UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

BLOQUES PEQUEÑOS DE WHITNEY

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
MARÍA ELENA AGUILERA MIRANDA

DIRECTOR:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
DR. MAX NEUMANN COTO

MÉXICO, D.F., MARZO 2013

A mi hija
Gretel.

Agradecimientos

Gracias a mi mamá por su apoyo incondicional.

La mayoría de las figuras las realizó Julio César Aguilar Cabrera. El resto de las figuras él me enseñó a hacerlas. Gracias Julio.

Por su paciencia y sus enseñanzas, gracias a mi asesor Alejandro Illanes.

Las observaciones que los sinodales hicieron a esta tesis fueron muy valiosas, gracias.

Índice general

Introducción

Para una mejor lectura de esta tesis sugerimos tener en cuenta el libro [12]. Hacemos referencia a varios de los resultados y ejercicios que aparecen ahí. Comenzaremos recordando algunas definiciones y resultados básicos que usamos en el desarrollo de este tema. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X, definimos el *hiperespacio de subcontinuos* como: $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es conexo, cerrado y no vacío}\}$. El *hiperespacio de los singulares* lo definimos como: $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Es conocido en la Teoría de Hiperespacios que $C(X)$ es un continuo. Una prueba de esto se puede encontrar en el Corolario 6.13 de [12].

Desde el punto de vista topológico, una de las problemáticas más interesantes en esta área, es la de determinar qué propiedades topológicas le hereda X al hiperespacio $C(X)$ y viceversa. Este tema ha sido estudiado en la literatura especializada y muchos de estos resultados se pueden encontrar en los libros [13] y [23].

Ha habido interés por abordar una problemática similar, pero considerando no todo el hiperespacio $C(X)$ sino solamente algunos subconjuntos de $C(X)$. Recientemente se han estudiado algunas vecindades, en $C(X)$, de su subconjunto $F_1(X)$ (el cual es isométrico a X). El trabajo pionero en esta dirección es el artículo [18] y aún queda mucho por hacer. Veamos una descripción de este trabajo.

Dados un continuo X con métrica d y $\varepsilon \geq 0$, definimos el *hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño* como: $C_{d,\epsilon}(X) = \{A \in C(X) : \text{diám}(A) \leq \epsilon\}$, donde $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Más adelante, en el Teorema 7.0.10, probamos que $C_{d,\epsilon}(X)$ es un continuo.

En el artículo [18] se enfocan en las propiedades de conexidad de los hiperespacios $C_{d,\epsilon}(X)$. También en ese mismo artículo, se estudian las propiedades topológicas que hereda X al hiperespacio $C_{d,\epsilon}(X)$ y viceversa.

Se ha mostrado que el hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño puede depender demasiado de la métrica d. Por ejemplo, E. L. McDowell probó que existen, un continuo X localmente conexo, $\epsilon > 0$ y una métrica d tales que $C_{d,\epsilon}(X)$ no es localmente conexo y que el mismo X, para otra métrica D tiene la propiedad de que $C_{D,\epsilon}(X)$ es localmente conexo, ver [20]. E. L. McDowell y B. E. Wilder mostraron que si X es un triodo simple, entonces existen dos métricas d y D tales que para números ϵ pequeños, $C_{d,\epsilon}(X)$ no es homeomorfo a $C_{D,\epsilon}(X)$, ver [19].

Desde el punto de vista topológico esta dependencia de las métricas nos parece inadecuada y hemos buscado unos subconjuntos del hiperespacio $C(X)$ que no presenten esta anomalía. Como veremos más adelante, con los bloques de Whitney (ver Definición 3.0.20), la situación es más estable y es independiente de la métrica que se le dé a X.

Ahora veamos una función que no depende de la métrica, para introducir un hiperespacio similar al hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño y con el que trabajaremos en lo que resta del tema. Una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una *función de Whitney para* $C(X)$ si satisface las siguientes propiedades: (a) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$, (b) $\mu(A) < \mu(B)$ para cada $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$ y (c) $\mu(X) = 1$. Un resultado conocido es que, dado un continuo X, existen funciones de Whitney para $C(X)$. Estas funciones han sido muy útiles en el estudio de los hiperespacios. Los libros [13] y [23] ilustran muy bien el uso de ellas.

A continuación presentamos la definición del hiperespacio con la que trabajamos a lo largo del desarrollo de este tema. Un *bloque de Whitney* de $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}([0,t])$, donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1]$. En el Lema 3.0.22, probamos que cada bloque de Whitney es un continuo.

Los problemas que principalmente estudiamos, dada una propiedad topológica P, son los siguientes.

Problema 0.0.1. ¿Si X tiene la propiedad P, entonces los bloques de Whitney tienen la propiedad P?

Problema 0.0.2. ¿Si los bloques de Whitney tienen la propiedad P, entonces X tiene la misma propiedad P?

Para plantear en forma precisa lo que significan los Problemas 0.0.1 y 0.0.2, en el Capítulo 3 introducimos las definiciones de *propiedades topológicas inducidas*, Definición 3.2.1, y damos respuesta a estas preguntas para algunas propiedades topológicas.

Es natural hacer el estudio de los bloques de Whitney para el caso de un arco o de una curva cerrada simple. Como resultado obtuvimos una caracterización de éstos, la cual presentamos en el Capítulo 4. En esta misma sección hacemos un análisis más general de las gráficas finitas, este puede resumirse de la siguiente manera: si todos los bloques de Whitney son homeomorfos entre sí, entonces se trata de un n-odo o de una curva cerrada simple. Como se ve en los Teoremas 4.1.2 y 4.1.4, los bloques de Whitney de un arco son homeomorfos entre sí y lo mismo pasa para una curva cerrada simple. Conjeturamos que los bloques de Whitney para un n-odo, con $n \geq 3$, también son homeomorfos entre sí.

Como vemos en los Teoremas 4.1.2 y 4.1.4, para el caso en que X sea un arco o una curva cerrada simple, los bloques de Whitney para $C(X)$ son homeomorfos a $X \times [0, 1]$. A partir de aquí nos podemos preguntar bajo qué condiciones los bloques de Whitney para $C(X)$ no son homeomorfos a $X \times [0, 1]$. Respondemos parcialmente a esta pregunta en el Capítulo 5.

Nos podemos preguntar qué pasa con los bloques de Whitney para $C(X)$, cuando X es tipo arco o tipo circunferencia (ver Definiciones 6.1.1 y 6.2.1), pensando en los Teoremas 4.1.2 y 4.1.4, podemos conjeturar que los bloques serán tipo $[0, 1] \times [0, 1]$ o tipo $S \times [0, 1]$ (ver Definiciones 6.1.1 y 6.2.1). Esto lo probamos en el Capítulo 6.

Se dice que un continuo X es: (a) *cíclicamente conexo* si cualesquiera dos puntos distintos del continuo están contenidos en una curva cerrada simple y (b) *cerrado numerable aposindético* si para cada subconjunto Z cerrado y numerable de X y cada $p \in X \setminus Z$, existe un continuo M que contiene a p

en su interior y tal que $M \cap Z = \emptyset$.

Regresando a los hiperespacios de diámetro pequeño, las siguientes preguntas fueron hechas por E. L. McDowell y B. E. Wilder:

(a) ¿$C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ será conexo cuando $\mathcal{Z}$ es cero dimensional? (Pregunta 3.10 de [18].)
(b) ¿Si X es un continuo localmente conexo, entonces $C_\varepsilon(X)$ será cíclicamente conexo para cada $\varepsilon > 0$? (Pregunta 2 de [20].)
(c) ¿Para cuáles continuos X, será cierto que $C_\varepsilon(X)$ es cerrado numerable aposindético para cada $\varepsilon > 0$? (Pregunta 3.3 de [18].)
(d) ¿Serán localmente conexos los hiperespacios de los continuos de diámetro pequeño de un continuo hereditariamente localmente conexo? (Pregunta 1 de [20].)

Se estudiaron la preguntas (a)-(c), en colaboración con A. Illanes, y damos respuestas a éstas en el Capítulo 7, ver también [1]. La pregunta (d) queda aún sin resolver.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Primero daremos algunas definiciones para después enfocarnos en resultados básicos que utilizaremos a lo largo de la tesis. La mayor parte de los resultados que presentamos en esta sección vienen como ejercicios en [12].

Si A es un subespacio de un espacio topológico Z, entonces $\mathrm{cl}_Z(A)$, $\mathrm{fr}_Z(A)$, $\mathrm{int}_Z(A)$ y $\mathrm{ext}_Z(A)$ denotan la *cerradura* de A en Z, la *frontera* de A en Z, el *interior* de A en Z y el *exterior* de A en Z, respectivamente. Cuando no haya confusión en el espacio topológico Z, los denotaremos simplemente como $\mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{fr}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{ext}(A)$, respectivamente.

Definición 1.0.3. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

A lo largo de este escrito, la letra X denotará un continuo no degenerado con métrica d, tal que $d(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X$.

Definición 1.0.4. El *hiperespacio de cerrados* de X, se define como:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

El *hiperespacio de subcontinuos* de X, se define como:

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Se define *el hiperesacio de singulares* de X como:

$$F_1(X) = \{\{x\} \in 2^X : x \in X\}.$$

Definición 1.0.5. Dados un número $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, se definen:

$$B_d(\varepsilon, x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \text{ y}$$

$$N(\varepsilon, A) = \{p \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x, p) < \varepsilon\}.$$

Estos conjuntos se llaman, respectivamente, *la bola de radio ε centrada en x* y la *nube de radio ε centrada en A*. Notemos que $N(\varepsilon, A)$ es un abierto en X, para cada $\varepsilon > 0$ y toda $A \in 2^X$.

Definición 1.0.6. Dado un subconjunto no vacío A de X, el *diámetro* de A es denotado por diám(A) y está definido por:

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}.$$

Definición 1.0.7. (*Métrica de Hausdorff*) Dados $A, B \in 2^X$, se define:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}.$$

En la Proposición 2.1 de [12] se verifica que H es métrica.

Definición 1.0.8. Dados un subconjunto no vacío C de X y un punto $p \in X$, se define la *distancia de p a C* como:

$$d(p, C) = \text{ínf}\{d(p, c) : c \in C\}.$$

Proposición 1.0.9. *Sean U un subconjunto abierto y no vacío de X y $A \in 2^X$ tales que $A \subset U$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$.*

Demostración. Si $U = X$, cualquier $\delta > 0$ sirve. Supongamos entonces que $U \neq X$. Sea

$$\delta = \text{ínf}\{d(a, x) : a \in A, x \in X \setminus U\}.$$

Supongamos que $\delta = 0$. Como d es una función continua y $A \times (X \setminus U)$ es un cerrado en $X \times X$, $A \times (X \setminus U)$ es compacto y no vacío, así que existe un elemento $(a, x) \in A \times (X \setminus U)$ tal que $d(a, x) = 0$, por lo tanto $a = x$, lo cual es una contradicción, ya que A y $X \setminus U$ son ajenos. De este modo hemos verificado que $\delta > 0$. A continuación probaremos que $N(\delta, A) \subset U$. Consideremos un punto $x \in N(\delta, A)$. Entonces existe un elemento $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta$. Si suponemos que $x \notin U$ tendríamos, por la definición de δ, que $\delta \leq d(a, x)$, lo cual nos lleva a una contradicción. Así obtenemos que $x \in U$ y, por tanto, $N(\delta, A) \subset U$. ■

Proposición 1.0.10. *Sean A y B elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Consideremos al conjunto:

$$\mathcal{E}(A,B) = \{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}.$$

($\Rightarrow$) Como $H(A,B) < \varepsilon$, $\inf \mathcal{E}(A,B) < \varepsilon$. Sea $\delta \in \mathcal{E}(A,B)$ tal que $\inf \mathcal{E}(A,B) \leq \delta < \varepsilon$. Por definición, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Como $\delta < \varepsilon$, sabemos que $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Por tanto, $A \subset N(\varepsilon, B)$. De manera análoga se obtiene que $B \subset N(\varepsilon, A)$.

($\Leftarrow$) Probaremos que existe $\rho \in (0, \varepsilon)$ tal que $A \subset N(\rho, B)$ y $B \subset N(\rho, A)$. Primero veamos que el conjunto $\{N(\delta, B) : \delta \in (0, \varepsilon)\}$ es una cubierta abierta de A. Para esto consideremos un elemento $a \in A$. Tenemos que $A \subset N(\varepsilon, B)$, lo cual implica que existe un elemento $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Tomemos $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $d(a,b) < \delta$. Esto nos dice que $a \in N(\delta, B)$. Con esto tenemos que $A \subset \{N(\delta, B) : \delta \in (0, \varepsilon)\}$. Como A es compacto, podemos obtener una subcubierta finita $\{N(\delta_i, B) : \delta_i \in (0, \varepsilon), i \in \{1, 2, \ldots, n\})\}$ de A. Sea $\delta_0 = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Entonces $A \subset N(\delta_0, B)$.

De manera similar, existe $\eta \in (0, \varepsilon)$ tal que $B \subset N(\eta, A)$. Entonces el número $\rho = \max\{\delta_0, \eta\}$ satisface que $\rho \in (0, \varepsilon)$ y que $A \subset N(\rho, B)$ y $B \subset N(\rho, A)$, así que $\rho \in \mathcal{E}(A,B)$. Por tanto, $H(A,B) \leq \rho < \epsilon$. ■

1.1. Subconjuntos y sucesiones de 2^X

Proposición 1.1.1. *Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Entonces el conjunto definido por:*

$$\mathcal{C}(U) = \{B \in 2^X : B \subset U\}$$

es un abierto de 2^X.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{C}(U)$. Por definición, $B \subset U$. Por la Proposición 1.0.9, existe un número $\delta > 0$ tal que $N(\delta, B) \subset U$. A continuación mostraremos que $B_H(\delta, B) \subset \mathcal{C}(U)$. Consideremos un elemento $C \in B_H(\delta, B)$. Como $H(C,B) < \delta$, por la Proposición 1.0.10, $C \subset N(\delta, B) \subset U$. De esta manera resulta que $C \in \mathcal{C}(U)$. Con esto hemos visto que, dado un elemento $B \in \mathcal{C}(U)$, existe el abierto $B_H(\delta, B)$ de 2^X que está contenido en $\mathcal{C}(U)$, así que $\mathcal{C}(U)$ es un abierto de 2^X. ■

Proposición 1.1.2. *Sea $E \in 2^X$. Entonces el conjunto definido por:*

$$\mathcal{D}(E) = \{B \in 2^X : B \cap E \neq \emptyset\}$$

es un cerrado de 2^X.

Demostración. Si $E = X$, entonces $\mathcal{D}(E) = 2^X$, el cual es cerrdo en 2^X. Supongamos que $E \neq X$. Como E es un cerrado de X, $X \setminus E$ es un abierto no vacío de X. Aplicando la Proposición 1.1.1, obtenemos que $\mathcal{C}(X \setminus E)$ es un abierto de 2^X, de modo que $2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus E)$ es un cerrado de 2^X. Notemos que

$$\mathcal{C}(X \setminus E) = \{A \in 2^X : A \subset X \setminus E\}$$

$$= \{A \in 2^X : A \cap E = \emptyset\} = 2^X \setminus \{A \in 2^X : A \cap E \neq \emptyset\} = 2^X \setminus \mathcal{D}(E).$$

Lo cual nos dice que $\mathcal{D}(E) = 2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus E)$ es un cerrado de 2^X. Esto concluye la demostración. ■

Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de 2^X y $A \in 2^X$, decimos que $\lim A_n = A$ si la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, con respecto a la métrica de Hausdorff H.

Proposición 1.1.3. *Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de elementos de 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A, B \in 2^X$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;

(b) $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$;

(c) si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración. (a) Dado $m \in \mathbb{N}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y $H(B, B_n) < \frac{1}{2^{m+1}}$ para todo $n \geq N_m$. Utilizando la Proposición 1.0.10, tenemos que $A \subset N(\frac{1}{2^{m+1}}, A_{N_m})$ y $B_{N_m} \subset N(\frac{1}{2^{m+1}}, B)$. Por hipótesis, $A_{N_m} \subset B_{N_m}$. Esto nos lleva a que $A_{N_m} \subset N(\frac{1}{2^{m+1}}, B)$.

Consideremos un elemento $a \in A$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, existen elementos $x \in A_{N_m}$ y $b_m \in B$ tales que $d(x, a) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y $d(x, b_m) < \frac{1}{2^{m+1}}$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos que $d(a, b_m) < \frac{1}{2^m}$. De esta manera tenemos la sucesión, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de B, así formada, converge al elemento a. Como B es cerrado concluimos que $a \in B$, así que $A \subset B$, lo que queríamos probar.

(b) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon$ y $H(B, B_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Sea $n \geq N$. Por la Proposición 1.0.10, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $B \subset N(\varepsilon, B_n)$. Por tanto, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n) \cup N(\varepsilon, B_n) = N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$. De manera similar, se obtiene que $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$. Usando nuevamente la Proposición 1.0.10, se tiene que $H(A \cup B, A_n \cup B_n) < \varepsilon$. Con esto hemos probado que $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Supongamos, por el contrario, que $A \cap B = \emptyset$. Como X es normal, existen dos abiertos ajenos de X, U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por la Proposición 1.0.9, también existe un número $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$ y $N(\delta, B) \subset V$. Por la convergencia de las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \delta$ y $H(B, B_n) < \delta$ para cada $n \geq N$. Por la Propocisión 1.0.10, $A_n \subset N(\delta, A)$ y $B_n \subset N(\delta, B)$ para cada $n \geq N$. Por tanto $A_n \cap B_n \subset N(\delta, A) \cap N(\delta, B) \subset U \cap V = \emptyset$ para cada $n \geq N$. Lo cual nos lleva a una contradicción ya que, por hipótesis, $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esta contradicción nació del hecho de suponer que $A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Corolario 1.1.4. *Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X tal que $\lim B_n = B$, donde $B \in 2^X$. Si $A \in 2^X$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) si $A \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;

(b) $\lim(A \cup B_n) = A \cup B$*;*

(c) si $A \cap B_n \neq \emptyset$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $A \cap B \neq \emptyset$*;*

(d) si $B_n \subset A$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $B \subset A$*.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 1.1.3 a la sucesión constante $\{A\}_{n=1}^{\infty}$ y a la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Proposición 1.1.5. *Sea* F *un cerrado no vacío de* X*. Entonces el subconjunto:*

$$\mathcal{E}(F) = \{B \in 2^X : F \subset B\}$$

es un cerrado en 2^X*.*

Demostración. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{E}(F)$ que converge a un elemento $B \in 2^X$. Por la definición de $\mathcal{E}(F)$, tenemos $F \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 1.1.4 (a), $F \subset B$. De modo que $B \in \mathcal{E}(F)$. Por lo tanto $\mathcal{E}(F)$, es un cerrado en 2^X. ■

Proposición 1.1.6. *Sea* E *un cerrado no vacío de* X*. Entonces el subconjunto:*

$$\mathcal{C}(E) = \{B \in 2^X : B \subset E\}$$

es un cerrado en 2^X*.*

Demostración. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{C}(E)$ que converge a un elemento $B \in 2^X$. Entonces $B_n \subset E$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Corolario 1.1.4 (a), obtenemos que $B \subset E$. Así que $B \in \mathcal{C}(E)$, lo cual nos dice que $\mathcal{C}(E)$ es un subconjunto cerrado de 2^X. ■

Proposición 1.1.7. *Sea* U *un abierto no vacío de* X*. Entonces el subconjunto:*

$$\mathcal{D}(U) = \{B \in 2^X : B \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto en 2^X.

Demostración. La prueba es clara si $U = X$. Supongamos que $U \neq X$. Como U es un abierto de X, $X \setminus U$ es un cerrado no vacío de X. Aplicando la Proposición 1.1.6, obtenemos que $\mathcal{C}(X \setminus U)$ es un cerrado de 2^X. Notemos que

$$\mathcal{D}(U) = \{B \in 2^X : B \cap U \neq \emptyset\} = 2^X \setminus \{B \in 2^X : B \cap U = \emptyset\}$$

$$= 2^X \setminus \{B \in 2^X : B \subset X \setminus U\} = 2^X \setminus \mathcal{C}(X \setminus U).$$

Por tanto, $\mathcal{D}(U)$ es un abierto de 2^X. ■

Lema 1.1.8. *Sean $\mathcal{A}$ un subconjunto de 2^X y F un cerrado de X.*

(a) Si $A \cap F \neq \emptyset$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F)$.

(b) Si $F \subset A$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}(F)$.

(c) Si $A \subset F$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(F)$.

Demostración. (a) Notemos que

$$\mathcal{A} \subset \{B \in 2^X : A \cap F \neq \emptyset\} = \mathcal{D}(F).$$

Como F es un cerrado de X, la Proposición 1.1.2 nos dice que $\mathcal{D}(F)$ también es un cerrado. Por lo tanto $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F)$. De manera similar se prueban (b) y (c). ■

Proposición 1.1.9. *Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $A \in 2^X$ tales que $\lim A_n = A$. Entonces $a \in A$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim a_n = a$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) = d(a, A_n)$ (el cual existe porque d es una función continua y A_n es compacto). Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $H(A, A_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Dada $n \geq N$, como $a \in A$ y $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ (por la Proposición 1.0.10), existe $x \in A_n$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Entonces $d(a, a_n) = d(a, A_n) \leq d(a, x) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

Por tanto, $\lim a_n = a$.

($\Leftarrow$) Ahora consideremos una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\lim a_n = a$. Por hipótesis, la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $\lim A_n = A$. Como $\{a_n\} \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, utilizamos la Proposición 1.1.3 (a), para obtener que $\{a\} = \lim\{a_n\} \subset \lim A_n = A$, así que $a \in A$. ■

Lema 1.1.10. *Sea Z un subcontinuo de X. Si existe una sucesión de subcontinuos $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tales que $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$, entonces $C(Z) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$.*

Demostración. Veamos que $C(Z) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$. Consideremos $A \in C(Z)$ y $m \in \mathbb{N}$. Como $A \subset Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \subset Z_m$, $A \in C(Z_m)$. Como m es un número natural cualquiera, sucede que $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$. Con esto probamos que $C(Z) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$.

Verifiquemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n) \subset C(Z)$. Sea $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$, entonces $A \in C(Z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De manera que $A \subset Z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n = Z$, así que $A \in C(Z)$. De este modo, concluimos que $C(Z) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C(Z_n)$. ■

Lema 1.1.11. *Sean $\varepsilon > 0$, $A \in 2^X$ y $x \in X$. Entonces $A \in B_H(\varepsilon, \{x\})$ si y sólo si $A \subset B_d(\varepsilon, x)$.*

Demostración. Supongamos primero que $A \in B_H(\varepsilon, \{x\})$. Utilizando la Proposición 1.0.10, se obtiene inmediatamente que $A \subset N(\varepsilon, \{x\}) = B_d(\varepsilon, x)$. Supongamos ahora que $A \subset B_d(\varepsilon, x) = N(\varepsilon, \{x\})$. Consideremos un elemento $a_0 \in A$, entonces $d(a_0, x) < \varepsilon$. Lo cual nos dice que $\{x\} \subset N(\varepsilon, A)$. Utilizando nuevamente la Proposición 1.0.10, obtenemos que $H(A, \{x\}) < \varepsilon$. Con esto terminamos la prueba de nuestro lema. ■

1.2. Funciones en hiperespacios

Proposición 1.2.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Se define la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ como:*

$$2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

Entonces

(a) 2^f *está bien definida;*

(b) 2^f *es continua;*

(c) $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$*;*

(d) 2^f *es inyectiva si y sólo si* f *es inyectiva.*

Demostración. (a) Tenemos que X y Y son continuos métricos, de modo que X es compacto y Y es Hausdorff. Lo cual nos dice que f es una función cerrada y, por lo tanto, $f(A) \in 2^Y$.

(b) Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f, existe un número $\delta > 0$ tal que, si $a, b \in X$ son tales $d(a, b) < \delta$, entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$. Probaremos que $H(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Como $H(A, B) < \delta$, la Proposición 1.0.10 nos dice que $A \subset N(\delta, B)$. Fijemos $a \in A$. Entonces existe un elemento $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$. Lo cual implica que $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. De este modo hemos visto que $f(A) \subset N(\varepsilon, f(B))$. De manera similar, obtenemos que $f(B) \subset N(\varepsilon, f(A))$. Utilizando nuevamente la Proposición 1.0.10, resulta que $H(A, B) < \varepsilon$.

(c) Sea $A \in C(X)$. La parte (a) de esta misma proposición nos dice que $f(A)$ es un cerrado. Por la continuidad de f, $f(A)$ es un conexo, así que $f(A) \in C(Y)$.

(d) Supongamos que 2^f es inyectiva. Consideremos $a,\ b \in X$ tales que $f(a) = f(b)$. Esto nos dice que

$$2^f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = 2^f(\{b\}).$$

Como 2^f es inyectiva, $\{a\} = \{b\}$. De modo que $a = b$, lo cual nos dice que f es inyectiva.

Ahora supongamos que f es inyectiva. Tomemos $A,\ B \in 2^X$ tales que $2^f(A) = 2^f(B)$. Lo cual nos conduce a que $f(A) = f(B)$. Sea $a \in A$, entonces $f(a) \in f(A) = f(B)$. De manera que existe un elemento $b \in B$ tal que $f(a) = f(b)$. Como f es inyectiva, $a = b$. Así que $a \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$. De manera similar, se obtiene que $B \subset A$. Luego $A = B$, con lo que terminamos la prueba de que 2^f es inyectiva. ■

La restricción $2^f|_{C(X)} : C(X) \to C(Y)$ la denotaremos por $C(f)$.

Lema 1.2.2. *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre continuos, entonces $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo y $C(f^{-1}) = C(f)^{-1}$.*

Demostración. Como f es una función continua e inyectiva, podemos aplicar la Proposición 1.2.1, para obtener que $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es una función bien definida, continua e inyectiva. Observemos que

$$C(f^{-1})(A) = f^{-1}(A) = \{f^{-1}(a) : a \in A\}$$

es un continuo de X, para todo elemento $A \in C(Y)$, ya que $f^{-1} : Y \to X$ también es una función continua (entre continuos). Además (por la misma Proposición 1.2.1), $C(f^{-1}) : C(Y) \to C(X)$ es una función continua. Verifiquemos que $C(f^{-1}) = C(f)^{-1}$. Sea $A \in C(Y)$. Cabe destacar que

$$C(f)\big(C(f^{-1})(A)\big) = C(f)(\{f^{-1}(a) : a \in A\}) = \{f \circ f^{-1}(a) : a \in A\} = A.$$

Por tanto, $C(f)$ o $C(f^{-1})$ es la identidad en $C(Y)$. De manera análoga se tiene que $C(f^{-1}) \circ (C(f))^{-1} = id_{C(X)}$. Esto muestra que $(C(f))^{-1} = C(f^{-1})$. Así que $C(f)$ es una función continua e inyectiva con inversa continua, es decir, es un homeomorfismo. ■

Lema 1.2.3. *Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual D. Sean P y Q dos continuos de $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y una función continua $f : P \to Q$ tales que $D(x, f(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in P$. Si $A \in 2^P$, entonces $H(A, 2^f(A)) < \varepsilon$.*

Demostración. Como $D(a, f(a)) < \varepsilon$ para cada $a \in A$, es claro que $A \subset N(\varepsilon, 2^f(A))$ y $2^f(A) \subset N(\varepsilon, A)$. De modo que, la Proposición 1.0.10 nos dice que $H(A, 2^f(A)) < \varepsilon$. ■

Definición 1.2.4. Dos subconjuntos E y F de un espacio topológico Z están *mutuamente separados* si satisfacen que $\mathrm{cl}_Z(E) \cap F = \emptyset$ y $E \cap \mathrm{cl}_Z(F) = \emptyset$. Si $Y \subset Z$, escribimos $Y = E \mid F$ si E y F son conjuntos no vacíos, están mutuamente separados y $Y = E \cup F$. Diremos que E y F *forman una separación de Y*.

El Corolario 6.13 de [12] nos dice que 2^X es un continuo, así que 2^{2^X} es el hiperespacio de cerrados de 2^X. Utilizamos este hiperespacio en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.5. *Sea* $\cup : 2^{2^X} \to 2^X$ *la función definida por:*

$$\cup(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Denotemos a $\cup(\mathcal{A})$ *simplemente como* $\cup\mathcal{A}$. *Entonces:*

(a) $\cup$ *está bien definida.*

(b) $\cup$ *es continua. Más aún, dado un número* $\varepsilon > 0$, *si* $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$, *entonces* $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \varepsilon$. *En donde* $\mathcal{H}$ *denota la métrica de Hausdorff en* 2^{2^X}, *inducida por* H.

(c) *Si* $\mathcal{A}$ *es un subconjunto conexo de* 2^{2^X} *y* $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, *entonces* $\cup\mathcal{A}$ *es conexo.*

Demostración. (a) Verifiquemos que $\cup\mathcal{A}$ es un cerrado. Sea x un punto límite de $\cup\mathcal{A}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\cup\mathcal{A}$ tal que $x = \lim x_n$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es un compacto, existe una subsucesión convergente $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, supongamos que converge al elemento $A \in \mathcal{A}$. Aplicando la Proposición 1.1.3 a las sucesiones $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y teniendo en cuenta que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que $x \in A$. Como $A \in \mathcal{A}$, concluimos que $x \in \cup\mathcal{A}$, así que $\cup\mathcal{A}$ es un cerrado. Como $\mathcal{A}$ es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos, $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$. Así, obtenemos que $\cup\mathcal{A} \in 2^X$.

(b) Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$ tales que $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$. Probaremos que $\cup\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{B})$. Consideremos $a \in \cup\mathcal{A}$. Entonces existe un elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Como $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$, la Proposición 1.0.10 nos dice que $\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, \mathcal{B})$. Por tanto, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Utilizando nuevamente la Proposición 1.0.10, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, B)$. Entonces existe un elemento $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Como $B \subset \cup\mathcal{B}$ concluimos que $a \in B_d(\varepsilon, b) \subset N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{B})$. Con esto tenemos que $\cup\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{B})$. De manera similar se obtiene que $\cup\mathcal{B} \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{A})$. Por la

Proposición 1.0.10, concluimos que $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de la función $\cup$.

(c) Supongamos, por el contrario, que $\cup\mathcal{A}$ no es conexo, es decir que existen subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y K de X tal que $\cup\mathcal{A} = H \cup K$. Por hipótesis, $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. De manera que podemos elegir un elemento A en esta intersección. Entonces $A \subset \cup\mathcal{A} = H \cup K$. Como A es un conjunto conexo podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A \subset H$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{B \in \mathcal{A} : B \subset H\} \text{ y}$$

$$\mathcal{K} = \{B \in \mathcal{A} : B \cap K \neq \emptyset\}.$$

Veremos que éstos conjuntos forman una separación de $\mathcal{A}$.

(i) Por las Proposiciones 1.1.6 y 1.1.2, sabemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subconjuntos cerrados en $\mathcal{A}$.

(ii) Estamos suponiendo que $A \subset H$, entonces $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

(iii) Veamos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Como $K \neq \emptyset$, podemos considerar un elemento $x \in K$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $x \in B$ y, por lo tanto, $B \cap K \neq \emptyset$. Esto nos dice que $B \in \mathcal{K} \subset \cup\mathcal{A}$. De manera que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

(iv) Ahora probemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que existe un elemento C en esta intersección. Esto nos dice que $C \subset H$ y $C \cap K \neq \emptyset$. Lo que nos lleva a que $\emptyset \neq C \cap K \subset H \cap K$, lo cual es una contradicción ya que estamos suponiendo que $H \cap K = \emptyset$. Con esto concluimos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

(v) Ahora veamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Consideremos $B \in \mathcal{A}$. Entonces $B \subset \cup\mathcal{A} = H \cup K$. En el caso en que $B \cap K \neq \emptyset$, $B \in \mathcal{K}$. Para el caso en que $B \cap K = \emptyset$, $B \subset H$. Esto nos dice que $B \in \mathcal{H}$. De esta manera hemos visto que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ y por tanto $\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Así tenemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ dan una separación de $\mathcal{A}$, que es un conjunto conexo, lo cual es una contradicción que nació de suponer que $\cup\mathcal{A}$ no era conexo. De esta manera concluimos que $\cup\mathcal{A}$ es conexo. ■

Proposición 1.2.6. *Si se define* $D : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ *como:*

$$D(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\},$$

entonces $D(A, B) = H(A, B)$.

Demostración. Sea $r = D(A, B)$. Supongamos que $r \neq H(A, B)$.

Caso i. $H(A, B) < r$.

Por la Proposición 1.0.10, $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$. Como A es compacto y d es una función continua, sabemos que existe un elemento $a_0 \in A$ tal que

$$d(a_0, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Como $A \subset N(r, B)$, existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) < r$. De modo que tenemos lo siguiente:

$$\sup\{d(a, B) : a \in A\} = d(a_0, B) \leq d(a_0, b_0) < r.$$

De manera similar obtenemos que $\sup\{d(b, A) : b \in B\} < r$. Por definición,

$$D(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\} < r = D(A, B).$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, este caso no se puede dar.

Caso ii. $r < H(A, B)$.

En este caso tomemos un número $s > 0$ tal que $r < s < H(A, B)$. Verifiquemos que $A \subset N(s, B)$. Consideremos un elemento $a \in A$. Como B es compacto, existe un elemento $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) = d(a, B)$. Por lo tanto,

$$d(a, b_a) = d(a, B) \leq \sup\{d(x, B) : x \in A\} \leq D(A, B) = r < s.$$

En resumen tenemos que, para el elemento a, existe un elemento $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) < s$. Esto nos dice que $A \subset N(s, B)$. De manera similar se prueba que $B \subset N(s, A)$. Por la Proposición 1.0.10, $H(A, B) < s$. Lo cual es una contradicción ya que el número s lo escogimos de manera que $s < H(A, B)$.

De manera que este caso tampoco se puede dar.

De modo que, si suponemos $H(A, B) \neq r$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $H(A, B) = r$, lo que queríamos probar. ■

Proposición 1.2.7. *Las funciones* $f,\ g : C([0, 1]) \to [0, 1]$ *dadas por*

$$f([a, b]) = \text{mín}([a, b]) = a \text{ y}$$

$$g([a, b]) = \text{máx}([a, b]) = b$$

son continuas.

Demostración. Sean $[a, b] \in C([0, 1])$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos un elemento $[c, e] \in C([0, 1])$ tal que $H([a, b], [c, e]) < \varepsilon$. Veamos que $d(a, c) < \varepsilon$. De la Proposición 1.0.10, sabemos que (i) $[a, b] \subset N(\varepsilon, [c, e])$ y (ii) $[c, e] \subset N(\varepsilon, [a, b])$.

Caso (1). $a \leq c$.

Por (i), existe un elemento $x \in [c, e]$ tal que $d(x, a) = x - a < \varepsilon$. De modo que $c \in [a, x]$. Por lo tanto, $c - a \leq (c - a) + (x - c) = x - a$. Esto nos dice que $d(a, c) = c - a < \varepsilon$, lo que queríamos probar.

Caso (2). $c < a$.

Por (ii), existe un elemento $x \in [a, b]$ tal que $d(x, c) = x - c < \varepsilon$. Notemos que $a \in [c, x]$. De manera que $a - c \leq (a - c) + (x - a) = x - c$. Por tanto, $d(a, c) = a - c < \varepsilon$. Con esto queda probada la continuidad de la función f.

La continuidad de la función g se prueba de manera similar. ■

1.3. Topología de Vietoris

Definición 1.3.1. Sean $S_1, \ldots, S_n$ subconjuntos de X. Definimos *el subconjunto vietórico generado por* $S_1, \ldots, S_n$ como:

$$\langle S_1, \ldots, S_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^n S_i \text{ y } A \cap S_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}.$$

Proposición 1.3.2. *Sean $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de X. Consideremos la familia de subconjuntos de 2^X dada por:*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos de } X\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ_V que se llama Topología de Vietoris. Además τ_V es la misma topología que la dada por la métrica de Hausdorff.

Demostración. Necesitamos probar varias afirmaciones.

Afirmación 1. $\bigcup \mathcal{B} = 2^X$.

Dado $A \in 2^X$, por definición de 2^X, $A \subset X$. De manera que $A \in \langle X \rangle$. Así que $2^X \subset \langle X \rangle$. Por tanto, tenemos las siguientes contenciones $2^X \subset \langle X \rangle \subset \bigcup \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es un subconjunto de subconjuntos de 2^X, $\bigcup \mathcal{B} \subset 2^X$. De esta manera, concluimos que $\bigcup \mathcal{B} = 2^X$.

Afirmación 2. Sean $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ elementos de $\mathcal{B}$. Denotemos a $\bigcup_{i=1}^n U_i$ y a $\bigcup_{i=1}^n V_i$ por U y V, respectivamente. Entonces

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.$$

Notemos que

$$U \cap V = (U \cap V_1) \cup \cdots \cup (U \cap V_m) \cup (V \cap U_1) \cup \cdots \cup (V \cap U_n).$$

Fijemos $j \in \{1, \ldots, m\}$. Si $A \subset U$ y $A \cap V_j \neq \emptyset$, entonces $A \cap V_j \subset U \cap V_j$. Lo cual implica que $A \cap (U \cap V_j) = A \cap V_j$. Por lo tanto $A \cap (U \cap V_j) \neq \emptyset$. Si $A \cap (V_j \cap U) \neq \emptyset$, entonces $A \cap V_j \neq \emptyset$. De manera similar se prueba para $i \in \{1, \ldots, n\}$ que, si $A \subset V$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$, entonces $A \cap (V \cap U_i) \neq \emptyset$. Y si $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$, entonces se tiene que $A \cap U_i \neq \emptyset$. Por lo anterior, $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ si y sólo si $A \in \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle$.

La Afirmación 2 prueba que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Las Afirmaciones 1 y 2 muestran que $\mathcal{B}$ es base para una topología τ_V en 2^X.

Afirmación 3. La topología de Vietoris τ_V es equivalente a la topología, τ_H, generada por la métrica de Hausdorff en 2^X.

Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un abierto básico de la topología de Vietoris. Observemos que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(U_i)).$$

En donde $\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y $\mathcal{D}(U_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, son los conjuntos definidos en las Proposiciones 1.1.1 y 1.1.7, respectivamente. Entonces las mismas Proposiciones 1.1.1 y 1.1.7 nos dicen que $\mathcal{C}(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y $\mathcal{D}(U_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, son abiertos en 2^X con la topología τ_H. Por lo tanto, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ también es un abierto con la topología τ_H.

Consideremos un elemento $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subset B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_1) \cup \cdots \cup B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_n).$$

Notemos que $A \in \langle B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_1), \ldots, B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_n) \rangle$. Probemos que

$$\langle B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_1), \ldots, B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_n) \rangle \subset B_H(\varepsilon, A).$$

Consideremos un elemento $B \in \langle B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_1), \ldots, B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_n) \rangle$. Por la definición de los abiertos de la topología de Vietoris,

$$B \subset B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_1) \cup \cdots \cup B_d(\tfrac{\varepsilon}{2}, a_n),$$

lo cual implica que $B \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $a \in A$. De manera que existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a \in B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_j)$. Utilizando nuevamente la definición del abierto $\langle B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_1), \ldots B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_n) \rangle$, tenemos que $B \cap B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_j) \neq \emptyset$. Elijamos un elemento $b \in B \cap B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_j)$. Por lo tanto,

$$d(a, b) \leq d(a, a_j) + d(a_j, b) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De manera que $A \subset N(\varepsilon, B)$. Utilizando la Proposición 1.0.10, obtenemos que $H(A, B) < \varepsilon$, así que $\langle B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_1), \ldots, B_d(\frac{\varepsilon}{2}, a_n) \rangle \subset B_H(\varepsilon, A)$. Con esto hemos visto que los básicos de τ_H son abiertos en la topología τ_V.

Así hemos probado que $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos en 2^X que genera la misma topología que la dada por la métrica de Hausdorff. ■

1.4. Algunas propiedades de I^∞

Consideremos a $I^\infty = \prod_{i=1}^\infty [0,1]_i$ con la métrica dada por:

$$D((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i}|x_i - y_i|.$$

Recordemos que el arco $\overline{xy}$ se define como:

$$\overline{xy} = \{(1-r)x + ry \in I^\infty : 0 \leq r \leq 1\}.$$

Lema 1.4.1. *Sean x y y dos elementos distintos de I^∞. Entonces el arco $\overline{xy}$ es isométrico al intervalo cerrado $[0, D(x,y)]$.*

Demostración. Definimos la función $f : \overline{xy} \to [0, D(x,y)]$ como

$$f((1-r)x + ry) = D(x,y)r.$$

Para $r,\ s \in [0,1]$, observemos que

$$D((1-r)x + ry, (1-s)x + sy) = \sum_{i=1}^\infty \frac{|((1-r)x_i + ry_i) - ((1-s)x_i + sy_i)|}{2^i}$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \frac{|(r-s)y_i - (r-s)x_i|}{2^i} = |r-s| \sum_{i=1}^\infty \frac{|y_i - x_i|}{2^i} = |r-s|D(x,y).$$

De modo que

$$D((1-r)x + ry, (1-s)x + sy) = |r-s|D(x,y)$$

$$= |f((1-r)x + ry) - f((1-s)x + sy)|,$$

con lo cual obtenemos que f es una isometría. ■

Lema 1.4.2. *Sean $p \in I^\infty$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p)) = \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\}.$$

Demostración. Consideremos la función $f : I^\infty \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = D(x,p).$$

Observamos que f es una función continua y, por tanto,

$$f^{-1}([0,\varepsilon]) = \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\}$$

es un conjunto cerrado. Como

$$B_D(\varepsilon, p) \subset \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\},$$

$$\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p)) \subset \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\}.$$

Sea $x^0 \in \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\}$. En el caso en que $D(x^0, p) < \varepsilon$, es claro que $x^0 \in \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p))$. Supongamos que $D(x^0, p) = \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$x^n = \tfrac{1}{2^n} p + (1 - \tfrac{1}{2^n}) x^0.$$

Notamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$D(x^n, p) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} |(\frac{1}{2^n} - 1)p_i + (1 - \frac{1}{2^n}) x_i^0|$$

$$= (1 - \tfrac{1}{2^n}) \textstyle\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} |x_i^0 - p_i| = (1 - \frac{1}{2^n}) D(x^0, p) = (1 - \frac{1}{2^n})\varepsilon$$

y que

$$D(x^n, x^0) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} |\frac{1}{2^n} x_i^0 - \frac{1}{2^n} p_i|$$

$$= \tfrac{1}{2^n} \textstyle\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} |x_i^0 - p_i| = \frac{1}{2^n} D(x^0, p) = \frac{1}{2^n}\varepsilon.$$

De modo que $x^n \in B_D(\varepsilon, p)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, como $\lim \frac{1}{2^n}\varepsilon = 0$, obtenemos que $\lim x^n = x^0$. Por lo tanto, $x^0 \in \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p))$. Así hemos obtenido que

$$\{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\} \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p)).$$

Con esto concluimos que

$$\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p)) = \{x \in I^\infty : D(x,p) \leq \varepsilon\}.$$

De este modo terminamos la prueba de nuestro lema. ■

Definición 1.4.3. Sea Z un espacio vectorial. Un subconjunto A de Z es *convexo* si para cada par de elementos $a, b \in A$, se satisface que $\overline{ab} \subset A$.

Lema 1.4.4. *Sean $p \in I^\infty$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $B_D(\varepsilon, p)$ y $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p))$ son convexos y, como consecuencia, estos conjuntos son conexos.*

Demostración. Fijemos x y y dos elementos distintos de $B_D(\varepsilon, p)$. Veremos que

$$\overline{xy} = \{(1-r)x + ry \in I^\infty : 0 \leq r \leq 1\} \subset B_D(\varepsilon, p)$$

Sea $r \in [0,1]$. Observemos que

$$D(p, (1-r)x + ry) = D((1-r)p + rp, (1-r)x + ry)$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |(1-r)p_i + rp_i - [(1-r)x_i + ry_i]|$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |(1-r)(p_i - x_i) + r(p_i - y_i)|$$

$$\leq \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} ((1-r)|p_i - x_i| + r|p_i - y_i|)$$

$$= (1-r)D(p,x) + rD(p,y) < (1-r)\varepsilon + r\varepsilon = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\overline{xy} \subset B_D(\varepsilon, p)$. Concluimos que $B_D(\varepsilon, p)$ es convexo.

La prueba de que $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_D(\varepsilon, p))$ es convexo (y, por lo tanto, conexo) se hace de manera similar, teniendo en cuenta el Lema 1.4.2. ■

1.5. Algunos lemas de topología general

Definición 1.5.1. Un continuo X es *localmente conexo en p* si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un abierto conexo V tal que $p \in V \subset U$. Decimos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en p, para todo elemento $p \in X$.

Definición 1.5.2. Un continuo X es *conexo en pequeño en un punto $p \in X$* si para todo abierto U de X que tiene a p, existe un conexo C de X tal que $p \in \mathrm{int}_X(C) \subset C \subset U$. Decimos que X es *conexo en pequeño* si X es conexo en pequeño en p, para todo p en X.

Definición 1.5.3. Dados un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, se define la *componente $C(p)$ de p en Y* como:

$$C(p) = \bigcup\{D \subset Y : D \text{ es conexo y } p \in D\}.$$

Lema 1.5.4. *Si X es conexo en pequeño, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Veremos que las componentes de los abiertos son abiertas y con esto tendremos que X es localmente conexo (Teorema 4.2 del capítulo V de [6]). Sean U un abierto de X y K una componente de U. Consideremos un elemento $x \in K$. Por la conexidad en pequeño de X, existe un conexo M tal que $x \in \operatorname{int}_X(M) \subset M \subset U$. Como M es conexo de U y $x \in K \cap M$, $M \subset K$. De modo que $x \in \operatorname{int}_X(M) \subset M \subset K \subset U$. En resumen, obtuvimos $x \in \operatorname{int}_X(M) \subset K$, así que $x \in \operatorname{int}_X(K)$. Por lo tanto, K es un abierto de X. Con lo cual terminamos la prueba de que las componentes de los abiertos son abiertos. De modo que, esto nos garantiza que X es localmente conexo. ■

Lema 1.5.5. *Si A es un subconjunto conexo de X y existen H y K subconjuntos de X tales que $X \setminus A = H \mid K$, entonces $H \cup A$ y $K \cup A$ son conexos.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $H \cup A$ no es conexo. Entonces existen subconjuntos D y E de X tales que $H \cup A = D \mid E$. Como A es conexo y $A \subset H \cup A \subset D \cup E$, podemos suponer que $A \subset D$. Veamos que $E \subset H$. Sea $x \in E$. Como $E \subset H \cup A$ y $x \notin D$, $x \notin A$. Así que $x \in H$, de modo que $E \subset H$. Notemos que

$$X = A \cup H \cup K = (D \cup E) \cup K = E \cup (D \cup K),$$

$$\operatorname{cl}_X(E) \cap (D \cup K) = (\operatorname{cl}_X(E) \cap D) \cup (\operatorname{cl}_X(E) \cap K) \subset$$

$$(\operatorname{cl}_X(E) \cap D) \cup (\operatorname{cl}_X(H) \cap K) = \emptyset,$$

$$E \cap \operatorname{cl}_X(D \cup K) = (E \cap \operatorname{cl}_X(D)) \cup (E \cap \operatorname{cl}_X(K)) \subset$$

$$(E \cap \operatorname{cl}_X(D)) \cup (H \cap \operatorname{cl}_X(K)) = \emptyset,$$

$E \neq \emptyset$ y $D \cup K \neq \emptyset$. Por lo tanto, $X = E \mid (D \cup K)$, lo cual es un absurdo. Así que $H \cup A$ es conexo. Se prueba de manera similar que $K \cup A$ también es conexo. ■

Lema 1.5.6. *Sea X localmente conexo. Si $A \subset X$ y C es una componente de A, entonces $\mathrm{fr}_X(C) \subset \mathrm{fr}_X(A)$.*

Demostración. Probemos que $X \setminus \mathrm{fr}_X(A) \subset X \setminus \mathrm{fr}_X(C)$. Sea $x \in X \setminus \mathrm{fr}_X(A) = X \setminus (\mathrm{cl}_X(A) \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus A))$. Entonces existe un abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$ o $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$. De manera que $U \subset X \setminus A$ o $U \subset A$. En el caso en que $U \subset X \setminus A$, como $C \subset A$, tenemos que $U \subset X \setminus C$. De modo que $U \cap C = \emptyset$, lo cual nos lleva a que $x \in X \setminus \mathrm{fr}_X(C)$. En el caso en que $U \subset A$, como X es localmente conexo, existe un abierto V de X que es conexo y tal que $x \in V \subset U$. Si $x \in C$, como C es una componente de A, entonces $x \in V \subset C$. De modo que $V \cap (X \setminus C) = \emptyset$, lo cual nos lleva a que $x \in X \setminus \mathrm{fr}_X(C)$. Si $x \notin C$, entonces $V \cap C = \emptyset$ (de lo contrario tendríamos que $x \in V \subset C$, lo cual es un absurdo). Así que $V \subset X \setminus C$. Por lo tanto, $x \in X \setminus \mathrm{fr}_X(C)$. Con esto terminamos la prueba de que $X \setminus \mathrm{fr}_X(A) \subset X \setminus \mathrm{fr}_X(C)$. ■

Proposición 1.5.7. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto $p \in X$ se tiene que, si $\lim f(p_n) = q$, entonces $q = f(p)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Consideremos una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $p \in X$ y cumple que $\lim f(p_n) = q$. La continuidad de f implica que $\lim f(p_n) = f(p)$. De manera que $q = f(p)$.

Ahora supongamos que para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto $p \in X$ se tiene que si $\lim f(p_n) = q$, entonces $q = f(p)$. Consideremos un subconjunto A de X. Probemos que $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$. Sea $a \in \mathrm{cl}_X(A)$. Entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tal que $\lim a_n = a$. Notemos que $f(a_n) \in f(A) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathrm{cl}_Y(f(A))$ es un compacto, existe una subsucesión $\{f(a_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto $x \in \mathrm{cl}_Y(f(A))$. Como $\lim a_{n_k} = a$, por hipótesis, tenemos que $x = f(a)$. De manera que $f(a) \in \mathrm{cl}_Y(f(A))$. Por lo tanto $f(\mathrm{cl}_X(A)) \subset \mathrm{cl}_Y(f(A))$, así que f es continua. ■

Capítulo 2

Funciones de Whitney

Definamos el tipo de funciones que utilizaremos a lo largo de la tesis. Estas funciones nos dan una manera de medir los tamaños de los elementos de 2^X y es muy útil en el estudio de los hiperespacios. También veremos que las restricciones de las funciones de Whitney nos sirven para definir funciones de Whitney de manera natural.

Definición 2.0.8. Una función continua $\mu : 2^X \to [0,1]$ es una *función de Whitney* si satisface las siguientes propiedades:

- $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$;
- $\mu(A) < \mu(B)$ para cualesquiera $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$;
- $\mu(X) = 1$.

Diremos que $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una *función de Whitney para* $C(X)$ si ésta satisface las tres propiedades definidas anteriormente.

El siguiente resultado es conocido y la prueba se puede encontrar en el Teorema 5.3 de [12].

Teorema 2.0.9. *Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney.*

Lema 2.0.10. *Sea $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Dado un elemento $P \in C(X) \setminus F_1(X)$, definimos la función $\nu : 2^P \to [0,1]$ como:*

$$\nu(A) = \tfrac{\mu(A)}{\mu(P)}.$$

Entonces ν es una función de Whitney para 2^P.

Demostración. Es claro que ν es una función continua. Verifiquemos que ésta satisface las propiedades de una función de Whitney.

(i) $\nu(\{p\}) = 0$ para cada $p \in P$.

Sea $p \in P$. Como $p \in X$ y μ es una función de Whitney, $\mu(\{p\}) = 0$. De modo que $\nu(\{p\}) = \frac{\mu(\{p\})}{\mu(P)} = \frac{0}{\mu(P)} = 0$.

(ii) $\nu(A) < \nu(B)$ si $A \subsetneq B$.

Consideremos elementos A y $B \in 2^P$ tales que $A \subsetneq B$. Como A y $B \in 2^X$, aplicamos μ, que es una función de Whitney, para obtener $\mu(A) < \mu(B)$. Por lo tanto, $\nu(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(P)} < \frac{\mu(B)}{\mu(P)} = \nu(B)$.

(iii) $\nu(P) = 1$.

Por la definición de la función ν, $\nu(P) = \frac{\mu(P)}{\mu(P)} = 1$.

Así concluimos que ν es una función de Whitney para 2^P. ■

2.1. Una nueva función de Whitney

A continuación daremos las herramientas necesarias para definir una función de Whitney que nos auxiliará en la prueba del Teorema 3.2.94. Parte del efecto que tendrá esta función se puede describir de la siguiente manera. Consideremos a $S \times [0,1]$. Entonces $S \times \{0\}$ y $S \times \{1\}$ tienen la misma medida y la medida de $S \times \{r\}$, variando s de 0 a 1, va aumentando hasta la medida de $S \times \{\frac{1}{2}\}$ y luego disminuye.

Proposición 2.1.1. *Consideremos un elemento $A \in C(X)$. Para un número entero $n \geq 2$, definimos $\lambda_n : F_n(A) \to [0, \infty)$ de la siguiente manera: para cada $K \in F_n(A)$, supongamos que $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (donde la numeración no es uno a uno cuando $|K| < n$), entonces:*

$$\lambda_n(K) = \text{mín}\{d(a_i, a_j) : i \neq j\}.$$

Ahora, para cada $n \geq 2$, sea:

$$\omega_n(A) = \sup\{\lambda_n(K) : K \in F_n(A)\}.$$

Finalmente, definimos $\omega : C(X) \to [0, \infty)$ como:

$$\omega(A) = \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-n} \cdot \omega_n(A)$$

Esta función satisface:

(i) $\omega(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y

(ii) $\omega(A) < \omega(B)$ para cada par $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$.

Históricamente ésta fue la primera función satisfaciendo las propiedades (i) y (ii), la prueba se encuentra en las páginas 275 y 276 de [26].

Proposición 2.1.2. *Sean A y $B \in C(X)$. Tomemos a ω como en la Proposición 2.1.1. Si existe una función suprayectiva $f : A \to B$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in A$, entonces $\omega(B) \leq \omega(A)$.*

Demostración. Fijemos un número natural n tal que $n \geq 2$. Sean λ_n y ω_n como en la Proposición 2.1.1. Probemos que $\omega_n(B) \leq \omega_n(A)$.

Consideremos un elemento $M = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \in F_n(B)$. Como f es suprayectiva, existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $f(a_i) = b_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Definimos $L_M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in F_n(A)$. Si $i_0 \neq j_0$, entonces

$$\lambda_n(M) = \text{mín}\{d(b_i, b_j) : i \neq j\} \leq d(b_{i_0}, b_{j_0}) = d(f(a_{i_0}), f(a_{j_0})) \leq d(a_{i_0}, a_{j_0}).$$

Como i_0 y j_0 son índices cualesquiera en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_n(M) \leq \lambda_n(L_M)$. Lo cual nos lleva a que

$$\omega_n(B) = \sup\{\lambda_n(M) : M \in F_n(B)\} \leq \sup\{\lambda_n(L_M) : M \in F_n(B)\}.$$

Notemos que tenemos la siguiente contención de conjuntos

$$\{\lambda_n(L_M) : M \in F_n(B)\} \subset \{\lambda_n(L) : L \in F_n(A)\}.$$

De modo que

$$\sup\{\lambda_n(L_M) : M \in F_n(B)\} \leq \sup\{\lambda_n(L) : L \in F_n(A)\} = \omega_n(A).$$

Por tanto, $\omega_n(B) \leq \omega_n(A)$.

Utilizando la definición de ω, obtenemos que

$$\omega(B) = \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-n} \cdot \omega_n(B) \leq \sum_{n=2}^{\infty} 2^{1-n} \cdot \omega_n(A) = \omega(A),$$

con lo cual queda probada nuestra proposición. ■

Proposición 2.1.3. *Sean A y $B \in C(X)$. Tomemos a ω como en la Proposición 2.1.1. Si A y B son isométricos, entonces $\omega(A) = \omega(B)$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una isometría $f : A \to B$, es decir, f es un homeomorfismo y $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para cualesquiera $x,\ y \in A$. Aplicando la Proposición 2.1.2, obtenemos que $\omega(B) \leq \omega(A)$.

Como f es una isometría, usamos el argumento anterior con f^{-1} y obtenemos que $\omega(A) \leq \omega(B)$. De esta manera, $\omega(A) = \omega(B)$. ■

Proposición 2.1.4. *Sea $P \subset X$ no vacío. Definimos la función $\rho : C(X) \to [0, \infty)$ como:*

$$\rho(A) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, P)\}.$$

Entonces ρ está bien definida y es continua. Además, satisface:

(i) $\rho(A) \leq \rho(B)$, si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subset B$;

(ii) $\rho(A) > 0$, si $A \in C(X)$ es tal que $A \not\subset P$;

(iii) $\rho(A) = 0$, si $A \in C(X)$ es tal que $A \subset P$.

Demostración. Consideremos un elemento $A \in C(X)$. Notemos que $\text{diám}(X) + 1 \in \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$, de modo que la función ρ está bien definida. Ahora verifiquemos que ρ es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $B \in B_H(\frac{\varepsilon}{4}, A)$. Entonces existe $s \in [\rho(A), \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2})$ tal que $A \subset N(s, P)$. Verifiquemos que $B \subset N(\frac{\varepsilon}{4} + s, P)$. Fijemos $b \in B$. Como $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{4}$, la Proposición 1.0.10 nos dice que $B \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, A)$. Así que existe un elemento $a \in A$ tal que $d(a, b) < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $A \subset N(s, P)$, existe un elemento $p \in P$ tal que $d(a, p) < s$. Por tanto

$$d(b, p) \leq d(b, a) + d(a, p) < \frac{\varepsilon}{4} + s,$$

con lo cual obtenemos la contención $B \subset N(\frac{\varepsilon}{4} + s, P)$. Esto nos conduce a que $\frac{\varepsilon}{4} + s \in \{r > 0 : B \subset N(r, P)\}$ y, por lo tanto,

$$\rho(B) = \text{ínf}\{r > 0 : B \subset N(r, P)\} \leq \frac{\varepsilon}{4} + s < \frac{\varepsilon}{2} + s.$$

Así que $\rho(B) - \frac{\varepsilon}{2} < s$. Como $s < \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(B) - \rho(A) < \varepsilon$. De manera similar se prueba que $\rho(A) - \rho(B) < \varepsilon$. Por lo tanto, $|\rho(A) - \rho(B)| < \varepsilon$, con esto concluimos que ρ es una función continua.

(i) Sea $s \in \{r > 0 : B \subset N(r, P)\}$. Notemos que tenemos las siguientes contenciones: $A \subset B \subset N(s, P)$. De modo que $s \in \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$. Entonces

$$\{r > 0 : B \subset N(r, P)\} \subset \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}.$$

Considerando el ínfimo de ambos conjuntos obtenemos que

$$\rho(A) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, P)\} \leq \text{ínf}\{r > 0 : B \subset N(r, P)\} = \rho(B),$$

lo que queríamos probar.

(ii) Como $A \not\subset P$, existe un elemento $a \in A \setminus P$. De manera que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(\varepsilon, a) \cap P = \emptyset$. Esto nos lleva a que $d(a, p) \geq \varepsilon$ para todo elemento $p \in P$, así que $A \not\subset N(\varepsilon, P)$. Con esto hemos obtenido que $\varepsilon \notin \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$. Sea $s \in \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$. Probaremos que $\varepsilon < s$. Supongamos, por el contrario, que $s \leq \varepsilon$. Tenemos que $A \subset N(s, P)$, con lo que llegamos a que $A \subset N(\varepsilon, P)$, lo cual no puede ser. De manera que $\varepsilon < s$. Como s es un número cualquiera del conjunto $\{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$, llegamos a que

$$\varepsilon \leq \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, P)\} = \rho(A).$$

Como $\varepsilon > 0$, $0 < \rho(A)$. Con esto queda probado este inciso de nuestra proposición.

(iii) Sea $s > 0$. Entonces se cumple que $A \subset P \subset N(s, P)$. Así que $s \in \{r > 0 : A \subset N(r, P)\}$. Como s es un número cualquiera mayor que cero,

$$\rho(A) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, P)\} = 0.$$

De este modo, terminamos la prueba de nuestra proposición. ■

Proposición 2.1.5. *Sea $P \subset X$ no vacío. Consideremos la función $\nu : C(X) \to [0, \infty)$ definida como:*

$$\nu(A) = \omega(A)(1 + \rho(A)),$$

donde ω está definida como en la Proposición 2.1.1 y ρ está definida como en la Proposición 2.1.4 para el conjunto P. Entonces ν es una función continua que satisface:

(i) $\nu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$;

(ii) si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subsetneq B$, entonces $\nu(A) < \nu(B)$;

(iii) si $A, B \in C(X)$ son isométricos y $A, B \subset P$, entonces $\nu(A) = \nu(B)$;

(iv) si existe una función suprayectiva $f : A \to B$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para $x, y \in A$ y, además $A \not\subset P$, $B \subset P$ y $A \notin F_1(X)$, entonces $\nu(B) < \nu(A)$.

Demostración. Es claro que la función ν es una función continua porque es una composición de funciones continuas.

(i) La Proposición 2.1.1 (i) nos dice que $\omega(\{x\}) = 0$. Aplicando la función ν a $\{x\}$, obtenemos lo siguiente:

$$\nu(\{x\}) = \omega(\{x\})(1 + \rho(\{x\})) = 0(1 + \rho(\{x\})) = 0.$$

Así queda probado este inciso.

(ii) Por las Proposiciones 2.1.1 (ii) y 2.1.4 (i) tenemos, respectivamente, que $\omega(A) < \omega(B)$ y $\rho(A) \leq \rho(B)$. De manera que

$$\nu(A) = \omega(A)(1 + \rho(A)) < \omega(B)(1 + \rho(B)) = \nu(B),$$

lo queríamos probar.

(iii) Por la Proposición 2.1.3, $\omega(A) = \omega(B)$. Por otro lado, como $A, B \subset P$, la Proposición 2.1.4 (iii) nos dice que $\rho(A) = \rho(B) = 0$. Aplicando la definición de la función ν tenemos que

$$\nu(A) = \omega(A)(1 + \rho(A)) = \omega(A) = \omega(B) = \omega(B)(1 + \rho(B)) = \nu(B).$$

Así concluimos la prueba de esta parte.

(iv) Como $f : A \to B$ es suprayectiva y $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para $x, y \in A$, aplicamos la Proposición 2.1.2 para obtener que $\omega(B) \leq \omega(A)$. Notemos que $\omega(A) > 0$ ya que $A \notin F_1(X)$. Por otro lado, tenemos $A \not\subset P$ y $B \subset P$. Entonces la Proposición 2.1.4, partes (ii) y (iii), nos dice, respectivamente, que $\rho(A) > 0$ y $\rho(B) = 0$. De aquí que

$$\nu(B) = \omega(B)(1 + \rho(B)) = \omega(B) \leq \omega(A) < \omega(A)(1 + \rho(A)) = \nu(A).$$

Con esto queda probado este inciso y, así, finalizamos la prueba de nuestra proposición. ■

Corolario 2.1.6. *Sea $P \subset X$ no vacío. Definimos la función $\mu : C(X) \to [0, 1]$ como:*

$$\mu(A) = \tfrac{\nu(A)}{\nu(X)},$$

en donde $\nu : C(X) \to [0, \infty)$ está definida como en la Proposición 2.1.5. Entonces μ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 1. *μ es una función de Whitney, es decir, μ es continua y cumple (a) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$, (b) $\mu(A) < \mu(B)$, si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subsetneq B$ y (c) $\mu(X) = 1$.*

Propiedad 2. *Si $A, B \in C(X)$ son isométricos y $A, B \subset P$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$.*

Propiedad 3. *Si existe una función suprayectiva $f : A \to B$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para $x, y \in A$ y, además, $A \not\subset P$, $B \subset P$ y $A \notin F_1(X)$, entonces $\mu(B) < \mu(A)$.*

Demostración. (1.a) De la Proposición 2.1.5 (i) tenemos que $\nu(\{x\}) = 0$. De aquí que $\mu(\{x\}) = \frac{\nu(\{x\})}{\nu(X)} = \frac{0}{\nu(X)} = 0$.

(1.b) De la Proposición 2.1.5 (ii), sabemos que $\nu(A) < \nu(B)$ si $A \subsetneq B$. Por lo tanto, $\mu(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(X)} < \frac{\nu(B)}{\nu(X)} = \mu(B)$.

(1.c) Observemos que $\mu(X) = \frac{\nu(X)}{\nu(X)} = 1$.

(2) Por la Proposicíon 2.1.5 (iii), sabemos que $\nu(A) = \nu(B)$, si $A, B \in C(X)$ son isométricos y $A, B \subset P$. De manera que $\mu(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(X)} = \frac{\nu(B)}{\nu(X)} = \mu(B)$.

(3) La Proposición 2.1.5 (iv) nos dice que $\nu(B) < \nu(A)$. De aquí que $\mu(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(X)} < \frac{\nu(A)}{\nu(X)} = \mu(A)$. Con esto concluimos la prueba de este corolario. ■

2.2. Más propiedades

En esta sección presentamos más propiedades que tienen las funciones de Whitney. Veremos qué necesitamos pedirle a sus medidas para que dos continuos estén cerca. Mostraremos qué necesitamos pedir a la medida de un continuo si queremos que su diámetro sea pequeño. En esta sección veremos la definición de arco ordenado y algunas de sus propiedades relacionadas con las funciones de Whitney. Además probaremos que, dados varios elementos que están alineados respecto a una función de Whitney, existe otra función de Whitney que los desalinea.

Proposición 2.2.1. *Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para cada par de* *elementos $A, B \in C(X)$ que satisfacen $\mu(A) = \mu(B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, se tiene que $H(A, B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que nuestra afirmación no es válida. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, existen dos elementos $A_n, B_n \in C(X)$ que satisfacen lo siguiente:

(a) $\mu(A_n) = \mu(B_n)$;

(b) $B_n \subset N(\frac{1}{n}, A_n)$;

(c) $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$.

Como $C(X)$ es un conjunto compacto (por el Corolario 4.3 de [12]), podemos suponer que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes. Supongamos que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, para algunos elementos A y $B \in C(X)$.

Por la continuidad de la función μ, se tiene que $\lim \mu(A_n) = \mu(\lim A_n) = \mu(A)$ y $\lim \mu(B_n) = \mu(\lim B_n)) = \mu(B)$. Por (a) sabemos que $\mu(A_n) = \mu(B_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(A) = \mu(B)$.

Ahora veremos que la sucesión $\{\mathrm{cl}_X(N(\frac{1}{n}, A_n))\}_{n=1}^{\infty}$ converge al elemento A en 2^X. Consideremos $\eta > 0$. Por la convergencia de la sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\eta}{2}$ y $\frac{1}{n} < \frac{\eta}{4}$ para toda $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Como

$$A_n \subset \mathrm{cl}_X(N(\tfrac{1}{n}, A_n)) \subset N(\tfrac{\eta}{2}, \mathrm{cl}_X(N(\tfrac{1}{n}, A_n))) \text{ y}$$

$$\mathrm{cl}_X(N(\tfrac{1}{n}, A_n)) \subset N(\tfrac{2}{n}, A_n) \subset N(\tfrac{\eta}{2}, A_n),$$

por la Proposición 1.0.10, concluimos que $H(A_n, \mathrm{cl}_X(N(\frac{1}{n}, A_n))) < \frac{\eta}{2}$. Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$H(A, \mathrm{cl}_X(N(\tfrac{1}{n}, A_n))) \leq H(A, A_n) + H(A_n, \mathrm{cl}_X(N(\tfrac{1}{n}, A_n))) < \tfrac{\eta}{2} + \tfrac{\eta}{2} = \eta.$$

Lo cual nos dice que $\lim \mathrm{cl}_X(N(\frac{1}{n}, A_n)) = A$.

Por la Proposición 1.1.3 (a), aplicada a las sucesiones $\{\mathrm{cl}_X(N(\frac{1}{n}, A_n))\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, que satisfacen $B_n \subset \mathrm{cl}_X(N(\frac{1}{n}, A_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$ concluimos que $B \subset A$.

Como H es una función continua y (c) nos dice que $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $H(A, B) \geq \varepsilon$. De manera que $A \neq B$. Utilizando lo probado en el párrafo anterior, obtenemos que $B \subsetneq A$. Como μ es función de Whitney sucede que $\mu(A) < \mu(B)$, lo cual es una contradicción. De este modo concluimos que nuestra proposición es verdadera. ■

Proposición 2.2.2. *Sea $\mu : 2^X \to [0, 1]$ una función de Whitney. Entonces se cumple que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que, si $A, B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, existen $A_n, B_n \in 2^X$ que satisfacen lo siguiente:

(a) $A_n \subset B_n$;

(b) $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$;

(c) $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$.

Como 2^X es compacto (por el Teorema 4.2 de [12]), podemos suponer que las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes. De modo que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$ para algunos elementos A y $B \in 2^X$. Utilizando (a) y la Proposición 1.1.3 (a), obtenemos que $A \subset B$. Por la continuidad de la función μ y por (b), $\mu(B) - \mu(A) \leq 0$. Como $A \subset B$ y μ es función de Whitney, $\mu(B) - \mu(A) \geq 0$. De modo que $\mu(A) = \mu(B)$. Si suponemos que $A \subsetneq B$, obtenemos que $\mu(A) < \mu(B)$, lo cual no puede ser. De manera que $A = B$. Por otro lado, utilizando (c) y la continuidad de la función H, $H(A, B) \geq \varepsilon$, lo cual es una contradicción ya que habíamos obtenido que $A = B$. De esta manera concluimos que nuestra proposición es verdadera. ■

Lema 2.2.3. *Sea $\mu : 2^X \to [0, 1]$ una función de Whitney. Si $\varepsilon > 0$, entonces existe un número $\eta > 0$ tal que si $\mu(A) < \eta$ se satisface que* $\text{diám}(A) < \varepsilon$.

Demostración. Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\eta > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$ son tales que $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Sean $A \in \mu^{-1}([0, \eta))$ y $a \in A$. Como $\mu(A) - \mu(\{a\}) = \mu(A) < \eta$, $H(A, \{a\}) < \frac{\varepsilon}{4}$. La Proposición 1.0.10 nos dice que $A \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, \{a\}) = B_d(\frac{\varepsilon}{4}, a)$. Luego $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(B_d(\frac{\varepsilon}{4}, a)) < \varepsilon$. ■

El siguiente resultado es el Lema 6.8 de [12]. Haremos referencia a él para la prueba de varios resultados.

Lema 2.2.4. *Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Definición 2.2.5. Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es *un arco ordenado de A a B* en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

Lema 2.2.6. *Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Si $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un arco ordenado de A a B, entonces $\mu(\operatorname{Im} \alpha) = [\mu(A), \mu(B)]$.*

Demostración. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, se tiene que $A = \alpha(0) \subset \alpha(r) \subset \alpha(1) = B$ para cada $r \in [0, 1]$. Como μ es una función de Whitney, se satisface que $\mu(A) \leq \mu(\alpha(r)) \leq \mu(B)$ para cada $r \in [0, 1]$. De manera que $\mu(\operatorname{Im} \alpha) \subset [\mu(A), \mu(B)]$. Como $\operatorname{Im} \alpha$ es un continuo y μ es una función continua, $\mu(\operatorname{Im} \alpha) = [\mu(A), \mu(B)]$. Con esto terminamos la prueba de nuestro lema. ■

El siguiente resultado es el Teorema 6.10 de [12] y haremos referencia a él en la prueba de algunos resultados.

Teorema 2.2.7. *Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Utilizando el Teorema 2.2.7 y el Lema 2.2.6 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.8. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de A a B tal que $\mu(\mathrm{Im}\,\alpha) = [\mu(A), \mu(B)]$.*

Lema 2.2.9. *Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado y $t \in (\mu(\alpha(0)), \mu(\alpha(1)))$. Entonces existe $s \in (0,1)$ tal que $\alpha(r) \in \mu^{-1}(t)$.*

Demostración. Utilizando la continuidad de la función $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$ y el Teorema del Valor Intermedio, existe $r \in [0,1]$ tal que $\mu \circ \alpha(r) = \mu(\alpha(r)) = t$. Por lo tanto $\alpha(r) \in \mu^{-1}(t)$. Si tuviéramos $r = 0$, obtendríamos que $\mu(\alpha(r)) = \mu(\alpha(0)) < t$, lo cual no puede ser. Luego, $r > 0$. De manera similar obtenemos que $r < 1$. Resulta que $r \in (0,1)$. Así finalizamos la prueba de este lema. ■

Lema 2.2.10. *Sean $\mu,\ \nu : C(X) \to [0,1]$ dos funciones de Whitney y $t \in [0,1]$ tales que $\mu^{-1}(t) \subset \nu^{-1}(t)$. Entonces $\mu^{-1}(t) = \nu^{-1}(t)$. Más aún, dado un elemento $A \in C(X)$, si $\mu(A) \leq t$, se satisface que $\nu(A) \leq t$ y si $t \leq \mu(A)$ entonces $t \leq \nu(A)$.*

Demostración. Verifiquemos que $\nu^{-1}(t) \subset \mu^{-1}(t)$. Sea $C \in \nu^{-1}(t)$. Supongamos por el contrario que $\mu(C) < t$ o $t < \mu(C)$. Por el Lema 2.2.4, existe un elemento $D \in \mu^{-1}(t)$ tal que $C \subsetneq D$ o $D \subsetneq C$. Utilizando que ν es una función de Whitney, obtenemos que $t = \nu(C) < \nu(D)$ o $\nu(D) < \nu(C) = t$. Por otra parte, por hipótesis, $\mu^{-1}(t) \subset \nu^{-1}(t)$, así que $D \in \nu^{-1}(t)$. De este modo, tenemos un absurdo en los dos casos. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t) = \nu^{-1}(t)$.

Supongamos que $\mu(A) \leq t$. En el caso en que $t = 1$ el lema es claro. Supongamos que $t < 1$. Veamos que $\nu(A) \leq t$. Supongamos, por el contrario, que $t < \nu(A)$. Por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B \in \nu^{-1}(t)$ tal que $B \subsetneq A$. Utilizando los hechos de que $\mu^{-1}(t) = \nu^{-1}(t)$ y que μ es una función de Whitney, obtenemos que $t = \mu(B) < \mu(A)$. Lo cual es un absurdo, ya que $\mu(A) \leq t$. Esto demuestra que $\nu(A) \leq t$. De manera similar se obtiene el otro caso. ■

Utilizaremos el siguiente teorema que nos dice cuándo podemos extender una función de Whitney. Una prueba puede verse en el Teorema 16.10 de [13].

Teorema 2.2.11. *Sea $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X. Entonces cada función de Whitney para $\mathcal{H}$ se puede extender a una función de Whitney para 2^X.*

El siguiente lema nos dice que si tenemos m subcontinuos de X, no comparables dos a dos, en un bloque abierto $\mu^{-1}((t_0, t_1))$, que pueden estar alineados horizontalmente con respecto a la función de Whitney μ, entonces existe una nueva función de Whitney ω en $C(X)$, que respeta los bloques $\mu^{-1}([0, t_0])$, $\mu^{-1}([t_0, t_1])$ y $\mu^{-1}([t_1, 1])$ y desalinea a los m continuos originalmente considerados. Ver Figura 1.

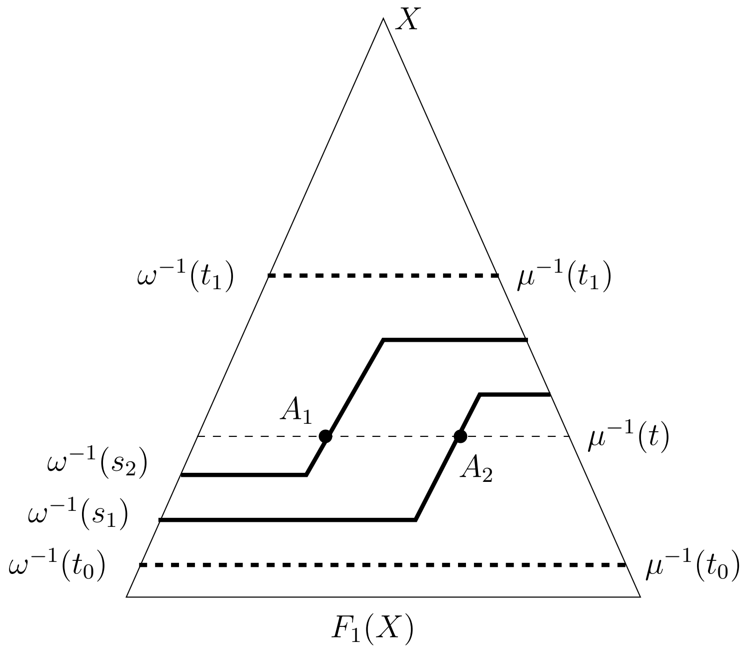

Figura 1: ω y μ

Teorema 2.2.12. *Sean $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney, $t_0, t_1 \in [0, 1]$ tales que $t_0 < t_1$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Fijemos $A_1, \ldots, A_m \in \mu^{-1}((t_0, t_1))$ tales que, si $i \neq j$, entonces $A_i \not\subset A_j$. Entonces existe una función de Whitney $\nu : C(X) \to [0, 1]$ tal que*

$$\nu^{-1}([t_1, 1]) = \mu^{-1}([t_1, 1]),$$

$$\nu^{-1}([t_0, t_1]) = \mu^{-1}([t_0, t_1]),$$

$$\nu^{-1}([0, t_0]) = \mu^{-1}([0, t_0]) \text{ y}$$

$$t_0 < \nu(A_1) < \cdots < \nu(A_m) < t_1.$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{K} = F_1(X) \cup \mu^{-1}(t_0) \cup \mu^{-1}(t_1) \cup \{A_1, \ldots, A_m, X\}.$$

Fijemos $s_1, \ldots, s_m \in (t_0, t_1)$ tales que $s_1 < \cdots < s_m$. Definimos $\omega : \mathcal{K} \to [0, 1]$ como:

$$\omega(P) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad P = X; \\ t_1, & \text{si} \quad P \in \mu^{-1}(t_1); \\ s_i, & \text{si} \quad P = A_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}; \\ t_0, & \text{si} \quad P \in \mu^{-1}(t_0); \\ 0, & \text{si} \quad P \in F_1(X). \end{cases}$$

Ver Figura 1.

Verifiquemos que ω es una función de Whitney en $\mathcal{K}$. Como ω es constante en cada uno de los cerrados ajenos $\{X\}$, $\mu^{-1}(t_1)$, $\{A_1\}, \ldots, \{A_m\}$, $\mu^{-1}(t_0)$ y $F_1(X)$, ésta es una función continua. De la definición de ω, $\omega(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y $\omega(X) = 1$. Consideremos $E, F \in \mathcal{K}$, tales que $E \subsetneq F$. Esto nos dice que $\mu(E) < \mu(F)$, ya que μ es una función de Whitney. Analicemos varios casos.

Caso (a). $E \in F_1(X)$.

Como $0 = \mu(E) < \mu(F)$, es claro que $F \notin F_1(X)$. Notemos que $\omega(P) = t_1 > 0$ para todo $P \in \mu^{-1}(t_1)$, mientras que $\omega(X)$, $\omega(A_1), \ldots, \omega(A_m) > 0$. En el caso en que $t_0 = 0$, $\mu^{-1}(t_0) = F_1(X)$. Así que, en este caso, se satisface que $\omega(E) = 0 < \omega(F)$ para todo $F \in \mu^{-1}(t_1) \cup \{A_1, \ldots, A_m, X\}$. En el caso en que $t_0 > 0$, observamos que $\omega(P) = t_0 > 0$ para todo $P \in \mu^{-1}(t_0)$, de modo que $\omega(E) = 0 < \omega(F)$ para todo $F \in \mu^{-1}(t_0) \cup \mu^{-1}(t_1) \cup \{A_1, \ldots, A_m, X\}$.

Caso (b). $E \in \mu^{-1}(t_0)$ y $t_0 > 0$.

Utilizando que $0 < t_0 = \mu(E) < \mu(F)$, observamos que $F \notin F_1(X) \cup \mu^{-1}(t_0)$. Así que, $F \in \mu^{-1}(t_1) \cup \{A_1, \ldots, A_m, X\}$ y, por lo tanto, $\omega(F) \geq s_1$. De modo que $\omega(E) = t_0 < s_1 \leq \omega(F)$.

Caso (c). $E \in \{A_1, \ldots, A_m\}$.

Como $0 \leq t_0 < \mu(E) < \mu(F)$, tenemos $F \notin F_1(X) \cup \mu^{-1}(t_0)$. Por otra parte, los elementos de $\{A_1, \ldots, A_m\}$ no son comparables dos a dos y E y F son comparables. Luego $F \notin \{A_1, \ldots, A_m\}$. De modo que $F \in \mu^{-1}(t_1) \cup \{X\}$, lo cual nos lleva a que $\omega(F) \geq t_1$. Observamos que $\omega(E) \leq s_m < t_1$. Por tanto, $\omega(E) < \omega(F)$.

Caso (d). $E \in \mu^{-1}(t_1)$ y $t_1 < 1$.

Utilizando que $\mu(A_i) < t_1$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $0 \leq t_0 < t_1 = \mu(E) < \mu(F)$, observamos que $F \notin F_1(X) \cup \{A_1, \ldots, A_m\} \cup \mu^{-1}(t_0) \cup \mu^{-1}(t_1)$. Así que $F = X$. Por lo tanto $\omega(E) = t_1 < 1 = \omega(X)$.

Caso (e). $E = X$.

Como $E \subsetneq F \subset X$ obtenemos una contradicción, por lo que este caso no es posible.

De este modo, hemos verificado que ω es una función de Whitney para $\mathcal{K}$. Por el Teorema 2.2.11, existe una función de Whitney $\nu : C(X) \to [0, 1]$ tal que $\nu|_{\mathcal{K}} = \omega$. Notemos, por la definición de ω, que $\mu^{-1}(t_0) \subset \omega^{-1}(t_0) = (\nu|_{\mathcal{K}})^{-1}(t_0) \subset \nu^{-1}(t_0)$ y $\mu^{-1}(t_1) \subset \omega^{-1}(t_1) = (\nu|_{\mathcal{K}})^{-1}(t_1) \subset \nu^{-1}(t_1)$. Así que, aplicando el Lema 2.2.10 las veces necesarias, obtenemos que $\nu^{-1}([0, t_0]) = \mu^{-1}([0, t_0])$, $\nu^{-1}([t_1, 1]) = \mu^{-1}([t_1, 1])$ y $\nu^{-1}([t_0, t_1]) = \mu^{-1}([t_0, t_1])$. De la definición de ω y por la forma en que se eligieron los números $s_1, \ldots, s_m$, tenemos que se satisface que $t_0 < s_1 = \nu(A_1) < \cdots < s_m = \nu(A_m) < t_1$. ■

2.3. Niveles y Propiedades de Whitney

En esta sección mostraremos que los niveles de Whitney, restringidos a un subcontinuo también son niveles de Whitney. Veremos algunas propiedades de Whitney, que nos serán útiles en el estudio de los bloques de Whitney. Entre estas propiedades se encuentran ser arco, ser arcoconexo y ser localmente conexo. También probaremos algunos resultados acerca de los niveles de Whitney que utilizaremos más adelante.

