poca variación con umbrales q dejan entre 4 % y 10 % de los datos para la construcción de la cola. En cambio el nivel muestra un alza mientras el umbral se fija de acuerdo a la construcción de colas con porcentajes inferiores al 4 %. El nivel de VaR más alto alcanzado, se encuentra al rededor de un umbral fijado de tal forma que la cola contenga el 2 % de las observaciones. Esto podría sernos de utilidad para la reducción de excesos al VaR.

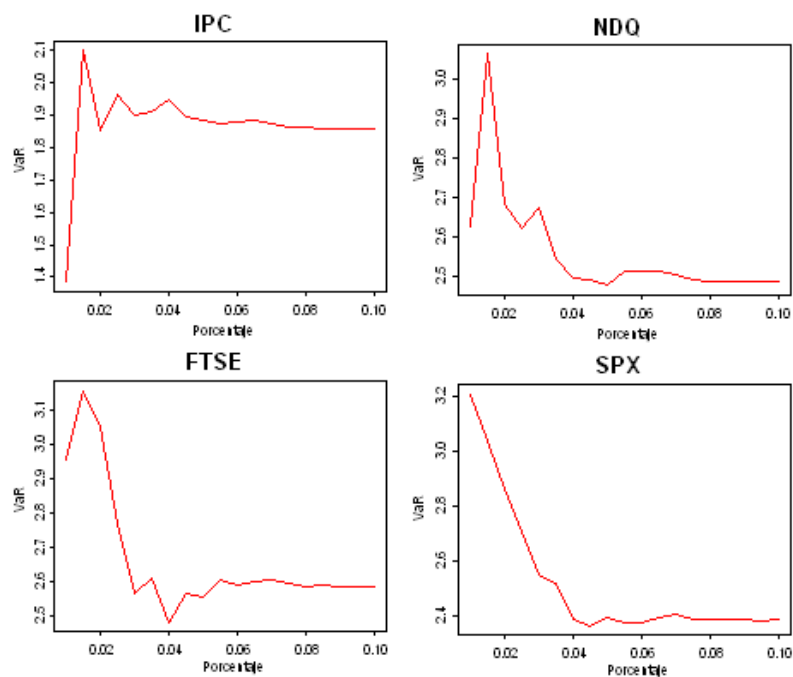


Figura 4.62: Nivel de VaR con cambio en el porcentaje de construcción de colas

El aumento en el nivel de VaR se debe a que, al construir la cola con menos información, el ajuste a la cola tiene una mayor convergencia. Como vimos anteriormente, los ajustes de distribuciones extremas mostraban ciertas desviaciones para los datos extremos mayores (la cola de la cola). Al considerar únicamente los datos extremos mayores, las desviaciones desaparecen o en su caso se minimizan. Así, la distribución ajustada a una cola con menos observaciones, si bien puede no ser más pesada que una cola que comprende el 10% de las observaciones, comprende observaciones de pérdidas mucho más elevadas, que en muchos de los casos no se consideran si se toma el 10% de los datos. Así pues, el estimador de la cola resulta mayor si se considera menos información. Entonces se espera un aumento en el nivel de VaR. Se deberá confirmar que esto suceda para todas las fechas de cálculo.

Se realizó un nuevo Backtest con la modificación a la cola descrita. Se construyen las colas únicamente considerando el 2% de los mayores datos. De forma análoga, para el método de Máximos por Bloque, se utilizaron bloques de 40 datos a fin de reducir la información en las colas, esto se hizo con un fin comparativo, pues nuestro interés se centra

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Bloques | | | Max. Umbral | | | Normal | | | Histórico | | |
|------|-------|-------------|--------------|-------|---------|-------------|-------|---------|---------|-------|---------|-----------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| IPC | 1268 | 95% | 95 | 7.49% | 0.000 | 61 | 4.81% | 0.642 | 94 | 7.41% | 0.000 | 95 | 7.49% | 0.000 |
| | | 97.5% | 50 | 3.94% | 0.001 | 37 | 2.92% | 0.193 | 59 | 4.65% | 0.000 | 58 | 4.57% | 0.000 |
| | | 99% | 14 | 1.10% | 0.393 | 20 | 1.58% | 0.034 | 29 | 2.29% | 0.000 | 31 | 2.44% | 0.000 |
| NDQ | 1268 | 95% | 72 | 5.67% | 0.150 | 55 | 4.33% | 0.877 | 79 | 6.23% | 0.029 | 71 | 5.59% | 0.181 |
| | | 97.5% | 43 | 3.39% | 0.031 | 41 | 3.23% | 0.062 | 40 | 3.15% | 0.085 | 50 | 3.94% | 0.001 |
| | | 99% | 25 | 1.97% | 0.001 | 25 | 1.97% | 0.001 | 20 | 1.58% | 0.034 | 40 | 3.15% | 0.000 |
| FTSE | 1268 | 95% | 86 | 6.78% | 0.003 | 60 | 4.73% | 0.689 | 88 | 6.93% | 0.002 | 88 | 6.93% | 0.002 |
| | | 97.5% | 39 | 3.07% | 0.114 | 35 | 2.76% | 0.301 | 54 | 4.26% | 0.000 | 51 | 4.02% | 0.001 |
| | | 99% | 17 | 1.34% | 0.142 | 14 | 1.10% | 0.393 | 35 | 2.76% | 0.000 | 28 | 2.21% | 0.000 |
| SPX | 1268 | 95% | 74 | 5.83% | 0.100 | 63 | 4.96% | 0.541 | 78 | 6.15% | 0.038 | 92 | 7.25% | 0.000 |
| | | 97.5% | 50 | 3.94% | 0.001 | 43 | 3.39% | 0.031 | 52 | 4.10% | 0.000 | 61 | 4.81% | 0.000 |
| | | 99% | 27 | 2.13% | 0.000 | 26 | 2.05% | 0.001 | 30 | 2.36% | 0.000 | 43 | 3.39% | 0.000 |

Figura 4.63: Backtest de Índice con colas al 2% y bloques de 40 días al 31 de Dic de 2008

en el método de Máximos a un Umbral.

De los resultados se detecta una reducción importante y generalizada para los excesos observados, lo que implica que el nivel de VaR aumentó de forma generalizada y no sólo para épocas de alta volatilidad, lo cuál se esperaba. Esta reducción en la frecuencia de excesos implica que si bien el nivel de VaR es suficientemente alto para no ser excedido en épocas de alta volatilidad, cuando el mercado es estable y las volatilidades observadas se encuentra dentro de los niveles comunes el nivel de VaR sigue siendo alto, lo que implica una sobreestimación importante. (Figura 4.63)

También es notable que la reducción en la frecuencia de excesos desciende cuando el nivel de confianza aumenta, de hecho para el 99% de confianza la frecuencia de excesos aumenta. Esto no representa un problema, pues vimos que para los niveles de confianza 97.5% y 99% la frecuencia de excesos era suficientemente cercana a la esperada, por lo que la modificación a las colas sólo se realizará para el nivel de confianza del 95%, que es el nivel de confianza que queremos mejorar.

De las Figuras 4.64, 4.65, 4.65 y 4.67 observamos que, en efecto, el Nivel de VaR presenta un aumento generalizado. Evidentemente no podemos decir que ésta forma de cálculo resulte más adecuada que usando colas que comprenden el 10% de los datos, únicamente por que se registra un número menor de excesos. Es importante considerar el nivel de VaR

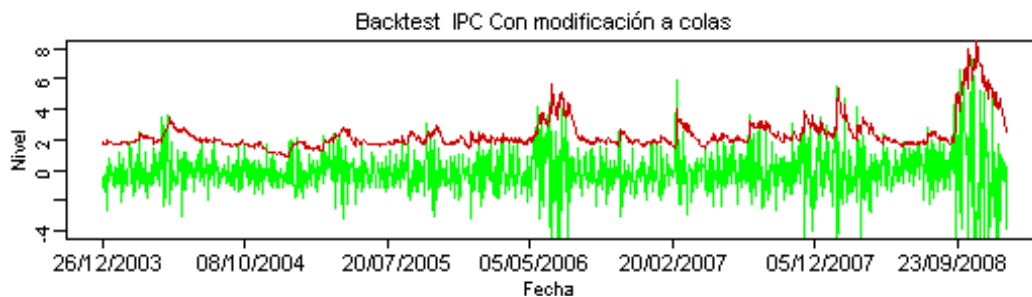


Figura 4.64: Backtest IPC al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2%

