Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Dominación Segura y Dominación Total Segura en Gráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

CHRISTIAN IVAN SÁNCHEZ GUZMÁN

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA AGUIRRE

2013

1. Datos del alumno
Sánchez
Guzmán
Christian Ivan
22 45 05 42
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
303064963

2. Datos del tutor
Dra.
Mucuy-kak del Carmen
Guevara
Aguirre

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Diego Antonio
González
Moreno

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Rita Esther
Zuazua
Vega

A mis padres

Agradecimientos

No hice algo para existir, por suerte aparecí y tuve la oportunidad de crecer en una gran familia, de cuyos integrantes aprendí y aprendo día a día. Pienso en cada uno de ustedes e invariablemente viene a mi mente más de un recuerdo, tal vez no siempre perfectos, pero la vida es así, imperfecta; tener momentos malos nos permite apreciar los buenos. Gracias familia, porque cada uno ha estado siempre dispuesto a apoyarme.

Mención especial a mis padres, mi respeto y admiración. Gracias por 26 años de esfuerzos y enseñanzas.

Fabi, sabes que no alcanzan las palabras para expresar mi agradecimiento por compartir la vida conmigo. Sin embargo, tengo toda ella para demostrarlo.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, por la educación profesional e integral que recibí, a pesar del momento económico, social y cultural que vive México, ¡Pueblo, despierta ya!

Doctora Mucuy-kak del Carmen Guevara Aguirre, su papel fundamental en este trabajo es apreciado y agradecido sobremanera. Me siento honrado por haber podido recibir su tutoría todo este tiempo.

Si llegaste hasta esta parte y te conozco, gracias porque he aprendido algo de ti, que me hace ser mejor persona. Si no te conozco, espero que aún sea tiempo para coincidir en esta vida. Si dejaste de leer, seguro esta tesis no es por ti ni para ti, pero no importa... nunca lo sabrás.

Introducción

La Dominación en Gráficas ha sido estudiada desde la década de los cincuenta, sus raíces datan de 1862, cuando C. F. De Jeanisch estudió el problema de determinar el mínimo número de reinas que son necesarias para cubrir (o dominar) un tablero de ajedrez de n por n.

Dentro de la dominación en Gráficas, podemos hablar de dominación romana, dominación romana débil, dominación de orden finito, dominación de orden infinito, dominación total y dominación segura, entre otras. Pueden tener aplicaciones muy variadas como: ubicación óptima de hospitales, colocación de cámaras de vigilancia en un museo, ubicación de estaciones de radio, dispersión de flotas navales, colocación de sistemas de riego, ubicación óptima de escuelas, construcción de salidas de emergencia, colocación de publicidad visual, colocación de transformadores de energía eléctrica y muchas más.

El Problema de la Dominación en Gráficas es un problema NP-completo, demostrado por D. Johnson y M. Garey [10] en 1979. Para comprender la compejidad de su solución y al mismo tiempo la sencillez de su planteamiento, consideremos el ejemplo siguiente:

El Imperio Romano cuenta con un determinado número de unidades militares, llamadas legiones, las cuales consisten de un cuerpo de infantería de entre 4000 y 5000 hombres. Con ellas debe proteger todas las regiones que conforman el territorio del Imperio Romano. Representamos las regiones del imperio como vértices y si dos regiones son vecinas, es decir, si existe entre ellas un camino directo, los vértices que las representan son adyacentes. Figura 1.

Diremos que una región está protegida si en ella hay una legión o si es vecina de una región que está ocupada por alguna legión. Dependiendo del número de regiones a proteger y el número de regiones vecinas, podemos preguntarnos por las distintas dispersiones de legiones para proteger (o dominar) el territorio. Figura 2.

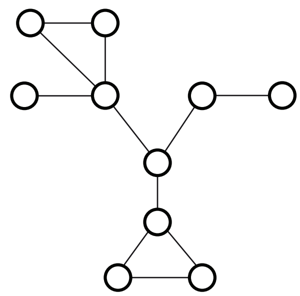

Figura 1: Regiones del imperio y sus vecinos.

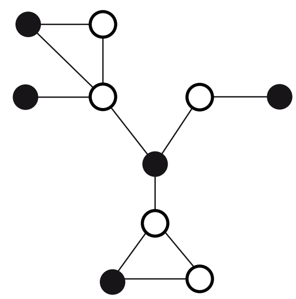

Figura 2: Ejemplo de dominación del territorio del imperio.

Y más aún, por el número mínimo de legiones necesarias para dominar el territorio. Figura 3.

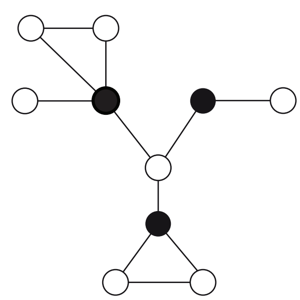

Figura 3: Ejemplo de dominación con un mínimo de legiones.

Así, es fácil ver que si el imperio estuviera formado por 1000 regiones y diversos caminos entre ellas, encontrar el número mínimo de legiones necesarias para dominar el territorio, se vuelve una tarea muy compleja.

En los últimos años han surgido resultados importantes por su aplicación en álgebra lineal, optimización, diseño de redes, análisis de la comunicación de redes, ciencias sociales, complejidad computacional, diseño de algoritmos, etc. Por ello, además de los matemáticos, es de gran interés para computólogos, investigadores de operaciones, economistas, ingenieros, científicos sociales y químicos.