Recordemos que X es un continuo no degenerado.

Definición 2.3.1. Un *nivel de Whitney* es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in [0,1)$.

Cuando supongamos que $\mathcal{A}$ es un nivel de Whitney, entenderemos que existen de antemano una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y $t \in [0,1)$ tales que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$.

El siguiente resultado es el Lema 8.4 de [12] y haremos referencia a él para la prueba de varios resultados.

Lema 2.3.2. *Los niveles de Whitney son continuos no degenerados.*

Un resultado importante acerca de los niveles de Whitney es que éstos son continuos, lo cual no siempre pasa en el caso en que $\mu : 2^X \to [0,1]$. Hay un estudio amplio acerca de éstos que trata de las propiedades que X hereda a los niveles de Whitney y viceversa. Una recopilación de éste se encuentra en el Capítulo VIII de [13]. Aquí mencionamos los resultados acerca de los niveles de Whitney que utilizamos en la demostración de algunos teoremas de esta tesis.

Lema 2.3.3. *Sea* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *una función de Whitney. Si* $K \notin F_1(X)$ *y* $t < \mu(K)$, *entonces* $(\mu|_{C(K)})^{-1}(t)$ *es un continuo no degenerado. Además se da la siguiente igualdad de conjuntos:*

$$\left(\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\right)^{-1}\left(\frac{t}{\mu(K)}\right) = (\mu|_{C(K)})^{-1}(t).$$

Demostración. Como $K \notin F_1(X)$, por el Lema 2.0.10, la función $\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)} : C(K) \to [0,1]$ es una función de Whitney. Teniendo en cuenta que $\frac{t}{\mu(K)} < 1$, por el Lema 2.3.2, $\left(\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\right)^{-1}\left(\frac{t}{\mu(K)}\right)$ es un continuo no degenerado. Notemos que

$$\left(\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\right)^{-1}\left(\frac{t}{\mu(K)}\right) = \{A \in C(K) : \frac{\mu(A)}{\mu(K)} = \frac{t}{\mu(K)}\}$$
$$= \{A \in C(K) : \mu(A) = t\} = (\mu|_{C(K)})^{-1}(t).$$

Con esto finalizamos nuestra prueba. ■

Lema 2.3.4. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si A y B son dos elementos diferentes tales que $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Es decir, los elementos de un nivel no son comparables.*

Demostración. Veamos que $A \not\subset B$. Supongamos, por el contrario, que $A \subset B$. Si tuviéramos que la contención es propia, llegaríamos a que $\mu(A) < \mu(B)$, lo cual no puede ser ya que $\mu(A) = \mu(B)$. Lo que nos lleva a que $A = B$, lo cual tampoco puede ser ya que $A \neq B$. De manera similar, obtenemos que $B \not\subset A$. ■

Lema 2.3.5. *Sean X y Y dos continuos homeomorfos entre sí. Consideremos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y $t \in [0,1)$. Entonces existe una función de Whitney $\nu : C(Y) \to [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $\nu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ es homeomorfo a $\nu^{-1}([0,t])$.*

Demostración. Fijemos un homeomorfismo $f : X \to Y$. Por la Proposición 1.2.1, la función $C(f) : C(X) \to C(Y)$ también es un homeomorfismo y $C(f)^{-1} = C(f^{-1}) : C(Y) \to C(X)$. Definimos la función $\nu : C(Y) \to [0,1]$ como:

$$\nu(P) = \mu(C(f)^{-1}(P)).$$

Verifiquemos que ν es una función de Whitney para $C(Y)$. Consideremos $y \in Y$. Entonces $C(f)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\} \in F_1(X)$, ya que f es homeomorfismo, de modo que $\nu(\{y\}) = \mu(C(f)^{-1}(\{y\})) = 0$. Tomemos $A, B \in C(Y)$ tales que $A \subsetneq B$. Como f es homeomorfismo,

$$C(f)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \subsetneq f^{-1}(B) = C(f)^{-1}(B).$$

Aplicando la función μ obtenemos

$$\nu(A) = \mu(C(f)^{-1}(A)) < \mu(C(f)^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Observemos que $C(f)^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) = X$, de manera que

$$\nu(Y) = \mu(C(f)^{-1}(Y)) = \mu(X) = 1.$$

Así, concluimos que ν es una función de Whitney.

Verifiquemos que $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ son homeomorfos a $\nu^{-1}(t)$ y $\nu^{-1}([0,t])$, respectivamente. Definimos las funciones $\varphi : \mu^{-1}(t) \to \nu^{-1}(t)$ y $\psi : \mu^{-1}([0,t]) \to \nu^{-1}([0,t])$ como:

$$\varphi(D) = C(f)(D) \text{ y}$$

$$\psi(E) = C(f)(E).$$

Notemos que $\nu(C(f)(P)) = \mu(C(f)^{-1}(C(f)(P))) = \mu(P)$ para cada $P \in C(X)$. De modo que, si $D \in \mu^{-1}(t)$ y $E \in \mu^{-1}([0,t])$, entonces $\varphi(D) = C(f)(D) \in \nu^{-1}(t)$ y $\psi(E) = C(f)(E) \in \nu^{-1}([0,t])$. De manera que φ y ψ están bien definidas. Como $\varphi = C(f)|_{\mu^{-1}(t)}$ y $\psi = C(f)|_{\mu^{-1}([0,t])}$, éstas son funciones continuas e inyectivas.

Veamos que φ y ψ son funciones suprayectivas. Dados dos elementos $M \in \nu^{-1}(t)$ y $N \in \nu^{-1}([0,t])$, como $\nu(Q) = \mu(C(f)^{-1}(Q))$ para cada $Q \in C(Y)$, se tiene que $C(f)^{-1}(M) \in \mu^{-1}(t)$ y $C(f)^{-1}(N) \in \mu^{-1}([0,t])$. Observemos que

$$\varphi(C(f)^{-1}(M)) = C(f)(C(f)^{-1}(M)) = M \text{ y}$$

$$\psi(C(f)^{-1}(N)) = C(f)(C(f)^{-1}(N)) = N.$$

Con esto hemos visto que φ y ψ son suprayectivas.

Por el Lema 2.3.2 y el Corolario 3.0.22, los conjuntos $\mu^{-1}(t)$, $\nu^{-1}(t)$, $\mu^{-1}([0,t])$ y $\nu^{-1}([0,t])$ son continuos. Así que φ y ψ son funciones continuas, inyectivas y suprayectivas entre continuos, lo que nos lleva a que éstas son homeomorfismos. Con esto concluimos la prueba de este lema. ■

Por el Corolario 6.13 de [12], $C(X)$ es un continuo. De manera que, $C(C(X))$ es el hiperespacio de continuos de 2^X.

Lema 2.3.6. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Entonces la función $f : [0,1] \to C(C(X))$ dada por $f(t) = \mu^{-1}(t)$ es continua para cada $t \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la métrica de Hausdorff en $C(C(X))$ inducida por H. Consideremos $t \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\eta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ satisfacen que $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$.

Tomemos $s \in [0,1]$ tal que $|s-t| < \eta$. Probemos que $f(t) \subset N(\varepsilon, f(s))$.

Caso (i). $t \leq s$.

Sea $A \in f(t)$. En el subcaso en que $t = 1$, observamos que $A = X$ y definimos $B = X$. De manera que $H(A,B) = 0$. En el subcaso en que $t < 1$, notamos que $A \subsetneq X$. Como $t \leq s \leq 1$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $A \subset B$. Como $\mu(B) - \mu(A) = s - t < \eta$, $H(A,B) < \varepsilon$.

Caso (ii). $s < t$.

Sea $A \in f(t)$. Consideremos $a \in A$. En este caso, $\mu(\{a\}) = 0 \leq s < t = \mu(A)$. Entonces $\{a\} \subsetneq A$. Aplicamos el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $B \subset A$. Como $\mu(A) - \mu(B) = t - s < \eta$, se satisface que $H(A,B) < \varepsilon$.

Por tanto, $f(t) \subset N(\varepsilon, f(s))$. Por simetría se tiene que $f(s) \subset N(\varepsilon, f(t))$. Utilizando la Proposición 1.0.10, concluimos que $\mathcal{H}(f(t), f(s)) < \varepsilon$. De manera que f es una función continua. ■

Definición 2.3.7. A un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$, le llamaremos *arco*.

Definición 2.3.8. Sea P una propiedad topológica. Entonces decimos que P es una *propiedad de Whitney* si para cada continuo X con la propiedad P, para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para cada $t \in (0,1)$, se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P.

Lema 2.3.9. *Sean $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces si $[a,b]$ y $[x,y]$ son dos elementos diferentes de $\mu^{-1}(t)$, se satisface que $a < x$ y $b < y$ o bien $x < a$ y $y < b$.*

Demostración. (a) Si $b = y$ y $x \neq a$, entonces $[a,b] \subsetneq [x,y]$ o bien $[x,y] \subsetneq [a,b]$. Aplicando μ, obtenemos que $\mu([a,b]) < \mu([x,y])$ o $\mu([x,y]) < \mu([a,b])$, lo cual no puede ser, ya que $[x,y],[a,b] \in \mu^{-1}(t)$. De modo que $x = a$, así que $[a,b] = [x,y]$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, este caso no se puede dar.

(b) Si $b < y$ y $x \leq a$, entonces $[a,b] \subsetneq [x,y]$. Aplicando μ, obtenemos la desigualdad $\mu([a,b]) < \mu([x,y])$, lo cual es una contradicción, ya que $[x,y],[a,b] \in \mu^{-1}(t)$. De manera que $a < x$. Por tanto $a < x$ y $b < y$, como queríamos.

(c) Si $y < b$ y $a \leq x$, entonces $[x,y] \subsetneq [a,b]$. Por las propiedades de la función μ, $\mu([x,y]) < \mu([a,b])$, lo cual es absurdo. Por tanto, $y < b$ y $x < a$. Con esto, terminamos la prueba de nuestro lema. ■

Lema 2.3.10. *Los niveles de Whitney para el intervalo $[0,1]$ son arcos.*

Demostración. Sean $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Consideremos la función $\varphi : \mu^{-1}(t) \to [0,1]$ dada por:

$$\varphi(A) = \text{mín}(A).$$

En donde mín $: C([0,1]) \to [0,1]$ es la función definida en la Proposición 1.2.7, en donde se probó que es continua. Por tanto $\varphi = \text{mín}|_{\mu^{-1}(t)}$ es continua. Veamos que φ es inyectiva. Consideremos dos elementos diferentes $[a,b]$ y $[x,y]$ de $\mu^{-1}(t)$. Por el Lema 2.3.9, se cumple $a < x$ o bien $x < a$. Lo cual nos dice que $\varphi([a,b]) < \varphi([x,y])$ o $\varphi([x,y]) < \varphi([a,b])$. Así que φ es inyectiva. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto, φ es un homeomorfismo sobre su imagen. Por el Lema 8.4 de [12] sabemos que $\mu^{-1}(t)$ es un continuo no degenerado. Lo que implica que $\varphi(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo no degenerado de $[0,1]$, así que $\varphi(\mu^{-1}(t))$ es un arco. Por lo tanto $\mu^{-1}(t)$ también es un arco. ■

Corolario 2.3.11. *Ser arco es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Consideremos un arco X. De modo que X es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Por el Lema 2.3.5, existe un nivel de Whitney $\mathcal{B}$ de $C([0,1])$ que es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$. Por el Lema 2.3.10, $\mathcal{B}$ es un arco. Así, concluimos que $\mu^{-1}(t)$ también es un arco. ■

Definición 2.3.12. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualquier par de puntos diferentes $a, b \in X$, existe un arco J con extremos a y b.

El siguiente lema nos será útil en la prueba de algunos resultados de esta tesis. Éste es el Lema 8.2 de [12].

Lema 2.3.13. *Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney. Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe una trayectoria $\gamma : [0,1] \to \mathcal{A}$ que une a A con B y tal que $\gamma(r) \subset A \cup B$, para cada $r \in [0,1]$. Además, si se elige un punto $p \in A \cap B$, entonces se puede pedir que todos los elementos de la trayectoria contengan al punto p.*

Lema 2.3.14. *Sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney. Si $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $A \cap B = \emptyset$ y existe un arco J en X tal que $A \cap J \neq \emptyset$ y $B \cap J \neq \emptyset$, entonces existe un arco $\mathcal{L}$ contenido en $\mathcal{A}$ con extremos A y B tal que $\cup\mathcal{L} \subset A \cup J \cup B$.*

Demostración. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $\mu(J) \leq t$.

Como $J \cap A \neq \emptyset$, $A \cup J$ es un continuo. Veamos que $J \subsetneq A \cup J$. Supongamos que $J = J \cup A$. Como $A \subsetneq A \cup J$ (ya que $\emptyset \neq B \cap J \subset B \subset X \setminus A$), $t = \mu(A) < \mu(A \cup J) = \mu(J)$, lo cual no puede ser ya que $\mu(J) \leq t$. Así que, se satisface $J \subsetneq A \cup J$. Como $\mu(J) \leq t < \mu(A \cup J)$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $M \in \mu^{-1}(t)$ tal que $J \subset M \subset A \cup J$. Como $A \cap J \subset A \subset X \setminus B$ y $B \cap J \subset B \subset X \setminus A$, $J \not\subset A$ y $J \not\subset B$, así que $M \neq A$ y $M \neq B$. Entonces podemos aplicar dos veces el Lema 2.3.13 para obtener dos arcos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ contenidos en $\mu^{-1}(t)$, uno con extremos A y M y otro con extremos B y M, respectivamente, tales que $\cup\mathcal{C} \subset A \cup M$ y $\cup\mathcal{D} \subset M \cup B$. Como $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es un conjunto arcoconexo contenido en $\mu^{-1}(t)$. Además, se satisface que

$$\cup(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \subset A \cup M \cup B \subset A \cup J \cup B.$$

Por tanto, existe un arco $\mathcal{L}$ contenido en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B tal que $\cup\mathcal{L} \subset A \cup J \cup B$.

Caso 2. $t < \mu(J)$.

Sean $a \in A \cap J$ y $b \in B \cap J$. Como $\{a\}, \{b\} \subsetneq J$, aplicamos dos veces el Lema 2.2.4 para obtener elementos $M, N \in \mu^{-1}(t)$ tales que $a \in M \subset J$ y $b \in N \subset J$. Notemos, por el Lema 2.0.10, que $\frac{\mu|_{C(J)}}{\mu(J)} : C(J) \to [0,1]$ es una función de Whitney y que $\frac{t}{\mu(J)} < 1$. Entonces, por el Corolario 2.3.11,

$$\mathcal{L} = \left(\tfrac{\mu|_{C(J)}}{\mu(J)}\right)^{-1}\left(\tfrac{t}{\mu(J)}\right)$$

es un arco. Por el Lema 2.3.3, $\mathcal{L} = (\mu|_{C(J)})^{-1}(t)$. De modo que $\mathcal{L} \subset \mu^{-1}(t)$ y M y N son elementos de $\mathcal{L}$. Como $M \cap A \neq \emptyset$ y $N \cap B \neq \emptyset$, aplicamos dos veces el Lema 2.3.13 para obtener dos arcos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ contenidos en $\mu^{-1}(t)$, uno con extremos A y M y otro con extremos B y N, respectivamente, tales que $\cup\mathcal{C} \subset A \cup M$ y $\cup\mathcal{D} \subset N \cup B$. Como $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{D} \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{C} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{D}$ es un conjunto arcoconexo contenido en $\mu^{-1}(t)$ que tiene a A y B. Además, se satisface que

$$\cup(\mathcal{C} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{D}) \subset A \cup M \cup J \cup N \cup B \subset A \cup J \cup B.$$

Así que, existe un arco $\mathcal{L}$ contenido en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B tal que $\cup\mathcal{L} \subset A \cup J \cup B$. Con esto queda probado nuestro teorema. ■

Teorema 2.3.15. *Ser arcoconexo es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Tomemos dos elementos, A y B, de $\mu^{-1}(t)$.

Caso 1. $A \cap B \neq \emptyset$.

Por el Lema 2.3.13, existe un arco en $\mu^{-1}(t)$ que une a A con B.

Caso 2. $A \cap B = \emptyset$.

Sean $a \in A$ y $b \in B$. Como X es arcoconexo, existe un arco J con extremos a y b. De modo que podemos aplicar el Lema 2.3.14, para obtener un arco contenido en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B. ■

Los siguientes teoremas son los resultados 8.23 y 8.26 de [24].

Teorema 2.3.16. *Un continuo localmente conexo y no degenerado es arcoconexo.*

Teorema 2.3.17. *Cualquier abierto conexo de un continuo localmente conexo es arcoconexo.*

Proposición 2.3.18. *Si X es un continuo localmente conexo, U es un abierto conexo de X y $\mathcal{A}$ es un nivel de Whitney para $C(X)$, entonces*

$$\mathcal{U} = \{C \in \mathcal{A} : C \subset U\}$$

es un abierto arcoconexo de $\mathcal{A}$.

Demostración. Por la Proposición 1.1.1, $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{A}$. Supongamos que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ y tomemos dos elementos distintos A y $B \in \mathcal{U}$. Analicemos dos casos para ver que $\mathcal{U}$ es arcoconexo.

Caso 1. $A \cap B \neq \emptyset$.

Por el Lema 2.3.13, existe un arco $\mathcal{L}$ contenido en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B y tal que $\cup\mathcal{L} \subset A \cup B$. Como $A \cup B \subset U$, $\cup\mathcal{L} \subset U$. Por lo tanto, $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$.

Caso 2. $A \cap B = \emptyset$.

Tomemos $a \in A$ y $b \in B$. La contención $A \cup B \subset U$ implica que $a, b \in U$. Como X es localmente conexo y U es un abierto conexo de X, por el Teorema 2.3.17, U es arcoconexo. Así que, existe un arco J con extremos a y b tal que $J \subset U$. De manera que podemos aplicar el Lema 2.3.14 para obtener un arco $\mathcal{L}$ contenido en $\mu^{-1}(t)$ con extremos A y B y tal que $\cup\mathcal{L} \subset A \cup J \cup B$. Así que, $\cup\mathcal{L} \subset U$, de modo que $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$. Así concluimos nuestra proposición. ■

Teorema 2.3.19. *Ser localmente conexo es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney de un continuo X, $A \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$. Veremos que existe un abierto conexo $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{V} \subset B_H(\varepsilon, A)$. Por la Proposición 2.2.1, existe un número $\delta > 0$ tal que, para cada par de elementos $B, C \in \mathcal{A}$ que satisfacen que $B \subset N(\delta, C)$, se cumple que $H(B, C) < \varepsilon$.

Tomemos $a \in A$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo V_a de X tal que $a \in V_a \subset B_d(\delta, a)$. Definimos el abierto

$$V = \bigcup_{a \in A} V_a.$$

Entonces

$$A \subset V \subset \bigcup_{a \in A} B_d(\delta, a) = N(\delta, A).$$

Observamos que el abierto V es conexo, ya que $A \cap V_a \neq \emptyset$ y A y V_a, para cada $a \in A$, son conexos. Como X es localmente conexo, por el Teorema 2.3.17, V es arcoconexo. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{A} : B \subset V\}.$$

Por la Proposición 2.3.18, $\mathcal{V}$ es un abierto arcoconexo de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, es un conexo. Notemos que $A \in \mathcal{V}$. Verifiquemos que $\mathcal{V} \subset B_H(\varepsilon, A)$. Sea $B \in \mathcal{V}$. Entonces, por definición de $\mathcal{V}$, $B \subset V$ y, como, $V \subset N(\delta, A)$, tenemos que $B \subset N(\delta, A)$. Esto nos conduce a que $B \in B_H(\varepsilon, A)$ (por la manera en que tomamos δ). Así que, $\mathcal{V} \subset B_H(\varepsilon, A)$. Así, hemos visto que existe un abierto conexo $\mathcal{V}$ tal que

$$A \in \mathcal{V} \subset B_H(\varepsilon, A).$$

Con esto terminamos la prueba de que $\mathcal{A}$ es localmente conexo. ■

Capítulo 3

Bloques de Whitney

En este capítulo daremos la definición de bloques de Whitney, lo que será nuestro objeto de estudio. Veremos que los bloques de Whitney, restringidos a un subcontinuo del continuo original, también resultan ser bloques de Whitney. Probaremos algunos resultados básicos utilizando este concepto, los cuales nos servirán más adelante. En la Sección 3.1 daremos un par de modelos para los bloques de Whitney en los casos en que $X = [0,1]$ y $X = S$. En la Sección 3.2 introducimos las de propiedades topológicas inducidas para dar respuesta de manera parcial, a los Problemas 0.0.1 y 0.0.2 que planteamos en la Introducción. Terminamos el capítulo con un resumen.

Definición 3.0.20. Un *bloque de Whitney* de $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}([0,t])$, donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$.

Observación 3.0.21. Si $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t])$, entonces $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$.

Demostración. Como $\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$ es un cerrado de $\mu^{-1}([0,t])$, existe un cerrado $\mathcal{F}$ de $C(X)$ tal que $\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}) = \mathcal{F} \cap \mu^{-1}([0,t])$. Debido a que $\mu^{-1}([0,t])$ es un cerrado de $C(X)$, $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([0,t]) = \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$ es un cerrado de $C(X)$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$. ■

Lema 3.0.22. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si r, s son tales que $0 \leq r < s \leq 1$, entonces $\mu^{-1}([r,s])$ es un continuo no degenerado.*

Demostración. Notemos que $0, 1 \in \mathrm{Im}\,\mu$ y como $C(X)$ es un continuo (por el Corolario 6.13 de [12]), $\mu(C(X)) = [0,1]$. Lo cual nos dice que μ es un función suprayectiva. Por lo tanto existen $M \in \mu^{-1}(r)$ y $N \in \mu^{-1}(s)$. De modo que $\mu^{-1}([r,s])$ es no degenerado.

Por otra parte, como el intervalo $[r,s]$ es cerrado y μ es una función continua, $\mu^{-1}([r,s])$ es un conjunto cerrado.

Veamos que $\mu^{-1}([r,s])$ es conexo. Tomemos $A \in \mu^{-1}([r,s))$. Como $A \subsetneq X$ (ya que $\mu(A) < s \leq 1$), por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $A \subsetneq B$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_A : [0,1] \to \mu^{-1}([\mu(A), s])$ de A a B. Como $\mu(A) \in [r,s]$, se satisface que $\operatorname{Im} \alpha_A \subset \mu^{-1}([r,s])$. Como $\alpha_A(1) = B \in \mu^{-1}(s)$ se tiene $\operatorname{Im} \alpha_A \cap \mu^{-1}(s) \neq \emptyset$. Utilizando el Teorema 8.3 de [12], para el caso en que $s < 1$, tenemos que $\mu^{-1}(s)$ es conexo. Para el caso en que $s = 1$, tenemos que $\mu^{-1}(s) = \{X\}$. De modo que $\operatorname{Im} \alpha_A \cup \mu^{-1}(s)$ también es un conexo.

Por lo probado en el párrafo anterior, tenemos la siguiente igualdad:

$$\mu^{-1}([r,s]) = \bigcup_{A \in \mu^{-1}([r,s))} \Big(\operatorname{Im} \alpha_A \cup \mu^{-1}(s) \Big).$$

Con esto concluimos que $\mu^{-1}([r,s])$ es un conexo y, por tanto, un continuo. ■

Corolario 3.0.23. *Cada bloque de Whitney es un continuo no degenerado.*

Demostración. Tomando $r = 0$ en el Lema 3.0.22, $\mu^{-1}([0,s])$ es un continuo no degenerado para cada $s \in (0,1)$. ■

Lema 3.0.24. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $K \notin F_1(X)$ y $0 \leq r < s \leq \mu(K)$, entonces $(\mu|_{C(K)})^{-1}([r,s])$ es un continuo no degenerado. Además, se da la siguiente igualdad de conjuntos:*

$$(\mu|_{C(K)})^{-1}([r,s]) = \big(\tfrac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\big)^{-1}\big(\big[\tfrac{r}{\mu(K)}, \tfrac{s}{\mu(K)}\big]\big).$$

Demostración. Como $K \notin F_1(X)$, por el Lema 2.0.10, la función $\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)} : C(K) \to [0,1]$ es una función de Whitney. Debido a que $0 \leq r < s \leq \mu(K)$, $0 \leq \frac{r}{\mu(K)} < \frac{s}{\mu(K)} \leq 1$. Así que, por el Lema 3.0.22, $\big(\frac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\big)^{-1}\big(\big[\frac{r}{\mu(K)}, \frac{s}{\mu(K)}\big]\big)$ es un continuo no degenerado. Observemos que

$$\left(\tfrac{\mu|_{C(K)}}{\mu(K)}\right)^{-1}\left(\left[\tfrac{r}{\mu(K)}, \tfrac{s}{\mu(K)}\right]\right) = \left\{A \in C(K) : \tfrac{r}{\mu(K)} \leq \tfrac{\mu(A)}{\mu(K)} \leq \tfrac{s}{\mu(K)}\right\}$$
$$= \{A \in C(K) : r \leq \mu(A) \leq s\} = (\mu|_{C(K)})^{-1}([r, s]).$$

Con esto finalizamos nuestra demostración. ■

Lema 3.0.25. *Sean $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mu^{-1}([0, t])$ y F un cerrado de X.*
(a) Si $A \cap F \neq \emptyset$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mu^{-1}([0, t]) : B \cap F \neq \emptyset\} = \mathcal{D}(F) \cap \mu^{-1}([0, t]).$$

(b) Si $F \subset A$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mu^{-1}([0, t]) : F \subset B\} = \mathcal{E}(F) \cap \mu^{-1}([0, t]).$$

(c) Si $A \subset F$, para cada $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mu^{-1}([0, t]) : B \subset F\} = \mathcal{C}(F) \cap \mu^{-1}([0, t]).$$

Demostración. (a) Aplicando el Lema 1.1.8, obtenemos $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F)$. Por otra parte, como $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0, t])$ y $\mu^{-1}([0, t])$ es un cerrado de $C(X)$, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) \subset \mu^{-1}([0, t])$. Como $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0, t])$ y $\mu^{-1}([0, t])$ es un cerrado de $C(X)$, tenemos que $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{A}) = \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(F) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Así concluimos con la prueba de (a). De manera similar se prueban (b) y (c). ■

Proposición 3.0.26. *Sean $\mathcal{A} = \mu^{-1}([0, t])$ un bloque de Whitney de $C(X)$ y $P \in C(X)$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{A} : M \cap P \neq \emptyset\}$$

es un subcontinuo de $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{M}$. Entonces $M \cap P \neq \emptyset$. Consideremos un elemento $p \in M \cap P$. En el caso en que $M = \{p\}$, definimos $\alpha_M : [0, 1] \to \mu^{-1}([0, t])$ como la función constante $\alpha_M(r) = M$ para cada $r \in [0, 1]$. Observemos que $\mathrm{Im}\,\alpha_M \subset \mathcal{M}$. En el caso en que $\{p\} \subsetneq M$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_M : [0, 1] \to \mu^{-1}([0, \mu(M)])$ de $\{p\}$ a M. Como $\mu(M) \leq t$, obtenemos $\mathrm{Im}\,\alpha_M \subset \mu^{-1}([0, t])$. Como α_M es arco ordenado, se satisface que $\{p\} = \alpha_M(0) \subset \alpha_M(r)$ para todo número $r \in [0, 1]$. De modo que $\alpha_M(r) \cap P \neq \emptyset$ para todo número $r \in [0, 1]$. Por lo tanto, $\mathrm{Im}\,\alpha_M \subset \mathcal{M}$. Observemos que $F_1(P) \subset \mathcal{M}$ ya que $\mu(\{p\}) = 0$ y $\{z\} \cap P \neq \emptyset$ para cada $z \in P$. Por lo tanto, tenemos la siguiente igualdad

$$\mathcal{M} = \bigcup_{M\in\mathcal{M}}(\operatorname{Im}\alpha_M \cup F_1(P)).$$

Como $\operatorname{Im}\alpha_M$ y $F_1(P)$ son dos conexos que se intersectan, $\operatorname{Im}\alpha_M \cup F_1(P)$ también es un conexo. Es decir, $\mathcal{M}$ es un conexo. Así que $\bigcup_{M\in\mathcal{M}}(\operatorname{Im}\alpha_M \cup F_1(P))$ también es un conexo. Utilizando la Proposición 1.1.2, obtenemos que $\mathcal{M}$ es un cerrado. Por lo tanto, $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mathcal{A}$. ■

Lema 3.0.27. *Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números de $(0,1]$ tal que $\lim t_n = 0$, entonces $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$.*

Demostración. Como $C(X)$ es un continuo (por el Corolario 6.13 de [12]), tenemos (por el Corolario 4.3 de [12]) que $C(C(X))$ es compacto. De modo que podemos suponer que la sucesión $\{\mu^{-1}([0,t_n])\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un elemento $\mathcal{A} \in C(C(X))$. Verifiquemos que $\mathcal{A} = F_1(X)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Veremos que existe un natural N tal que $\mathcal{H}(F_1(X), \mu^{-1}([0,t_n])) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$, en donde $\mathcal{H}$ es la métrica en $C(C(X))$. Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\eta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$. Como $\lim t_n = 0$, existe un natural N tal que $t_n < \eta$ para cada $n \geq N$. Sea $n \geq N$. Consideremos un elemento $A \in \mu^{-1}([0,t_n])$. Fijemos $a \in A$. Como $\mu(A) - \mu(\{a\}) = \mu(A) - 0 = \mu(A) \leq t_n < \eta$, $H(A,\{a\}) < \varepsilon$. Con lo cual obtenemos que $A \in N(\varepsilon, F_1(X))$. De manera que $\mu^{-1}([0,t_n]) \subset N(\varepsilon, F_1(X))$. Por otro lado, $F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t_n]) \subset N(\varepsilon, \mu^{-1}([0,t_n]))$. Luego, la Proposición 1.0.10, nos dice que $\mathcal{H}(\mu^{-1}([0,t_n]), F_1(X)) < \varepsilon$. Con esto hemos visto que $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$, con lo cual finalizamos la prueba de nuestro lema. ■

3.1. Modelos de bloques de Whitney

Los modelos de hiperespacios son una vertiente atractiva del estudio de los hiperespacios. Veamos un par de ejemplos de modelos de bloques de Whitney.

Ejemplo 3.1.1. *Bloques de Whitney para $X = [0,1]$.*

Sabemos que los subcontinuos de un intervalo cerrado son conjuntos de un solo punto o intervalos cerrados. De modo que:

$$C([0,1]) = \{A \subset [0,1] : A \text{ es un punto o un intervalo cerrado}\}$$
$$= \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Definimos la función $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ como:

$$\mu([a,b]) = b - a.$$

Es sencillo verificar que ésta es una función de Whitney para $C([0,1])$. Tomemos $t \in (0,1)$. Veamos cómo es $\mu^{-1}([0,t])$. Notemos que:

$$\mu^{-1}([0,t]) = \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1 \text{ y } 0 \leq \mu([a,b]) \leq t\}$$
$$= \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1 \text{ y } 0 \leq b - a \leq t\}.$$

Consideremos el conjunto:

$$T = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : 0 \leq x \leq y \leq 1 \text{ y } 0 \leq y - x \leq t\}.$$

Definimos la función $\phi : \mu^{-1}([0,t]) \to T$ como:

$$\phi([a,b]) = (a,b).$$

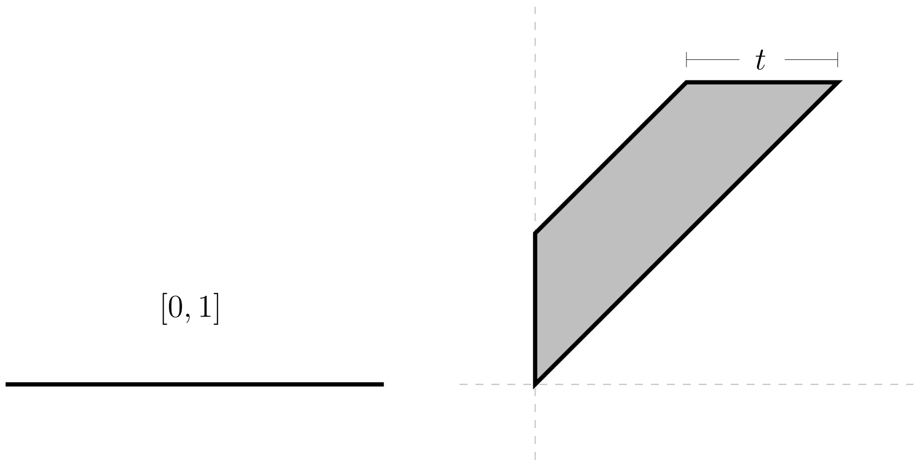

Figura 2: $\mu^{-1}([0,t])$

Observemos que ϕ está bien definida. Utilizando la Proposición 1.2.7, obtenemos que ϕ es una función continua. Es sencillo ver que ϕ es una biyección y, como se define entre continuos, ϕ es un homeomorfismo. Así que, $\mu^{-1}([0,t])$ es una 2-celda. Ver Figura 2. ■

Ejemplo 3.1.2. *Bloques de Whitney para $X = S$.*

Sea S la circunferencia unitaria en el plano. En este caso, sabemos que los subcontinuos de S son conjuntos de un solo punto, arcos o el mismo S. Denotamos por $m(A)$ al punto medio de un subarco A de S o $m(\{a\}) = a$ para el caso de un singular. Además, denotamos por $l(A)$ a la longitud de arco de un subarco A de S y $l(\{a\}) = 0$ para el caso de un singular. Notemos que cada subarco A de S está perfectamente determinado por $m(A)$ y $l(A)$.

Definimos $\mu : C(S) \to [0,1]$ como:

$$\mu(A) = \tfrac{l(A)}{2\pi}.$$

Es sencillo verificar que ésta es una función de Whitney para $C(S)$. Veamos cómo son los bloques de Whitney para $C(S)$. Sea $t \in (0,1)$. Notemos que:

$$\begin{aligned}\mu^{-1}([0,t]) &= \{A \in C(S) : \mu(A) \leq t\}\\ &= \{A \in C(S) : \tfrac{l(A)}{2\pi} \leq t\}.\end{aligned}$$

Definimos $\phi : \mu^{-1}([0,t]) \to S \times [0,t]$ como:

$$\phi(A) = (m(A), \mu(A)).$$

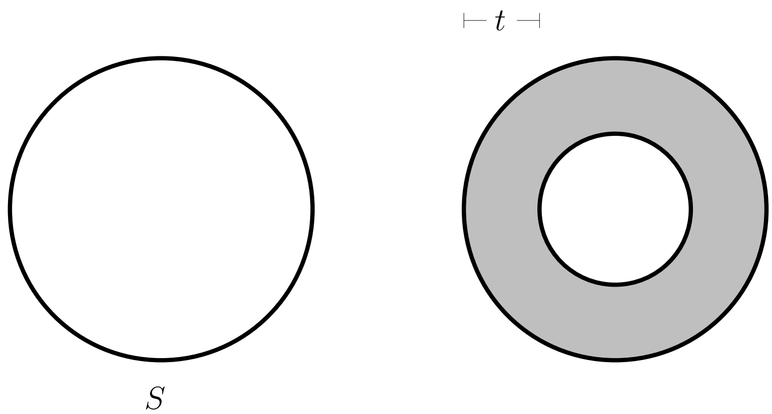

Figura 3: $\mu^{-1}([0,t])$

Como $t < 1$, $l(A) < 2\pi$. Así que ϕ está bien definida. Además, ϕ es una función continua. Veamos que ϕ es inyectiva. Consideremos dos elementos, A y B, tales que $(m(A), \mu(A)) = \phi(A) = \phi(B) = (m(B), \mu(B))$. Por la definición de la función m, $A \subset B$ o $B \subset A$. Como μ es una función de Whitney, $A = B$. Verifiquemos que ϕ es suprayectiva. Tomemos $(x, y) \in S \times [0, t]$. Notemos que $2\pi y < 2\pi$ ya que $y \leq t < 1$. Sea A el arco que tiene como punto medio a x y cuya longitud de arco es $2\pi y$. De modo que $\phi(A) = (m(A), \mu(A)) = (x, \frac{2\pi y}{2\pi}) = (x, y)$. Por lo tanto, ϕ es una función continua y biyectiva entre continuos, así que ésta es un homeomorfismo. Ver Figura 3. ■

3.2. Propiedades topológicas inducidas

Para dar respuesta a las Preguntas 0.0.1 y 0.0.2 (que indicamos en la introducción) de una manera precisa introducimos las siguientes definiciones. Después de esto empezamos el análisis de algunas propiedades topológicas. Al final de este capítulo hacemos un resumen de los resultados obtenidos en una tabla.

Definición 3.2.1. Sea P una propiedad topológica, diremos que:

1. P es *inducida a todos los bloques de Whitney* si para cada continuo X con la propiedad P, para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y para todo $t \in (0, 1)$, se tiene que $\mu^{-1}([0, t])$ tiene la propiedad P.

2. P es *inducida a los bloques pequeños de Whitney* si para cada continuo X con la propiedad P y para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$, existe $s \in (0, 1)$ tal que, para todo $t \leq s$, se tiene que $\mu^{-1}([0, t])$ tiene la propiedad P.

3. P es *inducida débilmente a los bloques de Whitney* si para cada continuo X con la propiedad P, existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ tal que para todo $s \in (0, 1)$, existe $t \in (0, s)$ tal que $\mu^{-1}([0, t])$ tiene la propiedad P.

4. P es *inducida por los bloques de Whitney* si para cada continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad P, para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y para algún $t \in (0,1)$, se tiene que X tiene la propiedad P.

5. P es *inducida fuertemente por los bloques de Whitney* siempre que se cumple la siguiente implicación: si existe una sucesión de bloques de Whitney en $C(X)$ que tienen la propiedad P y que convergen a $F_1(X)$, entonces X tiene la propiedad P.

Observación 3.2.2. Destaquemos que:

(a) Una propiedad inducida a todos los bloques de Whitney es inducida a los bloques pequeños de Whitney.

(b) Una propiedad inducida a todos los bloques de Whitney es inducida débilmente a los bloques de Whitney.

(c) Una propiedad inducida a los bloques pequeños de Whitney es inducida débilmente a los bloques de Whitney.

(d) Una propiedad inducida por los bloques de Whitney es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.

Observación 3.2.3. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Supongamos que $\{\mu^{-1}([0,t_n])\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de bloques de Whitney en $C(X)$ que converge a $F_1(X)$, entonces $\lim t_n = 0$.

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de μ, existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ satisfacen que $H(A,B) < \delta$, entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \varepsilon$. Sea $\mathcal{H}$ la métrica de Hausdorff para $C(C(X))$. Como $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(F_1(X), \mu^{-1}([0,t_n])) < \delta$, para cada $n \geq N$. Por la Proposición 1.0.10, $\mu^{-1}([0,t_n]) \subset N(\delta, F_1(X))$, para cada $n \geq N$. Sea $m \geq N$. Consideremos un elemento $A_m \in \mu^{-1}(t_m)$. Debido a que $\mu^{-1}(t_m) \subset \mu^{-1}([0,t_m]) \subset N(\delta, F_1(X))$, existe $x_m \in X$ tal que $H(A_m, \{x_m\}) < \delta$. Por lo tanto $t_m = \mu(A_m) < \varepsilon$. Con lo cual concluimos que $\lim t_n = 0$. ■

3.2.1. Arcoconexidad

En esta subsección probaremos que ser arcoconexo (Definición 2.3.12) es una propiedad inducida a todos los bloques de Whitney, aunque no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney. Para ver esto, utilizaremos el siguiente resultado. Conviene comparar su demostración con la del Lema 2.3.14 para así apreciar la ventaja de trabajar con bloques de Whitney.

Lema 3.2.4. *(M. E. Aguilera) Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $t \in (0,1)$ y A y B dos elementos diferentes de $\mu^{-1}([0,t])$. Si $A \cap B \neq \emptyset$ o si existe un arco $J \subset X$ tal que $A \cap J \neq \emptyset$ y $B \cap J \neq \emptyset$, entonces existe un arco contenido en $\mu^{-1}([0,t])$ que une a A y B.*

Demostración. Sea $a \in A$. En el caso en que $A \neq \{a\}$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_a : [0,1] \to \mu^{-1}([0,\mu(A)])$ de $\{a\}$ a A. Como $A \in \mu^{-1}([0,t])$, se satisface que $\operatorname{Im}\alpha_a \subset \mu^{-1}([0,t])$. Para el caso en que $A = \{a\}$, definimos $\alpha_a : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ como $\alpha_a(r) = \{a\}$ para todo $r \in [0,1]$. Tomemos $b \in B$. De manera similar, tenemos una función continua $\beta_b : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ tal que, si $\{b\} \neq B$ entonces β_b es un arco ordenado de $\{b\}$ a B y, si $\{b\} = B$, entonces β_b es la función constante $\{b\}$.

Notemos que, para cada $(a,b) \in A \times B$, hemos construido las funciones α_a y β_b como indicamos en el párrafo anterior.

Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Fijemos $x \in A \cap B$. Consideremos a α_x y β_x. De manera que $\{x\} \in \operatorname{Im}\alpha_x \cap \operatorname{Im}\beta_x$, así que $\operatorname{Im}\alpha_x \cup \operatorname{Im}\beta_x$ es un conjunto arcoconexo contenido en $\mu^{-1}([0,t])$ y contiene a A y B. Por lo tanto, existe un arco en $\mu^{-1}([0,t])$ que tiene por extremos a A y B.

Supongamos que $A \cap B = \emptyset$ y que existe un arco $J \subset X$ tal que $A \cap J \neq \emptyset$ y $B \cap J \neq \emptyset$. En este caso, fijemos $x \in A \cap J$ y $y \in B \cap J$. Sean α_x y β_y como se definieron en el primer párrafo de esta demostración. Observemos que J es homeomorfo a $\mathcal{J} = F_1(J)$. Notemos que $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{J}$. Como $\{x\} \in \mathcal{J} \cap \operatorname{Im}\alpha_x$ y $\{y\} \in \mathcal{J} \cap \operatorname{Im}\beta_y$, $\operatorname{Im}\alpha_x \cup \mathcal{J} \cup \operatorname{Im}\beta_y$ es un conjunto arcoconexo contenido en $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a A y B. De manera que, existe un arco en $\mu^{-1}([0,t])$ que une a A con B. ■

Teorema 3.2.5. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser arcoconexo es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo arcoconexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Tomemos dos elementos diferentes A y B de $\mu^{-1}([0,t])$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, por el Lema 3.2.4 obtenemos un arco en $\mu^{-1}([0,t])$ que une a A con B. Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Tomemos $a \in A$ y $b \in B$. Como X es arcoconexo, existe un arco $J \subset X$ con extremos a y b. De manera que $J \cap A \neq \emptyset$ y $J \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto podemos aplicar el Lema 3.2.4 de nuevo, para obtener un arco contenido en $\mu^{-1}([0,t])$ que une a A y B. ■

Definición 3.2.6. Dados un espacio topológico Y y un punto $p \in Y$, se define la *arco componente* $C(p)$ *de* p *en* Y como el conjunto:

$$C(p) = \bigcup \{D \subset Y : D \text{ es arcoconexo y } p \in D\}.$$

Observación 3.2.7. Para probar el Teorema 3.2.8 necesitamos un continuo X que no sea arcoconexo y tal que sus bloques de Whitney sí sean arcoconexos. Si X fuera localmente conexo, por el Teorema 2.3.16, tendríamos que X es arcoconexo, lo cual no puede ser. Por lo tanto X no puede ser localmente conexo.

Teorema 3.2.8. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser arcoconexo no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.*

Demostración. Describiremos al continuo dado en el Ejemplo 1 de [9]. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(\tfrac{2}{(4n+1)\pi}, y) : 1 \leq y \leq 1 + \tfrac{1}{2^n}\},$$

$$M_n = \{(x, 1 + \tfrac{3+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2^{n+2}}) : 0 < x \leq \tfrac{2}{(4n+1)\pi}\} \cup \{(0,y) : 1 + \tfrac{1}{2^{n+1}} \leq y \leq 1 + \tfrac{1}{2^n}\},$$

$$J = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\},$$

$$M = J \cup \{(x, \operatorname{sen}\tfrac{1}{x}) : 0 < x \leq \tfrac{2}{\pi}\},$$

$$K = \{(0,y) : 1 \leq y \leq 2\} \text{ y}$$

$$X = M \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(L_n \cup M_n).$$

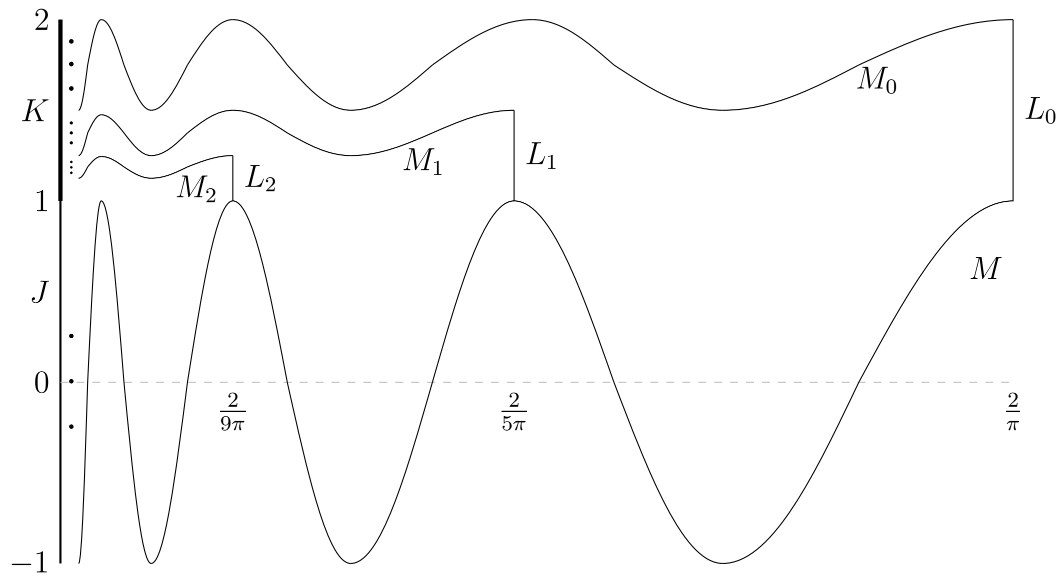

Figura 4: X

Notemos que M y M_n, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, son homeomorfos al continuo sen $\frac{1}{x}$, y los subconjuntos K y L_n, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, son arcos. Es fácil ver que $L_n \cap M_n = \{(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1 + \frac{1}{2^n})\}$, $L_n \cap M = \{(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1)\}$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $K \cap M = \{(0,1)\}$, de modo que X es un continuo. Observemos que X no es arcoconexo, pues tiene dos arco componentes, a saber, $J \cup K$ y $X \setminus (J \cup K)$. Ver Figura 4.

Consideremos una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos los números $t_n = \mu(M_n)$. Observemos que $\lim M_n = \{(0,1)\}$, así que $\lim t_n = 0$. Por el Lema 3.0.27, $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$.

Afirmación. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu^{-1}([0,t_n])$ es arcoconexo.

Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $A \in \mu^{-1}([0,t_n])$ tales que $A \neq M_n$. Veremos que existe un arco en $\mu^{-1}([0,t_n])$ que contiene a A y M_n. En el caso en que $A \cap M_n \neq \emptyset$, la existencia del arco se obtiene del Lema 3.2.4. Supongamos que $A \cap M_n = \emptyset$.

Analicemos los siguientes casos.

Caso (i). $A \cap (J \cup K) \neq \emptyset$.

Como $J \cup K$ es un arco, $M_n \cap (J \cup K) \neq \emptyset$ y $A \cap (J \cup K) \neq \emptyset$, podemos aplicar el Lema 3.2.4 para obtener un arco contenido en $\mu^{-1}([0, t_n])$ que une a A y M_n.

Caso (ii). $A \cap (J \cup K) = \emptyset$.

En este caso fijemos elementos $v \in M_n \setminus (J \cup K)$ y $z \in A$. Como $X \setminus (J \cup K)$ es arcoconexo, existe un arco $J \subset X \setminus (J \cup K)$ que une a v y z. De manera que $J \cap M_n \neq \emptyset$ y $J \cap A \neq \emptyset$. Así que, nuevamente podemos aplicar el Lema 3.2.4 para obtener un arco en $\mu^{-1}([0, t_n])$ que une a A y M_n. De esta manera terminamos nuestra afirmación.

Por lo tanto, tenemos la sucesión $\{\mu^{-1}([0, t_n])\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada elemento es arcoconexo y $\lim \mu^{-1}([0, t_n]) = F_1(X)$. Como X no es arcoconexo, concluimos que la propiedad de ser arcoconexo no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney. ■

3.2.2. Conexidad local

En esta subsección trabajaremos con la propiedad de ser localmente conexo. Probaremos, principalmente, que ésta es inducida a todos los bloques de Whitney e inducida por los bloques de Whitney. Para demostrar el primer resultado nos auxiliaremos del siguiente lema.

Lema 3.2.9. *(M. E. Aguilera) Sean X localmente conexo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si A y B son dos elementos distintos de $C(X)$ y U es un abierto conexo de X que satisfacen $A \cup B \subset U$ y $\mu(B) \leq \mu(A)$, entonces existe un elemento $C \in \mu^{-1}(\mu(A))$ tal que $B \subset C \subset U$.*

Demostración. Veamos que existe un elemento $a \in A \setminus B$. Si suponemos lo contrario, tendríamos que $A \subset B$. Como μ es una función de Whitney, se tiene que $\mu(A) \leq \mu(B)$. Por hipótesis, sabemos que $\mu(B) \leq \mu(A)$, lo cual nos conduce a que $\mu(A) = \mu(B)$. Como $A \subset B$ y μ es una función de Whitney, $A = B$. Lo cual es una contradicción ya que éstos son elementos distintos.

Sea a como en el párrafo anterior. Consideremos $b \in B$. Por el Teorema 2.3.17, U es arcoconexo. Como $a, b \in U$, existe un arco J con extremos a y b tal que $J \subset U$. Observemos que $A \cup B \cup J$ es conexo. Como existe $a \in A \setminus B$, $B \subsetneq A \cup B \cup J$. Como $A \subset A \cup J \cup B$ y μ es una función de Whitney, se satisface $\mu(A) \leq \mu(A \cup J \cup B)$. Por hipótesis tenemos que $\mu(B) \leq \mu(A)$, luego $\mu(A) \in [\mu(B), \mu(A \cup B \cup J)]$.

Por el Lema 2.2.4, existe $C \in \mu^{-1}(\mu(A))$ tal que $B \subset C \subset A \cup B \cup J$. Como $A \cup B \cup J \subset U$, $C \subset U$. Con esto queda probada nuestra proposición. ■

Teorema 3.2.10. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser localmente conexo es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0, 1)$. Tomemos $A \in \mu^{-1}([0, t])$ y $\varepsilon > 0$. Verifiquemos que existe un conexo que tiene en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$, a A y está contenido en $B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0, t])$.

Por las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, existe un número $\rho > 0$ tal que:

(1) para C y $D \in C(X)$ tales que $\mu(C) = \mu(D)$, si $C \subset N(\rho, D)$, entonces $H(D, C) < \frac{\varepsilon}{2}$ y

(2) para C y $D \in C(X)$ tales que $C \subset D$ y $\mu(D) - \mu(C) < \rho$, se tiene que $H(C, D) < \frac{\varepsilon}{2}$.

A continuación vamos a definir un abierto en $\mu^{-1}([0, t])$ que contiene a A. Tomemos $a \in A$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo V_a de X tal que $a \in V_a \subset B_d(\rho, a)$. Definimos el conjunto

$$V = \bigcup_{a \in A} V_a,$$

que es un abierto de X. Como A y V_a se intersectan y éstos son conexos, para cada $a \in A$, V también lo es. Notemos las siguientes contenciones:

$$A \subset V \subset \bigcup_{a \in A} B_d(\rho, a) = N(\rho, A).$$

Definimos:

$$\mathcal{U} = \{B \in \mu^{-1}([0,t]) : B \subset V\} \cap \mu^{-1}((\mu(A) - \rho, \mu(A) + \rho)).$$

Por la Proposición 1.1.1 y por la continuidad de la función $\mu, \mathcal{U}$ es un abierto en $\mu^{-1}([0,t])$. Observemos que $A \in \mathcal{U}$.

Probaremos ahora la siguiente afirmación: para cada elemento $B \in \mathcal{U} \setminus \{A\}$ existe un arco $\mathcal{J}_B \subset \mu^{-1}([0,t]) \cap B_H(\varepsilon, A)$ que une a A y B. Tomemos un elemento $B \in \mathcal{U} \setminus \{A\}$. Por la definición de $\mathcal{U}$, sabemos que $\mu(B) \leq t$, $B \subset V$ y $|\mu(A) - \mu(B)| < \rho$.

Caso (i). $\mu(B) \leq \mu(A)$.

Como X es localmente conexo, V es un abierto conexo de X y $A \cup B \subset V$. Por el Lema 3.2.9, existe un elemento $C \in \mu^{-1}(\mu(A))$ tal que $B \subset C \subset V$. Notemos que $A, C \in \{K \in \mu^{-1}(\mu(A)) : K \subset V\}$. Teniendo en cuenta que X es localmente conexo y que V es un abierto conexo, podemos aplicar el Lema 2.3.18 para obtener que $\{K \in \mu^{-1}(\mu(A)) : K \subset V\}$ es arcoconexo. De modo que, existe un arco

$$\mathcal{L} \subset \{K \in \mu^{-1}(\mu(A)) : K \subset V\}$$

que une a A y C. Por construcción, $V \subset N(\rho, A)$. Por lo tanto, $L \subset N(\rho, A)$ para cada $L \in \mathcal{L}$. Como $\mu(L) = \mu(A)$, por (1), $H(A, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $L \in \mathcal{L}$. Es decir

$$\mathcal{L} \subset B_H(\tfrac{\varepsilon}{2}, A) \cap \mu^{-1}(\mu(A)) \subset B_H(\tfrac{\varepsilon}{2}, A) \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

En el caso en que $B \subsetneq C$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([0, \mu(C)])$ de B a C. Como $\mu(C) = \mu(A) \leq t$, $\operatorname{Im} \beta \subset \mu^{-1}([0,t])$. Consideremos $r \in [0,1]$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado se satisface que $B = \beta(0) \subset \beta(r) \subset \beta(1) = C$. Como μ es una función de Whitney, sabemos que $\mu(B) \leq \mu(\beta(r)) \leq \mu(C)$. Por lo tanto,

$$\mu(C) - \mu(\beta(r)) \leq \mu(C) - \mu(B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Como $A, B \in \mathcal{U}$, $\mu(A) - \mu(B) < \rho$, lo cual nos lleva a que $\mu(C) - \mu(\beta(r)) < \rho$. Por (2), concluimos que $H(C, \beta(r)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos

$$H(A,\beta(r)) \leq H(A,C) + H(C,\beta(r)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para el caso en que $B = C$, definimos $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ como $\beta(r) = B$ para todo $r \in [0,1]$. Notemos que $H(A,\beta(r)) = H(A,B) = H(A,C) < \frac{\varepsilon}{2}$. En resumen, hemos obtenido una función continua $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([0,\mu(C)])$ tal que $B, C \in \operatorname{Im}\beta$ e $\operatorname{Im}\beta \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t])$.

Como $C \in \mathcal{L} \cap \operatorname{Im}\beta$, $\mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$ es un espacio arcoconexo contenido en $B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t])$. Observemos que $A, B \in \mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$. Así que, existe un arco $\mathcal{J}_B$ contenido en $\mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$ que une a A y B. Por la construcción de $\mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$, $\mathcal{J}_B \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t])$.

Caso (ii). $\mu(A) < \mu(B)$.

Consideremos un elemento $b \in B$. Como $\{b\} \subsetneq B$ (ya que $\mu(B) > 0$) y $\mu(A) \in [0, \mu(B))$, podemos aplicar el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $C \in \mu^{-1}(\mu(A))$ tal que $\{b\} \subset C \subset B$. Como $\mu(A) < \mu(B)$ y $\mu(A) = \mu(C)$, $\mu(C) < \mu(B)$. Esto último nos dice que $C \subsetneq B$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([0,\mu(B)])$ de C a B. Tomemos $r \in [0,1]$. Notemos que $C = \beta(0) \subset \beta(r) \subset \beta(1) = B$. Aplicando μ, obtenemos

$$\mu(\beta(r)) - \mu(C) \leq \mu(B) - \mu(C) = \mu(B) - \mu(A).$$

Como $A, B \in \mathcal{U}$, $\mu(B) - \mu(A) < \rho$. Esto nos conduce a que $\mu(\beta(r)) - \mu(C) < \rho$. Por (2), $H(\beta(r), C) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $C \subset B$ y $B \in \mathcal{U}$, tenemos las siguientes contenciones: $C \subset B \subset V \subset N(\rho, A)$, de manera que $C \subset N(\rho, A)$. Entonces, por (1), $H(A,C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $r \in [0,1]$. Utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$H(A,\beta(r)) \leq H(A,C) + H(C,\beta(r)) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\beta : [0,1] \to \mu^{-1}([0,\mu(B)])$ y $\mu(B) \leq t$, concluimos esta parte diciendo que $\operatorname{Im}\beta \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t])$.

Notemos que $C \in \mathcal{U}$. Como $\mu(A) = \mu(C)$, podemos aplicar el caso (i) para obtener un arco $\mathcal{L} \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t])$ que une a A y C.

Como $C \in \mathcal{L} \cap \operatorname{Im}\beta$, $\mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$ es arcoconexo. Como $A, B \in \mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$, existe un arco $\mathcal{J}_B$ en $\mathcal{L} \cup \operatorname{Im}\beta$ con extremos a A y B. Observemos que

$$B \in \mathcal{J}_B \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$A \in \mathcal{U} \subset \bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_B \subset B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

Donde $\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_B$ es conexo, ya que $A \in \mathcal{J}_B$ para todo elemento $B \in \mathcal{U}$. Con esto hemos probado que $\mu^{-1}([0,t])$ es conexo en pequeño en el elemento A. Como A es un elemento cualquiera de $\mu^{-1}([0,t])$, podemos concluir que $\mu^{-1}([0,1])$ es conexo en pequeño en todos sus elementos. Así que, por el Lema 1.5.4, éste es localmente conexo. ■

Teorema 3.2.11. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser localmente conexo es inducida por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$ tales que $\mu^{-1}([0,t])$ es localmente conexo. Probaremos que X también lo es.

Tomemos $p \in X$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Mostraremos que existe un conexo V de X tal que $p \in \mathrm{int}_X(V) \subset V \subset U$. Por la Proposición 1.1.1, el conjunto

$$\mathcal{U} = \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : A \subset U\}$$

es un abierto de $\mu^{-1}([0,t])$. Notemos que $\{p\} \in \mathcal{U}$. Por hipótesis, $\mu^{-1}([0,t])$ es localmente conexo y, por tanto, $\mu^{-1}([0,t])$ es conexo en pequeño en $\{p\}$. Entonces, existe un conexo $\mathcal{V}$ de $\mu^{-1}([0,t])$ tal que

$$\{p\} \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}.$$

Como $\{p\} \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})$, por la Proposición 1.3.2, existen abiertos $W_1, W_2, \ldots, W_n$ de X tales que

$$\{p\} \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle \cap \mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{V}.$$

Notemos que el conjunto $\cap_{i=1}^n W_i$ es un abierto en X y $p \in \cap_{i=1}^n W_i$. Verifiquemos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $\cap_{i=1}^n W_i \subset \cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}))$.

Consideremos $x \in \cap_{i=1}^n W_i$. Por lo tanto $\{x\} \subset \cup_{i=1}^n W_i$, $\{x\} \cap W_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mu(\{x\}) = 0$. De modo que

$$\{x\} \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

Así que $\{x\} \in \mathcal{V}$, lo cual nos conduce a que $x \in \cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}))$.

Afirmación 2. $\cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})) \subset U$.

Sea $x \in \cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}))$. Por definición, existe $B \in \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})$ tal que $x \in B$. De modo que $B \in \mathcal{U}$. Por la definición de $\mathcal{U}$, $B \subset U$. Por lo tanto, $x \in U$. De esta manera, obtenemos que $\cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})) \subset U$.

Como $\{p\} \in \mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}) \cap C(X)$ y $\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})$ es un subconjunto cerrado de $\mu^{-1}([0,t])$, podemos aplicar la Proposición 1.2.5, para obtener que el conjunto $\cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}))$ es un conexo de X. En resumen, hemos obtenido que

$$p \in \cap_{i=1}^{n} W_i \subset \cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V})) \subset U,$$

donde $\cap_{i=1}^{n} W_i$ es un abierto de X y $\cup(\mathrm{cl}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{V}))$ es un conexo de X. Lo cual nos dice que X es conexo en pequeño en el elemento p. Como p es un elemento cualquiera de X (por el Lema 1.5.4), concluimos que X es localmente conexo. ■

Para terminar esta subsección presentamos las siguientes preguntas acerca de conexidad en pequeño (Definición 1.5.2), de las cuales todavía no tenemos la respuesta. Éstas fueron hechas por G. Acosta.

Problema 3.2.12. ¿La propiedad de ser conexo en pequeño en un punto será inducida a todos los bloques de Whitney?

Problema 3.2.13. ¿La propiedad de ser conexo en pequeño en un punto será inducida a los bloques pequeños de Whitney?

Problema 3.2.14. ¿La propiedad de ser conexo en pequeño en un punto será inducida débilmente a los bloques de Whitney?

Problema 3.2.15. ¿La propiedad de ser conexo en pequeño en un punto será inducida por los bloques de Whitney?

Problema 3.2.16. ¿La propiedad de ser conexo en pequeño en un punto será inducida fuertemente por los bloques de Whitney?

3.2.3. Encadenabilidad por continuos

En esta subsección nos enfocamos en la propiedad de ser encadenable por continuos, probando que ésta es inducida a todos los bloques de Whitney e inducida fuertemente por los bloques de Whitney. Nos apoyaremos de un par de lemas.

Definición 3.2.17. Un continuo X es *encadenable por continuos* si para cada cada $\varepsilon > 0$ y cada par de puntos $x \neq y$ en X, existe una sucesión finita de subcontinuos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de X tal que diám$(A_i) < \varepsilon$, $x \in A_1$, $y \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$.

Lema 3.2.18. *Si X es arcoconexo, entonces X es encadenable por continuos.*

Demostración. Sean x y y dos elementos distintos de X y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe una función $f : [0,1] \to X$ que es continua e inyectiva y tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como $[0,1]$ es compacto, f es uniformemente continua. Por tanto, existe un número $\delta > 0$ tal que, si $|a - b| < \delta$, entonces $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$.

Notemos que $\{[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]\}$ es una sucesión de subcontinuos de $[0,1]$ que satisface diám$([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) = \frac{1}{n} < \delta$, $0 \in [0, \frac{1}{n}]$, $1 \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ y $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \cap [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Veamos que $\{f([0, \frac{1}{n}]), f([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]), \ldots, f([\frac{n-1}{n}, 1])\}$ es la sucesión deseada. Como $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ es un subcontinuo de $[0,1]$ y f es una función continua entre continuos, $f([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$ es un subcontinuo para cada $i < n$. Como diám$([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) < \delta$, diám$(f([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])) < \varepsilon$. Notemos que $x = f(0) \in f([0, \frac{1}{n}])$, $y = f(1) \in f([\frac{n-1}{n}, 1])$ y que $f([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \cap f([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Así concluimos la prueba de que X es encadenable por continuos. ■

Lema 3.2.19. *Sean X y Y encadenables por continuos, donde X y Y son subcontinuos de un continuo Z. Si $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ también es encadenable por continuos.*

Demostración. Sean x y $y \in X \cup Y$ y $\varepsilon > 0$. El caso interesante es cuando $x \in X \setminus Y$ y $y \in Y \setminus X$. Fijemos un elemento $q \in X \cap Y$. Notemos que $q \neq x$ y $q \neq y$. Como $x, q \in X$, existen una sucesión finita de subcontinuos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de X tal que $\text{diám}(A_i) < \varepsilon$, $x \in A_1$, $q \in A_n$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < n$. Como $q, y \in Y$, también existe una sucesión finita de subcontinuos $\{B_1, \ldots, B_m\}$ de Y tal que $\text{diám}(B_i) < \varepsilon$, $q \in B_1$, $y \in B_m$ y $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i < m$.

La cadena que buscamos es $\{C_1, \ldots, C_{n+m}\}$, donde $C_i = A_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $C_i = B_{i-n}$ para $i \in \{n+1, \ldots, n+m\}$. Veamos que ésta satisface las propiedades deseadas. Es claro que $\text{diám}(C_i) < \varepsilon$ para cada $i < n+m$, $x \in C_1 = A_1$ y $y \in C_{n+m} = B_m$. Si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces $C_i \cap C_{i+1} = A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Si $i \in \{n+1, \ldots, n-1+m\}$, entonces $C_i \cap C_{i+1} = B_{i-n} \cap B_{i-n+1} \neq \emptyset$. Si $i = n$, $C_n \cap C_{n+1} = A_n \cap B_1$. Como $q \in A_n \cap B_1$, $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Con esto terminamos de verificar que $X \cup Y$ es encadenable por continuos. ■

Teorema 3.2.20. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser encadenable por continuos es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo encadenable por continuos, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Mostraremos que $\mu^{-1}([0,t])$ es encadenable por continuos. Tomemos $P, Q \in \mu^{-1}([0,t])$. Analicemos los tres casos posibles.

Caso i. $P, Q \in F_1(X)$.

Este caso es sencillo ya que $F_1(X)$ es isométrico a X, que es encadenable por continuos, y $F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Caso ii. $P \in F_1(X)$ y $Q \notin F_1(X)$.

Fijemos un elemento $q \in Q$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\gamma : [0,1] \to \mu^{-1}[0, \mu(Q)]$ de $\{q\}$ a Q. Notemos que $\operatorname{Im} \gamma \subset \mu^{-1}([0,t])$ ya que $\mu(Q) \in [0,t]$. Por el Lema 3.2.18, $\operatorname{Im}\gamma$ (que es un arco) es encadenable por continuos. Como $\{q\} \in \operatorname{Im}\gamma \cap F_1(X)$, podemos utilizar el Lema 3.2.19 para obtener que $\operatorname{Im}\gamma \cup F_1(X)$ es encadenable por continuos. Por tanto, existe la sucesión de subcontinuos de $\mu^{-1}([0,t])$ para los elementos P y Q, como en la definición de ser encadenable por continuos.

Caso iii. $P, Q \notin F_1(X)$.

Sean $p \in P$ y $q \in Q$. Este caso se prueba de manera similar al anterior utilizando $F_1(X)$ y dos arcos ordenados, uno de $\{p\}$ a P y otro de $\{q\}$ a Q. Con esto terminamos nuestro teorema. ■

Teorema 3.2.21. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser encadenable por continuos es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números del intervalo $(0,1]$ tales que $\lim t_n = 0$ y $\mu^{-1}([0,t_n])$ es encadenable por continuos, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.0.27, $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = F_1(X)$. Verifiquemos que X es encadenable por continuos. Tomemos a y $b \in X$ tales que $a \neq b$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\delta < \{\frac{\varepsilon}{4}, d(a,b)\}$.

Afirmación 1. Existe un número $t > 0$ tal que si $A \in \mu^{-1}([0,t))$ entonces $\operatorname{diám}(A) < \delta$.

Esta afirmación es una consecuencia del Lema 2.2.3.

Como $\lim t_n = 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_N < t$. Como $\{a\} \subsetneq X$, $\{b\} \subsetneq X$ y $t_N \in [0,1]$, por el Lema 2.2.4, existen subcontinuos $A, B \in \mu^{-1}(t_N)$ tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Afirmación 2. $A \neq B$.

Supongamos, por el contrario, que $A = B$. Como $\mu(A) = t_N < t$, por la Afirmación 1, se cumple que $\operatorname{diám}(A) < \delta$. Por otro lado, se tiene que $d(a,b) \leq \operatorname{diám}(A)$. De modo que estas dos desigualdades nos llevan a que $d(a,b) < \delta$, lo cual es una contradicción (ya que $\delta < d(a,b)$) que nació de suponer que $A = B$. Por lo tanto, $A \neq B$.

Por hipótesis, $\mu^{-1}([0, t_N])$ es encadenable por continuos. De manera que, existe una sucesión de subcontinuos $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\}$ de $\mu^{-1}([0, t_N])$ tal que $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_m$, diám$(\mathcal{A}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1} \neq \emptyset$, para cada $i < m$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, definimos $A_i = \cup\mathcal{A}_i$.

Afirmación 3. $A_i \in C(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Tomemos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $\mathcal{A}_i$ es un conexo y $\mathcal{A}_i \cap C(X) \neq \emptyset$ (ya que $\mathcal{A}_i \subset \mu^{-1}([0, t_N]) \subset C(X)$), la Proposición 1.2.5 nos dice que $\cup\mathcal{A}_i = A_i$ es un continuo.

Afirmación 4. $a \in A_1$ y $b \in A_m$.

Los subcontinuos A y B los elegimos de manera que $a \in A$ y $b \in B$. Como $A \in \mathcal{A}_1$ y $B \in \mathcal{A}_m$, por la definición de A_1 y A_m, se cumple que $a \in A_1$ y $b \in A_m$.

Afirmación 5. $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Sea $i < m$. Tenemos que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1} \neq \emptyset$. Consideremos un elemento $D \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1}$. Utilizando la definición de A_i y A_{i+1}, tenemos que $D \subset A_i \cap A_{i+1}$. Por lo tanto, obtenemos $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, lo que queríamos probar.

Afirmación 6. diám$(A_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Consideremos $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $D \in \mathcal{A}_i$. Como $\mathcal{A}_i \subset \mu^{-1}([0, t_N])$, $\mu(D) \leq t_N$. Por la elección del número N, $t_N < t$. Así que, $\mu(D) < t$. Por la Afirmación 1, resulta que diám$(D) < \delta$. Como $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, hemos obtenido que diám$(D) < \frac{\varepsilon}{4}$. Verifiquemos que diám$(N(\frac{\varepsilon}{4}, D)) \leq \frac{3\varepsilon}{4}$. Sean $x, y \in N(\frac{\varepsilon}{4}, D)$. Entonces existen elementos $p, q \in D$ tales que $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(y, q) < \frac{\varepsilon}{4}$. Notemos que $d(p, q) \leq$ diám$(D) < \frac{\varepsilon}{4}$. Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, q) + d(q, y) < 3(\tfrac{\varepsilon}{4}).$$

Como x y y son elementos cualesquiera de D, concluimos que $\text{diám}(N(\frac{\varepsilon}{4}, D)) \leq \frac{3\varepsilon}{4}$. Veamos ahora que $A_i \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, D)$. Tomemos $a \in A_i$. Por la definición de A_i, existe un elemento $E \in \mathcal{A}_i$ tal que $a \in E$. Como $D, E \in \mathcal{A}_i$ y $\text{diám}(\mathcal{A}_i) < \frac{\varepsilon}{4}$, se satisface que $H(E, D) < \frac{\varepsilon}{4}$. La Proposición 1.0.10 nos dice que $E \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, D)$, por tanto, $a \in N(\frac{\varepsilon}{4}, D)$. Con esto hemos probado que $A_i \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, D)$. Luego,

$$\text{diám}(A_i) \leq \text{diám}(N(\tfrac{\varepsilon}{4}, D)) \leq \tfrac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

lo que queríamos probar.

Las Afirmaciones 3, 4, 5 y 6 nos dicen que la familia $\{A_1, \ldots, A_m\}$ es la sucesión buscada. Con esto terminamos la prueba de que X es encadenable por continuos. ■

Terminamos esta subsección con la siguiente pregunta.

Problema 3.2.22. ¿La propiedad de ser encadenable por continuos será inducida por los bloques de Whitney?

3.2.4. La propiedad de Kelley

Empezaremos esta subsección con la definición de *tener la propiedad de Kelley.* Después veremos una equivalencia para esta definición. Uno de los resultados principales de esta subsección es que esta propiedad es inducida por los bloques de Whitney. Otro de los resultados es que esta propiedad no es inducida débilmente a los bloques de Whitney y para probarlo nos auxiliaremos de un lema y de una observación.

Definición 3.2.23. Un continuo X *tiene la propiedad de Kelley en un punto* $p \in X$ si para toda sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim p_n = p$ y todo subcontinuo A de X tal que $p \in A$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim A_n = A$ y $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X *tiene la propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en p, para todo elemento $p \in X$.

Proposición 3.2.24. *Un continuo tiene la propiedad de Kelley si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p,q) < \delta$ y $p \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos, por el contrario, que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $p_n, q_n \in X$ tales que $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$, existe $A_n \in C(X)$ tal que $p_n \in A_n$ y, para todo elemento $B \in C(X)$ tal que $q_n \in B$, se satisface que $H(A_n, B) \geq \varepsilon$. Como X y $C(X)$ son compactos (el segundo por el Corolario 4.3 de [12]), podemos suponer que las sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes, de manera que existen elementos $p, q \in X$ y $A \in C(X)$ tales que $\lim p_n = p$, $\lim q_n = q$ y $\lim A_n = A$. Utilizando la continuidad de la función d y teniendo en cuenta que $\lim p_n = p$, $\lim q_n = q$ y $d(p_n, q_n) < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(p,q) = 0$. Es decir $p = q$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $p_n \in A_n$, $\lim p_n = p$ y $\lim A_n = A$, podemos aplicar la Proposición 1.1.3 (a) para obtener que $p = \lim p_n \in \lim A_n = A$.

Por otra parte, como X tiene la propiedad de Kelley en el punto p y $\lim q_n = q = p$, tenemos (por definición) que existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ que converge al elemento A y tal que $q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la convergencia de las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(A, K_N) < \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$H(A_N, K_N) \leq H(A_N, A) + H(A, K_N) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Notemos que, en particular, para el número N, se satisface que $d(p_N, q_N) < \frac{1}{N}$, $p_N \in A_N$ y $q_N \in K_N$. Esto implica (por la propiedad que satisface el número ε) que $H(A_N, K_N) \geq \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Así, concluimos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(p,q) < \delta$ y $p \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Tomemos $p \in X$, $A \in C(X)$ tales que $p \in A$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X que converge a p. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{B}_n = \{B \in C(X) : p_n \in B\}.$$

Como $\{p_n\} \in \mathcal{B}_n$, $\mathcal{B}_n \neq \emptyset$ y, por la Proposición 1.1.5, $\mathcal{B}_n$ es compacto. Así que existe $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $H(A, B_n) = \text{mín}\{H(A, B) : B \in \mathcal{B}_n\}$. Consideremos la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. Es claro que $p_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\text{lím}\, B_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un número $\delta > 0$ tal que si $q \in X$ cumple $d(p, q) < \delta$, entonces existe un elemento $C \in C(X)$ tal que $q \in C$ y $H(A, C) < \varepsilon$. Como $\text{lím}\, p_n = p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_n) < \delta$ si $n \geq N$. Consideremos $n \geq N$. Entonces $d(p, p_n) < \delta$. Así que existe un elemento $C_n \in C(X)$ tal que $p_n \in C_n$ y $H(A, C_n) < \varepsilon$. Notemos que $C_n \in \mathcal{B}_n$. Por lo tanto,

$$H(A, B_n) = \text{mín}\{H(A, B) : B \in \mathcal{B}_n\} \leq H(A, C_n) < \varepsilon.$$

Con esto hemos probado que la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y converge al elemento A. ■

Teorema 3.2.25. *(M. E. Aguilera) La propiedad de Kelley es inducida por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $t \in (0, 1)$ tales que $\mu^{-1}([0, t])$ tiene la propiedad de Kelley. Probaremos que X también tiene esta propiedad. Tomemos $\varepsilon > 0$. Veremos que existe un número $\delta > 0$ tal que si $d(a, b) < \delta$ y $a \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$.

Como $\mu^{-1}([0, t])$ tiene la propiedad de Kelley, por la Proposición 3.2.24, existe $\delta > 0$ tal que si $H(E, F) < \delta$ y $E \in \mathcal{E} \in C(\mu^{-1}([0, t]))$, entonces existe $\mathcal{F} \in C(\mu^{-1}([0, t]))$ tal que $F \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) < \varepsilon$, en donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff en $C(C(X))$ inducida por la métrica de Hausdorff H en $C(X)$.

Consideremos $a, b \in X$ tales que $d(a, b) < \delta$ y $A \in C(X)$ tal que $a \in A$. Definimos el subcontinuo $\mathcal{A} = F_1(A)$. Notemos que $\cup\mathcal{A} = A$ y $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}([0, t]))$, ya que $\mathcal{A} = F_1(A) \subset \mu^{-1}(0) \subset \mu^{-1}([0, t])$. Observemos que $H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b) < \delta$ y que $\{a\} \in \mathcal{A}$, de manera que existe un elemento $\mathcal{B} \in C(\mu^{-1}([0, t]))$ tal que $\{b\} \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$. Definimos $B = \cup\mathcal{B}$. Como $\{b\} \in \mathcal{B}$, $b \in B$. Por la Proposición 1.2.5 (b), $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$ implica que $H(A, B) < \varepsilon$. De modo que, utilizando la Proposición 3.2.24 concluimos que X tiene la propiedad de Kelley. ■

Lema 3.2.26. *Recordemos que la letra S denota a la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$. Sean $\mu : C(S) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Para $q_0 = (1,0)$, el conjunto definido por*

$$\mathcal{E}_0 = \mathrm{cl}_{C(S)}(\{A \in \mu^{-1}(t) : q_0 \notin A\})$$

es un arco.

Demostración. Por el Ejemplo 8.6 de [12], sabemos que el nivel $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a una circunferencia. Por el Teorema 8.8 de [12], el conjunto dado por:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mu^{-1}(t) : q_0 \in A\}$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. También sabemos que los subcontinuos de una circunferencia son puntos, arcos o la misma circunferencia.

Veamos que $\mathcal{A}$ no es degenerado. Consideremos los arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(S)$ de $\{q_0\}$ a S definidos por:

$$\alpha(u) = \{\exp(2\pi iv) : v \in [0,u]\} \text{ y}$$

$$\beta(u) = \{\exp(2\pi iv) : v \in [1-u,1]\}.$$

Como $\mu(\alpha(0)) = \mu(\{q_0\}) = 0$, $\mu(\beta(0)) = \mu(\{q_0\}) = 0$, $\mu(\alpha(1)) = \mu(S) = 1$, $\mu(\beta(1)) = \mu(S) = 1$ y $t \in (0,1)$, podemos aplicar el Lema 2.2.9 para asegurar la existencia de números $u_0, u_1 \in (0,1)$ tales que $\alpha(u_0), \beta(u_1) \in \mu^{-1}(t)$. Definimos $A_0 = \alpha(u_0)$ y $B_0 = \beta(u_1)$. Si tuviéramos que $A_0 = B_0$, entonces $\{\exp(2\pi iv) : v \in [0,u_0]\} = \{\exp(2\pi iv) : v \in [1-u_1,1]\}$. Así que $u_0 = u_1 = 1$, lo cual no puede ser. Con esto obtenemos que A_0 y B_0 son elementos distintos de $\mathcal{A}$.

Ahora veamos que $\mathcal{A} \neq \mu^{-1}(t)$. Consideremos el arco ordenado $\gamma : [0,1] \to C(S)$ dado por:

$$\gamma(u) = \{\exp(2\pi iv) : v \in [\tfrac{1}{2} - \tfrac{u}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{u}{2}]\}.$$

Como $\mu(\gamma(0)) = \mu(\{(-1,0)\})$, $\mu(\gamma(1)) = \mu(S)$ y $t \in (0,1)$, por el Lema 2.2.9, existe un número $u_2 \in (0,1)$ tal que $\gamma(u_2) \in \mu^{-1}(t)$. Utilizando la definición de γ y suponiendo que $q_0 \in \gamma(u_2)$, tendríamos que $\mu(\gamma(u_2)) = \mu(S) > t$, lo cual no puede ser. Entonces $q_0 \notin \gamma(u_2)$ y, por lo tanto, $\gamma(u_2) \in \mu^{-1}(t) \setminus \mathcal{A}$, así que $\mathcal{A} \neq \mu^{-1}(t)$. Lo cual nos dice que $\mathcal{A}$ no es una circunferencia.

De esta manera concluimos que $\mathcal{A}$ es un arco. Como $\mu^{-1}(t)$ es una circunferencia, el conjunto definido por:

$$\mathcal{E}_0 = \mathrm{cl}_{C(S)}(\mu^{-1}(t) \setminus \mathcal{A})$$

también es un arco. Con esto queda probado el lema. ■

Observación 3.2.27. Sean A_0 y B_0 como en la prueba del Lema 3.2.26. Entonces el arco $\mathcal{E}_0$ también se puede expresar en la forma:

$$\mathcal{E}_0 = \{A \in \mu^{-1}(t) \text{ y } q_0 \notin A\} \cup \{A_0, B_0\}.$$

Además, A_0 y B_0 son los extremos de $\mathcal{E}_0$.

Demostración. ($\supset$) Para esta contención falta ver que A_0 y $B_0 \in \mathcal{E}_0$. Como A_0 no es degenerado y tiene por extremos a los puntos q_0 y $\exp(2\pi i u_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(\varepsilon, q_0) \cap B_d(\varepsilon, \exp(2\pi i u_0)) = \emptyset$. Veremos que

$$B_H(\varepsilon, A_0) \cap \{A \in \mu^{-1}(t) : q_0 \notin A\} \neq \emptyset.$$

Por la Proposicón 2.2.2, existe un número $\eta \in (0, t)$ tal que si $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Definimos el arco ordenado $\lambda : [0, 1] \to C(S)$ dado por

$$\lambda(u) = \{\exp(2\pi i v) : (1 - u)u_0 \leq v \leq u_0]\}.$$

Destaquemos que $\mu(\lambda(0)) = 0$ y $\mu(\lambda(1)) = \mu(A_0) = t$. Entonces, por el Lema 2.2.9, existe un número $w_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda(w_0) \in \mu^{-1}(t - \frac{\eta}{2})$. Como λ es un arco ordenado $\lambda(w_0) \subset \lambda(1) = A_0$. Por otra parte, como $\mu(A_0) - \mu(\lambda(w_0)) = \frac{\eta}{2}$, $H(A_0, \lambda(w_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Notemos que $q_0 \notin \lambda(w_0)$.