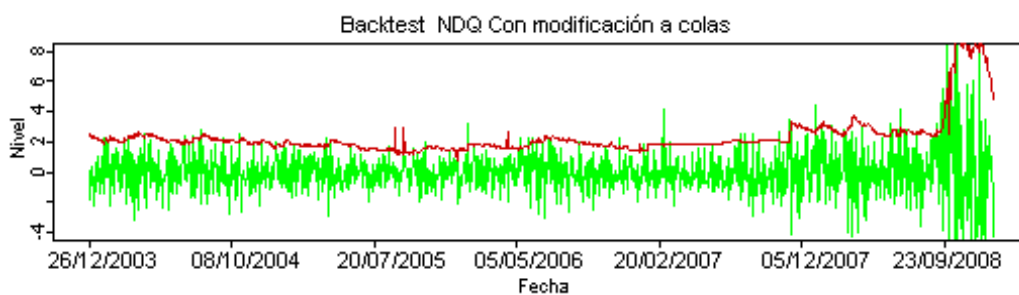


Figura 4.65: Backtest NDQ al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2%

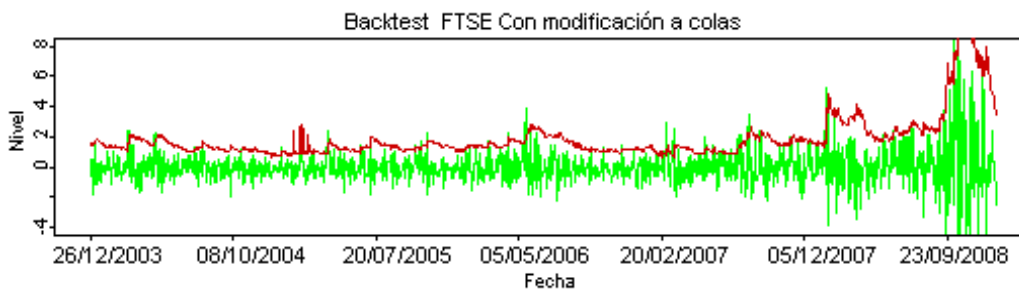


Figura 4.66: Backtest FTSE al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2%

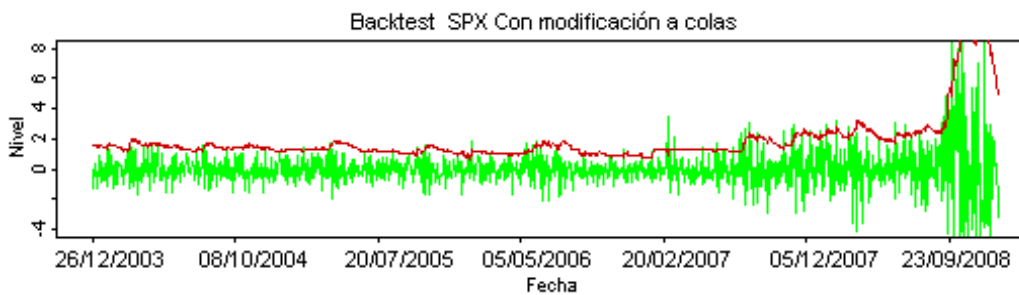


Figura 4.67: Backtest SPX al 31 de Dic 2008 con Máximos a un Umbral, colas al 2%

que produce la medida en todo momento. Así pues se enfrentan dos puntos de decisión, frecuencia de excesos y la diferencia entre el nivel de VaR y la pérdida estimada.

Ahora bien, el aumento en el nivel no parece ser significativo pero si suficiente para reducir los excesos, sin embargo el aumento en la medida resulta innecesario en periodos de baja volatilidad. Si bien la elección entre la ganancia en la frecuencia de excesos, que se traduce en una mejor estimación de las posibles pérdidas, y la pérdida de operación con instrumentos riesgosos que representaría, para un inversionista sujeto a régimen de inversión, el aumento innecesario de la medida podría dejarse a consideración del inversionista mismo, el Nivel de VaR tiene variaciones altas a pequeños cambios en el umbral cuando este se fija de acuerdo a un porcentaje de observaciones menor al 4 %, lo que refleja cierta inestabilidad en la medida, la cuál se puede atribuir a que no estamos empleado un umbral óptimo.

En este sentido y para que las alteraciones a la medida sean las mínimas posibles, así como evitar la inestabilidad mencionada, se decidió en este trabajo buscar una mediación entre la reducción en la frecuencia de excesos y el aumento en el nivel de VaR. Para ello se realiza un nuevo Backtest para el mismo periodo, sin embargo se agrega una variación al cálculo. Para la construcción de la cola de la serie, en el caso de Índices Bursátiles, se fijará de forma automática un umbral que proporcione el 10 % de las observaciones, sin embargo, cuando el valor absoluto de alguna de las 5 observaciones de log-rendimientos inmediatas anteriores a la fecha de cálculo sea mayor a la media más la desviación estándar de las observaciones correspondientes a la ventana de interés el umbral se fijará un umbral tal que proporcione el 2 % de las observaciones conformadas por los residuales para la construcción de la cola.

$$U_t = \left\{ \begin{array}{ll} u_t \mid \frac{card(x_i)}{n} \approx 10 \% & \text{si } x_i < media(x_j) + ds(x_j) \\ u_t \mid \frac{card(x_i)}{n} \approx 2 \% & \text{si } x_i > media(x_j) + ds(x_j) \end{array} \right\},$$

donde

u_t es el umbral que se emplea para el cálculo de VaR a tiempo t ,

x_i son las observaciones tales que $x_i > u_t$.

$card(x_i)$ es la cardinalidad del conjunto de x_i .

x_j son las observaciones que contempla la ventana de tiempo para el cálculo de

VaR en t .

$media()$ es la función media.

$ds()$ es la función de desviación estándar.

La decisión de aplicar esta regla a las 5 observaciones de log-rendimientos inmediatas anteriores a la fecha de cálculo responde al comportamiento de los clusters, pues se pueden encontrar observaciones poco volátiles, u observaciones muy volátiles de ganancias mientras se atraviesa un periodo de alta volatilidad.

Con la aplicación de esta regla se logrará que el nivel de VaR únicamente aumente en los periodos de alta volatilidad, reduciendo la frecuencia de excesos al VaR. Por otro lado, en periodos de estabilidad el nivel de VaR se mantendrá en un nivel más bajo que permitirá un mayor margen de operación con instrumentos de riesgo. Se debe tener en cuenta que el aumento en el nivel de VaR al iniciar un periodo de alta volatilidad será más abrupto. Además los niveles de VaR que eran lo suficientemente altos para no ser excedido es una época de crisis serán aun mayores, obligando al inversionista a un control de riesgos más estrictos, pues la estimación de pérdidas es más severa. Este hecho puede considerarse favorable ya que sólo se presentará en periodos de crisis.

Como se estableció anteriormente, esta modificación al cálculo será favorable a un nivel de confianza del 95 %, por tanto será a este nivel de confianza donde se aplique. Para el caso del nivel de confianza del 97.5 % la mejoría fue mínima, por lo que no tendría sentido arriesgar la estabilidad de la medida por la mejoría observada en la frecuencia de excesos. Recordemos que la metodología original era, de forma general, buena para niveles de confianza más altos.

Se presenta el Backtest calculado con colas modificadas de acuerdo a la regla descrita (Figura 4.68) para el nivel del 95 %, para los demás niveles se mantienen colas al 10 %. De los resultados se observa que la reducción en la frecuencia de excesos es menor que la que presenta un nivel calculado con colas al 2 % en todo momento pero sigue siendo una reducción importante, además se espera que el nivel de VaR sea más adecuado para periodos de volatilidad estable. Si bien la prueba binomial sigue rechazando que el nivel de confianza de la medida sea 95 %, la frecuencia de excesos es ya mucho más cercana a la esperada.