Ahora consideremos al arco ordenado $\sigma : [0, 1] \to C(S)$ dado por

$$\sigma(u) = \{\exp(2\pi i v) : (1 - w_0)u_0 \leq v \leq u_0(1 - u) + u((1 - w_0)u_0 + 1)\}.$$

Observemos que $\mu(\sigma(0)) = \mu(\lambda(w_0)) = t - \frac{\lambda}{2}$ y $\mu(\sigma(1)) = \mu(S) = 1 > t$. Así que, por el Lema 2.2.9, existe $w_1 \in (0, 1)$ tal que $\sigma(w_1) \in \mu^{-1}(t)$. Como σ es un arco ordenado, $\sigma(0) \subset \sigma(w_1)$. Cabe destacar que

$$\mu(\sigma(w_1)) - \mu(\sigma(0)) = t - (t - \tfrac{\eta}{2}) = \tfrac{\eta}{2}.$$

De modo que $H(\sigma(w_1), \sigma(0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego,

$$H(A_0, \sigma(w_1)) \leq H(A_0, \sigma(0)) + H(\sigma(0), \sigma(w_1)) =$$

$$H(A_0, \lambda(w_0)) + H(\sigma(0), \sigma(w_1)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\lambda(w_0) \subset \sigma(w_1)$ y $H(\sigma(w_1), \sigma(0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y uno de sus extremos coinciden, la distancia entre los otros extremos es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Por la elección de ε, concluimos que $q_0 \notin \sigma(w_1)$. Por tanto, hemos obtenido que

$$B_H(\varepsilon, A_0) \cap \{A \in \mu^{-1}(t) : q_0 \notin A\} \neq \emptyset,$$

terminando así la primera contención deseada.

($\subset$) Tomemos $M \in \mathcal{E}_0$. Por la elección del número t, sabemos que M es un arco, supongamos que éste tiene extremos p y r. Supongamos que $q_0 \in M$ y $q_0 \notin \{p, r\}$. Veremos que $M = A_0$ o $M = B_0$. Existe un número $\epsilon > 0$ tal que las bolas $B_d(\epsilon, p)$, $B_d(\epsilon, q_0)$ y $B_d(\epsilon, r)$ son ajenas dos a dos. Consideremos un elemento $N \in B_d(\epsilon, M) \cap \mu^{-1}(t)$, éste también es un arco. Por la Proposición 1.0.10, $M \subset N(\epsilon, N)$ y, por lo tanto, existen elementos $x, y, z \in N$ tales que $d(p, x) < \epsilon$, $d(q_0, y) < \epsilon$ y $d(r, z) < \epsilon$. Como las bolas $B_d(\epsilon, p)$, $B_d(\epsilon, q_0)$ y $B_d(\epsilon, r)$ son ajenas dos a dos, $q_0 \in N$. Esto nos dice que

$$B_H(\epsilon, M) \cap \{A \in \mu^{-1}(t) : q_0 \notin A\} = \emptyset,$$

así que $M \notin \mathcal{E}_0$, lo cual es una contradicción. Así que $q_0 = p$ o $q_0 = r$. En este caso tenemos que $M \subset A_0$ o $M \subset B_0$. Como $\mu(M) = \mu(A_0) = \mu(B_0)$, $M = A_0$ o $M = B_0$. De este modo terminamos nuestra observación. ■

El siguiente ejemplo es de J. J. Charatonik and W. J. Charatonik y éste fue estudiado en el artículo [5].

Teorema 3.2.28. *(M. E. Aguilera) La propiedad de Kelley no es inducida débilmente a los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean:

$$S = \{\exp(i\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Sigma_1 = \{(1+\tfrac{1}{\theta})\exp(i\theta) : \theta \in [1,\infty)\} \text{ y}$$

$$\Sigma_2 = \{(1-\tfrac{1}{\theta})\exp(i\theta) : \theta \in [1,\infty)\}.$$

Consideremos a $r_0 = 1$, $q_0 = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los números $r_n = 1 + \frac{1}{2\pi n}$, los puntos $q_n = (r_n, 0)$ y las circunferencias:

$$S_n = \{r_n \exp(i\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

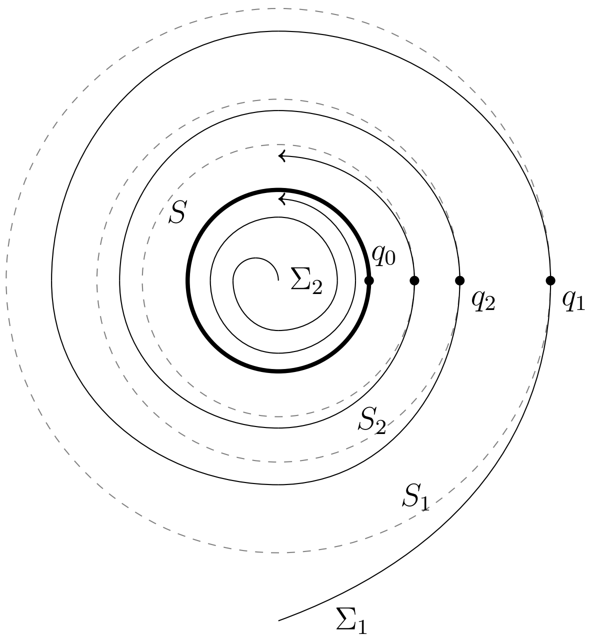

Figura 5: X

Observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n \cap \Sigma_1 = \{q_n\}$. Entonces $\Sigma_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n)$ es un conexo, lo cual nos dice que $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\Sigma_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n)) = \Sigma_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \cup S$ es un continuo. Como $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2}(\Sigma_2) = \Sigma_2 \cup S$ también es continuo, el conjunto definido por

$$X = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup (\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \cup S$$

también lo es. Ver Figura 5.

Definimos la función $f : X \to S$ como $f(r\exp(i\theta)) = \exp(i\theta)$.

Veamos que el continuo X tiene la propiedad de Kelley. Sean $x \in X$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X que converge a x y $K \in C(X)$ tal que $x \in K$. Construiremos una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ tal que $x_n \in K_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y tal que $\lim K_n = K$. Para esto consideraremos los siguientes casos.

Caso (i). $x \in X \setminus S$.

Como X es localmente conexo en x, X tiene la propiedad de Kelley en x (Teorema 9.5 de [12]).

Caso (ii). $x \in S$.

Este caso lo dividimos en dos subcasos.

Caso (ii.a). $S \subset K$**.**

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2\}$. En el caso en que $x_n \in K$, hacemos $K_n = K$. Supongamos ahora que $x_n \notin K$. En el caso en que $x_n \in \Sigma_i$, existe una subespiral que tiene a x_n como su punto punto final; definimos K_n como la unión de esta subespiral y de K. Si $x_n \in S_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, existe una espiral que es la unión de una subespiral de Σ_1 y de un arco contenido en S_k que tiene como punto final a x_n y que intersecta a Σ_1. Hacemos K_n igual a la unión de esta subespiral y de K. Como $\lim x_n = x$ se puede mostrar que $\lim K_n = K$. De modo que, en este caso, hemos verificado que X tiene la propiedad de Kelley en x.

Caso (ii.b). $K \subsetneq S$.

Como $\lim x_n = x$ y f es una función continua, $\lim f(x_n) = f(x)$. Así que, podemos suponer que $d(f(x), f(x_n)) < \sqrt{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $m \in \mathbb{N}$. En el caso en que $f(x) \neq f(x_m)$, existen dos arcos contenidos en S con extremos $f(x)$ y $f(x_m)$. Sea E_m el arco de menor longitud con extremos $f(x)$ y $f(x_m)$. En el caso en que $f(x) = f(x_m)$, definimos $E_m = \{f(x)\}$. Notemos que $\lim \text{diám}(E_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea K_n la componente de $f^{-1}(K \cup E_n)$ que contiene a x_n. Se puede mostrar que $\lim K_n = K$. Con esto hemos terminado la prueba de que X tiene la propiedad de Kelley.

Ahora veremos por qué los bloques pequeños de Whitney no tienen la propiedad de Kelley. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $C(f) : C(X) \to C(S)$ la función inducida por f, la cual definimos en la Proposición 1.2.1 .

Consideremos al conjunto

$$\mathcal{C} = \{D \in C(X) : C(f)(D) = S\}.$$

Como $\mathcal{C}$ es cerrado y no vacío (ya que $S \in \mathcal{C}$) y μ es una función continua, la función $\mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [0,1]$ alcanza su mínimo; así que existe un elemento $C_0 \in \mathcal{C}$ tal que

$$t_0 = \text{mín}\{\mu(D) : D \in \mathcal{C}\} = \mu(C_0).$$

Veamos que $t_0 > 0$. Supongamos, por el contrario, que $t_0 = 0$. Como μ es una función de Whitney y $\mu(C_0) = 0$, existe un elemento $c \in X$ tal que $C_0 = \{c\}$. Observamos que $C(f)(C_0) = C(f)(\{c\}) = \{f(c)\} \in F_1(S)$. Por otro lado, como $C_0 \in \mathcal{C}$, $C(f)(C_0) = S$. Lo cual es una contradicción. De manera que, $t_0 > 0$.

Tomemos $t \in (0, t_0)$. Veremos que $\mu^{-1}([0,t])$ no tiene la propiedad de Kelley. Para esto probaremos varias afirmaciones. Definimos la función $F : \mu^{-1}([0,t]) \to S$ como:

$$F(L) = m \circ C(f)(L),$$

en donde $m : C(S) \setminus \{S\} \to S$ es la función punto medio. Notemos que F está bien definida ya que $t < t_0$, así que $C(f)(L) \neq S$ para cada $L \in \mu^{-1}([0,t])$, de modo que $C(f)(L)$ es un subarco de S o un conjunto de un solo punto.

Afirmación 1. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ tal que $\mathcal{A} \cap C(\Sigma_2) \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} \cap (C(X) \setminus C(\Sigma_2)) \neq \emptyset$, entonces existe $C \in \mathcal{A} \cap C(\Sigma_2)$ tal que $F(C) = q_0$.

Sean $A \in \mathcal{A} \cap C(\Sigma_2)$ y $B \in \mathcal{A} \cap (C(X) \setminus C(\Sigma_2))$. Como $A \subset \Sigma_2$, existen números $x, y \in [1, \infty)$ tales que

$$A = \{(1 - \tfrac{1}{\theta}) \exp(i\theta) : x \leq \theta \leq y\}.$$

Veamos que existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $[x, y] \subset [2\pi n, 2\pi(n + 2)]$. Supongamos, por el contrario que, para toda $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que $[x, y] \not\subset [2\pi l, 2\pi(l + 2)]$. Fijemos $l_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \in [2\pi l_0, 2\pi(l_0 + 1)]$. Como $[x, y] \not\subset [2\pi l_0, 2\pi(l_0 + 2)]$, $y \in (2\pi(l_0 + 2), \infty)$. Esto nos dice que $[2\pi(l_0 + 1), 2\pi(l_0 + 2)] \subset [x, y]$. Por lo tanto, $C(f)(A) = S$, lo cual es una contradicción, por la definición de t_0 y ya que $\mu(A) \leq t < t_0$. Hemos probado que existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $[x, y] \subset [2\pi n, 2\pi(n + 2)]$.

Definimos $\varphi : X \to [1, 2\pi(n + 4)]$ como:

$$\varphi(r\exp(i\theta)) = \begin{cases} \theta, & \text{si} \quad r\exp(i\theta) \in \Sigma_2 \text{ y } \theta \leq 2\pi(n+4); \\ 2\pi(n+4), & \text{si} \quad r\exp(i\theta) \in \Sigma_2 \text{ y } \theta \geq 2\pi(n+4) \text{ o } r\exp(i\theta) \in X \setminus \Sigma_2. \end{cases}$$

Ésta es una función continua ya que está definida en dos subconjuntos cerrados de X y en cada uno de estos subconjuntos ésta es una función continua.

Consideremos la composición de funciones $m' \circ C(\varphi)$, en donde $m' : C([1, 2\pi(n + 4)]) \to [1, 2\pi(n + 4)]$ es la función punto medio. Veamos quién es la imagen de A bajo esta composición: $C(\varphi)(A) = [x, y]$ ya que $[x, y] \subset [2\pi n, 2\pi(n+2)]$, por lo tanto $m' \circ C(\varphi)(A) = m'([x, y]) \in [2\pi n, 2\pi(n+2)]$. Por otra parte, como $B \subset X \setminus \Sigma_2$, se tiene que $m' \circ C(\varphi)(B) = m'(\{2\pi(n+4)\}) = 2\pi(n + 4)$. Como $m' \circ C(\varphi)(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de $[1, 2\pi(n + 4)]$ que tiene al elemento $2\pi(n+4)$ y que intersecta a $[2\pi n, 2\pi(n+2)]$, existe un elemento $C \in \mathcal{A}$ tal que $m' \circ C(\varphi)(C) = 2\pi(n+3)$. Por este último hecho y la definición de t_0, tenemos que $C(\varphi)(C) \subset (2\pi(n + 2), 2\pi(n + 4))$. Por la definición de φ, podemos concluir que $C \in C(\Sigma_2)$. Por tanto,

$$C = \{(1 - \tfrac{1}{\theta})\exp(i\theta) : z \leq \theta \leq w\},$$

donde $[z, w] = [2\pi(n + 3) + \alpha, 2\pi(n + 3) - \alpha]$ para algún $\alpha \in (0, \pi)$. Entonces

$$F(C) = m(\{\exp(i\theta) : z \leq \theta \leq w\}) = \exp(2\pi i(n + 3)) = (1, 0) = q_0,$$

con esto hemos probado la Afirmación 1.

Afirmación 2. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. El conjunto definido por:

$$\mathcal{E}_n = \mathrm{cl}_{C(X)}(\{A \in (\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t) : q_n \notin A\})$$

es un arco en $(\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t)$ y éste también se puede expresar de la forma

$$\mathcal{E}_n = \{A \in (\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t) : q_n \notin A\} \cup \{A_n, B_n\},$$

donde $A_n = \{r_n \exp(2\pi i v) : v \in [0, u_0]\}$ y $B_n = \{r_n \exp(2\pi i v) : v \in [u_1, 1]\}$, para algunos $u_0, u_1 \in (0, 1)$.

Por el Lema 2.0.10, $\frac{\mu|_{C(S_n)}}{\mu(S_n)} : C(S_n) \to [0, 1]$ es una función de Whitney y, como $\frac{t}{\mu(S_n)} < 1$, podemos aplicar el Lema 3.2.26 para obtener que el conjunto dado por:

$$\mathrm{cl}_{C(S_n)}(\{A \in \left(\tfrac{\mu|_{C(S_n)}}{\mu(S_n)}\right)^{-1}\left(\tfrac{t}{\mu(S_n)}\right) : q_n \notin A\})$$

es un arco. Por el Lema 2.3.3, notemos que

$$\mathrm{cl}_{C(S_n)}(\{A \in \left(\tfrac{\mu|_{C(S_n)}}{\mu(S_n)}\right)^{-1}\left(\tfrac{t}{\mu(S_n)}\right) : q_n \notin A\})$$

$$= \mathrm{cl}_{C(S_n)}(\{A \in (\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t) : q_n \notin A\}).$$

Como $C(X_n)$ es un cerrado en $C(X)$,

$$\mathrm{cl}_{C(S_n)}(\{A \in (\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t) : q_n \notin A\})$$

$$= \mathrm{cl}_{C(X)}(\{A \in (\mu|_{C(S_n)})^{-1}(t) : q_n \notin A\}).$$

Así que $\mathcal{E}_n$ es un arco. La segunda parte de nuestra afirmación se obtiene del Lema 3.2.26.

Afirmación 3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto:

$$F_n = \{(1 + \tfrac{1}{2\pi\theta}) \exp(2\pi\theta) : \theta \in [n, n+1]\} \cup A_n \cup B_{n+1}.$$

Entonces el conjunto dado por:

$$\mathcal{F}_n = (\mu|_{C(F_n)})^{-1}(t)$$

es un arco.

Notemos que

$$\{(1 + \tfrac{1}{2\pi\theta}) \exp(2\pi i\theta) : \theta \in [n, n+1]\} \cap A_n = \{q_n\} \text{ y}$$

$$\{(1 + \tfrac{1}{2\pi\theta}) \exp(2\pi i\theta) : \theta \in [n, n+1]\} \cap B_{n+1} = \{q_{n+1}\}.$$

Entonces F_n es un arco. Por el Lema 2.0.10 ,$\frac{\mu|_{C(F_n)}}{\mu(F_n)} : C(F_n) \to [0,1]$ es una función de Whitney. Como $C(f)(F_n) = S$, $t < t_0 \leq \mu(F_n)$, el Ejemplo 8.5 de [12] nos dice que $\big(\frac{\mu|_{C(F_n)}}{\mu(F_n)}\big)^{-1}\big(\frac{t}{\mu(F_n)}\big)$ es un arco. Por el Lema 2.3.3, $\mathcal{F}_n = \big(\frac{\mu|_{C(F_n)}}{\mu(F_n)}\big)^{-1}\big(\frac{t}{\mu(F_n)}\big)$.

Afirmación 4. El conjunto definido por:

$$\mathcal{K} = \mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}_n \cup \mathcal{F}_n))$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{F}_n = \{A_n\}$ y $\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n = \{B_{n+1}\}$. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{E}_n \cup \mathcal{F}_n)$ es conexo. Por lo tanto, $\mathcal{K}$ es un continuo. Como $\mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n \subset \mu^{-1}(t)$, se tiene que $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}(t)$.

Afirmación 5. Se satisface que $F(K) \neq q_0$ para todo elemento $K \in \mathcal{K}$.

Supongamos, por el contrario, que existe un elemento $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que $F(K_0) = q_0$. En el caso en que $K_0 \in \mathrm{cl}_{C(X)}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n\big)$, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $K_n \in \mathcal{E}_{i_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y tal que $\lim K_n = K_0$. Sean $\varepsilon < \frac{1}{2}$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Como F es una función continua, $\lim F(K_n) = F(\lim K_n) = F(K_0) = q_0$. Hagamos $p_n = F(K_n)$. Como $\lim p_n = q_0$, existe una sucesión creciente de naturales $n_1 < n_2 < \cdots$, tal que $d(q_0, p_{n_m}) < \frac{1}{4n_m}$, donde $n_m \geq N$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que $C(f)(K_{n_m}) \subset \mathrm{cl}_X(B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0))$. Por la definición de $\mathcal{E}_{i_{n_m}}$, $K_{n_m} \in C(S_{n_m}) \setminus \{S_{n_m}\}$. Si $K_{n_m} \in F_1(S_{n_m})$, entonces $C(f)(K_{n_m}) = \{p_{n_m}\}$ y, por lo tanto, $C(f)(K_{n_m}) \subset B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0)$. Supongamos que $K_{n_m} \notin F_1(S_{n_m})$. Sea J un arco en S que contiene a p_{n_m} y q_0 y que está contenido en $B_d(\frac{1}{4n_m}, q_0)$. Teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{E}_{i_{n_m}}$ y el hecho de que $F(K_{n_m}) = p_{n_m}$, obtenemos que uno de los extremos del arco $C(f)(K_{n_m})$ está en J. Llamemos x a este extremo. Notemos que $d(x, p_{n_m}) \leq d(q_0, p_{n_m})$, ya que el ángulo que subtiende al arco de q_0 a x (que está contenido en J) es menor o igual que el ángulo que subtiende al arco J. Como p_{n_m} es el punto medio del arco $C(f)(K_{n_m})$, si y es el otro extremo de $C(f)(K_{n_m})$, tenemos que $d(p_{n_m}, x) = d(p_{n_m}, y)$. De modo que

$$d(y, q_0) \leq d(y, p_{n_m}) + d(p_{n_m}, q_0) \leq d(x, p_{n_m}) + d(p_{n_m}, q_0)$$

$$\leq d(q_0, p_{n_m}) + d(q_0, p_{n_m}) \leq \tfrac{2}{4n_m} = \tfrac{1}{2n_m}.$$

Como $x, y \in B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0)$, $C(f)(K_{n_m}) \subset B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0)$. Por lo tanto, $C(f)(K_{n_m}) \subset \mathrm{cl}_X(B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0))$.

Como $\{K_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim K_{n_m} = K_0$. Utilizando la continuidad de la función $C(f)$, tenemos que

$$\lim C(f)(K_{n_m}) = C(f)(\lim K_{n_m}) = C(f)(K_0).$$

Por otra parte, como se satisface que $C(f)(K_{n_m}) \subset \mathrm{cl}_X(B_d(\frac{1}{2n_m}, q_0))$ para cada $m \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.1.3 (a), se cumple que $C(f)(K_0) \subset \{q_0\}$. Así que $C(f)(K_0) = \{q_0\}$. Por lo tanto, $K_0 \in F_1(X)$, lo cual no puede ser ya que $K_0 \in \mu^{-1}(t)$. De modo que $F(K) \neq q_0$ para cada $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n\right)$.

El caso en que $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$ se analiza de manera similar al caso anterior. Con esto terminamos la prueba de la Afirmación 5.

Para probar nuestro teorema, supongamos por el contrario que $\mu^{-1}([0,t])$ sí tiene la propiedad de Kelley.

Utilizando la Afirmación 5, que nos dice que $F(L) \neq q_0$ para cada $L \in \mathcal{K}$, y el hecho de que F es una función cerrada, existe un número $\gamma > 0$ tal que $B_d(\gamma, q_0) \cap \{F(A) : A \in \mathcal{K}\} = \emptyset$. Como $F : \mu^{-1}([0,t]) \to S$ es una función continua, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que si $H(A,B) < \varepsilon$, entonces $d(F(A), F(B)) < \gamma$. Podemos suponer que $\varepsilon < r_1 - r_0$. Como $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad de Kelley, existe un número $\lambda > 0$ tal que si $H(A,B) < \lambda$ y $\mathcal{A} \in C(\mu^{-1}([0,t]))$ es tal que $A \in \mathcal{A}$, entonces existe $\mathcal{B} \in C(\mu^{-1}([0,t]))$ tal que $B \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$, en donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff inducida por H. Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\eta > 0$ tal que si $B \subset C$ y $\mu(C) - \mu(B) < \eta$, entonces $H(B,C) < \frac{\lambda}{2}$. Por la continuidad de la función μ, existe un número $\rho > 0$ tal que si $H(A,C) < \rho$, entonces $|\mu(C) - \mu(A)| < \eta$. Podemos elegir ρ de tal manera que $\rho < \frac{\lambda}{2}$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ y $A \in C(X)$ es tal que $x \in A$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $y \in C$ y $H(A,C) < \rho$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos un elemento $K_n \in \mathcal{E}_n$. Como $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es un cerrado, podemos suponer que $\lim K_n = K$ para algún $K \in \mathcal{K}$. Notemos que $\lim S_n = S$. Teniendo en cuenta que $K_n \subset S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar la Proposición 1.1.3 (a) a las sucesiones $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ para obtener $K \subset S$.

Consideremos $x \in K$ y $y \in \Sigma_2$ tales que $d(x, y) < \delta$. Entonces existe $M \in C(X)$ tal que $y \in M$ y $H(K, M) < \rho$. Notemos que $|\mu(K) - \mu(M)| = |t - \mu(M)| < \eta$. En el caso en que $\mu(M) \geq t$, aplicamos el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $N \in \mu^{-1}(t)$ tal que $y \in N \subset M$. En el caso en que $\mu(M) < t$, aplicamos nuevamente el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $N' \in \mu^{-1}(t)$ tal $M \subset N'$. En resumen, existe un elemento $L \in \mu^{-1}(t)$ tal que $y \in L$ y $L \subset M$ o $M \subset L$. Observemos que $|\mu(M) - \mu(L)| = |\mu(M) - t| < \eta$, lo cual nos conduce a que $H(M, L) < \frac{\lambda}{2}$. De manera que

$$H(K, L) \leq H(K, L) + H(L, N) < \rho + \tfrac{\lambda}{2} < \tfrac{2\lambda}{2} = \lambda.$$

Como $L \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ y $t < t_0$, $L \subset \Sigma_2$. Por la existencia de λ, existe $\mathcal{L} \in C(\mu^{-1}([0, t]))$ tal que $L \in \mathcal{L}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) < \varepsilon$. Por la Proposición 1.0.10, $\mathcal{K} \subset N(\varepsilon, \mathcal{L})$ y $\mathcal{L} \subset N(\varepsilon, \mathcal{K})$. Recordemos que A_1 es un punto extremo del arco

$$\mathcal{E}_1 = \mathrm{cl}_{C(X)}(\{A \in (\mu|_{C(S_1)})^{-1}(t) : q_1 \notin A\})$$

y que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{K}$. Como $A_1 \in \mathcal{K}$, existe un elemento $Q \in \mathcal{L}$ tal que $H(A_1, Q) < \varepsilon$, lo cual nos dice que $Q \not\subset S \cup \Sigma_2$ ya que $\varepsilon < r_1 - r_0$. En resumen, tenemos que $\mathcal{L} \cap C(X \setminus \Sigma_2) \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap C(\Sigma_2) \neq \emptyset$. De manera que, por la Afirmación 1, existe un elemento $E \in \mathcal{L}$ tal que $F(E) = q_0$. Como $\mathcal{L} \subset N_{\mathcal{H}}(\varepsilon, \mathcal{K})$, existe un elemento $G \in \mathcal{K}$ tal que $H(E, G) < \varepsilon$. Finalmente, por la elección del número ε, tenemos que

$$d(q_0, F(G)) = d(F(G), F(E)) < \gamma.$$

Lo cual es una contradicción ya que

$$B_d(\gamma, q_0) \cap \{F(A) : A \in K\} = \emptyset.$$

De este modo concluimos que $\mu^{-1}([0, t])$ no tiene la propiedad de Kelley. Así que la propiedad de Kelley no es inducida débilmente a los bloques de Whitney. ■

3.2.5. Aposindesis I

En esta subsección comenzaremos definiendo los conceptos de *semiaposindesis* y de *m-aposindesis mutua*. La idea de estos conceptos es la de separar dos elementos con un continuo y separar m elementos con m continuos, respectivamente. Enseguida trabajaremos con los continuos semiaposindéticos, obteniendo como resultado que todos los bloques de Whitney son mutuamente aposindéticos. Luego veremos un lema en el que, si varios elementos están en el interior de un bloque dado y pertenecen al mismo nivel, entonces éstos se pueden separar mediante subcontinuos del interior del bloque. Este lema nos auxiliará en las pruebas de que ser 3-mutuamente aposindético es una propiedad inducida a todos los bloques de Whitney y ser m-mutuamente aposindético no es inducida por los bloques de Whitney. Para trabajar con este último resultado, primero describiremos un ejemplo para después trabajar con él, separando en casos para hacer claro nuestro teorema.

Definición 3.2.29. Un continuo X es *semiaposindético*, si para cualesquiera $p \neq q$ en X, existe un subcontinuo M de X tal que el interior, respecto a X, de M contiene a uno de los puntos p y q y $X - M$ contiene al otro.

Definición 3.2.30. Un continuo X es *m-mutuamente aposindético* si para cualesquiera m puntos distintos $x_1, \ldots, x_m \in X$, existen m subcontinuos $K_1, \ldots, K_m$ de X tales que $x_1 \in \text{int}_X(K_1), \ldots, x_m \in \text{int}_X(K_m)$ y son ajenos dos a dos. Cuando $m = 2$ decimos que X es *mutuamente aposindético.*

Teorema 3.2.31. *(M. E. Aguilera) Si X es semiaposindético, entonces los bloques de Whitney son mutuamente aposindéticos.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney, $t > 0$ y A y B dos elementos de $\mu^{-1}([0, t])$. Hacemos $s_0 = \mu(A)$ y $s_1 = \mu(B)$. Supongamos, sin perder generalidad, que $s_0 \leq s_1$. Dividiremos la prueba en tres casos.

Caso (i). $s_0 < s_1$.

Definimos los conjuntos:

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([0, s_0 + \tfrac{s_1 - s_0}{3}]) \text{ y}$$

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([s_1 - \tfrac{s_1 - s_0}{3}, t]).$$

Por el Lema 3.0.22, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subcontinuos de $\mu^{-1}([0, t])$. Es claro que estos continuos ajenos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen a A y B en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$, respectivamente.

Notemos, en este caso, que no es importante la semiaposindesis de X. Es decir, para todo $t > 0$, $\mu^{-1}([0, t])$ es mutuamente aposindético entre cualesquiera $C, D \in \mu^{-1}([0, t])$, con $\mu(C) < \mu(D)$ o $\mu(D) < \mu(C)$.

Caso (ii). $0 < s_0 = s_1$.

Por el Lema 2.3.4, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Elegimos $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Por la semiaposindesis de X, existe $M \in C(X)$ que contiene a uno de los puntos a y b en su interior y $X \setminus M$ contiene al otro punto. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in \operatorname{int}_X(M)$. Definimos el número

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \operatorname{mín}\{s_0, \mu(M)\}.$$

Notemos que $0 < \lambda < s_0$. Elijamos $\varepsilon > 0$ con las siguientes propiedades:

(a) $B_d(\varepsilon, a) \subset M$;

(b) $\operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \cap M = \emptyset$;

(c) $\operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \cap \operatorname{cl}_X(N(\varepsilon, A)) = \emptyset$;

(d) $B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0, \lambda]) = \emptyset$.

Definimos los conjuntos:

$$\mathcal{U} = B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}([0, t]) \text{ y}$$

$$\mathcal{V} = B_H(\varepsilon, B) \cap \mu^{-1}([0, t]).$$

Observamos que estos conjuntos son abiertos en $\mu^{-1}([0, t])$ que contienen a A y B, respectivamente.

Vamos a definir un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a A en su interior en $\mu^{-1}([0,t])$. Consideremos un elemento $C \in \mathcal{U}$. Por la definición de $\mathcal{U}$, tenemos qu $H(A,C) < \varepsilon$. La Proposición 1.0.10 nos lleva a que $A \subset N(\varepsilon, C)$, lo que nos dice que existe un elemento $c \in C$ tal que $c \in B_d(\varepsilon, a)$. Por la propiedad (a), $\{c\} \subsetneq M$. Sabemos que $\lambda \in (\mu(\{c\}), \mu(M))$. Entonces podemos aplicar el Lema 2.2.4 para obtener un subcontinuo $N_C \in \mu^{-1}(\lambda)$ tal que $\{c\} \subset N_C \subset M$. Por la propiedad (d), $\mu(C) > \lambda$. Entonces podemos aplicar nuevamente el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $L_C \in \mu^{-1}(\lambda)$ tal que $\{c\} \subset L_C \subset C$. Como $c \in L_C \cap N_C$ y $L_C, N_C \in \mu^{-1}(\lambda)$, por el Lema 2.3.13, existe una trayectoria en $\mu^{-1}(\lambda)$ que une a L_C con N_C y tal que cada elemento de ella está contenido en $N_C \cup L_C$. Como $L_C \subsetneq C$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado de L_C a C en $\mu^{-1}([\lambda, t])$. Por la definición de arco ordenado, sabemos que cada elemento de dicho arco está contenido en C. De manera que podemos obtener un arco $\mathcal{J}_C$ en $\mu^{-1}([\lambda, t])$ que une a C con N_C. Además, si $K \in \mathcal{J}_C$, entonces $K \subset N_C \cup L_C \cup C \subset M \cup C$. Cada elemento $C \in \mathcal{U}$ tiene asociado un arco $\mathcal{J}_C$ con las propiedades descritas. Como $M \notin F_1(X)$ y $\lambda < \mu(M)$, por el Lema 2.3.3, sabemos que $(\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$ es un continuo no degenerado. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{A} = (\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_C).$$

Observamos que $\mathcal{A}$ es un continuo, ya que es la unión de $(\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$, que es un continuo, y la cerradura de la unión de los continuos $\mathcal{J}_C$ que intersectan a $(\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$ (esto es porque $N_C \in \mathcal{J}_C \cap (\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$ para cada $C \in \mathcal{U}$). Notemos que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$. Por otra parte, como $C \in \mathcal{J}_C$, para cada $C \in \mathcal{U}$,

$$A \in \mathcal{U} \subset \textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_C \subset \mathcal{A}.$$

De la definición de $\mathcal{U}$, tenemos que éste es un abierto de $\mu^{-1}([0,t])$. Así que, $A \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$.

Afirmación 1. Si $K \in \mathcal{A}$, entonces $K \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$.

Veamos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_C) \subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))\}.$$

Sea $L \in \bigcup_{C\in\mathcal{U}} \mathcal{J}_C$. Entonces existe un elemento $C \in \mathcal{U}$ tal que $L \in \mathcal{J}_C$. Por construcción, $L \subset M \cup C$. Por otro lado, como $H(A,C) < \varepsilon$, la Proposición 1.0.10 nos lleva a que $C \subset N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $L \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$.

Como $M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$ es un cerrado, utilizando el Lema 3.0.25 (c), obtenemos la contención que queríamos probar.

Tomemos $K \in \mathcal{A}$. Si $K \in (\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$, entonces $K \subset M$. En el caso en que $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{C \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_C)$, por lo probado en el párrafo anterior $K \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$. Con esto finalizamos la Afirmación 1.

Veamos que $B \notin \mathcal{A}$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir que $B \in \mathcal{A}$. Entonces, por la Afirmación 1, $B \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$. Esto nos lleva a que $b \in M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$, lo cual es un absurdo por (b) y (c). Con esto hemos visto que $B \notin \mathcal{A}$.

Afirmación 2. Si $K \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(K) > 0$.

Si $K \in (\mu|_{C(M)})^{-1}(\lambda)$, la afirmación es clara ya que $\lambda > 0$. En el caso en que $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{C \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_C)$, por construcción, $\mathcal{J}_C \subset \mu^{-1}([\lambda, t])$. Por tanto, $K \in \mu^{-1}([\lambda, t])$ y, como $\lambda > 0$, esto nos dice que $\mu(K) > 0$. Así, la Afirmación 2 es cierta.

Construyamos ahora un subcontinuo de $\mu^{-1}([0, t])$ que tenga a B en su interior en $\mu^{-1}([0, t])$. Recordemos que $\mathcal{V} = B_H(\varepsilon, B) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Sea $D \in \mathcal{V}$. Entonces $H(D, B) < \varepsilon$. Por la Proposición 1.0.10, $B \subset N(\varepsilon, D)$. Así que, existe un elemento $x \in D$ tal que $x \in B_d(\varepsilon, b)$. Si $\{x\} \subsetneq D$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\beta_D : [0, 1] \to \mu^{-1}[0, t]$ de $\{x\}$ a D. En el caso en que $D \in F_1(X)$, definimos $\beta_D(r) = D$ para todo $r \in [0, 1]$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{B} = F_1(X) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D \in \mathcal{V}} \mathrm{Im}\, \beta_D).$$

Notemos que $\mathcal{B}$ es un continuo, ya que es la unión del continuo $F_1(X)$ y la cerradura de una unión de continuos que intersectan a $F_1(X)$. Además, $\mathcal{V}$ es un abierto en $\mu^{-1}([0, t])$ y $B \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0, t])$ tal que $B \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{B})$.

Afirmación 3. Si $K \in \mathcal{B}$, entonces $K \in F_1(X)$ o $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$.

Veamos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{D\in\mathcal{V}} \operatorname{Im}\beta_D) \subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset\}.$$

Sea $L \in \bigcup_{D\in\mathcal{V}} \operatorname{Im}\beta_D$. Entonces, existen $D \in \mathcal{V}$ y $r \in [0,1]$ tales que $L = \beta_D(r)$. Por construcción, existe $x \in D \cap B_d(\varepsilon, b)$ tal que $\beta_D(0) = \{x\}$. Utilizando las propiedades que tiene un arco ordenado, obtenemos que $\{x\} = \beta_D(0) \subset \beta_D(r) = L$. De manera que $x \in L \cap B_d(\varepsilon, b)$, lo cual nos dice que $L \cap B_d(\varepsilon, b) \neq \emptyset$. Por lo tanto, aplicando el Lema 3.0.25 (a), obtenemos la contención que queríamos probar.

Sea $K \in \mathcal{B}$. Si $K \in F_1(X)$ la afirmación es clara. En el caso en que $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{D\in\mathcal{V}} \operatorname{Im}\beta_D)$, por lo probado anteriormente, $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$.

Afirmación 4. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Supongamos que existe un elemento $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por la Afirmación 2, sabemos que $\mu(K) > 0$, así que $K \notin F_1(X)$. Como $K \in \mathcal{B}$, por la Afirmación 3, $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$. Usando la Afirmación 1, llegamos a que $K \subset M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$. Por lo tanto,

$$\emptyset \neq K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \subset (M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)).$$

Por otro lado, las propiedades (b) y (c) que satisface el número ε implican que

$$(M \cup \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción que nació de haber supuesto que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. De esta manera concluimos que los continuos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos. Esto termina la prueba del Caso (ii).

Caso (iii). $s_0 = s_1 = 0$.

Tomemos M como en el caso (ii). En este caso, existen $a, b \in X$ tales que $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Elegimos un número $\varepsilon > 0$ que satisfaga las siguientes propiedades:

(a) $B_d(\varepsilon, a) \subset M$;

(b) $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \cap M = \emptyset$;

(c) $\mathrm{cl}_{C(X)}\big(B_H(\varepsilon,\{a\})\cup B_H(\varepsilon,\{b\})\big)\subset\mu^{-1}([0,t))$.

Cabe destacar que la propiedad (c) será importante para probar que los continuos construidos a continuación son ajenos y que la propiedad (a) implica que M no es degenerado. Sean

$$\mathcal{U}=B_H(\varepsilon,\{a\})\text{ y}$$
$$\mathcal{V}=B_H(\varepsilon,\{b\}).$$

Definamos el continuo $\mathcal{A}$ que tendrá a $\{a\}$ en su interior. Consideremos $C\in\mathcal{U}$. Por la definición de $\mathcal{U}$, $H(\{a\},C)<\varepsilon$. Entonces, por el Lema 1.1.11, $C\subset B_d(\varepsilon,a)$. Fijemos un elemento $c\in C$, tal que $d(a,c)<\varepsilon$. Si $C\notin F_1(X)$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_C:[0,1]\to\mu^{-1}([0,t])$ de $\{c\}$ a C. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, $\alpha_C(r)\subset\alpha_C(1)=C$ para todo $r\in[0,1]$. En el caso en que $C\in F_1(X)$ definimos $\alpha_C:[0,1]\to\mu^{-1}([0,t])$ como $\alpha_C(r)=C$ para todo $r\in[0,1]$. De manera que $\alpha_C(r)\subset C\subset B_d(\varepsilon,a)$ para cada $C\in\mathcal{U}$ y cada $r\in[0,1]$. De modo que, por el Lema 1.1.11, $H(\alpha_C(r),\{a\})<\varepsilon$. Así que, $\alpha_C(r)\in B_H(\varepsilon,\{a\})$, para todo $r\in[0,1]$.

Definimos:

$$\mathcal{A}=F_1(M)\cup\mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{U}}\mathrm{Im}\,\alpha_C).$$

Como $\{c\}\in\mathrm{Im}\,\alpha_C\cap F_1(M)$ (ya que $c\in B_d(\varepsilon,a)\subset M$) para cada $C\in\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ es un continuo. Notemos que $\{a\}\in\mathcal{U}\subset\mathcal{A}$, así que $\{a\}\in\mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$. Utilizando (c) y el hecho de que $F_1(M)\subset\mu^{-1}([0,t])$, obtenemos que $\mathcal{A}\subset\mu^{-1}([0,t])$.

Afirmación 5. Si $K\in\mathcal{A}$, entonces $K\subset\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,a))\cup M$ y $\mu(K)<t$.

Veamos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{C\in\mathcal{U}}\mathrm{Im}\,\alpha_C)\subset\{E\in\mu^{-1}([0,t]):E\subset\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,a))\}.$$

Como $\alpha_C(r)\subset\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,a))$ para todo elemento $C\in\mathcal{U}$ y todo $r\in[0,1]$, por el Lema 3.0.25 (c) obtenemos la contención deseada. Por tanto, $K\subset\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,a))\cup M$, para todo $K\in\mathcal{A}$.

Por otra parte, como $\alpha_C(r)\in B_H(\varepsilon,\{a\})$ para todo $C\in\mathcal{U}$ y todo $r\in[0,1]$,

$$\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_C \subset B_H(\varepsilon, \{a\}).$$

Lo cual nos lleva a que

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_C) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, \{a\})).$$

Por la propiedad (c), $\mu(K) < t$ para $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{C\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_C)$. En el caso en que $K \in F_1(M)$, $\mu(K) = 0$. De modo que $\mu(K) < t$, para todo $K \in \mathcal{A}$. Con esto queda probada la Afirmación 5.

Definamos al continuo que contendrá en su interior a $\{b\}$. Tomemos $D \in \mathcal{V}$. Por la definición de $\mathcal{V}$ y la propiedad (c), $\mu(D) < t < 1 = \mu(X)$. Entonces podemos aplicar el Lema 2.2.4 para obtener un subcontinuo $E \in \mu^{-1}(t)$ tal que $D \subsetneq E \subsetneq X$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\beta_D : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ de D a E. Usando la definición de $\mathcal{V}$, tenemos que $H(D, \{b\}) < \varepsilon$. Por el Lema 1.1.11, $D \subset B_d(\varepsilon, b)$. Fijemos un elemento $x \in D$. Entonces $x \in B_d(\varepsilon, b)$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, $x \in D = \beta_D(0) \subset \beta_D(r)$ para toda $r \in [0,1]$. Por lo tanto, $\beta_D(r) \cap \operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ para toda $r \in [0,1]$.

Definimos:

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}(t) \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{D\in\mathcal{V}} \operatorname{Im}\beta_D).$$

Como $\operatorname{Im}\beta_D \subset \mu^{-1}([0,t])$, $\mathcal{B} \subset \mu^{-1}([0,t])$. Por la construcción de los arcos ordenados β_D, $\operatorname{Im}\beta_D \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. De modo que $\mathcal{B}$ es un continuo. Notemos que $\{b\} \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{B})$, ya que $\{b\} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$.

Afirmación 6. Si $K \in \mathcal{B}$, entonces $K \cap \operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ o $\mu(K) = t$.

Verifiquemos que

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{D\in\mathcal{V}} \operatorname{Im}\beta_D) \subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset\}.$$

Como ya vimos, $\beta_D(r) \cap \operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ para cada $D \in \mathcal{V}$ y cada $r \in [0,1]$. Entonces, por el Lema 3.0.25 (a), obtenemos la contención deseada. De manera que, dado un elemento $K \in \mathcal{B}$, $K \cap \operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ o $\mu(K) = t$, así concluimos la Afirmación 6.

Afirmación 7. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Supongamos que tenemos un elemento $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Como $K \in \mathcal{A}$, por la Afirmación 5, éste safisface que $\mu(K) < t$ y $K \subset \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \cup M$. También tenemos que $K \in \mathcal{B}$. De manera que, la Afirmación 6 nos lleva a que $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$. Por tanto, tenemos lo siguiente:

$$\emptyset \neq K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \subset \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a) \cup M) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)).$$

Por otra parte, utilizando (a) y el hecho de que M es un cerrado, tenemos que $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \subset M$. De manera que, por (b),

$$\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) = \emptyset.$$

Teniendo en cuenta esto y la propiedad (b) que satisface ε, llegamos a que

$$\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a) \cup M) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) = \emptyset.$$

Con lo cual obtenemos una contradicción. De manera que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Con lo cual queda probado nuestro teorema. ■

Corolario 3.2.32. *La propiedad de ser mutuamente aposindético es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Basta con hacer notar que, si un continuo es mutuamente aposindético, entonces éste es semiaposindético y así, aplicamos el Teorema 3.2.31 para obtener nuestro resultado. ■

Corolario 3.2.33. *La propiedad de ser semiaposindético es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sea X semiaposindético, entonces el Teorema 3.2.31 nos dice que los bloques de Whitney son mutuamente aposindéticos. Lo cual nos lleva a que los bloques de Whitney también son semiaposindéticos. ■

Lema 3.2.34. *(M. E. Aguilera) Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $t, s, t_0, t_1 \in [0,1)$ tales que $0 \leq t_0 < s < t_1 \leq t$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Si $A_1, \ldots, A_m$ son elementos distintos de $\mu^{-1}(s)$, entonces existen subcontinuos $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ de $\mu^{-1}([t_0, t_1])$ que son ajenos dos a dos y tales que $A_i \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además, si existe un abierto conexo U de X que es propio y tal que $A_i \subset U$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existen subcontinuos $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ de $\mu^{-1}([t_0, t_1]) \cap C(\mathrm{cl}_X(U))$ que son ajenos dos a dos y tales que $A_i \in \mathrm{int}_{C(U) \cap \mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{B}_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Demostración. Notemos que, para $i \neq j$, $A_i \not\subset A_j$ ya que $\mu(A_i) = \mu(A_j)$, esto es por el Lema 2.3.4. Observemos que $A_1, \ldots, A_m \in \mu^{-1}(s) \subset \mu^{-1}((t_0, t_1))$. Así que, aplicando el Teorema 2.2.12, existe una función de Whitney $\nu : C(X) \to [0, 1]$ tal que

$$\nu^{-1}([t_1, 1]) = \mu^{-1}([t_1, 1]),$$

$$\nu^{-1}([t_0, t_1]) = \mu^{-1}([t_0, t_1]),$$

$$\nu^{-1}([0, t_0]) = \mu^{-1}([0, t_0]) \text{ y}$$

$$t_0 < \nu(A_1) < \cdots < \nu(A_m) < t_1.$$

Sean $r_1 = t_0$ y $r_{2m} = t_1$. Fijemos $r_2, \ldots, r_{2m-1} \in (t_0, t_1)$ tales que $\nu(A_1) < r_2 < r_3 < \nu(A_2) < r_4 < \cdots < r_{2m-3} < \nu(A_{m-1}) < r_{2m-2} < r_{2m-1} < \nu(A_m)$. Definimos el conjunto

$$\mathcal{A}_i = \nu^{-1}([r_{2i-1}, r_{2i}]),$$

para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por el Lema 3.0.22, estos conjuntos son continuos. Es claro que estos continuos son ajenos dos a dos. Tomemos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Observemos que $\mathcal{A}_i \subset \nu^{-1}([t_0, t_1]) = \mu^{-1}([t_0, t_1])$. Notemos que $A_i \in \nu^{-1}((r_{2i-1}, r_{2i})) \subset \mathcal{A}_i$. Como ν es una función continua, $\nu^{-1}((r_{2i-1}, r_{2i}))$ es un abierto de $C(X)$ y, además,

$$\nu^{-1}((r_{2i-1}, r_{2i})) \subset \mathcal{A}_i \subset \mu^{-1}([t_0, t_1]) \subset \mu^{-1}([0, t]).$$

De modo que $A_i \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_i)$.

Supongamos ahora que $A_i \subset U$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Consideremos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Notemos que $A_i \in C(\operatorname{cl}_X(U)) \cap \nu^{-1}([r_{2i-1}, r_{2i}])$. Como $A_m \subsetneq \operatorname{cl}_X(U)$, $\nu(A_m) < \nu(\operatorname{cl}_X(U))$. Así que, $r_{2i-1} < \nu(A_m) < \nu(\operatorname{cl}_X(U))$. Por el Lema 3.0.24,

$$\mathcal{B}_i = (\nu|_{C(cl_X(U))})^{-1}([r_{2i-1}, r_{2i}])$$

es un continuo. Notemos que

$$\mathcal{B}_i = C(\operatorname{cl}_X(U)) \cap \nu^{-1}([r_{2i-1}, r_{2i}]) = C(\operatorname{cl}_X(U)) \cap \mathcal{A}_i.$$

Por lo visto en el párrafo anterior, $\mathcal{B}_i \subset C(\operatorname{cl}_X(U)) \cap \mu^{-1}([t_0, t_1])$. Observemos, también por lo visto en el párrafo anterior, que

$$A_i \in \nu^{-1}((r_{2i-1}, r_{2i})) \cap C(U) \cap \mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{A}_i \cap C(U) = \mathcal{B}_i.$$

Así que $A_i \in \operatorname{int}_{C(U)\cap\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{B}_i)$. Es claro que los continuos $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ son ajenos dos a dos. De este modo concluimos nuestro lema. ■

Teorema 3.2.35. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser* 3*-mutuamente aposindético es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo 3-mutuamente aposindético, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Consideraremos varios casos para la prueba de este teorema. Tomemos $A, B, C \in \mu^{-1}([0,t])$ tres elementos diferentes.

Caso (i). $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = 0$.

En este caso, existen elementos $a, b, c \in X$ tales que $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ y $C = \{c\}$. Por hipótesis, existen subcontinuos ajenos M y N de X que contienen a a y b en su interior, respectivamente, y tales que $c \notin M \cup N$. Como $t > 0$ y M y N son cerrados, existe un número $\varepsilon > 0$ que satisface lo siguiente:

(1) $B_d(\varepsilon, a) \subset M$ y $B_d(\varepsilon, b) \subset N$;

(2) $\operatorname{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \subset X \setminus (M \cup N)$;

(3) $\operatorname{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, \{a\}) \cup B_H(\varepsilon, \{b\}) \cup B_H(\varepsilon, \{c\})) \subset \mu^{-1}([0,t))$.

Cabe destacar que (3) será usado para probar que los continuos que construiremos a continuación son ajenos y que, en este caso, no se utiliza fuertemente el hecho de que X es 3-mutuamente aposindético ya que sólo usamos dos de los tres continuos que existen de esta definición. Construyamos un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ que contenga a $\{a\}$ en su interior respecto a $\mu^{-1}([0,t])$. Sea $P \in B_H(\varepsilon, \{a\})$. Por la Proposición 1.0.10, tenemos $P \subset N(\varepsilon, \{a\}) = B_d(\varepsilon, a)$; entonces para todo $x \in P$ sucede que $d(x,a) < \varepsilon$. Fijemos un elemento $p \in P$, entonces $d(p,a) < \varepsilon$. Por (1), sabemos que $p \in M$. En el caso en que $\{p\} \subsetneq P$, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_P : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ de $\{p\}$ a P. En el caso en que $P = \{p\}$, definimos $\alpha_P : [0,1] \to C(X)$ como la función constante $\alpha_P(r) = P$. Tomemos $r \in [0,1]$. Observemos que $\alpha_P(r) \subset \alpha(1) = P$ (ya que α_P es arco ordenado).

Como $P \subset B_d(\varepsilon, a)$, el Lema 1.1.11 nos lleva a que $\alpha_P(r) \in B_H(\varepsilon, \{a\})$. Cabe destacar que $B_d(\varepsilon, a) \subset M$, de modo que $\alpha_P(r) \subset B_d(\varepsilon, a) \subset M$. Definimos:

$$\mathcal{M} = F_1(M) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\}).$$

Como $\alpha_P(0) = \{p\} \in F_1(M)$, $\mathrm{Im}\,\alpha_P \cap F_1(M) \neq \emptyset$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, \{a\})$. Lo cual nos dice que

$$F_1(M) \cup (\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\})$$

es un conexo. Notemos que $\mathrm{Im}\,\alpha_P \subset B_H(\varepsilon, \{a\}) \subset \mu^{-1}([0, t])$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, \{a\})$. Por tanto, $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0, t])$. Además, como $P \in \mathrm{Im}\,\alpha_P$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\})$, tenemos que

$$B_H(\varepsilon, \{a\}) \subset \bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\} \subset \mathcal{M}.$$

Observemos que $B_H(\varepsilon, \{a\})$ es un abierto de $C(X)$ y que $B_H(\varepsilon, \{a\}) \subset \mu^{-1}([0, t])$ (por (3)). Así que $B_H(\varepsilon, \{a\})$ también es un abierto de $\mu^{-1}([0, t])$. De manera que $\{a\}$ está en el interior, relativo a $\mu^{-1}([0, t])$, de $\mathcal{M}$.

Afirmación (4). Si $K \in \mathcal{M}$, entonces $K \subset M$ y $\big[K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, \{a\}))$ o bien $\mu(K) = 0\big]$.

Como $\alpha_P(r) \in B_H(\varepsilon, \{a\})$ para todo $P \in B_d(\varepsilon, \{a\})$ y todo $r \in [0, 1]$,

$$\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\} \subset B_H(\varepsilon, \{a\}).$$

Por tanto,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\}) \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, \{a\})).$$

Veamos ahora que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, \{a\})\}) \subset \{E \in \mu^{-1}([0, t]) : E \subset M\}.$$

Sabemos que $\alpha_P(r) \subset M$ para todo $P \in B_d(\varepsilon, \{a\})$ y todo $r \in [0, 1]$. Entonces, por el Lema 3.0.25 (b), obtenemos la contención deseada. Por lo tanto, dado un elemento $K \in \mathcal{M}$, $K \subset M$ y $\big[K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, \{a\}))$ o bien $\mu(K) = 0\big]$.

Con esto, terminamos la construcción del subcontinuo $\mathcal{M}$ de $\mu^{-1}([0, t])$ que tiene a $\{a\}$ en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$.

De manera similar, se construye un subcontinuo $\mathcal{N}$ de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a $\{b\}$ en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0,t])$, y tal que:

Afirmación (5). Si $K \in \mathcal{N}$, entonces $K \subset N$ y $\big[K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon,\{b\}))$ o bien $\mu(K) = 0\big]$.

Afirmación (6). $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Sea $E \in \mathcal{M}$. Entonces, por la Afirmación (4), $E \subset M$. Si $F \in \mathcal{N}$, utilizando la Afirmación (5), obtenemos que $F \subset N$. Como $M \cap N = \emptyset$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Con lo cual concluimos esta afirmación.

Construyamos ahora un subcontinuo $\mathcal{L}$ de $\mu^{-1}([0,t])$ que contenga a $\{c\}$ en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0,t])$, y que satisfaga lo siguiente.

Afirmación (7). Si $K \in \mathcal{L}$, entonces $K \in \mu^{-1}(t)$ o $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset$.

Consideremos $Q \in B_H(\varepsilon, \{c\})$. Observemos que (por el Lema 1.1.11) $Q \subset B_d(\varepsilon, c)$. Por otro lado, como $B_d(\varepsilon,\{c\}) \subset \mu^{-1}([0,t))$, $\mu(Q) < t$ y, por tanto, $Q \subsetneq X$. De modo que, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $R \in \mu^{-1}(t)$ tal que $Q \subsetneq R$. Así que (por el Corolario 2.2.8), existe un arco ordenado $\gamma_Q : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ de Q a R. Definimos:

$$\mathcal{L} = \mu^{-1}(t) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_Q : Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})\}).$$

Notemos que $\mathrm{Im}\,\gamma_Q \subset \mu^{-1}([0,t])$, de modo que $\mathcal{L} \subset \mu^{-1}([0,t])$. Por el Teorema 8.3 de [12], $\mu^{-1}(t)$ es un continuo. Como $\mathrm{Im}\,\gamma_Q \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$ para cada $Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})$,

$$\mu^{-1}(t) \cup (\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_Q : Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})\})$$

es un conexo. Así que, $\mathcal{L}$ también es un conexo y, por lo tanto, un continuo.

Cabe destacar que $Q \in \mathrm{Im}\,\gamma_Q$, para cada $Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})$. De manera que

$$B_H(\varepsilon,\{c\}) \subset \bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_Q : Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})\} \subset \mathcal{L}.$$

Como $B_H(\varepsilon,\{c\})$ es un abierto de $C(X)$ y $B_H(\varepsilon,\{c\}) \subset \mu^{-1}([0,t])$ (por (3)), $\{c\} \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{L})$.

Veamos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_Q : Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})\}) \subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \neq \emptyset\}.$$

Sea $Q \in B_H(\varepsilon,\{c\})$. Entonces $Q \subset B_d(\varepsilon,c)$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, tenemos $Q = \gamma_Q(0) \subset \gamma_Q(r)$ para todo $r \in [0,1]$. Así que, $\gamma_Q(r) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \neq \emptyset$. De modo que, por el Lema 3.0.25 (a) obtenemos la conteción buscada. Así que, dado un elemento $K \in \mathcal{L}$, se satisface que $K \in \mu^{-1}(t)$ o $K \cap \mathrm{cl}_X(B(\varepsilon,c)) \neq \emptyset$. Esto prueba la Afirmación 7.

Afirmación (8). $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Verifiquemos que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Supongamos que existe $E \in \mathcal{L} \cap \mathcal{M}$. De modo que, por la Afirmación (4), $E \subset M$ y $\big[E \in \mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon,\{a\}))$ o bien $\mu(E) = 0\big]$. Por otro lado, como $E \in \mathcal{L}$, por la Afirmación (7), $E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \neq \emptyset$ o $\mu(E) = t > 0$. Como $\mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon,\{a\})) \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$ (por (3)), $\mu(E) \neq t$. Por lo tanto, $F \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \neq \emptyset$. Pero (2) nos dice que $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \cap M = \emptyset$. Así llegamos a una contradicción. De modo que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. De manera similar se obtiene que $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Con esto terminamos la prueba de que los subcontinuos $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ y $\mathcal{L}$ son ajenos dos a dos y concluimos nuestro primer caso.

Caso (ii). $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = t$.

En este caso, como $A \neq B \neq C$, tenemos, por el Lema 2.3.4, que estos tres elementos no son comparables dos a dos. Así que existen elementos $a \in A \setminus B$, $b \in B \setminus C$ y $c \in C \setminus A$. Por hipótesis, existen $M, N \in C(X)$ ajenos tales que $a \in \mathrm{int}_X(M)$, $b \in \mathrm{int}_X(N)$ y $c \notin M \cup N$. Cabe destacar que en este caso, no utilizamos fuertemente el concepto de 3-mutuamente aposindético, ya que solamente usamos dos de los tres continuos de la definición. Fijemos $s > 0$ tal que

$$s < \mathrm{mín}\{t, \mu(M), \mu(N)\}.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que:

(9) $B_d(\varepsilon,a) \subset M$, $B_d(\varepsilon,b) \subset N$;

(10) $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon,c)) \subset X \setminus (M \cup N)$;

(11) $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \cap \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) = \emptyset$, $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \cap \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, C)) = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \cap \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A)) = \emptyset$.

Construyamos un subcontinuo $\mathcal{M}$ de $\mu^{-1}([0, t])$ que contiene a A en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$, y, tal que, si $K \in \mathcal{M}$, éste satisface:

Afirmación (12). $\big[K \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A)) \cup M,\ K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \neq \emptyset$ y $K \in \mu^{-1}([s, t])\big]$ o $K \in (\mu|_{C(M)})^{-1}(s)$.

Consideremos $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])$. Por la Proposición 1.0.10, $A \subset N(\varepsilon, P)$ y $P \subset N(\varepsilon, A)$. De manera que, existe un elemento $p \in P$ tal que $p \in B_d(\varepsilon, a)$. Como $\{p\} \subsetneq P$, aplicamos el Lema 2.2.4 para asegurar que, existe un elemento $Q_P \in \mu^{-1}(s)$ tal que $p \in Q_P \subsetneq P$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_P : [0, 1] \to \mu^{-1}([s, t])$ de Q_P a P. Como $p \in B_d(\varepsilon, a) \subset M$ (por (9)), tenemos $\{p\} \subsetneq M$. Teniendo en cuenta que $0 < s < \mu(M)$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $R_P \in \mu^{-1}(s)$ tal que $p \in R_P \subset M$. De modo que, $p \in Q_P \cap R_P$, así que, el Lema 2.3.13 nos asegura que, existe una trayectoria $f_P : [0, 1] \to \mu^{-1}(s)$ que une a Q_P con R_P tal que $p \in f_P(r)$ y $f_P(r) \subset Q_P \cup R_P$ para cada $r \in [0, 1]$.

Como $M \notin F_1(X)$ y $s < \mu(M)$, el Lema 2.3.3 nos dice que $(\mu|_{C(M)})^{-1}(s)$ es un continuo no degenerado. Definimos:

$$\mathcal{M} = (\mu|_{C(M)})^{-1}(s) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\, \alpha_P \cup \mathrm{Im}\, f_P :\ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])\}).$$

Como $Q_P \in \mathrm{Im}\, \alpha_P \cap \mathrm{Im}\, f_P$ y $R_P \in (\mu|_{C(M)})^{-1}(s) \cap \mathrm{Im}\, f_P$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])$,

$$(\mu|_{C(M)})^{-1}(s) \cup (\bigcup\{\mathrm{Im}\, \alpha_P \cup \mathrm{Im}\, f_P :\ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])\})$$

es un conexo y, por lo tanto, $\mathcal{M}$ es un continuo. Destaquemos que $P \in \mathrm{Im}\, \alpha_P$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])$ y que $B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])$ es un abierto de $\mu^{-1}([0, t])$. Así que

$$B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t]) \subset \bigcup\{\mathrm{Im}\, \alpha_P :\ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])\} \subset \mathcal{M},$$

es decir, $A \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{M})$.

Sea $K \in \mathcal{M}$. Supongamos que

$$K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\, \alpha_P \cup \mathrm{Im}\, f_P :\ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s, t])\}) =$$

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\}) \cup$$

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,f_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\}).$$

Como $\mathrm{Im}\,\alpha_P \cup \mathrm{Im}\,f_P \subset \mu^{-1}([s,t])$, se tiene que $\mathcal{M} \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Tomemos $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y $r \in [0,1]$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, $\alpha_P(r) \subset \alpha_P(1) = P$ y, como $P \subset N(\varepsilon, A)$, obtenemos que $\alpha_P(r) \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))$. Entonces, por el Lema 3.0.25(c),

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : \ E \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A))\}.$$

Por otro lado, tenemos que $B_d(\varepsilon, a) \cap Q_P \neq \emptyset$. Utilizando nuevamente las propiedades de un arco ordenado, obtenemos que $Q_P \subset \alpha_P(r)$. De manera que $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \cap \alpha_P(r) \neq \emptyset$. Así que, por el Lema 3.0.25 (a),

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : \ E \cap \mathrm{cl}_X(B(\varepsilon, a)) \neq \emptyset\}.$$

Por otra parte, como $\alpha_P(r) \in \mu^{-1}([s,t])$, para cada $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y cada $r \in [0,1]$,

$$\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\} \subset \mu^{-1}([s,t])$$

y, como consecuencia,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\}) \subset \mu^{-1}([s,t]).$$

Sean $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y $r \in [0,1]$. Ya elegimos un elemento $p \in P$ tal que $p \in B_d(\varepsilon, a) \cap f_P(r)$. De modo que, $B_d(\varepsilon, a) \cap f_P(r) \neq \emptyset$. Por lo tanto, aplicando el Lema 3.0.25 (a),

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,f_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \neq \emptyset\}.$$

Por otra parte, tenemos las siguientes contenciones:

$$f_P(r) \subset Q_P \cup R_P \subset P \cup M \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A)) \cup M,$$

para cada $P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y cada $r \in [0,1]$. Así que, por el Lema 3.0.25 (c),

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\, f_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : \ E \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A)) \cup M\}.$$

Es claro que $f_P(r) \in \mu^{-1}(s)$, lo que nos lleva a que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\, f_P : \ P \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mu^{-1}((s,t])\}) \subset \mu^{-1}(s).$$

Por tanto, si $K \in \mathcal{M}$ entonces éste satisface la Afirmación 12.

De manera similar podemos obtener un subcontinuo $\mathcal{N}$ de $\mu^{-1}([0,t])$ que contenga a B en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0,t])$, y que cualquier elemento $K \in \mathcal{N}$ satisfaga:

Afirmación (13). $\big[K \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) \cup N,\ K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ y $K \in \mu^{-1}([s,t])\big]$ o $K \in (\mu|_{C(N)})^{-1}(s)$.

Afirmación (14). Los continuos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son ajenos.

Supongamos que existe $E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Entonces, por la Afirmación (12), $E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \neq \emptyset$ o $E \subset M$. Como $M \cap N = \emptyset$, $E \notin (\mu|_{C(N)})^{-1}(s)$. De modo que $E \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) \cup N$. Intersectando con $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a))$, obtenemos que

$$\emptyset \neq E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)) \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a))) \cup (N \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, a)),$$

pero (por (9) y (11)) llegamos a que el lado derecho es vacío, lo cual es una contradicción. Con lo cual, concluimos que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ y así concluimos esta afirmación.

Ahora definiremos un continuo $\mathcal{L}$ de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a C en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0,t])$ y, para todo $K \in \mathcal{L}$, se cumple:

Afirmación (15). $\big[K \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, C))$ y $K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset\big]$ o $K \in F_1(X)$.

Consideremos $P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])$. Por la Proposición 1.0.10, $C \subset N(\varepsilon, P)$ y $P \subset N(\varepsilon, C)$. Fijemos un elemento $p \in P$ tal que $p \in B_d(\varepsilon, c)$. De modo que $\{p\} \subsetneq P$. Así que, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\gamma_P : [0,1] \to \mu^{-1}([0,t])$ de $\{p\}$ a P. Definimos:

$$\mathcal{L} = F_1(X) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_P :\ P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])\}).$$

Como $\mathrm{Im}\,\gamma_p \cap F_1(X) \neq \emptyset$,

$$F_1(X) \cup (\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_P :\ P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

es un conexo y, por lo tanto, $\mathcal{L}$ es un continuo. Notemos que $P \in \mathrm{Im}\,\gamma_P$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])$. Así que

$$B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t]) \subset \bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_P :\ P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])\} \subset \mathcal{L}.$$

Lo cual nos lleva a que $C \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{C})$. Como $\mathrm{Im}\,\gamma_P \subset \mu^{-1}([0,t])$ para cada $P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y $F_1(X) \subset \mu^{-1}([0,t])$, $\mathcal{L} \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Probemos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_P :\ P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\gamma_P :\ P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])\})$$

$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, C))\}.$$

Sean $P \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}((s,t])$ y $r \in [0,1]$. Como γ_P es un arco ordenado de $\{p\}$ a P, $\{p\} = \gamma_P(0) \subset \gamma_P(r) \subset \gamma_P(1) = P$. Por lo tanto, $\gamma_P(r) \cap B_d(\varepsilon, c) \neq \emptyset$ y $\gamma_P(r) \subset P \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, C))$. Por el Lema 3.0.25, partes (a) y (c) respectivamente, obtenemos las contenciones deseadas. Considerando un elemento $K \in \mathcal{L}$ y teniendo en cuenta las contenciones que acabamos de probar, tenemos que K satisface la Afirmación (15).

Afirmación (16). $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ y $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Sea $E \in \mathcal{L}$. Entonces, por la Afirmación (15), $E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset$ o $\mu(E) = 0$. Por (10) y (11), $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \cap M = \emptyset$

y $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \cap \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, A)) = \emptyset$. Así que, E no puede satisfacer la Afirmación (12). Con esto, hemos visto que $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. De manera similar se prueba que $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Con esto, concluimos que este caso.

Caso (iii). $\mu(A) < \mu(B) < \mu(C)$.

Fijemos $p, q, r, s \in (0, t)$ tales que $\mu(A) < p < q < \mu(B) < r < s < \mu(C)$. Por el Lema 3.0.22,

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([0, p]),$$

$$\mathcal{B} = \mu^{-1}([q, r]) \text{ y}$$

$$\mathcal{C} = \mu^{-1}([s, t])$$

son continuos. Notemos que $A \in \mu^{-1}([0, p)) \subset \mathcal{A}$, $B \in \mu^{-1}((q, r)) \subset \mathcal{B}$ y $C \in \mu^{-1}((s, t]) \subset \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son subcontinuos de $\mu^{-1}([0, t])$ ajenos dos a dos y que contienen a A, B y C, respectivamente, en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$.

Caso (iv). $0 < \mu(A) = \mu(B) = \mu(C) < t$.

En este caso podemos aplicar el Lema 3.2.34 para obtener los continuos deseados.

Caso (v). $\mu(A) = \mu(B) < \mu(C)$.

En este caso, fijamos $r, s \in (\mu(A), t)$ tales que $\mu(A) < r < s < \mu(C)$. Observemos que

$$\mathcal{C} = \mu^{-1}([s, t])$$

es un subcontinuo (por el Lema 3.0.22) de $\mu^{-1}([0, t])$, contiene a C en su interior en $\mu^{-1}([0, t])$ y, además, $\mathcal{C} \cap \mu^{-1}([0, r]) = \emptyset$. Como X es 3-mutuamente aposindético, X es semiaposindético. Por el Teorema 3.2.32, $\mu^{-1}([0, r])$ es mutuamente aposindético. Así que, existen subcontinuos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mu^{-1}([0, r])$ (y por lo tanto de $\mu^{-1}([0, t])$) ajenos que contienen a A y B en su interior en $\mu^{-1}([0, r])$. Por lo tanto, existe un abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U} \cap \mu^{-1}([0, r]) \subset \mathcal{A}$. Como $\mu(A) < r$, $A \in \mathcal{U} \cap \mu^{-1}([0, r)) \subset \mathcal{A}$. Así que,

A pertenece al interior, con respecto a $\mu^{-1}([0,t])$, de $\mathcal{A}$. De manera similar, se obtiene que B pertenece al interior de $\mathcal{B}$ con respecto a $\mu^{-1}([0,t])$. Es claro que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Así, terminamos la prueba de este caso.

Caso (vi). $\mu(A) < \mu(B) = \mu(C) < t$.

Tomemos $r_1,\ r_2 \in (0,1)$ tales que $\mu(A) < r_1 < r_2 < \mu(B)$. Definimos

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([0,r_1]).$$

Por el Lema 3.0.22, sabemos que $\mathcal{A}$ es un continuo y, además, es claro que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t])$. Como μ es una función continua, $\mu^{-1}([0,r_1))$ es un abierto de $C(X)$ y, como $r_1 < t$, tenemos que también es un abierto de $\mu^{-1}([0,t])$. Notemos que $A \in \mu^{-1}([0,r_1)) \subset \mathcal{A}$, así que, $A \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$. Por otra parte, considerando $t_0 = r_2$, $t_1 = t$ y $s = \mu(B)$ y aplicando el Lema 3.2.34, obtenemos dos subcontinuos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mu^{-1}([r_2,t])$ y, por tanto, de $\mu^{-1}([0,t])$ tales que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, $B \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{B})$ y $C \in \mathrm{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{C})$. Por la elección de los números r_1 y r_2, $\mathcal{A}$ no intersecta a $\mathcal{B}$ ni a $\mathcal{C}$. De este modo terminamos con este caso.

Caso (vii). $\mu(A) < \mu(B) = \mu(C) = t$.

Notemos que $B \not\subset A$ ya que $\mu(A) < \mu(B)$. De modo que, existe un elemento $b \in B \setminus A$. Como $C,\ B \in \mu^{-1}(t)$, por el Lema 2.3.4, $C \not\subset B$. Así que, existe un elemento $c \in C \setminus B$. Por hipótesis, existe un subcontinuo N de X tal que $b \in \mathrm{int}_X(N)$ y $c \notin N$. Observemos que $N \notin F_1(X)$.

Subcaso (vii.1). $\mu(A) < \mu(N)$.

Fijemos $q,\ r,\ s \in (0,t)$ tales que $\mu(A) < q < r < s < \min\{\mu(N), t\}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ que satisfaga lo siguiente:

(a) $B_d(\varepsilon, b) \subset N$;

(b) $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \cap \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) = \emptyset$;

(c) $\mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \cap N = \emptyset$;

(d) $\mathrm{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, B) \cup B_H(\varepsilon, C)) \subset \mu^{-1}((s, 1])$.

Utilizando la primera parte de la demostración del caso (ii), obtenemos un subcontinuo $\mathcal{B}$ de $\mu^{-1}([0, t])$ que contiene a B en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$, y si $K \in \mathcal{B}$, entonces:

Afirmación (e). $\big[K \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) \cup N,\ K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, b)) \neq \emptyset$ y $K \in \mu^{-1}([s, t])\big]$ o $K \in (\mu|_{C(N)})^{-1}(s)$.

Definamos un subcontinuo de $\mu^{-1}([0, t])$ que tiene en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0, t])$, a C. Sea $D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Por la Proposición 1.0.10, $C \subset N(\varepsilon, D)$. Así que, existe un elemento $x \in D$ tal que $x \in B_d(\varepsilon, c)$. Como $D \in B_H(\varepsilon, C) \subset \mu^{-1}([s, 1])$, tenemos $\{x\} \subsetneq D$. Notemos que $r \in (0, \mu(D))$. Entonces, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $E_D \in \mu^{-1}(r)$ tal que $x \in E_D \subsetneq D$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_D : [0, 1] \to \mu^{-1}([r, t])$ de E_D a D. Notemos que $\mathrm{Im}\,\alpha_D \cap \mu^{-1}(r) \neq \emptyset$. Consideremos $u \in [0, 1]$. Como α_D es un arco ordenado, se satisface que $E_D = \alpha_D(0) \subset \alpha_D(u)$. Como $x \in E_D$, $x \in \alpha_D(u)$. Así que $\alpha_D(u) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset$. Como μ es una función de Whitney, $r = \mu(E_D) \leq \mu(\alpha_D(u)) \leq \mu(D) \leq t$. Así que $\alpha_D(u) \in \mu^{-1}([r, t])$. Definimos:

$$\mathcal{C} = \mu^{-1}(r) \cup \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_D : D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])\}\right).$$

Como $\mu^{-1}(r)$ es un conexo (por el Teorema 8.3 de [12]) e $\mathrm{Im}\,\alpha_D \cap \mu^{-1}(r) \neq \emptyset$, para cada $D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])$,

$$\mu^{-1}(r) \cup \bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_D : D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])\}$$

también es un conexo; de esta manera, obtenemos que $\mathcal{C}$ es un continuo. Notemos que, $\mathrm{Im}\,\alpha_D \subset \mu^{-1}([r, t])$, para cada $D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])$, lo cual nos lleva a que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_D : D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0, t])\}\right) \subset \mu^{-1}([r, t])$$

y, por lo tanto, a que $\mathcal{C} \subset \mu^{-1}([r, t])$. Observemos que éste tiene a C en su interior con respecto a $\mu^{-1}([0, t])$. Veamos que, para un elemento $K \in \mathcal{C}$, se satisface que:

Afirmación (f). $K \in \mu^{-1}(r)$ o $\big[K \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset$ y $K \in \mu^{-1}([r, t])\big]$.

Veamos que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_D : D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0,t])\}\right)$$
$$\subset \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset\}.$$

Sean $D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0,t])$ y $u \in [0,1]$. Como ya vimos, $\alpha_D(u) \cap \mathrm{cl}_X(B_d(\varepsilon, c)) \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 3.0.25 (a) obtenemos la contención buscada. Por otra parte, $\mathrm{Im}\,\alpha_D \subset \mu^{-1}([r,t])$. Lo cual nos conduce a que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\mathrm{Im}\,\alpha_D : D \in B_H(\varepsilon, C) \cap \mu^{-1}([0,t])\}\right) \subset \mu^{-1}([r,t]).$$

Por lo tanto, si $K \in \mathcal{C}$ este satisface (f).

Definimos:

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}([0,q]),$$

el cual es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ (ya que $q < t$) y tiene a A en su interior, respecto a $\mu^{-1}([0,t])$, porque $A \in \mu^{-1}([0,q)) \subset \mathcal{A}$ (ya que $\mu(A) < q$).

Veamos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Por (e), $\mathcal{B} \subset \mu^{-1}([s,t])$ y, por (f), $\mathcal{C} \subset \mu^{-1}([r,t])$. Por la definición de $\mathcal{A}$ y teniendo en cuenta que $q < r < s$, concluimos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Verifiquemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Supongamos que existe un elemento $K \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. Como $K \in \mathcal{B}$, éste satisface (por (e)) que $K \in \mu^{-1}([s,t])$. Teniendo en cuenta que $r < s$, obtenemos que $K \notin \mu^{-1}(r)$. Como $K \in \mathcal{C}$, éste satisface (f). Así que, $K \cap B_d(\varepsilon, c) \neq \emptyset$. Como K satisface (e), $K \subset \mathrm{cl}_X(N(\varepsilon, B)) \cup N$. Por lo tanto,

$$K \cap B_d(\varepsilon, c) \subset (N(\varepsilon, B) \cap B_d(\varepsilon, c)) \cup (N \cap B_d(\varepsilon, c)).$$

Por (b) y (c), el lado derecho es el conjunto vacío, lo cual nos lleva que $K \cap B_d(\varepsilon, c) = \emptyset$. Esto es una contradicción que nació de suponer que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, así que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Subcaso (vii.2). $\mu(N) \leq \mu(A)$.

Como $b \in N$ y $b \notin A$, $N \not\subset A$. Si tuviéramos que $A \subset N$, entonces $\mu(A) \leq \mu(N)$. Lo cual nos llevaría a que $A = N$, pero esto no puede ser ya que $N \not\subset A$. De modo que, $A \not\subset N$. Como $N \notin F_1(X)$, $0 < \mu(N)$ y, como $\mu(A) < \mu(B) = t$, A, $N \in \mu^{-1}((0,t))$. Considerando $t_0 = 0$ y $t_1 = t$ y, aplicando el Teorema 2.2.12, existe una función de Whitney $\nu : C(X) \to [0,1]$ tal que

$$\nu^{-1}([t,1]) = \mu^{-1}([t,1]),$$

$$\nu^{-1}([0,t]) = \mu^{-1}([0,t]), \text{ y}$$

$$0 < \nu(A) < \nu(N) < t.$$

Observemos que

$$\mu^{-1}(t) = \mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,1]) = \nu^{-1}([0,t]) \cap \nu^{-1}([t,1]) = \nu^{-1}(t).$$

De modo que B, $C \in \nu^{-1}(t)$. Por lo tanto, podemos aplicar el subcaso (vii.1) para obtener subcontinuos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\nu^{-1}([0,t]) = \mu^{-1}([0,t])$ ajenos dos a dos y tales que contienen a A, B y C en su interior relativo a $\nu^{-1}([0,t]) = \mu^{-1}([0,t])$, respectivamente.

Con este subcaso terminamos la prueba de que $\mu^{-1}([0,t])$ es 3-mutuamente aposindético. ■

El siguiente resultado es el Teorema 1.92 de [23].

Teorema 3.2.36. *X es localmente conexo si y sólo si $C(X)$ es localmente conexo.*

Ejemplo 3.2.37. *(M. E. Aguilera) Un continuo X que no es m-mutuamente aposindético para ninguna $m \geq 2$. Con este ejemplo se trabajará en el Teorema 3.2.41.*

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$I_n = \{(x_n, y) : 1 \leq y \leq 2)\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$I = \{(0, y) : 1 \leq y \leq 2\},$$

$$J = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \text{ y}$$

$$S = \{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x}) : x \in (0,1])\}.$$

Definimos el conjunto:

$$X = S \cup J \cup I \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} I_n\right).$$

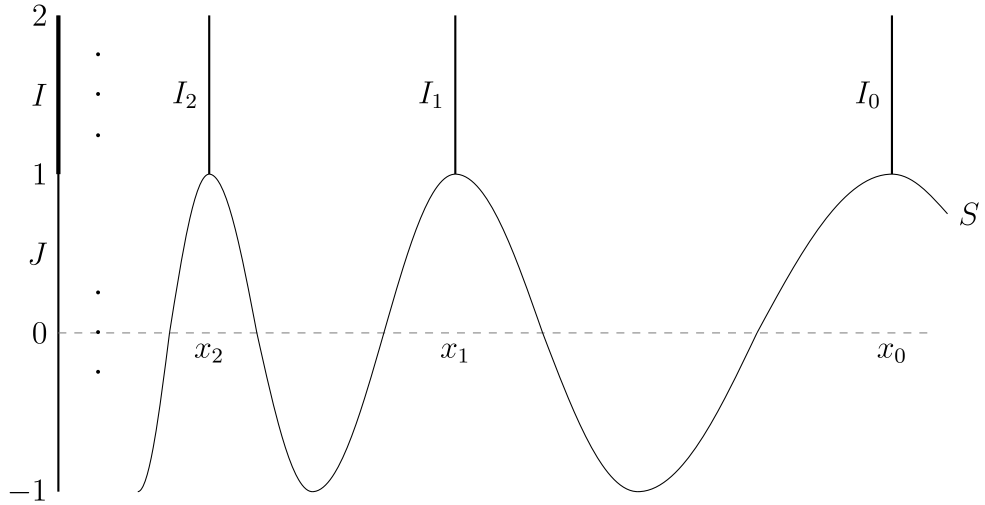

Figura 6: X

Notemos que $S \cup J$ es el continuo sen $\frac{1}{x}$ y $I \cap J \neq \emptyset$. Como $S \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $S \cup (\bigcup_{n \geq 0} I_n)$ es conexo y su cerradura es X. Luego X es un continuo. Ver Figura 6.

Observemos que los elementos $(0,-1)$ y $(0,1)$ no se pueden separar mediante continuos ajenos que los contengan en su interior ya que si $A, B \in C(X)$ son tales continuos con $(0,-1) \in \operatorname{int}_X(A)$ y $(0,1) \in \operatorname{int}_X(B)$, entonces $\{0\} \times [-1,1] \subset A$ y $\{0\} \times [-1,1] \subset B$. Lo cual nos lleva a que $A \cap B \neq \emptyset$, así que X no es m-mutuamente aposindético para ninguna $m \geq 2$.

Definiciones y observaciones 3.2.38. (Para los Lemas 3.2.39 y 3.2.40.) Sean X como en el Ejemplo 3.2.37 y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Consideremos que $\pi_1 : X \to [0,1]$ y $\pi_2 : X \to [-1,2]$ son las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Recordemos que $C(\pi_2) : C(X) \to C([-1,2])$ es la función inducida por π_2, la Proposición 1.2.1 nos dice que ésta es continua. La Proposición 1.2.7 nos dice que

$\text{máx} : C([-1,2]) \to [-1,2]$ es una función continua. De modo que la función $\varphi : C(X) \to [-1,2]$ dada por:

$$\varphi(K) = \text{máx}(C(\pi_2)(K))$$

es una función continua. Dado $z \in [1,2]$, definimos el siguiente subcontinuo de X:

$$X_z = \{p \in X : -1 \leq \pi_2(p) \leq z\}.$$

Dados un elemento $D \in C(X) \setminus F_1(X)$ y $w \in (0, \mu(D))$, por el Lema 2.3.3, $(\mu|_{C(D)})^{-1}(w)$ es un continuo no degenerado. Definimos el continuo:

$$\mathcal{L}(D,w) = (\mu|_{C(D)})^{-1}(w).$$

Definimos también:

$$W = X \setminus \{(1, \operatorname{sen} 1)\},$$

el cual es un abierto de X.

A continuación veremos un par de lemas que nos auxiliarán en la demostración del Teorema 3.2.41.

Lema 3.2.39. *(M. E. Aguilera) Sean X y W como en el Ejemplo 3.2.37 y en las Definiciones y observaciones 3.2.38, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y t, $t_0 \in (0,1)$ tales que $t_0 < t < \mu(J)$. Si $m, n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m$ son elementos distintos de $F_1(I \cup J) \setminus F_1(J)$ y $B_1, \ldots, B_n$ son elementos distintos de $F_1(J)$, entonces existen subcontinuos $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ de $\mu^{-1}([0,t_0])$ que son ajenos dos a dos y que contienen, respectivamente, a $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ en su interior relativo a $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$.*

Demostración. Tomemos $A \in \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Consideramos dos casos para construir los continuos deseados.

Caso 1. $A \in F_1(I \cup J) \setminus F_1(J)$.

En este caso, existe un elemento $a \in (1,2]$ tal que $A = \{(0,a)\}$. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $1 < a - \varepsilon$ y $s \in (0, t_0)$. Como $J \subsetneq X_{a+\varepsilon}$, $\mu(J) < \mu(X_{a+\varepsilon})$. Por lo tanto, $s < t_0 < t < \mu(J) < \mu(X_{a+\varepsilon})$. Definimos el abierto:

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}([0,s)) \cap C(W) \cap \langle \pi_2^{-1}(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\rangle.$$

Notemos que $A \in \mathcal{U}$ y que $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$.

Consideremos $B \in \mathcal{U}$. Como $C(\pi_2)(B) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $B \subset X_{a+\varepsilon}$. Además, $B \subsetneq X_{a+\varepsilon}$ ya que $\mu(B) < s < \mu(X_{a+\varepsilon})$. Así que, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $C_B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $B \subsetneq C_B \subsetneq X_{a+\varepsilon}$. Observemos que $C_B \in \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s)$. Consideremos un arco ordenado $\beta_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0,s])$ de B a C_B. De modo que $\operatorname{Im}\beta_B \cap \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s) \neq \emptyset$. Definimos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a,\varepsilon,s) = \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s) \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B).$$

Notemos que $\mathcal{A}$ es un continuo. De la definición de β_B, $B \in \operatorname{Im}\beta_B$, para cada $B \in \mathcal{U}$. Así que

$$A \in \mathcal{U} \subset \textstyle\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B \subset \mathcal{A}.$$

Luego, $\mathcal{A}$ contiene a A en su interior respecto a $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$. Como $\operatorname{Im}\beta_B \subset \mu^{-1}([0,s]) \subset \mu^{-1}([0,t])$, para todo $B \in \mathcal{U}$, y $\mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s) \subset \mu^{-1}(s) \subset \mu^{-1}([0,t])$, $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t])$. Ver Figura 7.

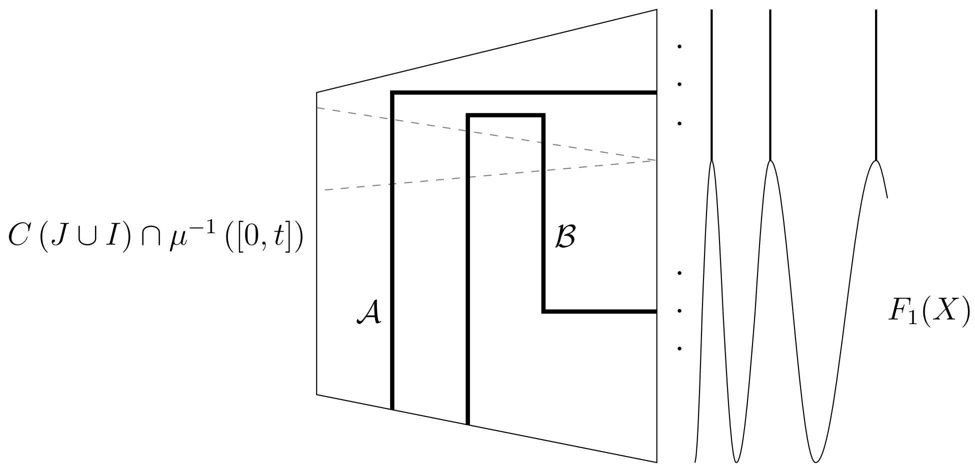

Figura 7: $\mathcal{A} \cap C(J \cup I)$ y $\mathcal{B} \cap C(J \cup I)$

Propiedad 1. Si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \leq s$.

Tomemos $B \in \mathcal{U}$ y $r \in [0,1]$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, se tiene $B = \beta_B(0) \subset \beta_B(r) \subset \beta_B(1) = C_B$ y, como $C_B \subset X_{a+\varepsilon}$, $\varphi(B) \leq \varphi(\beta_B(r)) \leq \varphi(X_{a+\varepsilon}) = a+\varepsilon$. Como $B \in \mathcal{U}$, se satisface que $\varphi(B) > a-\varepsilon$. Por lo tanto, $\varphi(\beta_B(r)) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Lo cual nos lleva a que $\beta_B(r) \in \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$. De modo que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Por otro lado, como $\mathrm{Im}\,\beta_B \subset \mu^{-1}([0,s])$ y $\mu^{-1}([0,s])$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B) \subset \mu^{-1}([0,s]).$$

Por lo tanto si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B)$, se satisface que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \leq s$. Así, concluimos con esta propiedad.

Propiedad 2. Si $K \in \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s)$, entonces $\varphi(K) \leq a+\varepsilon$ y $\mu(K) = s$.

Esto es claro de la definición de $\mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, s)$.

Utilizando las Propiedades 1 y 2 y el hecho de que $s < t_0$, es claro que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t_0])$. Así terminamos con la construcción del primer continuo.

Definiremos unos continuos y un número que nos servirán para el siguiente caso. Sean $z_0, z_1 \in [-1,2]$ tales que $z_0 < z_1$ y $d(z_0,z_1) < 1$ y $L(z_0,z_1) = \{0\} \times [z_0,z_1]$. Denotamos por $\{L_n(z_0,z_1)\}_{n=1}^{\infty}$ a la sucesión de componentes de $\pi_2^{-1}([z_0,z_1])$ numeradas con el orden natural, de derecha a izquierda. Entonces $C(\pi_2)(L_n(z_0,z_1)) = [z_0,z_1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\lim L_n(z_0,z_1) = L(z_0,z_1)$. Por la continuidad de la función μ, $\lim \mu(L_n(z_0,z_1)) = \mu(L(z_0,z_1))$. Tomemos $\delta \in (0, \mu(L(z_0,z_1)))$. Por la convergencia de la sucesión, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(L_n(z_0,z_1)) \in (\mu(L(z_0,z_1)) - \delta, \mu(L(z_0,z_1)) + \delta)$ para toda $n \geq N$. Ya que $\mu(L_n(z_0,z_1)) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $q(z_0,z_1) \in (0,1)$ tal que

$$q(z_0,z_1) < \min\{\mu(L(z_0,z_1)) - \delta, \mu(L_1(z_0,z_1)), \ldots, \mu(L_{N-1}(z_0,z_1))\}.$$

Así que, $q(z_0, z_1) < \mu(L_n(z_0, z_1))$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $q(z_0, z_1) < \mu(L(z_0, z_1))$.

Caso 2. $A \in F_1(J)$.

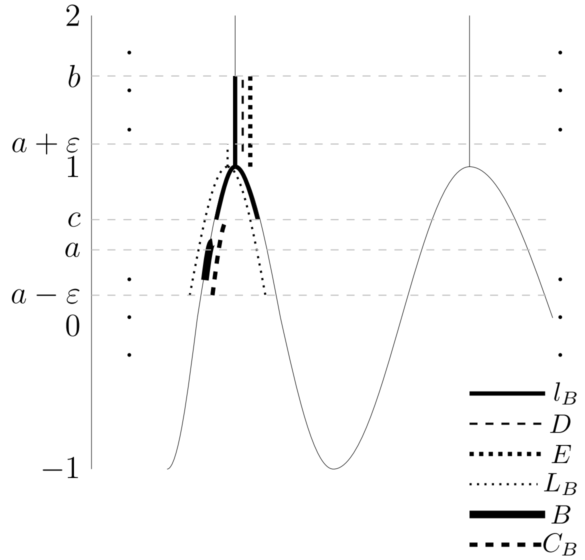

Figura 8: Caso 2

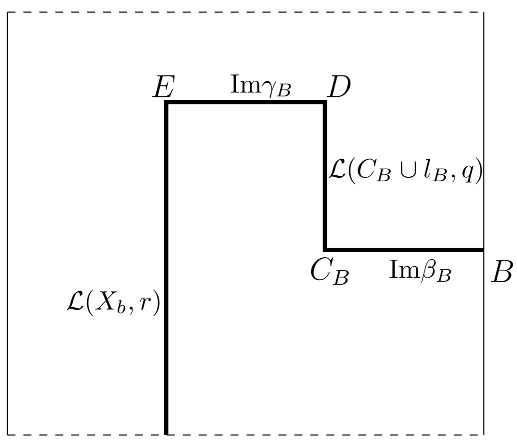

Figura 9: Caso 2

Construyamos al continuo $\mathcal{B}$ que tiene a A en su interior respecto a $\mu^{-1}([0,t])$. Para esto, se recomienda ver las Figuras 8 y 9. En este caso, existe un elemento $a \in [-1,1]$ tal que $A = \{(0,a)\}$. Sean $b \in (1,2]$ y $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tales que $a + \varepsilon < b$. Tomemos $r \in (0, t_0)$. Como $J \subsetneq X_b$, observamos que $r < t_0 < t < \mu(J) < \mu(X_b)$. Consideremos a la sucesión $\{L_n(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge al elemento $L(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y al número $q = q(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$; además, podemos pedir que $q < r$. Definimos el abierto:

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}([0,q)) \cap C(W) \cap \langle \pi_2^{-1}(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \rangle.$$

Observemos que $A \in \mathcal{U}$ y que $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$. Consideremos $B \in \mathcal{U}$. En el caso en que $B \subset J \cup I$ definimos $L_B = L(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. En el caso en que $B \not\subset J \cup I$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset L_n(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, definimos $L_B = L_n(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Notemos que, en cualquiera de los casos, se satisface $B \subset L_B$ y $L_B \subset X_{a+\varepsilon}$. Como $\mu(B) < q < \mu(L_B)$, $B \subsetneq L_B$. Entonces (por el Lema 2.2.4) existe un elemento $C_B \in \mu^{-1}(q)$ tal que $B \subsetneq C_B \subsetneq L_B$. Así que, podemos aplicar el Corolario 2.2.8 para obtener un arco ordenado $\beta_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0,q])$ de B a C_B. Notemos, por las propiedades que tiene un arco ordenado, que para toda $w \in [0,1]$, $B = \beta_B(0) \subset \beta_B(w) \subset \beta_B(1) = C_B$. Como $C_B \subset L_B \subset X_{a+\varepsilon}$, $B \subset \beta_B(w) \subset X_{a+\varepsilon}$. Por lo tanto, $B \subset \beta_B(w) \subset X_{a+\varepsilon}$. Lo cual nos lleva a que $a - \varepsilon < \varphi(B) \leq \varphi(\beta_B(w)) \leq \varphi(X_{a+\varepsilon}) = a + \varepsilon$. Por lo tanto, $\varphi(\beta_B(w)) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ para toda $w \in [0,1]$.

Sea $c = \varphi(C_B)$. Notemos que $-1 < c < b$, ya que $B \subsetneq C_B \subset L_B$ y $c = \varphi(C_B) \leq \varphi(L_B) = a + \varepsilon < b$. Sea l_B la componente de $\pi_2^{-1}([c,b])$ tal que $l_B \cap C_B \neq \emptyset$. De modo que, $C_B \cup l_B \in C(X)$ y $q = \mu(C_B) < \mu(C_B \cup l_B)$. Consideremos al continuo $\mathcal{L}(C_B \cup l_B, q)$.

Tomemos $x \in [0,1]$ tal que $(x,b) \in l_B$. Como $0 < q < \mu(C_B \cup l_B)$, existe (por el Lema 2.2.4) un elemento $D \in \mu^{-1}(q)$ tal que $(x,b) \in D \subset C_B \cup l_B$. Como $\mu(D) = q < r < \mu(X_b)$, $D \subsetneq X_b$. Así que, utilizando nuevamente el Lema 2.2.4, existe un elemento $E \in \mu^{-1}(r)$ tal que $D \subsetneq E \subsetneq X_b$. Por lo tanto (por el Corolario 2.2.8), existe un arco ordenado $\gamma_B : [0,1] \to \mu^{-1}([q,r])$ de D a E. Consideremos $w \in [0,1]$. Por las propiedades de un arco ordenado, $D = \gamma_B(0) \subset \gamma_B(w) \subset \gamma_B(1) = E$. Así que, $(x,b) \in \gamma_B(w) \subset X_b$, lo cual nos lleva a que $b \leq \varphi(\gamma_B(w)) \leq \varphi(X_b) = b$. De modo que $\varphi(\gamma_B(w)) = b$.

Observemos que $C_B \in \operatorname{Im} \beta_B \cap \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q)$, $D \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q) \cap \operatorname{Im} \gamma_B$ y $E \in \operatorname{Im} \gamma_B \cap \mathcal{L}(X_b, r)$. De modo que,

$$\operatorname{Im}\beta_B \cup \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q) \cup \operatorname{Im}\gamma_B \cup \mathcal{L}(X_b, r)$$

es un continuo que contiene a B. Por tanto, el conjunto definido por:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(a, b, \varepsilon, q, r) = \mathcal{L}(X_b, r) \cup \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B \cup \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q) \cup \operatorname{Im}\gamma_B\right)$$

es un continuo y contiene a A en su interior relativo a $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$.

Propiedad 3. Si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B\right)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [0, q]$.

Sean $B \in \mathcal{U}$ y $w \in [0,1]$. Como ya vimos, $\varphi(\beta_B(w)) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Así que,

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$$

y, como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$ es cerrado,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B)\right) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Por otra parte, como $\operatorname{Im}\beta_B \subset \mu^{-1}([0,q])$, para todo $B \in \mathcal{U}$, y $\mu^{-1}([0,q])$ es cerrado,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B\right) \subset \mu^{-1}([0,q]).$$

Por lo tanto, si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B\right)$, se satisface que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [0, q]$.

Propiedad 4. Si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q)\right)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, b]$ y $\mu(K) = q$.

Tomemos $B \in \mathcal{U}$ y $F \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q)$. Como $F \subset C_B \cup l_B \subset L_B \cup l_B$ y $\pi_2(L_B \cup l_B) = [a-\varepsilon, b]$, $\varphi(F) \in [a-\varepsilon, b]$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, b])$$

y, como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, b])$ es cerrado,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, q)\right) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, b]).$$

Por otro lado, como $\mathcal{L}(C_B \cup l_B, q) \subset \mu^{-1}(q)$, para cada $B \in \mathcal{U}$, y $\mu^{-1}(q)$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\mathcal{L}(C_B\cup l_B,q)\right)\subset\mu^{-1}(q).$$

De modo que, si $K\in\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\mathcal{L}(C_B\cup l_B,q)\right)$, se satisface que $\varphi(K)\in[a-\varepsilon,b]$ y $\mu(K)=q$. Así, concluimos la Propiedad 4.

Propiedad 5. Si $K\in\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\operatorname{Im}\gamma_B\right)$, entonces $\varphi(K)=b$ y $\mu(K)\in[q,r]$.

Consideremos $B\in\mathcal{U}$ y $w\in[0,1]$. Como ya vimos, $\varphi(\gamma_B(w))=b$. Entonces

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\operatorname{Im}\gamma_B\subset\varphi^{-1}(b).$$

Como $\varphi^{-1}(b)$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\operatorname{Im}\gamma_B\right)\subset\varphi^{-1}(b).$$

Los hechos de que $\operatorname{Im}\gamma_B\subset\mu^{-1}([q,r])$, para cada $B\in\mathcal{U}$, y $\mu^{-1}([q,r])$ es cerrado, nos dicen que

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\operatorname{Im}\gamma_B)\subset\mu^{-1}([q,r]).$$

De modo que, si $\mathrm{cl}_{C(X)}\,K\in(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}\operatorname{Im}\gamma_B)$, se satisface que $\varphi(K)=b$ y $\mu(K)\in[q,r]$.

Propiedad 6. Si $K\in\mathcal{L}(X_b,r)$, entonces $\varphi(K)\leq b$ y $\mu(K)=r$.

Esto es claro de la definición de $\mathcal{L}(X_b,r)$.

Utilizando las Propiedades 3, 4, 5 y 6 y el hecho de que $q<r<t_0$, es claro que $\mathcal{B}\subset\mu^{-1}([0,t_0])$. Así, hemos obtenido un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t_0])$ que contiene a A en su interior con respecto a $\mu^{-1}([0,t])\cap C(W)$, con lo cual terminamos este caso.

Ya estamos listos para probar nuestro lema. Tenemos que existen elementos $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\in[-1,2]$ tales que

$$A_1=\{(0,a_1)\},\ldots,A_m=\{(0,a_m)\},$$

$$B_1=\{(0,b_1)\},\ldots,B_n=\{(0,b_n)\}.$$

Podemos suponer

$$b_1 < \cdots < b_n < a_1 < \cdots < a_m.$$

Sean $c_1, \ldots, c_n \in (1, 2]$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$b_n < c_1 < \cdots < c_n < a_1 \text{ y}$$

$$b_1 + \varepsilon < b_2 - \varepsilon < \cdots < b_{n-1} + \varepsilon < b_n - \varepsilon < b_n + \varepsilon < c_1 < \cdots$$

$$< c_n < a_1 - \varepsilon < a_1 + \varepsilon < a_2 - \varepsilon < \cdots < a_{m-1} + \varepsilon < a_m - \varepsilon.$$

Tomemos $q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_m \in (0, t_0)$ tales que

$$q_n < \cdots < q_1 < r_1 < \cdots < r_n < s_1 < \cdots < s_m$$

y cada q_i es menor que $\mu(L)$ para toda componente L de $\pi_2^{-1}([a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon])$.

Así que, por lo probado en los párrafos anteriores, existen subcontinuos

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(a_1, \varepsilon, s_1), \ldots, \mathcal{A}_m = \mathcal{A}(a_m, \varepsilon, s_m) \text{ y}$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(b_1, c_1, \varepsilon, q_1, r_1), \ldots, \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(b_n, c_n, \varepsilon, q_n, r_n)$$

de $\mu^{-1}([0, t_0])$ que tienen respectivamente a los elementos $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ en su interior relativo a $\mu^{-1}([0, t]) \cap C(W)$.

Verifiquemos que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, para $i < j$. Consideremos $K \in \mathcal{A}_j$, entonces tenemos los dos casos siguientes.

Caso (a). $\mu(K) = s_j$.

Por la construcción del continuo $\mathcal{A}_i$ sabemos que $\mathcal{A}_i \subset \mu^{-1}([0, s_i])$. Como $i < j$, $s_i < s_j$. Lo cual nos dice que $K \notin \mathcal{A}_i$.

Caso (b). $\varphi(K) \in [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ y $\mu(K) \in [0, s_j]$.

Si $N \in \mathcal{A}_i$, éste satisface que $\varphi(N) \in [0, a_i + \varepsilon]$. Por la elección del número ε y como $i < j$, se tiene que $a_i + \varepsilon < a_j - \varepsilon$. Lo cual nos dice que $K \notin \mathcal{A}_i$. Así, terminamos la prueba de que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, para $i < j$. Tomemos $K \in \mathcal{B}_j$. Analicemos varios casos, de acuerdo a la propiedad (3, 4, 5 o 6) que éste satisfaga.

Caso (c). $\mu(K) \leq q_j$.

Si $K \in \mathcal{B}_i$, como $\mu(K) \leq q_j < q_i < r_i$, K sólo puede estar en el caso de la Propiedad 3 (para i), así que, $\varphi(K) \in [b_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon]$, lo cual es un absurdo pues $\varphi(K) \in [b_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon]$ y $b_i + \varepsilon < b_j - \varepsilon$. Por tanto $K \notin \mathcal{B}_i$.

Caso (d). $\varphi(K) = c_j$ y $\mu(K) \in [q_j, r_j]$.

Si $N \in \mathcal{B}_i$, entonces éste satisface que $\varphi(N) \in [0, c_i]$. Como $i < j$, se tiene que $c_i < c_j$. Esto nos dice que $K \notin \mathcal{B}_i$.

Caso (e). $\varphi(K) \leq c_j + \varepsilon$ y $\mu(K) = r_j$.

En este caso $K \notin \mathcal{B}_i$, ya que $\mathcal{B}_i \subset \mu^{-1}([0, r_i])$ y $r_i < r_j$.

De esta manera hemos probado que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$. Verifiquemos que $\mathcal{A}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomando en cuenta los dos casos siguientes para un elemento $K \in \mathcal{A}_j$.

Caso (f). $\varphi(K) \in [0, a_j + \varepsilon]$ y $\mu(K) = s_j$.

Por la construcción del continuo $\mathcal{B}_i$, éste satisface que $\mathcal{B}_i \subset \mu^{-1}([0, r_i])$. Como $r_i < s_j$, $K \notin \mathcal{B}_i$.

Caso (g). $\varphi(K) \in [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ y $\mu(K) \in [0, s_j]$.

Si $N \in \mathcal{B}_i$, entonces $\varphi(N) \in [0, c_i]$. Como $c_i < a_j - \varepsilon$, $K \notin \mathcal{B}_i$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$. Así terminamos la prueba de que los continuos construidos son ajenos dos a dos y finalizamos con la demostración de nuestro lema. ■

Lema 3.2.40. *(M. E. Aguilera) Sean X y W como en el Ejemplo 3.2.37 y en las Definiciones y observaciones 3.2.38, $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $t, t_0 \in (0, 1)$ tales que $t_0 < t < \mu(J)$. Si $m, n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m$ son elementos distintos de $(\mu^{-1}(t) \cap C(J \cup I)) \setminus C(J)$ y $B_1, \ldots, B_n$*

son elementos distintos de $\mu^{-1}(t) \cap C(J)$. *Entonces existen subcontinuos* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ *de* $\mu^{-1}([t_0, t])$ *que son ajenos dos a dos y que contienen, respectivamente, a* $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ *en su interior relativo a* $\mu^{-1}([0, t]) \cap C(W)$.

Demostración. Tomemos $A \in \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}$. Consideramos dos casos para la construcción de los continuos deseados.

Caso 1. $A \not\subset J$.

Sea $a = \varphi(A)$. Entonces $a \in (1, 2]$. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $1 < a - \varepsilon$. Fijemos $q \in (t_0, t)$. Definimos el abierto (de $\mu^{-1}([0, t]) \cap C(W)$):

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}((q, t]) \cap C(W) \cap \varphi^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon)).$$

Observemos que $A \in \mathcal{U}$. Sean $B \in \mathcal{U}$ y $b = \varphi(B)$. Notemos que $B \subset X_{a+\varepsilon}$. Como $\{b\} \subsetneq B$ y $0 < q < \mu(B)$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $C \in \mu^{-1}(q)$ tal que $\{b\} \subsetneq C \subsetneq B$. Así que, aplicando el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\beta_B : [0, 1] \to \mu^{-1}([q, t])$ de C a B. Como β_B es un arco ordenado se cumplen, para cada $w \in [0, 1]$, las siguientes contenciones: $\{b\} \subset C = \beta_B(0) \subset \beta_B(w) \subset \beta_B(1) = B$. Por tanto, $C \subset X_{a+\varepsilon}$. Más aún, como $\mu(C) = q$, $C \in \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q)$. Por lo tanto, $C \in \operatorname{Im} \beta_B \cap \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q)$ y, como consecuencia, $\operatorname{Im} \beta_B \cup \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q)$ es un continuo que contiene al elemento B. Por otra parte, observemos que $b \leq \varphi(\beta_B(w)) \leq \varphi(B)$ para cada $w \in [0, 1]$. De modo que $\varphi(\beta_B(w)) = b = \varphi(B)$ para cada $w \in [0, 1]$.

De modo que el conjunto:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(a, \varepsilon, q) = \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q) \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B)$$

es un continuo que tiene a A en su interior respecto a $\mu^{-1}([0, t]) \cap C(W)$. Ver Figura 10.

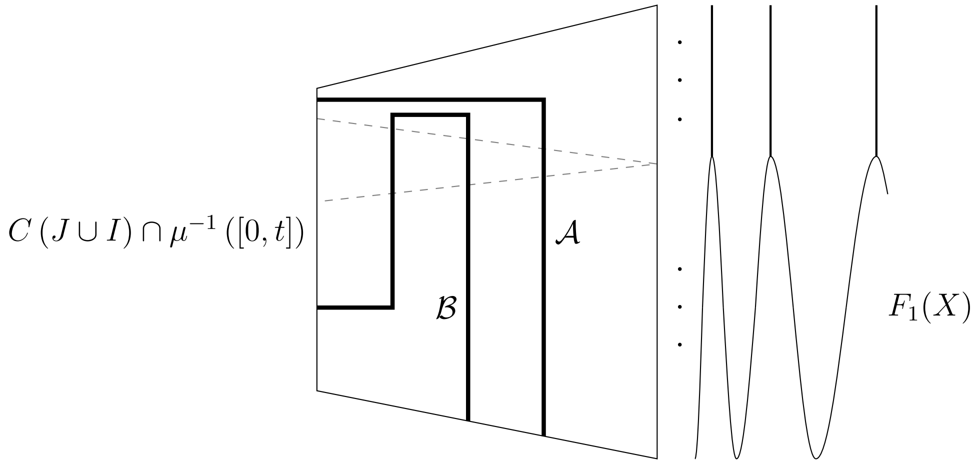

Figura 10: $\mathcal{A} \cap C(J \cup I)$ y $\mathcal{B} \cap C(J \cup I)$

Propiedad 1. Si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [q,t]$.

Tomemos $B \in \mathcal{U}$ y $w \in [0,1]$. Como ya vimos, $\varphi(\beta_B(w)) = \varphi(B)$. De modo que, $\varphi(\beta_B(w)) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, así que,

$$\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B \right) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Por otro lado, $\operatorname{Im} \beta_B \subset \mu^{-1}([q,t])$, para cada $B \in \mathcal{U}$. De manera que,

$$\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B \subset \mu^{-1}([q,t]).$$

Por lo tanto, como $\mu^{-1}([q,t])$ es cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)} \left(\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B \right) \subset \mu^{-1}([q,t]).$$

Resulta que, si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \beta_B)$, se satisface que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [q,t]$.

Propiedad 2. Si $K \in \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q)$, entonces $\varphi(K) \leq a+\varepsilon$ y $\mu(K) = q$.

Esto es claro de la definición de $K \in \mathcal{L}(X_{a+\varepsilon}, q)$.

Utilizando las Propiedades 1 y 2 y el hecho de que $t_0 < q$, tenemos que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([q,t]) \subset \mu^{-1}([t_0,t])$. De esta manera, terminamos con el primer caso.

Caso 2. $A \subset J$.

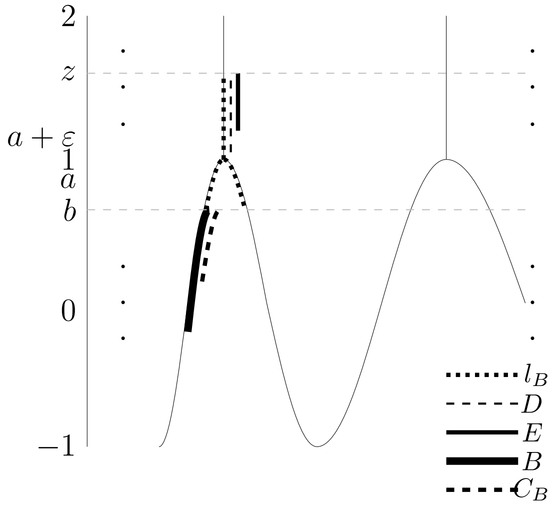

Figura 11: Caso 2

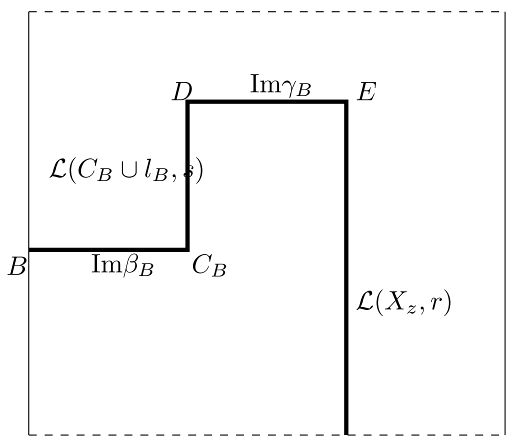

Figura 12: Caso 2

Construyamos el continuo $\mathcal{B}$ que tiene a A en su interior relativo a $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$. Se recomienda ver las Figuras 11 y 12. Sean $a = \varphi(A)$, $\varepsilon > 0$ y $z \in (1,2]$ tales que $a + \varepsilon < z$. Consideremos $r, s \in (t_0, t)$ tales que $r < s$. Definimos el abierto (de $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$):

$$\mathcal{U} = \mu^{-1}((s,t]) \cap C(W) \cap \varphi^{-1}((a-\varepsilon, a+\varepsilon)).$$

Notemos que $A \in \mathcal{U}$. Consideremos un elemento $B \in \mathcal{U}$. Sean $b \in [-1,2]$ tal que $b = \varphi(B)$ y $y \in [0,1]$ tal que $(y,b) \in B$. Como $0 < s < \mu(B)$ y $\{(y,b)\} \subsetneq B$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $C_B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $(y,b) \in C_B \subsetneq B$. Así que, podemos aplicar el Corolario 2.2.8 para obtener un arco ordenado $\beta_B : [0,1] \to \mu^{-1}([s,t])$ de C_B a B. Tomemos $w \in [0,1]$. Por las propiedades de β_B, que es un arco ordenado, $C_B = \beta_B(0) \subset \beta_B(w) \subset \beta_B(1) = B$ y, como $(y,b) \in C_B$, se satisface $(y,b) \in \beta_B(w) \subset B$. Así que, $b \leq \varphi(\beta_B(w)) \leq \varphi(B)$, lo cual nos dice que $\varphi(\beta_B(w)) = \varphi(B)$.

Observemos que $\varphi(C_B) = \varphi(B) > -1$, ya que $B \notin F_1(X)$. Sea l_B la componente de $\pi_2^{-1}([b,z])$ tal que $l_B \cap C_B \neq \emptyset$. Entonces $C_B \cup l_B \in C(X)$. Si tuviéramos que $z \in \pi_2(C_B)$, obtendríamos que $a + \varepsilon < z \leq \varphi(C_B)$. Lo cual no puede ser ya que, como $C_B \subset B$, $\varphi(C_B) = \varphi(B) \leq a + \varepsilon$. Por tanto, $z \in \pi_2(l_B \setminus C_B)$. Lo cual nos lleva a que $C_B \subsetneq C_B \cup l_B$. Así que $s = \mu(C_B) < \mu(C_B \cup l_B)$. De modo que, de acuerdo a nuestra definición, el conjunto $\mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)$ es un continuo no degenerado. Notemos que $C_B \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)$.

Consideremos $x \in [0,1]$ tal que $(x,z) \in l_B$. Como $0 < s < \mu(C_B \cup l_B)$ y $\{(x,z)\} \subsetneq C_B \cup l_B$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $D \in \mu^{-1}(s)$ tal que $(x,z) \in D \subset C_B \cup l_B$. Notemos que $D \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)$. Como $\{(x,z)\} \subsetneq D$ y $\mu(\{(x,z)\}) = 0 < r < s = \mu(D)$, podemos utilizar el Lema 2.2.4 para garantizar la existencia de un elemento $E \in \mu^{-1}(r)$ tal que $(x,z) \in E \subsetneq D$. Así que, aplicando el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\gamma_B : [0,1] \to \mu^{-1}([r,s])$ de E a D. Sea $w \in [0,1]$. Probemos que $\pi_2(\gamma_B(w)) = z$. Como γ_B es arco ordenado, se satisface que $E = \gamma_B(0) \subset \gamma_B(w) \subset \gamma_B(1) = D$. Como $(x,z) \in E$, y $D \subset C_B \cup l_B$, $z \leq \pi_2(\gamma_B(w)) \leq \pi_2(C_B \cup l_B) = z$. Esto nos dice que $\pi_2(\gamma_B(w)) = z$, lo que queríamos probar.

Notemos las siguientes contenciones $E \subsetneq D \subset C_B \cup l_B \subset X_z$. Entonces $r = \mu(E) < \mu(X_z)$ y, de acuerdo a nuestra definición, tenemos que $\mathcal{L}(X_z, r)$

es un continuo no degenerado y, además, contiene al elemento E.

Como $C_B \in \operatorname{Im}\beta_B \cap \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)$, $D \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s) \cap \operatorname{Im}\gamma_B$ y $E \in \operatorname{Im}\gamma_B \cap \mathcal{L}(X_z, r)$,

$$\operatorname{Im}\beta_B \cup \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s) \cup \operatorname{Im}\gamma_B \cup \mathcal{L}(X_z, r)$$

es un continuo que contiene a B. Por tanto, el conjunto dado por:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(a, z, \varepsilon, r, s) = \mathcal{L}(X_z, r) \cup \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}}(\operatorname{Im}\beta_B \cup \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s) \cup \operatorname{Im}\gamma_B)\right)$$

es un continuo que tiene a A en su interior respecto a $\mu^{-1}([0,t]) \cap C(W)$.

Propiedad 3. Si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [s,t]$.

Sean $B \in \mathcal{U}$ y $w \in [0,1]$. Por lo visto, $\varphi(\beta_B(w)) = \varphi(B)$, así que, $\varphi(\beta_B(w)) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Lo cual nos conduce a que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon])$ es un conjunto cerrado,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B\right) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, a+\varepsilon]).$$

Por otra parte, como $\operatorname{Im}\beta_B \subset \mu^{-1}([s,t])$, para todo $B \in \mathcal{U}$,

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B \subset \mu^{-1}([s,t])$$

y, como $\mu^{-1}([s,t])$ es un conjunto cerrado,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B\right) \subset \mu^{-1}([s,t]).$$

De modo que, si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\beta_B)$, se satisface que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ y $\mu(K) \in [s,t]$.

Propiedad 4. Si $K \in \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)\right)$, entonces $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, z]$ y $\mu(K) = s$.

Verifiquemos que, dado $K \in \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)$, entonces se cumple que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, z]$. Si $K \subset C_B$, tenemos que $K = C_B$ (ya que $\mu(C_B) = \mu(K)$). Entonces, en este caso, se cumple nuestra afirmación ya que $\varphi(K) = \varphi(C_B) \leq$

$\varphi(B) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset [a-\varepsilon, z]$. Verifiquemos nuestra afirmación en el caso en que $K \not\subset C_B$. En este caso, $K \cap l_B \neq \emptyset$, lo cual nos lleva (por la definición de l_B) a que $\varphi(K) \in [c, z] \subset [a-\varepsilon, z]$. De esta manera, hemos probado nuestra afirmación.

Por la afirmación del párrafo anterior, se satisface que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, z])$$

y, como $\varphi^{-1}([a-\varepsilon, z])$ es un conjunto cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)\right) \subset \varphi^{-1}([a-\varepsilon, z]).$$

Por otra parte, como se satisface que $\mathcal{L}(C_B \cup l_B, s) \subset \mu^{-1}(s)$, para cada $B \in \mathcal{U}$, y $\mu^{-1}(s)$ es un conjunto cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)) \subset \mu^{-1}(s).$$

Por lo tanto, si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathcal{L}(C_B \cup l_B, s)\right)$, se cumple que $\varphi(K) \in [a-\varepsilon, z]$ y $\mu(K) = s$.

Propiedad 5. Si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\gamma_B)$, entonces $\varphi(K) = z$ y $\mu(K) \in [r, s]$.

Tomemos $B \in \mathcal{U}$ y $w \in [0, 1]$. Por lo visto anteriormente, $\varphi(\gamma_B(w)) = z$. De manera que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B \subset \varphi^{-1}(z).$$

Como $\varphi^{-1}(z)$ es un conjunto cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\beta_B\right) \subset \varphi^{-1}(z).$$

Por otra parte, como $\mathrm{Im}\,\gamma_B \subset \mu^{-1}([r, s])$, para cada $B \in \mathcal{U}$, y $\mu^{-1}([r, s])$ es un conjunto cerrado,

$$\mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\gamma_B\right) \subset \mu^{-1}([r, s]).$$

De manera que, si $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\bigcup_{B\in\mathcal{U}} \mathrm{Im}\,\gamma_B)$, se cumple que $\varphi(K) = z$ y $\mu(K) \in [r, s]$.

Propiedad 6. Si $K \in \mathcal{B} \cap \mathcal{L}(X_z, r)$, entonces $\varphi(K) \leq z$ y $\mu(K) = r$.

Esta propiedad es clara de la definición de $\mathcal{L}(X_z, r)$.

Utilizando las Propiedades 3, 4, 5 y 6 y el hecho de que $t_0 < r$, obtenemos que $\mathcal{B} \subset \mu^{-1}([r, t]) \subset \mu^{-1}([t_0, t])$.

Ya estamos listos para probar nuestro lema. Sean

$$a_1 = \varphi(A_1), \ldots, a_m = \varphi(A_m) \text{ y}$$

$$b_1 = \varphi(B_1), \ldots, b_n = \varphi(B_n).$$

Supongamos que

$$b_1 < \cdots < b_n < a_1 < \cdots < a_m.$$

Consideremos $c_1, \cdots, c_n \in (1, 2]$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$b_n < c_1 < \cdots < c_n < a_1 \text{ y}$$

$$b_1 + \varepsilon < b_2 - \varepsilon < \cdots < b_{n-1} + \varepsilon < b_n - \varepsilon < b_n + \varepsilon < c_1 < \cdots$$

$$< c_n < a_1 - \varepsilon < a_1 + \varepsilon < a_2 - \varepsilon < \cdots < a_{m-1} + \varepsilon < a_m - \varepsilon.$$

Tomemos $q_1, \ldots, q_m, r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in (t_0, t)$ tales que

$$q_m < \cdots < q_1 < r_n < \cdots < r_1 < s_1 < \cdots < s_n.$$

Por lo visto en los Casos 1 y 2, existen subcontinuos

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(a_1, \varepsilon, q_1), \ldots, \mathcal{A}_m = \mathcal{A}(a_m, \varepsilon, q_m) \text{ y}$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(b_1, c_1, \varepsilon, r_1, s_1), \ldots, \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(b_n, c_n, \varepsilon, r_n, s_n)$$

de $\mu^{-1}([t_0, t])$ y que tienen, respectivamente, a $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ en su interior relativo a $\mu^{-1}([0, t]) \cap C(W)$.

Veamos que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ para cada par de índices distintos $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Podemos suponer que $i < j$. Supongamos que existe $K \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$. Por las Propiedades 1 y 2 para $\mathcal{A}_i$, tenemos $\varphi(K) \leq a_i + \varepsilon < a_j - \varepsilon$ y $q_i \leq \mu(K)$, de manera que K debe cumplir la Propiedad 2 para $\mathcal{A}_j$, así que $\mu(K) = q_j <$

$q_i \leq \mu(K)$. Por lo tanto, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$.

Verifiquemos que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ para cada par de índices distintos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Podemos suponer que $i < j$. Supongamos que existe $K \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j$. Teniendo en cuenta las Propiedades 3, 4, 5 y 6 para $\mathcal{B}_i$, tenemos $\varphi(K) \leq c_i$ y $r_i \leq \mu(K)$. Como $c_i < c_j$ y $r_j < r_i$, K no satisface la Propiedad 5 ni la 6 para $\mathcal{B}_j$. Entonces, por las Propiedades 3 y 4 para $\mathcal{B}_j$, $b_j - \varepsilon \leq \varphi(K)$ y $s_j \leq \mu(K)$. Como $s_i < s_j$, $\varphi(K) \in (s_i, t]$. Así que, K no satisface ninguna de las Propiedades 4, 5 y 6 para $\mathcal{B}_i$. De modo que K satisface la Propiedad 3 para $\mathcal{B}_i$ y, por lo tanto, $\varphi(K) \leq b_i + \varepsilon$. Así, llegamos a que $b_j - \varepsilon \leq \varphi(K) \leq b_i + \varepsilon$, lo cual es un absurdo ya que $b_i + \varepsilon < b_j + \varepsilon$ (porque $i < j$). Por lo tanto $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$.

Probemos que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ para cada par de índices $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Supongamos, por el contrario, que existe $K \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j$. Por las Propiedades 3, 4, 5 y 6 para $\mathcal{B}_i$, que satisface K, $\varphi(K) \leq c_i$ y $r_i \leq \mu(K)$. Por las Propiedades 1 y 2 para $\mathcal{A}_j$, $a_j - \varepsilon < \varphi(K)$ o $\mu(K) = q_j$. Con esto obtenemos que $a_j - \varepsilon < c_i$ o $r_i \leq q_j$, lo cual es un absurdo porque $c_i < a_j - \varepsilon$ y $q_j < r_i$. De este modo, $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$.

Así, terminamos la prueba de que los continuos construidos son ajenos dos a dos y con esto finalizamos nuestro lema. ■

Teorema 3.2.41. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser m-mutuamente aposindético no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney para ninguna $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Demostración. Sea X como en el Ejemplo 3.2.37, como ya vimos X no es m-mutuamente aposindético para ninguna $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tomemos $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney, $t < \mu(J)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $A_1, \ldots, A_m$ elementos distintos de $\mu^{-1}([0, t] \setminus C(J)$. Veremos que existen subcontinuos $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ de $\mu^{-1}([0, t])$ ajenos dos a dos que contienen, respectivamente, a $A_1, \ldots, A_m$ en su interior relativo a $\mu^{-1}([0, t])$.

Consideremos $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $t < \mu(J)$, si $A_i \cap (J \cup I) \neq \emptyset$ y $A_i \cap (X \setminus (J \cup I)) \neq \emptyset$, se tiene que $J \subset A_i$. Esto nos lleva a que $t < \mu(J) \leq \mu(A_i)$, lo cual no puede ser ya que $A_i \in \mu^{-1}([0, t])$. Por tanto $A_i \subset J \cup I$ o $A_i \subset X \setminus (J \cup I)$.

Supongamos que tenemos números naturales $n \geq 3$ y

$$2 \leq m_0 < m_1 < \cdots < m_{n+1} < m$$

que satisfacen

$$m_1 - m_0,\ m_2 - m_1, \ldots,\ m_{n+1} - m_n,\ m - m_{n+1} \geq 2.$$

Supongamos que los elementos $A_1, \ldots, A_m$ cumplen lo siguiente:

•$A_1, \ldots, A_{m_0} \in C(X \setminus (J \cup I))$,
•$A_{m_0+1}, \ldots, A_{m_1} \in \big(\mu^{-1}(t_1) \cap C(J \cup I)\big) \setminus C(J)$,
•$A_{m_1+1}, \ldots, A_{m_2} \in \mu^{-1}(t_1) \cap C(J)$,
•$A_{m_2+1}, \ldots, A_{m_3} \in \mu^{-1}(t_2) \cap C(J \cup I)$,
$\vdots$
•$A_{m_{n-1}+1}, \ldots, A_{m_n} \in \mu^{-1}(t_{n-1}) \cap C(J \cup I)$,
•$A_{m_n+1}, \ldots, A_{m_{n+1}} \in \big(\mu^{-1}(t_n) \cap C(J \cup I)\big) \setminus C(J)$,
•$A_{m_{n+1}+1}, \ldots, A_m \in \mu^{-1}(t_n) \cap C(J)$,

en donde

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t.$$

En caso de que no sea así, podemos añadir los elementos necesarios de $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{A_1, \ldots, A_m\}$ para tener las condiciones deseadas.

Consideremos los elementos $A_1, \ldots, A_{m_0} \in C(X \setminus (J \cup I))$. Recordemos que, en el Ejemplo 3.2.37, se definieron los números $x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_N < \text{mín}\{\text{mín}(C(\pi_1)(A_1)), \ldots, \text{mín}(C(\pi_1)(A_{m_0}))\}.$$

Sean

$$Z = \{(x,y) \in X : x_N \leq x\} \text{ y}$$

$$Z_0 = \{(x,y) \in X : x_N < x\}.$$

Notemos que Z es un continuo localmente conexo. En el caso en que $\mu(Z) \leq t$, tenemos que

$$C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t]) = C(Z),$$

el cual es un continuo localmente conexo ya que Z es localmente conexo (por los conocidos resultados 4.3, 6.11 de [12] y el Teorema 3.2.36). Notemos que, por el Lema 2.0.10, $\frac{\mu|_{C(Z)}}{\mu(Z)} : C(Z) \to [0,1]$ es una función de Whitney. En el caso en que $t < \mu(Z)$, por el Lema 3.0.24 y el Teorema 3.2.10,

$$\left(\tfrac{\mu|_{C(Z)}}{\mu(Z)}\right)^{-1}\left([0, \tfrac{t}{\mu(Z)}]\right) = (\mu|_{C(Z)})^{-1}([0,t])$$

también es un continuo localmente conexo. Notemos que

$$(\mu|_{C(Z)})^{-1}([0,t]) = C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

En resumen, en ambos casos tenemos que $C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t])$ es un continuo localmente conexo. Notemos que $A_1, \ldots, A_{m_0} \in C(Z_0) \subset C(Z)$. Como Z_0 es un abierto de X, por la Proposición 1.1.1, $C(Z_0)$ es un abierto de $C(X)$. Elegimos abiertos ajenos $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{m_0}$ de $C(X)$ tales que

$$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{m_0} \subset C(Z_0),$$

$$A_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, A_{m_0} \in \mathcal{U}_{m_0} \text{ y}$$

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{U}_i) \cap \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{U}_j) = \emptyset \text{ para cualesquiera } i \neq j.$$

Tomemos $i \in \{1, \ldots, m_0\}$. Observemos que

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cap C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t])$$

es un abierto de $C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t])$. Entonces existen conexos $\mathcal{A}_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_0\}$, tales que

$$A_i \in \mathrm{int}_{C(Z)\cap\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{A}_i \subset \mathcal{V}_i.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m_0\}$. Como $A_i \in \mathrm{int}_{C(Z)\cap\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_i)$, existe un abierto $\mathcal{W}_i$ de $C(X)$ tal que

$$A_i \in \mathcal{W}_i \cap C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{A}_i.$$

Como $A_i \in \mathcal{U}_i \subset C(Z_0)$,

$$A_i \in \big(\mathcal{W}_i \cap C(Z_0)\big) \cap \mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{W}_i \cap C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{A}_i.$$

Observamos que $\mathcal{W}_i \cap C(Z_0)$ es un abierto de $C(X)$, así que,

$$\big(\mathcal{W}_i \cap C(Z_0)\big) \cap \mu^{-1}([0,t])$$

es un abierto de $\mu^{-1}([0,t])$. Por tanto, existen los subcontinuos

$$\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}_1), \ldots, \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A}_{m_0})$$

de $C(Z) \cap \mu^{-1}([0,t])$, que son ajenos dos a dos y que tienen, respectivamente, a $A_1, \ldots, A_{m_0}$ en su interior relativo a $\mu^{-1}([0,t])$.

Sean $W = X \setminus \{(1, \operatorname{sen} 1)\}$ (como se definió en las Definiciones y observaciones 3.2.38),

$$Y = \{(x,y) \in X : x \leq x_{N+1}\} \text{ y}$$

$$Y_0 = \{(x,y) \in X : x < x_{N+1}\}.$$

Observemos que Y es homeomorfo a X, Y_0 es homeomorfo a W, $Y \cap Z = \emptyset$, $\frac{\mu|_{C(Y)}}{\mu(Y)} : C(Y) \to [0,1]$ es una función de Whitney (por el Lema 2.0.10) y que $\frac{t}{\mu(Y)} < \frac{\mu(J)}{\mu(Y)}$. Tomemos $s_1 = 0$ y $s_{2n} = t$. Fijemos números $s_2, s_3, \ldots, s_{2n-1} \in (0,t)$ tales que

$$0 < s_2 < s_3 < t_2 < s_4 < s_5 < \cdots < s_{2n-3} < t_{n-1} < s_{2n-2} < s_{2n-1} < t.$$

Como Y_0 es un abierto de X, por la Proposición 1.1.1, $C(Y_0)$ es un abierto de $C(X)$. Consideremos $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por los Lemas 2.3.3 y 3.0.24, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$,

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(Y)}}{\mu(Y)}\big)^{-1}\big([\tfrac{s_{2i-1}}{\mu(Y)}, \tfrac{s_{2i}}{\mu(Y)}]\big) = (\mu|_{C(Y)})^{-1}([s_{2i-1}, s_{2i}]) = C(Y) \cap \mu^{-1}([s_{2i-1}, s_{2i}]),$$

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(Y)}}{\mu(Y)}\big)^{-1}\big(\tfrac{s_i}{\mu(Y)}\big) = C(Y) \cap \mu^{-1}(s_i) \text{ y}$$

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(Y)}}{\mu(Y)}\big)^{-1}\big([0, \tfrac{t}{\mu(Y)}]\big) = C(Y) \cap \mu^{-1}([0,t]).$$

Cabe destacar que $C(Y) \cap \mu^{-1}([s_{2i-1}, s_{2i}]) \subset C(Y) \cap \mu^{-1}([0,t])$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Observemos que los elementos $A_{m_0+1}, \ldots, A_{m_1}, A_{m_1+1}, \ldots, A_{m_2}$ pertenecen a $C(Y_0)$. Como

$$A_{m_0+1}, \ldots, A_{m_1} \in \big(\mu^{-1}(0) \cap C(J \cup I)\big) \setminus C(J) \text{ y}$$

$$A_{m_1+1}, \ldots, A_{m_2} \in \mu^{-1}(0) \cap C(J),$$

podemos aplicar el Lema 3.2.39 para obtener subcontinuos $\mathcal{A}_{m_0+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_1}$, $\mathcal{A}_{m_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_2}$, de $C(Y) \cap \mu^{-1}([0, s_2])$ que son ajenos dos a dos y que tienen, respectivamente, a $A_{m_0+1}, \ldots, A_{m_1}, A_{m_1+1}, \ldots, A_{m_2}$ en su interior relativo a $C(Y_0) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Como $C(Y_0)$ es un abierto de $C(X)$, $A_j \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_j)$ para cada $j \in \{m_0 + 1, \ldots, m_1, m_1 + 1, \ldots, m_2\}$.

Por otro lado, observemos que $A_{m_n+1}, \ldots, A_{m_{n+1}}, A_{m_{n+1}+1}, \ldots, A_m \in C(Y_0)$. Como

$$A_{m_n+1}, \ldots, A_{m_{n+1}} \in \big(\mu^{-1}(t) \cap C(J \cup I)\big) \setminus C(J) \text{ y}$$

$$A_{m_{n+1}+1}, \ldots, A_m \in \mu^{-1}(t) \cap C(J),$$

el Lema 3.2.40 nos dice que existen subcontinuos $\mathcal{A}_{m_n+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_{n+1}}, \mathcal{A}_{m_{n+1}+1}$, $\ldots, \mathcal{A}_m$ de $C(Y) \cap \mu^{-1}([s_{2n-1}, t])$ que son ajenos dos a dos y que tienen, respectivamente, a $A_{m_n+1}, \ldots, A_{m_{n+1}}, A_{m_{n+1}+1}, \ldots, A_m$ en su interior relativo $C(Y_0) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Como $C(Y_0)$ es un abierto de $C(X)$, $A_j \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_j)$ para cada $j \in \{m_n + 1, \ldots, m_{n+1}, m_{n+1} + 1, \ldots, m\}$.

Sea $i \in \{2, 3 \ldots, n - 1\}$. Como

$$A_{m_i+1}, \ldots, A_{m_{i+1}} \in \mu^{-1}(t_i) \cap C(J \cup I) \cap C(Y_0)$$

y $0 < s_{2i-1} < t_i < s_{2i} < t$, por el Lema 3.2.34, existen subcontinuos $\mathcal{A}_{m_i+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_{i+1}}$ de $C(Y) \cap \mu^{-1}([s_{2i-1}, s_{2i}])$ que son ajenos dos a dos y que tienen, respectivamente, a los elementos $A_{m_i+1}, \ldots, A_{m_{i+1}}$ en su interior relativo a $C(Y_0) \cap \mu^{-1}([0, t])$. Como $C(Y_0)$ es un abierto de $C(X)$, $A_j \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A}_j)$ para cada $j \in \{m_i + 1, \ldots, m_{i+1}\}$.

Por la elección de Y y Z, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{m_0}$ no intersectan a ninguno de los continuos $\mathcal{A}_{m_0+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_1}, \mathcal{A}_{m_1+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_2}, \mathcal{A}_{m_2+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_3}, \ldots, \mathcal{A}_{m_{n-1}+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_n}, \mathcal{A}_{m_n+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m_{n+1}}, \mathcal{A}_{m_{n+1}+1}, \ldots, \mathcal{A}_m$. Por la elección de los números $s_2, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, los continuos contenidos en $\mu^{-1}([s_{2i-1}, s_{2i}])$ no intersectan a los continuos contenidos en $\mu^{-1}([s_{2j-1}, s_{2j}])$ para cualesquiera índices distintos $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$.

Tomemos $k \geq 2$. Notemos que la sucesión $\{\mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}])\}_{n=1}^{\infty}$ de bloques de Whitney es tal que $\mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}])$ es k-mutuamente aposindético para toda

$n \in \mathbb{N}$. Como $\lim \frac{t}{2^n} = 0$, por el Lema 3.0.27, $\lim \mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}]) = F_1(X)$. Debido a que X no es k-mutuamente aposindético, concluimos que la propiedad de ser k-mutuamente aposindético no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney. ■

Corolario 3.2.42. *(M. E. Aguilera) La propiedad de ser semiaposindético no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sea X como en el Ejemplo 3.2.37. Notemos que éste no es semiaposindético, ya que todo continuo que contenga a uno de los puntos $(0, 1)$ o $(0, -1)$ en su interior contiene al otro punto. Por el Teorema 3.2.41, la sucesión $\{\mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}])\}_{n=1}^{\infty}$ de bloques de Whitney es tal que $\mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}])$ es mutuamente aposindético y, por lo tanto, semiaposindético, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim \frac{t}{2^n} = 0$, por el Lema 3.0.27, $\lim \mu^{-1}([0, \frac{t}{2^n}]) = F_1(X)$. Debido a que X no es semiaposindético, concluimos que la propiedad de ser semiaposindético no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney. ■

Para terminar con esta subsección nos planteamos las siguientes preguntas, acerca de estos conceptos de aposindesis, las cuales no hemos respondido todavía.

Problema 3.2.43. ¿La propiedad de ser m-mutuamente aposindético, para $m \geq 4$, será inducida a todos los bloques de Whitney?

Problema 3.2.44. ¿La propiedad de ser m-mutuamente aposindético, para $m \geq 4$, será inducida a los bloques pequeños de Whitney?

Problema 3.2.45. ¿La propiedad de ser m-mutuamente aposindético, para $m \geq 4$, será inducida débilmente a los bloques de Whitney?

3.2.6. Aposindesis II

En esta subsección definimos el concepto de *cerrado cero dimensional aposindético*. Primero probaremos algunos resultados que nos auxiliaran para demostrar que los bloques de Whitney de cualquier continuo X son cerrados cero dimensionales aposindéticos. Con este teorema obtendremos que la propiedad de ser cerrado cero dimensional aposindético es inducida a todos los bloques de Whitney y que no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.

Definición 3.2.46. Un continuo X es *unicoherente* si cada vez que se toman dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Dados $Y \subset Z$ espacios topológicos, recordemos (de la Definición 1.2.4) que $Y = E \mid F$ si E y F son conjuntos no vacíos, $E \cap \mathrm{cl}_Z(F) = \emptyset$, $\mathrm{cl}_Z(E) \cap F = \emptyset$ y $Y = E \cup F$.

Definición 3.2.47. Si A, L y M son subconjuntos de X, entonces diremos que A *separa a* L *y* M *en* X si existen dos subconjuntos E y F tales que $X \setminus A = E \mid F$, $L \subset E$ y $M \subset F$.

Teorema 3.2.48. *Supongamos que X es un continuo localmente conexo y unicoherente. Sean A y B subcontinuos ajenos de X y C un cerrado que separa a A y B en X. Entonces existe un subcontinuo K de X tal que $K \subset C$ y K separa a A y B en X.*

Demostración. Sea W la componente de $X \setminus C$ que contiene a A. Por el Teorema 4.2 del capítulo V de [6], como W es una componente de $X \setminus C$, que es abierto de X, y X es localmente conexo, obtenemos que W es un abierto de X.

Afirmación 1. $B \cap W = \emptyset$.

Como C separa a A y B en X, existen subconjuntos M y N de X tales que $X \setminus C = M \mid N$ y $A \subset M$ y $B \subset N$. Notemos que $M \cap W \neq \emptyset$ ya que $A \subset M \cap W$. Como W es un conexo, $W \subset M$. De modo que $B \cap W \subset N \cap M = \emptyset$, así que $B \cap W = \emptyset$.

Por la afirmación anterior, $B \subset X \setminus W$. Supongamos que

$$X \setminus W = \bigcup\{E : E \text{ es una componente de } X \setminus W\}.$$

Sea E_0 la componente de $X \setminus W$ que contiene a B. Observemos que

$$X \setminus W = E_0 \cup \big(\bigcup\{E : E \text{ es una componente de } X \setminus W \text{ y } E \neq E_0\}\big).$$

Afirmación 2. $\mathrm{cl}_X(X \setminus E_0)$ es un continuo.

Sea E una componente de $X \setminus W$. Como W es conexo, por el Lema 1.5.5, $W \cup E$ es conexo. De modo que,

$$X \setminus E_0 = W \cup \big(\bigcup\{E : E \text{ es componente de } X \setminus W \text{ y } E \neq E_0\}\big)$$

también es un conexo. Por tanto, $\mathrm{cl}_X(X \setminus E_0)$ es un continuo.

Afirmación 3. E_0 es un continuo.

Como W es un abierto de X, $X \setminus W$ es un cerrado de X. Teniendo en cuenta que E_0 es una componente de $X \setminus W$, $\mathrm{cl}_X(E_0) = E_0$. Por tanto, E_0 es un continuo.

Afirmación 4. $\mathrm{fr}_X(E_0) \subset \mathrm{fr}_X(W) \subset \mathrm{fr}_X(C)$.

Teniendo en cuenta que X es localmente conexo, como E_0 es una componente de $X \setminus W$ y W es una componente de $X \setminus C$, por el Lema 1.5.6, obtenemos que $\mathrm{fr}_X(E_0) \subset \mathrm{fr}_X(X \setminus W)$ y $\mathrm{fr}_X(W) \subset \mathrm{fr}_X(X \setminus C)$. Por lo tanto

$$\mathrm{fr}_X(E_0) \subset \mathrm{fr}_X(X \setminus W) = \mathrm{fr}_X(W) \subset \mathrm{fr}_X(X \setminus C) = \mathrm{fr}_X(C).$$

Afirmación 5. Definimos $K = \mathrm{fr}_X(E_0)$. Entonces K es un continuo y está contenido en C.

Como E_0 y $\mathrm{cl}_X(X \setminus E_0)$ son subcontinuos de X (por las Afirmaciones 2 y 3) tales que $X = E_0 \cup \mathrm{cl}_X(X \setminus E_0)$ y X es unicoherente, $E_0 \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus E_0) = \mathrm{fr}_X(E_0)$ es un continuo. Por la Afirmación 4, $K \subset \mathrm{fr}_X(C)$ y, como C es cerrado, obtenemos que $\mathrm{fr}_X(C) \subset C$. Por lo tanto, $K \subset C$.

Afirmación 6. K separa a A y B en X.

Ya que $B \subset E_0$, $\mathrm{fr}_X(E_0) = K \subset C$ y $B \cap C = \emptyset$, $B \subset \mathrm{int}_X(E_0)$. Como $A \subset W$, $A \cap E_0 = \emptyset$. Y como E_0 es cerrado, $A \subset \mathrm{ext}_X(E_0)$. Ya que $X \setminus K = \mathrm{int}_X(E_0) \mid \mathrm{ext}_X(E_0)$, concluimos que K separa a A y B en X. ■

Definición 3.2.49. Definición de dimensión.

- $\dim(Z) = -1$ si y sólo si $Z = \emptyset$. Si $\dim(Z) \leq -1$ se entiende que $X = \emptyset$.
- Supongamos que, de manera inductiva, hemos definido $\dim(Y) \leq n-1$ para algún entero $n \geq 0$ y cualquier espacio Y. Entonces, para un espacio Z y un punto $p \in Z$, definimos:

  $$\dim_p(Z) \leq n$$

  si y sólo si p tiene una base de vecindades abiertas en Z cuyas fronteras tienen $\dim \leq n-1$.
- $\dim(Z) \leq n$ si y sólo si $\dim_p(Z) \leq n$ para todo $p \in Z$.
- $\dim(Z) = n$ si y sólo si $\dim(Z) \leq n$ y $\dim(Z) \nleq n-1$.
- $\dim_p(Z) = n$ si y sólo si $\dim_p(Z) \leq n$ y $\dim_p(Z) \nleq n-1$.

Teorema 3.2.50. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es unicoherente.*

Éste es el Teorema 19.8 de [13].

Lema 3.2.51. *Sean Y un espacio métrico separable y $Z \subset Y$ tal que* $\dim(Z) \leq 0$. *Si L y M son dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos de Y, entonces existe un cerrado A de Y tal que A separa a L y M en Y y $A \cap Z = \emptyset$.*

Este resultado es conocido en la Teoría de la Dimensión y es el Lema 8.1 de [25].

Lema 3.2.52. *Sea X un continuo. Entonces existen un continuo X_0, que es homeomorfo a X, y una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de continuos localmente conexos contenidos en I^{∞}, tales que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ y $X_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Además, si Z es un subcontinuo de X, existen un subcontinuo Z_0 de X_0, que es homeomorfo a Z, y una sucesión $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de continuos localmente conexos contenidos en I^{∞}, tales que $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$, $Z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ y $Z_n \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideremos a $I^{\infty} = \prod_{j=1}^{\infty}[0,1]_j$ con su métrica usual. Por el Teorema 1.2 de [12], existe un continuo X_0, homeomorfo a X, tal que $X_0 \subset I^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$X_n = \mathrm{cl}_{I^{\infty}}(N(\tfrac{1}{n}, X_0)).$$

Por la definición de estos conjuntos, observamos que satisfacen $X_1 \supset X_2 \supset ...$

Afirmación 1. $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_0$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ que satisfacen que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Consideremos $n \geq N$. Verifiquemos que $\mathrm{cl}_{I^{\infty}}(N(\frac{1}{n+1}, X_0)) \subset N(\varepsilon, X_0)$. Sea $x \in \mathrm{cl}_{I^{\infty}}(N(\frac{1}{n+1}, X_0))$. Por la definición de cerradura, existe $y \in B_d(\frac{1}{n(n+1)}, x) \cap N(\frac{1}{n+1}, X_0)$. Por lo tanto, existe un elemento $x_0 \in X_0$ tal que $d(y, x_0) < \frac{1}{n+1}$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esto nos dice que $x \in N(\varepsilon, X_0)$, así que, $X_n = \mathrm{cl}_{I^{\infty}}(N(\frac{1}{n+1}, X_0)) \subset N(\varepsilon, X_0)$. Como $X_0 \subset X_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, es claro que $X_0 \subset N(\varepsilon, X_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.0.10, $H(X_n, X_0) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Esto nos dice que $\lim X_n = X_0$.

Por otra parte, como $X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots$ es una sucesión de elementos de 2^X tal que $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ...$, podemos aplicar el Lema 4.1 de [12] para asegurar que la sucesión converge en 2^X y que $\lim X_n = \bigcap\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\lim X_n = X_0$ obtenemos la Afirmación 1.

Afirmación 2. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto X_n es un continuo localmente conexo.

Por el Lema 1.4.4, $B_d(\frac{1}{n}, x)$ es conexo para cada $x \in X_0$. El hecho de que $x \in B_d(\frac{1}{n}, x) \cap X_0$, nos dice que $B_d(\frac{1}{n}, x) \cup X_0$ también es un conexo. Lo cual nos lleva a que

$$\bigcup\{B_d(\tfrac{1}{n}, x) \cup X_0 : x \in X_0\} = \bigcup\{B_d(\tfrac{1}{n}, x) : x \in X_0\} = N(\tfrac{1}{n}, X_0)$$

también es conexo. De modo que, $\mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\frac{1}{n}, X_0))$ es un continuo.

Probemos que X_n es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Tomemos $p \in X_n$. Consideramos dos casos.

Caso (i). $p \in N(\frac{1}{n}, X_0)$.

Verifiquemos que X_n es localmente conexo en p. Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe un número $\delta > 0$ tal que $B_d(\delta, p) \subset B_d(\varepsilon, p) \cap X_n$. Tenemos que existe un elemento $x_0 \in X_0$ tal que $d(p, x_0) < \frac{1}{n}$. Consideremos $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \text{mín}\{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n} - d(p, x_0)), \varepsilon\}.$$

Observemos que $B_d(\delta, p) \subset B_d(\varepsilon, p)$. Veamos que se satisface que $B_d(\delta, p) \subset N(\frac{1}{n}, X_0)$. Tomemos $y \in B_d(\delta, p)$. Notemos que

$$d(y, x_0) \leq d(y, p) + d(p, x_0) < \delta + d(p, x_0)$$

$$< \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{n} - d(p, x_0)) + d(p, x_0) = \tfrac{1}{2n} + \tfrac{d(p,x_0)}{2} < \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{n}.$$

De modo que, $y \in N(\frac{1}{n}, X_0)$, así que, $B_d(\delta, p) \subset N(\frac{1}{n}, X_0) \subset X_n$. Esto nos lleva a que $B_d(\delta, p) \subset B_d(\varepsilon, p) \cap X_n$. Por el Lema 1.4.4, $\{B_d(\eta, p) : 0 < \eta < \delta\}$ es una base local en p, de abiertos conexos en $N(\frac{1}{n}, X_0)$. Así, hemos probado que X_n es localmente conexo en p y, por lo tanto, X_n es conexo en pequeño en p.

Caso (ii). $p \in \mathrm{fr}_{I^\infty}(X_n)$.

Para probar nuestra afirmación, en este caso, supongamos lo contrario, que X_n no es conexo en pequeño en el punto p.

Observación 1. Existe un abierto U de X_n tal que $p \in U$ y si C es un conexo tal que $p \in C \subset U$, entonces $p \notin \mathrm{int}_{X_n}(C)$.

Esta observación es inmediata de la definición de conexidad en pequeño.

Observación 2. Existe un número $\delta > 0$ que tiene las siguientes propiedades:

(a) $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_0 = \emptyset$,

(b) $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n \subset U$ y

(c) $\frac{\delta}{8} < \frac{1}{n}$.

Verifiquemos que $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\frac{1}{2n}, p)) \cap X_0 = \emptyset$. Si suponemos lo contrario, existe un elemento $x_0 \in X_0$ tal que $d(p, x_0) \leq \frac{1}{2n}$. Lo cual nos lleva a que $p \in N(\frac{1}{n}, X_0)$, así que $p \in \mathrm{int}_{I^\infty}(X_n)$, lo cual es una contradicción. De modo que $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\frac{1}{2n}, p)) \cap X_0 = \emptyset$.

Tomemos $\delta > 0$ tal que $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n \subset U$ y que $\delta < \frac{1}{2n}$. Entonces este número δ satisface las propiedades (a), (b) y (c).

Observación 3. Sea C_p la componente de $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$ que contiene a p, entonces $p \in \mathrm{fr}_{X_n} C_p$.

Utilizando la hipótesis de esta observación y la propiedad (b), que satisface el número δ, de la Observación 2, tenemos que

$$C_p \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n \subset U.$$

Así que, la Observación 1 nos dice que, $p \notin \mathrm{int}_{X_n}(C_p)$. Como

$$C_p = \mathrm{int}_{X_n}(C_p) \cup \mathrm{fr}_{X_n}(C_p),$$

$p \in \mathrm{fr}_{X_n}(C_p)$, lo que queríamos probar.

Observación 4. Existe una sucesión $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ de puntos de $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap (X_n \setminus C_p)$ que converge a p y tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $p_m \in B_d(\frac{\delta}{8}, p)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Como $p \in \mathrm{fr}_{X_n}(C_p)$, existe un elemento $p_m \in B_d(\frac{\delta}{8m}, p) \cap (X_n \setminus C_p)$. Es claro que $\lim p_m = p$. Como $\frac{\delta}{8m} \leq \frac{\delta}{8}$, $p_m \in B_d(\frac{\delta}{8}, p)$. De modo que $p_m \in \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta,p)) \cap (X_n \setminus C_p)$. Así, hemos obtenido la sucesión $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ que satisface las condiciones deseadas.

Observación 5. Existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de X_0 tal que diám$(\overline{p_m x_m}) \leq \frac{1}{n}$ y $\overline{p_m x_m} \subset X_n$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Como $p_m \in X_n = \mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\frac{1}{n}, X_0))$, existe un elemento $x_m \in X_0$ tal que $d(p_m, x_m) \leq \frac{1}{n}$. Esto nos dice que $p_m \in \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\frac{1}{n}, x_m))$. Por el Lema 1.4.4, sabemos que $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\frac{1}{n}, x_m))$ es un convexo. Así que

$$\overline{p_m x_m} \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\tfrac{1}{n}, x_m)) \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\tfrac{1}{n}, X_0)) = X_n.$$

Notemos que diám$(\overline{p_m x_m}) \leq \frac{1}{n}$. Así, hemos construido la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de X_0 con las condiciones pedidas. Como X_0 es compacto podemos suponer que esta sucesión converge. Sea $x = \lim x_m$.

Observación 6. Para toda $m \in \mathbb{N}$, se satisface que diám$(\overline{p_m x_m}) \geq \frac{3\delta}{4}$.

Supongamos que existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que diám$(\overline{p_m x_m}) < \frac{3\delta}{4}$. Utilizando la desigualdad triangular y la Observación 4, tenemos lo siguiente:

$$d(p, x_m) \leq d(p, p_m) + d(p_m, x_m) < \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{3\delta}{4} < \delta.$$

Esto nos lleva a que $B_d(\delta, p) \cap X_0 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción por la propiedad (a), que satisface el número δ, de la Observación 2. De modo que esta observación está probada.

Observación 7. Existe una sucesión $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ de elementos de X_n tal que $q_m \in \overline{p_m x_m}$ y $d(p_m, q_m) = \frac{\delta}{8}$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Observemos que el arco $\overline{p_m x_m}$ es conexo. La Observación 6 nos dice que $d(p_m, x_m) \geq \frac{3\delta}{4}$ y, como $d(p_m, p_m) = 0$, existe un elemento $q_m \in \overline{p_m x_m}$ tal que $d(p_m, q_m) = \frac{\delta}{8}$. Por la Observación 5, $q_m \in \overline{p_m x_m} \subset X_n$. Por lo tanto, hemos obtenido la sucesión deseada.

Observación 8. Si $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$d(x_m, q_m) = d(x_m, p_m) - d(q_m, p_m) \leq \tfrac{1}{n} - \tfrac{\delta}{8}.$$

Esta observación resulta de que $\overline{p_m x_m}$ es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(p_m, x_m)]$ (Lema 1.4.1).

Como X_n es un subconjunto compacto, podemos suponer que la sucesión $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $q = \lim q_m$.

Observación 9. Sean $m \in \mathbb{N}$ y C_m la componente de $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$ que contiene a p_m, entonces $\overline{p_m q_m} \subset C_m$.

Por la Observación 5, $\overline{p_m x_m} \subset X_n$ y, como $q_m \in \overline{p_m x_m}$, obtenemos que $\overline{p_m q_m} \subset X_n$. Por otra parte, la Observación 4 nos dice que $p_m \in B_d(\frac{\delta}{8}, p)$ y, la Observación 7, que $d(p_m, q_m) = \frac{\delta}{8}$. Por tanto,

$$d(q_m, p) \leq d(q_m, p_m) + d(p_m, p) < \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{\delta}{8} < \delta.$$

De manera que $p_m,\ q_m \in B_d(\frac{\delta}{8}, p)$. El Lemal 1.4.4 nos dice que $B_d(\delta, p)$ es convexo. Así, $\overline{p_m q_m} \subset B_d(\delta, p)$. Por tanto, $\overline{p_m q_m} \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$. Como $\overline{p_m q_m}$ es un conexo y $p_m \in \overline{p_m q_m} \cap C_m$, $\overline{p_m q_m} \subset C_m$, lo que queríamos probar.

Observación 10. $\overline{pq} \subset C_p$.

Por la Observación 7, $d(p_m, q_m) = \frac{\delta}{8}$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Como $\lim p_m = p$ y $\lim q_m = q$, $d(p, q) = \frac{\delta}{8}$. Por lo tanto, $\overline{pq} \subset B_d(\delta, p)$. Por otra parte, por la Observación 8, $d(x_m, q_m) \leq \frac{1}{n} - \frac{\delta}{8}$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Como $\lim x_m = x$ y $\lim q_m = q$, $d(x, q) \leq \frac{1}{n} - \frac{\delta}{8}$. Sea $y \in \overline{pq}$. Entonces $d(y, q) \leq \frac{\delta}{8}$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(y, x) \leq d(y, q) + d(q, x) \leq \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{\delta}{8} = \tfrac{1}{n}.$$

Como $x \in X_0$, $y \in X_n = \mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\frac{1}{n}, X_0))$. Por lo tanto, $\overline{pq} \subset X_n$. Así, hemos obtenido que $\overline{pq} \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$. Como $\overline{pq}$ es un conexo de $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$ que contiene a p, concluimos que $\overline{pq} \subset C_p$.

Observación 11. $B_d(\frac{\delta}{8}, q) \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$.

Tomemos $y \in B_d(\frac{\delta}{8}, q)$. De la demostración de la Observación 10, tenemos que $d(p, q) = \frac{\delta}{8}$. Así que,

$$d(y, p) \leq d(y, q) + d(q, p) < \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{\delta}{8} = \tfrac{\delta}{4}.$$

De manera que, $y \in \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p))$. De la demostración de la Observación 10, tenemos que $d(x, q) \leq \frac{1}{n} - \frac{\delta}{8}$. De modo que,

$$d(y, x) \leq d(y, q) + d(q, x) < \tfrac{\delta}{8} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{\delta}{8} = \tfrac{1}{n}.$$

Como $x \in X_0$, $y \in X_n = \mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\frac{1}{n}, X_0))$. De esta manera, hemos obtenido que $B_d(\frac{\delta}{8}, q) \subset \mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$.

Como $\lim q_m = q$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_N \in B_d(\frac{\delta}{8}, q) \cap X_n$. Observemos que $B_d(\frac{\delta}{8}, q)$ es un conexo contenido en $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$, por la observación anterior y por el Lema 1.4.4. Por la Observación 10, $q \in C_p$. De modo que, $B_d(\frac{\delta}{8}, q) \cap C_p \neq \emptyset$. Por otro lado, $q_N \in B_d(\frac{\delta}{8}, q) \cap C_N$. Como C_p y C_N son componentes de $\mathrm{cl}_{I^\infty}(B_d(\delta, p)) \cap X_n$ que intersectan a $B_d(\frac{\delta}{8}, q)$, $B_d(\frac{\delta}{8}, q) \subset C_p$ y $B_d(\frac{\delta}{8}, q) \subset C_N$. Así que, $C_N = C_p$.

Como $p_N \in X_n \setminus C_p$, hemos obtenido una contradicción que nació de suponer que X_n no era conexo en pequeño en el punto p. Por lo tanto, X_n es conexo en pequeño en el punto p.

Hemos probado que X_n es conexo en pequeño en p para todo $p \in X_n$. Así que, por el Lema 1.5.4, X_n es localmente conexo.

Como $Z \subset X$ y X_0 es homeomorfo a X, existe un subcontinuo Z_0 de X_0 que es homeomorfo a Z_0. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$Z_n = \mathrm{cl}_{I^\infty}(N(\tfrac{1}{n}, Z_0)).$$

Utilizando lo que acabamos de hacer es claro que $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de continuos localmente conexos contenidos en I^∞, tales que $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$ y $Z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$. De la definición de Z_n y X_n, obtenemos que $Z_n \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera finalizamos la prueba de este lema. ■

Lema 3.2.53. *Supongamos que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ y X_n es un continuo localmente conexo para toda $n \in \mathbb{N}$. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$, $r, s \in [0, 1]$ tales que $r < s$ y $\mathcal{Z}$ un subconjunto de $C(X)$ que es cero dimensional. Supongamos que existe un subconjunto cerrado $\mathcal{C}_0$ de $C(X_1)$ que separa a $\mu^{-1}(r)$ y $\mu^{-1}(s)$ en $C(X_1)$ y tal que $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Entonces existe un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $C(X)$ que satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\mathcal{Z} \cap \mathcal{K} = \emptyset$*;*

(b) $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0 \cap \mu^{-1}([0, s])$*;*

(c) para cada subcontinuo $\mathcal{L}$ *de* $C(X)$ *tal que* $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}(r) \neq \emptyset$ *y* $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}(s) \neq \emptyset$*, se cumple que* $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$*.*

Demostración. Por el Lema 1.1.10,

$$C(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C(X_n).$$

Por los Teoremas 3.2.50 y 3.2.36, sabemos que $C(X_n)$ es unicoherente y localmente conexo para toda $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathcal{M} = \mu^{-1}(r) \text{ y}$$

$$\mathcal{N} = \mu^{-1}(s).$$

Las contenciones $\mathcal{Z}, \mathcal{M}, \mathcal{N} \subset C(X) \subset C(X_n)$ implican que $\mathcal{Z}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos de $C(X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subcontinuos de $C(X)$. Observemos que $C(X_1) \supset C(X_2) \supset \cdots$ ya que $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$.

Utilizando el método de inducción construiremos una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $C(X_1)$ que satisface, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n \subset C(X_n)$, $\mathcal{C}_n$ separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_n)$ y $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ y, además $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \cdots$.

Para $n = 1$. Como $\mathcal{C}_0$ es un subconjunto cerrado de $C(X_1)$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_1)$, existen subconjuntos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ de $C(X_1)$ tales que $C(X_1) \setminus \mathcal{C}_0 = \mathcal{E} \mid \mathcal{F}$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ y $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$. Como $C(X_1)$ es unicoherente y localmente conexo y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son continuos, podemos aplicar el Teorema 3.2.48 para obtener un subcontinuo $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_1)$. Así que, existen subconjuntos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{F}_1$ tales que:

(a) $C(X_1) \setminus \mathcal{C}_1 = \mathcal{E}_1 \mid \mathcal{F}_1$;

(b) $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_1$ y $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_1$.

Notemos que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0 \subset C(X_1)$. Como $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, obtenemos que:

(c) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Trabajemos con $n = 2$. Probemos que $\mathcal{C}_1 \cap C(X_2)$ es un cerrado que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_2)$. Para esto, veamos que

$$C(X_2) \setminus \big(\mathcal{C}_1 \cap C(X_2)\big) = \mathcal{E}_1 \cap C(X_2) \mid \mathcal{F}_1 \cap C(X_2),$$

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_1 \cap C(X_2) \text{ y } \mathcal{N} \subset \mathcal{F}_1 \cap C(X_2).$$

Como $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0 \subset C(X_1)$, $\mathcal{C}_1$ es un cerrado de $C(X_1)$. Como $C(X_2) \subset C(X_1)$, $\mathcal{C}_1 \cap C(X_2)$ es un subconjunto cerrado de $C(X_2)$.

Afirmación 1. $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_1 \cap C(X_2)$ y $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_1 \cap C(X_2)$.

Esta afirmación es sencilla de probar ya que $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_1$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_1$ y $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset C(X_2)$.

Afirmación 2. Los subconjuntos $\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)$ y $\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)$ son no vacíos.

Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos no vacíos, por la Afirmación 1, $\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)$ y $\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)$ también son subconjuntos no vacíos.

Afirmación 3. $C(X_2) \setminus \big(\mathcal{C}_1 \cap C(X_2)\big) = (\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)) \cup (\mathcal{F}_1 \cap C(X_2))$.

Esta afirmación se obtiene de los hechos de que $C(X_1) \setminus \mathcal{C}_1 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{F}_1$ y $C(X_2) \subset C(X_1)$.

Afirmación 4. $\mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)\big) \cap \big(\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)\big) = \emptyset$ y $(\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)) \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}(\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)) = \emptyset$.

Esto es claro de las siguientes contenciones:

$$\mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)\big) \cap \big(\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)\big) \subset \mathrm{cl}_{C(X_1)}(\mathcal{E}_1) \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset \text{ y}$$

$$\big(\mathcal{E}_1 \cap C(X_2)\big) \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{F}_1 \cap C(X_2)\big) \subset \mathcal{E}_1 \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}(\mathcal{F}_1) = \emptyset.$$

Como $C(X_2)$ es localmente conexo y unicoherente, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subcontinuos ajenos y $\mathcal{C}_1 \cap C(X_2)$ es un cerrado que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_2)$ (por las Afirmaciones 1, 2, 3 y 4), podemos aplicar el Lema 3.2.48 para obtener un subcontinuo $\mathcal{C}_2$ de $C(X_2)$ tal que $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \cap C(X_2)$ y que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_2)$. Así que, existen subconjuntos $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{F}_2$ de $C(X_2)$ tales que $C(X_2) \setminus \mathcal{C}_2 = \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{F}_2$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_2$, y $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Notemos que $\mathcal{C}_2 \subset C(X_2)$ y, como $C(X_2) \subset C(X_1)$, obtenemos que $\mathcal{C}_2 \subset C(X_1)$.

Tomemos $n \geq 3$. Supongamos que hemos construido un subcontinuo $\mathcal{C}_n$ de $C(X_n)$ que está contenido en $\mathcal{C}_{n-1}$ y que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_n)$. Entonces existen subconjuntos $\mathcal{E}_n$ y $\mathcal{F}_n$ de $C(X_n)$ tales que:

(i) $C(X_n) \setminus \mathcal{C}_n = \mathcal{E}_n \mid \mathcal{F}_n$,

(ii) $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_n$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_n$ y

(iii) $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Probaremos que existe un subcontinuo $\mathcal{C}_{n+1}$ de $C(X_{n+1})$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ y es tal que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$.

Afirmación 5. El subconjunto $\mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1})$ es un subconjunto cerrado de $C(X_{n+1})$.

Como $C(X_{n+1}) \subset C(X_n)$,

$$\mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1}) \subset C(X_n) \cap C(X_{n+1}) = C(X_{n+1}).$$

Sabemos que $\mathcal{C}_n$ y $C(X_{n+1})$ son cerrados de $C(X_n)$, por lo tanto, $\mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1})$ es un subconjunto cerrado de $C(X_{n+1})$.

Afirmación 6. Se satisface que $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_n \cap C(X_{n+1})$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_n \cap C(X_{n+1})$ y $C(X_{n+1}) \setminus (\mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1})) = (\mathcal{E}_n \cap C(X_{n+1})) \mid (\mathcal{F}_n \cap C(X_{n+1}))$.

Esta afirmación se prueba como la Afirmación 2.

Por lo tanto, $\mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1})$ es un cerrado que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_{n+1})$. Como $C(X_{n+1})$ es localmente conexo y unicoherente, podemos aplicar el Teorema 3.2.48 para obtener un subcontinuo $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n \cap C(X_{n+1})$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_{n+1})$. Observamos que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$. El inciso (iii) nos dice que

$\mathcal{C}_n \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, por tanto, $\mathcal{C}_{n+1} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Notemos que $\mathcal{C}_{n+1} \subset C(X_{n+1})$ y, como $C(X_{n+1}) \subset C(X_1)$, $\mathcal{C}_{n+1} \subset C(X_1)$.