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Umbral | | |
|------|-------|-------------|-------------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test |
| IPC | 1268 | 95% | 66 | 5.20% | 0.389 |
| | | 97.5% | 43 | 3.39% | 0.031 |
| | | 99% | 12 | 0.95% | 0.616 |
| NDQ | 1268 | 95% | 61 | 4.81% | 0.642 |
| | | 97.5% | 41 | 3.23% | 0.062 |
| | | 99% | 17 | 1.34% | 0.142 |
| FTSE | 1268 | 95% | 67 | 5.28% | 0.341 |
| | | 97.5% | 41 | 3.23% | 0.062 |
| | | 99% | 17 | 1.34% | 0.142 |
| SPX | 1268 | 95% | 66 | 5.20% | 0.389 |
| | | 97.5% | 48 | 3.78% | 0.004 |
| | | 99% | 21 | 1.65% | 0.019 |

Figura 4.68: Backtest al 31 de Dic de 2008 con regla para construcción de colas

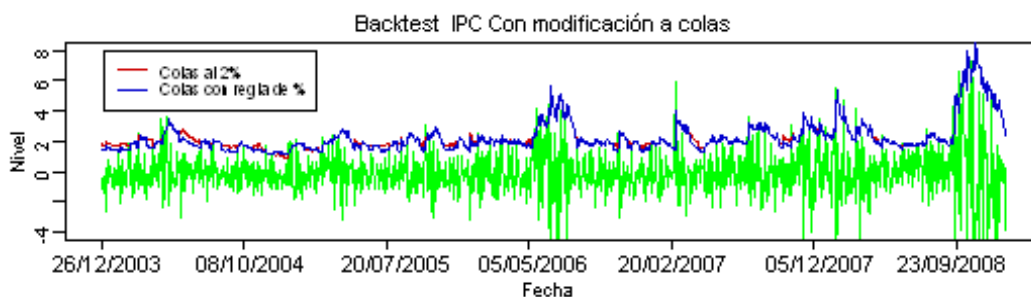


Figura 4.69: Comparación Backtest al 31 de Dic del IPC

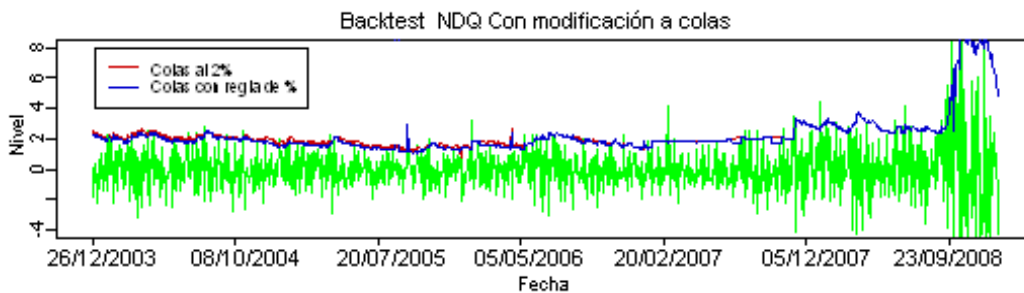


Figura 4.70: Comparación Backtest al 31 de Dic del NDQ

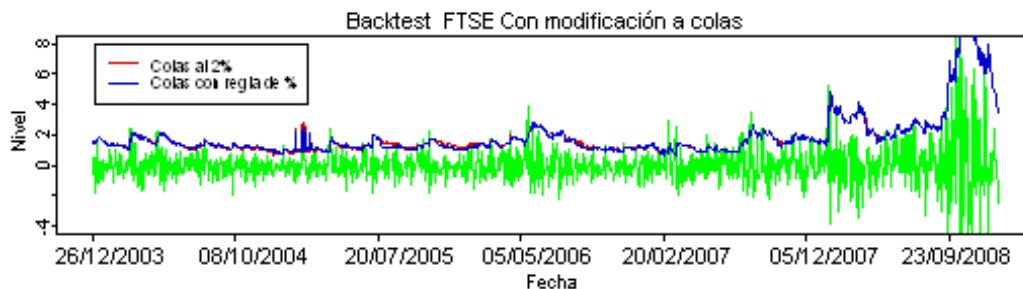


Figura 4.71: Comparación Backtest al 31 de Dic del FTSE

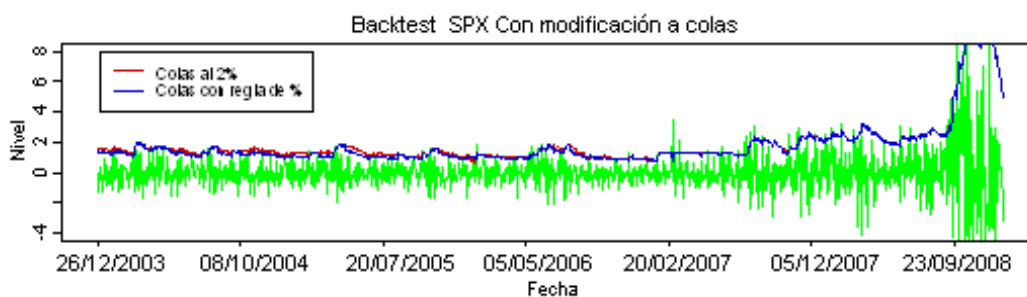


Figura 4.72: Comparación Backtest al 31 de Dic del SPX

En los gráficos del Backtest comparando el nivel de VaR calculado utilizando colas al 2% y el calculado aplicando la regla descrita, observamos que efectivamente el nivel de VaR calculado con la aplicación de la regla descrita se mantiene en un nivel más bajo en periodos donde la serie no presenta altas volatilidades y se eleva lo suficiente para no ser excedido en periodos de crisis. La disminución en la frecuencia de excesos se debe a que el nivel de VaR calculado con la aplicación de la regla descrita se eleva después de la primera observación extrema, en comparación con el VaR calculado a una cola al 10% el cuál requería de la ocurrencia de más observaciones extremas para que el peso de la cola fuera suficiente. En comparación a un VaR calculado con colas al 2% son esas primeras observaciones extremas las que aumentan la frecuencia de excesos de nuestra medida.

Para tener una comparación más puntual sobre el incremento del VaR en periodos de baja volatilidad implementaremos una herramienta a la que llamaremos Spread Medio del VaR. Esta medida será la media de la diferencia existente entre el nivel de VaR obtenido y se respectiva observación de log-rendimiento cuando ésta no supere al VaR y represente

| | Spread Medio del VaR | | |
|------|----------------------|-----------|---------|
| | VaR 2% | VaR Regla | VaR 10% |
| IPC | 1.5102 | 1.4478 | 1.2862 |
| NDQ | 1.4875 | 1.4323 | 1.3260 |
| FTSE | 1.3322 | 1.3053 | 1.1806 |
| SPX | 1.2936 | 1.2293 | 1.0318 |

Figura 4.73: SMVaR al 31 de Dic de 2008

una pérdida. De forma que un Spread Medio del VaR menor indicará que el nivel de VaR no está consumiendo margen de operación con instrumentos riesgosos innecesariamente.

$$SMVaR = \frac{\sum_i (VaR_i - x_i)}{n} \quad \text{para } i \mid x_i > 0 \text{ y } x_i < VaR_i. \quad (4.4)$$

Aplicando esta herramienta al VaR bajo Máximos a un Umbral donde las colas se construyen en base a un 2 % de las observaciones, a un 10 % de los datos y en base a la regla de volatilidad observamos que efectivamente el Spread Medio del VaR resulta menor con colas al 10 %, seguido del VaR con colas bajo la regla de volatilidad y finalmente es mayor en el caso de las colas construidas al 2 % de las observaciones.

Otra observación importante es que hay puntos en los que el nivel de VaR calculado con colas al 2 % resulta menor que el VaR calculado con la regla descrita. Esto es resultado de la inestabilidad mencionada en el nivel de VaR cuando el Umbral se fija acorde a una cantidad de observaciones para las colas menor al 4 %, ya que cuando la ventana de tiempo observada para la fecha de cálculo tiene una desviación estándar reducida, o presenta poca volatilidad el ajuste de la DGP puede contemplar en su extremo izquierdo valores que no pertenecen a cola, esto sucede para que la distribución ajuste correctamente a los valores del extremo derecho, que son las observaciones consideradas para la construcción de la cola. Como este fenómeno se presenta en periodos largos de poca volatilidad no debe preocuparnos que afecte a la medida propuesta, pues la construcción de colas basados en un 2 % aplica en periodos volátiles.

El fenómeno anterior junto con la fórmula del estimador de la cola (ecuación 3.25),

explicaría por que la frecuencia de excesos aumenta cuando se calcula con colas al 2 % y un nivel de confianza más elevado. Además constituye un punto a favor del uso de colas al 2 % únicamente en periodos de alta volatilidad.

Por lo tanto nuestro intento por estabilizar la medida de VaR con Teoría de Valores Extremos ha sido exitoso, tenemos una metodología de cálculo de VaR que provee mejores estimaciones de las posibles pérdidas y con un nivel de confianza que retrata mejor la frecuencia de excesos que el método del VaR Parámetro Normal. La definición del VaR sigue siendo la misma, únicamente se modificó el método de ajuste a los datos, por lo que podemos concluir, que el VaR resulta una buena medida para la estimación de posibles pérdidas en una cartera y con las modificaciones empleadas, incluso en épocas de crisis tan abruptas como la ocurrida en 2008. La razón por la que esta medida pudiera fallar, recae en errores de concepción de la medida y en supuestos erróneos o débiles sobre el comportamiento de los datos.