De manera que tenemos una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de $C(X_1)$ tales que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \cdots$, donde para toda $n \in \mathbb{N}$, se satisface que:

(iv) $\mathcal{C}_n \subset C(X_n)$,

(v) $\mathcal{C}_n$ separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_n)$,

(vi) $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Como $\mathcal{C}_n \subset C(X_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 4.4 de [12], el conjunto

$$\mathcal{K} = \bigcap\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es un subcontinuo de $C(X_1)$.

Afirmación 7. $\mathcal{K} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Por (vi), sabemos que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. De manera que,

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{Z} = (\bigcap\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\}) \cap \mathcal{Z} \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{Z} = \emptyset.$$

Así, obtenemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Afirmación 8. El continuo $\mathcal{K}$ es un subconjunto de $C(X)$.

Por (iv), $\mathcal{C}_n \subset C(X_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto,

$$\mathcal{K} = \bigcap\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcap\{C(X_n) : n \in \mathbb{N}\} = C(X).$$

Afirmación 9. El continuo $\mathcal{K}$ es un subconjunto de $\mathcal{C}_0 \cap \mu^{-1}([0, s])$.

Como $\mathcal{K} = \bigcap\{\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0$, es claro que $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_0$. Por otra parte, como $C(X)$ es un subconjunto cerrado de $C(X_1)$ y μ es una función de Whitney para $C(X)$, aplicamos el Teorema 2.2.11 para obtener una función de Whitney ω para $C(X_1)$ tal que $\omega|_{C(X)} = \mu$.

Si existiera un elemento $B \in \mathcal{K} \setminus \mu^{-1}([0,s])$, entonces $B \in \mu^{-1}((s,1]) \subset \omega^{-1}((s,1])$. Supongamos que $\mathcal{K} \cap \omega^{-1}(s) = \emptyset$. De modo que

$$\mathcal{K} \subset C(X_1) \setminus \omega^{-1}(s) = \omega^{-1}([0,s)) \cup \omega^{-1}((s,1]).$$

Como $\mathcal{K}$ es un conexo y $B \in \mathcal{K} \cap \omega^{-1}((s,1])$, $\mathcal{K} \subset \omega^{-1}((s,1])$. Así que, $\mathcal{K} \in \langle \omega^{-1}((s,1]) \rangle$. Por tanto, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_N \in \langle \omega^{-1}((s,1]) \rangle$, así que, $\mathcal{C}_N \subset \omega^{-1}((s,1])$. Por (iv), $\mathcal{C}_N \subset C(X_N)$. De manera que,

$$(\omega|_{C(X_N)})^{-1}([0,s]) = C(X_N) \setminus \omega^{-1}((s,1]) \subset C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N.$$

Por (v), existen $\mathcal{E}_N$ y $\mathcal{F}_N$ tales que $C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N = \mathcal{E}_N \mid \mathcal{F}_N$, con $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}_N$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}_N$. Sabemos que

$$\mathcal{M} = \mu^{-1}(r) \subset (\omega|_{C(X_N)})^{-1}([0,s]) \text{ y}$$

$$\mathcal{N} = \mu^{-1}(s) \subset (\omega|_{C(X_N)})^{-1}([0,s]).$$

Notemos que $\frac{\omega|_{C(X_N)}}{\omega(X_N)} : C(X_N) \to [0,1]$ es una función de Whitney y que $s < \mu(X) = \omega(X) < \omega(X_N)$, ya que $X \subsetneq X_N$. Entonces el Lema 3.0.24 nos dice que el siguiente conjunto es un continuo:

$$\left(\tfrac{\omega|_{C(X_N)}}{\omega(X_N)}\right)^{-1}\left([0, \tfrac{s}{\omega(X_N)}]\right) = (\omega|_{C(X_N)})^{-1}([0,s]).$$

Por tanto, $(\omega|_{C(X_N)})^{-1}([0,s])$ es un subconjunto conexo de $C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N$ que intersecta a $\mathcal{E}_N$ y a $\mathcal{F}_N$, lo cual es una contradicción. De manera que $\mathcal{K} \cap \omega^{-1}(s) \neq \emptyset$.

Por la Afirmación 8, $\mathcal{K} \subset C(X)$. De manera que

$$\mathcal{K} \cap \omega^{-1}(s) = \mathcal{K} \cap \mu^{-1}(s) = \mathcal{K} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset.$$

Por tanto, existe un elemento $C \in \mathcal{K} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{C}_1$. Por otro lado, tenemos que $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_1$, así que $C \in \mathcal{F}_1$. Pero $C(X_1) \setminus \mathcal{C}_1 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{F}_1$, lo cual nos dice que $C \notin \mathcal{C}_1$. De esta manera llegamos a una contradicción, que nació de suponer que $\mathcal{K} \cap \mu^{-1}((s,1]) \neq \emptyset$. Así, concluimos que $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}([0,s])$.

Afirmación 10. Sea $\mathcal{L}$ un subconjunto conexo de $C(X)$ tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Supongamos por el contrario que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Entonces existen abiertos ajenos $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ de $C(X_1)$ tales que $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$. Así que, $\mathcal{K} \in \langle \mathcal{V} \rangle$. De modo que, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_N \in \langle \mathcal{V} \rangle$, así que, $\mathcal{C}_N \subset \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}_N = \emptyset$, lo cual nos dice que $\mathcal{L} \subset C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N$. Por (v), existen $\mathcal{E}_N$ y $\mathcal{F}_N$ tales que $C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N = \mathcal{E}_N \mid \mathcal{F}_N$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_N$ y $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_N$. Como $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ es un subconjunto conexo de $C(X_N) \setminus \mathcal{C}_N = \mathcal{E}_N \mid \mathcal{F}_N$ que intersecta a $\mathcal{E}_N$ y $\mathcal{F}_N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. De esta manera, hemos terminado la prueba de nuestro lema. ■

A continuación probaremos un teorema imitando una técnica desarrollada por J. M. Martínez-Montejano en [17].

Definición 3.2.54. Decimos que un continuo X es *cerrado cero dimensional aposindético* si para cada $p \in X$ y cada subconjunto cerrado cero dimensional F de X tal que $p \notin F$, existe un subcontinuo M de X tal que $p \in \operatorname{int}_X(M)$ y $M \cap F = \emptyset$.

Teorema 3.2.55. *(M. E. Aguilera) Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}([0,t])$ es cerrado cero dimensional aposindético.*

Demostración. Sean $\mathcal{Z}$ un subconjunto cerrado cero dimensional del bloque $\mu^{-1}([0,t])$ y $A \in \mu^{-1}([0,t]) \setminus \mathcal{Z}$. Como $A \notin \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z}$ es un subconjunto cerrado de $\mu^{-1}([0,t])$, y por lo tanto de $C(X)$, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que $\operatorname{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, A)) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\rho > 0$ tal que si $B, C \in C(X)$ satisfacen que $B \subset C$ y $\mu(C) - \mu(B) < \rho$, entonces $H(B,C) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por el Lema 3.2.52, podemos suponer que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es un subcontinuo de I^{∞} que es localmente conexo para toda $n \in \mathbb{N}$ y $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$. Construyamos un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ que tiene a A en su interior, para esto consideramos dos casos.

Caso i. $\mu(A) < t$.

Sean $\delta = \min\{\rho, \frac{t-\mu(A)}{2}\}$, $r = \mu(A) + \frac{\delta}{4}$ y $s = \mu(A) + \frac{3\delta}{4}$. Definimos

$$\mathcal{M} = \mu^{-1}(r) \text{ y}$$

$$\mathcal{N} = \mu^{-1}(s).$$

Como $\mathcal{Z}, \mathcal{M}, \mathcal{N} \subset C(X) \subset C(X_1)$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos no vacíos de $C(X_1)$, podemos aplicar el Lema 3.2.51 para obtener un subconjunto cerrado $\mathcal{C}$ de $C(X_1)$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_1)$ y tal que $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Entonces, por el Lema 3.2.53, existe un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $C(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{Z} \cap \mathcal{K} = \emptyset$,

(b) $\mathcal{K} \subset \mathcal{C} \cap \mu^{-1}([0, s])$ y

(c) para cada subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, se cumple que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Definimos el abierto

$$\mathcal{U} = B_H(\tfrac{\varepsilon}{2}, A) \cap \mu^{-1}((\mu(A) - \tfrac{\delta}{4}, r)).$$

Tomemos $D \in \mathcal{U}$. Entonces $\mu(D) < r < s < 1 = \mu(X)$. Como $D \subsetneq X$, por el Lema 2.2.4, existe $E \in \mu^{-1}(s)$ tal que $D \subsetneq E$. Así que, podemos aplicar el Corolario 2.2.8 para obtener un arco ordenado $\alpha_D : [0, 1] \to \mu^{-1}([0, s])$ de D a E. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, se satisface que $D = \alpha_D(0) \subset \alpha_D(w) \subset \alpha_D(1) = E$ para cada $w \in [0, 1]$.

Afirmación 1. $\operatorname{Im} \alpha_D \cup \mathcal{K}$ es un continuo.

Por la definición de $\mathcal{U}$, tenemos $\mu(D) < r$ y como $r < s = \mu(E)$, obtenemos que $\mu(\alpha_D(0)) = \mu(D) < r < s = \mu(E) = \mu(\alpha_D(1))$. Luego, $[r, s] \subset \operatorname{Im} \alpha_D$. Por lo tanto, $\operatorname{Im} \alpha_D$ es un subcontinuo que intersecta a los continuos $\mathcal{M} = \mu^{-1}(r)$ y $\mathcal{N} = \mu^{-1}(s)$. Por la propiedad (c), sabemos que $\operatorname{Im}_D \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, de modo que $\operatorname{Im} \alpha_D \cup \mathcal{K}$ es un continuo.

Afirmación 2. $\operatorname{Im} \alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$.

Sea $w \in [0, 1]$. Tenemos que $D = \alpha_D(0) \subset \alpha_D(w) \subset \alpha_D(1) = E$ y, por la definición de $\mathcal{U}$, $\mu(A) - \frac{\delta}{4} < \mu(D)$. De modo que

$$\mu(\alpha_D(w)) - \mu(D) \leq \mu(E) - \mu(D) < s - \mu(D) < (\mu(A) + \tfrac{3\delta}{4}) - (\mu(A) - \tfrac{\delta}{4}) = \delta.$$

Por la elección del número δ, $H(D,\alpha_D(w)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $D \in \mathcal{U}$, sabemos que $H(A,D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto,

$$H(A,\alpha_D(w)) \leq H(A,D) + H(D,\alpha_D(w)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así que, $\alpha_D(w) \in B_H(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}\alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$.

Afirmación 3. El conjunto definido por:

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_D)$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

Consideremos $D \in \mathcal{U}$. Por la Afirmación 1, $\operatorname{Im}_D \cup \mathcal{K}$ es un continuo. De manera que,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\mathcal{K} \cup (\textstyle\bigcup_{D\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_D)) = \mathcal{K} \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_D) = \mathcal{A}$$

también es un continuo. Como $\operatorname{Im}\alpha_D \subset \mu^{-1}([0,s])$ para cada $D \in \mathcal{U}$ (por construcción), $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}([0,s])$ (por la propiedad (b)) y $s \leq t$, tenemos que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Afirmación 4. $A \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$.

Esta afirmación es clara por las definiciones de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{A}$.

Afirmación 5. $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Por la propiedad (a), sabemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. De la Afirmación 1, $\operatorname{Im}\alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$ para todo elemento $D \in \mathcal{U}$. De manera que,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_D) \cap \mathcal{Z} \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, A)) \cap \mathcal{Z}.$$

Por la elección del número ε, el lado derecho de esa expresión es vacía, lo cual nos lleva a que el lado izquierdo también lo es. Así, obtenemos que

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \left(\mathcal{K} \cup \operatorname{cl}_{C(X)}\left(\textstyle\bigcup_{D\in\mathcal{U}} \operatorname{Im}\alpha_D\right)\right) \cap \mathcal{Z} = \emptyset.$$

De esta manera concluimos el caso (i).

Caso (ii). $A \in \mu^{-1}(t)$.

Definimos los números $\delta = \min\{\rho, \frac{t}{2}\}$, $s = t - \frac{\delta}{4}$ y $r = t - \frac{3\delta}{4}$. Sean

$$\mathcal{M} = \mu^{-1}(r) \text{ y}$$

$$\mathcal{N} = \mu^{-1}(s).$$

Notemos que $r, s \in [0, t]$. Como $\mathcal{Z}, \mathcal{M}, \mathcal{N} \subset C(X) \subset C(X_1)$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ y $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subconjuntos cerrados no vacíos de $C(X_1)$, podemos aplicar el Lema 3.2.51 para obtener un subconjunto cerrado $\mathcal{C}$ de $C(X_1)$ que separa a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en $C(X_1)$ y tal que $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Entonces, por el Lema 3.2.53, existe un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $C(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(d) $\mathcal{Z} \cap \mathcal{K} = \emptyset$,

(e) $\mathcal{K} \subset \mathcal{C} \cap \mu^{-1}([0, s])$ y

(f) para cada subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}(r) \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}(s) \neq \emptyset$, se cumple que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Definimos el abierto

$$\mathcal{U} = B_H(\tfrac{\varepsilon}{2}, A) \cap \mu^{-1}((s, t]).$$

Tomemos $D \in \mathcal{U}$ y $x \in D$. Entonces $\mu(\{x\}) = 0 < r < s < \mu(D) \leq t$. Aplicando el Lema 2.2.4, aseguramos la existencia de un elemento $E \in \mu^{-1}(r)$ tal que $E \subsetneq D$. Por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_D : [0, 1] \to \mu^{-1}([r, t])$ de E a D. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, se satisface que $D = \alpha_D(0) \subset \alpha_D(w) \subset \alpha_D(1) = E$ para cada $w \in [0, 1]$.

Afirmación 6. El continuo $\operatorname{Im} \alpha_D$ intersecta al continuo $\mathcal{K}$.

Como $\mu(\alpha_D(0)) = \mu(E) = r < s < \mu(D) = \mu(\alpha_D(1))$, sabemos que $[r, s] \subset \operatorname{Im} \alpha_D$. De modo que $\operatorname{Im} \alpha_D \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$ y $\operatorname{Im} \alpha_D \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Por lo tanto, utilizando la propiedad (f), obtenemos que $\operatorname{Im} \alpha_D \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.

Afirmación 7. $\operatorname{Im} \alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$.

Sea $w \in [0, 1]$. Sabemos que $\mu(D) \leq t$ y $\mu(E) = r = t - \frac{3\delta}{4}$. Como $E \subset \alpha_D(w) \subset D$, tenemos

$$\mu(D) - \mu(\alpha_D(w)) \leq \mu(D) - \mu(E) \leq t - (t - \tfrac{3\delta}{4}) = \tfrac{3\delta}{4} < \delta.$$

Por la elección del número δ, $H(D, \alpha_D(w)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la definición de $\mathcal{U}$, sabemos que $H(A, D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto,

$$H(A, \alpha_D(w)) \leq H(A, D) + H(D, \alpha_D(w)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $\alpha_D(w) \in B_H(\varepsilon, A)$. Con esto hemos visto que $\operatorname{Im} \alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$.

Afirmación 8. Definimos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \alpha_D).$$

Entonces se satisface que $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Tomemos $w \in [0,1]$. Por la afirmación anterior, $\operatorname{Im} \alpha_D \subset B_H(\varepsilon, A)$. Así que

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \alpha_D) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(B_H(\varepsilon, A)).$$

Por la elección ε,

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\textstyle\bigcup_{D \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \alpha_D) \cap \mathcal{Z} = \emptyset.$$

Por otra parte, por la propiedad (d), $\mathcal{K} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Así, concluimos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Afirmación 9. $A \in \operatorname{int}_{\mu^{-1}([0,t])}(\mathcal{A})$.

De las definiciones de $\mathcal{A}$ y de $\mathcal{U}$, se obtiene esta afirmación.

Afirmación 10. El subconjunto $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

Consideremos $D \in \mathcal{U}$. Por la Afirmación 6, $\operatorname{Im} \alpha_D \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Así, obtenemos que $\left(\bigcup_{D \in \mathcal{U}} \operatorname{Im} \alpha_D\right) \cup \mathcal{K}$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, el subconjunto $\mathcal{A}$ es un continuo. Como $\operatorname{Im} \alpha_D \subset \mu^{-1}([r,t])$, para toda $D \in \mathcal{U}$ (por construcción), $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}([0,s])$ (por la propiedad (e)) y, como $s < t$, tenemos que $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0,t])$.

En resumen hemos obtenido un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$ que contiene a A en su interior y que no intersecta a $\mathcal{Z}$ para cada $A \in \mu^{-1}([0,t]) \setminus \mathcal{Z}$. De esta manera concluimos que $\mu^{-1}([0,t])$ es cerrado cero dimensional aposindético. $\blacksquare$

Corolario 3.2.56. *(M. E. Aguilera) Ser cerrado cero dimensional aposindético es una propiedad inducida a todos los bloques de Whitney.*

Corolario 3.2.57. *(M. E. Aguilera) Ser cerrado cero dimensional aposindético no es una propiedad inducida fuertemente por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sea X el continuo sen $\frac{1}{x}$, ver Figura 13. Notemos que el conjunto $Z = \{(0,1)\}$ es cerrado cero dimensional. Fijemos $p = (0,-1)$. Así que cualquier subcontinuo de X que tiene a p en su interior interseca a Z. Por lo tanto X no es cerrado cero dimensional aposindético. Por el Teorema 3.2.55, $\mu^{-1}([0, \frac{1}{2^n}])$ es cerrado cero dimensional aposindético para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, por el Lema 3.0.27, $\lim \mu^{-1}([0, \frac{1}{2^n}]) = F_1(X)$. Concluimos que la propiedad de ser cerrado cero dimensional aposindético no es inducida fuertemente por los bloques de Whitney. ■

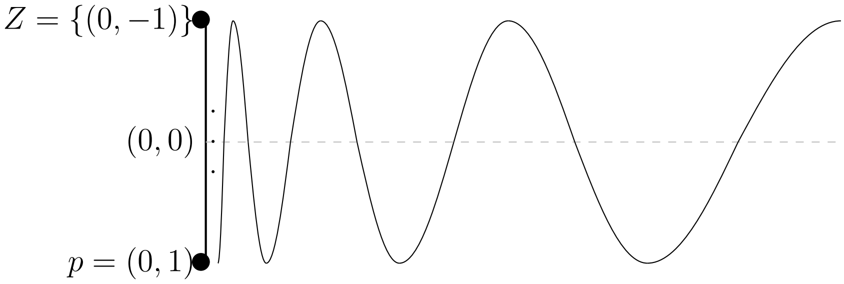

Figura 13: X

3.2.7. Unicoherencia

Recordemos que un continuo X es *unicoherente* si cada vez que se toman dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

En esta subsección veremos algunos resultados que nos auxiliarán en la prueba de que la propiedad de ser unicoherente es inducida a todos los bloques de Whitney, para X localmente conexo. Enseguida probaremos que la propiedad de no ser unicoherente es inducida a los bloques pequeños de Whitney.

Definición 3.2.58. Sean Z un espacio topológico conexo y S la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$. Una función continua $f : Z \to S$ *tiene un levantamiento*, si existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ h$, donde $\exp : \mathbb{R} \to S$ es la función definida por $\exp(it) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Un espacio topológico conexo Z *tiene la propiedad* (b) si cada función continua $f : Z \to S$ tiene un levantamiento.

El siguiente resultado es conocido en la Teoría de Continuos, (ver Teorema 3 de [7] o Teorema 7.4 de [27]).

Teorema 3.2.59. *Sea Z un espacio métrico y localmente conexo. Entonces Z es unicoherente si y sólo si Z tiene la propiedad (b).*

Definición 3.2.60. Sean Z un espacio topológico, $A \subset Z$ un subespacio y $id_A : A \to A$ la función identidad. Se dice que A es un *retracto* de Z si existe una función continua $r : Z \to A$ tal que $r|_A = id_A$. A esta función se le llama *retracción*.

Definición 3.2.61. Sean Z un espacio topológico y $A \subset B \subset Z$. Decimos que A es un *retracto por deformación de B en Z* si la función identidad $id_B : B \to B$ es homotópica en Z a una retracción $r : B \to A$.

El siguiente resultado es el Teorema 2.3 de [8].

Teorema 3.2.62. *Sean Z un espacio topológico y $f : Z \to S$ una función continua. Entonces f tiene un levantamiento si y sólo si f es homotópica a una función constante.*

Proposición 3.2.63. *Sean Z un espacio topológico conexo y Y un retracto por deformación de Z. Entonces Z tiene la propiedad (b) si y sólo si Y tiene la propiedad (b).*

Demostración. Tenemos, por hipótesis, que existen una retracción $r : Z \to Y$ y una función continua $G : Z \times [0,1] \to Z$ tal que $G(z,0) = z$ y $G(z,1) = r(z)$ para cada $z \in Z$.

Supongamos que Z tienen la propiedad (b). Tomemos una función continua $g : Y \to S$. Veamos que g es homotópica a una función constante. Definimos la función $f : Z \to S$ como $f(z) = g(r(z))$ y observamos que ésta es continua. Como Z tiene la propiedad (b), f tiene un levantamiento y, por el Teorema 3.2.62, f es homotópica a una función constante. De manera que, existen $p \in S$ y una función continua $F : Z \times [0,1] \to S$ tales que $F(z,0) = f(z) = g(r(z))$ y $F(z,1) = p$ para cada $z \in Z$. Notamos que la función $F|_{Y\times[0,1]} : Y \times [0,1] \to S$ es continua y, para cada $y \in Y$, satisface que $F|_{Y\times[0,1]}(y,0) = g(r(y)) = g(y)$ y $F|_{Y\times[0,1]}(y,1) = p$. Esto nos dice que, g es homotópica a una función constante. De modo que, por el Teorema 3.2.62, g tiene un levantamiento. Por lo tanto, Y tiene la propiedad (b).

Supongamos que Y tiene la propiedad (b). Sea $g : Z \to S$ una función continua. Verifiquemos que ésta es homotópica a una función constante. Notemos que $g|_Y : Y \to S$ es una función continua. Como Y tiene la propiedad (b), $g|_Y$ tiene un levantamiento y, por el Teorema 3.2.62, ésta es homotópica a una función constante. Así que, existen $p \in S$ y una función continua $F : Y \times [0,1] \to S$ tales que $F(y,0) = g|_Y(y)$ y $F(y,1) = p$ para cada $y \in Y$. Definimos la función $K : Z \times [0,1] \to S$ como:

$$K(z,t) = \begin{cases} g(G(z,2t)), & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}]; \\ F(r(z),2t-1), & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Observemos que

$$g(G(z,2\tfrac{1}{2})) = g(G(z,1)) = g(r(z)) \text{ y}$$

$$F(r(z),2\tfrac{1}{2}-1) = F(r(z),0) = g|_Y(r(z)) = g(r(z)).$$

Así que, K es una función continua. Tomemos $z \in Z$. Notemos que $K(z,0) = g(G(z,0)) = g(z)$ y $K(z,1) = F(r(z),1) = p$, lo que nos dice que g es homotópica a una función constante. Así que, por el Teorema 3.2.62, g tiene un levantamiento. Por lo tanto, Z tiene la propiedad (b). ■

El siguiente es el Lema 2.3.5 de [2].

Lema 3.2.64. *Sean X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$.*

Corolario 3.2.65. *(M. E. Aguilera) Sean Z un continuo localmente conexo, $\mu : C(Z) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente.*

Demostración. Notemos que Z localmente conexo implica, por los Teoremas 2.3.19 y 3.2.10, que $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ también son localmente conexos. Entonces, por el Teorema 3.2.59, $\mu^{-1}(t)$ y $\mu^{-1}([0,t])$ son unicoherentes si y sólo si éstos tienen la propiedad (b). Como Z es localmente conexo, la Proposición 3.2.64 nos dice que $\mu^{-1}(t)$ es retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$. Así que, por la Proposición 3.2.63, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad (b) si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad (b). Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente si y sólo si $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente. De esta manera terminamos la prueba de este corolario. ■

Como corolario al Teorema A de [11] se tiene lo siguiente.

Corolario 3.2.66. *Ser unicoherente es una propiedad de Whitney para la clase de los continuos localmente conexos.*

Teorema 3.2.67. *(M. E. Aguilera) Si X pertenece a la clase de los continuos localmente conexos, entonces la propiedad de ser unicoherente es inducida a todos los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ y $t \in (0,1)$. Como X es localmente conexo y unicoherente, por el Corolario 3.2.66, sabemos que $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente. De modo que, el Corolario 3.2.65 nos lleva a concluir que $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente. ■

Teorema 3.2.68. *(M. E. Aguilera) La propiedad de no ser unicoherente es inducida a los bloques pequeños de Whitney.*

Demostración. Tomemos un continuo X que no sea unicoherente y una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$. Sean A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y que $A \cap B$ no es conexo. Notemos que A y B no son degenerados. Entonces existen subconjuntos cerrados H y K de X que son ajenos y no vacíos y satisfacen que $A \cap B = H \cup K$. Consideremos al conjunto:

$$\mathcal{D}(H,K) = \{E \in C(X) : E \cap H \neq \emptyset \text{ y } E \cap K \neq \emptyset\}.$$

Por la Proposición 1.1.2, sabemos que $\mathcal{D}(H,K)$ es cerrado. Utilizando esto y la continuidad de la función μ, existe un elemento $E_0 \in \mathcal{D}(H,K)$ tal que

$$\mu(E_0) = \text{mín}\{\mu(R) : R \in \mathcal{D}(H,K)\}.$$

Observemos que $A, B \in \mathcal{D}(H,K)$. Así que $\mu(E_0) \leq \mu(A)$ y $\mu(E_0) \leq \mu(B)$.

Ahora veremos que $\mu(E_0) > 0$. Supongamos, por el contrario, que $\mu(E_0) = 0$. Entonces, como μ es función de Whitney, $E_0 = \{x\}$ para algún $x \in X$. Como $E_0 \in \mathcal{D}(H,K)$, $x \in H \cap K$. Esto es una contradicción, ya que H y K son ajenos. De esta manera concluimos que $\mu(E_0) > 0$.

Sea $t \in (0, \mu(E_0))$. Observemos que $t < \mu(E_0) \leq \mu(A)$. Como $A \notin F_1(X)$, por el Lema 3.0.24, $(\mu|_{C(A)})^{-1}([0,t])$ es un continuo no degenerado. Definimos

$$\mathcal{C}(A) = (\mu|_{C(A)})^{-1}([0,t]).$$

De manera que $\mathcal{C}(A)$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

Por la Proposición 3.0.26, el conjunto

$$\mathcal{D}(B) = \{D \in \mu^{-1}([0,t]) : D \cap B \neq \emptyset\}$$

es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$.

A continuación, veremos que $\mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$. Consideremos $F \in \mu^{-1}([0,t])$. Si $F \subset A$, entonces $F \in \mathcal{C}(A)$. Si $F \not\subset A$, existe $x \in F \setminus A$. Como $X = A \cup B$, $x \in B$ y, por tanto, $x \in F \cap B$. Lo cual nos dice que $F \cap B \neq \emptyset$. Con lo que tenemos que $F \in \mathcal{D}(B)$. Por la definición de los conjuntos $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{D}(B)$, concluimos que $\mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$. Como $\mathcal{C}(A) \subset \mu^{-1}([0,t])$ y $\mathcal{D}(B) \subset \mu^{-1}([0,t])$, obtenemos que $\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{D}(B)$.

Veamos que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ no es conexo. Definimos los conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset A \text{ y } E \cap H \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\mathcal{K} = \{E \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset A \text{ y } E \cap K \neq \emptyset\}.$$

Por las Proposiciones 1.1.6 y 1.1.2, estos conjuntos son cerrados.

Como $H \neq \emptyset$, podemos considerar $x \in H$. Observemos que $\{x\} \subset A \cap B \subset A$ y que $\mu(\{x\}) = 0$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{H}$, así que, $\mathcal{H} \neq \emptyset$. De manera similar se puede verificar que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Tomemos $E \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Entonces $E \subset A$ y $E \cap B \neq \emptyset$. Notemos que $E \cap B \subset A \cap B = H \cup K$. Por tanto, $(E \cap B) \cap H \neq \emptyset$ o $(E \cap B) \cap K \neq \emptyset$. Con esto, obtenemos que $E \cap H \neq \emptyset$ o $E \cap K \neq \emptyset$, así que, $E \in \mathcal{H}$ o $E \in \mathcal{K}$. Hemos probado que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Probemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Sea $E \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Entonces $E \in \mathcal{C}(A)$. Tenemos las siguientes contenciones de conjuntos:

$$E \cap H \subset E \cap (H \cup K) = E \cap A \cap B \subset E \cap B.$$

Si $E \cap H \neq \emptyset$, de modo que $E \cap B \neq \emptyset$, así que $E \in \mathcal{D}(B)$. De manera similar, si $E \cap K \neq \emptyset$, se obtiene que $E \in \mathcal{D}(B)$. Entonces $E \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Con lo cual, obtenemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Así, concluimos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.

Verifiquemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que existe un elemento $E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$. Entonces $E \cap H \neq \emptyset$ y $E \cap K \neq \emptyset$. Así que $E \in \mathcal{D}(H, K)$. Como $E \in \mu^{-1}([0,t])$, sabemos que $\mu(E) \leq t$. Por la elección de t, sabemos que $t < \mu(E_0)$, lo cual nos dice que $\mu(E) < \mu(E_0)$. Esto es una contradicción, ya que $\mu(E_0) = \text{mín}\{\mu(R) : R \in \mathcal{D}(H, K)\}$. Hemos probado que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Por tanto los conjuntos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son una separación de $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, lo que nos dice que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ no es conexo. ■

Corolario 3.2.69. *La propiedad de ser unicoherente es inducida fuertemente por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $\{\mu^{-1}([0,t_n])\}$ una sucesión de bloques de Whitney en $C(X)$ tal que $\mu^{-1}([0,t_n])$ es unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \mu^{-1}([0,t_n]) = t_n$. Notemos que $t_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que X no es unicoherente. Como la propiedad de no ser unicoherente es inducida a los bloques pequeños de Whitney, por el Teorema 3.2.68, existe $s \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}([0,t])$ no es unicoherente para cada $t \in (0,s]$. Por otra parte, por la Observación 3.2.3, $\lim t_n = 0$. Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < s$ para cada $n \geq N$. De manera que $\mu^{-1}([0,t_n])$ no es unicoherente para cada $n \geq N$. Con esto hemos obtenido una contradicción, así que X sí es unicoherente. ■

Corolario 3.2.70. *La propiedad de no ser unicoherente es inducida por los bloques de Whitney para la clase de los continuos localmente conexos.*

Demostración. Sean X localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$ tales que $\mu^{-1}([0,t])$ no es unicoherente. Supongamos que X no es unicoherente. El Teorema 3.2.67 nos dice que, para la clase de los continuos localmente conexos, la propiedad de ser unicoherente es inducida a todos los bloques de Whiney. De manera que $\mu^{-1}([0,t])$ es unicoherente. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto X sí es unicoherente. ■

En este tema faltan cosas por estudiar. Concluiremos esta subsección planteando las siguientes preguntas, de las cuales todavía no tenemos respuesta.

Problema 3.2.71. ¿Las propiedades de ser unicoherente y de no ser unicoherente serán inducidas a todos los bloques de Whitney?

Problema 3.2.72. ¿La propiedad de ser unicoherente será inducida a los bloques pequenõs de Whitney?

Problema 3.2.73. ¿La propiedad de ser unicoherente será inducida débilmente a los bloques de Whitney?

Problema 3.2.74. ¿Las propiedad de ser unicoherente y no ser unicoherente serán inducidas por los bloques de Whitney?

Problema 3.2.75. ¿La propiedad de no ser unicoherente será inducida fuertemente por los bloques de Whitney?

3.2.8. Contractibilidad, retracto absoluto, suavidad por arcos, ∞-conexo y la propiedad del punto fijo

En esta subsección primero veremos algunos resultados que nos ayudarán en la prueba de nuestros teoremas principales. Después analizaremos un ejemplo para demostrar que las siguientes propiedades no son inducidas a los bloques pequeños de Whitney: ser contráctil, ser un retracto absoluto, ser suave por arcos, ser ∞-conexo y la propiedad del punto fijo. Enseguida veremos que la propiedad de ser un retracto absoluto es inducida por los bloques de Whitney.

Definición 3.2.76. Sea Z un espacio métrico compacto. Se dice que Z es un *retracto absoluto* si es retracto de cualquier espacio métrico M que lo contiene. Más precisamente, si $h : Z \to M$ es un encaje, entonces $h(Z)$ es un retracto de M.

El siguiente resultado es el Corolario 2.2 del capítulo IV de [4].

Teorema 3.2.77. *Si X es un continuo que es retracto absoluto y $Y \subset X$ es un retracto de X, entonces Y también es un retracto absoluto.*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 7.1 del capítulo IV de [4].

Teorema 3.2.78. *Cualquier n-celda es un retracto absoluto.*

Corolario 3.2.79. *Cualquier retracto de una n-celda es un retracto absoluto.*

El siguiente lemas es el resultado 8.17 [24].

Lema 3.2.80. *Si X es un continuo localmente conexo, Y es un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es un continuo localmente conexo.*

Lema 3.2.81. *Si un continuo X es retracto absoluto, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.2 de [12], podemos suponer que $X \subset [0,1]^\infty$. Como $[0,1]$ es localmente conexo, el resultado 4.3 del capítulo V de [6] nos dice que $[0,1]^\infty$ también es localmente conexo. Como X es un retracto absoluto, existe una retracción $r : [0,1]^\infty \to X$. Tomando en cuenta el Lema 3.2.80 y el hecho de que $[0,1]^\infty$ es localmente conexo, tenemos que $r([0,1]^\infty) = X$ también es localmente conexo. ■

Definición 3.2.82. Un espacio topológico Z es *contráctil* si existen una función continua $F : Z \times [0,1] \to Z$ y un punto $z_0 \in Z$ tales que, para todo $z \in Z$, se satisfacen las siguientes condiciones: (a) $F(z,0) = z$ y (b) $F(z,1) = z_0$.

Lema 3.2.83. *Sean Y y Z espacios topológicos y $g : Z \to Y$ y $h : Y \to Z$ funciones continuas tales que $h \circ g = id_Z$. Entonces, si Z no es contráctil, se tiene que Y tampoco lo es.*

Demostración. Supongamos que Y es contráctil. Así que, existen una función continua $F : Y \times [0,1] \to Y$ y un elemento $y_0 \in Y$ que satisfacen que $F(y,0) = y$ y $F(y,1) = y_0$ para todo $y \in Y$. Definimos la función $\varphi : Z \times [0,1] \to Z$ como

$$\varphi = h \circ F \circ (g \times id_{[0,1]}).$$

Entonces φ es una función continua. Sea $z \in Z$. Observemos que $\varphi(z,0) = h(F(g(z),0)) = h(g(z)) = z$ y $\varphi(z,1) = h(F(g(z),1)) = h(y_0)$. Esto nos dice que Z es contráctil. ■

Lema 3.2.84. *Cualquier retracto de un espacio contráctil también es contráctil.*

Demostración. Sean Z un espacio topológico contráctil, $Y \subset Z$ y $r : Z \to Y$ una retracción. Como $r \circ id_Z|_Y : Y \to Y$ es la función identidad en Y, podemos aplicar el Lema 3.2.83 a las funciones $id_Z|_Y : Y \to Z$ y $r : Z \to Y$. De esta manera, obtenemos que Y es contráctil. ∎

Lema 3.2.85. *Si X es un continuo que es retracto absoluto, entonces X es contráctil.*

Demostración. Por el Teorema 1.2 de [12], existe una función continua $f : X \to [0,1]^\infty$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. Como X es un retracto absoluto, existe una retracción $r : [0,1]^\infty \to f(X)$. Como $[0,1]^\infty$ es contráctil (por el problema 1 de la sección 1 del capítulo XV de [6]), el Lema 3.2.84 nos dice que X también lo es. ∎

Definición 3.2.86. Sea $p \in X$. Entonces X es *suave por arcos en* p si existe una función continua $\alpha : X \to C(X)$ que satisface:

(a) $\alpha(p) = \{p\}$;

(b) para cada $x \in X \setminus \{p\}$, $\alpha(x)$ es un arco de p a x;

(c) si $x \in \alpha(y)$, entonces $\alpha(x) \subset \alpha(y)$.

Un continuo X es *suave por arcos* si X es suave por arcos en algún punto. (El arco $\alpha(x)$ será denotado por $\overline{px}$.)

Proposición 3.2.87. *Sean X un continuo suave por arcos en el punto p y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Consideremos una función $\alpha : X \to C(X)$ que satisface las condiciones de la Definición 3.2.86. Definimos $L : X \to [0,1]$ como:*

$$L(x) = \mu(\alpha(x)) = \mu(\overline{px}),$$

y $f : X \times [0,1] \to X$ como:

$$f(x,t) = \begin{cases} x, & si \quad L(x) \leq t, \\ el\ único\ punto\ y \in \overline{px}\ tal\ que\ L(y) = t, & si \quad L(x) \geq t. \end{cases}$$

Entonces f tiene las siguientes propiedades:

(a) f es continua;

(b) $f(x, 0) = p$ para todo $x \in X$;

(c) $f(x, 1) = x$ para todo $x \in X$.

En particular, X es contráctil.

Demostración. Cabe destacar que, por la definición de suavidad por arcos y por las propiedades de μ, $L(p) = \mu(\alpha(p)) = \mu(\{p\}) = 0$. Por otra parte, como $0 = L(p) \leq t$ para cada $t \in [0, 1]$, por la definición de f, $f(p, t) = p$.

Veamos que f está bien definida. Tomemos $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Supongamos que $t \leq L(x)$. Así, tenemos las desigualdades $L(p) = 0 \leq t \leq L(x)$. Como $\alpha(x) = \overline{px}$ es un conjunto conexo y $L|_{\overline{px}} : \overline{px} \to [0, 1]$ es una función continua, existe un elemento $y \in \overline{px}$, tal que $L(y) = t$. Vamos a probar que, para cada $x \in X$, $L|_{\overline{px}}$ es inyectiva. Sean $y, z \in \overline{px}$ tales que $L(y) = L(z)$. Así que

$$\mu(\overline{py}) = \mu(\alpha(y)) = L(y) = L(z) = \mu(\alpha(z)) = \mu(\overline{pz}).$$

Como $\overline{py}$ y $\overline{pz}$ son subarcos de $\overline{px}$ que contienen a p, $\overline{py} \subset \overline{pz}$ o $\overline{pz} \subset \overline{py}$. Suponiendo que $\overline{py} \subsetneq \overline{pz}$, tendríamos que $\mu(\overline{py}) < \mu(\overline{pz})$, lo cual no puede ser. De manera similar se obtiene que $\overline{pz} \subsetneq \overline{py}$ tampoco puede suceder. Por lo tanto $\overline{py} = \overline{pz}$, así que $y = z$. Esto prueba que solo existe un punto $y \in \overline{px}$ tal que $L(y) = t$.

En el caso en que $L(x) = t$, observamos que x es el único punto de $\overline{px}$ tal que $L(x) = t$. Entonces $f(x, t) = x$. Así que las dos partes de la definición de f coinciden en el conjunto $\{(x, t) \in X \times [0, 1] : L(x) = t\}$. Con todo esto hemos visto que la función f está bien definida.

(a) Verifiquemos que f es una función continua. Como f está definida para dos subconjuntos cerrados de $X \times [0, 1]$ tales que en su intersección la definición de ésta coincide, sólo tenemos que ver que f es continua en cada uno de estos cerrados. Notemos que f, definida en el conjunto

$$\{(x,t) \in X \times [0,1] : L(x) \leq t\},$$

es la proyección a la primera coordenada, la cual es continua. Veamos que f es continua en el conjunto

$$\{(x,t) \in X \times [0,1] : L(x) \geq t\}.$$

Vamos a usar la Proposición 1.5.7. Sea $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $X \times [0,1]$ que converge a (x,t) y tal que $L(x_n) \geq t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\lim f(x_n,t_n) = q$, tenemos que probar que $q = f(x,t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $q_n = f(x_n,t_n)$. De modo que $q_n \in \alpha(x_n)$ y $L(q_n) = t_n$. Entonces $q \in \lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$ y $L(q) = \lim(L(q_n)) = \lim t_n = t$. Así que, $f(x,t) = q$. Con esto concluimos que f es una función continua.

(b) Sea $x \in X$. Notemos que $L(x) = \mu(\overline{px}) \geq 0$ y $L(p) = \mu(\{p\}) = 0$, entonces por la definición de f obtenemos $f(x,0) = p$.

(c) Tomemos $x \in X$. Observemos que $L(x) = \mu(\overline{px}) \leq 1$, lo cual implica (por la definición de f) que $f(x,1) = x$. ■

Definición 3.2.88. Se dice que X *tiene la propiedad del punto fijo* si para toda función continua $f : X \to X$, existe un punto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Lema 3.2.89. *Sean Y y Z continuos. Si Z tiene la propiedad del punto fijo y Y es retracto de Z, entonces Y tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Tomemos una función continua $f : Y \to Y$. Como Y es retracto de Z, existe una retracción $r : Z \to Y$. Sea $i : Y \to Z$ la inclusión. Consideremos la función continua $g : Z \to Z$ dada por $g(z) = i \circ f \circ r(z)$. Como Z tiene la propiedad del punto fijo, existe un elemento $p \in Z$ tal que $g(p) = p$. Notemos que $p = g(p) = i \circ f \circ r(p) = f \circ r(p) \in Y$. Esto dice que $p \in Y$, por lo tanto, $r(p) = p$. De modo que $p = f \circ r(p) = f(p)$. Así, hemos visto que existe el elemento $p \in Y$ que satisface $f(p) = p$, esto termina la prueba de que Y tiene la propiedad del punto fijo. ■

El siguiente resultado es conocido y su prueba se puede encontrar en la página 341 de [6].

Teorema 3.2.90. *(Teorema del punto fijo de Brouwer.) Cualquier n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Corolario 3.2.91. *Cualquier retracto de una n-celda tiene la propiedad del punto fijo.*

Definición 3.2.92. Sea $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la i esfera está dada por:

$$S^i = \Big\{(x_1, \ldots, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^{i+1} : \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{i+1}^2} = 1\Big\}.$$

Un espacio métrico Y es *n-conexo* si, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se tiene que cada función continua $f : S^i \to Y$ es homotópica a una función constante. Un espacio es *∞-conexo* si éste es n-conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.2.93. *Si X es un continuo contráctil, entonces X es ∞-conexo.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $f : S^i \to X$ una función continua. Probemos que f es homotópica a una función constante. Como X es contráctil, existen una función continua $F : X \times [0, 1] \to X$ y un elemento $x_0 \in X$ tales que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = x_0$ para todo elemento $x \in X$. Definimos la función $G : S^i \times [0, 1] \to X$ como

$$G(y, t) = F \circ (f \times id)(y, t),$$

en donde $id : [0, 1] \to [0, 1]$ es la función identidad. Notemos que $G(y, 0) = F(f(y), 0) = f(y)$ y $G(y, 1) = F(f(y), 1) = x_0$, así que, f es homotópica a la función constante $h : S^i \to X$ dada por $h(y) = x_0$. De este modo hemos probado que X es ∞-conexo. ■

Teorema 3.2.94. *(M. E. Aguilera) Las siguientes propiedades no son inducidas a los bloques pequeños de Whitney:*
(a) ser contráctil,
(b) ser un retracto absoluto,
(c) ser suave por arcos,
(d) la propiedad del punto fijo y
(e) ser ∞-conexo.

Demostración. Veremos que existen un continuo X, una función de Whitney μ para $C(X)$ y sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos que converge a 0 tales que $\mu^{-1}([0, s_n])$ que no tiene ninguna de las propiedades (a), (b), (c), (d) y (e), para ninguna $n \in \mathbb{N}$, pero que X sí satisface todas las propiedades (a), (b), (c), (d) y (e). Supongamos que D y d son las métricas usuales para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sean $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números del intervalo $(0, 1)$ tal que $\lim r_n = 0$ y $z_0 \in [0, 1]$. Definimos, los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

$$Q_n = \{\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta) + (\tfrac{1}{2^n}, 0) : 0 \leq \theta \leq 1\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$A_n = Q_n \times [0, r_n], \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$A_n(z) = Q_n \times \{z\}, \text{ en donde } z \in [0, r_n], \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

$$X = (\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup ([0, 1] \times [-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}] \times \{0\}) \text{ y}$$

$$P = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n(0) \cup A_n(r_n)).$$

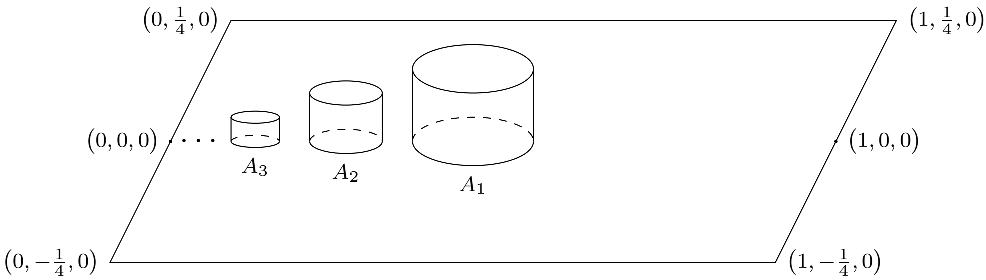

Figura 14: X

Notemos que $[0,1] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times \{0\}$ y A_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, son conexos. Como $A_n \cap ([0,1] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \times \{0\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, X es un conexo. Como $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^3}(X) = X$, X es un continuo. Ver Figura 14.

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ la función de Whitney definida en el Corolario 2.1.6 para el conjunto P. Supongamos que $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\pi_3 : X \to \mathbb{R}$ y $\pi_{1,2} : X \to \mathbb{R}^2$ son las proyecciones naturales a la primera, tercera y primeras dos coordenadas, respectivamente.

Afirmación 1. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Definimos $s_n = \mu(A_n(0))$. Entonces $\mu(A_n(0)) = \mu(A_n(r_n)) = s_n > 0$.

Destaquemos que $A_n(0)$ y $A_n(r_n)$ son isométricos, no degenerados y $A_n(0)$, $A_n(r_n) \subset P$. De modo que, por la Propiedad 2 del Corolario 2.1.6, $\mu(A_n(0)) = \mu(A_n(r_n)) > 0$, lo que buscábamos probar.

Afirmación 2. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto:

$$\mathcal{A}_n = \{A \in C(A_n) : \pi_{1,2}(A) = Q_n\}.$$

Si $A \in \mathcal{A}_n \setminus \{A_n(0), A_n(r_n)\}$, entonces $\mu(A) > s_n$.

Definimos la función $f : A \to A_n(0)$ como $f(u,s) = (u,0)$. Notemos que f es suprayectiva ya que $\pi_{1,2}(A) = Q_n$. Por otra parte, tenemos que

$$D(f(u,s), f(v,t)) = D((u,0),(v,0)) = d(u,v) \leq D((u,s),(v,t)),$$

para cada $(u,s),(v,t) \in A$. Observemos que $A \not\subset P$, $A_n(0) \subset P$ y $A \notin F_1(X)$. De manera que, la Propiedad 3 del Corolario 2.1.6 nos dice que $\mu(A_n(0)) = s_n < \mu(A)$.

Afirmación 3. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0,1]$ y $z \in (-1,1)$. Entonces existe un arco $J(\theta,z)$ contenido en $A_n(\frac{r_n(z+1)}{2})$ tal que $\mu(J(\theta,z)) = s_n$ y su punto medio es $\left(\frac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(2\pi i\theta), \frac{r_n(z+1)}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^n}, 0, 0\right)$.

Como $z \in (-1,1)$,

$$A_n(\tfrac{r_n(z+1)}{2}) \in \mathcal{A}_n \setminus \{A_n(0), A_n(r_n)\}.$$

Por la Afirmación 2 sabemos que $\mu(A_n(\frac{r_n(z+1)}{2})) > s_n$. Consideremos el arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(A_n(\frac{r_n(z+1)}{2}))$ dado por

$$\alpha(x) = \{\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\sigma) + (\tfrac{1}{2^n}, 0) : \theta - \tfrac{x}{2} \leq \sigma \leq \theta + \tfrac{x}{2}\} \times \{\tfrac{r_n(z+1)}{2}\}.$$

Notemos que,

$$\mu(\alpha(0)) = \mu(\{(\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta) + (\tfrac{1}{2^n}, 0), \tfrac{r_n(z+1)}{2})\}) = 0$$

$$< s_n < \mu\big(A_n\big(\tfrac{r_n(z+1)}{2}\big)\big) = \mu(\alpha(1)).$$

De modo que, aplicando el Lema 2.2.9, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha(x_0) \in \mu^{-1}(s_n)$. Hagamos $J(\theta, z) = \alpha(x_0)$. Observemos que $J(\theta, z)$ es un arco ya que $x_0 \in (0,1)$ y, además, tiene como punto medio a $\big(\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta), \frac{r_n(z+1)}{2}\big) + \big(\frac{1}{2^n}, 0, 0\big)$.

Afirmación 4. Consideramos a S^2 con la siguiente descripción:

$$S^2 = \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \cup \{((1-c^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\vartheta), c) : 0 \leq \vartheta \leq 1 \text{ y } -1 < c < 1\}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $g : S^2 \to \mu^{-1}([0, s_n])$ como:

$$g(p) = \begin{cases} A_n(0), & \text{si } \ p = (0,0,-1); \\ A_n(r_n), & \text{si } \ p = (0,0,1); \\ J(\vartheta, c), & \text{si } \ p \notin \{(0,0,-1), (0,0,1)\}. \end{cases}$$

Entonces g es una función bien definida y continua.

Por las Afirmaciones 1 y 3, $\mu(A_n(0)) = \mu(A_n(r_n)) = \mu(J(\vartheta, c)) = s_n$, donde $\vartheta \in [0,1]$ y $c \in (-1,1)$ son tales que $p = ((1-c^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\vartheta), c)$, esto nos dice que g está bien definida. Tomemos $u \in S^2$ y $\varepsilon > 0$. A continuación daremos números que nos auxiliarán en la prueba de la continuidad de g.

(a) Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\eta > 0$ tal que, si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Por la continuidad de la función μ, existe un número $\lambda > 0$ tal que, si $A, B \in C(X)$ y $H(A, B) < \lambda$, entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \eta$. Elijamos $\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$.

Caso (i). $u \notin \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$.

En este caso, existen $\theta \in [0,1]$ y $z \in (-1,1)$ tales que $u = ((1-z^2)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta), z)$. Observemos que la función $\tau : S^2 \setminus \{(1,0,0),(-1,0,0)\} \to A_n$ dada por:

$$\tau(p) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(2\pi i\vartheta), \tfrac{r_n(c+1)}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0),$$

está bien definida y es una función continua, ya que es composición de funciones continuas:

$$\tau(p) = \left(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \tfrac{\pi_{1,2}(p)}{(1-(\pi_3(p))^2)^{\frac{1}{2}}}, \tfrac{r_n(\pi_3(p)+1)}{2}\right) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0).$$

(c) Por la continuidad de la función τ, existe un número $\delta > 0$ tal que, si p satisface que $D(u,p) < \delta$, entonces $D(\tau(u), \tau(p)) < \frac{\lambda}{2}$.

(d) Elijamos el número δ de tal manera que

$$B_D(\delta, u) \cap \{(0,0,1),(0,0,-1)\} = \emptyset.$$

Sea $v \in B_D(\delta,u) \cap S^2$. Como $u, v \notin \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$, $g(u) = J(\theta, z)$ y $g(v) = J(\varphi, w)$, donde $\varphi \in [0,1]$ y $w \in (-1,1)$ son tales que $v = ((1-w^2)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\varphi), w)$. Notemos que

$$\tau(v) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(2\pi i\varphi), \tfrac{r_n(w+1)}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0).$$

Como $D(u,v) < \delta$, por (c), $D(\tau(u), \tau(v)) < \frac{\lambda}{2}$. Notemos que

$$d(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(2\pi i\theta), \tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(2\pi i\varphi)) \leq D(\tau(u), \tau(v)) < \tfrac{\lambda}{2} \text{ y}$$

$$|\tfrac{r_n(w-z)}{2}| \leq D(\tau(u), \tau(v)) < \tfrac{\lambda}{2}.$$

Definimos las funciónes $\zeta_1 : A_n \to A_n$ y $\zeta_2 : A_n \to Q_n \times [-2,2]$ como

$$\zeta_1(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i(a-\theta+\varphi), c) \text{ y}$$

$$\zeta_2(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c + \tfrac{r_n(w-z)}{2}).$$

Notemos que éstas son una rotación y una traslación. Observemos que, para todo $(\frac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c) \in A_n$, se cumple que

$$D((\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c), \zeta_1(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c))$$

$$= D((\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\theta), c), \zeta_1(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\theta), c))$$

$$= D((\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\theta), c), (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\varphi), c))$$

$$= d(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\theta), \tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(i\varphi)) < \tfrac{\lambda}{2}$$

y

$$D((\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c), \zeta_2(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c))$$

$$= D((\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c), (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c + \tfrac{r_n(w-z)}{2}))$$

$$= \tfrac{r_n(w-z)}{2} < \tfrac{\lambda}{2}.$$

Sea $A = C(\zeta_2) \circ C(\zeta_1)(J(\theta, z))$. Luego, por el Lema 1.2.3,

$$H(J(\theta, z), C(\zeta_1)(J(\theta, z))) < \tfrac{\lambda}{2} \text{ y}$$

$$H(C(\zeta_1)(J(\theta, z)), A)) < \tfrac{\lambda}{2}.$$

Utilizando la desigualdad triangular, resulta que $H(A, J(\theta, z)) < \lambda$. Aplicando (b), tenemos que $|\mu(A) - \mu(J(\theta, z))| < \eta$, así que $|\mu(A) - s_n| < \eta$. Notemos que A es un arco contenido en $A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$ con punto medio $\tau(v) = (\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \frac{w+1}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$.

Por la definición de g, $g(v) = J(\varphi, w)$ es un arco contenido en $A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$ tal que su punto medio es $(\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \frac{z+1}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$ y $\mu(J(\varphi, w)) = s_n$. De modo que se satisface $A \subset J(\varphi, w)$ o $J(\varphi, w) \subset A$. Como $|\mu(A) - \mu(J(\varphi, w))| = |\mu(A) - s_n| < \eta$, aplicando (a), tenemos que $H(A, J(\varphi, w)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, utilizando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$H(g(u), g(v)) = H(J(\theta, z), J(\varphi, w))$$

$$\leq H(J(\theta, z), A) + H(A, J(\varphi, w))$$

$$< \lambda + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Con esto queda probado el caso (i).

Caso (ii). $u = (0,0,-1)$.

En este caso, consideremos $v \notin \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ tal que $v \in B_D(\lambda, u) \cap S^2$. Entonces $v = ((1-w^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\varphi), w)$ para algunos valores $\varphi \in [0,1]$ y $w \in (-1,1)$. Notemos que $w+1 = |w-(-1)| \leq D(u,v) < \lambda$. De modo que $\frac{r_n(w+1)}{2} < r_n \frac{\lambda}{2} < \lambda$. Definimos la función $\zeta : A_n \to Q_n \times [-2,2]$ como

$$\zeta(\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \cdot \exp(ia), c + \tfrac{r_n(w+1)}{2}).$$

Observemos que $C(\zeta)(A_n(0)) = A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$. Por el Lema 1.2.3, sabemos que $H(A_n(0), A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})) < \lambda$ y, por (b),

$$|\mu(A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2})) - \mu(A_n(0))| = |\mu(A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2})) - s_n| < \eta.$$

Por otra parte, tenemos que $J(\varphi, w)$ es un arco contenido en $A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$ tal que su punto medio es $(\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \frac{r_n(w+1)}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$ y $\mu(J(\varphi, w)) = s_n$. De manera que $J(\varphi, w) \subset A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$ y

$$\mu(A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2})) - \mu(J(\varphi, w))) = \mu(A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2})) - s_n < \eta.$$

Luego, aplicando (a), obtenemos que $H(A_n(\frac{r_n(w+1)}{2}), J(\varphi, w)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente, aplicando la desigualdad triangular, tenemos que

$$H(g(u), g(v)) = H(A_n(0), J(\varphi, w))$$

$$\leq H(A_n(0), A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2})) + H(A_n(\tfrac{r_n(w+1)}{2}), J(\varphi, w))$$

$$< \lambda + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Con esto concluimos el caso (ii).

Caso (iii). $u = (0,0,1)$

La continuidad para este caso se prueba de manera similar al caso (ii). Con esto queda probada la Afirmación 4.

Afirmación 5. La función g es inyectiva.

Sean $u, v \in S^2$ tales que $u \neq v$.

Caso (i). $u \in \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$.

Supongamos que $u = (0,0,1)$. Entonces tenemos $g(u) = A_n(r_n)$. Si $v = (0,0,-1)$, entonces $g(v) = A_n(0)$. Si $v \neq (0,0,-1)$, existen valores $\varphi \in [0,1]$ y $w \in (-1,1)$ tales que $v = ((1-w^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\varphi), w)$. Por la definición de g, tenemos $g(v) \subset A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$. Como $w < 1$, $\frac{r_n(w+1)}{2} < r_n$. Lo que nos dice que $g(u) \neq g(v)$.

Caso (ii). $u = ((1-z^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\theta), z)$ y $v = ((1-w^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\varphi), w)$ para algunos $\theta, \varphi \in [0,1]$ y $z, w \in (-1,1)$.

Si $z \neq w$, tendríamos que $\frac{r_n(z+1)}{2} \neq \frac{r_n(w+1)}{2}$. Por lo tanto, $g(u) \neq g(v)$ ya que $g(u) \subset A_n(\frac{r_n(z+1)}{2})$ y $g(v) \subset A_n(\frac{r_n(w+1)}{2})$.

Para el caso en que $z = w$, tenemos que $\exp(2\pi i\theta) \neq \exp(2\pi i\varphi)$ y, por tanto,

$$(\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta), \tfrac{z+1}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0) \neq (\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \tfrac{w+1}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0).$$

Por las definiciones de los arcos $J(\theta, z)$ y $J(\varphi, w)$, sabemos que estos arcos tienen punto medio $(\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta), \frac{z+1}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$ y $(\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \frac{w+1}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$, respectivamente. Si tuviéramos que $J(\theta, z) = J(\varphi, w)$ tendríamos que sus puntos medios serían iguales, así que,

$$(\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta), \tfrac{z+1}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0) = (\tfrac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\varphi), \tfrac{w+1}{2}) + (\tfrac{1}{2^n}, 0, 0),$$

lo cual es una contradicción. Con esto, concluimos la inyectividad de la función g.

Afirmación 6. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la función $h : \mu^{-1}([0, s_n]) \to S^2$ como

$$h(K) = \begin{cases} (0,0,1), & \text{si } K \subset A_n(r_n); \\ \left(\frac{2}{r_n}(cr_n - c^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\vartheta), \frac{2c}{r_n} - 1\right), & \text{si } K \subset Q_n \times (0, r_n] \text{ y } K \not\subset A_n(r_n); \\ (0,0,-1), & \text{si } K \not\subset Q_n \times (0, r_n]. \end{cases}$$

En donde, si $K \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $K \not\subset A_n(r_n)$, los valores c y ϑ son tales que $\text{mín} \circ C(\pi_3)(K) = c \in (0, r_n)$ y $m \circ C(\pi_{1,2})(K) = \frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\vartheta) + (\frac{1}{2^n}, 0)$. En donde $\text{mín} : C([0,1]) \to [0,1]$ es la función definida en la Proposición 1.2.7 y $m : C(S) \setminus \{S\} \to S$ es la función punto medio, las cuales son continuas. Aseguramos que h está bien definida y es continua.

Veamos que h está bien definida. Para el caso en que $K \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $K \not\subset A_n(r_n)$, como $c \in (0, r_n)$, tenemos que $\frac{2c}{r_n} - 1 \in (-1, 1)$. Por otro lado, tenemos que

$$1 - (\tfrac{2c}{r_n} - 1)^2 = 1 - \tfrac{4c^2}{r_n^2} + \tfrac{4c}{r_n} - 1 = -\tfrac{4c^2}{r_n^2} + \tfrac{4c}{r_n},$$

por lo tanto,

$$(1 - (\tfrac{2c}{r_n} - 1)^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{r_n}(r_n c - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De acuerdo a la descripción que dimos de S^2, tenemos que

$$\left(\tfrac{2}{r_n}(r_n c - c^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\vartheta), \tfrac{2c}{r_n} - 1\right) \in S^2.$$

Con esto concluimos que h está bien definida.

Tomemos $E \in \mu^{-1}([0, s_n])$ y $\varepsilon \in (0, 1)$. Tenemos que las funciones $C(\pi_3) : C(X) \to C([0,1])$, $C(\pi_{1,2}) : C(X) \to C([0,1] \times [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}])$, $\text{mín} : C([0,1]) \to [0,1]$ y $m : C(S) \setminus \{S\} \to S$ son funciones continuas. Probaremos la continuidad de h analizando varios casos.

Caso i. $E \subset A_n(r_n)$.

Como la composición de las funciones $\text{mín} \circ C(\pi_3) : C(X) \to [0,1]$ es una función continua, existe un número $\delta > 0$ tal que si $F \in \mu^{-1}([0, s_n])$ satisface que $H(E, F) < \delta$, entonces

$$|\, \text{mín} \circ C(\pi_3)(E) - \text{mín} \circ C(\pi_3)(F)| < \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8}.$$

Elijamos δ de tal manera que también cumpla que $\delta < r_n$.

Subcaso i.a. $F \subset A_n(r_n)$.

Por la definición de h, $h(E) = (0, 0, 1) = h(F)$. Luego, $D(h(E), h(F)) = 0 < \varepsilon$.

Subcaso i.b. $F \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $F \not\subset A_n(r_n)$.

Sea $z = \text{mín} \circ C(\pi_3)(F)$. Notemos que $\text{mín} \circ C(\pi_3)(E) = r_n$ y que $z \in (0, r_n) \subset (0, 1)$. Entonces

$$r_n - z = |\, \text{mín} \circ C(\pi_3)(E) - \text{mín} \circ C(\pi_3)(F)| < \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8}.$$

Observemos que

$$\tfrac{4z}{r_n^2}(r_n - z) < \tfrac{4z}{r_n^2} \cdot \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8} = \tfrac{z\varepsilon^2}{2} < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Por otra parte, tenemos

$$\Big(1 - \big(\tfrac{2z}{r_n} - 1\big)\Big)^2 = \Big(\tfrac{2(r_n - z)}{r_n}\Big)^2 < \Big(\tfrac{2}{r_n} \cdot \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8}\Big)^2 = \Big(\tfrac{\varepsilon^2 r_n}{4}\Big)^2 < \Big(\tfrac{\varepsilon^2}{4}\Big)^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D(h(E), h(F))^2 &= D\Big((0, 0, 1), \Big(\tfrac{2}{r_n}(zr_n - z^2)^{\frac{1}{2}} \exp(\pi i \theta), \tfrac{2z}{r_n} - 1\Big)\Big)^2 \\ &= \tfrac{4}{r_n^2}(zr_n - z^2) + \big(1 - \big(\tfrac{2z}{r_n} - 1\big)\big)^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2, \end{aligned}$$

de modo que, $D(h(E), h(F)) < \varepsilon$.

Subcaso i.c. $F \not\subset Q_n \times (0, r_n]$.

Veamos que, por la elección del número δ, este caso no se puede dar. Como $H(E, F) < \delta < r_n$, la Proposición 1.0.10 nos dice que $F \subset N(r_n, E)$. Por otra parte, como $E \subset A_n(r_n)$,

$$N(r_n, E) \subset N(r_n, A_n(r_n)) = Q_n \times (0, r_n].$$

Por tanto, $F \subset Q_n \times (0, r_n]$, lo cual es una contradicción, porque $F \not\subset Q_n \times (0, r_n]$. De manera que este caso no se puede dar. Con esto terminamos la prueba del primer caso.

Caso ii. $E \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $E \not\subset A_n(r_n)$.

Como $Q_n \times (0, r_n]$ es abierto en X y $A_n(r_n)$ es cerrado en X, las Proposiciones 1.1.1 y 1.1.6 nos llevan a que

$$\{K \in \mu^{-1}([0, s_n]) : K \subset Q_n \times (0, r_n]\}$$

es abierto y

$$\{K \in \mu^{-1}([0, s_n]) : K \subset A_n(r_n)\}$$

es cerrado, de manera que

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{K \in \mu^{-1}([0, s_n]) : K \subset Q_n \times (0, r_n] \text{ y } K \not\subset A_n(r_n)\} \\ &= \{K \in \mu^{-1}([0, s_n]) : K \subset Q_n \times (0, r_n]\} \cap \\ &\quad \big(\mu^{-1}([0, s_n]) \setminus \{K \in \mu^{-1}([0, s_n]) : K \subset A_n(r_n)\}\big)\end{aligned}$$

es abierto. Por otra parte, como h definida en $\mathcal{K}$ es composición de funciones continuas, ésta es continua. Notemos que $E \in \mathcal{K}$. Así que existe $\delta > 0$ que satisface lo siguiente:

(a) $B_H(\delta, E) \cap \mu^{-1}([0, s_n]) \subset \mathcal{K}$ y

(b) si $F \in B_H(\delta, E) \cap \mu^{-1}([0, s_n])$ entonces $D(h(E), h(F)) < \varepsilon$.

Por lo tanto, también h es continua para este caso.

Caso iii. $E \not\subset Q_n \times (0, r_n]$.

Como $\text{mín} \circ C(\pi_3) : C(X) \to [0, 1]$ es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que si $F \in \mu^{-1}([0, s_n])$ satisface que $H(E, F) < \delta$, luego

$$|\, \text{mín} \circ C(\pi_3)(E) - \text{mín} \circ C(\pi_3)(F)| < \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8}.$$

Elijamos δ de tal manera que también cumpla que $\delta < \text{mín}\{r_n, \frac{1}{2^{n+3}}\}$.

Subcaso iii.a. $F \subset A_n(r_n)$.

De manera similar al subcaso i.c, se prueba que este subcaso no se puede dar.

Subcaso iii.b. $F \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $F \not\subset A_n(r_n)$.

Sea $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la proyección a la primera coordenada. Consideremos un elemento $u \in N(\frac{1}{2^{n+3}}, Q_n \times [0, r_n])$. Entonces

$$\tfrac{1}{2^n} - \tfrac{1}{2^{n+2}} - \tfrac{1}{2^{n+3}} < \pi_1(u) < \tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^{n+2}} + \tfrac{1}{2^{n+3}},$$

así que $\pi_1(u) \in \left(\tfrac{5}{2^{n+3}}, \tfrac{11}{2^{n+3}}\right)$.

Consideremos $m \neq n$. Veremos que $u \notin A_m$. Supongamos que $u \in A_m$. Entonces

$$\tfrac{1}{2^m} - \tfrac{1}{2^{m+2}} \leq \pi_1(u) \leq \tfrac{1}{2^m} + \tfrac{1}{2^{m+2}},$$

así que $\pi_1(u) \in \left[\tfrac{3}{2^{m+2}}, \tfrac{5}{2^{m+2}}\right]$. En el caso en que $n < m$, tenemos $2^{n+3} \leq 2^{m+2}$ y, por tanto,

$$\pi_1(u) \leq \tfrac{5}{2^{m+2}} \leq \tfrac{5}{2^{n+3}} < \pi_1(u),$$

lo cual no puede ser. Si suponemos que $m < n$, tenemos $2^{m+2} \leq 2^{n+1}$, de modo que $\tfrac{12}{2^{n+3}} = \tfrac{3}{2^{n+1}} \leq \tfrac{3}{2^{m+2}}$ y, por lo tanto,

$$\pi_1(u) < \tfrac{11}{2^{n+3}} < \tfrac{3}{2^{m+2}} \leq \pi_1(u),$$

lo cual es una contradicción. Lo cual nos lleva a que $n = m$. De manera que $u \notin \bigcup_{m \neq n} A_m$.

Así, obtenemos que $u \in A_n \cup ([0,1] \times [-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}] \times \{0\})$, así que,

$$N(\tfrac{1}{2^{n+3}}, Q_n \times [0, r_n] \subset A_n \cup ([0,1] \times [-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}] \times \{0\}).$$

Tenemos $H(E,F) < \delta < \tfrac{1}{2^{n+3}}$. Entonces, por la Proposición 1.0.10, $E \subset N(\tfrac{1}{2^{n+3}}, F)$. Como $F \subset Q_n \times (0, r_n]$,

$$N(\tfrac{1}{2^{n+3}}, F) \subset N(\tfrac{1}{2^{n+3}}, Q_n \times [0, r_n]).$$

De modo que,

$$E \subset A_n \cup ([0,1] \times [-\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}] \times \{0\}).$$

Como $E \not\subset Q_n \times (0, r_n]$, existe un elemento $b \in E$ tal que $b \notin Q_n \times (0, r_n]$. Entonces $\pi_3(b) = 0$. Así, obtenemos que $\text{mín} \circ C(\pi_3)(E) = 0$.

Sea $\text{mín} \circ C(\pi_3)(F) = z$. Por lo tanto, el hecho de que $H(E,F) < \delta$ implica

$$z - 0 = \text{mín} \circ C(\pi_3)(F) - \text{mín} \circ C(\pi_3)(E) < \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8}.$$

Lo cual nos lleva a que

$$\tfrac{2z}{r_n} - 1 - (-1) = z\tfrac{2}{r_n} < \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8} \cdot \tfrac{2}{r_n} < \tfrac{\varepsilon^2}{2},$$

ya que $\frac{r_n}{2} < 1$. Teniendo en cuenta que $r_n, z \in (0,1)$, sabemos que $r_n - z < 1$. Así, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\tfrac{4}{r_n^2} z(r_n - z) < \tfrac{4}{r_n^2} \cdot \tfrac{\varepsilon^2 r_n^2}{8} \cdot 1 = \tfrac{\varepsilon^2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D^2(h(E), h(F)) &= D^2\Big((0,0,-1), \big(\tfrac{2}{r_n}(zr_n - z^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\theta), \tfrac{2z}{r_n} - 1\big)\Big) \\ &= \tfrac{4}{r_n^2}(zr_n - z^2) + \big(\tfrac{2z}{r_n} - 1 - (-1)\big)^2 < \tfrac{\varepsilon^2}{2} + \tfrac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $D(h(E), h(F)) < \varepsilon$.

Subcaso iii.c. $F \not\subset Q_n \times (0, r_n]$.

Utilizando la definición de h, tenemos que $h(E) = (0,0,-1) = h(F)$. Así que, $D(h(E), h(F)) = 0 < \varepsilon$. Con esto, concluimos la prueba de continuidad de h.

Afirmación 7. Las funciones h y g satisfacen que $h \circ g = id_{S^2}$.

De las definiciones de las funciones h y g es claro que $h(g(0,0,1)) = (0,0,1)$ y $h(g(0,0,-1)) = (0,0,-1)$. Tomemos $u \in S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$. Entonces $u = ((1-z^2)^{\frac{1}{2}} \exp(2\pi i\theta), z)$ para algunos valores $z \in (-1,1)$ y $\theta \in [0,1]$. Por la definición de g, sabemos que $g(u) = J(\theta, z)$ es un arco contenido en $A_n(\frac{r_n}{2}(z+1))$ tal que $m(J(\theta,z)) = (\frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta), \frac{r_n(z+1)}{2}) + (\frac{1}{2^n}, 0, 0)$ y $\mu(J(\theta, z)) = s_n$.

Como $z \in (-1,1)$, $\frac{r_n(z+1)}{2} \in (0, r_n)$. Así que, $J(\theta,z) \subset Q_n \times (0, r_n]$ y $J(\theta,z) \not\subset A_n(r_n)$. Observemos que $\min \circ C(\pi_3)(J(\theta,z)) = \frac{r_n(z+1)}{2}$. Por lo tanto,

$$\pi_3(h(g(u))) = \tfrac{2}{r_n} \cdot \tfrac{r_n(z+1)}{2} - 1 = z.$$

Por otro lado tenemos que $m \circ C(\pi_{1,2})(J(\theta,z)) = \frac{1}{2^{n+2}} \exp(2\pi i\theta) + (\frac{1}{2^n}, 0)$, de manera que

$$\begin{aligned}\pi_{1,2}(h(g(u))) &= \tfrac{2}{r_n}\left(\tfrac{r_n(z+1)}{2}\cdot r_n - \left(\tfrac{r_n(z+1)}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta)\\ &= \tfrac{2}{r_n}\cdot r_n\left(\tfrac{1+z}{2}(1-\tfrac{1+z}{2})\right)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta)\\ &= 2(\tfrac{1+z}{2}\cdot\tfrac{1-z}{2})^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta)\\ &= (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta).\end{aligned}$$

Entonces

$$h(g(u)) = h(J(\theta,z)) = ((1-z^2)^{\frac{1}{2}}\exp(2\pi i\theta), z) = u.$$

Con esto terminamos la prueba de que $h\circ g = id_{S^2}$.

Afirmación 8. El bloque $\mu^{-1}([0,s_n])$ no es contráctil.

Por la afirmación anterior, sabemos que las funciones $g : S^2 \to \mu^{-1}([0,s_n])$ y $h : \mu^{-1}([0,s_n]) \to S^2$ cumplen que $h\circ g = id_{S^2}$. Como S^2 no es contráctil (por los Corolarios 2.11 y 2.14 de [10]), podemos aplicar el Lema 3.2.83 para obtener que $\mu^{-1}([0,s_n])$ no es contráctil.

Afirmación 9. El bloque $\mu^{-1}([0,s_n])$ no es un retracto absoluto.

Este resultado se obtiene aplicando la afirmación anterior y el Lema 3.2.85 que nos dice que un continuo que es retracto absoluto es contráctil.

Afirmación 10. El bloque $\mu^{-1}([0,s_n])$ no es suave por arcos.

Si suponemos, por el contrario, que $\mu^{-1}([0,s_n])$ es suave por arcos, la Proposición 3.2.87 nos diría que $\mu^{-1}([0,s_n])$ es contráctil, lo cual es una contradicción a la Afirmación 8. Así queda probada esta afirmación.

Afirmación 11. El bloque $\mu^{-1}([0,s_n])$ no tiene la propiedad del punto fijo.

Las Afirmaciones 4 y 5, que nos dicen que g es continua e inyectiva, implican que $g(S^2)$ es homeomorfo a S^2. Como S^2 no tiene la propiedad del punto fijo, existe una función continua $f : g(S^2) \to g(S^2)$ tal que $f(A) \neq A$ para todo $A \in g(S^2)$. Definimos la función $\varphi : \mu^{-1}([0,s_n]) \to \mu^{-1}([0,s_n])$ como

$$\varphi(A) = f \circ g \circ h(A).$$

Observamos que φ es continua. Verifiquemos que φ no tiene puntos fijos. Consideremos un elemento $A \in \mu^{-1}([0, s_n])$.

Caso (i). $A \notin g(S^2)$.

Notemos que $\varphi(B) = f(g(h(B))) \in g(S^2)$, para cada $B \in \mu^{-1}([0, s_n])$, ya que $f : g(S^2) \to g(S^2)$. Por lo tanto, $A \neq \varphi(A)$.

Caso (ii). $A \in g(S^2)$.

En este caso, existe un elemento $u \in S^2$ tal que $A = g(u)$. Teniendo en cuenta la Afirmación 7, que nos dice que $h \circ g = id_{S^2}$, obtenemos que

$$\varphi(A) = f(g(h(A))) = f(g(h(g(u)))) = f(g(u)) = f(A).$$

Como f no tiene puntos fijos, $\varphi(A) = f(A) \neq A$. De esta manera, concluimos que φ no tiene puntos fijos.

Afirmación 12. El bloque $\mu^{-1}([0, s_n])$ no es m-conexo para ningún número $m \geq 2$.

Supongamos, por el contrario, que $\mu^{-1}([0, s_n])$ es m-conexo para alguna $m_0 \geq 2$. Como $2 \in \{0, 1, \ldots, m_0\}$, por definición, cualquier función continua de S^2 en $\mu^{-1}([0, s_n])$ es homotópica a una función constante. Consideremos a $g : S^2 \to \mu^{-1}([0, s_n])$. Entonces existen $G : S^2 \times [0, 1] \to \mu^{-1}([0, s_n])$ y un elemento $A_0 \in \mu^{-1}([0, s_n])$ tales que $G(y, 0) = g(y)$ y $g(y, 1) = A_0$. La Afirmación 7 nos dice que $h \circ g = id_{S^2}$, en donde $id_{S^2} : S^2 \to S^2$ es la función identidad. Definimos la función $F : S^2 \times [0, 1] \to S^2$ como

$$F(y, t) = h \circ G(y, t).$$

Observamos que $F(y, 0) = h(G(y, 0)) = h(g(y)) = y$ y $F(y, 1) = h(G(y, 1)) = h(A_0)$, así que la función identidad es homotópica a una función constante. Con esto, tenemos que S^2 es contráctil, lo cual no puede ser. De modo que nuestra afirmación es cierta.

Afirmación 13. El continuo X es suave por arcos.

Definimos la función $\alpha : [0,1] \times [\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}] \times \{0\} \to C([0,1] \times [\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}] \times \{0\})$ como:

$$\alpha(x,y,0) = \{(tx,ty,0) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\} = \overline{(0,0,0)(x,y,0)}.$$

Entonces α es continua.

Tomemos $(a,b,0) \in [0,1] \times [\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}] \times \{0\}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos un elemento $(x,y,0) \in B_D(\varepsilon,(a,b,0))$. Sea $t \in [0,1]$. Entonces $(tx,ty,0) \in \overline{(0,0,0)(x,y,0)}$ y $(ta,tb,0) \in \overline{(0,0,0)(a,b,0)}$. Notemos que

$$D((tx,ty,0),(ta,tb,0)) = ((tx-ta)^2 + (ty-tb)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= tD((x,y,0),(a,b,0)) \leq D((x,y,0),(a,b,0)) < \varepsilon.$$

Esto implica que

$$\overline{(0,0,0)(x,y,0)} \subset N(\varepsilon, \overline{(0,0,0)(a,b,0)}) \text{ y}$$

$$\overline{(0,0,0)(a,b,0)} \subset N(\varepsilon, \overline{(0,0,0)(x,y,0)}).$$

Luego, aplicando la Proposición 1.0.10, obtenemos que

$$H(\alpha(a,b,0),\alpha(x,y,0)) = H\left(\overline{(0,0,0)(x,y,0)}, \overline{(0,0,0)(a,b,0)}\right) < \varepsilon.$$

Así, hemos obtenido que α es una función continua.

Ahora definimos la función $\beta : [0,1] \times [\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}] \times [0,1] \to C([0,1] \times [\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}] \times [0,1])$ como:

$$\beta(x,y,z) = \{(x,y,tz) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0,1]\} = \overline{(x,y,0)(x,y,z)}.$$

Veamos que ésta es continua. Consideremos $(a,b,c) \in [0,1] \times [\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}] \times [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos un elemento (x,y,z) tal que $D((a,b,c),(x,y,z)) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, esto nos lleva a que

$$(a-x)^2 \leq (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = D^2((a,b,c),(x,y,z)) < \tfrac{\varepsilon^2}{3};$$

de manera similar, obtenemos que $(b-y)^2 < \frac{\varepsilon^2}{3}$ y $(c-z)^2 < \frac{\varepsilon^2}{3}$. Sea $t \in [0,1]$. Notemos que $(a,b,tc) \in \overline{(a,b,0)(a,b,c)}$ y $(x,y,tz) \in \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$. La distancia entre estos dos elementos es

$$D((a,b,tc),(x,y,tz)) = ((a-x)^2 + (b-y)^2 + t^2(c-z)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$< ((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)^{\frac{1}{2}} < (\tfrac{\varepsilon^2}{3} + \tfrac{\varepsilon^2}{3} + \tfrac{\varepsilon^2}{3})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

De esta manera, hemos verificado la continuidad de β.

Definimos la función $\gamma : X \to C(X)$ como:

$$\gamma(x,y,z) = \alpha(x,y,0) \cup \beta(x,y,z).$$

Notemos que

$$\gamma(x,y,z) = \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,z)}.$$

Como $(x,y,0) \in \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cap \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$, $\gamma(x,y,z)$ es un subcontinuo de X. Luego, γ está bien definida.

Para ver que γ es una función continua, tomemos una sucesión de puntos $\{(x_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de X tales que $\lim(x_n,y_n,z_n) = (x,y,z)$, donde $(x,y,z) \in X$. Entonces $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ y $\lim z_n = z$. El hecho de que α y β son funciones continuas nos dice que $\lim \alpha(x_n,y_n,0) = \alpha(x,y,0)$ y $\lim \beta(x_n,y_n,z_n) = \beta(x,y,z)$. Por la Proposición 1.1.3 (b),

$$\lim \big(\alpha(x_n,y_n,0) \cup \beta(x_n,y_n,z_n)\big)$$

$$= \lim \alpha(x_n,y_n,0) \cup \lim \beta(x_n,y_n,z_n)$$

$$= \alpha(x,y,0) \cup \beta(x,y,z).$$

Así que $\lim \gamma(x_n,y_n,z_n) = \gamma(x,y,z)$. Por tanto, utilizando la Proposición 1.5.7 tenemos que γ es continua.

Probemos que γ tiene las propiedades mencionadas en la Definición 3.2.86.

(a) Se verifica fácilmente que $\gamma(0,0,0) = \alpha(0,0,0) \cup \beta(0,0,0) = (0,0,0)$.

(b) Tomemos $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. En el caso en que $z = 0$, tenemos que $\gamma(x,y,z) = \alpha(x,y,0) = \overline{(0,0,0)(x,y,0)}$, el cual es un arco. Supongamos que $z \neq 0$. Notemos que $(x,y,0) \in \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cap \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$. Sea $(a,b,c) \in \alpha(x,y,0) \cap \beta(x,y,z)$. Entonces existen números $s,t \in [0,1]$ tales que

$(a,b,c) = (tx,ty,0) = (x,y,sz)$. Por tanto $s = 0$, así que, $(a,b,c) = (x,y,0)$, el cual es un punto extremo del arco $\overline{(x,y,0)(x,y,z)}$. Notemos que, por la definición de X, sus elementos no pueden ser de la forma $(0,0,p)$ con $p \neq 0$. De manera, que $x \neq 0$ o $y \neq 0$. De modo que, $\overline{(0,0,0)(x,y,0)}$ también es un arco y (x,y,z) también es uno de sus extremos. De manera que $\gamma(x,y,z) = \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$ es la unión de dos arcos cuya intersección es un punto que es extremo de cada uno de ellos, así que, también es un arco.

(c) Consideremos $(x,y,z) \in X$ y $(a,b,c) \in \gamma(x,y,z) = \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$. Supongamos que $(a,b,c) \in \overline{(0,0,0)(x,y,0)}$, entonces existe $t \in [0,1]$ tal que $(a,b,c) = (tx,ty,0)$. Observemos que

$$\gamma(a,b,c) = \gamma(tx,ty,0) = \overline{(0,0,0)(tx,ty,0)}.$$

Como $t \in [0,1]$,

$$\overline{(0,0,0)(tx,ty,0)} \subset \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,z)},$$

así que, $\gamma(a,b,c) = \gamma(tx,ty,0) \subset \gamma(x,y,z)$. Si $(a,b,c) \in \overline{(x,y,0)(x,y,z)}$, existe un elemento $t \in [0,1]$ tal que $(a,b,c) = (x,y,tz)$. Notemos que

$$\gamma(a,b,c) = \gamma(x,y,tz) = \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,tz)}$$

y, teniendo en cuenta que $t \in [0,1]$, obtenemos que

$$\overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,tz)} \subset \overline{(0,0,0)(x,y,0)} \cup \overline{(x,y,0)(x,y,z)},$$

así que $\gamma(a,b,c) \subset \gamma(x,y,z)$.

Así, hemos probado que X es suave por arcos.

Afirmación 14. El continuo X es contráctil, es ∞-conexo, tiene la propiedad del punto fijo y es un retracto absoluto.

Por la afirmación anterior y la Proposición 3.2.87, que nos dice que un continuo suave por arcos es contráctil, obtenemos que X es contráctil. Teniendo en cuenta la Proposición 3.2.93 (que nos dice que cualquier continuo contráctil es ∞-conexo) tenemos que X es ∞-conexo. Se puede uno convencer de que X es un retracto de $[0,1]^3$. Entonces el Corolario 3.2.91 nos dice que

X tiene la propiedad del punto fijo. Como X es un retracto de $[0,1]^3$, aplicamos el Corolario 3.2.79 para obtener que X es un retracto absoluto. Con esto terminamos la prueba de que las propiedades de ser contráctil, ser un retracto absoluto, ser suave por arcos, tener la propiedad del punto fijo y ser ∞-conexo no son inducidas a los bloques pequeños de Whitney. ■

Definición 3.2.95. Sea P una propiedad topológica. Entonces decimos que P es una *propiedad reversible de Whitney* si para cada continuo X tal que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P, para todas las funciones de Whitney para $C(X)$ y para todo $t \in (0,1)$, se tiene que X tiene la propiedad P.

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en 30.6 del capítulo VIII de [13].

Teorema 3.2.96. *Ser un retracto absoluto es una propiedad reversible de Whitney.*

Teorema 3.2.97. *Ser un retracto absoluto es una propiedad inducida por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$ tales que $\mu^{-1}([0,t])$ es un retracto absoluto. Veremos que X es un retracto absoluto. Por el Lema 3.2.81, $\mu^{-1}([0,t])$ es localmente conexo. Como el Teorema 3.2.11 nos dice que la propiedad de ser localmente conexo es inducida por los bloques de Whitney, obtenemos que X también es localmente conexo. Lo cual implica, por la Proposición 3.2.64, que existe una retracción $r : \mu^{-1}([0,t]) \to \mu^{-1}(t)$. Como $\mu^{-1}([0,t])$ es un retracto absoluto y r es una retracción, el Teorema 3.2.77 nos lleva a que $\mu^{-1}(t)$ también es un retracto absoluto. Como la propiedad de ser un retracto absoluto es propiedad reversible de Whitney (Teorema 3.2.96), concluimos que X es un retracto absoluto. ■

En estos temas falta mucho por hacer. Para concluir esta subsección planteamos las siguientes preguntas:

Problema 3.2.98. ¿Las propiedades de ser contráctil, ser un retracto absoluto, ser suave por arcos, ser ∞-conexo y la propiedad del punto fijo serán inducidas débilmente a los bloques de Whitney?

Problema 3.2.99. ¿Las propiedades de ser contráctil, ser suave por arcos, ser ∞-conexo y la propiedad del punto fijo serán inducidas por los bloques de Whitney?

Problema 3.2.100. ¿Las propiedades de ser contráctil, ser suave por arcos, ser ∞-conexo y la propiedad del punto fijo serán inducidas fuertemente por los bloques de Whitney?

3.2.9. Retracto de vecindad absoluto y contractibilidad local

En esta subsección primero veremos algunos resultados acerca de los conceptos de conexidad local, contractibilidad local, retracto absoluto y retracto de vecindad absoluto. Estos los aplicaremos en el teorema que dice que las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil no son inducidas por los bloques de Whitney.

Definición 3.2.101. Sea Z un espacio métrico compacto. Se dice que Z es un *retracto de vecindad absoluto* si para todo espacio métrico M que contiene a Z como subespacio, se tiene que existen una vecindad U de Z en M y una retracción $r : U \to Z$.

Observación 3.2.102. Si X es un retracto absoluto, entonces X es un retracto de vecindad absoluto.

En este caso la vecindad que existe es el mismo espacio métrico M.

Definición 3.2.103. Un espacio Z es *localmente contráctil en un punto* $p \in Z$ si para todo abierto U de Z tal que $p \in U$, existen un abierto V de Z tal que $p \in V \subset U$, un elemento $p_0 \in V$ y una función continua

$G : V \times [0,1] \to U$ tal que $G(v,0) = v$ y $G(v,1) = p_0$, para toda $v \in V$.

El siguiente resultado es el Corolario 3.3 del capítulo IV de [4].

Lema 3.2.104. *Si X es un continuo que es retracto de vecindad absoluto, entonces X es localmente contráctil.*

Teorema 3.2.105. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *X es un continuo localmente conexo;*
2. *$C(X)$ es un retracto absoluto.*

La prueba se puede encontrar en [28] (pág. 190-191).

Proposición 3.2.106. *Si $\mathcal{A} \subset C(X)$ es un subcontinuo localmente conexo tal que $\cup\mathcal{B} \in \mathcal{A}$, para todo subcontinuo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es un continuo que es retracto absoluto.*

Demostración. Notemos que $C(\mathcal{A})$ es un continuo (por el Corolario 6.11 de [12]). Definimos la función $R : C(\mathcal{A}) \to F_1(\mathcal{A})$, como

$$R(\mathcal{B}) = \{\cup\mathcal{B}\}.$$

Por la Proposición 1.2.5, sabemos que R está bien definida y es continua. Sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces

$$R(\{A\}) = \{\cup\{A\}\} = \{A\}.$$

Esto nos dice que R es una retracción. Utilizando el Teorema 3.2.105, obtenemos que $C(\mathcal{A})$ es un retracto absoluto, ya que $\mathcal{A}$ es localmente conexo y, utilizando el Teorema 3.2.77, tenemos que $F_1(\mathcal{A})$ es un continuo que es retracto absoluto, ya que $F_1(\mathcal{A})$ es un retracto de $C(\mathcal{A})$. Como $F_1(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ también es un continuo que es retracto absoluto, lo que queríamos probar. ■

Lema 3.2.107. *Si $A, B \in C(X)$ son tales que $A \subset B$, entonces el conjunto definido por*

$$C(A, B) = \{C \in C(X) : A \subset C \subset B\}$$

es localmente conexo. En particular,

$$C(A, X) = \{C \in C(X) : A \subset C\}$$

es localmente conexo.

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un abierto de $C(A, B)$ y $\mathcal{C}$ una componente de $\mathcal{U}$. Probaremos que $\mathcal{C}$ es abierto en $C(A, B)$ para después utilizar el hecho de que un espacio es localmente conexo si y sólo si las componentes de los abiertos son abiertas (Teorema 4.2 del capítulo V de [6]). Tomemos $C \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$B_H(\varepsilon, C) \cap C(A, B) \subset \mathcal{U}.$$

Sea

$$\mathcal{V} = B_H(\varepsilon, C) \cap C(A, B).$$

Probaremos que el abierto

$$\mathcal{W} = B_H(\tfrac{\varepsilon}{2}, C) \cap C(A, B)$$

de $C(A, B)$ satisface que $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$.

Consideremos $D \in \mathcal{W}$. Entonces $H(C, D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la Proposición 1.0.10, sabemos que C y D satisfacen (a) $C \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, D)$ y (b) $D \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, C)$. Sea

$$\mathcal{D} = C(C, C \cup D) \cup C(D, C \cup D).$$

Consideremos un elemento $E \in \mathcal{D}$. Por tanto, tenemos que (c) $C \subset E \subset C \cup D$ o (d) $D \subset E \subset C \cup D$. En el caso (c), tenemos que $C \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, E)$, ya que $C \subset E$. En el caso (d), utilizamos (a) para obtener $C \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, D) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, E)$. Como en ambos casos, (c) y (d), tenemos $E \subset C \cup D$, utilizamos (b) para obtener

$$E \subset C \cup D \subset C \cup N(\tfrac{\varepsilon}{2}, C) \subset N(\tfrac{\varepsilon}{2}, C).$$

De manera que, utilizando nuevamente la Proposición 1.0.10, concluimos que $H(E, C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $C, D \in C(A, B)$ y E satisface (c) o (d), obtenemos que $A \subset E \subset B$, así que, $E \in C(A, B)$. Por lo tanto, $\mathcal{D} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

Veamos que $\mathcal{D}$ es conexo. Como $\mathcal{U}$ es un abierto de $C(A,B)$ y $C, D \in \mathcal{D} \subset \mathcal{V}$, $A \subset C$ y $A \subset D$. Así que, $C \cup D \in C(X)$. Consideremos un elemento $E \in \mathcal{D} \setminus \{C \cup D\}$. Entonces $E \subsetneq C \cup D$. De manera que podemos aplicar el Teorema 2.2.7 para obtener un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de E a $C \cup D$. Tomemos $r \in [0,1]$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, $E = \alpha(0) \subset \alpha(r) \subset \alpha(1) = C \cup D$. En el caso en que E satisface (c), tenemos que $C \subset E \subset \alpha(r) \subset C \cup D$, de manera que $\alpha(r) \in \mathcal{D}$. El caso en que E satisface (d), se prueba de manera similar. Con esto hemos visto que $\mathcal{D}$ es arcoconexo y, por tanto, conexo.

Como $\mathcal{D}$ es un conexo que contiene al elemento C y está contenido en $\mathcal{U}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Por tanto, $D \in \mathcal{C}$. En resumen, obtuvimos que si $D \in \mathcal{W}$, entonces $D \in \mathcal{C}$ para todo $D \in \mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$. De manera que $\mathcal{C}$, es abierto en $C(A,B)$, lo que queríamos probar. ■

Teorema 3.2.108. *Sean μ una función de Whitney, $t \in (0,1)$ y $E \in C(X)$ tales que $\mu(E) \leq t$. Entonces el conjunto*

$$\{A \in \mu^{-1}(t) : E \subset A\}$$

es un continuo que es retracto absoluto.

Este teorema es el Teorema 66.4 de [13].

Lema 3.2.109. *Sean μ una función de Whitney, $t \in (0,1)$ y $E \in C(X)$ tal que $\mu(E) \leq t$. Entonces el conjunto*

$$\{A \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset A\}$$

es un continuo que es retracto absoluto.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un subcontinuo de $\{A \in C(X) : E \subset A\}$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.5 y el hecho de que $\mathcal{A} \subset C(X)$, obtenemos que $\cup\mathcal{A} \in C(X)$. Como $E \subset A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, $E \subset \cup\mathcal{A}$. Así que, $\cup\mathcal{A} \in \{A \in C(X) : E \subset A\}$. Por el Lema 3.2.107, $\{A \in C(X) : E \subset A\}$ es localmente conexo. Por tanto, podemos aplicar la Proposición 3.2.106 para obtener que $\{A \in C(X) : E \subset A\}$ es un retracto absoluto.

Por el Teorema 3.2.108, $\{A \in \mu^{-1}(t) : E \subset A\}$ es un retracto absoluto, de manera que, existe una retracción $r : \{A \in \mu^{-1}([t,1]) : E \subset A\} \to \{A \in \mu^{-1}(t) : E \subset A\}$. Definimos la función $R : \{A \in C(X) : E \subset A\} \to \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset A\}$ como:

$$R(A) = \begin{cases} A, & \text{si} \quad A \in \mu^{-1}([0,t]), \\ r(A), & \text{si} \quad A \in \mu^{-1}([t,1]). \end{cases}$$

Observemos que R es una retracción. Como $\{A \in C(X) : E \subset A\}$ es un retracto absoluto, por el Teorema 3.2.77, $\{A \in \mu^{-1}([0,t]) : E \subset A\}$ es un retracto absoluto. ■

El siguiente lema es el resultado 6.1, partes i y ii, del capítulo IV de [4].

Lema 3.2.110. *Sean $Z = Z_1 \cup Z_2$ y $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$.*

(a) Si Z_0, Z_1 y Z_2 son retractos absolutos, entonces Z también es un retracto absoluto.

(b) Si Z_0, Z_1 y Z_2 son retractos de vecindad absolutos, entonces Z también es un retracto de vecindad absoluto.

Lema 3.2.111. *Sean $Z = Z_1 \cup Z_2$ y $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$. Si Z y Z_0 son retractos absolutos, entonces Z_1 y Z_2 también son retractos absolutos.*

Demostración. Como Z_0 es un retracto absoluto y $Z_0 \subset Z_2$, por definición, existe una retracción $r_2 : Z_2 \to Z_0$. Definimos la función $r : Z \to Z_1$ como:

$$r(A) = \begin{cases} z, & \text{si} \quad z \in Z_1, \\ r_2(z), & \text{si} \quad z \in Z_2. \end{cases}$$

Notemos que si $z \in Z_1 \cap Z_2 = Z_0$, entonces $r_2(z) = z$. Por tanto, r es continua. Si $z \in Z_1$, por definición, tenemos $r(z) = z$. De modo que, r es retracción. Como Z es un retracto absoluto, por el Teorema 3.2.77, obtenemos que Z_1 también es un retracto absoluto. De manera análoga, obtenemos que Z_2 es un retracto absoluto. ■

El siguiente teorema es el resultado 6.1 del capítulo V de [4].

Teorema 3.2.112. *Si X es una dendrita, entonces X es un retracto absoluto.*

Definición 3.2.113. Sean C una 2-celda y $f : [0,1]^2 \to C$ un homeomorfismo. Definimos *la orilla* de C como:

$$\mathrm{Orilla}(C) = f\big(([0,1] \times \{0,1\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])\big).$$

Lema 3.2.114. *(M. E. Aguilera) Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de 2-celdas en un continuo X y $p \in X$ tales que $p \in \mathrm{Orilla}(E_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E_m = \{p\}$ si $n \neq m$ y $\lim E_n = \{p\}$. Entonces*

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

es un retracto absoluto.

Demostración. Notemos que E es conexo, ya que $p \in E_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim E_n = \{p\}$, E tiene a todos sus puntos de acumulación, de modo que, E es un continuo. Supongamos que ρ es una métrica para E.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a_n = (3 - \frac{3}{2^{n-1}}, 0)$,

$$A_n = \{a_n + r\exp(\tfrac{\pi}{2} i\theta) : r \in (0, \tfrac{1}{2^{n-1}}] \text{ y } \theta \in [1 - \tfrac{1}{2^{n+1}}, 1]\} \cup \{a_n\} \text{ y}$$

$$B_n = \{r\exp(\tfrac{\pi}{2} i\theta) : r \in (0, \tfrac{1}{2^{n-1}}] \text{ y } \theta \in [\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{3}{2^{n+1}}]\} \cup \{(0,0)\}.$$

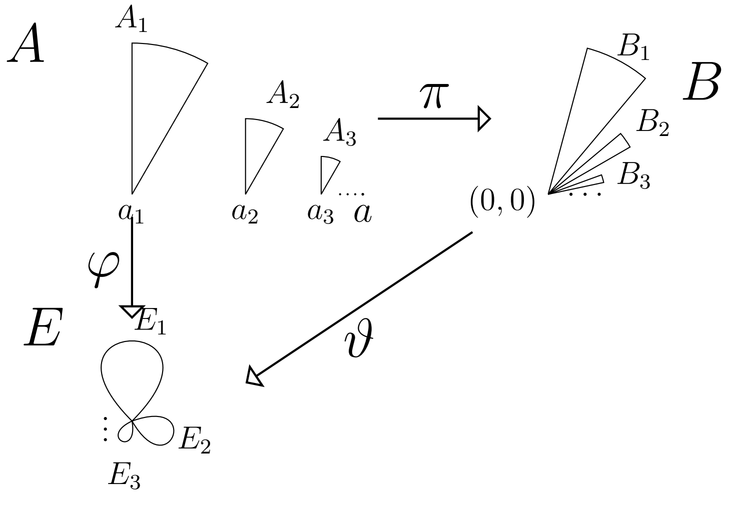

Figura 15: A, B y E

Sean $a = (3, 0)$, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \{a\}$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $\pi : A \to B$ la función natural que identifica a los puntos $a, a_1, a_2, \ldots$ en el punto $(0, 0)$. Observemos que A es cerrado, B es un continuo y que A_n y B_n son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que son convexos con interior no vacío, así que, éstos son 2-celdas para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\pi(a) = (0, 0)$, $\pi(a_n) = (0, 0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, que

$$\pi|_{A\setminus\{a,a_1,a_2,\ldots\}} : A \setminus \{a, a_1, a_2, \ldots\} \to B \setminus \{(0, 0)\}$$

es una función suprayectiva y que $\pi|_{A_n} : A_n \to B_n$ es un homeomorfismo tal que $\pi(a_n) = (0, 0)$. Ver Figura 15.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$. Como A_n y E_n son 2-celdas y $a_n \in \mathrm{Orilla}(A_n)$ y $p \in \mathrm{Orilla}(E_n)$, existe un homeomorfismo $h_n : A_n \to E_n$ tal que $h_n(a_n) = p$. Definimos $\varphi : A \to E$ como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} h_n(x), & \text{si} \quad x \in A_n; \\ p, & \text{si} \quad x = a. \end{cases}$$

Veamos que φ es continua. Tomemos $x \in A$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_m$, como $A_m \cap A_j = \emptyset$ para cada $j \in \mathbb{N}$, $a \notin A_m$ y h_m es continua, tenemos que φ es continua en x. Supongamos que $x = a$, entonces $\varphi(a) = p$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim E_n = \{p\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E_n \in B_H(\varepsilon, \{p\})$ para cada $n \geq N$. Por el Lema 1.1.11, $E_n \subset B_\rho(\varepsilon, p)$, para cada $n \geq N$. Definimos

$$U = \{a\} \cup \textstyle\bigcup_{i=N}^{\infty} A_i.$$

Notemos que

$$U = A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1}),$$

así que, U es un abierto de A y, además, $a \in U$. Consideremos $n \geq N$. Utilizando la definición de φ y el hecho de que $n \geq N$, obtenemos que $\varphi(A_n) = h_n(A_n) = E_n \subset B_\rho(\varepsilon, p)$. De modo que $\varphi(U) \subset B_\rho(\varepsilon, p)$. Con esto, hemos visto que φ es una función continua. Observemos que φ es suprayectiva y que

$$\varphi|_{A\setminus\{a,a_1,a_2\ldots\}} : A \setminus \{a, a_1, a_2 \ldots\} \to E \setminus \{p\}$$

es inyectiva (ya que $E_n \cap E_m = \{p\}$ si $n \neq m$).

Sea $y \in B$. Veamos que φ es constante en $\pi^{-1}(y)$. En el caso en que $y \neq (0,0)$, $\pi^{-1}(y)$ es un solo punto. Así que $\varphi(\pi^{-1}(y))$ es constante. En el caso en que $y = (0,0)$, $\pi^{-1}((0,0)) = \{a, a_1, a_2, \ldots\}$. Por la definición de φ, $\varphi(a) = p$ y $\varphi(a_n) = h_n(a_n) = p$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que $\varphi(\pi^{-1}((0,0))) = \varphi(\{a, a_1, a_2, \ldots\}) = \{p\}$. Así que, en ambos casos, se satisface que φ es constante en $\pi^{-1}(y)$. Por tanto, utilizando el Teorema 3.2 del capítulo VI de [6], tenemos que la función $\vartheta : B \to E$ dada por

$$\vartheta(y) = \varphi(\pi^{-1}(y))$$

es una función continua.

Como φ es suprayectiva, ϑ también es suprayectiva. Veamos que ϑ es inyectiva. Sean y y z elementos distintos de B. En el caso en que $y \neq (0,0)$ y $z \neq (0,0)$, como

$$\pi|_{A\setminus\{a,a_1,a_2,\ldots\}} : A \setminus \{a, a_1, a_2, \ldots\} \to B \setminus \{(0,0)\}$$

es una función suprayectiva, existen elementos distintos $u, v \in A\setminus\{a, a_1, a_2, \ldots\}$ tales que $\{u\} = \pi^{-1}(y)$ y $\{v\} = \pi^{-1}(z)$. Como

$$\varphi|_{A\setminus\{a,a_1,a_2\ldots\}} : A \setminus \{a, a_1, a_2 \ldots\} \to E \setminus \{p\}$$

es inyectiva, $\vartheta(y) \neq \vartheta(z)$. Veamos el caso en que $y = (0,0)$ y $z \neq (0,0)$. Es claro que $\vartheta(y) = p$. Por otra parte, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}(z) \in A_m \setminus \{a_m\}$, así que, $\vartheta(z) \in E_m \setminus \{p\}$. De modo que $\vartheta(y) \neq \vartheta(z)$.

Por lo tanto, $\vartheta : B \to E$ es una función continua, inyectiva y suprayectiva entre continuos, lo cual nos lleva a que ϑ es un homeomorfismo. De manera que, podemos suponer que, $E = B$, $p = (0,0)$ y $E_n = B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$D_n = \{r \exp(\tfrac{\pi}{2} i\theta) : r \in (0, \tfrac{1}{2^{n-1}}] \text{ y } \theta \in [\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n-1}}]\} \cup \{(0,0)\} \text{ y}$$

$$F_n = \{r \exp(\tfrac{\pi}{2} i\theta) : r \in (0, \tfrac{1}{2^{n-1}}] \text{ y } \theta \in [\tfrac{3}{2^{n+1}}, \tfrac{1}{2^{n-1}}]\} \cup \{(0,0)\}.$$

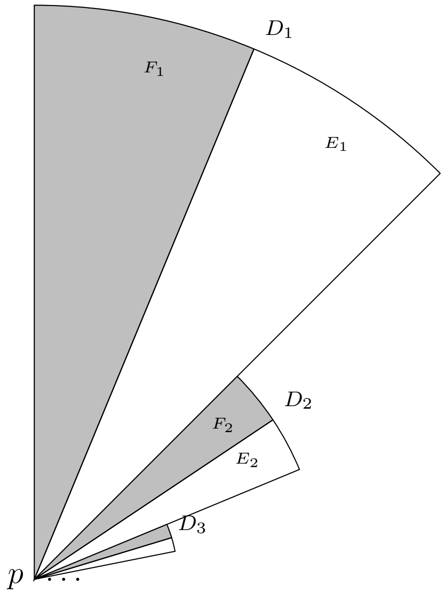

Figura 16: $D = E \cup F$

Como cada uno de estos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ es un convexo con interior no vacío, éstos son 2-celdas. Notemos que $D_n = E_n \cup F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \text{ y}$$

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Es claro que $D = E \cup F$. Notemos que D es una 2-celda y, por lo tanto, es un retracto absoluto (por el Corolario 5.2 del capítulo VII de [6]). Es fácil ver que

$$E \cap F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{r \exp(\tfrac{3\pi}{2\cdot 2^{n+1}}) : r \in (0, \tfrac{1}{2^{n-1}}]\} \cup \{(0,0)\}$$

y que ésta es una dendrita con un punto de ramificación con una cantidad numerable de arcos cuyo diámetro converge a cero. Ver Figura 16. De modo que, por el Teorema 3.2.112, $E \cap F$ es un retracto absoluto. Por lo tanto, podemos aplicar el Lema 3.2.111 para obtener que E es un retracto absoluto. $\blacksquare$

Teorema 3.2.115. *(M. E. Aguilera) Las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y de ser localmente contráctil no son inducidas por los bloques de Whitney.*

Demostración. Sea X el arete hawaiano definido por: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(0, 1 - 2^{-n})$ y radio 2^{-n}. Ver Figura 17. Sean $p = (0,1)$, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Mostraremos que $\mu^{-1}([0,t])$ es un retracto de vecindad absoluto.

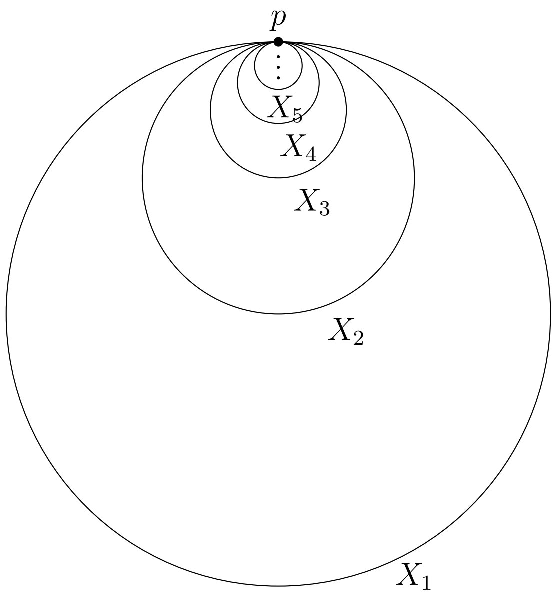

Figura 17: X

Como $\lim X_n = \{p\}$, utilizando la continuidad de la función μ, tenemos que $\lim(\mu(X_n)) = \mu(\lim X_n) = \mu(\{p\}) = 0$. Por lo tanto, el conjunto

$$F = \{n \in \mathbb{N} : \mu(X_n) > t\}$$

es finito. Podemos suponer que $F = \{1, 2, \ldots, l\}$. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mu^{-1}([0,t])$:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \notin F} C(X_n),$$

$$\mathcal{B} = \{B \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in B\} \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_n = (\mu|_{C(X_n)})^{-1}([0,t]), \text{ para cada } n \in F.$$

Probaremos varias afirmaciones utilizando estos conjuntos.

Afirmación 1. $\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup (\bigcup_{n \in F} \mathcal{C}_n)$.

Tomemos $n \notin F$. Entonces $\mu(X_n) \leq t$. De modo que, $C(X_n) \subset \mu^{-1}([0,t])$, lo cual nos lleva a que

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \notin F} C(X_n) \subset \mu^{-1}([0,t]).$$

Por otra parte, es claro que $\mathcal{B} \subset \mu^{-1}([0,t])$ y $\mathcal{C}_n \subset \mu^{-1}([0,t])$ para cada $n \in F$. Por tanto

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup (\bigcup_{n \in F} \mathcal{C}_n) \subset \mu^{-1}([0,t]).$$

Sea $A \in \mu^{-1}([0,t])$. Si $p \in A$ es claro que $A \in \mathcal{B}$. Supongamos que $p \notin A$. Entonces $A \subset X_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De manera que $A \in \mathcal{A} \cup (\bigcup_{n \in F} \mathcal{C}_n)$. De modo que,

$$\mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup (\bigcup_{n \in F} \mathcal{C}_n).$$

Así hemos obtenido la igualdad de conjuntos deseada.

Afirmación 2. El conjunto $\mathcal{A}$ es un continuo que es retracto absoluto.

Sean $n \neq m$. Como $X_n \cap X_m = \{p\}$, $\{p\} \in C(X_n) \cap C(X_m)$. Consideremos $A \in C(X_n) \cap C(X_m)$. De manera que $A \subset X_n \cap X_m$. Lo cual nos lleva a que $A = \{p\}$. Por lo tanto, $C(X_n) \cap C(X_m) = \{\{p\}\}$. Por otra parte, por el Ejemplo 3.2 de [12], $C(X_n)$ es una 2-celda para cada $n \in \mathbb{N}$ y, además, $\{p\} \in \text{Orilla}(C(X_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Probemos que $\lim C(X_n) = \{\{p\}\}$. Sea $\varepsilon > 0$. Veremos que existe un natural N tal que $\mathcal{H}(C(X_n), \{\{p\}\}) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$, en donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff inducida por H. Como $\lim X_n = \{p\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(X_n, \{p\}) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$. Aplicando el Lema 1.1.11, obtenemos que $X_n \subset B_d(\varepsilon, p)$. Consideremos $A \in C(X_n)$. Entonces $A \subset X_n \subset B_d(\varepsilon, p)$, así que, aplicando nuevamente el Lema 1.1.11, tenemos que $H(A,\{p\}) < \varepsilon$, lo cual nos dice que $C(X_n) \subset B_H(\varepsilon,\{p\})$. Utilizando nuevamente el Lema 1.1.11, obtenemos que $\mathcal{H}(C(X_n),\{\{p\}\}) < \varepsilon$. Así, hemos visto que $\lim C(X_n) = \{\{p\}\}$.

Por lo tanto $\mathcal{A} = \bigcup_{n\notin F} C(X_n)$ satisface las hipótesis del Lema 3.2.114, lo cual nos conduce a que $\mathcal{A}$ es un retracto absoluto.

Afirmación 3. El conjunto $\mathcal{B}$ es un continuo que es retracto absoluto.

El Lema 3.2.109 nos dice que $\mathcal{B}$ es un continuo que es retracto absoluto.

Afirmación 4. Para cada $n \in F$, el conjunto $\mathcal{C}_n$ es un continuo que es retracto de vecindad absoluto.

Sea $n \in F$. Notemos que la función $\frac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)} : C(X_n) \to [0,1]$ es una función de Whitney para $C(X_n)$ (por el Lema 2.0.10). Como $t < \mu(X_n)$, $\frac{t}{\mu(X_n)} < 1$. De manera que, por el Teorema 4.1.4, $\big(\frac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)}\big)^{-1}\big([0,\frac{t}{\mu(X_n)}]\big)$ es homeomorfo a $S \times [0,1]$. Por el Lema 3.0.24,

$$\Big(\frac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)}\Big)^{-1}\Big([0,\frac{t}{\mu(X_n)}]\Big) = (\mu|_{C(X_n)})^{-1}([0,t]) = \mathcal{C}_n.$$

De modo que, $\mathcal{C}_n$ es homeomorfo a $S \times [0,1]$, el cual es un continuo que es retracto de vecindad absoluto (por el Corolario 5.4 del capítulo VII de [6]). Por lo tanto, $\mathcal{C}_n$ es un retracto de vecindad absoluto.

Afirmación 5. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es un retracto absoluto.

Notemos que

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \bigcup_{n\notin F} \big(C(X_n) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big).$$

Sea $m \notin F$. Teniendo en cuenta la desigualdad $\mu(X_m) \leq t$, observamos que

$$C(X_m) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\} = \{A \in C(X_m) : p \in A\}.$$

Por el Ejemplo 3.2 de [12], sabemos que $\{A \in C(X_m) : p \in A\}$ es una 2-celda. Por otra parte, notemos que $\{p\} \in \text{Orilla}\big(C(X_m) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in$

$A\}\big) = \text{Orilla}\big(\{A \in C(X_m) : p \in A\}\big)$ para cada $m \notin F$.

Consideremos $m, l \notin F$ tales que $m \neq l$. Consideremos un elemento $M \in \big(C(X_m) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big) \cap \big(C(X_l) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big) \subset C(X_m) \cap C(X_l)$. De modo que $M \subset X_m \cap X_l = \{p\}$, lo cual nos lleva a que $M = \{p\}$. Entonces

$$\big(C(X_m) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big) \cap \big(C(X_l) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big) = \{\{p\}\}.$$

En la prueba de la Afirmación 2, vimos que $\operatorname{lím} C(X_n) = \{\{p\}\}$. Considerando las sucesiones $\{C(X_n) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{C(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y teniendo en cuenta que $C(X_n) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\} \subset C(X_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.1.3 (a), aseguramos que

$$\operatorname{lím}\big(C(X_n) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\}\big) \subset \operatorname{lím} C(X_n) = \{\{p\}\},$$

así que,

$$\operatorname{lím} C(X_n) \cap \{A \in \mu^{-1}([0,t]) : p \in A\} = \{\{p\}\}.$$

Así que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es la unión de 2-celdas tales que, dos a dos, se intersectan en el punto $\{p\}$ y que convergen a $\{\{p\}\}$, así que, por el Lema 3.2.114, sabemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es un continuo que es retracto absoluto. Así terminamos la prueba de esta afirmación.

Afirmación 6. Para cada $n \in F$, se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_n = \{\{p\}\}$.

Sean $n \in F$ y $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}_n$. Entonces existe $j \notin F$ tal que $A \subset X_j$, de manera que,$A \subset X_j \cap X_n$. Como $j \neq n$, $X_j \cap X_n = \{p\}$ y, por tanto, $A = \{p\}$. De manera que, $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_n = \{\{p\}\}$.

Afirmación 7. Para cada $n \in F$, se tiene que

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n = \{A \in (\mu|_{C(X_n)})^{-1}([0,t]) : p \in A\}$$

es un retracto absoluto.

Tomemos $n \in F$. Como $X_n \notin F_1(X)$ y $t < \mu(X_n)$, por el Lema 3.0.24,

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n = \{A \in \big(\tfrac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)}\big)^{-1}([0, \tfrac{t}{\mu(X_n)}]) : p \in A\}.$$

Como $\frac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)} : C(X_n) \to [0,1]$ es una función de Whitney (por el Lema 2.0.10) y $\frac{\mu(\{p\})}{\mu(X_n)} = 0 < \frac{t}{\mu(X_n)} < 1$, por el Lema 3.2.109,

$$\{A \in \left(\tfrac{\mu|_{C(X_n)}}{\mu(X_n)}\right)^{-1}([0, \tfrac{t}{\mu(X_n)}]) : p \in A\}$$

es un retracto absoluto.

Afirmación 8. Para $n, m \in F$, tales que $n \neq m$, $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_m = \{\{p\}\}$.

Sean n, m dos elementos distintos de F. Consideremos un elemento $A \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_m$. De manera que, $A \subset X_n \cap X_m = \{p\}$ y, por lo tanto, $A = \{p\}$. Entonces $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_m = \{\{p\}\}$.

Afirmación 9. Consideremos $n \in F$. Si $n = 1$, se satisface que

$$\big(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\big) \cap \mathcal{C}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}_1$$

y si $n \geq 2$, entonces

$$\big(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{n-1}\big) \cap \mathcal{C}_n = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n.$$

En el caso en que $n = 1$, por las Afirmaciones 6 y 7, tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_1 = \{\{p\}\}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_1 = \{A \in C(X_1) : \mu(A) \leq t \text{ y } p \in A\}$, respectivamente. De manera que

$$\big(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\big) \cap \mathcal{C}_1 = \big(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_1\big) \cup \big(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_1\big)$$

$$= \{\{p\}\} \cup \{A \in C(X_1) : \mu(A) \leq t \text{ y } p \in A\}$$

$$= \{A \in C(X_1) : \mu(A) \leq t \text{ y } p \in A\}$$

$$= \mathcal{B} \cap \mathcal{C}_1.$$

Veamos el caso $n \geq 2$. Por las Afirmaciones 6, 7 y 8,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{C}_n = \{\{p\}\},$$

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}_n = \{A \in C(X_n) : \mu(A) \leq t \text{ y } p \in A\} \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_n = \{\{p\}\} \text{ si } i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_{n-1}\big)\cap\mathcal{C}_n\\
&=\big(\mathcal{A}\cap\mathcal{C}_n\big)\cup\big(\mathcal{B}\cap\mathcal{C}_n\big)\cup\big(\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_n\big)\cup\cdots\cup\big(\mathcal{C}_{n-1}\cap\mathcal{C}_n\big)\\
&=\{\{p\}\}\cup\{A\in C(X_n):\mu(A)\leq t \text{ y } p\in A\}\\
&=\{A\in C(X_n):\mu(A)\leq t \text{ y } p\in A\}\\
&=\mathcal{B}\cap\mathcal{C}_n.
\end{aligned}$$

Afirmación 10. $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_n$, para cada $n\in F$, son retractos de vecindad absolutos.

Como $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ es un retracto absoluto (por la Afirmación 5), el Lema 3.2.110 (a) nos dice que $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ también es un retracto absoluto. La Afirmación 9 nos dice que $\big(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\big)\cap\mathcal{C}_1=\mathcal{B}\cap\mathcal{C}_1$ y la Afirmación 7 nos dice que $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}_1$ es un retracto absoluto. Como $\mathcal{C}_1$ es un retracto de vecindad absoluto (por la Afirmación 4), podemos utilizar el Lema 3.2.110 (b), para obtener que $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1$ también es un retracto de vecindad absoluto.

Supongamos que, para $n\in F$ tal que $n\geq 2$, tenemos que

$$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_{n-1}$$

es un retracto de vecindad absoluto. Veremos que

$$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_n$$

también es un retracto de vecindad absoluto. Notemos (por la Afirmación 9) que

$$\big(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_{n-1}\big)\cap\mathcal{C}_n=\mathcal{B}\cap\mathcal{C}_n,$$

el cual, por la Afirmación 7, es un retracto absoluto. Como $\mathcal{C}_n$ es un retracto de vecindad absoluto (por la Afirmación 4), podemos aplicar el Lema 3.2.110 para obtener que $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_n$ también es un retracto de vecindad absoluto.

Por la Afirmación 1,

$$\mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_m.$$

Por la Afirmación 10, concluimos que éste es un retracto de vecindad absoluto y, por el Lema 3.2.104, éste es localmente contráctil. Como μ es una función de Whitney cualquiera, t es un número cualquiera de $(0,1)$ y X no es localmente contráctil y, por lo tanto, tampoco es un retracto de vecindad absoluto, obtenemos que las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil no son inducidas por los bloques de Whitney. ■

A continuación planteamos algunas preguntas de las cuales todavía no tenemos respuesta.

Problema 3.2.116. ¿Las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil serán inducidas a todos los bloques de Whitney?

Problema 3.2.117. ¿Las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil serán inducidas a los bloques pequeños de Whitney?

Problema 3.2.118. ¿Las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil serán inducidas débilmente a los bloques de Whitney?

Problema 3.2.119. ¿Las propiedades de ser un retracto de vecindad absoluto y ser localmente contráctil serán inducidas fuertemente por los bloques de Whitney?

3.2.10. Métrica convexa

En esta subsección veremos primero que, con la métrica usual d en el $[0,1]$, se obtiene que, la métrica de Hausdorff H inducida por d no es convexa en una sucesión de bloques de Whitney que converge a $F_1(X)$. Después veremos que, si la métrica de Hausdorff H, inducida por una métrica d para X, es convexa en una sucesión de bloques de Whitney que converge a $F_1(X)$, entonces d es convexa en X.

Definición 3.2.120. Una *métrica convexa*, para un espacio Z es una métrica d para Z que induce la misma topología en Z y para la cual existen los puntos medios, es decir, para dos puntos cualesquiera $x, y \in Z$, existe $z \in Z$ tal que

$$d(x, z) = \tfrac{1}{2} d(x, y) = d(z, y).$$

La prueba del siguiente resultado puede encontrarse en 10.4 de [13].

Proposición 3.2.121. *Sea X un continuo con métrica convexa d. Entonces cualesquiera dos puntos, x y y de X pueden unirse mediante un arco, J, en X tal que J es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x, y)]$.*

Teorema 3.2.122. *(M. E. Aguilera) Existen una métrica convexa d para $[0, 1]$, una función de Whitney μ para $C([0, 1])$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$ que converge a 0 tales que la métrica de Hausdorff H inducida a $\mu^{-1}([0, t_n])$ no es convexa para ningún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideraremos a d como la métrica usual. Definimos $f : [0, 3] \to [0, 6]$ como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in [0, 1]; \\ x^2, & \text{si} \quad x \in [1, 2]; \\ 2x, & \text{si} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Notemos que esta función es continua, estrictamente creciente e inyectiva.

Definimos $\mu : C([0, 1]) \to [0, 1]$ como:

$$\mu([a, b]) = \tfrac{1}{6}(f(3b) - f(3a)).$$

Afirmación 1. La función μ es una función de Whitney.

(a) La continuidad de μ se obtiene de que ésta es la composición de funciones continuas.

(b) Si $\{a\} \in F_1([0, 1])$, entonces $\mu(\{a\}) = \frac{1}{6}(f(3a) - f(3a)) = 0$.

(c) Sean $[a, b], [x, y] \in C([0, 1])$ tales que $[a, b] \subsetneq [x, y]$. Entonces $x < a$ y $b \leq y$ o $b < y$ y $x \leq a$. Analicemos el caso en que $x < a$ y $b \leq y$. Notemos que $f(3b) \leq f(3y)$. Como f es estrictamente creciente, $f(3x) < f(3a)$. De aquí que $f(3b) - f(3a) < f(3y) - f(3x)$, lo que nos lleva a que $\mu([a,b]) < \mu([x,y])$. Para el caso en que $b < y$ y $x \leq a$ se hace un análisis similar.

(d) $\mu([0,1]) = \frac{1}{6}(f(3) - f(0)) = \frac{1}{6}(6) = 1$.

En resumen, (a), (b), (c) y (d) nos dicen que μ es una función de Whitney. De esta manera concluimos la prueba de la primera afirmación.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el número $t_n = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ y los arcos

$$A_n = \left[0, \tfrac{1}{3 \cdot 2^n}\right] \text{ y}$$

$$B_n = \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n}\right].$$

Afirmación 2. $H(A_n, B_n) = \frac{2}{3}$.

Aplicando la Proposición 1.2.6, obtenemos fácilmente esta afirmación.

Afirmación 3. $A_n, B_n \in \mu^{-1}([0, t_n])$.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{2^n} \in [0,1]$ y aplicando la definición de μ a A_n, tenemos que:

$$\mu(A_n) = \mu\big(\left[0, \tfrac{1}{3 \cdot 2^n}\right]\big) = \tfrac{1}{6}\big(f(\tfrac{1}{2^n}) - f(0)\big) = \tfrac{1}{6}\big(\tfrac{1}{2^n} - 0\big) = \tfrac{1}{6 \cdot 2^n} = \tfrac{t_n}{2}.$$

De manera que $A_n \in \mu^{-1}([0, t_n])$. Por otra parte, notemos que $2 + \frac{1}{2^n} \in [2,3]$ y, por tanto, $f(2 + \frac{1}{2^n}) = 2(2 + \frac{1}{2^n})$. Aplicando la definición de μ a B_n obtenemos:

$$\mu(B_n) = \mu\big(\left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n}\right]\big) = \tfrac{1}{6}\big(f\big(2 + \tfrac{1}{2^n}\big) - f(2)\big) = \tfrac{1}{6}\big(4 + \tfrac{2}{2^n} - 4\big) = \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} = t_n.$$

De modo que, $B_n \in \mu^{-1}([0, t_n])$. Así, concluimos la prueba de la Afirmación 3.

Supongamos que la métrica H, inducida a $\mu^{-1}([0, t_n])$ por d, es convexa. Entonces, por la Proposición 3.2.121, existe un arco $\mathcal{J}$, en $\mu^{-1}([0, t_n])$, que une a A_n con B_n y tal que $\mathcal{J}$ es isométrico al intervalo cerrado $[0, H(A_n, B_n)]$.

Afirmación 4. Existe un elemento $C_n \in \mathcal{J}$ de la forma $C_n = \left[\frac{1}{3}, x\right]$, donde $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Sea $\text{mín} : C([0,1]) \to [0,1]$ la función definida en la Proposición 1.2.7, en donde se prueba que ésta es continua. Notemos que $\text{mín}(A_n) = \text{mín}\left(\left[0, \frac{1}{3\cdot 2^n}\right]\right) = 0$ y $\text{mín}(B_n) = \text{mín}\left(\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 2^n}\right]\right) = \frac{2}{3}$. Como $\mathcal{J}$ es un subcontinuo de $C(X)$ y mín es una función continua, $\text{mín}(\mathcal{J})$ es un continuo. De modo que, $\left[0, \frac{2}{3}\right] \subset \text{mín}(\mathcal{J})$. Por tanto, $\frac{1}{3} \in \text{mín}(\mathcal{J})$. Así que, existe un elemento $C_n \in \mathcal{J}$ tal que $\text{mín}(C_n) = \frac{1}{3}$. De manera que, existe un elemento $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ tal que $C_n = \left[\frac{1}{3}, x\right]$. Con esto, hemos terminado la prueba de esta afirmación.

Afirmación 5. $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}\right]$, en donde x es como en la Afirmación 4.

Supongamos, por el contrario, que $x > \frac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$. Entonces se satisface que $3x > \sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}$. Como f es estrictamente creciente y $\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} \in [1,2]$, tenemos que:

$$f(3x) > f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}\right) = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(C_n) = \mu\left(\left[\tfrac{1}{3}, x\right]\right) = \tfrac{1}{6}(f(3x) - f(1)) > \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{1}{2^{n-1}} - 1) = \tfrac{1}{3\cdot 2^n} = t_n.$$

Esto nos dice que $\mu(C_n) > t_n$. Lo cual contradice el hecho de $C_n \in \mathcal{J} \subset \mu^{-1}([0, t_n])$. De esta manera, hemos probado que $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}}\right]$.

Afirmación 6. $\sqrt{1 + \frac{1}{2^{n-1}}} < 1 + \frac{1}{2^n}$.

Notemos que

$$1 + \tfrac{1}{2^{n-1}} < 1 + \tfrac{1}{2^{n-1}} + \tfrac{1}{2^{2n}} = (1 + \tfrac{1}{2^n})^2.$$

Lo cual nos lleva a que

$$\sqrt{1 + \tfrac{1}{2^{n-1}}} < 1 + \tfrac{1}{2^n}.$$

Afirmación 7. $H(A_n, C_n) = \frac{1}{3}$.

Teniendo en cuenta las Afirmaciones 5 y 6, tenemos

$$x - \tfrac{1}{3\cdot 2^n} \leq \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + \tfrac{1}{2^{n-1}}} - \tfrac{1}{3\cdot 2^n} < \tfrac{1}{3}.$$

Por la Proposición 1.2.6, $H(A_n, C_n) = \text{máx}\{\frac{1}{3}, x - \frac{1}{3 \cdot 2^n}\} = \frac{1}{3}$, lo que queríamos probar.

Afirmación 8. $H(C_n, B_n) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} - x$.

Aplicando la Proposición 1.2.6, obtenemos que

$$H(C_n, B_n) = \text{máx}\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} - x\}.$$

Utilizando, nuevamente, las Afirmaciones 5 y 6, tenemos

$$\tfrac{1}{3} < \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} - \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + \tfrac{1}{2^{n-1}}} \leq \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} - x.$$

Por lo tanto $H(C_n, B_n) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} - x$. Así terminamos con esta afirmación.

Tenemos que $\mathcal{J}$ es isométrico a $[0, H(A_n, B_n)]$, de manera que

$$H(A_n, B_n) = H(A_n, C_n) + H(C_n, B_n).$$

Por las Afirmaciones 2, 7 y 8,

$$\tfrac{2}{3} = H(A_n, B_n) = H(A_n, C_n) + H(C_n, B_n) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} - x = 1 + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n} - x.$$

De aquí que $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^n}$. Esto es una contradicción, ya que la Afirmación 6 nos dice que

$$x \leq \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + \tfrac{1}{2^{n-1}}}$$

y la Afirmación 5 nos dice que

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{1 + \tfrac{1}{2^{n-1}}} < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Esta contradicción nació del hecho de suponer que H era convexa. Por lo tanto, concluimos que H no es convexa. En resumen, existen una función de Whitney μ para $C([0,1])$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\text{lím}\, t_n = 0$ y la métrica inducida a $\mu^{-1}([0, t_n])$ no es convexa para ningún $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.2.123. *(M. E. Aguilera) Sea X con métrica d. Supongamos que existen una función de Whitney μ para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $(0,1]$ que converge a 0 tales que la métrica de Hausdorff H, inducida por d, en $\mu^{-1}([0, t_n])$ es convexa para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces d también es convexa.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_n \leq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos dos elementos $x, y \in X$. Mostraremos que existe $z \in X$ tal que

$$d(x, z) = d(y, z) = \tfrac{1}{2} d(x, y).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x\}, \{y\} \in \mu^{-1}([0, t_n])$ y H es convexa para $\mu^{-1}([0, t_n])$, tenemos por definición, que existe un elemento $A_n \in \mu^{-1}([0, t_n])$ tal que

$$\tfrac{1}{2} H(\{x\}, \{y\}) = H(\{x\}, A_n) = H(\{y\}, A_n).$$

Así, hemos obtenido la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, de elementos de $\mu^{-1}([0, \frac{1}{2}])$, que es un compacto, por lo tanto, existe una subsucesión convergente $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que $\text{lím}\, A_n = A \in \mu^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.

Utilizando la continuidad de la función H tenemos que

$$\text{lím}\, H(\{x\}, A_{n_k}) = H(\{x\}, \text{lím}\, A_{n_k}) = H(\{x\}, A) \text{ y}$$

$$\text{lím}\, H(\{y\}, A_{n_k}) = H(\{y\}, \text{lím}\, A_{n_k}) = H(\{y\}, A).$$

Notemos que

$$\tfrac{1}{2} H(\{x\}, \{y\}) = H(\{x\}, A_{n_k}) = H(\{y\}, A_{n_k})$$

para toda $k \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\tfrac{1}{2} H(\{x\}, \{y\}) = H(\{x\}, A) = H(\{y\}, A).$$

Por otro lado, usando la continuidad de la función μ y el hecho de que $\mu(A_{n_k}) \leq t_{n_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\mu(A) = \mu(\text{lím}\, A_{n_k}) = \text{lím}\, \mu(A_{n_k}) \leq \text{lím}\, t_{n_k} = 0.$$

Por tanto, $A \in F_1(X)$. Así que, existe un elemento $z \in X$ tal que $A = \{z\}$.

Luego,

$$H(\{x\}, A) = H(\{x\}, \{z\}) = d(x, z) \text{ y}$$

$$H(\{y\}, A) = H(\{y\}, \{z\}) = d(y, z).$$

Entonces

$$d(x,z) = d(y,z) = \tfrac{1}{2}H(\{x\},\{y\}) = \tfrac{1}{2}d(x,y).$$

Con esto termina la demostración de nuestro teorema. ■

Para finalizar esta subsección nos planteamos lo siguiente.

Problema 3.2.124. Sea X con métrica d. Supongamos que existen una función de Whitney μ para $C(X)$ y $t \in (0,1)$ tales que la métrica de Hausdorff H, inducida por d, en $\mu^{-1}([0,t])$ es convexa. ¿Será d una métrica convexa?

3.2.11. Irreducibilidad, propiedad cubriente, C^*-suavidad absoluta y la Clase(W)

En esta subsección veremos que los bloques de Whitney para cualquier continuo X nunca tienen ninguna de las siguientes propiedades: ser irreducible, tener la propiedad cubriente, ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W).

Definición 3.2.125. Un continuo X es *irreducible respecto a un subconjunto* Z de X si ningún subcontinuo propio de X contiene a Z. Un continuo X es *irreducible* si X es irreducible respecto a $\{p,q\}$ para algunos $p,\ q \in X$, en este caso se dice que X *es irreducible entre* p y q.

Proposición 3.2.126. *(M. E. Aguilera) Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible.*

Demostración. Sean A y B dos elementos distintos de $\mu^{-1}([0,t])$. Veremos que existe un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ que los contiene. Por el Teorema 8.3 de [12],

$$\mathcal{A} = \mu^{-1}(\mu(A))$$

es un continuo.

Caso i. $\mu(A) = \mu(B)$.

Es claro que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ y que éste contiene a A y B.

Caso ii. $\mu(B) < \mu(A)$.

Como $B \subsetneq X$, por el Lema 2.2.4, existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $B \subsetneq C$ y, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to \mu^{-1}([\mu(B), \mu(A)])$ de B a C. Como $C \in \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \alpha$ y $\mathcal{A} \cup \operatorname{Im} \alpha \subset \mu^{-1}([0,t])$, $\mathcal{A} \cup \operatorname{Im} \alpha$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}([0,t])$. Por otra parte, por el Lema 8.4 de [12], $\mu^{-1}(\mu(B))$ es un continuo no degenerado. De modo que, existe un elemento $D \in \mu^{-1}(\mu(B)) \setminus \{B\}$. Como $\mu(B) < \mu(A)$, $B \notin \mathcal{A}$. Tomemos $r \in (0,1]$, entonces (utilizando las propiedades de arco ordenado de α) $B = \alpha(0) \subsetneq \alpha(r)$. Así que $\mu(B) < \mu(\alpha(r))$, esto nos lleva a que $D \neq \alpha(r)$. En el caso en que $r = 0$, $\alpha(0) = B$ y $D \neq B$. Por lo tanto, $D \notin \operatorname{Im} \alpha$. Así, hemos probado que $D \notin \mathcal{A} \cup \operatorname{Im} \alpha$, de manera que $\mathcal{A} \cup \operatorname{Im} \alpha$ es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}([0,t])$ y contiene a A y B. Con esto terminamos la prueba de que $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible. ■

Corolario 3.2.127. *La propiedad de ser irreducible no es inducida débilmente a los bloques de Whitney.*

Demostración. Es sencillo ver que $X = [0,1]$ es irreducible. Por la Proposición 3.2.126, para toda función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y todo $t \in (0, \frac{1}{2})$, $\mu^{-1}([0,t])$ no es irreducible. Así que, la propiedad de ser irreducible no es inducida débilmente a los bloques de Whitney. ■

Corolario 3.2.128. *La propiedad de ser irreducible es inducida por los bloques de Whitney.*

Demostración. Como no existe un continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t])$ sea irreducible para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y algún $t \in (0,1)$, esto por la Proposición 3.2.126, concluimos que la propiedad se ser irreducible es inducida por los bloques de Whitney. ■

Definición 3.2.129. Para un continuo X, definimos $C^* : C(X) \to C(C(X))$ como $C^*(A) = C(A)$. Un continuo X es *C^*-suave en* $A \in C(X)$ si la función C^* es continua en A. Un continuo X es *C^*-suave* si C^* es continua en A para todo $A \in C(X)$. Un continuo X es *absolutamente C^*-suave* si cuando X es un subcontinuo de un continuo Z, se tiene que la función $C^* : C(Z) \to C(C(Z))$

es continua en X.

Definición 3.2.130. Una función continua y suprayectiva entre continuos $f : X \to Y$ es *débilmente confluente* si para cada subcontinuo K de Y, existe una componente C de $f^{-1}(K)$ tal que $f(C) = K$.

Definición 3.2.131. El continuo X *pertenece a la Clase*(W) si toda función suprayectiva de cualquier continuo en X es débilmente confluente. Se denota $X \in \text{Clase}(W)$.

Definición 3.2.132. Un continuo X tiene la *propiedad cubriente*, escrito $X \in CP$, si ningún subcontinuo propio de $\mu^{-1}(t)$ cubre X para cualquier función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y cualquier $t \in [0, 1]$.

El teorema siguiente es el resultado 67.1 de [13].

Teorema 3.2.133. *Para un continuo X son equivalentes:*
(a) $X \in CP$,
(b) X es absolutamente C^*-suave, y
(c) $X \in$ Clase(W).

El siguiente teorema es el 14.73.1 de [23].

Teorema 3.2.134. *Si $X \in CP$, entonces X es irreducible.*

Proposición 3.2.135. *(M. E. Aguilera) Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $t \in (0, 1)$. Entonces se tiene que $\mu^{-1}([0, t]) \notin CP$, $\mu^{-1}([0, t])$ no es absolutamente C^*-suave y $\mu^{-1}([0, t]) \notin$ Clase(W).*

Demostración. Por la Proposición 3.2.126, $\mu^{-1}([0, t])$ no es irreducible. Por el Teorema 3.2.134, $\mu^{-1}([0, t]) \notin CP$. Por el Teorema 3.2.133, concluimos que $\mu^{-1}([0, t]) \notin$ *Clase*(W) y $\mu^{-1}([0, t])$ no es absolutamente C^*-suave. ■

El siguiente lema es el resultado 14.13.1 de [23].

Lema 3.2.136. *Sea X encadenable por continuos. Entonces $C \in CP$.*

Corolario 3.2.137. *La propiedad cubriente, ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W) no son propiedades inducidas débilmente a los bloques de Whitney.*

Demostración. Sea $X = [0,1]$. Por el Lema 3.2.18, X es encadenable por continuos. Aplicando el Lema 3.2.136 obtenemos que $X \in CP$. Para cada función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y todo número $t \in (0, \frac{1}{2})$, por la Proposición 3.2.135, $\mu^{-1}([0,t]) \notin CP$. De modo que, la propiedad cubriente no es inducida débilmente a los bloques de Whitney. Como la propiedad cubriente, ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W) son propiedades equivalentes, concluimos que ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W) tampoco son propiedades inducidas débilmente a los bloques de Whitney. ■

Corolario 3.2.138. *La propiedad cubriente, ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W) son propiedades inducidas por los bloques de Whitney.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.135, no existe un continuo X tal que $\mu^{-1}([0,t]) \in CP$ para alguna función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ y algún $t \in (0,1)$. Por lo tanto la propiedad cubriente es inducida por los bloques de Whitney. Como tener la propiedad cubriente, ser absolutamente C^*-suave y estar en la Clase(W) son propiedades equivalentes, por el Teorema 3.2.133, concluimos también que ser absolutamente C^*-suave y pertenecer a la Clase(W) son propiedades inducidas por los bloques de Whitney. ■

3.3. Resumen

En esta sección presentamos un resumen de las propiedades topológicas analizadas en la Sección 3.2. Con el símbolo "✓" indicaremos si la propiedad satisface la definición o no en base a las Observaciones 3.2.2 y lo probado en Sección 3.2. Con los símbolos de interrogación "¿ ?" señalaremos lo que todavía no tiene respuesta (previamente hicimos la preguntas en la subsección correspondiente).

Propiedades topológicas	P es inducida a todos los bloques de Whitney		P es inducida a los bloques pequeños de Whithey		P es inducida débilmente a los bloques de Whitney		P es inducida por los bloques de Whitney		P es inducida fuertemente por los bloques de Whitney	
	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no
Ser arcoconexo	3.2.5		✓		✓			✓		3.2.8
Ser localmente conexo	3.2.10		✓		✓		3.2.11		✓	
Ser conexo en pequeño	¿3.2.12?		¿3.2.13?		¿3.2.14?		¿3.2.15?		¿3.2.16?	
Ser encadenable por continuos	3.2.20		✓		✓		¿3.2.22?		3.2.21	
Propiedad de Kelley		✓		✓		3.2.28	3.2.25		✓	
Ser semiaposindético	3.2.33		✓		✓			✓		3.2.42
Ser mutuamente aposindético	3.2.32		✓		✓			✓		3.2.41
Ser 3-mutuamente aposindético	3.2.32		✓		✓			✓		3.2.41
Ser m-mutuamente aposindético, $m \geq 4$	¿3.2.43?		¿3.2.44?		¿3.2.45?			✓		3.2.41
Ser cerrado cero dimensional aposindético	3.2.56		✓		✓			✓		3.2.57
Ser unicoherente, para X localmente conexo	3.2.67		✓		✓		¿3.2.74?		3.2.69	
Ser unicoherente, para X no localmente conexo	¿3.2.71?		¿3.2.72?		¿3.2.73?		¿3.2.74?		3.2.69	
No ser unicoherente, para X localmente conexo	¿3.2.71?		3.2.68		✓		3.2.70		✓	
No ser unicoherente, para X no localmente conexo	¿3.2.71?		3.2.68		✓		¿3.2.74?		¿3.2.75?	

Propiedades topológicas	P es inducida a todos los bloques de Whitney		P es inducida a los bloques pequeños de Whithey		P es inducida débilmente a los bloques de Whitney		P es inducida por los bloques de Whitney		P es inducida fuertemente por los bloques de Whitney	
	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no	sí	no
Ser contráctil		✓		3.2.94	¿3.2.98?		¿3.2.99?		¿3.2.100?	
Ser un retracto absoluto		✓		3.2.94	¿3.2.98?		3.2.97		✓	
Ser suave por arcos		✓		3.2.94	¿3.2.98?		¿3.2.99?		¿3.2.100?	
Propiedad del punto fijo		✓		3.2.94	¿3.2.98?		¿3.2.99?		¿3.2.100?	
Ser ∞-conexo		✓		3.2.94	¿3.2.98?		¿3.2.99?		¿3.2.100?	
Ser un retracto de vecindad absoluto	¿3.2.116?		¿3.2.117?		¿3.2.118?			3.2.115	¿3.2.119?	
Ser localmente contráctil	¿3.2.116?		¿3.2.117?		¿3.2.118?			3.2.115	¿3.2.119?	
Ser irreducible		✓		✓		3.2.127	3.2.128		✓	
Tener la propiedad cubriente, ser C^*-suave o pertenecer a la Clase(W)		✓		✓		3.2.137	3.2.138		✓	

Capítulo 4

Gráficas finitas

En los Ejemplos 3.1.1 y 3.1.2 ya comenzamos el estudio de las gráficas finitas. En este capítulo presentamos los resultados que hemos obtenido acerca de este tipo de continuos en lo que respecta a los bloques de Whitney.

4.1. El arco y la curva cerrada simple

Como ya vimos en los Ejemplos 3.1.1 y 3.1.2, los modelos de los bloques de Whitney para $[0,1]$ y S son una 2-celda y $S \times [0,1]$, respectivamente. En esta sección lo probamos de manera general, es decir, vemos que los bloques de Whitney para los casos en que X es un arco o una curva cerrada simple son una 2-celda y un espacio homeomorfo a $S \times [0,1]$, respectivamente. También veremos el recíproco, es decir, si los bloques de Whitney de X son una 2-celda o un espacio homeomorfo a $S \times [0,1]$, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.

Lema 4.1.1. *Sean $X = [0,1]$, $\mu : C([0,1]) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Definimos la función $\zeta : \mu^{-1}([0,t]) \to [0,1]$ como*

$$\zeta([x,y]) = \tfrac{x}{1+x-y},$$

Entonces ζ es una función continua y $\zeta|_{\mu-1(s)} : \mu^{-1}(s) \to [0,1]$ es homeomorfismo para cada $s \in [0,t]$.

Demostración. Tomemos $[x,y] \in \mu^{-1}([0,t])$. Como $t < 1$, tenemos $[x,y] \subsetneq [0,1]$. De modo que $y - x < 1$, lo cual nos lleva a que $1 + x - y > 0$. Además, de $y < 1$, se sigue que $\frac{x}{1+x-y} < 1$. Por tanto, ζ está bien definida.

Observamos que

$$\zeta([x,y]) = \frac{\text{mín}([x,y])}{1+\text{mín}([x,y])-\text{máx}([x,y])}.$$

Por la Proposición 1.2.7, las funciones $\text{mín}([x,y])$ y $\text{máx}([x,y])$ son continuas. Como vimos en el párrafo anterior $1 + \text{mín}([x,y]) - \text{máx}([x,y]) > 0$, así que ζ es una función continua.

Consideremos $s \in [0,t]$. Veamos que $\zeta|_{\mu^{-1}(s)} : \mu^{-1}(s) \to [0,1]$ es una función inyectiva. Sean $[a,b]$ y $[x,y]$ dos elementos de $\mu^{-1}(s)$. Entonces, por el Lema 2.3.9, tenemos $a < x$ y $b < y$ o $x < a$ y $y < b$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x < a$ y $y < b$. Entonces $0 \leq 1 - b < 1 - y$. Multiplicando las desigualdades $x < a$ y $1 - b < 1 - y$ obtenemos $x - bx < a - ay$. Sumando el término ax en ambos lados tenemos

$$x(1 - b + a) = x - bx + ax < a - ay + ax = a(1 - y + x).$$

Notemos que $b - a < 1$ y $y - x < 1$. Entonces $0 < 1 + a - b$ y $0 < 1 + x - y$. De modo que,

$$\zeta([x,y]) = \frac{x}{1+x-y} < \frac{a}{1+a-b} = \zeta([a,b]).$$

Con esto terminamos la parte de que $\zeta|_{\mu^{-1}(s)}$ es inyectiva.

Verifiquemos que $\zeta|_{\mu^{-1}(s)} : \mu^{-1}(s) \to [0,1]$ es suprayectiva. Tomemos $r \in [0,1]$. Como $\{0\} \subsetneq [0,1]$ y $s \in [0,1] = [\mu(\{0\}), \mu([0,1])]$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $A \in \mu^{-1}(s)$ tal que $0 \in A$. De manera similar, obtenemos que existe un elemento $B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $1 \in B$. Observemos que $\zeta(A) = 0$ y $\zeta(B) = 1$. Como ζ es una función continua y $\mu^{-1}(s)$ es conexo (por el Teorema 8.3 de [12]), tenemos que $\zeta(\mu^{-1}(s)) = [0,1]$. De modo que, existe un elemento $C \in \mu^{-1}(s)$ tal que $\zeta(C) = r$. Con esto hemos probado que la función $\zeta|_{\mu^{-1}(s)}$ es suprayectiva.

Como $\zeta|_{\mu^{-1}(s)}$ es una función que va de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, $\zeta|_{\mu^{-1}(s)}$ es un homeomorfismo. ■

Teorema 4.1.2. *(M. E. Aguilera) Los bloques de Whitney de un arco son 2-celdas.*

Demostración. Sean μ una función de Whitney para $C([0,1])$ y $t \in (0,1)$. Definimos la función $f : \mu^{-1}([0,t]) \to [0,1] \times [0,t]$ como

$$f([x,y]) = \Big(\zeta([x,y]), \mu([x,y])\Big).$$

En donde $\zeta : \mu^{-1}([0,t]) \to [0,1]$ es la función que se definió en el Lema 4.1.1. Como en cada coordenada de f tenemos una función continua, concluimos que f también es una función continua.

Veamos que f es inyectiva. Consideremos elementos $[a,b], [x,y] \in \mu^{-1}([0,t])$ tales que $f([a,b]) = f([x,y])$. Esto significa que

(a) $\mu([a,b]) = \mu([x,y])$ y

(b) $\zeta([a,b]) = \zeta([x,y])$.

Sea $s = \mu([a,b])$. Entonces $[a,b], [x,y] \in \mu^{-1}(s)$. Como $\zeta|_{\mu^{-1}(s)}$ es inyectiva (por el Lema 4.1.1) y $\zeta([a,b]) = \zeta([x,y])$, obtenemos que $[a,b] = [x,y]$. Por tanto, f es inyectiva.

Probemos que f es suprayectiva. Tomemos $(r,s) \in [0,1] \times [0,t]$. Como $\zeta|_{\mu^{-1}(s)} : \mu^{-1}(s) \to [0,1]$ es suprayectiva (por el Lema 4.1.1), existe $[x,y] \in \mu^{-1}(s) \subset \mu^{-1}([0,t])$ tal que $\zeta([x,y]) = r$. De modo que $f([x,y]) = (r,s)$. Por tanto f es suprayectiva.

Como $\mu^{-1}([0,t])$ es compacto y $[0,1] \times [0,t]$ es Hausdorff, f es un homeomorfismo. Con esto hemos visto que los bloques de $C([0,1])$ son 2-celdas.

Sean X un arco, $\nu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $s \in (0,1)$. Por el Lema 2.3.5, existe un bloque de Whitney de $C([0,1])$ que es homeomorfo a $\nu^{-1}([0,s])$. Como los bloques de Whitney de $C([0,1])$ son 2-celdas, concluimos que $\nu^{-1}([0,s])$ es una 2-celda. ■

Definición 4.1.3. Sea D la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. A un espacio homemorfo a

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : D((0, 0), (x, y)) = 1\}$$

le llamaremos *curva cerrada simple.*

Teorema 4.1.4. *(M. E. Aguilera) Los bloques de Whitney de una curva cerrada simple son homeomorfos a* $S \times [0, 1]$.

Demostración. Sean μ una función de Whitney para $C(S)$ y $t \in (0, 1)$. Definimos la función $f : \mu^{-1}([0, t]) \to S \times [0, t]$ como:

$$f(A) = (m(A), \mu(A)),$$

en donde $m : C(S) \setminus \{S\} \to S$ es la función punto medio. Como en cada coordenada de la función f tenemos una función continua, f también es una función continua.

Veamos que f es suprayectiva. Cabe destacar que $f(\{u\}) = (u, 0)$ para cada $u \in S$. Tomemos $(u, s) \in S \times (0, t]$. Supongamos que $u = \exp(2\pi i\theta_0)$ para algún valor $\theta_0 \in [0, 1]$. Consideremos el arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to C(S)$, dado por

$$\alpha(t) = \{\exp(2\pi i\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [\theta_0 - \tfrac{t}{2}, \theta_0 + \tfrac{t}{2}]\}.$$

Notemos que $\mu(\alpha(0)) = \mu(\{u\}) = 0$ y $\mu(\alpha(1)) = \mu(S) = 1 > t$. Como $s \in (0, t]$, aplicamos el Lema 2.2.9 para asegurar la existencia de un número $r \in (0, 1)$ tal que $\mu(\alpha(r)) = s$. Por la definición del arco ordenado α, $m(\alpha(r)) = u$. Por lo tanto, $f(\alpha(r)) = (u, s)$. Así, concluimos la parte de que f es suprayectiva.

Verifiquemos que f es una función inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}([0, t])$ tales que $f(A) = f(B)$. Así que $m(A) = m(B)$ y $\mu(A) = \mu(B)$. Como A y B son arcos o conjuntos de un solo punto y $m(A) = m(B)$, tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Como $\mu(A) = \mu(B)$, concluimos que $A = B$. Con esto hemos, visto que f es inyectiva.

Como $\mu^{-1}([0, t])$ es compacto, f es un homeomorfismo. Así, concluimos que $\mu^{-1}([0, t])$ es homeomorfo a $S \times [0, t]$.

Sean X una curva cerrada simple, $\nu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $s \in (0, 1)$. Por el Lema 2.3.5, existe un bloque de Whitney de $C(S)$

que es homeomorfo a $\nu^{-1}([0,s])$. Como los bloques de Whitney de $C(S)$ son homeomorfos a $S \times [0,1]$, concluimos que $\nu^{-1}([0,s])$ es homeomorfo a $S \times [0,1]$. ■

El siguiente teorema es el resultado 8.40 de [24].

Teorema 4.1.5. *Sea X un continuo no degenerado, localmente conexo, que no contiene triodos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Teorema 4.1.6. *(M. E. Aguilera) Sea X un continuo.*

(a) Si los bloques de Whitney para X son 2-celdas, entonces X es un arco.

(b) Si los bloques de Whitney para X son homeomorfos a $S \times [0,1]$, entonces X es una curva cerrada simple.

Demostración. En ambos casos, los bloques de Whitney para X son localmente conexos. Esto implica, por el Teorema 3.2.11, que X es localmente conexo.

Si suponemos que X contiene un triodo simple, por el Lema 4.2.14, existe un número $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}([0,t])$ contiene una 3-celda. Lo cual no puede ser en ninguno de los casos. Así que X es un continuo no degenerado, localmente conexo, que no contiene triodos simples. Por el Teorema 4.1.5, X es un arco o una curva cerrada simple.

En el caso (a), si suponemos que X es una curva cerrada simple, por el Teorema 4.1.4, los bloques de X son homeomorfos a $S \times [0,1]$, lo cual no puede ser en este caso. Así, obtenemos que X es un arco.

En el caso (b), si tuviéramos que X es un arco, por el Teorema 4.1.2, tendríamos que sus bloques son 2-celdas, lo cual no puede ser ya que estamos suponiendo que éstos son homeomorfos a $S \times [0,1]$. Por lo tanto, en este caso X es homeomorfo a S. ■

4.2. Gráficas distintas a $[0,1]$, a S y a los n-odos

En esta sección veremos que cuando X es una gráfica distinta de una curva cerrada simple con al menos una curva cerrada simple o un árbol distinto de un n-odo entonces es posible encontrar al menos dos bloques de Whiney distintos entre ellos. Estos resultados lo utilizaremos más adelante para probar que si los bloques de Whitney para X son homeomorfos entre sí, entonces X es un n-odo, una curva cerrada simple o un arco.

Definición 4.2.1. Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión de un número finito de arcos de manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito.

Después de estudiar los bloques de Whitney para los casos en que X es un arco o una curva cerrada simple, es natural preguntarse cómo son los bloques de Whitney, para el caso de una gráfica finita G. Primero daremos algunos conceptos y resultados para poder dar los resultados principales.

Definición 4.2.2. Dado un natural $n \geq 3$, un *n-odo simple* Y es una gráfica finita que es la unión de n arcos $J_1, \ldots, J_n$ tales que existe un punto $p \in Y$ con la propiedad de que $J_i \cap J_j = \{p\}$ si $i \neq j$ y p es un punto extremo para cada uno de los arcos J_i.

Definición 4.2.3. Sea G una gráfica finita. Dado un punto $p \in G$, definimos su *orden*, como el número natural n tal que p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n-odo, de manera que el vértice del n-odo se corresponde con p. Aquí daremos la posibilidad de que el orden sea 1 o 2, para el caso en que sea 2, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco pero que p no es extremo de éste, y para el caso en que el orden sea 1, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco y que p es punto extremo de él. Este orden será denotado por $\mathrm{ord}_G(p)$. A los puntos de orden 1 se les llama *puntos terminales* de G, a los puntos de orden 2 se les llama *puntos ordinarios* de G y a los puntos de orden mayor o igual que 3 se les llama *puntos de ramificación* de G. Llamamos $R(G)$ al conjunto de puntos de ramificación de G.

Supondremos que G no es homeomorfa a una circunferencia ya que ésta causa problemas con las definiciones que acabamos de dar.

Definición 4.2.4. Diremos que una *arista* de G es un arco que une a un par de puntos no ordinarios y que sólo sus extremos son puntos no ordinarios.

Así que, una arista puede unir: dos puntos terminales (en este caso G es un arco); dos puntos de ramificación; o un punto de ramificación con uno terminal. Se hace la convención de permitir que una arista sea una circunferencia pero que sólo tenga un punto de ramificación en ella.

Como G no es una circunferencia, con esta definición y esta convención, se puede probar que una gráfica es la unión de sus aristas y que dos aristas diferentes se tienen que intersectar en un punto de ramificación; en dos puntos de ramificación o no intersectarse.

Definición 4.2.5. Una *subgráfica* de una gráfica finita G es un subcontinuo de G que es una unión de algunas aristas de G.

Definición 4.2.6. Un *árbol* es una gráfica finita que no contiene ninguna curva cerrada simple.

Teorema 4.2.7. *(Teorema 3.2 de [25].) Sea* X *un espacio topológico tal que* $\dim(X) \leq n$*. Si* $Z \subset X$*, entonces* $\dim(Z) \leq n$*.*

Corolario 4.2.8. *Si* $Y \subset X$ *y* $p \in Y$*, entonces* $\dim_p(Y) \leq \dim_p(X)$*.*

Teorema 4.2.9. *(Theorem 9.5, [25]) Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, se cumple* $\dim(I^n) = n$*.*

Teorema 4.2.10. *(Theorem 2.4 de [21]) Sean X una gráfica finita y A un elemento de $C(X)$. Entonces*

$$\dim_A(C(X)) = 2 + \textstyle\sum_{p\in(R(X)\cap A)}(\mathrm{ord}_X(p) - 2).$$

Teorema 4.2.11. *Sea G una gráfica finita distinta de una curva cerrada simple y con al menos una subgráfica que sí sea una curva cerrada simple. Entonces G no es unicoherente.*

Demostración. Sea A una curva cerrada simple. Consideremos un arco J que esté contenido en A y tal que $J \cap R(G) = \emptyset$. Supongamos que x y y son los extremos de J. Sea I el arco contenido en A tal que $A = I \cup J$ y $J \cap I = \{x, y\}$, entonces x y y también son los extremos de I. Afirmamos que

$$G \setminus (J \setminus \{x, y\})$$

es conexo. Para probarlo, suponemos lo contrario. Entonces existen cerrados no vacíos H y K tales que

$$G \setminus (J \setminus \{x, y\}) = H \cup K.$$

Caso (i). $x, y \in H$. Como $x, y \in J \cap H$ y $J \cap (H \cup K) = \{x, y\}$, $J \cap K = \emptyset$. Por lo tanto, $(H \cup J) \cap K = \emptyset$. Observemos que $G = (H \cup J) \cup K$. Debido a que H y K son cerrados no vacíos, tenemos que $H \cup J$ y K son una separación de G, lo cual no puede ser ya que G es conexo.

Caso(ii). $x \in H$ y $y \in K$. En este caso, como $x \in H \cap I$ e I es un conexo de $G \setminus (J \setminus \{x, y\})$, tenemos que $I \subset H$. Esto nos lleva a que $y \in H$, lo cual no puede ser ya que H y K son ajenos.

Como obtuvimos una contradicción en cada uno de los casos, concluimos que $G \setminus (J \setminus \{x, y\})$ es un conexo. Notemos que

$$G \setminus (J \setminus \{x, y\}) \cap J = \{x, y\}.$$

Esto nos dice que G no es unicoherente, que es lo queríamos probar. ■

La prueba del siguiente teorema se encuentra en [11] (Teorema D. pág. 253).

Teorema 4.2.12. *Sea X un continuo localmente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) X es una curva cerrada simple;
(b) existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ no es unicoherente para cada $t < 1$;
(c) cada nivel de Whitney para $C(X)$ no es unicoherente.

Teorema 4.2.13. *(M. E. Aguilera) Sea X una gráfica finita distinta de una curva cerrada simple y con al menos una subgráfica que es una curva cerrada simple. Si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces existen s, $t \in (0,1)$ tales que $\mu^{-1}([0,s])$ no es homeomorfo a $\mu^{-1}([0,t])$.*

Demostración. Por el Teorema 4.2.11, sabemos que X no es unicoherente. Aplicando el Teorema 3.2.68, tenemos que existe un número $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}([0,t_0])$ no es unicoherente.

Por otra parte, como X es distinta de una curva cerrada simple, por el Teorema 4.2.12 (c), existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(s_0)$ es unicoherente. Como X es localmente conexo, aplicamos el Corolario 3.2.65 y obtenemos que $\mu^{-1}([0,s_0])$ es unicoherente.

Así hemos obtenido los bloques de Whitney $\mu^{-1}([0,t_0])$ y $\mu^{-1}([0,s_0])$, donde el primero no es unicoherente y el segundo sí lo es. Por tanto $\mu^{-1}([0,t_0])$ y $\mu^{-1}([0,s_0])$ no son homeomorfos, que es lo que queríamos probar. ■

Lema 4.2.14. *(M. E. Aguilera) Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Supongamos que existen dos subcontinuos A y B de X tales que $A \subset B$ y $B \setminus A$ tiene al menos n componentes, entonces existe un número $t > 0$ tal que $\mu^{-1}([0,t])$ contiene una n-celda.*

Demostración. Sean $K_1, \ldots, K_n$ diferentes componentes de $B \setminus A$. Por el Lema 7.2 de [12], sabemos que $A \cup K_i$ es un subcontinuo de X que contiene propiamente a A, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que $\mu(A) < \mu(A \cup K_i)$. Entonces fijemos un número t_i tal que $\mu(A) < t_i < \mu(A \cup K_i)$. Por el Lema 2.2.4, existe $C_i \in \mu^{-1}(t_i)$ tal que $A \subsetneq C_i \subsetneq A \cup K_i$.

Como $A \subset C_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es un subcontinuo de X. Veamos que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es un subcontinuo propio de X. Como $A \subsetneq C_1 \subsetneq A \cup K_1$, existe un elemento $x \in K_1 \setminus C_1$ y, por lo tanto, $x \notin A$. Como las componentes K_i son ajenas, sabemos que $x \notin K_i$ para $i \neq 1$. Lo cual nos dice que $x \in K_1 \setminus (A \cup K_i) \subset K_1 \setminus C_i$ para $i \neq 1$. Así concluimos que $x \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$.

Teniendo en cuenta que $A \subsetneq C_i \subsetneq A \cup K_i$ y que las componentes K_i son ajenas, obtenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset B \setminus A$$

y que $\emptyset \neq C_i \setminus A \subset K_i$, así que, $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \setminus A$ tiene al menos n componentes. Por el Teorema 7.2 de [12], $C(X)$ contiene una n celda. Sea $\mathcal{A}$ la n-celda. De la demostración del mismo teorema tenemos que $\mathcal{A} \subset C(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$.

Tomemos $t = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$. Observemos que $t < 1$, ya que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subsetneq X$. Sea $K \in C(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$. Entonces $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Como μ es una función de Whitney, $\mu(K) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = t$. Por lo tanto, $K \in \mu^{-1}([0, t])$. Con esto hemos visto que $C(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \subset \mu^{-1}([0, t])$. Por lo tanto $\mathcal{A} \subset \mu^{-1}([0, t])$. Esto termina la prueba del lema. ■

Teorema 4.2.15. *(M. E. Aguilera) Sean X un árbol distinto de un n-odo y $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney. Entonces existen s, $t \in (0, 1)$ tales que $\mu^{-1}([0, s])$ no es homeomorfo a $\mu^{-1}([0, t])$.*

Demostración. Supongamos que $J_1, \ldots, J_l$ son las aristas de X y $p_1, \ldots,$ p_m son los puntos de ramificación de X. Notemos que, como X no es un n-odo, $m \geq 2$. Sean $k_i = \mathrm{ord}_X(p_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $k = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Consideremos $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $k = \mathrm{ord}_X(p_{i_0})$. Considerando los arcos J_i que contienen a p_{i_0}, como X no es un n-odo, podemos elegir un arco J_{l_0} que contenga a un punto de ramificación p_{j_0} distinto de p_{i_0}. Entonces $\mathrm{ord}_X(p_{j_0}) \geq 3$. Sea

$$Y = \bigcup\{J_i : J_i \cap \{p_{i_0}, p_{j_0}\} \neq \emptyset\}.$$

Observemos que $Y \setminus J_{l_0}$ tiene al menos $k+1$ componentes. Por el Lema 4.2.14, existe $t \in (0, 1)$ tal que $\mu^{-1}([0, t])$ contiene una $(k + 1)$-celda. Por el Teorema 4.2.9, sabemos que la dimensión de la $(k + 1)$-celda es $k + 1$. Por el

Teorema 4.2.7, $\dim(\mu^{-1}([0,t])) \geq k+1$.

Tomemos $s > 0$ tal que $s < \text{mín}\{\mu(J_i) : i \in \{1,\ldots,l\}\}$. Verifiquemos que $\dim(\mu^{-1}[0,s]) \leq k$. Consideremos $A \in \mu^{-1}([0,s])$. Entonces $J_i \not\subset A$ para ninguna $i \in \{1,\ldots,l\}$, lo cual implica que A contiene a lo más un punto de ramificación. Por el Teorema 4.2.10, $\dim_A(C(X)) = 2 + (k_i - 2) = k_i$, para el caso en que A contenga un punto de ramificación, y $\dim_A(C(X)) = 2$ en el caso en que A no tenga ningún punto de ramificación. Como $k_i \geq 3$ y $k \geq k_i$, para toda $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\dim_A(C(X)) \leq k$ para cada $A \in \mu^{-1}([0,s])$. Por tanto, aplicando el Corolario 4.2.8, tenemos que $\dim_A(\mu^{-1}([0,s])) \leq \dim_A(C(X))$ para cada $A \in \mu^{-1}([0,s])$. De modo que $\dim_A(\mu^{-1}([0,s])) \leq k$ para cada $A \in \mu^{-1}([0,s])$, lo cual, por definición, nos conduce a que $\dim(\mu^{-1}([0,s])) \leq k$.