Por otro lado observamos que aún una metodología más severa como lo es la Teoría de Valores Extremos en su aplicación al cálculo de VaR presenta complicaciones frente a eventos extremos como los niveles de pérdida registrados durante la crisis de 2008. Más aún, si observamos la serie misma, resulta evidente que estas observaciones no son propias del comportamiento usual de la serie. Tampoco representan un ciclo de mercado en el cuál después de un largo periodo de ganancias comienza un reajuste de precios que se traduce en pérdidas que se presentan de forma continua, pues las pérdidas registradas durante este periodo no son sólo excesivas, además representan pérdidas máximas históricas.

Lo anterior debería bastar para aceptar que ninguna modelación matemática del comportamiento de los log-rendimientos sería adecuada para predecir o estimar la ocurrencia de estos eventos. En cambio si se analiza el comportamiento, estrategias y elecciones de los participantes de mercado, podría ser predecible un crash de mercado como el ocurrido. Es por esto que muchos economistas y analistas describen la crisis ocurrida en 2008 como una crisis provocada por la falta de regulación financiera y correcta medición de riesgos.

4.8. Aplicación del cálculo de VaR mediante Máximos a un Umbral a portafolios de inversión.

Evidentemente la gestión de riesgos aplica en un portafolio de inversión y no en un instrumento independiente. Es por ello que nos interesa mostrar la aplicación del cálculo de VaR con la TVE, en específico con el método de Máximos a un Umbral, en un portafolio de Inversión. Para ello debemos recordar que el VaR no es una medida coherente, pues no siempre cumple el principio de subaditividad, pues no siempre se cumple que

$$VaR(X + Y) \leq VaR(X) + VaR(Y) \quad \text{para todo } X, Y.$$

Es decir que el VaR del portafolio compuesto por una unidad del activo X y una unidad del activo Y , no siempre resulta a lo más igual que la suma del VaR de una unidad del activo X y el VaR de una unidad del activo Y .

Entonces resulta evidente que la medida que nos interesa es el cálculo del VaR para el Portafolio y no para cada instrumento que lo compone. Sin embargo y a modo de comparación se calcularán ambos niveles.

Ahora bien, para el cálculo del VaR de un portafolio de inversión se construirá la serie de log-rendimientos del portafolio, sumando las ponderaciones que contiene el portafolio de cada instrumento, por el log-rendimiento del instrumento.

$$Z_t = \sum_j P_j X_{jt}$$

Donde: Z_t son los log-rendimientos del portafolio al tiempo t .

P_j es la ponderación o peso del instrumento X_j en el portafolio.

X_{jt} es el log-rendimiento del j -ésimo instrumento del portafolio.

Una vez obtenida la serie de log-rendimientos del portafolio se procede a aplicar un proceso GARCH(1,1) y a realizar la estimación de σ_{t+1} . Después, como indica la método de Máximos a un Umbral, se requiere fijar un umbral para la construcción de la cola de pérdidas, para después encontrar los parámetros de la DGP que ajusta a la cola construida. Con éstos parámetros calculamos el estimador de la cola, el cual se multiplica con la estimación de σ_{t+1} , con lo cuál se obtendría el nivel de VaR para el portafolio Z .

Sin embargo nos encontramos un detalle en el proceso. La medida que generamos para el cálculo del VaR bajo el método de Máximos a un Umbral realizaba la construcción de colas con el 10% de las mayores observaciones para Tipos de Cambio y Bonos Gubernamentales, mientras que para los Índices Bursátiles aplicaba una regla de volatilidad para construir las colas con el 10% o el 2% de las observaciones máximas, según fuera el caso. Por lo tanto debemos decidir el proceder para el cálculo de un portafolio que contenga Índices Bursátiles e instrumentos de al menos alguna de las otras 2 clases.

La regla aplicada a la construcción de las colas surge por la necesidad de elevar el nivel del VaR en épocas de crisis, en periodos de alta volatilidad, pues en estos momentos la medida no alcanzaba a cubrir los niveles de pérdida y era excedido, provocando una frecuencia de excesos mayor a la esperada. De forma que la regla aplicará para todo portafolio que contenga, en el caso de este trabajo, Índices Bursátiles. Así, si la ponderación de los índices es baja, la volatilidad que presente el portafolio se reducirá por la compensación de los otros instrumentos contenidos en él, de forma que el nivel de VaR será suficiente construyendo la cola con el 10% de las mayores observaciones. Por otro lado, si la ponderación de los índices es alta, o la volatilidad del instrumento es excesiva como para afectar la volatilidad de los log-rendimientos del portafolio, entonces las colas son construidas con el 2% de los datos y, dado que esto solo sucede si la serie de log-rendimientos presenta altas volatilidades, el nivel de VaR se eleva, evitando una frecuencia de excesos elevada.

Sin embargo recordemos que el uso de estas colas generaba cierta inestabilidad en el nivel de VaR, y para algunos periodos y en algunos instrumentos el utilizar una cola al 2% reducía de manera significativa el nivel de VaR. Por lo tanto en el caso de portafolios la regla de volatilidad será modificada, de forma que siempre que alguna de las 5 observaciones de log-rendimientos inmediatas anteriores resulte mayor que la suma de la media y la desviación estándar de las observaciones comprendidas en la ventana de tiempo correspondiente a la fecha de cálculo, el nivel de VaR que aplicará a ese periodo será el máximo entre el VaR calculado con colas al 2% y el VaR calculado con colas al 10%.

$$VaR_t = \begin{cases} VaR_{10\%} & \text{si } \max(x_{t-k}) < \text{media}(x_i) + ds(x_i) \\ \max(VaR_{2\%}, VaR_{10\%}) & \text{si } \max(x_{t-k}) > \text{media}(x_i) + ds(x_i) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, 4.$$

Donde:

| Portafolio 1 | | Portafolio 2 | | Portafolio 3 | | Portafolio 4 | | Portafolio 5 | |
|--------------|------|--------------|------|--------------|------|--------------|------|--------------|------|
| Inst | % | Inst | % | Inst | % | Inst | % | Inst | % |
| IPC | 10% | IPC | 10% | IPC | 10% | IPC | 10% | IPC | 10% |
| NDQ | 10% | NDQ | 10% | NDQ | 10% | NDQ | 10% | NDQ | 10% |
| SPX | 10% | SPX | 10% | FTSE | 10% | SPX | 10% | FTSE | 10% |
| MXNUSD | 15% | MXNUSD | 15% | MXNUSD | 15% | MXNUSD | 15% | MXNUSD | 15% |
| MXNEUR | 15% | MXNEUR | 15% | MXNEUR | 15% | MXNCAD | 15% | MXNCAD | 15% |
| M2 | 40% | M5 | 40% | M2 | 40% | M2 | 40% | M5 | 40% |
| | 100% | | 100% | | 100% | | 100% | | 100% |

Figura 4.74: Portafolios Construidos

| Estimación de volatilidad σ_{t+1} | | | | |
|--|--------|--------|--------|--------|
| Port 1 | Port 2 | Port 3 | Port 4 | Port 5 |
| 0.4159 | 0.4163 | 0.3571 | 0.3588 | 0.3369 |

Figura 4.75: σ_{t+1} estimada por portafolio

$VaR_{j\%}$ es el nivel de VaR calculado con colas al $j\%$.

x_i son las observaciones que comprende la ventana de tiempo aplicable a t .

$media()$ es la función media

$ds()$ es la función de desviación estándar

Construimos entonces 5 portafolios, los cuáles mantendrán el mismo porcentaje en cada *asset class* o tipo de instrumento, pero cambiarán algunos instrumentos de un portafolio a otro. Los 5 portafolios mantienen el 30% de la inversión en Índices Bursátiles, el 30% de la inversión en Tipos de Cambio y el 40% de la inversión en Bonos Gubernamentales.

Iniciamos construyendo la serie de log-rendimientos Z_t para cada uno de nuestros portafolios del 01 de octubre de 2004 al 12 de septiembre de 2008 a fin de tener las primeras 1000 observaciones para cada portafolio. Se continúa con la aplicación del proceso GARCH(1,1) y la estimación de la volatilidad de la serie σ_{t+1} y la obtención de la serie de residuales.

Al revisar las 5 observaciones anteriores se encuentra que la cuarta observación de log-rendimientos inmediata anterior a la fecha de cálculo de VaR de cada portafolio resulta

| Umbrales | | | | |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| Port 1 | Port 2 | Port 3 | Port 4 | Port 5 |
| 2.3532 | 2.3531 | 2.2513 | 2.1598 | 2.1747 |

Figura 4.76: Umbrales seleccionados

| Parametros | | |
|-------------------|---------|----------|
| | χ | σ |
| Port 1 | -0.0677 | 0.8548 |
| Port 2 | -0.0677 | 0.8547 |
| Port 3 | -0.0406 | 0.8115 |
| Port 4 | -0.1297 | 0.8994 |
| Port 5 | -0.0748 | 0.8325 |

Figura 4.77: Parámetros estimados para la DGP

mayor que la suma de la media y desviación estándar de la serie de cada portafolio, por lo tanto el umbral para la serie de residuales se fija tal que la cola se construye con el 2% de las observaciones máximas de los residuales.

Una vez fijados los umbrales para cada portafolio, continuamos con la estimación de los parámetros de la DGP que se ajustará a cada cola de residuales. Con estos parámetros se calcula el Estimador de la cola.

Finalmente el Estimador de la cola calculado con los parámetros de la DGP que ajusta a cada cola multiplicado por la estimación de la volatilidad para cada serie nos proporciona el VaR, el cual fue calculado a un nivel de confianza del 95%, bajo el método de Máximos a un Umbral con la aplicación de la regla de volatilidad para la construcción de colas.

Si bien los portafolios mantienen el mismo porcentaje de inversión en cada clase de activo, los niveles de VaR resultantes son distintos entre si. Evidentemente la diferencia se

| VaR para el 15 Sept 2008 | | | | |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Port 1 | Port 2 | Port 3 | Port 4 | Port 5 |
| 0.7298 | 0.7290 | 0.6203 | 0.6182 | 0.5764 |

Figura 4.78: Nivel de VaR por portafolio al 15 de Sep de 2008

debe a los instrumentos de cada clase de activo que han sido cambiados para cada portafolio. Sin embargo las diferencias y en específico la reducción en el nivel de VaR de cada portafolio no es coincidencia.(Figura 4.78)

Tomemos como referencia el Portafolio 1. El Portafolio 2 es prácticamente el mismo que el Portafolio 1 en instrumentos y ponderaciones, el único cambio son los Bonos Gubernamentales, mientras el Portafolio 1 se conforma con Bonos M2, el Portafolio 2 se conforma con Bonos M5. Si se observa nuevamente la tabla de los parámetros para la DGP estimados para cada instrumento(Figura 4.40) se observa que si bien el parámetro de forma para la curva M2 y la curva M5 indican distribuciones ajustadas exponenciales, el parámetro de forma de la curva M5, es menor al parámetro de forma de la curva M2, es decir que la distribución ajustada a la curva M5 esta más cerca de una distribución ajustada Beta GP (cuyo parámetro de forma debe encontrarse entre -1 y 0) Por lo tanto la cola de pérdidas de la curva M5 es menos pesada que la cola de pérdidas de la curva M2. Lo que se traduce en una pequeña reducción del VaR.

El Portafolio 3 se conforma con el Índice Bursátil FTSE, mientras el Portafolio 1 contiene en su lugar el Índice Bursátil SPX. Nuevamente observamos que el parámetro de forma de la distribución ajustada a la cola de log-redimientos de el SPX es positivo, indicando una distribución ajustada exponencial, mientras que el parámetro de forma para el ajuste del FTSE es negativo, correspondiente a una distribución ajustada Beta GP. Por lo tanto la cola de pérdidas del FTSE es menos pesada que la cola de pérdidas del SPX. Al pasar el porcentaje invertido en el SPX a ser invertido en el FTSE el VaR del portafolio se reduce.

El Portafolio 4 prescinde de la inversión en tipo de cambio Peso-Euro, para tomar posición en el tipo de cambio Peso-Dólar Canadiense. Nuevamente cambiamos un instrumento cuya cola, ajustada por una Beta GP donde el parámetro de forma es cercano a 0 , se asemeja a un exponencial por un instrumento cuyo parámetro de forma es menor que el del primer instrumento y ambos son negativos. Por lo tanto la cola de pérdidas del tipo de cambio MXNEUR tiene un mayor peso que la cola de pérdidas que el tipo de cambio MXNCAD. Nuevamente se registra un descenso en el nivel de VaR.

| VaR para el 15 Sept 2008 | | | | |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|
| Port 1 | Port 2 | Port 3 | Port 4 | Port 5 |
| 1.0384 | 1.0376 | 1.0572 | 1.0337 | 1.0516 |

Figura 4.79: Nivel de VaR por sumas ponderadas al 15 de Sept de 2008

Finalmente el Portafolio 5 contiene todos los cambios anteriores respecto al Portafolio 1, lo que se traduce en una importante disminución del nivel de VaR.

Por lo tanto concluimos que es posible utilizar los parámetros de forma de las distribuciones ajustadas a las colas de las pérdidas para rebalancear un portafolio y reducir el VaR de éste, aumentando el porcentaje de inversión en instrumentos de colas de pérdidas poco pesadas, o retirando la inversión en instrumentos de colas pesadas. Para llevar acabo este análisis y tomar una decisión adecuada, se deberán estimar los parámetros de la distribución ajustada a la cola de perdidas del instrumento que se trate, a la fecha en que se pretenda modificar el portafolio, pues los parámetros de forma cambian de acuerdo al comportamiento de la serie de log-rendimientos y su volatilidad.

Como comparación se obtiene el VaR de cada portafolio, sumando el VaR de cada instrumento a la fecha de cálculo y multiplicando por la ponderación en el portafolio. Los niveles de VaR resultantes calculados de esta forma son mayores a los niveles calculados por portafolio, lo q parecería respetar el principio de Subaditividad, sin embargo esto no necesariamente sucede en todas las fechas de cálculo. Nuevamente el hecho de que estos niveles de VaR resulten mayores a los niveles de VaR calculados por portafolio habla de una posible sobreestimación del VaR de cada portafolio.

Resulta evidente que las diferencias entre los niveles de VaR se deben a que para el VaR por portafolio, se ajusta una distribución a la cola de perdidas de la serie de log-rendimientos del portafolio, la cuál no es igual la distribución que resultaría de la combinación de cada distribución ajustada a la cola de la serie de log-rendimientos de cada instrumento.

A continuación se realiza el análisis Gráfico del Backtest al 95% de confianza de cada portafolio, se comparan también los niveles de VaR obtenidos mediante sumas

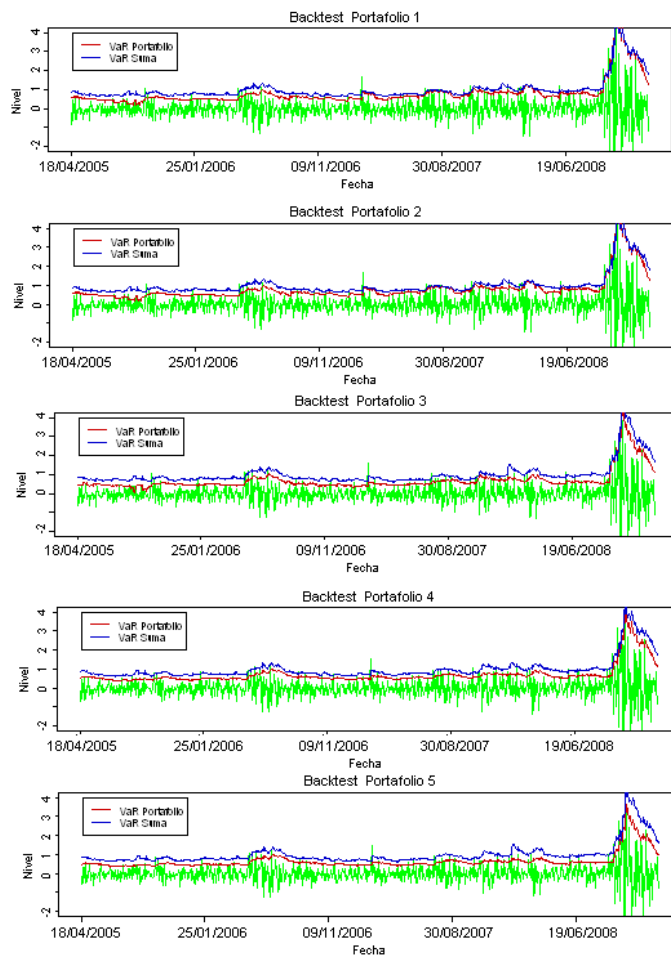


Figura 4.80: Comparativos Backtest Gráfico de portafolios al 31 de Dic de 2008

ponderadas del VaR de cada instrumento. Como para algunos de los portafolios generados se emplea la curva de Bonos Genéricos M5 y ésta cuenta con menos información que el resto de los instrumentos, el Backtest se realiza acorde a la cantidad de observaciones de ésta curva.