Así hemos obtenido dos bloques de dimensión distinta, concluimos con esto que $\mu^{-1}([0,t])$ y $\mu^{-1}([0,s])$ no son homeomorfos. ■

Como consecuencia de los Teoremas 4.2.13 y 4.2.15 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.16. *(M. E. Aguilera) Sea X una gráfica finita. Si todos los bloques de Whitney para X son homeomorfos entre sí, entonces X es un n-odo, una curva cerrada simple o un arco.*

Terminamos este capítulo preguntando lo siguiente.

Problema 4.2.17. ¿Serán todos los bloques de Whitney de un n-odo homeomorfos entre sí?

Problema 4.2.18. ¿Cuáles son las gráficas finitas tal que los bloques de Whitney que produce una función de Whitney μ no dependen de μ?

Capítulo 5

$\mu^{-1}([0,t])$ no homeomorfo a $X \times [0,1]$

En este capítulo veremos algunas condiciones que se le piden al continuo X para que algunos de sus bloques de Whitney no resulten homeomorfos a $X \times [0,1]$.

5.1. Contener un continuo terminal

Primero veremos dos lemas que nos ayudarán a probar el teorema principal de esta sección, el cual nos dice que, dado un continuo X, si existe un subcontinuo terminal no degenerado de X que es distinto de X, entonces los bloques de Whitney suficientemente grandes no son homeomorfos a $X \times [0,1]$.

Definición 5.1.1. Decimos que $K \in C(X)$ es *terminal* si cada vez que un elemento $C \in C(X)$ satisface que $C \cap K \neq \emptyset$, se tiene que $K \subset C$ o $C \subset K$.

Lema 5.1.2. *Sean $K \in C(X)$ terminal y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ una trayectoria tal que $\alpha(0) \in C(K)$ y $\alpha(1) \notin C(K)$. Entonces $K \in \alpha([0,1])$.*

Demostración. Supongamos que $K \notin \alpha([0,1])$. Como $\alpha([0,1]) \cap C(K)$ es un cerrado no vacío y α es una función continua, el conjunto

$$\alpha^{-1}(\alpha([0,1]) \cap C(K)) = \{s \in [0,1] : \alpha(s) \in C(K)\}$$

también es cerrado. De modo que, podemos considerar al número

$$s_0 = \max\{s \in [0,1] : \alpha(s) \in C(K)\}.$$

Notemos que $\alpha(s_0) \neq K$, ya que $K \notin \alpha([0,1])$. Por la definición del número s_0, $\alpha(s_0) \subset K$. Por lo tanto, $\alpha(s_0) \subsetneq K$.

Fijemos un elemento $x \in K \setminus \alpha(s_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_d(\varepsilon, x) \cap N(\varepsilon, \alpha(s_0)) = \emptyset.$$

Por la continuidad de α, existe un número $\delta > 0$ tal que $H(\alpha(s), \alpha(s_0)) < \varepsilon$ para todo número $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$.

Afirmación 1. $\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])$ es un subcontinuo de X que intersecta a K.

La primera parte se sigue de la Proposición 1.2.5. Para la segunda parte, notemos que $\alpha(s_0) = \alpha(s_0) \cap K \subset \bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])$. Por tanto, nuestra afirmación es cierta ya que $\alpha(s_0) \neq \emptyset$.

Afirmación 2. $K \not\subset \bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])$.

Sea $s \in [s_0, s_0+\delta]$. Entonces $H(\alpha(s_0), \alpha(s)) < \varepsilon$. Por la Proposición 1.0.10, sabemos que $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, \alpha(s_0))$. Por tanto,

$$\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta]) \subset N(\varepsilon, \alpha(s_0)).$$

De modo que,

$$B_d(\varepsilon, x) \cap \left(\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])\right) \subset B_d(\varepsilon, x) \cap N(\varepsilon, \alpha(s_0)) = \emptyset.$$

Lo que nos dice que

$$B_d(\varepsilon, x) \cap \left(\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])\right) = \emptyset.$$

Entonces $x \notin \bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])$. Por lo tanto $K \not\subset \bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta])$.

Afirmación 3. $\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta]) \not\subset K$.

Por la definición del número s_0, $\alpha(s_0 + \delta) \not\subset K$. De modo que, podemos fijar un elemento $y \in \alpha(s_0 + \delta) \setminus K$, de manera que, $y \in \bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta]) \setminus K$.

Así que, $\bigcup \alpha([s_0, s_0 + \delta]) \not\subset K$.

De esta manera, por las Afirmaciones 1, 2, y 3, K no satisface la definición de continuo terminal. Lo que queríamos probar. ■

Lema 5.1.3. *Sean p, q, x tres puntos distintos de $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Entonces existe un arco que conecta a p con q y que no contiene a x.*

Demostración. Sean I y L, el segmento de línea que une a p con q y la línea recta que pasa por p y q, respectivamente. En el caso en que $x \notin I$, I es el arco con la propiedad deseada. Supongamos que $x \in I \subset L$. Fijemos un punto $y \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $y \notin L$. Notemos que p, q y y no son colineales. Consideremos a las líneas rectas M y N que pasan por p y y y por q y y, respectivamente. Como dos líneas rectas que se intersectan sólo se intersectan en un punto o son la misma recta y $y \in (M \cap N) \setminus L$, $L \cap M = \{p\}$ y $L \cap N = \{q\}$. Como $x \in L \setminus \{p, q\}$, $x \notin M \cup N$. Por otra parte, como $y \in M \cup N$, $M \cup N$ es arcoconexo. Así que existe un arco $J \subset M \cup N$ que une a p con q. El hecho de que $x \notin M \cup N$ nos dice que $x \notin J$. Con esto concluimos la prueba de nuestro lema. ■

Teorema 5.1.4. *(M. E. Aguilera) Supongamos que existe un continuo $K \in C(X) \setminus (F_1(X) \cup \{X\})$ que es terminal. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (\mu(K), 1)$. Entonces $\mu^{-1}([0,t])$ no es homeomorfo a $X \times [0,1]$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe un homeomorfismo $f : \mu^{-1}([0,t]) \to X \times [0,1]$. Entonces $f(K) = (x, p)$ para un par de elementos $x \in X$ y $p \in [0,1]$.

Afirmación 1. $f(C(K)) \not\subset \{x\} \times [0,1]$.

Supongamos, por el contrario que $f(C(K)) \subset \{x\} \times [0,1]$. En particular, se tiene que $f(F_1(K)) \subset \{x\} \times [0,1]$. De manera que $f(F_1(K))$ es un subcontinuo de $\{x\} \times [0,1]$, así que $f(F_1(K))$ es un arco o un punto. Como $K \notin F_1(X)$ y éste es homeomorfo a $F_1(K)$, que a su vez es homeomorfo a $f(F_1(K))$, obtenemos que K es un arco. Por el Ejemplo 3.1 de [12], sabemos que $C(K)$ es homeomorfo a una 2-celda y, como f es homeomorfismo, tenemos que $f(C(K))$ es una 2-celda contenida en el arco $\{x\} \times [0,1]$. Esto es un absurdo que prueba la Afirmación 1.

Sea $A \in C(K)$ tal que $f(A) \notin \{x\} \times [0,1]$. Entonces $A \neq K$ (ya que $f(K) = (x,p) \in \{x\} \times [0,1]$), así que, $A \subsetneq K$. De manera que, por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado de A a K. Como $K \neq X$, nuevamente usamos el Teorema 2.2.7 para obtener un arco ordenado de K a X. Por lo tanto, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de A a X tal que $\alpha(\frac{1}{2}) = K$. Ya que $\mu(\alpha(\frac{1}{2})) = \mu(K) < t < 1 = \mu(X) = \mu(\alpha(1))$, existe $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Notemos que, como α es un arco ordenado, $\alpha([0,s]) \subset \mu^{-1}([0,t])$ (por el Lema 2.2.6).

Supongamos que $\pi : X \times [0,1] \to X$ es la proyección a la primera coordenada. Notemos que $f(A) = (y,q)$ para un par de elementos $y \in X \setminus \{x\}$ y $q \in [0,1]$.

Afirmación 2. Existe un número $u \in (\frac{1}{2}, s]$ tal que $\pi(f(\alpha(u))) \neq y$.

Supongamos, por el contrario, que $f(\alpha((\frac{1}{2}, s])) \subset \{y\} \times [0,1]$. Por las continuidades de las funciones α y f, respectivamente,

$$\alpha([\tfrac{1}{2}, s]) = \alpha(\mathrm{cl}_{[0,1]}((\tfrac{1}{2}, s])) \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\alpha((\tfrac{1}{2}, s])) \text{ y}$$

$$f(\mathrm{cl}_{C(X)}(\alpha((\tfrac{1}{2}, s]))) \subset \mathrm{cl}_{X\times[0,1]}(f(\alpha((\tfrac{1}{2}, s]))).$$

Por otra parte, como $\{y\} \times [0,1]$ es un cerrado y estamos suponiendo que $f(\alpha((\frac{1}{2}, s])) \subset \{y\} \times [0,1]$,

$$\mathrm{cl}_{X\times[0,1]}(f(\alpha((\tfrac{1}{2}, s]))) \subset \{y\} \times [0,1].$$

Por lo tanto $f(\alpha([\frac{1}{2}, s])) \subset \{y\} \times [0,1]$. Luego, $f(\alpha(\frac{1}{2})) \in \{y\} \times [0,1]$, pero $f(\alpha(\frac{1}{2})) = f(K) = (x,q)$ y $x \neq y$. Esto es una contradicción que prueba nuestra afirmación.

Observemos que $K = \alpha(\frac{1}{2}) \subsetneq \alpha(u)$, de manera que $\alpha(u) \notin C(K)$. Escribimos $f(\alpha(u)) = (z,r)$ para un par de elementos $z \in X \setminus \{y\}$ y $r \in [0,1]$.

Como el intervalo $[0,u]$ es localmente conexo, el Lema 3.2.80 nos dice que $\pi(f(\alpha([0,u])))$ también es localmente conexo y, por el Teorema 2.3.16, éste es arcoconexo. Sea β un arco en $\pi(f(\alpha([0,u])))$ que une a y con z. Entonces

$\beta \times [0,1]$ es una 2-celda que contiene a $f(A)$ y a $f(\alpha(u))$. Dado un arco γ en $\beta \times [0,1]$ que conecta a $f(A)$ con $f(\alpha(u))$, tenemos que $f^{-1}(\gamma)$ es un arco en $\mu^{-1}([0,t])$ que conecta a A con $\alpha(u)$. Como $A \in C(K)$ y $\alpha(u) \notin C(K)$, por el Lema 5.1.2, $K \in f^{-1}(\gamma)$. Así que $f(K) \in \gamma$. Hemos mostrado que todo arco en $\beta \times [0,1]$ que conecta a $f(A)$ con $f(\alpha(u))$ pasa por $f(K)$. Como esto no puede ocurrir en una 2-celda, por el Lema 5.1.3, obtenemos una contradicción que termina la prueba del teorema. ■

5.2. Contener un R^3-continuo

Veamos primero dos lemas que nos servirán para probar el teorema principal de esta sección, el cual nos dice que, dado un continuo X, si existe un subcontinuo degenerado de X que es un R^3-continuo, entonces los bloques de Whitney no son homeomorfos a $X \times [0,1]$.

Definición 5.2.1. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se define el *límite inferior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_d(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq N\}.$$

Definición 5.2.2. Sea A un subconjunto de X. Decimos que A es un *R^3-conjunto* si existen un abierto U de X tales que $A \subset U$ y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $\liminf C_n = A$. Un continuo que a su vez es un R^3-conjunto se llamará un *R^3-continuo*.

Lema 5.2.3. *Sean $f : X \to Y$ un homeomorfismo, d y D las métricas de X y Y, respectivamente, y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Supongamos que* $\liminf A_n \neq \emptyset$, *entonces* $f(\liminf A_n) = \liminf f(A_n)$.

Demostración. Verifiquemos que

$$f(\liminf A_n) \subset \liminf f(A_n).$$

Tomemos $x \in \liminf A_n$. Veamos que $f(x) \in \liminf f(A_n)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de f, existe un número $\delta > 0$ tal que $f(B_d(\delta, x)) \subset B_D(\varepsilon, f(x))$. El hecho de que $x \in \liminf A_n$ nos dice que existe un natural N tal que $B_d(\delta, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. De modo que,

$$\emptyset \neq f(B_d(\delta, x) \cap A_n) = f(B_d(\delta, x)) \cap f(A_n) \subset B_D(\varepsilon, f(x)) \cap f(A_n),$$

para cada $n \geq N$. Así que, $f(x) \in \liminf f(A_n)$.

Probemos ahora que

$$\liminf f(A_n) \subset f(\liminf A_n).$$

Notemos que $f^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo. Consideremos $y \in \liminf f(A_n)$. Verifiquemos que $f^{-1}(y) \in \liminf A_n$. Sea $\eta > 0$. Por la continuidad de la función f^{-1}, existe $\rho > 0$ tal que $f^{-1}(B_D(\rho, y)) \subset B_d(\eta, f^{-1}(y))$. Como $y \in \liminf f(A_n)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $B_D(\rho, y) \cap f(A_n) \neq \emptyset$ para cada $n \geq M$. Observemos que

$$\emptyset \neq f^{-1}(B_D(\rho, y) \cap f(A_n)) = f^{-1}(B_D(\rho, y)) \cap f^{-1}(f(A_n))$$

$$= f^{-1}(B_D(\rho, y)) \cap A_n \subset B_d(\eta, f^{-1}(y)) \cap A_n,$$

para cada $n \geq M$. De modo que $f^{-1}(y) \in \liminf A_n$, lo cual nos lleva a que $y = f(f^{-1}(y)) \in f(\liminf A_n)$. Por lo tanto $\liminf f(A_n) \subset f(\liminf A_n)$.

Por lo probado en los párrafos anteriores,

$$\liminf f(A_n) = f(\liminf A_n).$$

Así, concluimos la prueba de nuestro lema. ■

Lema 5.2.4. *Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $\{p\}$ es un R^3-continuo en X, entonces $\{\{p\}\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}([0,t])$ para toda $t \in (0,1]$.*

Demostración. Tomemos $t \in (0,1)$. Como $\{p\}$ es un R^3 conjunto en X, existen un abierto U de X, que contiene a p, y una sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de U tal que $\liminf C_n = \{p\}$. Definimos los conjuntos:

$$\mathcal{U} = C(U) \cap \mu^{-1}([0,t]) \text{ y}$$

$$\mathcal{C}_n = C(C_n) \cap \mu^{-1}([0,t]), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Afirmación 1. El conjunto $\mathcal{U}$ es un abierto en $\mu^{-1}([0,t])$.

Por la Proposición 1.1.1, sabemos que $C(U)$ es un abierto de $C(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mu^{-1}([0,t])$.

Afirmación 2. El conjunto $\mathcal{C}_n$ es una componente de $\mathcal{U}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mathcal{C}_n$ es un conexo. Tomemos $A \in \mathcal{C}_n \setminus F_1(C_n)$. Fijemos un elemento $a \in A$. De manera que $\{a\} \subsetneq A$. Entonces podemos aplicar el Teorema 2.2.7 para obtener un arco ordenado $\alpha_A : [0,1] \to C(X)$ de $\{a\}$ a A. Consideremos $r \in [0,1]$. Por la definición de arco ordenado, $\alpha(r) \subset \alpha(1) = A$. Como $A \subset C_n$, $\alpha(r) \subset C_n$. Teniendo en cuenta que μ es una función de Whitney, $\mu(\alpha(r)) \leq \mu(A) \leq t$. Por tanto, $\alpha(r) \in \mathcal{C}_n$. De manera que

$$\mathcal{C}_n = F_1(C_n) \cup \bigcup \{\operatorname{Im} \alpha_A : A \in \mathcal{C}_n\}.$$

Así, concluimos que $\mathcal{C}_n$ es un conexo.

Sea $\mathcal{D}$ una componente de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{D}$. Como $\mathcal{C}_n \cap C(X) \neq \emptyset$, $\mathcal{D} \cap C(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por la Proposición 1.2.5 (c), $\cup\mathcal{D}$ es un conexo. Además, $\cup\mathcal{D} \subset U$. Por otro lado, consideremos un elemento $x \in C_n$. Como $\mu(\{x\}) = 0$, $\{x\} \in \mathcal{C}_n$. De manera que $\{x\} \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $C_n \subset \cup\mathcal{D}$. Como C_n es una componente de U y $\cup\mathcal{D}$ es un conexo de U que contiene a C_n, obtenemos que $C_n = \cup\mathcal{D}$. Ahora, consideremos un elemento $A \in \mathcal{D}$. Entonces $A \subset \cup\mathcal{D} = C_n$, así que, $A \in C(C_n)$. Tenemos las siguientes contenciones: $\mathcal{D} \subset \mathcal{U} \subset \mu^{-1}([0,t])$, de manera que, $A \in \mu^{-1}([0,t])$. Por lo tanto, $A \in C(C_n) \cap \mu^{-1}([0,t]) = \mathcal{C}_n$. Así que, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_n$. De este modo, concluimos que $\mathcal{D} = \mathcal{C}_n$. Con esto terminamos nuestra Afirmación 2.

Afirmación 3. Se satisface que $\liminf \mathcal{C}_n = \{\{p\}\}$.

Veamos que $\{\{p\}\} \subset \liminf \mathcal{C}_n$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $\liminf C_n = \{p\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_d(\varepsilon, p) \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq \mathbb{N}$. Sea $n \geq N$. Consideremos un elemento $x \in B_d(\varepsilon, p) \cap C_n$. Como $H(\{x\}, \{p\}) = d(x,p) < \varepsilon$, $\{x\} \in B_H(\varepsilon, \{p\})$. Por otro lado, como $\mu(\{x\}) = 0$, $\{x\} \in \mu^{-1}([0,t])$. De modo que, $\{x\} \in B_H(\varepsilon, \{p\}) \cap \mathcal{C}_n$. Entonces $B_H(\varepsilon, \{p\}) \cap \mathcal{C}_n \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$.

Verifiquemos que $\liminf \mathcal{C}_n \subset \{\{p\}\}$. Consideremos $A \in \liminf \mathcal{C}_n$ y $a \in A$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_H(\varepsilon, A) \cap \mathcal{C}_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$. Entonces existe un elemento $B \in B_H(\varepsilon, A) \cap \mathcal{C}_n$. Por la Proposición 1.0.10, $A \subset N(\varepsilon, B)$. Por lo tanto, existe un elemento $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Como $B \in \mathcal{C}_n$, $b \in B \subset C_n$. Así, obtenemos que $b \in B_d(\varepsilon, a) \cap C_n$. De modo que, $a \in \liminf C_n$, por lo tanto, $A \subset \liminf C_n = \{p\}$. Lo cual implica que $A = \{p\}$. De esta manera, concluimos que $\liminf \mathcal{C}_n = \{\{p\}\}$.

Por las Afirmaciones 1, 2 y 3, $\{\{p\}\}$ es un R^3-conjunto en $\mu^{-1}([0,t])$. Como $\{\{p\}\}$ es un continuo, $\{\{p\}\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}([0,t])$. ■

Teorema 5.2.5. *(M. E. Aguilera) Si existe un elemento $p \in X$ tal que $\{p\}$ es un R^3-continuo, entonces los bloques de Whitney no son homeomorfos a $X \times [0,1]$.*

Demostración. Supongamos que d es una métrica para X. Supongamos que μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0,1)$. Consideremos la métrica $\rho : (X \times [0,1]) \times (X \times [0,1]) \to [0,\infty)$ definida por:

$$\rho((x,y),(z,w)) = ((d(x,z))^2 + (|y-w|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Por el Lema 5.2.4, $\{\{p\}\}$ es un R^3-continuo en $\mu^{-1}([0,t])$. Así que existen un abierto $\mathcal{U}$ de $\mu^{-1}([0,t])$, que contiene a $\{p\}$, y una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de componentes de $\mathcal{U}$ tal que $\liminf \mathcal{C}_n = \{\{p\}\}$.

Probaremos que no existe un homeomorfismo entre $\mu^{-1}([0,t])$ y $X \times [0,1]$. Para esto supongamos, por el contrario, que existe un homeomorfismo $f : \mu^{-1}([0,t]) \to X \times [0,1]$. Sea $f(\{p\}) = (x,y)$. Como $f(\mathcal{U})$ es un abierto de $X \times [0,1]$, existe un abierto básico $V \times J$ de $X \times [0,1]$ tal que

$$(x,y) \in V \times J \subset f(\mathcal{U}).$$

Fijemos $(x,z) \in V \times J \setminus \{(x,y)\}$. Probaremos que $(x,z) \in \liminf f(\mathcal{C}_n)$. Consideremos $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0,\varepsilon)$ tal que

$$B_\rho(\delta,(x,y)) \cup B_\rho(\delta,(x,z)) \subset V \times J \text{ y}$$

$$B_\rho(\delta,(x,y)) \cap B_\rho(\delta,(x,z)) = \emptyset.$$

Como $(x,y) \in \liminf f(\mathcal{C}_n)$ y $\liminf f(\mathcal{C}_n) = f(\liminf \mathcal{C}_n)$ (por el Lema 5.2.3), existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\rho(\delta,(x,y)) \cap f(\mathcal{C}_n) \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$. Consideremos un elemento $(r,s) \in B_\rho(\delta,(x,y)) \cap f(\mathcal{C}_n)$. Notemos que

$$\rho((r,z),(x,z)) = d(r,x) \leq \rho((r,s),(x,y)) < \delta < \varepsilon.$$

Esto nos dice que $(r,z) \in B_\rho(\varepsilon,(x,z))$. Observemos que $\{r\} \times J$ es un conexo y que $\{r\} \times J \subset V \times J \subset f(\mathcal{U})$. Como $(r,s) \in f(\mathcal{C}_n) \cap (\{r\} \times J)$ y $f(\mathcal{C}_n)$ es una componente de $f(\mathcal{U})$, $\{r\} \times J \subset f(\mathcal{C}_n)$. De manera que $(r,z) \in f(\mathcal{C}_n)$. Por lo tanto, $(r,z) \in B_\rho(\varepsilon,(x,z)) \cap f(\mathcal{C}_n)$. Así que, $B_\rho(\varepsilon,(x,z)) \cap f(\mathcal{C}_n) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Con esto, concluimos que $(x,z) \in \liminf f(\mathcal{C}_n) \setminus \{(x,y)\}$. Así que $\liminf f(\mathcal{C}_n)$ contiene al menos dos puntos.

Por otro lado, como f es un homeomorfismo, el Lema 5.2.3 nos dice que

$$\{(x,y)\} = \{f(\{p\})\} = f(\liminf \mathcal{C}_n) = \liminf(f(\mathcal{C}_n)).$$

Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, concluimos que no existe un homeomorfismo entre $\mu^{-1}([0,t])$ y $X \times [0,1]$. ■

5.3. Contener un continuo indescomponible

En esta sección primero veremos cinco lemas que nos ayudarán a probar el teorema principal de esta parte, el cual nos dice que, dado un continuo X con la dimensión de $C(X)$ finita, si existe un subcontinuo no degenerado de X que es indescomponible, entonces los bloques de Whitney suficientemente grandes no son homeomorfos a $X \times [0,1]$.

Definición 5.3.1. Un continuo es *descomponible* si se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo *indescomponible* es aquél que no es descomponible.

Definición 5.3.2. Sea $p \in X$. La *composante de p en X*, se denota por $\kappa(p)$, y está definida como sigue:

$$\kappa(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio de } X \text{ que contiene a } p \text{ y } x\}.$$

Una *composante de* X es una composante para algún punto de X.

El siguiente resultado es conocido en la Teoría de Continuos, es el Teorema 11.15 de [24].

Lema 5.3.3. *Si X es indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Lema 5.3.4. *Sean X indescomponible y $f:[0,1]\to C(X)$ una función continua tales que $\bigcup \operatorname{Im} f = X$. Entonces $X\in \operatorname{Im} f$.*

Demostración. Supongamos que $f(0)\neq X$. Notemos que $C(f): C([0,1]) \to C(C(X))$ y $\bigcup : C(C(X)) \to C(X)$ son funciones continuas, por las Proposiciones 1.2.1 y 1.2.5, respectivamente. De modo que, para cada $[a,b]\subset [0,1]$, $C(f)([a,b])\subset C(X)$. Por la Proposición 1.2.5, $\bigcup C(f)([a,b])$ es un subcontinuo de X.

Por otra parte, consideremos al conjunto:

$$T=\{t\in[0,1]:\bigcup C(f)([0,t])=X\}.$$

Como T es cerrado y $1\in T$, podemos considerar el número $t_0=\min T$. Observemos que $\bigcup C(f)([0,t_0])=X$ y $\bigcup C(f)([0,t])\subsetneq X$ para cada $t<t_0$. Veamos que $\bigcup C(f)([t,t_0])=X$ para cada $t<t_0$. Supongamos, por el contrario, que $\bigcup C(f)([s,t_0])\subsetneq X$ para algún $s<t_0$. Teniendo en cuenta que $s<t_0$ y por la definición de t_0, $\bigcup C(f)([0,s])\subsetneq X$. Si suponemos que

$$\bigcup C(f)([0,s])\cup \bigcup C(f)([s,t_0])=X,$$

como $\bigcup C(f)([0,s])$ y $\bigcup C(f)([s,t_0])$ son subcontinuos propios de X, llegamos a que X es descomponible. Así obtenemos una contradicción. De modo que, $\bigcup C(f)([t,t_0])=X$ para cada $t<t_0$. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números del intervalo $(0,t_0)$ tal que $\lim t_n=t_0$. Entonces $\lim [t_n,t_0]=\{t_0\}$. Como $\bigcup \circ C(f)$ es una función continua (ya que es composición de funciones continuas), tenemos que

$$X=\lim \bigcup \circ C(f)([t_n,t_0])=\bigcup \circ C(f)(\{t_0\})=f(t_0).$$

Con esto concluimos que $X\in \operatorname{Im} f$. ■

Lema 5.3.5. *Sean X indescomponible y $\mathcal{J} \subset C(X) \setminus \{X\}$ un arco. Entonces sus extremos están contenidos en la misma composante.*

Demostración. Supongamos que A y B son los extremos de $\mathcal{J}$. Como $A \neq Y$, podemos considerar a $\kappa(p)$, la composante de X, para algún $p \in X$, tal que $A \subset \kappa(p)$. Veremos que $B \subset \kappa(p)$. Como $\mathcal{J} \subset C(X)$, por la Proposición 1.2.5, tenemos que $\bigcup \mathcal{J}$ es un continuo. Si $\bigcup \mathcal{J} = X$, por el Lema 5.3.4, $X \in \mathcal{J}$. Esto es una contradicción a nuestra hipótesis. Así que, $\bigcup \mathcal{J} \subsetneq X$. Notemos que $A, B \subset \bigcup \mathcal{J}$.

Tomemos $a \in A$. Entonces $a \in \kappa(p)$. De modo que, existe $M \in C(X) \setminus \{X\}$ tal que $a, p \in M$. Observemos que $a \in A \cap M \subset (\bigcup \mathcal{J}) \cap M$, así que, $M \cup (\bigcup \mathcal{J})$ es un subcontinuo de X. Como M y $\bigcup \mathcal{J}$ son subcontinuos propios de X y X es indescomponible, obtenemos que $M \cup (\bigcup \mathcal{J})$ es un subcontinuo propio de X. Como $p \in M \subset M \cup (\bigcup \mathcal{J})$, $M \cup (\bigcup \mathcal{J}) \subset \kappa(p)$. Teniendo en cuenta que $B \subset \bigcup \mathcal{J}$, concluimos que $B \subset \kappa(p)$. ■

Lema 5.3.6. *Supongamos que X es tal que $\dim(C(X)) < \infty$. Supongamos que existe $Y \in C(X) \setminus (\{X\} \cup F_1(X))$ que es indescomponible. Sea*

$$K = \{\kappa : \kappa \textit{ es una composante de } Y\}.$$

Definimos el conjunto:

$$F = \{\kappa \in K : \textit{existe } A_\kappa \in C(X) \textit{ tal que } A_\kappa \cap \kappa \neq \emptyset \neq A_\kappa \cap (X \setminus Y) \textit{ y } Y \not\subset A_\kappa\}.$$

Entonces $|F| \leq \dim(C(X))$.

Demostración. Sea $\dim(C(X)) = m$. Supongamos, por el contrario, que $m < |F|$. Elegimos $m+1$ elementos diferentes $\kappa_1, \ldots, \kappa_{m+1} \in F$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, tomamos $A_i \in C(X)$ tal que $A_i \cap \kappa_i \neq \emptyset$, $A_i \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ y $Y \not\subset A_i$. Notemos que $A_i \notin F_1(X)$. Fijemos un punto $a_i \in A_i \cap \kappa_i$ y observemos que $\{a_i\} \subsetneq A_i$. De modo que, por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0,1] \to C(A_i)$ de $\{a_i\}$ a A_i.

Tomemos $i \in \{1, \ldots, m+1\}$. Notemos que

$$\mathcal{A} = \{A \in C([0,1]) : 0 \in A\}$$

es un conjunto cerrado (por la Proposición 1.1.5) y que $C(\alpha_i)|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(C(X))$ es una función continua (por la Propocisición 1.2.1). Por el Corolario 4.3 de [12], $C(C(Y))$ es un conjunto cerrado. Así que

$$\mathcal{B} = (C(\alpha_i)|_{\mathcal{A}})^{-1}(C(C(Y)))$$

también es un conjunto cerrado. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{[0,t] \in \mathcal{A} : C(\alpha_i)([0,t]) \in C(C(Y))\} \\ &= \{[0,t] \in \mathcal{A} : \alpha_i([0,t]) \subset C(Y)\}. \end{aligned}$$

Como $\alpha_i(\{0\}) = \{\{a_i\}\} \subset C(Y)$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Utilizando la Proposición 1.2.7, obtenemos que la función $\text{máx}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,1]$ es continua y observamos que $\mathcal{A}$ es compacto y $[0,1]$ es Hausdorff. Así que $\text{máx}|_{\mathcal{A}}$ es una función cerrada. Por lo tanto, $\mathcal{C} = \text{máx}|_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ es un conjunto cerrado. Definimos $t_i = \text{máx}(\mathcal{C})$. Observamos que

$$\begin{aligned} t_i &= \text{máx}(\text{máx}|_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})) \\ &= \text{máx}(\text{máx}\{[0,t] \in \mathcal{A} : C(\alpha_i)([0,t]) \subset C(Y)\}) \\ &= \text{máx}\{t \in [0,1] : \alpha_i([0,t]) \subset C(Y)\}. \end{aligned}$$

Veamos que $\alpha_i([0,t_i]) \subset C(\kappa_i)$. Es claro que $\alpha_i(0) \in C(\kappa_i)$. Sean $s \in (0,t_i]$ y $t \in [0,s]$. Supongamos que $\alpha_i(t) = Y$. Entonces $Y = \alpha_i(t) \subset \alpha_i(1) = A_i$, lo cual es un absurdo ya que $Y \not\subset A_i$. De modo que $\alpha_i([0,s]) \subset C(Y) \setminus \{Y\}$. Como Y es indescomponible, por el Lema 5.3.5, $\alpha_i(0) = \{a_i\}$ y $\alpha_i(s)$ están contenidos en la misma composante. Por tanto, $\alpha_i(s) \in C(\kappa_i)$. Con esto hemos probado que $\alpha_i([0,t_i]) \subset C(\kappa_i)$. En particular, se satisface que $\alpha_i(t_i) \in C(\kappa_i)$.

Definimos $B_i = \alpha_i(t_i)$ para cada $i \in \{1,\ldots,m+1\}$. Como $B_i \in C(\kappa_i)$ para cada $i \in \{1,\ldots,m+1\}$, $B_1,\ldots,B_{m+1}$ son subcontinuos de Y ajenos dos a dos. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon,B_1),\ldots,N(\varepsilon,B_{m+1})$ sean ajenos dos a dos. Dada $i \in \{1,\ldots,m+1\}$, como $\alpha_i(1) = A_i \not\subset Y$, $t_i < 1$. Por la continuidad de α_i, existe $s_i \in (t_i,1)$ tal que para toda $s \in [t_i,s_i]$, $H(\alpha_i(t_i),\alpha_i(s)) < \varepsilon$. Entonces, por la Proposición 1.0.10, $\alpha_i(s) \subset N(\varepsilon,\alpha_i(t_i)) = N(\varepsilon,B_i)$ para cada $s \in [t_i,s_i]$. De modo que $\bigcup \alpha_i([t_i,s_i]) \subset N(\varepsilon,B_i)$. Definimos $C_i = \bigcup \alpha_i([t_i,s_i])$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.2.5 y el hecho de que $\alpha_i([t_i,s_i]) \subset C(X)$, observamos que C_i es un continuo. Por tanto, $C_1,\ldots,C_{m+1}$ son subcontinuos de X ajenos dos a dos. Además $B_1 \subset Y \cap C_1,\ldots,B_{m+1} \subset Y \cap C_{m+1}$. De manera que

$$C = (C_1 \cup \cdots \cup C_{m+1}) \cup Y$$

es un subcontinuo de X.

Dada $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, por la definición de t_i, $\alpha_i([0, s_i]) \not\subset C(Y)$. Esto implica que $C_i \not\subset Y$. Notemos que

$$C \setminus Y = (C_1 \setminus Y) \cup \cdots \cup (C_{m+1} \setminus Y).$$

Como los subconjuntos $C_1 \setminus Y, \ldots, C_{m+1} \setminus Y$ son no vacíos y están separados dos a dos, $C \setminus Y$ tiene al menos $m+1$ componentes. Entonces, por el Teorema 7.3 de [12], $C(X)$ contiene una $(m+1)$-celda. Esto implica que $\dim(C(X)) \geq m+1$, lo cual es un absurdo (ya que $\dim(C(X)) = m$) que nació de suponer que $m < |F|$. Así, concluimos que $|F| \leq m = \dim(C(X))$. ■

Lema 5.3.7. *Sea X un continuo indescomponible. Entonces las arco componentes de $C(X) \setminus \{X\}$ son de la forma $C(\kappa) = \{A \in C(X) : A \subset \kappa\}$, en donde κ es una composante de X.*

Demostración. Veamos que $C(X) \setminus \{X\}$ no es arcoconexo. Para esto supongamos que $C(X) \setminus \{X\}$ sí es arcoconexo. Notemos, por el Lema 5.3.3, que X tiene una cantidad no numerable de composantes. Sean x, y elementos de X que se encuentren en distintas composantes. Como $\{x\}$ y $\{y\} \in C(X) \setminus \{X\}$, existe un arco $\mathcal{J} \subset C(X) \setminus \{X\}$ con extremos $\{x\}$ y $\{y\}$. Así que, por el Lema 5.3.5, x y y pertenecen a la misma composante, lo cual no puede ser. De modo que $C(X) \setminus \{X\}$ no es arcoconexo.

Sea $\kappa(p)$ una composante de X, para algún punto $p \in X$. Veamos que $C(\kappa(p))$ es arcoconexo. Consideremos dos elementos $A, B \in C(\kappa(p))$. Así que, A, $B \subset \kappa(p)$. Tomemos $a \in A$ y $b \in B$. Entonces $a, b \in \kappa(p)$. De modo que, existen $M, N \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $a, p \in M$ y $b, p \in N$. Notemos que $M, N \subset \kappa(p)$. Observemos que $a \in A \cap M$, $p \in M \cap N$ y $b \in N \cap B$, así que, $A \cup M \cup N \cup B$ es un continuo. Como $A, B, M, N \subset \kappa(p)$, $A \cup M \cup N \cup B \subset \kappa(p)$. Observemos que $A, B \in C(A \cup M \cup N \cup B) \subset C(\kappa(p))$. Por el Corolario 6.11 de [12], $C(A \cup M \cup N \cup B)$ es arcoconexo. Por lo tanto, existe un arco contenido en $C(\kappa(p))$ que contiene a A y B. Con esto, concluimos que $C(\kappa(p))$ es arcoconexo.

Sea $\mathcal{L}$ una arco componente de $C(X) \setminus \{X\}$ tal que $C(\kappa(p)) \subset \mathcal{L}$. Supongamos que existe un elemento $L \in \mathcal{L} \setminus C(\kappa(p))$. Sea $\kappa(q)$ la composante de X que contiene a L. Observemos que $\kappa(p) \neq \kappa(q)$. Tomemos $M \in C(\kappa(p))$. Notemos que $M, L \in \mathcal{L}$. De manera que, existe un arco $\mathcal{J}$ con extremos M y L. Por el Lema 5.3.5, como $\mathcal{J} \subset C(X) \setminus \{X\}$, M y L pertenecen a la misma composante. Lo cual nos lleva a una contradicción, que nació de suponer que $C(\kappa(p)) \subsetneq \mathcal{L}$. Por lo tanto, concluimos que $C(\kappa(p)) = \mathcal{L}$. De esta manera, las arco componentes de $C(X) \setminus \{X\}$ son de la forma $C(\kappa)$, en donde κ es una composante de X. ■

Lema 5.3.8. *Supongamos que* $\dim(C(X)) < \infty$ *y que* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *es una función de Whitney. Sean* Y *un subcontinuo no degenerado, propio e indescomponible de* X, $t > \mu(Y)$, $K = \{\kappa : \kappa$ *es una composante de* $Y\}$ *y*

$$F = \{\kappa \in K : \textit{existe } A_\kappa \in C(X) \textit{ tal que } A_\kappa \cap \kappa \neq \emptyset \neq A_\kappa \cap (X \setminus Y) \textit{ y } Y \not\subset A_\kappa\}.$$

Entonces, para cada $\kappa \in K \setminus F$, *la arco componente* $C(\kappa)$ *de* $C(Y) \setminus \{Y\}$, *es arco componente de* $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$. *Como consecuencia,* $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$ *tiene una cantidad no numerable de arco componentes.*

Demostración. Notemos que $C(Y) \subset \mu^{-1}([0,t])$ ya que $\mu(Y) < t$. Por los Lemas 5.3.6 y 5.3.3, el conjunto $K \setminus F$ tiene una cantidad no numerable de elementos. Tomemos $\kappa \in K \setminus F$. Por el Lema 5.3.7, $\mathcal{L} = C(\kappa)$ es una arco componente de $C(Y) \setminus \{Y\}$. Como $\kappa \subset Y$,

$$\mathcal{L} = C(\kappa) \subset C(Y) \subset \mu^{-1}([0,t]).$$

Por tanto

$$\mathcal{L} \subset \mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}.$$

Veamos que $\mathcal{L}$ es una arco componente de $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$. Sea $\mathcal{M}$ una arco componente de $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$ tal que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$. De modo que $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. Supongamos que

$$\mathcal{M} \cap (\mu^{-1}([0,t]) \setminus C(Y)) \neq \emptyset.$$

De manera que $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{M}$. Por lo tanto, existe un elemento $M \in \mathcal{M} \setminus C(Y)$. Así que $M \not\subset Y$. Consideremos $L \in \mathcal{L}$. Como $L, M \in \mathcal{M}$, existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to \mathcal{M}$ tal que $\alpha(0) = L$ y $\alpha(1) = M$.

Por la Proposición 1.1.5,

$$\mathcal{A} = \{A \in C([0,1]) : 0 \in A\}$$

es un conjunto cerrado. Además, por la Proposición 1.2.1, $C(\alpha)|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(C(X))$ es una función continua. Por el Corolario 4.3 de [12], $C(C(Y))$ es un conjunto cerrado. Así que,

$$\mathcal{B} = (C(\alpha)|_{\mathcal{A}})^{-1}(C(C(Y)))$$

también es un conjunto cerrado. Notemos que

$$\mathcal{B} = \{[0,s] \in \mathcal{A} : C(\alpha)([0,s]) \in C(C(Y))\} = \{[0,s] \in \mathcal{A} : \alpha([0,s]) \subset C(Y)\}.$$

Como $\alpha(\{0\}) = \{L\} \subset C(Y)$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Utilizando la Proposición 1.2.7, la función $\text{máx}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,1]$ es continua y observamos que $\mathcal{A}$ es compacto y $[0,1]$ es Hausdorff. Así que, $\text{máx}|_{\mathcal{A}}$ es una función cerrada. Por lo tanto, $\mathcal{C} = \text{máx}|_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ es un conjunto cerrado. Definimos $s_0 = \text{máx}(\mathcal{C})$. Observamos que

$$\begin{aligned} s_0 &= \text{máx}(\text{máx}|_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})) \\ &= \text{máx}(\text{máx}\{[0,s] \in \mathcal{A} : C(\alpha)([0,s]) \subset C(Y)\}) \\ &= \text{máx}\{s \in [0,1] : \alpha([0,s]) \subset C(Y)\}. \end{aligned}$$

En particular, $\alpha(s_0) \in C(Y)$.

Si $s_0 = 0$ es claro que $\alpha(s_0) \subset \kappa$. En el caso en que $s_0 > 0$, $\alpha([0,s_0])$ es un arco. Notemos que

$$\alpha([0,s_0]) \subset \mathcal{M} \subset \mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\},$$

así que

$$\alpha([0,s_0]) \subset C(Y) \setminus \{Y\}.$$

Como $\alpha(0) = L \subset \kappa$, por el Lema 5.3.5, $\alpha(s_0) \subset \kappa$. Notemos que $\alpha(s_0) \neq Y$.

Consideremos $y \in Y \setminus \alpha(s_0)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_d(\varepsilon, y) \cap \alpha(s_0) = \emptyset$. Observemos que $y \notin N(\varepsilon, \alpha(s_0))$. Como $\alpha(s_0) \in C(Y)$ y $\alpha(1) \not\subset Y$, $s_0 < 1$. Por la continuidad de α, existe $s_1 \in (s_0, 1)$ tal que, para toda $s \in [s_0, s_1]$, $H(\alpha(s_0), \alpha(s)) < \varepsilon$. Entonces $\alpha(s) \subset N(\varepsilon, \alpha(s_0))$ (por la Proposición 1.0.10) y $y \notin \alpha(s)$ para toda $s \in [s_0, s_1]$.

Sea $A = \bigcup \alpha([s_0, s_1])$. Teniendo en cuenta que $\alpha([s_0, s_1]) \subset C(X)$ y aplicando la Proposición 1.2.5, obtenemos que $A \in C(X)$. Notemos que $\emptyset \neq$

$\alpha(s_0) \subset A \cap \kappa$. Además $A \subset N(\varepsilon, \alpha(s_0))$, así que, $y \notin A$. Luego, $Y \not\subset A$. Por la definición de s_0, $\alpha([0,s_1]) \not\subset C(Y)$. Como $\bigcup \alpha([0,s_0]) \subset Y$, $\alpha([s_0,s_1]) \not\subset C(Y)$. Esto implica que $A \not\subset Y$. Esto prueba que $\kappa \in F$, lo cual es una contradicción (pues $\kappa \notin F$) que nació de suponer que $\mathcal{M} \cap (\mu^{-1}([0,t]) \setminus C(Y)) \neq \emptyset$. De modo que $\mathcal{M} \subset C(Y) \setminus \{Y\}$. Así, concluimos que $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. Hemos probado que las arco componentes, $C(\kappa)$, de $C(Y) \setminus \{Y\}$ son arco componentes de $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$, cuando $\kappa \in K \setminus F$. Como $K \setminus F$ es no numerable, el conjunto $\{C(\kappa) : \kappa \in K \setminus F\}$ es no numerable, así que, $\mu^{-1}([0,t]) \setminus \{Y\}$ tiene una cantidad no numerable de arco componentes. ■

Lema 5.3.9. *(M. E. Aguilera) Supongamos que* $\dim(C(X)) < \infty$*. Sean* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *una función de Whitney,* Y *un subcontinuo no degenerado de* X *que es indescomponible,* $t > \mu(Y)$*,*

$$K = \{\kappa : \kappa \textit{ es una composante de } Y\} \textit{ y}$$

$$F = \{\kappa \in K : \textit{existe } A_\kappa \in C(X) \textit{ tal que } A_\kappa \cap \kappa \neq \emptyset \neq A_\kappa \cap (X \setminus Y) \textit{ y } Y \not\subset A_\kappa\}.$$

Si κ*,* τ *y* σ *son tres composantes distintas* $K \setminus F$*,* $A \in C(\kappa)$*,* $B \in C(\tau)$ *y* $C \in C(\sigma)$*, entonces existe un triodo simple contenido en* $\mu^{-1}([0,t])$*, que contiene a* Y *como punto de ramificación y a* A*,* B *y* C *como extremos. Además, las componentes de* $\mathcal{T} \setminus \{Y\}$ *que tienen a* A*,* B *y* C *están contenidas, respectivamente, en* $C(\kappa)$*,* $C(\tau)$ *y* $C(\sigma)$*.*

Demostración. Notemos que $A \subsetneq Y$. Entonces, por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(Y)$ de A a Y. Verifiquemos que $\alpha([0,1)) \subset \kappa$. Tomemos $s \in (0,1)$. Como α es un arco ordenado, $\alpha(r) \subsetneq \alpha(1) = Y$ para cada $r \leq s$. Así que $\alpha([0,s]) \subset C(Y) \setminus \{Y\}$. Como Y es indescomponible, por el Lema 5.3.5, $\alpha(s) \subset \kappa$. Por tanto, $\alpha([0,1)) \subset C(\kappa)$. De manera similar, podemos obtener dos arcos ordenados β, $\gamma : [0,1] \to C(Y)$ de B a Y y de C a Y, respectivamente, tales que $\beta([0,1)) \subset C(\tau)$ y $\gamma([0,1)) \subset C(\sigma)$. Esto nos lleva a que $\alpha([0,1)) \cap \beta([0,1)) = \emptyset$, $\alpha([0,1)) \cap \gamma([0,1)) = \emptyset$ y $\gamma([0,1)) \cap \beta([0,1)) = \emptyset$. Veamos que $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta = \{Y\}$. Es claro que $Y \in \operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta$. Sea $s \in [0,1)$. Como α es arco un ordenado, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(1) = Y$. Como $\beta(1) = Y$, concluimos que $\alpha(s) \neq \beta(1)$. De manera similar se obtiene que $\beta(s) \neq \alpha(1)$ para cada $s \in [0,1)$. Por lo tanto, $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta = \{Y\}$. De manera similar, se obtiene que $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \gamma = \{Y\}$ e $\operatorname{Im} \beta \cap \operatorname{Im} \gamma = \{Y\}$. Así,

$$\mathcal{T} = \operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\gamma$$

es un triodo simple que contiene a Y como punto de ramificación y a A, B y C como extremos. Notemos que $\mathcal{T} \subset C(Y) \subset \mu^{-1}([0,t])$.

Observemos que la componente de $\mathcal{T}\setminus\{Y\} = \alpha([0,1))\cup\beta([0,1))\cup\gamma([0,1))$ que tiene a A es $\alpha([0,1))$. Por lo probado en el párrafo anterior, $\alpha([0,1)) \subset C(\kappa)$. De manera similar se tiene que las componentes de $\mathcal{T}\setminus\{Y\}$ que tienen a B y C están contenidas en $C(\tau)$ y $C(\gamma)$, respectivamente. ■

Teorema 5.3.10. *(M. E. Aguilera) Supongamos que* $\dim(C(X)) < \infty$ *y* $\mu : C(X) \to [0,1]$ *es una función de Whitney. Si* Y *es un subcontinuo no degenerado de* X *que es indescomponible y* $t > \mu(Y)$*, entonces* $\mu^{-1}([0,t])$ *no es homeomorfo a* $X \times [0,1]$.

Demostración. Sean

$$K = \{\kappa : \kappa \text{ es una composante de } Y\} \text{ y}$$

$$F = \{\kappa \in K : \text{existe } A_\kappa \in C(X) \text{ tal que } A_\kappa \cap \kappa \neq \emptyset \neq A_\kappa \cap (X \setminus Y) \text{ y } Y \not\subset A_\kappa\}.$$

Notemos que $K\setminus F$ es un conjunto no numerable (por los Lemas 5.3.6 y 5.3.3).

Afirmación 1. Supongamos que $\tau, \sigma \in K \setminus F$ son dos composantes distintas y $\mathcal{L} \subset \mu^{-1}([0,t])$ es un arco con un extremo en $C(\tau)$ y otro en $C(\sigma)$. Entonces $Y \in \mathcal{L}$.

Supongamos, por el contrario, que $Y \notin \mathcal{L}$, lo que nos lleva a que $\mathcal{L} \subset \mu^{-1}([0,t])\setminus\{Y\}$. Notemos que $\mathcal{L}\cap C(\tau) \neq \emptyset$ y $\mathcal{L}\cap C(\sigma) \neq \emptyset$. Por el Lema 5.3.8, $C(\tau)$ y $C(\sigma)$ son arco componentes de $\mu^{-1}([0,t])\setminus\{Y\}$. Así que $C(\tau) = C(\sigma)$, lo cual es una contradicción que nació de suponer que $Y \notin \mathcal{L}$. Por lo tanto, $Y \in \mathcal{L}$.

Afirmación 2. Fijemos tres composantes distintas κ_0, τ_0 y σ_0 en $K\setminus F$ y tres elementos $A \in C(\kappa_0)$, $B \in C(\tau_0)$ y $C \in C(\sigma_0)$. Entonces existe un triodo simple $\mathcal{T}$ contenido en $\mu^{-1}([0,t])$, que contiene a Y como punto de ramificación y a A, B y C como extremos. Además, las componentes de $\mathcal{T}\setminus\{Y\}$ que tienen a A, B y C están contenidas, respectivamente, en $C(\kappa_0)$, $C(\tau_0)$ y

$C(\sigma_0)$.

Esta afirmación es el Lema 5.3.9.

Podemos suponer que $\mathcal{T}=\mathcal{I}\cup\mathcal{J}\cup\mathcal{K}$, en donde $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{K}$ son arcos tales que A,Y son los extremos de $\mathcal{I}$, B,Y son los de $\mathcal{J}$ y C,Y son los de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{I}\cap\mathcal{J}=\mathcal{J}\cap\mathcal{K}=\mathcal{K}\cap\mathcal{I}=\{Y\}$. Así que $\mathcal{I}\setminus\{Y\}\subset C(\kappa_0)$, $\mathcal{J}\setminus\{Y\}\subset C(\tau_0)$ y $\mathcal{I}\setminus\{Y\}\subset C(\sigma_0)$.

Para probar nuestro teorema supongamos, por el contrario, que existe un homeomorfismo $f:\mu^{-1}([0,t])\to X\times[0,1]$. Así que $f(\mathcal{T})$ también es un triodo simple. Sea $f(Y)=(x,p)$. Notemos que $f(\mathcal{T})\not\subset\{x\}\times[0,1]$. Tomemos $M\in\mathcal{T}$ tal que $f(M)\notin\{x\}\times[0,1]$. Podemos suponer que $M\in\mathcal{I}\setminus\{Y\}$. Sea $f(M)=(z,q)$. Notemos que $z\neq x$.

Verifiquemos que

$$f(\mathcal{I}\setminus\{Y\})\not\subset\{z\}\times[0,1].$$

Supongamos, por el contrario, que

$$f(\mathcal{I}\setminus\{Y\})\subset\{z\}\times[0,1].$$

Como f es continua,

$$f(\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{I}\setminus\{Y\}))\subset\mathrm{cl}_{X\times[0,1]}(f(\mathcal{I}\setminus\{Y\})).$$

De modo que

$$f(\mathcal{I})=f(\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{I}\setminus\{Y\}))\subset\mathrm{cl}_{X\times[0,1]}(f(\mathcal{I}\setminus\{Y\}))\subset\{z\}\times[0,1].$$

Por tanto, como $Y\in\mathcal{I}$,$(x,p)=f(Y)\in\{z\}\times[0,1]$. Lo cual es un absurdo, ya que $z\neq x$. Así, $f(\mathcal{I}\setminus\{Y\})\not\subset\{z\}\times[0,1]$. Esto nos dice que existe $N\in\mathcal{I}\setminus\{Y\}$ tal que $f(N)\notin\{z\}\times[0,1]$. Sea $f(N)=(w,r)$ y notemos que $z\neq w$. Supongamos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son los subarcos de $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, respectivamente, que tienen a la pareja M y Y y a la pareja N y Y como extremos, respectivamente. Por lo tanto, $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$ es un arco con extremos $M\in C(\kappa_0)$ y $N\in C(\tau_0)$.

Supongamos que $\pi:X\times[0,1]\to X$ es la proyección a la primera coordenada. Como $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$ es localmente conexo, el Lema 3.2.80 nos dice que $\pi(f(\mathcal{M}\cup\mathcal{N}))$ también es localmente conexo y, por el Teorema 2.3.16, éste es arcoconexo. Sea J un arco en $\pi(f(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}))$ que una a z con w. Entonces $J \times [0,1]$ es una 2-celda que contiene a $f(M)$ y $f(N)$. Dado un arco L en $J \times [0,1]$ que conecta a $f(M)$ con $f(N)$, tenemos que $f^{-1}(L)$ es un arco en $\mu^{-1}([0,t])$ que conecta a M con N. Como $M \in C(\kappa_0)$ y $N \in C(\tau_0)$, por la Afirmación 1, obtenemos que $Y \in f^{-1}(L)$. Así que, $f(Y) \in L$. Hemos mostrado que todo arco en $J \times [0,1]$ que conecta a $f(M)$ con $f(N)$ pasa por $f(Y)$. Por el Lema 5.1.3, esto no puede ocurrir en una 2-celda. Por tanto hemos obtenido una contradicción que termina la prueba del teorema. ■

Concluimos este capítulo haciendo las siguientes preguntas.

Problema 5.3.11. Sean K un subcontinuo de X tal que K es un R^3-continuo no degenerado, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t > \mu(K)$. ¿Será cierto que $\mu^{-1}([0,t])$ no es homeomorfo a $X \times [0,1]$?

Definición 5.3.12. Dado un continuo X podemos considerar su cono, denotado por $\text{Cono}(X)$, como el espacio cociente que se obtiene cuando, en el producto cartesiano $X \times [0,1]$, se identifica al conjunto $X \times \{1\}$ en un solo punto.

Problema 5.3.13. Supongamos que existe $h : C(X) \to \text{Cono}(X)$ homeomorfismo tal que $h(F_1(X)) = X \times \{0\}$. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. ¿Será cierto que $\mu^{-1}([0,t])$ es homeomorfo a $X \times [0,1]$?

Problema 5.3.14. Supongamos que la dimensión de $C(X)$ es finita y que los bloques de Whitney suficientemente pequeños son homeomorfos a $X \times [0,1]$. ¿Será cierto que los subcontinuos con medida de Whitney suficientemente pequeña tienen que ser arcos?

Capítulo 6

Tipo 2-celda y tipo anillo

Como vimos en los Teoremas 4.1.2 y 4.1.4, los bloques de Whitney para los casos en que X es un arco y una curva cerrada simple son homeomorfos a $X \times [0,1]$. A partir de aquí uno se puede preguntar cómo son los bloques de Whitney para los casos en que X sea tipo arco o tipo circunferencia. A continuación damos los conceptos y resultados necesarios para dar respuesta a esto.

Definición 6.0.15. Sean Y un espacio métrico con métrica ρ, Z un espacio topológico y $\varepsilon > 0$. Una función $f : Y \to Z$ es una ε-*función* (con respecto a ρ) si es continua y $\text{diám}_\rho(f^{-1}(z)) < \varepsilon$ para cada $z \in f(Y)$.

Lema 6.0.16. *Sea $f : X \to Y$ una ε-función entre continuos. Si A, B son subconjuntos de X tales que $f(B) \subset f(A)$, entonces se cumple que $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Tomemos $b \in B$. Por hipótesis, existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = f(b)$. De modo que $a, b \in f^{-1}(f(b))$. Como f es una ε-función, $\text{diám}_d(f^{-1}(b)) < \varepsilon$. Por lo tanto, $d(a,b) < \varepsilon$, lo cual nos dice que $b \in N(A, \varepsilon)$. Con esto, queda probado que $B \subset N(A, \varepsilon)$. ■

Lema 6.0.17. *Sean X y Y continuos y $\mathcal{A}$ un subconjunto cerrado de $C(X)$ tales que $X \notin \mathcal{A}$. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para toda ε-función $f : X \to Y$ se satisface que $f(A) \neq Y$ para todo elemento $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ tal que $B_H(\varepsilon, X) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ y $f : X \to Y$ una ε-función. Si existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $f(A) = Y$, entonces $f(X) \subset f(A)$. Por el Lema 6.0.16, $X \subset N(\varepsilon, A)$. Claramente $A \subset N(\varepsilon, X)$. Por la Proposición 1.0.10, $H(X, A) < \varepsilon$. Esto contradice la elección de ε y prueba que $f(A) \neq Y$ para toda $A \in \mathcal{A}$. ■

Lema 6.0.18. *Si $f : X \to Y$ es una ε-función entre continuos, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que* $\text{diám}(f^{-1}(Z)) < \varepsilon$, *si $Z \subset f(X)$ y* $\text{diám}(Z) < \delta$.

Demostración. Supongamos que nuestra afirmación no es cierta. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Para cada $n \geq N$, existe $Z_n \subset f(X)$ tal que $\text{diám}(Z_n) < \frac{1}{n}$ y $\varepsilon \leq \text{diám}(f^{-1}(Z_n))$. Notemos que $0 < \varepsilon - \frac{1}{n} < \varepsilon$. Por la definición de diámetro, existen elementos a_n, $b_n \in f^{-1}(Z_n)$ tales que $\varepsilon - \frac{1}{n} < d(a_n, b_n) \leq \text{diám}(f^{-1}(Z_n))$. Como X es compacto, podemos suponer que existen a, $b \in X$ tales que $\lim a_n = a$ y $\lim b_n = b$. De manera que $\varepsilon \leq d(a, b)$. Teniendo en cuenta que f es una función continua, tenemos que $\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(a)$ y $\lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(b)$. Como $f(a_n)$, $f(b_n) \in Z_n$, $d(f(a_n), f(b_n)) \leq \text{diám}(Z_n) < \frac{1}{n}$. De modo que, $d(f(a), f(b)) = 0$, es decir $f(a) = f(b)$. Así que, $a, b \in f^{-1}(f(a))$, lo cual nos lleva a que $\varepsilon \leq d(a, b) \leq \text{diám}(f^{-1}(f(a)))$. Esto es una contradicción al hecho de que f es una ε-función. De esta manera, concluimos con que nuestra afirmación es verdadera. ■

Lema 6.0.19. *Sean Z un continuo no degenerado, $\mu : C(Z) \to [0, 1]$ una función de Whitney, $f : Z \to [0, 1]$ una función continua y $m : C([0, 1]) \to [0, 1]$ la función punto medio. Si $s < 1$, entonces, existe un elemento $A \in \mu^{-1}(s)$ tal que $m \circ C(f)(A) = m \circ C(f)(Z)$.*

Demostración. Observamos que $m \circ C(f) : C(Z) \to [0, 1]$ es una función continua ya que ésta es la composición de funciones continuas. Notemos que $C(f)(Z) = [a, b]$ para algunos $a, b \in [0, 1]$ tales que $a \leq b$. Sea $z \in Z$ tal que $f(z) = b$. Observemos que $\{z\} \subsetneq Z$. Como $0 \leq s < 1$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $A \in \mu^{-1}(s)$ tal que $z \in A \subset Z$. De modo que $b = f(z) \in f(A) \subset f(Z) = [a, b]$. Por lo tanto, existe un elemento $p \in [a, b]$ tal que $f(A) = [p, b]$. Así que $\frac{a+b}{2} \leq \frac{p+b}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$. Lo cual nos dice que $m \circ C(f)(A) = e \in [\frac{a+b}{2}, b]$. De manera similar podemos obtener un elemento

$B \in \mu^{-1}(s)$ tal que $m \circ C(f)(B) = c \in [a, \frac{a+b}{2}]$.

Como μ es una función de Whitney y $s < 1$, por el Lema 8.4 de [12], $\mu^{-1}(s)$ es un continuo. Lo cual nos conduce a que $m \circ C(f)(\mu^{-1}(s))$ también es un continuo. Por lo probado en el párrafo anterior, tenemos que $[c, e] \subset m \circ C(f)(\mu^{-1}(s))$. Como $\frac{a+b}{2} \in [c, e]$, existe un elemento $C \in \mu^{-1}(s)$ tal que

$$m \circ C(f)(C) = \tfrac{a+b}{2} = m \circ C(f)(Z).$$

Con lo cual terminamos la prueba de nuestro lema. ■

6.1. Tipo arco

En esta sección veremos que, para X tipo arco, todos sus bloques de Whitney son tipo 2-celda.

Definición 6.1.1. Un continuo Y es *tipo arco* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f_\varepsilon : Y \to [0, 1]$. Un continuo Y es *tipo* 2*-celda* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f_\varepsilon : Y \to [0, 1]^2$.

Teorema 6.1.2. *(M. E. Aguilera) Sean X un continuo tipo arco y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo 2-celda para cada $s \in (0, 1)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 2.2.1, existe $\delta > 0$ tal que si A y B son elementos de $C(X)$ que satisfacen que $\mu(A) = \mu(B)$ y $B \subset N(\delta, A)$, entonces $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Tomemos $\eta < \text{mín}\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Como X es tipo arco, existe una η-función suprayectiva $f : X \to [0, 1]$.

Definimos el conjunto:

$$T = \{s \in [0, 1] : \text{mín}(C(f)(A)) = 0 \text{ para todo } A \in \mu^{-1}(s)\}.$$

Verifiquemos que $T \neq \emptyset$ y $0 \notin T$. Notemos que, por ser f una función suprayectiva, $f(X) = [0, 1]$. Así,

$$\text{mín}(C(f)(X)) = \text{mín}(f(X)) = \text{mín}([0,1]) = 0.$$

Como $\mu^{-1}(1) = \{X\}$, $1 \in T$. Por lo tanto $T \neq \emptyset$. Por otro lado, como f es suprayectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 1$. Luego,

$$\text{mín}(C(f)(\{x_0\})) = \text{mín}(\{f(x_0)\}) = f(x_0) = 1.$$

Como $\{x_0\} \in F_1(X) = \mu^{-1}(0)$, concluimos que $0 \notin T$.

Por otra parte, por el Lema 2.3.6, sabemos que la función $G : [0,1] \to C(C(X))$ dada por $G(t) = \mu^{-1}(t)$ es continua. Como $f : X \to [0,1]$ también es continua, la Proposición 1.2.1 nos dice que la función $C(C(f)) : C(C(X)) \to C(C([0,1]))$, dada por

$$C(C(f))(\mathcal{A}) = C(f)(\mathcal{A}) = \{C(f)(A) : A \in \mathcal{A}\},$$

también lo es. La Proposición 1.2.7 nos dice que las funciones $\text{máx}, \text{mín} : C([0,1]) \to [0,1]$ son continuas. De modo que, nuevamente por la Proposición 1.2.1, $C(\text{mín}) : C(C([0,1])) \to C([0,1])$ es continua. Definimos $\vartheta : [0,1] \to [0,1]$ como:

$$\vartheta = \text{máx} \circ C(\text{mín}) \circ C(C(f)) \circ G.$$

Luego, $\vartheta : [0,1] \to [0,1]$ es continua. Cabe destacar que, para todo $s \in [0,1]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\vartheta(s) &= \text{máx}(C(\text{mín})(C(C(f))(G(s)))) \\
&= \text{máx}(C(\text{mín})(C(C(f))(\mu^{-1}(s)))) \\
&= \text{máx}(\text{mín}(C(C(f))(\mu^{-1}(s)))) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(B) : B \in C(C(f))(\mu^{-1}(s))\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(B) : B \in C(f)(\mu^{-1}(s))\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(B) : B \in \{C(f)(A) : A \in \mu^{-1}(s)\}\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(s)\}).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que f es una función suprayectiva, observamos que

$$\begin{aligned}
\vartheta(0) &= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(0)\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in F_1(X)\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(\{x\})) : x \in X\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(f(\{x\})) : x \in X\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(\{f(x)\}) : x \in X\}) \\
&= \text{máx}(\{f(x) : x \in X\}) \\
&= \text{máx}(\{y : y \in [0,1]\}) \\
&= \text{máx}([0,1]) = 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\vartheta(1) &= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(1)\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \{X\}\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(X))\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}(f(X))\}) \\
&= \text{máx}(\{\text{mín}([0,1])\}) \\
&= \text{máx}(\{0\}) = 0.
\end{aligned}$$

Así que, $\vartheta^{-1}(0)$ es un subconjunto cerrado, propio y no vacío de $[0,1]$.

Probemos que $T = \vartheta^{-1}(0)$. Tomemos $k \in T$, entonces $\text{mín}(C(f)(A)) = 0$ para todo $A \in \mu^{-1}(k)$. Así que,

$$\vartheta(k) = \text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(k)\}) = \text{máx}(\{0\}) = 0.$$

Con esto hemos visto que $k \in \vartheta^{-1}(0)$. Supongamos $l \in \vartheta^{-1}(0)$. Entonces $\vartheta(l) = 0$. De manera que,

$$\text{máx}(\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(l)\}) = 0,$$

esto nos dice que

$$\{\text{mín}(C(f)(A)) : A \in \mu^{-1}(l)\} = \{0\}.$$

Lo cual nos lleva a que $\text{mín}(C(f)(A)) = 0$, para todo elemento $A \in \mu^{-1}(l)$, por lo tanto, $l \in T$. Con esto, concluimos la prueba de que $T = \vartheta^{-1}(0)$.

Así que T es un subconjunto cerrado de $[0,1]$. Consideremos el número

$$t_0 = \text{mín}\, T.$$

Notemos que $0 < t_0$. Consideremos $t \in (0,1)$. Probaremos, dividiendo la demostración en dos casos, que $\mu^{-1}([0,t])$ es tipo 2-celda.

Caso (i). $t < t_0$.

Definimos el conjunto:

$$Q = \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \leq x \leq \vartheta(y) \text{ y } 0 \leq y \leq t\}.$$

Definimos la función $\varphi : \mu^{-1}([0,t]) \to Q$ como:

$$\varphi(A) = \big(\text{mín} \circ C(f)(A), \mu(A)\big).$$

Afirmación 1. La función φ está bien definida.

Sea $A \in \mu^{-1}([0,t])$. De modo que, $\varphi(A) = (a,u) \in [0,1]^2$. Recordemos que $G : [0,1] \to C(C(X))$, $C(C(f)) : C(C(X)) \to C(C([0,1]))$, $C(\text{mín}) : C(C([0,1])) \to C([0,1])$. De modo que $C(\text{mín}) \circ C(C(f)) \circ G(\mu(A))$ es un elemento de $C([0,1])$ y, por lo tanto, es un subcontinuo de $[0,1]$. Luego, existen elementos $b, c \in [0,1]$ tales que

$$C(\text{mín}) \circ C(C(f)) \circ G(\mu(A)) = [b,c].$$

Como $A \in G(\mu(A)) = \mu^{-1}(\mu(A))$, tenemos

$$0 \leq a = \text{mín} \circ C(f)(A) \in C(\text{mín}) \circ C(C(f)) \circ G(\mu(A)),$$

de manera que, $a \in [b,c]$. Así que,

$$a \leq c = \text{máx}([b,c]) = \text{máx}\big(C(\text{mín}) \circ C(C(f)) \circ G(\mu(A))\big) = \vartheta(\mu(A)) = \vartheta(u).$$

Por otra parte, $0 \leq u = \mu(A) \leq t$. Así, obtenemos que $(a,u) \in Q$, de modo que, φ está bien definida.

Afirmación 2. La función φ es continua.

Esta propiedad es clara ya que $\text{mín} \circ C(f)|_{\mu^{-1}([0,t])} : \mu^{-1}([0,t]) \to [0,1]$ y $\mu|_{\mu^{-1}([0,t])} : \mu^{-1}([0,t]) \to [0,t]$ son funciones continuas.

Afirmación 3. La función φ es suprayectiva.

Sea $(x,y) \in Q$. Entonces $0 \leq x \leq \vartheta(y)$ y $0 \leq y \leq t$. Como $f : X \to [0,1]$ es suprayectiva, existe $p \in X$ tal que $f(p) = 0$. Como $\{p\} \subsetneq X$ y $0 \leq y < 1$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $A \in \mu^{-1}(y)$ tal que $p \in A$. De manera que $\text{mín}(C(f)(A)) = 0$. Por otro lado, como $y \leq t < 1$ y μ es una función de Whitney, por el Lema 8.4 de [12], $\mu^{-1}(y)$ es un continuo. Por lo tanto,

$$C(\text{mín}) \circ C(C(f))(G(y)) = C(\text{mín}) \circ C(C(f))(\mu^{-1}(y))$$

también es un continuo y contiene a 0 y $\vartheta(y)$, entonces

$$[0, \vartheta(y)] \subset C(\text{mín}) \circ C(C(f))(\mu^{-1}(y)).$$

Como $x \in [0, \vartheta(y)]$, existe un elemento $B \in \mu^{-1}(y)$ tal que $\text{mín} \circ C(f)(B) = x$. Así, tenemos que $\varphi(B) = (x, y)$, de modo que φ es suprayectiva.

Afirmación 4. La función φ es una ε-función.

Tomemos $(x, y) \in Q$. Consideremos elementos $A, B \in \varphi^{-1}(x, y)$. Por la definición de φ, sabemos que $\mu(A) = \mu(B) = y$ y existen elementos $a, b \in [x, 1]$ tales que $C(f)(A) = f(A) = [x, a]$ y $C(f)(B) = f(B) = [x, b]$. Entonces $f(A) \subset f(B)$ o $f(B) \subset f(A)$. Como f es η-función, podemos aplicar el Lema 6.0.16 para obtener $A \subset N(\eta, B)$ o $B \subset N(\eta, A)$. Como $A, B \in \mu^{-1}(y)$ y $\eta < \delta$, por la elección de δ, tenemos que $H(A, B) < \frac{\varepsilon}{8}$. Como A y B son elementos cualesquiera de $\varphi^{-1}((x, y))$, $\text{diám}(\varphi^{-1}((x, y))) < \varepsilon$.

Afirmación 5. El conjunto Q es una 2-celda.

Definimos la función $F : Q \to [0, 1] \times [0, t]$ como

$$F(x, y) = (\tfrac{x}{\vartheta(y)}, y).$$

Dado $(x, y) \in Q$, veamos que $\vartheta(y) \neq 0$. Para empezar $0 \leq y \leq t$. Supongamos, por el contrario, que $\vartheta(y) = 0$. Entonces $y \in \vartheta^{-1}(0)$, esto nos lleva a que $t_0 = \text{mín}\, \vartheta^{-1}(0) \leq y \leq t$. Lo cual es una contradicción ya que $y \leq t < t_0$. Por lo tanto, $\vartheta(y) \neq 0$ para cada $y \in [0, t]$. De manera que la función F está bien definida y es continua.

Verifiquemos que F es inyectiva. Consideremos $(x, y), (z, w) \in Q$ tales que $F(x, y) = F(z, w)$. Por la definición de F, tenemos $\frac{x}{\vartheta(y)} = \frac{z}{\vartheta(w)}$ y $y = w$, lo cual nos conduce a que $x = z$, por lo tanto, $(x, y) = (z, w)$ y F es inyectiva.

Probemos que F es suprayectiva. Sea $(x, y) \in [0, 1] \times [0, t]$. Entonces las coordenadas del elemento $(x \cdot \vartheta(y), y)$ satisfacen $0 \leq x \cdot \vartheta(y) \leq \vartheta(y)$ y $0 \leq y \leq t$, así que, $(x \cdot \vartheta(y), y) \in Q$. Notemos que

$$F(x \cdot \vartheta(y), y) = (\tfrac{x \cdot \vartheta(y)}{\vartheta(y)}, y) = (x, y).$$

Con esto, terminamos la prueba de que F es una función suprayectiva.

Como F es una función continua, inyectiva y suprayectiva entre continuos, concluimos que F es un homeomorfismo y, por lo tanto, Q es una 2-celda.

De modo que, $\mu^{-1}([0,t])$ es tipo 2-celda.

Caso (ii). $t \geq t_0$.

Afirmación 6. $H(B,X) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $B \in \mu^{-1}(t_0)$.

Como f es suprayectiva, podemos considerar un elemento $x \in f^{-1}(1)$. Notemos que $\{x\} \subsetneq X$ y $t_0 \in [0,1]$. Entonces (por el Lema 2.2.4) existe un elemento $A_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $x \in A_0$. Como

$$T = \{s \in [0,1] : \text{mín}(C(f)(A)) = 0 \text{ para todo elemento } A \in \mu^{-1}(s)\}$$

es cerrado y $t_0 = \text{mín}(T)$, $t_0 \in T$. De modo que $\text{mín}(C(f)(A)) = 0$ para todo elemento $A \in \mu^{-1}(t_0)$. En particular, $\text{mín}(C(f)(A_0)) = 0$, lo cual nos dice que $0 \in C(f)(A_0)$ y, por lo tanto, $C(f)(A_0) = [0,1]$. Mostraremos que $H(A_0,X) < \frac{\varepsilon}{8}$. Sea $y \in X$. Entonces existe un elemento $a \in A_0$ tal que $f(a) = f(y)$. Como f es η-función, sabemos que $d(a,y) < \eta$. Por la elección del número η, $d(a,y) < \frac{\varepsilon}{8}$. Como y es un elemento cualquiera de X, $X \subset N(A, \frac{\varepsilon}{8})$ y, por la Proposición 1.0.10, $H(A_0,X) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Tomemos $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Probemos que $H(A_0,B) < \frac{\varepsilon}{8}$. Notemos que $f(B) \subset f(A_0) = [0,1]$, lo cual nos conduce, por el Lema 6.0.16 y debido a que f es una η-función, a que $B \subset N(\eta, A_0)$. Utilizando esta última afirmación, los hechos de que $\mu(A_0) = \mu(B)$, $\eta < \delta$ y la elección de δ, tenemos que $H(A_0,B) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Los dos párrafos anteriores los utilizamos para lo siguiente:

$$H(B,X) \leq H(B,A_0) + H(A_0,X) < \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} = \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto, $H(B,X) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo elemento $B \in \mu^{-1}(t_0)$, así terminamos la prueba de esta afirmación.

Por la Proposición 2.2.2, existe un número $\rho > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$, son tales que $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \rho$, entonces $H(A,B) < \frac{\varepsilon}{4}$. Podemos suponer $\frac{\rho}{2} < t_0$.

Afirmación 7. Sea $r \in (0,1)$ tal que $t_0 - \frac{\rho}{2} < r < t_0$. Para cada $M, N \in \mu^{-1}([r,1])$, se satisface que $H(M,N) < \varepsilon$.

Probemos que $H(X, M) < \frac{\varepsilon}{2}$. Analicemos el caso $\mu(M) \geq t_0$. Considerando un elemento $x \in M$, observamos que $\{x\} \subsetneq M$. Como $t_0 \in [0, \mu(M)]$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $B \subset M$. Por la Afirmación 6, $H(B, X) < \frac{\varepsilon}{4}$ y, por la Proposición 1.0.10, $X \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, B)$. Utilizando el hecho de que $B \subset M$, llegamos a que $X \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, M)$. De modo que, por la Proposición 1.0.10, $H(X, M) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Veamos el caso $\mu(M) < t_0$. Como $M \subsetneq X$ y $\mu(M) < t_0 < 1$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $M \subset B$. Como $\mu(M) \in [r, t_0)$, tenemos $\mu(B) - \mu(M) \leq t_0 - r < \rho$. Por la elección de ρ, $H(M, B) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por la Afirmación 6, sabemos que $H(B, X) < \frac{\varepsilon}{4}$. Por lo tanto,

$$H(M, X) < H(M, B) + H(B, X) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De modo que en ambos casos se satisface la desigualdad $H(M, X) < \frac{\varepsilon}{2}$. De manera similar se prueba que $H(N, X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, utilizando la desigualdad triangular llegamos a que $H(M, N) < \varepsilon$, así, concluimos la prueba de la Afirmación 7.

Como $r < t_0$, aplicamos el caso (i) para obtener una ε-función $\varphi : \mu^{-1}([0, r]) \to Q$, en donde

$$Q = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq x \leq \vartheta(y) \text{ y } 0 \leq y \leq r\}.$$

Definimos la función $\psi : \mu^{-1}([0, t]) \to Q$ como:

$$\psi(A) = \begin{cases} (\text{mín}(C(f)(A)), r), & \text{si} \quad A \in \mu^{-1}([r, t]); \\ \varphi(A), & \text{si} \quad A \in \mu^{-1}([0, r]). \end{cases}$$

Tomemos $A \in \mu^{-1}(r)$. Como $\mu(A) = r$,

$$\varphi(A) = \big(\text{mín}(C(f)(A)), \mu(A)\big) = \big(\text{mín}(C(f)(A)), r\big).$$

Por otra parte, como φ es suprayectiva (por la Afirmación 3), se cumple que $\varphi(\mu^{-1}([0, r])) = Q$. Verifiquemos que

$$\varphi(\mu^{-1}([r, 1])) \subset [0, \vartheta(r)] \times \{r\}.$$

Sea $A \in \mu^{-1}([r,1])$. Entonces $r \leq \mu(A)$. Consideremos $a_0 \in A$. Como $r > 0$, $\{a_0\} \subsetneq A$. De manera que podemos aplicar el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $B \in \mu^{-1}(r)$ tal que $\{a_0\} \subset B \subset A$. Por lo tanto, $C(f)(B) \subset C(f)(A)$, lo cual implica que $\text{mín}(C(f)(A)) \leq \text{mín}(C(f)(B)) \leq \vartheta(r)$. Por lo tanto, $\psi((A) \in [0, \vartheta(r)] \times \{r\}$. Así, hemos probado que $\varphi(\mu^{-1}([r,1])) \subset [0, \vartheta(r)] \times \{r\}$. En resumen, hemos visto que ψ es una función bien definida, suprayectiva y continua (ya que es continua en $\mu^{-1}([0,r])$ y en $\mu^{-1}([r,t])$).

Verifiquemos que ψ es una ε-función. Sea $(x,y) \in Q$. Consideremos elementos $A, B \in \psi^{-1}(x,y)$. En el caso en que $y < r$, $A, B \in \varphi^{-1}(x,y)$. La Afirmación 4 nos dice que φ es una ε-función y, como $A, B \in \mu^{-1}([0,r])$, obtenemos que $H(A,B) < \varepsilon$. Supongamos que $y \geq r$. Entonces $\mu(A) \geq r$ y $\mu(B) \geq r$, es decir, $A, B \in \mu^{-1}([r,t])$. Por la Afirmación 7, sabemos que $H(A,B) < \varepsilon$. Así, terminamos la prueba de que ψ es una ε-función. Por la Afirmación 5, Q es homeomorfo a $[0,1] \times [0,r]$. Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t])$ es tipo 2-celda.

En resumen, en ambos casos probamos que $\mu^{-1}([0,t])$ es tipo 2-celda para cada $t \in (0,1)$, así, terminamos la prueba de nuestro teorema. ■

6.2. Tipo circunferencia

En esta sección veremos que, para X tipo circunferencia, sus bloques de Whitney suficientemente pequeños son tipo anillo.

Definición 6.2.1. Un continuo Y es *tipo circunferencia* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f_\varepsilon : Y \to S$. Un continuo Y es *tipo anillo* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f_\varepsilon : Y \to S \times [0,1]$.

Teorema 6.2.2. *(M. E. Aguilera) Sean X tipo circunferencia y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Entonces existe $t_0 \in (0,1]$ tal que $\mu^{-1}([0,s])$ es tipo anillo para cada $s \leq t_0$.*

Demostración. Supongamos que d y D son las métricas de X y S, respectivamente. Sean $t \in (0,1)$ y $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe una ε-función suprayectiva $\varphi : \mu^{-1}([0,t_0]) \to S \times [0,t_0]$ para algún $t_0 \in (0,t]$.

Por la Proposición 2.2.1 y los Lemas 6.0.16 y 6.0.17, existe un número $\delta > 0$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) si $A, B \in C(X)$ son tales que $\mu(A) = \mu(B)$ y $A \subset N(\delta, B)$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$;

(b) si $A, B \subset X$ son tales que $f(A) \subset f(B)$, para una δ-función $f : X \to S$, entonces $A \subset N(\delta, B)$;

(c) para toda δ-función $f : X \to S$ se tiene que $f(A) \neq S$ para todo elemento $A \in \mu^{-1}([0,t])$.

Consideremos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 < \text{mín}\{\varepsilon, \delta\}$. Como X es tipo circunferencia, existe una ε_0-función suprayectiva $g : X \to S$. Por otro lado, por el Lema 6.0.18, existe un número $\lambda > 0$ tal que:

(d) si $A \subset S$ y $\text{diám}(A) < \lambda$, entonces $\text{diám}(g^{-1}(A)) < \varepsilon_0$. Supongamos que $\lambda < 1$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $D((1,0), \exp(2\pi i \frac{1}{m})) < \frac{\lambda}{2}$. Consideremos la distancia $\rho = D((1,0), \exp(2\pi i \frac{1}{m}))$. Para cada $j \in \{1,\ldots,m\}$, definimos $z_j = \exp(2\pi i \frac{j-1}{m})$. Notemos que $D(z_j, z_{j+1}) = \rho$, para cada $j \in \{1,\ldots,m-1\}$, y $D(z_1, z_m) = \rho$. Como g es una función suprayectiva, existen elementos $x_1,\ldots,x_m \in X$ tales que $g(x_1) = z_1,\ldots,g(x_m) = z_m$. Observemos que $m > 8$ ya que $\rho < \frac{\lambda}{2} < \frac{1}{2}$.

Sea $j \in \{1,\ldots,m\}$. Por la continuidad de la función g, existe un número $\epsilon > 0$ tal que $g(B_d(\epsilon, x_j)) \subset B_D(\frac{\rho}{8}, z_j)$. Consideremos un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de $\{x_j\}$ a X. Por la continuidad de α, existe un número $\eta > 0$ tal que, si $r \leq \eta$, entonces $\alpha(r) \in B_H(\epsilon, \{x_j\})$. Utilizando el Lema 1.1.11, obtenemos que $\alpha(r) \subset B_d(\epsilon, x_j)$ si $r \leq \eta$. En el caso en que $\mu(\alpha(\eta)) \leq t$, definimos $A_j = \alpha(\eta)$. En el caso en que $\mu(\alpha(\eta)) > t$, como $\mu(\alpha(0)) = \mu(\{x_j\}) = 0 < t$, por el Lema 2.2.9, existe $\eta_0 \in (0,\eta)$ tal que $\alpha(\eta_0) \in \mu^{-1}(t)$. Definimos $A_j = \alpha(\eta_0)$. Hacemos

$$t_0 = \text{mín}\{\mu(A_j) : j \in \{1,\ldots,m\}\}.$$

Observemos que $0 < t_0 \leq t$. Dado $j \in \{1, \ldots, m\}$, como $\{x_j\} \subsetneq A_j$ y $0 < t_0 \leq \mu(A_j)$, por el Lema 2.2.4, existe un elemento $B_j \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $B_j \subset A_j$. Notemos que $B_j \subset B_d(\epsilon, x_j)$. De modo que, $g(B_j) \subset g(B_d(\epsilon, x_j)) \subset B_D(\frac{\varrho}{8}, z_j)$.