De los gráficos de Backtest observamos que efectivamente el VaR calculado por portafolios mantiene un nivel menor que el calculado por sumas ponderadas del VaR de cada instrumento. Sin embargo se observan puntos donde el VaR de portafolios resulta mayor al VaR de sumas, incumpliendo así con el principio de Subaditividad.

Si bien resulta natural que el cálculo de VaR para un portafolio se realice mediante de la serie de log-rendimientos mismo y de hecho el VaR calculado por portafolios se encuentra más cercano a las observaciones que el VaR por sumas, también resulta de interés que el VaR por sumas presenta una frecuencia de excesos mucho menor que el VaR por portafolios.

Esto podría sugerir el uso de el VaR por sumas ponderadas para un portafolio en periodos de alta volatilidad con el fin de conseguir una estimación más elevada de las posibles pérdidas, con el fin de reducir la frecuencia de excesos y tener una mejor previsión para afrontar pérdidas. Sin embargo se presentan muchas dificultades ante esta situación, la primera la no Subaditividad de la medida de VaR, lo que podría provocar el efecto inverso. Además el cambiar de un VaR por portafolio a un VaR por sumas ponderadas no resulta fácilmente justificable, es un cambio mucho más estructural que por ejemplo un cambio en el porcentaje de datos elegidos para la construcción de la cola. Se requeriría un análisis detallado del comportamiento de cada instrumento que componga la cartera y del comportamiento del VaR con sumas de acuerdo a las condiciones de mercado. Por lo tanto esta posibilidad se mantiene para estudios posteriores.

De momento concluimos que el VaR calculado con el método de Máximos a un Umbral es aplicable a portafolios de inversión y resulta en una buena estimación de las posibles pérdidas, aun que presenta complicaciones en épocas de crisis, estas son superadas y continúa generando buenas estimaciones de posibles pérdidas, las cuales reaccionan de manera adecuada a la volatilidad de la serie.

Por otro lado los parámetros de forma de las distribuciones ajustadas a las colas de las series de log-rendimientos de cada instrumento, pueden servir como referencia, para la incorporación de un instrumento al portafolio, o la modificación de las ponderaciones de inversión, con la finalidad de reducir el VaR del portafolio. Esto no reemplaza las metodologías de recomposición de carteras, o métodos de riesgo-rendimiento, únicamente se propone como una herramienta adicional para una referencia inicial.

En cuanto a la comparación del VaR con TVE y el VaR Paramétrico Normal en su aplicación a portafolio nuevamente podemos observar, en los resultados del Backtest

| | Datos | Nivel Conf. | Max. Umbral | | | Normal | | |
|--------|-------|-------------|-------------|-------|---------|---------|-------|---------|
| | | | Excesos | % | Bn Test | Excesos | % | Bn Test |
| Port 1 | 934 | 95% | 55 | 5.89% | 0.122 | 72 | 7.71% | 0.000 |
| | | 97.5% | 36 | 3.85% | 0.003 | 49 | 5.25% | 0.000 |
| | | 99% | 17 | 1.82% | 0.015 | 28 | 3.00% | 0.000 |
| Port 2 | 934 | 95% | 56 | 6.00% | 0.096 | 73 | 7.82% | 0.000 |
| | | 97.5% | 34 | 3.64% | 0.005 | 50 | 5.35% | 0.000 |
| | | 99% | 17 | 1.82% | 0.015 | 28 | 3.00% | 0.000 |
| Port 3 | 934 | 95% | 44 | 4.71% | 0.678 | 60 | 6.42% | 0.031 |
| | | 97.5% | 31 | 3.32% | 0.072 | 37 | 3.96% | 0.005 |
| | | 99% | 13 | 1.39% | 0.149 | 23 | 2.46% | 0.000 |
| Port 4 | 934 | 95% | 55 | 5.89% | 0.122 | 66 | 7.07% | 0.004 |
| | | 97.5% | 34 | 3.64% | 0.005 | 49 | 5.25% | 0.000 |
| | | 99% | 16 | 1.71% | 0.029 | 24 | 2.57% | 0.000 |
| Port 5 | 934 | 95% | 42 | 4.50% | 0.780 | 55 | 5.89% | 0.122 |
| | | 97.5% | 27 | 2.89% | 0.249 | 33 | 3.53% | 0.033 |
| | | 99% | 12 | 1.28% | 0.053 | 22 | 2.36% | 0.000 |

Figura 4.81: Comparativo Backtest DGP vs Normal

de portafolios, que el VaR con TVE muestra frecuencias de excesos mucho más cercanas a las frecuencias esperadas. Si bien la frecuencia de excesos es generalmente mayor a la frecuencia esperadas en nuestros portafolios a los 3 niveles de confianza, el VaR con TVE resulta mucho más adecuado que el VaR Paramétrico Normal. Igual que observamos en el caso de instrumentos, para portafolios también aumenta la precisión del VaR con TVE cuando se aumenta el nivel de confianza, mientras el VaR Paramétrico Normal muestra franca desventaja.

Finalmente realizamos un Backtest gráfico de los 5 portafolios que utilizamos (Figura 4.82). En él incluimos las observaciones de los log-rendimientos de nuestros portafolios hasta el cierre de 2009. La intención es analizar el comportamiento del VaR con TVE inmediatamente después de un periodo de crisis. El interés en realizar éste análisis se debe a que inmediatamente después de un periodo de crisis, las colas que serán ajustadas por la DGP contemplarán las observaciones extremas registradas durante la crisis. En específico para la crisis de 2008, observaciones extremas que representan pérdidas máximas históricas. La preocupación es entonces que el hecho de construir las colas con estas observaciones eleve

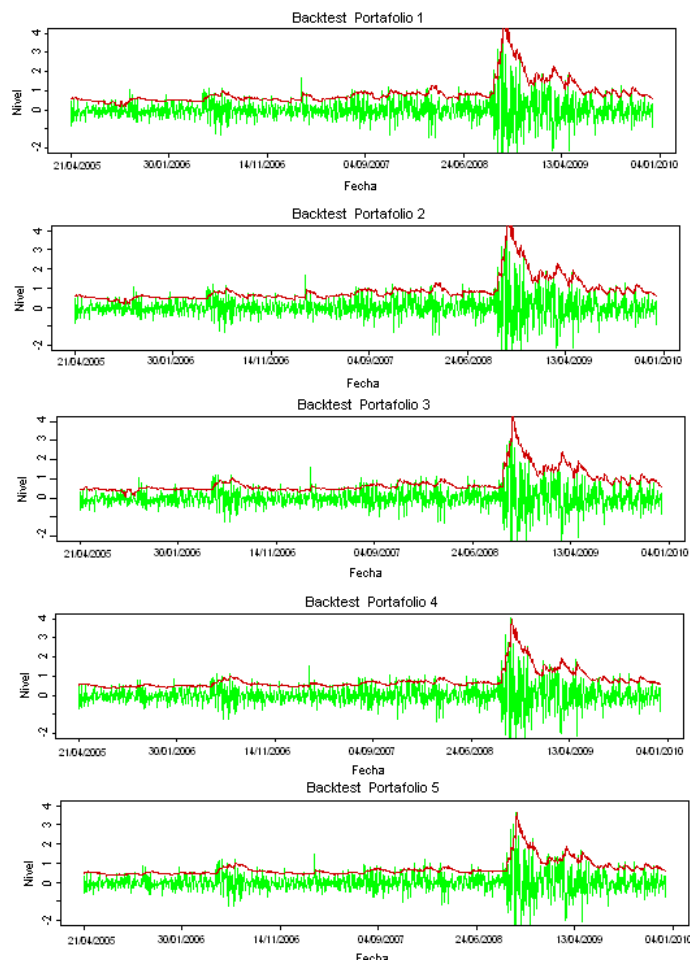


Figura 4.82: Backtest de VaR con regla de construcción de colas al 31 de Dic de 2009

de forma excesiva el nivel del VaR.

En efecto, para el periodo de 2009, se observan niveles de VaR más elevados, sin embargo los niveles de VaR se adecuán bastante bien a los log-rendimientos efectivamente observados. Por lo tanto no se corre el riesgo de tener niveles de VaR excesivos después de un periodo de crisis con el VaR con TVE. Además el nivel de VaR mantiene un buen seguimiento de los log-rendimientos observados, esto se debe a la estimación de la volatilidad realizada con el proceso GARCH. Entonces, si bien el estimador de la cola puede elevarse por contemplar las observaciones extremas de la crisis, la estimación de la volatilidad corrige la magnitud del nivel de VaR.

De igual forma, cuando la volatilidad observada se incrementa, la volatilidad estimada también lo hace, y como el estimador de la cola contempla observaciones extremas del periodo de crisis, el nivel de VaR se eleva considerablemente. Por lo tanto, la reacción del nivel de VaR ante aumentos en la volatilidad observada es mucho mayor y presenta menos excesos que en los periodos de alta volatilidad donde la cola no contiene observaciones extremas tan elevadas. Entonces resulta favorable que las colas contengan observaciones extremas tan elevadas para periodos de volatilidad, pero también representan una elevación innecesaria del nivel de VaR cuando la volatilidad de mercado es estable.

Capítulo 5

Conclusiones

La intención principal de este trabajo era mostrar que el VaR es una medida con la capacidad de generar estimaciones para posibles pérdidas suficientemente cercanas a las pérdidas ocurridas, sin que la estimación sea excedida con cierto grado de confianza. Para ello se generó el cálculo del VaR para un periodo que incluía la crisis de 2008.

Después de la crisis ocurrida en 2008 muchos inversionistas responsabilizaron a la medida de VaR por las consecuencias catastróficas que los movimientos de mercado, observados durante esta crisis, tuvieron para múltiples instituciones. Por ello se realizó el cálculo de VaR bajo distintas metodologías, con la intención de probar que el error en la estimación de pérdidas no recaía en la definición misma del VaR, sino en los supuestos que se tomaban para el cálculo de la medida.

Los resultados muestran claramente que si se calcula el VaR realizando el ajuste de una distribución a la cola de la serie de log-rendimientos de cada instrumento, siguiendo para este propósito la Teoría de Valores Extremos, se obtienen estimaciones de pérdidas más precisas que asumiendo que los log-rendimientos de todos los instrumentos tienen una distribución Normal. Esto permitiría a una institución tomar medidas precautorias que resultasen más eficientes para que, en caso de ocurrir las pérdidas estimadas, pueda hacer frente a las mismas.

Esta mejoría en la estimación se traduce en una frecuencia de excesos al VaR más reducida. En este sentido también se identificó que resultan aún más precisas las estima-

ciones generadas por una distribución ajustada a las colas bajo el método de Máximos a un Umbral y el ajuste de la Distribución Generalizada de Pareto, que las obtenidas por el método de Máximos por Bloque y el ajuste de la Distribución Generalizada de Valores Extremos.

Sin embargo, también es de importancia resaltar que, si bien el VaR calculado bajo los supuestos de la Teoría de Valores Extremos produce estimaciones de posibles pérdidas suficientemente altas para no ser excedidas en épocas de crisis y en específico para la crisis de 2008, el nivel de VaR no es suficiente durante el inicio de la crisis y es excedido en múltiples fechas.

Es cierto que en los ciclos de mercado es común que después de un periodo de ganancias sostenidas se presenta un periodo de pérdidas, el cuál responde generalmente a reajustes de precios que estaban sobre estimados, a excesos de flujos de capitales que registra una empresa que participa en bolsa y sobredemanda de los instrumentos financieros, o simplemente a que los negocios destinados de los fondos percibidos en bolsas han dado sus frutos. Sin embargo, las pérdidas generadas por estas reducciones en precios no son, por mucho, tan abruptas como las registradas durante la crisis de 2008.

En este trabajo se explicó la cadena de sucesos que culminaron con la Crisis Subprime. Así mismo se expusieron algunos de los factores que rodearon diversas crisis financieras a lo largo de la historia. El factor común en todas ellas son las decisiones que tomaron los participantes de mercado. Algunas de ellas podrían ser catalogadas como negligentes, otras simplemente son decisiones erróneas. Sin embargo, que las consecuencias de estas decisiones continúen y en ocasiones se globalicen es debido a la falta de información.

Por lo tanto, la conclusión en este trabajo es que la insuficiencia mostrada por el VaR calculado con los supuestos de la Teoría de Valores Extremos frente la crisis de 2008 se debe a que las pérdidas registradas durante la crisis Subprime no son observaciones propias de la serie, al menos inicialmente, pues cuando la frecuencia de este tipo de observaciones aumenta, son incluidas en la construcción de la cola de los log-rendimientos y el nivel de VaR aumenta.

Ahora que ya se cuenta con la información registrada en 2008, un modelo de VaR que contenga esa información, podría generar estimaciones suficientes ante escenarios de

mercado similares a los de 2008, sin embargo, fallaría en escenarios de pérdidas aún más severas.

A este respecto se modificó la metodología del modelo de Máximos a un Umbral, reduciendo la información empleada para la construcción de las colas lo cual mejoró la convergencia de la distribución ajustada en la parte final de la cola, lo que aumentó el nivel de VaR y redujo la frecuencia de excesos. Concluimos, entonces, que es posible generar una medida de VaR cuya frecuencia de excesos sea mucho más cercana a la frecuencia esperada de acuerdo al nivel de confianza que se le asigne, incluso en épocas de crisis.

Sin embargo, surge una pregunta importante. Si la intención de tener una medida que genere buenas estimaciones de pérdidas es que una institución tenga los recursos suficientes para afrontar sus responsabilidades en caso de materializarse las pérdidas estimadas ¿Cuál es la utilidad de una medida que pasa de indicar posibles pérdidas del 1% al 3%? (Siendo este cambio producido por los movimientos de mercado). ¿Tiene una institución la capacidad de aumentar sus reservas en un 2% en 1 día, o una semana?

Si este conflicto fuera solucionado manteniendo reservas al 3% de los recursos invertidos, ¿Cuál sería el costo de oportunidad para el inversionista?

A partir de la crisis de 2008 comenzó un proceso de reajustes a la regulación de los participantes de mercado, básicamente se migraba a una regulación más estricta y con mayor revelación de información, sobre todo de aquellas instituciones que invierten recursos no propios, como los fondos de inversión, bancos y fondos de pensiones. Dentro de las modificaciones se incluían ya no sólo mantener en reserva un porcentaje del capital invertido, sino mantener un cierto nivel de exposición al riesgo, medido a través de metodologías de VaR, obligando al administrador del fondo mantener el nivel de VaR de su portafolio debajo del nivel establecido.

Las metodologías más populares para regular el riesgo de un portafolio son la Paramétrica Normal y la Histórica, esto debido a su sencillez de cálculo. Dadas las nuevas dinámicas de los factores de riesgo en mercado y ya que la metodología de Valores Extremos resulta más eficiente podría ser empleada con fines regulatorios, pues si bien el costo de cálculo es mayor, no representaría un problema sin solución, menos aun con las tecnologías y modelos actuales.

Un punto que sí podría representar un problema son los niveles más elevados de VaR que genera la metodología de Valores Extremos, pues ya que el administrador está obligado a mantener un VaR de portafolio menor a un VaR de referencia, si el VaR de portafolio llega a exceder el VaR de referencia, el administrador deberá rebalancear la cartera, vendiendo activos anticipadamente, y materializando pérdidas que podrían ser únicamente por valuación. Cuando este fenómeno se presenta repetidamente y de forma generalizada en un gremio, los movimientos conjuntos de todas las instituciones del gremio pueden llegar a afectar la volatilidad del mercado y provocar un aumento en el VaR de portafolio, creando así un ciclo de excesos del VaR de portafolio al VaR de referencia.

Para evitar estos ciclos, los reguladores suelen relajar el nivel de confianza de la medida de VaR regulatoria cuando los niveles de VaR aumentan debido a la volatilidad de mercado y no al aumento de exposición al riesgo.

Entonces el VaR de Valores Extremos podría emplearse como metodología regulatoria, aplicando medidas parecidas a la modificación que se realizó en este trabajo, pero en sentido opuesto. Podría aumentarse las observaciones para la construcción de colas o reducir el nivel de confianza de la medida para reducir el nivel de VaR y evitar ciclos como el descrito. Al mismo tiempo podría emplearse como medida precautoria respecto a posibles pérdidas, aplicando las modificaciones para aumentar el nivel de VaR.

Recientemente la administración de riesgos financieros ha comenzado a reevaluar sus carteras replicando las condiciones de mercado que se presentaron durante algunas de las peores crisis históricas a fin de conocer las pérdidas que pudiesen registrar si actualmente esas condiciones de mercado se repitieran. Algunos reguladores proponen que los administradores deben calcular las pérdidas en caso de recrearse alguna de las crisis ocurridas, no sólo para su conocimiento sino también como un límite de riesgo, el cual debe ser minimizado en la medida de lo posible. Esta minimización recae en la reducción de la exposición al riesgo de un portafolio.