Por la Proposición 1.2.1, sabemos que $C(g) : C(X) \to C(S)$ es una función continua. Sea $m : C(S) \setminus \{S\} \to S$ la función punto medio. Como g es una δ-función (ya que $\varepsilon_0 < \delta$) y $t_0 \leq t$, por (c), tenemos que $g(A) \neq S$ para todo elemento $A \in \mu^{-1}([0, t_0])$. De modo que, la función $G = m \circ C(g)|_{\mu^{-1}([0,t_0])} : \mu^{-1}([0, t_0]) \to S$ está bien definida y es continua.

Definimos

$$M = G(\mu^{-1}(t_0)),$$

el cual es un subcontinuo de S. Observemos que $G(B_j) = m \circ C(g)(B_j) \in B_D(\frac{\varrho}{8}, z_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $B_D(\frac{\varrho}{8}, z_1), \ldots, B_D(\frac{\varrho}{8}, z_m)$ son ajenas y $m > 8$, M es un subcontinuo no degenerado de S.

Afirmación 1. $M \subset G(\mu^{-1}(s))$ para cada $s \in [0, t_0]$.

Sea $z \in M$. Probaremos que, para cada $s \in [0, t_0)$, existe un elemento $E \in \mu^{-1}(s)$ tal que $G(E) = z$. Como g es suprayectiva, $g(X) = S$. Entonces $C(g)(F_1(X)) = F_1(S)$. De modo que

$$G(\mu^{-1}(0)) = G(F_1(X)) = m(C(g)(F_1(X))) = m(F_1(S)) = S.$$

Así, para el caso $s = 0$, existe $E \in \mu^{-1}(s)$ tal que $G(E) = z$. Tomemos $s \in (0, t_0)$. Como $M = G(\mu^{-1}(t_0))$, existe un elemento $Z \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $G(Z) = z$. En el caso en que $C(g)(Z) = g(Z) = \{z\} \in F_1(S)$, fijemos un elemento $y \in Z$. Como $t_0 > 0$, $\{y\} \subsetneq Z$. Aplicando el Lema 2.2.4, tenemos que existe un elemento $F \in \mu^{-1}(s)$ tal que $F \subset Z$. De modo que, $g(F) \subset g(Z) = \{z\}$, así que, $g(F) = \{z\}$. De manera que $G(F) = m(g(F)) = m(\{z\}) = z$. Veamos el caso en que $C(g)(Z) \notin F_1(S)$. Entonces $C(g)(Z)$ es un arco. Sea $J = C(g)(Z)$. Notemos que $g|_Z : Z \to J$ es una función continua, $\frac{\mu|_{C(Z)}}{\mu(Z)} : C(Z) \to [0, 1]$ es una función de Whitney (por el Lema 2.0.10) y $\frac{s}{\mu(Z)} < 1$. De modo que, el Lema 6.0.19 nos asegura la existencia de un elemento $E \in \left(\frac{\mu|_{C(Z)}}{\mu(Z)}\right)^{-1}\left(\frac{s}{\mu(Z)}\right)$ tal que $m \circ C(g|_Z)(E) = m \circ C(g|_Z)(Z)$. Por el Lema 2.3.3,

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(Z)}}{\mu(Z)}\big)^{-1}\big(\tfrac{s}{\mu(Z)}\big) = (\mu|_{C(Z)})^{-1}(s).$$

Por lo tanto, $E \in (\mu|_{C(Z)})^{-1}(s)$ y $G(E) = G(Z) = z$. Con esto hemos probado que, para cada $s \in [0, t_0)$, existe un elemento $E \in \mu^{-1}(s)$ tal que $G(E) = z$. De manera que, $M \subset G(\mu^{-1}(s))$ para cada $s \in [0, t_0]$.

Verifiquemos que $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo anillo para cada $s \in [0, t_0]$.

Caso (1). $M = S$.

En este caso, definimos la función $\varphi : \mu^{-1}([0, t_0]) \to S \times [0, t_0]$, como:

$$\varphi(A) = (G(A), \mu(A)).$$

Observemos que φ está bien definida y es continua. Veamos que φ es una ε-función. Consideremos $A, B \in \mu^{-1}([0, t_0])$ tales que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Entonces $\mu(A) = \mu(B)$ y $G(A) = G(B)$. Por la definición de la función G, $m(C(g)(A)) = m(C(g)(B))$ y, por la definición de la funciones m y $C(g)$, $g(A) \subset g(B)$ o $g(B) \subset g(A)$. Como g es una δ-función (ya que $\varepsilon_0 < \delta$), por (b), obtenemos que $A \subset N(\delta, B)$ o $B \subset N(\delta, A)$. Teniendo en cuenta que $\mu(A) = \mu(B)$ y utilizando (a), tenemos que $H(A, B) < \varepsilon$. Con esto, hemos probado que φ es una ε-función.

Verifiquemos que φ es una función suprayectiva. Por la Afirmación 1, $M \subset G(\mu^{-1}(s))$ para cada $s \in [0, t_0]$. Así que, $G(\mu^{-1}(s)) = S$ para cada $s \in [0, t_0]$. Por tanto, $\varphi(\mu^{-1}([0, t_0])) = S \times [0, t_0]$.

De modo que φ es una ε-función suprayectiva. Notemos que $\varphi|_{\mu^{-1}([0,s])} : \mu^{-1}([0, s]) \to S \times [0, s]$ también es una ε-función suprayectiva para cada $s \in (0, t_0]$. Así que, en este caso, $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo anillo para cada $s \in (0, t_0]$.

Caso (2). $M \neq S$.

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, sea $\theta_j \in [0, 1]$ tal que $G(B_j) = \exp(2\pi i \theta_j)$. Podemos suponer que $\theta_1 < \cdots < \theta_m$ y $\{\exp(2\pi i \theta) : \theta \in [\theta_1, \theta_m]\} \subset M$ (si no fuera así reindexamos y escogemos un rango adecuado). Tomemos $\phi_1 = \frac{1}{8m}$ y $\phi_m = 1 - \frac{9}{8m}$. Observemos que

$$D(z_1, \exp(2\pi i \phi_1)) = D(z_m, \exp(2\pi i \phi_m)) = \tfrac{\varrho}{8}.$$

Definimos

$$N = \{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in [0, \theta_1] \cup [\theta_m, 1]\} \text{ y}$$

$$L = \{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in [0, \phi_1) \cup (\phi_m, 1]\}.$$

Notemos que $B_D(\frac{\rho}{8}, z_1) \cup B_D(\frac{\rho}{8}, z_m) \subset L$ y que $G(B_1)$ y $G(B_m)$ son los extremos del arco N.

Afirmación 2. Sea $A \in \mu^{-1}([0, t_0])$ tal que $G(A) \in N$. Entonces $g(A) \subset L$ (en donde $G = m \circ C(g)|_{\mu^{-1}([0,t_0])}$).

Para probar esta afirmación, supongamos lo contrario, que existe $x \in g(A) \setminus L$. Teniendo en cuenta que $G(B_1) \subset B_D(\frac{\rho}{8}, z_1)$, $G(B_m) \subset B_D(\frac{\rho}{8}, z_m)$ y que $G(B_1)$ y $G(B_m)$ son los extremos del arco N, obtenemos que $B_1 \subsetneq A$ o $B_m \subsetneq A$. Lo cual nos lleva a que $t_0 = \mu(B_1) < \mu(A)$ o $t_0 = \mu(B_m) < \mu(A)$, lo cual es un absurdo. Por tanto, $g(A) \subset L$. De esta manera, concluimos con la Afirmación 2.

Afirmación 3. diám$(L) < \lambda$.

Utilizando la desigualdad triangular tenemos lo siguiente:

$$D(\exp(2\pi i\phi_1), \exp(2\pi i\phi_m))$$

$$\leq D(\exp(2\pi i\phi_1), z_1) + D(z_1, z_m) + D(z_m, \exp(2\pi i\phi_m))$$

$$= \tfrac{\rho}{8} + \rho + \tfrac{\rho}{8} = \tfrac{5}{4}\rho < \tfrac{5}{4}\tfrac{\lambda}{2} < \lambda.$$

Como $m > 8$, la longitud de arco de L es menor que $\frac{\pi}{2}$ y, por lo tanto,

$$\text{diám}(L) = D(\exp(2\pi i\phi_1), \exp(2\pi i\phi_m)) < \lambda.$$

Con esto, terminamos nuestra afirmación.

Consideremos a S como $\{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in [0, 1]\}$. Definimos la función $f : S \to S$ como:

$$f(\exp(2\pi i\theta)) = \begin{cases} \exp(2\pi i\frac{\theta-\theta_1}{\theta_m-\theta_1}), & \text{si} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_m]; \\ (1, 0), & \text{si} \quad \theta \in [0, \theta_1] \cup [\theta_m, 1]. \end{cases}$$

Notemos que f es una función continua y suprayectiva. De modo que, $F = f \circ G : \mu^{-1}([0, t_0]) \to S$ está bien definida y es continua. Definimos $\vartheta : \mu^{-1}([0, t_0]) \to S \times [0, t_0]$ como:

$$\vartheta(A) = (F(A), \mu(A)).$$

Observemos que esta función está bien definida y es continua. Por la definición de la función f y teniendo en cuenta que $\{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in [\theta_1, \theta_m]\} \subset M$, obtenemos que

$$S = f(\{\exp(2\pi i\theta) : \theta \in [\theta_1, \theta_m]\}) \subset f(M)$$

y, por tanto, $f(M) = S$. Tomemos $s \in [0, t_0]$. Por la Afirmación 1, $M \subset G(\mu^{-1}(s))$. Aplicando f, obtenemos

$$S = f(M) \subset f(G(\mu^{-1}(s))) = F(\mu^{-1}(s)),$$

así que, $F(\mu^{-1}(s)) = S$. Lo cual nos lleva a que $\operatorname{Im}\vartheta = S \times [0, t_0]$. Por lo tanto, ϑ es una función suprayectiva.

Verifiquemos que ϑ es una ε-función. Sean $(w, s) \in S \times [0, t_0]$ y $A,\ B \in \varphi^{-1}((w, s))$. Consideramos dos casos.

Caso (i). $w \neq (1, 0)$.

En este caso, por la definición de las funciones F y f, $G(A) = G(B) = w$ y $\mu(A) = \mu(B) = s$. Lo cual nos lleva a que $\varphi(A) = \varphi(B)$, en donde φ está definida como en el Caso 1. Como vimos, φ es una ε-función. Así que $H(A, B) < \varepsilon$.

Caso (ii). $w = (1, 0)$.

Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones F y f, tenemos que $G(A),\ G(B) \in N$. Así que, por la Afirmación 2, $g(A),\ g(B) \subset L$. De modo que, $A,\ B \subset g^{-1}(L)$. Por otra parte, por la Afirmación 3, $\text{diám}(L) < \lambda$. Lo cual nos lleva, por (d), a que $\text{diám}\, g^{-1}(L) < \varepsilon_0$. De modo que, dados $a \in A$ y $b \in B$, se satisface que

$$d(a, b) \leq \text{diám}(A \cup B) \leq \text{diám}(g^{-1}(L)) < \varepsilon_0.$$

Así que $A \subset N(\varepsilon_0, B)$ y $B \subset N(\varepsilon_0, A)$. Aplicando la Proposición 1.0.10, obtenemos que $H(A, B) < \varepsilon_0$. Como $\varepsilon_0 < \varepsilon$, concluimos que $H(A, B) < \varepsilon$.

Por tanto ϑ, es una ε-función suprayectiva. Notemos que $\vartheta|_{\mu^{-1}([0,s])} : \mu^{-1}([0, s]) \to S \times [0, s]$ también es una ε-función suprayectiva para cada $s \in (0, t_0]$. Concluimos, también para este caso, que $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo anillo para cada $s \in (0, t_0]$. ■

Finalizamos este capítulo con las siguientes preguntas.

Problema 6.2.3. Supongamos que existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ tal que $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo 2-celda para cada $s \in (0, 1)$. ¿Será cierto que X es tipo arco?

Problema 6.2.4. ¿Para X tipo circunferencia, será cierto que todos sus bloques de Whitney son tipo anillo?

Problema 6.2.5. Supongamos que existen una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$ y $t > 0$ tal que $\mu^{-1}([0, s])$ es tipo anillo para cada $s \in [0, t]$. ¿Será cierto que X es tipo circunferencia?

Definición 6.2.6. Sea T un triodo simple. Un continuo Y es *tipo triodo simple* si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε-función suprayectiva $f_\varepsilon : Y \to T$.

Problema 6.2.7. ¿Cómo serán los bloques de Whitney para X tipo triodo simple?

Capítulo 7

$C_\varepsilon(X)$ y sus propiedades de conexidad

En esta parte, en colaboración con A. Illanes, damos respuesta las siguientes preguntas hechas por E. L. McDowell y B. E. Wilder en [18] y [20].

(a) ¿$C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ será conexo cuando $\mathcal{Z}$ es cero dimensional? (Pregunta 3.10 de [18].)

(b) ¿Si X es un continuo localmente conexo, entonces $C_\varepsilon(X)$ será cíclicamente conexo para cada $\varepsilon > 0$? (Pregunta 2 de [20].)

(c) ¿Para cuáles continuos X, será cierto que $C_\varepsilon(X)$ es cerrado numerable aposindético para cada $\varepsilon > 0$? (Pregunta 3.3 de [18].)

Veamos primero algunos conceptos y resultados básicos que nos auxiliarán en la prueba de los teoremas principales.

Definición 7.0.8. Si $\varepsilon > 0$, definimos *el hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño* como el conjunto:

$$C_\varepsilon(X) = \{A \in C(X) : \text{diám}(A) \leq \varepsilon\}.$$

Observación 7.0.9. Notemos que, si $\text{diám}(X) \leq \varepsilon$, $C_\varepsilon(X) = C(X)$. De modo que, para este caso no estamos definiendo nada nuevo. Por tanto, consideraremos en este capítulo que $\varepsilon < \text{diám}(X)$.

Teorema 7.0.10. *El hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño es un continuo.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ y $a \in A$. Como $\{a\} \subsetneq A$, por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_A : [0,1] \to C(X)$ de $\{a\}$ a A. Tomemos $r \in [0,1]$. Por las propiedades de un arco ordenado, se tiene que $\alpha_A(r) \subset \alpha_A(1) = A$, lo cual nos lleva a que $\text{diám}(\alpha_A(r)) \leq \text{diám}(A) \leq \varepsilon$. Esto nos dice que $\operatorname{Im}\alpha_A \subset C_\varepsilon(X)$. Notemos que $A \in \operatorname{Im}\alpha_A$. Por lo tanto,

$$C_\varepsilon(X) = F_1(X) \cup \bigcup\{\operatorname{Im}\alpha_A : A \in C_\varepsilon(X)\}.$$

Observemos que $\operatorname{Im}\alpha_A$ es conexo e $\operatorname{Im}\alpha_A \cap F_1(X) \neq \emptyset$ para cada $A \in C_\varepsilon(X)$. Teniendo en cuenta que $F_1(X)$ también es conexo, obtenemos que $C_\varepsilon(X)$ también es conexo. Como la función diám es continua en $C(X)$ (por el resultado de la pág. 55 de [16]) tenemos que $\text{diám}^{-1}([0,\varepsilon]) = C_\varepsilon(X)$ es cerrado. Así concluimos que $C_\varepsilon(X)$ es un continuo. ■

Lema 7.0.11. *Si $\varepsilon > 0$ y μ es una función de Whitney para $C(X)$, entonces existe un número $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}([0,t_0]) \subset C_\varepsilon(X)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.2, existe $s \in (0,1)$ tal que si $A, B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < s$, entonces $H(A,B) < \varepsilon$. Fijemos $t_0 < s$. Consideremos $t \in [0,t_0]$. Vamos a probar que $\mu^{-1}(t) \subset C_\varepsilon(X)$. Sean $A \in \mu^{-1}(t)$ y $a \in A$. Como $\mu(A) - \mu(\{a\}) = \mu(A) = t \leq t_0 < s$, $H(A,\{a\}) < \varepsilon$. Por la Proposición 1.0.10, la última desigualdad nos conduce a que $A \subset N(\varepsilon,\{a\}) = B_d(\varepsilon,a)$. De modo que, $d(a,b) < \varepsilon$ para todo elemento $b \in A$. Luego $d(a,b) < \varepsilon$ para todo par de elementos de A. Por tanto,

$$\text{diám}(A) = \text{máx}\{d(a,b) : a,b \in A\} \leq \varepsilon.$$

Con esto, concluimos que $\mu^{-1}(t) \subset C_\varepsilon(X)$. Así, $\mu^{-1}([0,t_0]) \subset C_\varepsilon(X)$. ■

7.1. $C_\varepsilon(X)$ menos un conjunto 0 dimensional

En esta sección veremos que al hiperespacio de los continuos de diámetro pequeño no lo puede desconectar el hiperespacio de los singulares ni ningún conjunto cero dimensional.

Lema 7.1.1. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Si $\varepsilon > 0$, entonces $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ es conexo.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Lema 7.0.11, existe un número $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t) \subset C_\varepsilon(X)$. Por el Teorema 8.3 de [12], $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Veamos que, dado un elemento $A \in (C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)) \setminus \mu^{-1}(t)$, existe un conexo de $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ que contiene a A y que intersecta a $\mu^{-1}(t)$.

Caso (i). $\mu(A) < t$.

Como $A \subsetneq X$ y $\mu(A) < t < 1 = \mu(X)$, por el Lema 2.2.4, existe $B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \subsetneq B$. Por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_A : [0,1] \to C(X)$ de A a B. Notemos que $B \in \operatorname{Im} \alpha_A \cap \mu^{-1}(t)$. Como $B \in \mu^{-1}(t) \subset C_\varepsilon(X)$, se tiene que diám$(B) \leq \varepsilon$. De modo que, para cada $s \in [0,1]$, por las propiedades que tiene un arco ordenado, se satisface que $A = \alpha_A(0) \subset \alpha_A(s) \subset \alpha_A(1) = B$. Por lo tanto, diám$(\alpha_A(s)) \leq$ diám$(B) \leq \varepsilon$. Entonces $\alpha_A(s) \in C_\varepsilon(X)$. Observemos que $\alpha_A(s) \notin F_1(X)$ ya que $A \notin F_1(X)$ y $A \subset \alpha_A(s)$. En resumen, tenemos $A \in \operatorname{Im} \alpha_A \subset C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ e $\operatorname{Im} \alpha_A \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$.

Caso (ii). $t < \mu(A)$.

Fijemos un elemento $a \in A$. Observemos que $\{a\} \subset A$ y $\mu(\{a\}) = 0 < t < \mu(A)$. Aplicando el Lema 2.2.4, obtenemos un elemento $B \in \mu^{-1}(t)$ tal que $B \subsetneq A$. Por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_A : [0,1] \to C(X)$ de B a A. Notemos que $B \in \operatorname{Im} \alpha_A \cap \mu^{-1}(t)$. Consideremos $s \in [0,1]$, por las propiedades que tiene un arco ordenado, se tiene que $B = \alpha(0) \subset \alpha_A(s) \subset \alpha_A(1) = A$. Como diám$(A) \leq \varepsilon$, llegamos a que diám$(\alpha_A(s)) \leq$ diám$(A) \leq \varepsilon$, de manera que $\alpha_A(s) \in C_\varepsilon(X)$. Notemos que $B \notin F_1(X)$ ya que $B \in \mu^{-1}(t)$. Teniendo en cuenta que $B \subset \alpha_A(s)$, obtenemos que $\alpha_A(s) \notin F_1(X)$. De modo que, $A \in \operatorname{Im} \alpha_A \subset C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ e $\operatorname{Im} \alpha_A \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$.

Con esto, obtuvimos la igualdad de conjuntos:

$$C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) = \mu^{-1}(t) \cup \left(\bigcup \{\operatorname{Im} \alpha_A : A \in (C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)) \setminus \mu^{-1}(t)\} \right),$$

Por lo tanto, $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ es la unión de conexos que intersectan a un conexo, lo cual nos dice que $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ también es conexo. ■

El siguiente teorema es el resultado principal de [14].

Teorema 7.1.2. *El hiperespacio $C(X)$ no se puede desconectar por ninguno de sus subconjuntos cero dimensionales.*

El siguiente resultado es el Teorema 4.7 de [25]

Teorema 7.1.3. *Sea Y un espacio métrico separable y compacto. Entonces* $\dim(Y) = 0$ *si y sólo si Y es totalmente disconexo.*

Teorema 7.1.4. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Sea $\varepsilon > 0$. El hiperespacio $C_\varepsilon(X)$ no se puede desconectar por ninguno de sus subconjuntos cero dimensionales.*

Demostración. Sea $\mathcal{Z} \subset C_\varepsilon(X)$ cero dimensional. Supongamos, por el contrario, que $C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ no es conexo. De modo que, existen dos subconjuntos ajenos y no vacíos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ de $C_\varepsilon(X)$ tales que $C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z} = \mathcal{K} \mid \mathcal{L}$. Definimos los siguientes subconjuntos:

$$\mathcal{K}_0 = \{A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) : C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{K}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_0 = \{A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) : C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{L}\}.$$

Veamos que $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) = \mathcal{K}_0 \mid \mathcal{L}_0$.

Afirmación 1. $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{L}_0$.

Consideremos un elemento $A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$. El Teorema 7.1.2 nos dice que $C(A) \setminus \mathcal{Z}$ es un subconjunto conexo y no vacío de $C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$. De modo que, $C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ o $C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{L}$, lo cual nos dice que $A \in \mathcal{K}_0$ o $A \in \mathcal{L}_0$. Así, hemos probado que $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) \subset \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{L}_0$. Es claro que $\mathcal{K}_0 \cup \mathcal{L}_0 \subset C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$. Por tanto, $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{L}_0$.

Afirmación 2. $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ y $\mathcal{L}_0 \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{K} \neq \emptyset$, podemos elegir un elemento $A \in \mathcal{K}$. El hecho de que $\text{diám}(A) \leq \varepsilon < \text{diám}(X)$, nos dice que $A \subsetneq X$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.7, podemos considerar un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ de A a X. Observemos que la composición de las funciones $\text{diám} \circ \alpha : [0,1] \to [0, \text{diám}(X)]$ es continua. Como

$$\text{diám}(\alpha(0)) = \text{diám}(A) \leq \varepsilon < \text{diám}(X) = \text{diám}(\alpha(1)),$$

por el Teorema del Valor Intermedio, existe un número $r \in [0,1)$ tal que $\text{diám}(\alpha(r)) = \varepsilon$. Por las propiedades que tiene un arco ordenado, como $0 \leq r$, $A = \alpha(0) \subset \alpha(r)$. Si suponemos que $\alpha(r) \in F_1(X)$, llegamos a que $\text{diám}(\alpha(r)) = 0$, lo cual es un absurdo que prueba que $\alpha(r) \notin F_1(X)$. De modo que $\alpha(r) \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$. Notemos que $A \in (C(\alpha(r)) \setminus \mathcal{Z}) \cap \mathcal{K}$. El Teorema 7.1.2 nos lleva a que $C(\alpha(r)) \setminus \mathcal{Z}$ es conexo, y como éste intersecta a $\mathcal{K}$, obtenemos que $C(\alpha(r)) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$. Por la definición de $\mathcal{K}_0$, llegamos a que $\alpha(r) \in \mathcal{K}_0$, de manera que $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$. De manera similar se obtiene que $\mathcal{L}_0 \neq \emptyset$.

Afirmación 3. $\text{cl}_{C(X)}(\mathcal{K}_0) \cap \mathcal{L}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{K}_0 \cap \text{cl}_{C(X)}(\mathcal{L}_0) = \emptyset$.

Supongamos, por el contrario, que existe un elemento $A \in \text{cl}_{C(X)}(\mathcal{K}_0) \cap \mathcal{L}_0$. Así que, $A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$, $C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{L}$ y existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ tal que $C(A_n) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, A_n = A$. Sea $n \in \mathbb{N}$, fijemos un elemento $a_n \in A_n$. Como $\{a_n\} \subsetneq A_n$, el Teorema 2.2.7 nos asegura que existe un arco ordenado $\alpha_n : [0,1] \to C(X)$ de $\{a_n\}$ a A_n. Por el Corolario 4.3 de [12], como $C_\varepsilon(X)$ es un continuo, sabemos que $C(C_\varepsilon(X))$ es compacto. Como X y $C(C_\varepsilon(X))$ son compactos podemos suponer que las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\text{Im}\, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$ convergen a elementos $a \in X$ y $\mathcal{A} \in C(C_\varepsilon(X))$. Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{a_n\}, A_n \in \text{Im}\, \alpha_n$. Por la Proposición 1.1.3 (a), aplicada a las sucesiones $\{\{a_n\}\}_{n=1}^\infty$ y $\{\text{Im}\, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{a\} \in \mathcal{A}$. Aplicando la misma Proposición 1.1.3 (a) a $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{\text{Im}\, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$, obtenemos que $A \in \mathcal{A}$. Como $A \notin F_1(X)$, $\{a\} \neq A$. Lo cual nos dice que $\mathcal{A}$ es no degenerado. Si suponemos que $\mathcal{A} \setminus \mathcal{Z} = \emptyset$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$. Esto nos lleva (por el Teorema 4.2.7) a que $\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{Z}) = 0$. Lo cual nos dice que $\dim(\mathcal{A}) = 0$, y por tanto, utilizando el Teorema 7.1.3, obtenemos que $\mathcal{A}$ es totalmente disconexo, lo cual es un absurdo. De manera que, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Así que, existe un elemento $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{Z}$. Como $\text{lím}\, \text{Im}\, \alpha_n = \mathcal{A}$, La Proposición 1.1.9, nos asegura que existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ de números del intervalo $[0,1]$ tal que $\text{lím}\, \alpha_n(s_n) = B$. Dado

$n \in \mathbb{N}$, por la continuidad del arco ordenado α_n, existe un arco $J_n \subset [0,1]$ que contiene a s_n y tal que

$$\alpha_n(J_n) \subset B_H(\tfrac{1}{n}, \alpha_n(s_n)).$$

Si tuviéramos que $\alpha_n(J_n) \backslash \mathcal{Z} = \emptyset$, utilizando nuevamente los Teoremas 4.2.7 y 7.1.3, obtendríamos que $\alpha_n(J_n)$ es totalmente disconexo, lo cual no puede ser ya que $\alpha_n(J_n)$ es un continuo no degenerado. De modo que, $\alpha_n(J_n) \setminus \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Por lo tanto, podemos elegir un elemento $t_n \in J_n$ tal que $\alpha_n(t_n) \notin \mathcal{Z}$.

Verifiquemos que la sucesión $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al elemento B. Sea $\varepsilon > 0$. Teniendo en cuenta la convergencia de las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\alpha_n(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$, elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(B, \alpha_n(s_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para $n \geq N$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos lo siguiente para $n \geq N$:

$$H(B, \alpha_n(t_n)) \leq H(B, \alpha_n(s_n)) + H(\alpha_n(s_n), \alpha(t_n)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{n} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así, hemos visto que $\lim \alpha_n(t_n) = B$.

Por las propiedades de los arcos ordenados, teniendo en cuenta que $t_n \leq 1$, obtenemos que $\alpha_n(t_n) \subset \alpha_n(1) = A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la Proposición 1.1.3 (a), aplicada a las sucesiones $\{\alpha_n(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que $B \subset A$, así que $B \in C(A)$. Por lo tanto, $\alpha_n(t_n) \in C(A_n) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B \in C(A) \setminus \mathcal{Z} \subset \mathcal{L}$. De manera que $B \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{L}$, lo cual no puede ser ya que esta intersección es vacía. Esto prueba que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{K}_0) \cap \mathcal{L}_0 = \emptyset$. De manera similar se obtiene que $\mathcal{K}_0 \cap \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{L}_0) = \emptyset$.

Hemos visto que $C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X) = \mathcal{K}_0 \mid \mathcal{L}_0$, lo cual es una contradicción al Lema 7.1.1, que nació de suponer que $C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ no era conexo. Así, terminamos la prueba de que $C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ es conexo. ■

7.2. $C_\varepsilon(X)$ es cíclicamente conexo

En esta sección primero veremos un lema para después probar que $C_\varepsilon(X)$ es cíclicamente conexo para X arcoconexo.

Lema 7.2.1. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Si A es un elemento de $C(X) \setminus F_1(X)$, entonces existen dos puntos p y q en A y dos arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$, de $\{p\}$ a A y de $\{q\}$ a A, tales que* $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta = \{A\}$.

Demostración. Consideramos dos casos:

Caso 1. A es indescomponible.

El Teorema 11.15 de [24] nos dice que X tiene una cantidad no numerable de composantes, así que, podemos fijar dos puntos p y q de A que estén en composantes distintas. Como $\{p\}$, $\{q\} \subsetneq A$, por el Teorema 2.2.7, existen dos arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ de $\{p\}$ a A y de $\{q\}$ a A, respectivamente. Es claro que $A \in \operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta$. Veamos que $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta \subset \{A\}$. Sean $r, s \in [0,1]$ tales que $\alpha(r) = \beta(s)$ y supongamos que $\alpha(r) = \beta(s) \neq A$, de modo que, $r, s < 1$. Por las propiedades de los arcos ordenados, teniendo en cuenta que $0 \leq r, s < 1$, obtenemos que $\{p\} = \alpha(0) \subset \alpha(r) \subsetneq \alpha(1) = A$ y $\{q\} = \alpha(0) \subset \beta(s) \subsetneq \beta(1) = A$. Por tanto, $\alpha(r) = \beta(s)$ es un subcontinuo propio de A que contiene a p y q, lo que nos lleva a una contradicción ya que p y q están en composantes distintas. Por lo tanto, $\alpha(r) = \beta(s) = A$. Así, hemos visto que $\operatorname{Im} \alpha \cap \operatorname{Im} \beta = \{A\}$.

Caso 2. A es descomponible.

Por la definición de un continuo descomponible, existen dos subcontinuos propios D y E de A tales que $A = D \cup E$. Fijemos elementos $p \in D \setminus E$ y $q \in E \setminus D$. Como $\{p\} \subsetneq D$, $\{q\} \subsetneq E$, $D \subsetneq A$ y $E \subsetneq A$, por el Teorema 2.2.7, existen arcos ordenados $\gamma, \delta, \kappa, \tau : [0,1] \to C(X)$ de $\{p\}$ a D, de $\{q\}$ a E, de D a A y de E a A, respectivamente. Definimos $\alpha : [0,1] \to C(X)$ como:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \gamma(2u), & \text{si} \quad u \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \kappa(2u-1), & \text{si} \quad u \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $\gamma(2(\frac{1}{2})) = \gamma(1) = D$ y $\kappa(2(\frac{1}{2}) - 1) = \kappa(0) = D$, así que, α es una función continua. Observemos que $\alpha(0) = \gamma(2(0)) = \gamma(0) = \{p\}$ y que $\kappa(2(1) - 1) = \kappa(1) = A$. Sean $v, w \in [0,1]$ tales que $v < w$. En los casos en que $v, w \in [0, \frac{1}{2}]$ o $v, w \in (\frac{1}{2}, 1]$, utilizamos que $\gamma(v) \subsetneq \gamma(w)$ o $\kappa(v) \subsetneq \kappa(w)$ para obtener que $\alpha(v) \subsetneq \alpha(w)$. Supongamos que $v \in [0, \frac{1}{2}]$ y $w \in (\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$\alpha(v) = \gamma(2v) \subset \gamma(2(\tfrac{1}{2})) = \gamma(1) = D = \kappa(0) = \kappa(2(\tfrac{1}{2}) - 1) \subsetneq \kappa(2w-1) = \alpha(w).$$

Lo cual nos lleva a que $\alpha(v) \subsetneq \alpha(w)$. Por lo tanto, α es un arco ordenado de $\{p\}$ a A con la propiedad de que $\alpha(\frac{1}{2}) = \gamma(2\frac{1}{2}) = \gamma(1) = D$. De manera similar, utilizando los arcos ordenados δ y τ, se construye un arco ordenado $\beta : [0,1] \to C(X)$ de $\{q\}$ a A tal que $\beta(\frac{1}{2}) = E$.

Es claro que $A \in \operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta$. Verifiquemos que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta \subset \{A\}$. Sean $r, s \in (0,1]$ tales que $\alpha(r) = \beta(s)$. Veamos que $r \in (\frac{1}{2}, 1]$. Supongamos, por el contrario, que $r \leq \frac{1}{2}$. Por las propiedades de los arcos ordenados y teniendo en cuenta que $0 \leq s$, tenemos que $\alpha(r) \subset \alpha(\frac{1}{2}) = D$ y $\{q\} = \beta(0) \subset \beta(s)$. Así que $q \in \beta(s) = \alpha(r) \subset D$. Lo cual es una contradicción, ya que q se eligió de manera que $q \notin D$. Por lo tanto, $r > \frac{1}{2}$. De manera similar, obtenemos que $s > \frac{1}{2}$.

Utilizando nuevamente las propiedades de los arcos ordenados y los hechos de que $\frac{1}{2} < r \leq 1$ y $\frac{1}{2} < s \leq 1$, obtenemos que $D = \alpha(\frac{1}{2}) \subset \alpha(r) \subset \alpha(1) = A$ y $E = \beta(\frac{1}{2}) \subset \beta(s) \subset \beta(1) = A$. De manera que $A = D \cup E \subset \alpha(r) = \beta(s)$. Por lo tanto, $\alpha(r) = \beta(s) = A$. Así, concluimos que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \{A\}$. Con esto, finalizamos la prueba de nuestro lema. ■

Definición 7.2.2. Un continuo X es *cíclicamente conexo* si cualesquiera dos puntos del continuo están contenidos en una curva cerrada simple.

Teorema 7.2.3. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Si X es arcoconexo y $\varepsilon > 0$, entonces $C_\varepsilon(X)$ es cíclicamente conexo.*

Demostración. Notemos que $F_1(X)$ es arcoconexo, ya que $F_1(X)$ es isométrico a X y este último, por hipótesis, es arcoconexo. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Lema 7.0.11, existe un número $t_0 \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t) \subset C_\varepsilon(X)$ para cada $t \in [0, t_0]$. Por el Teorema 2.3.15, $\mu^{-1}(t)$ es arcoconexo para cada $t \in (0,1)$. Tomemos $A, B \in C_\varepsilon(X)$ tales que $A \neq B$. Consideramos tres casos.

Caso (1). $A, B \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$.

Como $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ y $t_0 > 0$, podemos elegir un número $s \in (0,1)$ tal que

$$s < \text{mín}\{t_0, \mu(A), \mu(B)\}.$$

Por el Lema 7.2.1, existen elementos $x, y \in A$, $z, w \in B$ y arcos ordenados $\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0,1] \to C(X)$ de $\{x\}$ a A, $\{y\}$ a A, $\{z\}$ a B y $\{w\}$ a B, respectivamente, tales que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \{A\}$ e $\operatorname{Im}\gamma \cap \operatorname{Im}\delta = \{B\}$. Sea

$$\mathcal{F} = \big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) \cap \big(\operatorname{Im}\gamma \cup \operatorname{Im}\delta\big).$$

Como α es un arco ordenado, para $r \leq 1$ tenemos $\alpha(r) \subset \alpha(1) = A$. Por lo tanto, $\text{diám}(\alpha(r)) \leq \text{diám}(A) \leq \varepsilon$. De modo que $\operatorname{Im}\alpha \subset C_\varepsilon(X)$. De manera similar, se prueba que $\operatorname{Im}\beta \subset C_\varepsilon(X)$, $\operatorname{Im}\gamma \subset C_\varepsilon(X)$ e $\operatorname{Im}\delta \subset C_\varepsilon(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{F} \subset C_\varepsilon(X)$. Consideremos los siguientes subcasos:

Subcaso (1.1). $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([s,1]) \neq \emptyset$.

En este subcaso, fijemos un elemento $D \in \mathcal{F}$ tal que

$$\mu(D) = \text{máx}\{\mu(C) : C \in \mathcal{F}\}.$$

Observemos que $\mu(D) \in [s,1]$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $D = \alpha(u) = \gamma(v)$ para algunos valores $u, v \in [0,1]$. Notemos que $u \neq 1$ o $v \neq 1$, ya que $A \neq B$. Veamos que

$$\alpha((u,1]) \cap \big(\operatorname{Im}\gamma \cup \operatorname{Im}\delta\big) = \emptyset.$$

Si existiera un elemento en esta intersección, éste sería de la forma $\alpha(p)$, para algún $p \in (u,1]$. Como α es un arco ordenado, tendríamos que $D = \alpha(u) \subsetneq \alpha(p)$, lo cual nos llevaría a que $\mu(D) < \mu(\alpha(p))$. Esto contradice la forma en que elegimos al elemento D. De modo que nuestra intersección es vacía. De manera similar obtenemos que

$$\gamma((v,1]) \cap \big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) = \emptyset.$$

Así que, $\alpha([u,1]) \cup \gamma([v,1])$ es un arco en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a A y B.

Como $F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{I} \subset F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta$ con extremos A y B. Observemos que

$$\big(\alpha([u,1]) \cup \gamma([v,1])\big) \cap \mathcal{I} \subset \big(\alpha([u,1]) \cup \gamma([v,1])\big) \cap \big(F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta\big).$$

Veamos que

$$\alpha([u,1]) \cap \big(F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta\big) = \{A\}.$$

Como $\mu(\alpha(u)) = \mu(D) \in [s,1]$ y $s > 0$, $\alpha([u,1]) \cap F_1(X) = \emptyset$. Tenemos que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \{A\}$. Por otra parte, si tuviéramos que existe $w \in [0,1]$ tal que $\delta(w) = \alpha(u)$ (teniendo en cuenta que $\alpha((u,1]) \cap \operatorname{Im}\delta = \emptyset$), entonces $\delta(w) = \gamma(v)$. Esto nos lleva a que $w = 1 = v$ (ya que $\operatorname{Im}\gamma \cap \operatorname{Im}\delta = \{B\}$), lo cual es un absurdo ya que $v \neq 1$. Así que $\operatorname{Im}\delta \cap \alpha([u,1]) = \emptyset$. Es claro que $A \in \alpha([u,1]) \cap \operatorname{Im}\beta$. Con esto, hemos obtenido que la igualdad de conjuntos deseada. De manera similar, se obtiene que

$$\gamma([v,1]) \cap \big(F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta\big) = \{B\}.$$

Por tanto,

$$\big(\alpha([u,1]) \cup \gamma([v,1])\big) \cap \mathcal{I} = \{A, B\}.$$

Lo que nos permite asegurar que

$$\alpha([u,1]) \cup \gamma([v,1]) \cup \mathcal{I}$$

es una curva cerrada simple en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a A y B.

Subcaso (1.2). $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([s,1]) = \emptyset$.

Como

$$\mu(\alpha(0)) = \mu(\{x\}) = 0 < s < \mu(A) = \mu(\alpha(1)) \text{ y}$$

$$\mu(\gamma(0)) = \mu(\{z\}) = 0 < s < \mu(B) = \mu(\gamma(1)),$$

podemos aplicar el Lema 2.2.9 para asegurar que existen elementos $u, v \in (0,1)$ tales que $\alpha(u), \gamma(v) \in \mu^{-1}(s)$. Notemos que

$$\alpha([u,1]) \cap \gamma([v,1]) = \emptyset,$$

ya que $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([s,1]) = \emptyset$. Como $\mu^{-1}(s)$ es arcoconexo (por el Teorema 2.3.15), existe una función continua e inyectiva $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(s)$ tal que $\eta(0) = \alpha(u)$ y $\eta(1) = \gamma(v)$. Sea $w \in [u,1]$, entonces $\alpha(u) \subset \alpha(w)$. De modo que $s = \mu(\alpha(u)) \leq \mu(\alpha(w))$, así que $\alpha([u,1]) \subset \mu^{-1}([s,1])$. De manera similar, se prueba que $\gamma([v,1]) \subset \mu^{-1}([s,1])$. Podemos suponer que

$$0 = \max\{p \in [0,1] : \eta(p) \in \alpha([0,1]) \cup \beta([0,1])\} \text{ y}$$

$$1 = \text{mín}\{p \in [0,1] : \eta(p) \in \gamma([0,1]) \cup \delta([0,1])\},$$

así que,

$$\eta((0,1)) \cap \big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\gamma \cup \operatorname{Im}\delta\big) = \emptyset.$$

Veamos que

$$\alpha([u,1]) \cap \operatorname{Im}\eta = \{\alpha(u)\}.$$

Es claro que $\alpha(u) \in \alpha([u,1]) \cap \operatorname{Im}\eta$. Por otro lado, si tuviéramos que existe $w \in [u,1]$ tal que $\alpha(w) = \eta(1)$, tendríamos que $\alpha(u) \subset \alpha(w) = \eta(1) = \gamma(v)$. Lo que nos lleva a que $\alpha(u) = \gamma(v)$, ya que $\alpha(u), \gamma(v) \in \mu^{-1}(s)$, lo cual es un absurdo, ya que $\alpha(u) \neq \gamma(v)$. De modo que, $\alpha([u,1]) \cap \operatorname{Im}\eta = \{\alpha(u)\}$. De manera similar, se prueba que

$$\gamma([v,1]) \cap \operatorname{Im}\eta = \{\gamma(v)\}.$$

Teniendo en cuenta que $\alpha([u,1]) \cap \gamma([v,1]) = \emptyset$, deducimos que $\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])$ es un arco con extremos A y B.

Por otra parte, como $F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{J} \subset F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta$ con extremos A y B. Notemos que

$$\mathcal{J} \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big) \subset \big(F_1(X) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \operatorname{Im}\delta\big) \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big).$$

Como $\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1]) \subset \mu^{-1}([s,1])$,

$$F_1(X) \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big) = \emptyset.$$

Es claro que

$$\operatorname{Im}\beta \cap \alpha([u,1]) = \{A\}.$$

Veamos que

$$\operatorname{Im}\beta \cap \operatorname{Im}\eta = \emptyset.$$

Si tuviéramos que existe $w \in [0,1]$ tal que $\beta(w) = \eta(0)$, como $\eta(0) = \alpha(u)$ e $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \{A\}$, llegaríamos a que $w = u = 1$. De modo que $s < \mu(A) = \mu(\eta(0)) = s$, lo cual es un absurdo. Si tuviéramos que existe $w \in [0,1]$ tal que $\beta(w) = \eta(1)$, tendríamos que $\beta(w) \in \mathcal{F}$ (ya que $\eta(1) = \gamma(v)$) y, por lo tanto, $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([s,1]) \neq \emptyset$ (ya que $\eta(1) \in \mu^{-1}(s)$). Así llegamos a una contradicción que nos lleva a afirmar que nuestra intersección es vacía. Ahora verifiquemos que

$$\operatorname{Im}\beta \cap \gamma([v,1]) = \emptyset.$$

Si existiera un elemento $E \in \gamma([v,1]) \cap \operatorname{Im}\beta$, tendríamos que $E \in \mathcal{F}$. Entonces existiría $w \in [v,1]$ tal que $E = \gamma(w)$. De modo que, $\gamma(v) \subset \gamma(w) = E$, así que, $s = \mu(\gamma(v)) \leq \mu(E)$. Esto nos diría que $\mathcal{F} \cap \mu^{-1}([s,1]) \neq \emptyset$, lo cual no se puede dar, así que, nuestra intersección es vacía. Por lo tanto,

$$\operatorname{Im}\beta \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big) = \{A\}.$$

De manera similar, se obtiene que

$$\operatorname{Im}\delta \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big) = \{B\}.$$

De modo que,

$$\mathcal{J} \cap \big(\alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])\big) = \{A,B\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{J} \cup \alpha([u,1]) \cup \operatorname{Im}\eta \cup \gamma([v,1])$$

es una curva cerrada simple en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a A y B.

Caso 2. $A \in C_\varepsilon(X) \setminus F_1(X)$ y $B \in F_1(X)$.

Por el Lema 7.2.1, existen dos puntos p y q en A y dos arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$, de $\{p\}$ a A y de $\{q\}$ a A, tales que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \{A\}$. Como $F_1(X)$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{I}$ con extremos $\{p\}$ y $\{q\}$. En el caso en que $B \in \{\{p\},\{q\}\}$, como $\big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) \cap F_1(X) = \{\{p\},\{q\}\}$,

$$\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta \cup \mathcal{I}$$

es una curva cerrada simple en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a A y a B.

Construyamos una curva cerrada simple en el caso en que $B \notin \{\{p\},\{q\}\}$. Podemos suponer que $t_0 < \mu(A)$. Observemos que $B \subsetneq X$ y $0 < t_0 < 1$. Entonces (por el Lema 2.2.4) existe un elemento $C \in \mu^{-1}(t_0)$ tal que $B \subsetneq C$. Por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\gamma : [0,1] \to C(X)$ de B a C. En el caso en que $\operatorname{Im}\gamma \cap \big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) \neq \emptyset$, consideramos el número

$$u_0 = \min\{u \in [0,1] : \gamma(u) \in \operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\}.$$

Podemos suponer que $\gamma(u_0) = \alpha(s)$. De modo que, $\gamma([0, u_0]) \cup \alpha([s, 1]) \cup \operatorname{Im}\beta$ es un arco con extremos B y $\{q\}$ y sólo intersecta a $F_1(X)$ en estos elementos. Como $F_1(X)$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{I} \subset F_1(X)$ con extremos B y $\{q\}$. Así, hemos obtenido la curva cerrada simple

$$\gamma([0, u_0]) \cup \alpha([s, 1]) \cup \operatorname{Im}\beta \cup \mathcal{I}$$

en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a los elementos A y B.

Veamos el caso en que $\operatorname{Im}\gamma \cap \big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) = \emptyset$. Como $\mu(\alpha(0)) = \mu(\{p\}) = 0 < t_0 < \mu(A) = \mu(\alpha(1))$, por el Lema 2.2.9, existe un elemento $v \in [0, 1]$ tal que $\alpha(v) \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es arcoconexo (por el Teorema 2.3.15), existe una función continua e inyectiva $\eta : [0, 1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\eta(0) = C$ y $\eta(1) = \alpha(v)$. Podemos suponer que

$$1 = \text{mín}\{u \in [0, 1] : \eta(u) \in \operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\}.$$

Como $F_1(X)$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{I} \subset F_1(X)$ con extremos B y $\{q\}$. Observemos que,

$$\mathcal{I} \cap \big(\operatorname{Im}\gamma \cup \alpha([v, 1]) \cap \beta([0, 1])\big) = \{B, \{q\}\}.$$

Por tanto, $\mathcal{I} \cup \operatorname{Im}\gamma \cup \operatorname{Im}\alpha([v, 1]) \cup \operatorname{Im}\beta$ es una curva cerrada simple en $C_\varepsilon(X)$ que contiene a A y B.

Caso 3. $A, B \in F_1(X)$.

Como $F_1(X)$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{I} \subset F_1(X)$ con extremos A y B.

Teniendo en cuenta que $A \subsetneq X$, $B \subsetneq X$ y que $0 < t_0 < 1$, aplicamos el Lema 2.2.4 para obtener elementos $M, N \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $A \subset M$ y $B \subset N$. Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \to C(X)$ arcos ordenados de A a M y de B a N, respectivamente. En el caso en que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta \neq \emptyset$, $\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta$ es arcoconexo. De modo que, existe un arco $\mathcal{J} \subset \operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta$ con extremos A y B. Notemos que

$$\big(\operatorname{Im}\alpha \cup \operatorname{Im}\beta\big) \cap F_1(X) = \{A, B\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{I} = \{A, B\},$$

así que $\mathcal{J} \cup \mathcal{I}$ es una curva cerrada simple que contiene a A y B.

En el caso en que $\operatorname{Im}\alpha \cap \operatorname{Im}\beta = \emptyset$, $\operatorname{Im}\alpha \cup \mathcal{I} \cup \operatorname{Im}\beta$ es un arco que contiene a A y B. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es arcoconexo, existe un arco $\mathcal{J} \subset \mu^{-1}(t_0)$ con extremos M y N. Observemos que

$$\big(\operatorname{Im}\alpha \cup \mathcal{I} \cup \operatorname{Im}\beta)\big) \cap \mathcal{J} = \{M, N\}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{Im}\alpha \cup \mathcal{I} \cup \operatorname{Im}\beta \cup \mathcal{J}$$

es una curva cerrada simple que contiene a A y B. Así, concluimos nuestro tercer caso y la prueba de nuestro teorema. ■

7.3. $C_\varepsilon(X)$ es cerrado 0 dimensional aposindético

En esta sección probaremos que $C_\varepsilon(X)$ es cerrado cero dimensional aposindético, para esto primero probaremos el siguiente lema.

Lema 7.3.1. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Sean μ una función de Whitney para $C(X)$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{Z}$ un cerrado cero dimensional de $C_\varepsilon(X)$ y $\mathcal{A}$ un compacto de $C_\varepsilon(X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Entonces existe un número $\lambda > 0$ tal que, para cada elemento $B \in \mathcal{A}$ y cada $r \in [0, \mu(B)]$, existe un elemento $C \in C(B) \cap \mu^{-1}(r)$ tal que $B_H(\lambda, C) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.*

Demostración. Para cada $D \in C_\varepsilon(X)$, consideremos la distancia

$$H(D, \mathcal{Z}) = \text{mín}\{H(D, Z) : Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Para cada $B \in \mathcal{A}$ y cada $r \in [0, \mu(B)]$, definimos el número:

$$\delta(B, r) = \text{máx}\{H(D, \mathcal{Z}) : D \in C(B) \cap \mu^{-1}(r)\}.$$

Verifiquemos que $\delta(B, r) > 0$. Supongamos que $B \notin F_1(X)$. Sea $r < \mu(B)$. Por el Lema 2.3.3,

$$C(B) \cap \mu^{-1}(r) = \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}(r) = \big(\tfrac{\mu|_{C(B)}}{\mu(B)}\big)^{-1}(\tfrac{r}{\mu(B)})$$

es un continuo no degenerado. Además $C(B) \cap \mu^{-1}(r) \subset C(B) \subset C_\varepsilon(X)$. Así que, por el Teorema 7.1.3, $\dim\big(C(B) \cap \mu^{-1}(r)\big) > 0$. Por lo tanto, existe un elemento $D \in \big(C(B) \cap \mu^{-1}(r)\big) \setminus \mathcal{Z}$. Lo que nos lleva a que $\delta(B, r) > 0$. En el caso en que $r = \mu(B)$, como $B \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, $B \notin \mathcal{Z}$. Por otra parte, sabemos que $C(B) \cap \mu^{-1}(r) = \{B\}$, por lo tanto, $\delta(B, r) = H(B, \mathcal{Z}) > 0$. En el caso en que $B \in F_1(X)$, $C(B) \cap \mu^{-1}(0) = \{B\}$. Por tanto $\delta(B, 0) = H(B, \mathcal{Z}) > 0$. Así, hemos obtenido que $\delta(B, r) > 0$ para todo $B \in \mathcal{A}$ y para todo $r \in [0, \mu(B)]$.

Definimos el número:

$$\lambda = \text{ínf}\{\delta(B, r) : B \in \mathcal{A} \text{ y } r \in [0, \mu(B)]\}.$$

Veamos que $\lambda > 0$. Supongamos, por el contrario que, $\lambda = 0$. Esto nos dice que existen sucesiones $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ de $\mathcal{A}$ y $[0, 1]$, respectivamente, tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in [0, \mu(B_n)]$ y $\text{lím}\, \delta(B_n, r_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos

$$\mathcal{M}_n = C(B_n) \cap \mu^{-1}(r_n).$$

En el caso en que $r_n < \mu(B_n)$, por el Lema 2.3.3,

$$\mathcal{M}_n = \big(\tfrac{\mu|_{C(B_n)}}{\mu(B_n)}\big)^{-1}(\tfrac{r_n}{\mu(B_n)}) = (\mu|_{C(B_n)})^{-1}(r_n)$$

es un continuo no degenerado. En el caso en que $r_n = \mu(B_n)$,

$$\mathcal{M}_n = \{B_n\}.$$

De modo que, en ambos casos $\mathcal{M}_n$ es un continuo. Por la compacidad de los conjuntos $\mathcal{A}$, $[0, 1]$ y $C(C(X))$, podemos suponer que $\text{lím}\, B_n = B$, $\text{lím}\, r_n = r$ y $\text{lím}\, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$, para algunos $B \in \mathcal{A}$, $r \in [0, 1]$ y $\mathcal{M} \in C(C(X))$. Verifiquemos que

$$\mathcal{M} \subset C(B) \cap \mu^{-1}(r).$$

Por la continuidad de la función μ y teniendo en cuenta que $0 \leq r_n \leq \mu(B_n)$, obtenemos que $0 \leq r \leq \mu(B)$. Esto nos lleva a que $C(B) \cap \mu^{-1}(r) \neq \emptyset$. Dado un elemento $D \in \mathcal{M}$, como $\text{lím}\, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$ (por la Proposición 1.1.9), existe una sucesión $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\text{lím}\, D_n = D$ y $D_n \in \mathcal{M}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De manera que, $D_n \subset B_n$ y $\mu(D_n) = r_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.1.3 (a) aplicada a las sucesiones $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $D \subset B$ y, por la continuidad de la función μ, $\mu(D) = r$. Esto nos lleva a la contención deseada.

El Lema 8.1 de [12], nos asegura que

$$B_n = \bigcup\{E : E \in \mathcal{M}_n\}, \text{ si } r_n \in (0, \mu(B_n)),$$

$$\bigcup\{E : E \in \mathcal{M}_n\} = \bigcup\{\{b\} : b \in B_n\} = B_n, \text{ si } r_n = 0 \text{ y}$$

$$\bigcup\{E : E \in \mathcal{M}_n\} = \bigcup\{B_n\} = B_n, \text{ si } r_n = \mu(B_n).$$

Así que, $B_n = \bigcup \mathcal{M}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La Proposición 1.2.5, nos dice que la función unión es continua, de modo que,

$$B = \lim B_n = \lim \bigcup \mathcal{M}_n = \bigcup \lim \mathcal{M}_n = \bigcup \mathcal{M}.$$

Veamos que existe un elemento $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{Z}$. Para el caso en que $r < \mu(B)$, si suponemos que existe $F \in C(B) \cap \mu^{-1}(r)$ tal que $\mathcal{M} = \{F\}$, tendríamos que $B = \bigcup \mathcal{M} = F$. Lo cual nos diría que $\mu(B) = \mu(F) = r < \mu(B)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{M}$ es un continuo no degenerado. Así que, $\dim(\mathcal{M}) > 0$ (por el Teorema 7.1.3), lo cual nos asegura la existencia de un elemento $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{Z}$. En el caso en que $r = \mu(B)$, como $\mathcal{M} \subset C(B) \cap \mu^{-1}(r) = \{B\}$ y $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{M} = \{B\}$. Como $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ y $B \in \mathcal{A}$, $B \notin \mathcal{Z}$. Así, hemos visto, para cualquiera de los casos, que existe $E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{Z}$.

Tomemos $\eta > 0$ tal que $B_H(2\eta, E) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Como $E \in \mathcal{M} = \lim \mathcal{M}_n$, la Proposición 1.1.9, nos asegura que existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim E_n = E$ y $E_n \in \mathcal{M}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(E, E_n) < \eta$ para cada $n \geq N$. Consideremos $n \geq N$ y $F \in B_H(\eta, E_n)$. Utilizando la desigualdad triangular, tenemos que

$$H(F, E) \leq H(F, E_n) + H(E_n, E) < \eta + \eta = 2\eta,$$

entonces $B_H(\eta, E_n) \subset B_H(2\eta, E)$. Así que, $B_H(\eta, E_n) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Por tanto, $\eta \leq H(E_n, \mathcal{Z}) \leq \delta(B_n, r_n)$. Eso contradice el hecho de que $\lim \delta(B_n, r_n) = 0$, con lo que terminamos la prueba de que $\lambda > 0$.

Verifiquemos que λ satisface la propiedad deseada. Sean $B \in \mathcal{A}$ y $r \in [0, \mu(B)]$. La compacidad del subconjunto $C(B) \cap \mu^{-1}(r)$ nos asegura que existe un elemento $C \in C(B) \cap \mu^{-1}(r)$ tal que $H(C, \mathcal{Z}) = \delta(B, r) \geq \lambda$. Esto implica que

$$B_H(\lambda, C) \cap \mathcal{Z} = \emptyset.$$

Así, terminamos la prueba de nuestro lema. ■

Teorema 7.3.2. *(M. E. Aguilera y A. Illanes) Si $\varepsilon > 0$, entonces $C_\varepsilon(X)$ es cerrado cero dimensional aposindético.*

Demostración. Sean $\mathcal{Z}$ un subconjunto cerrado cero dimensional de $C_\varepsilon(X)$, $A \in C_\varepsilon(X) \setminus \mathcal{Z}$ y $\mathcal{M}$ una vecindad cerrada de A en $C_\varepsilon(X)$ tal que $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Lema 7.3.1, existe un número $\lambda > 0$ que satisface la siguiente propiedad: para cada $B \in \mathcal{M}$ y cada $r \in [0, \mu(B)]$, existe un elemento $C \in C(B) \cap \mu^{-1}(r)$ tal que $B_H(\lambda, C) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Elijamos λ de tal manera que

$$\lambda < \text{mín}\{H(M, Z) : M \in \mathcal{M} \text{ y } Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Veamos que, para $N \in N(\frac{\lambda}{2}, \mathcal{M})$, se cumple que $H(N, \mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$. Supongamos, por el contrario, que $H(N, \mathcal{Z}) < \frac{\lambda}{2}$. Como $N \in N(\frac{\lambda}{2}, \mathcal{M})$, existe un elemento $M \in \mathcal{M}$ tal que $H(M, N) < \frac{\lambda}{2}$. Entonces

$$H(M, \mathcal{Z}) \leq H(M, N) + H(N, \mathcal{Z}) < \tfrac{\lambda}{2} + \tfrac{\lambda}{2} = \lambda,$$

lo cual es una contradicción por la manera en que elegimos al número λ. Así que, se satisface $H(N, \mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$ para cada $N \in N(\frac{\lambda}{2}, \mathcal{M})$.

Por el Corolario 7.0.11, existe un número $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}([0,t]) \subset C_\varepsilon(X)$. La Proposición 2.2.2, nos asegura la existencia de un número $\delta \in (0,1)$ tal que, si $D, E \in C(X)$, $D \subset E$ y $\mu(E) - \mu(D) < \delta$, entonces $H(D, E) < \frac{\lambda}{2}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{m} < \text{mín}\{\delta, t\}$. Observemos que $\mu^{-1}([0, \frac{1}{m}]) \subset \mu^{-1}([0,t]) \subset C_\varepsilon(X)$.

Por el Lema 3.2.52, podemos suponer que $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ y X_n es un subcontinuo de I^∞ que es localmente conexo para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Como $C(X) \subset C(X_1)$, $\mu^{-1}\big((i + \frac{1}{4})\frac{1}{m}\big)$ y $\mu^{-1}\big((i + \frac{3}{4})\frac{1}{m}\big)$ son subconjuntos cerrados ajenos de $C(X_1)$ y $\mathcal{Z} \subset C(X_1)$. Así que, el Lema 3.2.51 nos asegura la existencia de un subconjunto cerrado $\mathcal{B}_i$ de $C(X_1)$ que separa a $\mu^{-1}\big((i + \frac{1}{4})\frac{1}{m}\big)$ y $\mu^{-1}\big((i + \frac{3}{4})\frac{1}{m}\big)$ en $C(X_1)$ y que satisface que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

Por el Lema 3.2.53, existe un subcontinuo $\mathcal{K}_0$ de $C(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

(b) $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{B}_0 \cap \mu^{-1}\big([0, (\frac{3}{4})\frac{1}{m}]\big)$.

(c) Para cada subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(X)$ que satisfaga $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}\big((\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big) \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap \mu^{-1}\big((\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big) \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$.

Para cada elemento $B \in \mathcal{M}$, sea

$$n_B = \text{máx}\{i \in \{0, 1, \ldots, m-1\} : \tfrac{i}{m} \leq \mu(B)\}.$$

Definimos

$$\mathcal{K}(B, 0) = \mathcal{K}_0.$$

Consideremos el caso $n_B \geq 2$ (en el caso $n_B = 1$ y $n_B = 0$ no es necesario este paso). Consideremos $i \in \{1, 2, \ldots, n_B - 1\}$. Por el Lema 3.2.52, podemos suponer que $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, donde $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, B_n es un subcontinuo de X_n que es localmente conexo para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $0 < \frac{2}{m} \leq \frac{n_B}{m} \leq \mu(B)$, tenemos en este caso que $B \notin F_1(X)$. De modo que, $\frac{\mu|_{C(B)}}{\mu(B)} : C(B) \to [0, 1]$ es una función de Whitney (por el Lema 2.0.10). Notemos que

$$\big(i + \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} \leq \big((n_B - 1) + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} = \big(n_B - \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \tfrac{n_B}{m} \leq \mu(B),$$

así que, $\big(i + \frac{1}{4}\big)\frac{1}{m\mu(B)}$, $\big(i + \frac{3}{4}\big)\frac{1}{m\mu(B)} \in (0, 1)$. Por los Lemas 2.3.3 y 3.0.24,

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(B)}}{\mu(B)}\big)^{-1}\big(\big[0, \big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m\mu(B)}\big]\big) = \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}\big(\big[0, \big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\big]\big),$$

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(B)}}{\mu(B)}\big)^{-1}\big(\big(i + \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m\mu(B)}\big) = \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}\big(\big(i + \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m}\big) \text{ y}$$

$$\big(\tfrac{\mu|_{C(B)}}{\mu(B)}\big)^{-1}\big(\big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m\mu(B)}\big) = \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}\big(\big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\big).$$

Verifiquemos que $\mathcal{B}_i \cap C(B_1)$ es un cerrado que separa a $(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big)$ y $(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big)$ en $C(B_1)$. Como $\mathcal{B}_i$ es un cerrado de $C(X_1)$ y $C(B_1) \subset C(X_1)$, $\mathcal{B}_i \cap C(B_1)$ es un cerrado de $C(B_1)$. Por otra parte, tenemos que $\mathcal{B}_i$ separa a $\mu^{-1}\big((i+\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big)$ y $\mu^{-1}\big((i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big)$ en $C(X_1)$, así que, existen subconjuntos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ de $C(X_1)$ tales que $C(X_1)\setminus\mathcal{B}_i = \mathcal{E} \mid \mathcal{F}$ y $\mu^{-1}\big((i+\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big) \subset \mathcal{E}$ y $\mu^{-1}\big((i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big) \subset \mathcal{F}$. Teniendo en cuenta que $C(B) \subset C(B_1)$, obtenemos que

$$(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\tfrac{1}{4})\tfrac{1}{m}\big) = \mu^{-1}\big((i+\tfrac{1}{4})\tfrac{1}{m}\big) \cap C(B) \subset \mathcal{E} \cap C(B_1) \text{ y}$$

$$(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{m}\big) = \mu^{-1}\big((i+\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{m}\big) \cap C(B) \subset \mathcal{F} \cap C(B_1).$$

Por otra parte, como $C(B_1) \subset C(X_1)$ y $C(X_1) \setminus \mathcal{B}_i = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$, tenemos que

$$C(B_1) \setminus \big(\mathcal{B}_i \cap C(B_1)\big) = \big(\mathcal{E} \cap C(B_1)\big) \cup \big(\mathcal{F} \cap C(B_1)\big).$$

Finalmente, notemos que

$$\big(\mathcal{E} \cap C(B_1)\big) \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{F} \cap C(B_1)\big) \subset \mathcal{E} \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}(\mathcal{F}) = \emptyset,$$

así que,

$$\big(\mathcal{E} \cap C(B_1)\big) \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{F} \cap C(B_1)\big) = \emptyset.$$

De manera similar, se obtiene que

$$\big(\mathcal{F} \cap C(B_1)\big) \cap \mathrm{cl}_{C(X_1)}\big(\mathcal{E} \cap C(B_1)\big) = \emptyset.$$

Con esto, hemos visto que $\mathcal{B}_i \cap C(B_1)$ es un cerrado que separa a $(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big)$ y $(\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big)$ en $C(B_1)$.

Así que, por el Lema 3.2.53, existe un subcontinuo $\mathcal{K}(B,i)$ de $C(B)$ que satisface las siguientes propiedades:

(d) $\mathcal{K}(B,i) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$.

(e) $\mathcal{K}(B,i) \subset \mathcal{B}_i \cap C(B_1) \cap (\mu|_{C(B)})^{-1}\big(\big[0,(i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big]\big)$.

(f) Para cada subcontinuo $\mathcal{L}$ de $C(B)$ que satisfaga $\mathcal{L} \cap (\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{1}{4})\frac{1}{m}\big) \neq \emptyset$ y $\mathcal{L} \cap (\mu|_{C(B)})^{-1}\big((i+\frac{3}{4})\frac{1}{m}\big) \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{L} \cap \mathcal{K}(B,i) \neq \emptyset$.

Notemos que

$$\mu^{-1}\big(\big[0,\tfrac{3}{4m}\big]\big) \subset \mu^{-1}\big(\big[0,\tfrac{1}{m}\big]\big) \subset \mu^{-1}([0,t]) \subset C_\varepsilon(X)$$

y $C(B) \subset C_\varepsilon(X)$, así que $\mathcal{K}(B,i) \subset C_\varepsilon(X)$ para cada $i \in \{0,1,\ldots,n_B-1\}$. A continuación daremos un arco de $C_\varepsilon(X)$ que contiene a B, intersecta a $\mathcal{K}(B,n_B-1)$ si $n_B \geq 1$ o a $\mathcal{K}_0$ en el caso en que $n_B = 0$ y que está contenido en $N_H(\frac{\lambda}{2},\mathcal{M})$.

Caso 1. $n_B \geq 1$.

Notemos que

$$0 < \tfrac{1}{4m} \leq \big((n_B-1)+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \tfrac{n_B}{m} \leq \mu(B).$$

Fijando un elemento $b \in B$ y aplicando el Lema 2.2.4 (ya que $\{b\} \subsetneq B$), obtenemos un elemento $E \in \mu^{-1}\Big(\big((n_B-1)+\frac{1}{4}\big)\frac{1}{m}\Big)$ tal que $b \in E \subsetneq B$. Por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_B : [0,1] \to C(X)$ de E a B. Observemos que

$$\tfrac{n_B-1}{m} < \big((n_B-1)+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} = \mu(E) \leq \mu(\alpha_B(u))$$

para toda $u \in [0,1]$ y $\mu(B) < \frac{n_B+1}{m}$, lo cual nos lleva a que

$$\mu(B) - \mu(\alpha_B(u)) \leq \mu(B) - \mu(E) < \tfrac{n_B+1}{m} - \tfrac{n_B-1}{m} = \tfrac{2}{m}.$$

Por la elección de los números m y δ, $B \in \operatorname{Im}\alpha_B \subset B_H(\frac{\lambda}{2},B) \subset N_H(\frac{\lambda}{2},\mathcal{M})$. Así que, para cada elemento $G \in \operatorname{Im}\alpha_B$, se cumple que $H(G,\mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$. Por las propiedades del arco ordenado α_B y de la función diám, tenemos $B \in \operatorname{Im}\alpha_B \subset C(B) \subset C_\varepsilon(X)$. Notemos que

$$\mu(\alpha_B(0)) = \mu(E) = \big((n_B-1)+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} \text{ y}$$

$$\mu(\alpha_B(1)) = \mu(B) < \big((n_B+1)\big)\tfrac{1}{m},$$

lo cual implica que

$$\operatorname{Im}\alpha_B \cap \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}\Big(\big((n_B-1)+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big) \neq \emptyset \text{ y}$$

$$\operatorname{Im}\alpha_B \cap \big(\mu|_{C(B)}\big)^{-1}\Big(\big((n_B-1)+\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big) \neq \emptyset.$$

Por la Propiedad (f), $\operatorname{Im}\alpha_B \cap \mathcal{K}(B, n_B - 1) \neq \emptyset$.

Caso 2. $n_B = 0$.

Por la definición del número n_B, $\mu(B) < \frac{n_B+1}{m} = \frac{1}{m}$ y, por la elección del número m, $\mu(B) < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \text{mín}\{\delta, t\}$. Fijemos un elemento $p_0 \in B$.

En el subcaso en que $\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{m} \leq \mu(B)$, $\{p_0\} \subsetneq B$. Así que, por el Corolario 2.2.8, existe un arco ordenado $\alpha_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0, \mu(B)])$ de $\{p_0\}$ a B. Notemos que, para cada $r \in [0,1]$,

$$\mu(B) - \mu(\alpha_B(r)) \leq \mu(B) < \delta \text{ e}$$

$$\operatorname{Im}\alpha_B \subset \mu^{-1}([0, \mu(B)]) \subset \mu^{-1}([0, t]).$$

En el subcaso en que $\mu(B) < \left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{m}$, como $B \subsetneq X$ y $\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{m} < 1$, aplicamos el Lema 2.2.4 para obtener un elemento $F \in \mu^{-1}\left(\frac{3}{4m}\right)$ tal que $B \subset F$. Si $\mu(B) = 0$, entonces $B = \{p_0\} \subsetneq F$. De modo que podemos aplicar el Corolario 2.2.8 para obtener un arco ordenado $\alpha_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0, \frac{3}{4m}])$ de $\{p_0\}$ a F. Notemos que

$$\mu(\alpha_B(r)) - \mu(B) = \mu(\alpha_B(r)) \leq \mu(\alpha_B(1)) = \mu(F) = \frac{3}{4m} < \frac{1}{m} < \delta$$

para cada $r \in [0,1]$ y que

$$\operatorname{Im}\alpha_B \subset \mu^{-1}([0, \tfrac{3}{4m}]) \subset \mu^{-1}([0, \tfrac{1}{m}]) \subset \mu^{-1}([0, t]).$$

Si $0 < \mu(B) < \frac{3}{4m}$, entonces $\{p_0\} \subsetneq B \subsetneq F$. Así que, aplicando dos veces el Corolario 2.2.8, es posible construir un arco ordenado $\alpha_B : [0,1] \to \mu^{-1}([0, \frac{3}{4m}])$ de $\{p_0\}$ a F tal que $\alpha_B(\frac{1}{2}) = B$. Sea $r \leq \frac{1}{2}$. Así que

$$\mu(B) - \mu(\alpha_B(r)) \leq \mu(B) < \delta.$$

Tomemos $r > \frac{1}{2}$. Entonces

$$\mu(\alpha_B(r)) - \mu(B) < \mu(\alpha_B(r)) \leq \mu(\alpha_B(1)) = \mu(F) = \frac{3}{4m} < \frac{1}{m} < \delta.$$

Notemos que

$$\operatorname{Im}\alpha_B \subset \mu^{-1}([0, \tfrac{3}{4m}]) \subset \mu^{-1}([0, \tfrac{1}{m}]) \subset \mu^{-1}([0, t]).$$

Sea α_B como en cualquiera de los subcasos. Tenemos $|\mu(B)-\mu(\alpha_B(r))| < \delta$ para cada $r \in [0,1]$. De modo que, por la elección del número δ, se satisface que $\operatorname{Im}\alpha_B \subset B_H(\frac{\lambda}{2}, B) \subset N_H(\frac{\lambda}{2}, \mathcal{M})$. Lo cual nos dice que, para cada elemento $G \in \operatorname{Im}\alpha_B$, se cumple que $H(G,\mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$. Observemos que $B \in \operatorname{Im}\alpha_B \subset \mu^{-1}([0,t]) \subset C_\varepsilon(X)$. Como $\mu(\alpha_B(0)) = \mu(\{p_0\}) = 0$ y $\mu(\alpha_B(1)) \geq \frac{3}{4m}$, tenemos que $\operatorname{Im}\alpha_B \cap \mu^{-1}\big(\frac{1}{4m}\big) \neq \emptyset$ e $\operatorname{Im}\alpha_B \cap \mu^{-1}\big(\frac{3}{4m}\big) \neq \emptyset$. De modo que, por la propiedad (c), $\operatorname{Im}\alpha_B \cap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$.

Consideremos el caso $n_B \geq 2$ (en el caso $n_B = 1$ y $n_B = 0$ no es necesario este paso). Tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, n_B - 1\}$. Por la definición de n_B, $\frac{i}{m} \leq \frac{n_B}{m} \leq \mu(B)$ y, por la elección del número λ, existe un elemento $D(B,i) \in C(B) \cap \mu^{-1}(\frac{i}{m})$ tal que $B_H(\lambda, D(B,i)) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Construyamos un arco $\mathcal{L}(B,i)$ en $C_\varepsilon(X)$ que contenga a $D(B,i)$, que intersecte a $\mathcal{K}(B,i-1)$ y a $\mathcal{K}(B,i)$ y que $H(G,\mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$ para cada $G \in \mathcal{L}(B,i)$. Sea $x \in D(B,i)$. Notemos que

$$0 < \big(i - \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{m} < \big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \tfrac{n_B}{m} \leq \mu(B)$$

y $x \in D(B,i) \subset B$. Así que, aplicando dos veces el Lema 2.2.4, obtenemos un par de elementos $E_i \in \mu^{-1}\Big(\big(i - \frac{3}{4}\big)\frac{1}{m}\Big)$ y $F_i \in \mu^{-1}\Big(\big(i + \frac{3}{4}\big)\frac{1}{m}\Big)$ tales que $E_i \subset D(B,i) \subset F_i \subset B$. Por el Teorema 2.2.7, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0,1] \to C(B)$ de E_i a F_i tal que $D(B,i) \in \operatorname{Im}\alpha_i$. Definimos

$$\mathcal{L}(B,i) = \operatorname{Im}\alpha_i$$

y observamos que $\mathcal{L}(B,i) \subset C(B) \subset C_\varepsilon(X)$. Más aún,

$$\mathcal{L}(B,i) \subset C(B) \cap \mu^{-1}\big(\big[\big(i - \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}, \big(i + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\big]\big).$$

Notemos que

$$\big(i-\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} = \big((i-1)+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \big(i-\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} = \big((i-1)+\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \big(i+\tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m} < \big(i+\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m},$$

lo cual nos dice que $\mathcal{L}(B,i)$ intersecta a

$$\big(\mu^{-1}|_{C(B)}\big)^{-1}\Big(\big((i-1) + \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big),$$

$$\big(\mu^{-1}|_{C(B)}\big)^{-1}\Big(\big((i-1) + \tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big),$$

$$\big(\mu^{-1}|_{C(B)}\big)^{-1}\Big(\big(i + \tfrac{1}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big) \text{ y}$$

$$\left(\mu^{-1}|_{C(B)}\right)^{-1}\Big(\big(i+\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}\Big).$$

Por la propiedad (f), $\mathcal{L}(B,i)$ intersecta a los subcontinuos $\mathcal{K}(B,i-1)$ y $\mathcal{K}(B,i)$. Como

$$|\mu(D(B,i))-\mu(G)|<\mu(F_i)-\mu(E_i)=\big(i+\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}-\big(i-\tfrac{3}{4}\big)\tfrac{1}{m}=\tfrac{3}{2m}<\tfrac{2}{m},$$

por la elección de m y δ, $G\in B_H(\frac{\lambda}{2},D(B,i))$ para cada $G\in\mathcal{L}(B,i)$. Así que, $\mathcal{L}(B,i)\subset B_H(\frac{\lambda}{2},D(B,i))$. Verifiquemos que, dado un elemento $G\in\mathcal{L}(B,i)$, se satisface que $H(G,\mathcal{Z})\geq\frac{\lambda}{2}$. Supongamos, por el contrario, que $H(G,\mathcal{Z})<\frac{\lambda}{2}$. Entonces se tiene que

$$H(D(B,i),\mathcal{Z})\leq H(D,G)+H(G,\mathcal{Z})<\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{\lambda}{2}=\lambda,$$

lo cual es una contradicción, ya que $B_H(\lambda,D(B,i))\cap\mathcal{Z}=\emptyset$. De modo que, se cumple $H(G,\mathcal{Z})\geq\frac{\lambda}{2}$ para cada $G\in\mathcal{L}(B,i)$.

Definimos, para el caso $n_B\geq 2$:

$$\mathcal{L}(B)=\operatorname{Im}\alpha_B\cup\mathcal{K}(B,0)\cup\mathcal{K}(B,1)\cup\cdots\cup\mathcal{K}(B,n_B-1)\cup\mathcal{L}(B,1)\cup\cdots\cup\mathcal{L}(B,n_B-1)$$

y, para el caso $n_B=0$ o $n_B=1$:

$$\mathcal{L}(B)=\operatorname{Im}\alpha_B\cup\mathcal{K}(B,0).$$

Como ya vimos $\operatorname{Im}\alpha_B\subset C_\varepsilon(X)$, $\mathcal{K}(B,i)\subset C_\varepsilon(X)$, para cada $i\in\{0,1\ldots,n_B-1\}$, y $\mathcal{L}(B,i)\subset C_\varepsilon(X)$ para cada $i\in\{1,\ldots,n_B-1\}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(B)\subset C_\varepsilon(X)$. Como $B\in\operatorname{Im}\alpha_B$, $B\in\mathcal{L}(B)$. Notemos que $\mathcal{K}_0\subset\mathcal{L}(B)$ (ya que $\mathcal{K}(B,0)=\mathcal{K}_0$). Si

$$G\in\mathcal{L}(B)\cap\big(\operatorname{Im}\alpha_B\cup\mathcal{L}(B,1)\cup\cdots\cup\mathcal{L}(B,n_B-1)\big)$$

entonces se satisface que $H(G,\mathcal{Z})\geq\frac{\lambda}{2}$ y si

$$G\in\mathcal{L}(B)\cap\big(\mathcal{K}(B,0)\cup\mathcal{K}(B,1)\cup\cdots\cup\mathcal{K}(B,n_B-1)\big)$$

se tiene que

$$K\in\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{n_B-1}\subset\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{m-1}.$$

Como $\mathcal{K}(B,0)\cap\mathcal{L}(B,1)\neq\emptyset$, $\mathcal{L}(B,1)\cap\mathcal{K}(B,1)\neq\emptyset,\ldots,\mathcal{K}(B,n_B-2)\cap\mathcal{L}(B,n_B-1)\neq\emptyset,\mathcal{L}(B,n_B-1)\cap\mathcal{K}(B,n_B-1)\neq\emptyset$ e $\operatorname{Im}\alpha_B\cap\mathcal{K}(B,0)\neq\emptyset$ o $\operatorname{Im}\alpha_B\cap\mathcal{K}(B,n_B-1)\neq\emptyset$, tenemos que $\mathcal{L}(B)$ es un continuo.

Definimos:

$$\mathcal{R} = \mathrm{cl}_{C(X)}\left(\bigcup\{\mathcal{L}(B) : B \in \mathcal{M}\}\right).$$

Observemos que, para cada $B \in \mathcal{M}$, el subcontinuo $\mathcal{L}(B)$ es un subconjunto de $C_\varepsilon(X)$ tal que contiene a $\mathcal{K}_0$. Entonces $\mathcal{R}$ es un subcontinuo de $C_\varepsilon(X)$ que contiene a $\mathcal{M}$. De modo que

$$A \in \mathrm{int}_{C_\varepsilon(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R}.$$

Veamos que $\mathcal{R} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Sea $R \in \mathcal{R}$. Entonces existen sucesiones $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $R_j \in \mathcal{L}(B_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim R_j = R$. Tenemos que $R_j \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{m-1}$ o $H(R_j, \mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. En el caso en que exista una subsucesión $\{R_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{m-1}$, por la Proposición 1.1.4 (d), tenemos que $R \in \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{m-1}$. Como $\left(\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{m-1}\right) \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, $R \notin \mathcal{Z}$. En el caso en que una cantidad finita de elementos de $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ esté contenida en $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{m-1}$, obtenemos que $H(R_j, \mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$ para casi todo $j \in \mathbb{N}$. Por la continuidad de la función H, $H(R, \mathcal{Z}) \geq \frac{\lambda}{2}$. Por lo tanto, $\mathcal{R} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Esto concluye la prueba de nuestro teorema. ■

Concluimos este capítulo con la siguiente pregunta.

Problema 7.3.3. Supongamos que X es hereditariamente localmente conexo. ¿Tendremos que $C_\varepsilon(X)$ es localmente conexo?

Bibliografía

[1] M. E. Aguilera y A. Illanes, *Connectedness properties of the hyperspaces $C_\varepsilon(X)$*, Houston J. Math., Vol. 38, no. 4 (2012), 1343-1354.

[2] Anaya Ortega José Guadalupe, *Agujeros en hiperespacios*, Tesis doctoral, UNAM, México D.F. (2007), Director de tesis: Dr. Alejandro Illanes Mejía.

[3] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1101-1110.

[4] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Monograf. Mat., 44, PWN Warszawa, 1967.

[5] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Property of Kelley for the cartesian products and hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 341-346.

[6] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[7] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), 61-112.

[8] A. García-Máynez y A. Illanes, *Survey on unicoherence and related properties*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México 29 (1989), 17-63.

[9] C. L. Hagopian y L. E. Rogers, *Arcwise connectivity and continuum chainability*, Houston J. Math. 7 (1981), 249-259.

[10] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[11] A. Illanes, *Multicoherence of Whitney levels*, Topology Appl. 68 (1996), 251-265.

[12] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, D.F., 2004.

[13] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperespaces: Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 216, New York, Marcel Dekker, Inc., 1999.

[14] J. Krazinkiewicz, *No 0-dimensional set disconnects the hyperspace of a continuum*, Bull. Pol. Acad. Sci. 19 (1971), 755-758.

[15] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I. Acad. Press, New York, NY, 1966.

[16] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II. Acad. Press, New York, NY, 1966.

[17] J. M. Martínez-Montejano, *Zero-dimensional closed set aposyndesis and hyperspaces*, Houston J. Math., Vol. 32, no. 4 (2006), 1101-1105.

[18] E. L. McDowell y B. E. Wilder, *The connectivity structure of the hyperespaces $C_\epsilon(X)$*, Topology Proc. 27 (2003), 223-232.

[19] E. L. McDowell y B. E. Wilder, *Small-point hyperspaces of the arc, circle and simple triod*, Aportaciones Matemáticas, Serie Investigación,Vol. 19, Sociedad Matemática Mexicana (2007), 91-96.

[20] E. L. McDowell, *A correction to "The connectivity structure of the hyperespaces $C_\epsilon(X)$"*, Topology Proc. 34 (2009), 47-51.

[21] V. Martínez-de-la-Vega, *Dimension of n-fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. Vol. 32, no. 3 (2006), 783-799.

[22] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111-1121.

[23] S. B. Nadler, Jr., *Hyperespaces of Sets. A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1978.

[24] S. B. Nadler, Jr., *Continnuum Theory, An Introducction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, New York, Marcel Dekker, Inc., 1992.

[25] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[26] H. Whitney, *Regular families of curves, I*, Proc. Nat. Acad. Sci. 18 (1932), 275-278.

[27] G. T. Whyburn, *Analytic Topology.* American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 28, American Mathematical Society, New York, 1942.

[28] M. Wojdysławski; *Rétractes absoluts et hyperespaces des continus.* Fund. Math. 32 (1939), 184-192.