También podría emplearse el VaR con Valores Extremos, para generación de escenarios de crisis, incluyendo en todo momento las mayores pérdidas registradas en 2008, o construyendo las colas con las m mayores pérdidas en los últimos n años y calculando el VaR a un $(1 - \alpha)\%$ de confianza. Así tendríamos una estimación de posibles pérdidas

considerando siempre los peores escenarios históricos, de forma que cuando la volatilidad de mercado comience a elevarse, las pérdidas estimadas por el VaR serán mayores, comparables a las peores pérdidas registradas.

Este modelo de VaR considerando pérdidas históricas en todo momento para la construcción de colas podría ajustarse a la metodología de VaR Monte Carlo, modelando las colas de factores de Riesgos con el método de Máximos a un Umbral considerando los movimientos extremos históricos. Esta construcción no sería en lo absoluto trivial, pues se requeriría construir una matriz de Varianza y Covarianzas para la distribución conjunta de las distribuciones Generalizadas de Pareto que se ajusten a cada factor de riesgo.

Sin embargo, este tipo de medidas tienen costos de oportunidad para las instituciones financieras, pues no es cierto que todo participante de mercado esté en riesgo de incurrir en pérdidas comparables a las pérdidas de la crisis Subprime en todo periodo de mercado. Así mismo el riesgo en el mercado, traducido como volatilidad, tampoco es siempre el mismo.

Por otro lado, suponiendo que las instituciones hubiesen mantenido reservas para afrontar pérdidas a niveles de las ocurridas en la crisis de 2001 evidentemente habrían resultado insuficientes durante la crisis de 2008. Ahora se cuenta con las observaciones de la crisis de 2008 y se pueden generar modelos que prevean pérdidas de esas magnitudes, sin embargo, si llegase a ocurrir una crisis en la cual se produzcan pérdidas mucho más severas que las observadas durante 2008, los modelos no serán capaces de estimar estas nuevas pérdidas.

Resulta evidente que las grandes pérdidas en mercados no responden a modelos deficientes de estimaciones de pérdidas, ni a modelos deficientes del comportamiento de los instrumentos financieros, pues toda la información que podamos incluir en nuestro modelo es información histórica. Por lo tanto podemos concluir que las grandes crisis se presentan debido a las decisiones de los participantes del mercado. Si se quiere evitar grandes pérdidas y caídas de mercado, debemos prestar atención a los movimientos de los participantes y propiciar la transparencia de la información, así como la calidad de la misma.

Se guía a los participantes de mercado a mantener inversiones poco agresivas, lo cual puede ser una buena estrategia, sin embargo, resultaría más efectivo impulsar a los

participantes de mercado a conocer de forma amplia, profunda y precisa los riesgos que está tomando con cada inversión que realiza, más aun con la sofisticación actual de algunos instrumentos financieros, impulsar modelos de inversión basados en la evaluación de riesgos y no sólo en la medición de rendimientos, así como tampoco basados en la medición de pérdidas.

Bibliografía

- [1] Embrechts Paul, Klüppelberg Claudia, Mikosch Thomas; “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”; Springer-Verlag, 4ta Ed. (E.U.A. 1997).
- [2] Jorion Philippe; “Value at Risk”; McGraw-Hill, 3ra Ed. (E.U.A.1999).
- [3] Banxico; “Definiciones Básicas de Riesgos”; (México 2005)
- [4] Amigo Dobaño Lucy; “Modelos ARCH: un análisis de series temporales financiera”; Universidad de Valladolid (España 1999).
- [5] Senra Israele, Pena Bernardo; “Predicción de la volatilidad de los rendimientos del índice general de la bolsa de Madrid: El papel de las asimetría”; Universidad de Alcalá (España 2004).
- [6] García María del Carmen, Calvo Martín, Meri Emilia; “Estimación de Modelos de Volatilidad Estocástica en Series de Rendimientos Bursátiles”; Universidad Complutense de Madrid (España 2006).
- [7] Singh Abhay, Allen David, Powell Robert; “Value at Risk Estimation Using Extreme Value Theory”; Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand (Australia 2011).
- [8] Dekkers, A.L., De Haan L.; “On the estimation of extreme value index and large quantile estimation”; The Annals of statistics vol.17, no. 4, IMS (E.U.A. 1989).
- [9] Smith, R.; “Measuring risk with Extreme Value Theory”; Universidad de Carolina del Norte (E.U.A. 1999).

- [10] Markowitz, H.; “Portfolio Selection”; Journal of Finance (E.U.A.1952).
- [11] Smith,R.; “Maximum likelihood estimation in a class of non regular cases”; Biometrika, vol. 72, no.1(Inglaterra 1985).
- [12] Tsay, Ruey; “Extreme Value Theory and Their Applications in Finance”; Universidad de Chicago, Universidad de Singapur (E.U.A., Singapur 2012).
- [13] McNeil Alexander, Frey Rüdiger; “Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series”; Journal of Empirical Finance (E.U.A.1999).
- [14] McNeil Alexander; “Extreme Value Theory for Risk Managers”; ETH Zentrum (Suiza 1999).
- [15] McNeil Alexander; “Calculating Quantile Risk Measures for Financial Returns Series using Extreme Value Theory”; ETH Zentrum (Suiza 1998).
- [16] Sanchez Joaquín; “Introducción a la Teoría de Valores Extremos”; CIMAT(México 2008).
- [17] Delfiner Miguel, Gutiérrez Matías; “Aplicación de la Teoría de Valores Extremos al Gerenciamiento de Riesgos”; Banco Central de la República Argentina (Argentina 2002).
- [18] Brodin Erik, Klüppelberg Claudia; “Extreme Value Theory in Finance”; Universidad tecnológica de Múnich (Alemania 2008).
- [19] Meerschaert Mark; “Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance”; Elsevier Science, 1ra Ed. (Holanda 2003).
- [20] Davis Richards, Resnick Sidney; “Tail Estimates By Extreme Value Theory”; America Statistical Association (E.U.A.1984).
- [21] Këllezzi Evis, Gilli Manfred; “Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures”; FAME (Genova 2000).

- [22] Levine Damon; “Modeling Tail Behavior with Extrem Value Theory”; SoA (E.U.A. 2009).
- [23] Álvarez Adrian, Rossignolo Adrián; “Teoría de Valores Extremos (EVT) y Grandes Crisis Financieras; Mercados Emergentes VS. Desarrollados”; Universidad de San Andrés (Argentina 2010).
- [24] López Edna; “Valor en Riesgo del peso mexicano y otras divisas latinoamericanas ante eventos de crisis utilizando Teoría de Valores Extremos”. UNAM (México 2013).
- [25] Reinhart Carmen, Rogoff Kenneth; “Sub-Prime Financial Crisis so different? An international Crisis Comparison”; National Bureau of Economic Research, Paper No. 13761 (E.U.A. 2008).
- [26] Taylor John; “The Financial Crisis and the Policy Responses: An Empirical Analysis of What Went Wrong”; National Bureau of Economic Research, Paper No. 14631 (E.U.A. 2009).
- [27] Stiglitz Joseph; “Jugar con el Planeta”; El país; (2011)
- [28] Paul Krugman; “On the Asian Crisis: Critical perspectives”; (1997).
- [29] Taleb Nassim; “Black Swan: The impact of the highly improbable”; Random House, 3ra Ed.(E.U.A. 2007).
- [30] Lusting Nora; “México y la crisis del peso: lo previsible y la sorpresa”; Revista de Comercio Exterior vol.45, no.5(México 1998).
- [31] Demyanyk Yuliya; “Understanding the Subprime Mortgage Crisis”; Review of Financial Studies vol.24, no.6 (E.U.A. 2011)
- [32] Minsburg Naúm; “Transnacionalización, crisis y el papel del FMI y el Banco Mundial”; Tiempos violentos. Neoliberalismo, globalización y desigualdad en América Latina (Argentina 1999)
- [33] Stiglitz Joseph; “El malestar en la globalización”; Taurus, 1ra Ed. (España 2003)

- [34] Vives Xavier; “La crisis Financiera y la regulación”; Occasional Paper 179 (España 2010)
- [35] Freixar Xavier; “Fundamentación teórica de la regulación de los mercados Financieros”; Moneda y Crédito No.190 (España 1990)
- [36] Betancor Andrés; “Crisis Financiera ¿Más Regulación o Mejor Regulación? ”; Tecnos (España 2010)
- [37] CONSAR; “Disposiciones de carácter general que establecen el régimen de inversión al que deberán sujetarse las sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro”; (México 2011)
- [38] CNBV; “Disposiciones de carácter general aplicables a las casas de bolsa e instituciones de crédito en materia de servicios de inversión”.
- [39] CNBV; “Disposiciones de carácter general aplicables a las sociedades de inversión y a las personas que les prestan servicios (Circular Única de Sociedades de Inversión)”.