Muchos han contribuido al desarrollo de este campo desde la formulación matemática del concepto de Dominación en Gráficas, hecha por Berge y Ore. Entre los estudiosos más prolíficos en este campo están: Ernie Cockayne, Michael Henning, Renu Laskar, Christine Mynhardt y Bohdan Zelinka.

La dominación segura y dominación total segura son muy recientes. Históricamente los avances en estos tipos de dominación se han dado como sigue:

La dominación segura fue presentada en 2003 por E.J. Cockayne, O. Favaron y C.M. Mynhardt, en el trabajo *Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs*[4]. Donde se definen los conceptos: dominación segura y número de dominación segura. Se demuestra que el número de apareamiento $\nu(G)$ es una cota superior para el número de dominación segura $\gamma_s(G)$ de una gráfica simple G, esto es, $\gamma_s(G) \leq \nu(G)$. Y se muestran gráficas en las cuales $\gamma_s(G) \leq 2\gamma_s(G)$.

En 2005, E.J. Cockayne, P.J.P. Grobler, W.R. Gründlingh, J. Munganga y J.H. van Vuuren, en *Protection of a graph*[6], introducen la dominación segura como un tipo de protección de gráficas, exhiben una caracterización de los conjuntos dominantes seguros y obtienen valores exactos y cotas para gráficas específicas, entre ellas, se demuestra que P_n y C_n, tienen el mismo número de dominación segura $\gamma_s(P_n) = \gamma_s(C_n) = \lceil 3n/7 \rceil$. Igualmente en *Excellent trees and secure domination*[9], C.M. Mynhardt, H.C. Swart and E. Ungerer, revisan la dominación segura en específicos árboles. En este mismo año, E.J. Cockayne, S. Benecke, C.M. Mynhardt, en *Total Protection of a graph*[7], presentan el concepto de dominación total segura y definen el número de dominación total segura $\gamma_{st}(G)$, probando que $\gamma_{st}(C_n) = \lceil 5n/7 \rceil$ y que para la gráfica $K_{p_1,p_2,\ldots,p_t}$ con $t \geq 3$, si $p_1 = p_2 = 1$, se tiene $\gamma_{st}(K_{p_1,p_2,\ldots,p_t}) = 2$. En otro caso, se tiene $\gamma_{st}(K_{p_1,p_2,\ldots,p_t}) = 3$.

El siguiente trabajo sobre dominación segura data de 2007, *Irredundance, secure domination and maximum degree in trees*[3], de E.J. Cockayne, donde muestra que el número de dominación segura de un árbol T con n vértices y máximo grado $\Delta \geq 3$, cumple que $\gamma_s(T) \geq (\Delta n + \Delta - 1)/(3\Delta - 1)$. Posteriormente, P.J.P. Grobler y C.M. Mynhardt, en *Secure domination critical graphs*[8], utilizan por primera vez la noción de un conjunto dominante total seguro como una aplicación eficiente para la protección de una gráfica, donde los guardias están colocados en los vértices de una gráfica, a lo más un guardia por vértice, tal que:

a) Cada (con guardia o sin guardia) vértice de la gráfica está en la vecindad de un vértice con guardia.

b) Un guardia está disponible en algún vértice v en la vecindad de cualquier vértice u no protegido, para moverse a u como respuesta a un ataque en u y

c) La configuración de guardias resultante después del movimiento satisface el criterio a).

Y se prueba que $\gamma_{st}(P_n) = \lceil 5(n-2)/7 \rceil + 2$.

Por último en 2009, P.J.P. Grobler y C.M. Mynhardt en su artículo *Secure domination critical graphs*[8], caracterizan las gráficas γ_s-críticas en aristas bipartitas y los árboles γ_s-críticos en aristas, esto es, gráficas bipartitas y árboles donde $\gamma_s(G-e) > \gamma_s(G)$.

En este trabajo vamos a caracterizar la dominación total, dominación segura y dominación total segura, para posteriormente explorar cotas superiores e inferiores de sus respectivos conjuntos mínimos. Las cuales estarán dadas por los números de independencia y cubierta clánica. Para ello, vamos a hacer uso de un tipo de gráficas específico, llamadas γ_s-críticas en aristas.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El presente trabajo está dirigido al lector que conoce los conceptos básicos de Teoría de Conjuntos, por lo que es considerado autocontenido. Comenzaremos con los conceptos básicos en Teoría de Gráficas, que brindaran al lector todo lo necesario para comprender la totalidad del contenido.

1.1. Conceptos básicos

Gráfica: Es una pareja de conjuntos (V, E) con V un conjunto no vacío y finito, al que llamaremos conjunto de vértices y E un conjunto de parejas de elementos de V, que llamaremos aristas (puede ser vacío). Denotamos una arista por $\{u, v\}$, uv o e.

Una gráfica es denotada por $G(V_G, E_G)$, o simplemente como $G(V, E)$ o G. Puede ser representada gráficamente como un conjunto de puntos o nodos interconectados o no con líneas. Los vértices son indicados por nodos y las aristas por líneas que conectan dos vértices. Figura 1.1.

Adyacencia: Dos vértices de una gráfica: $u, v \in V_G$, son adyacentes si existe una arista entre ellos: $uv \in E_G$.

Incidencia: Decimos que la arista $e = uv$, incide en u y en v.

Grado de un vértice: Es el número de aristas de una gráfica G, incidentes en el vértice v. Denotado por $g(v)$ o $deg_G\ v$.

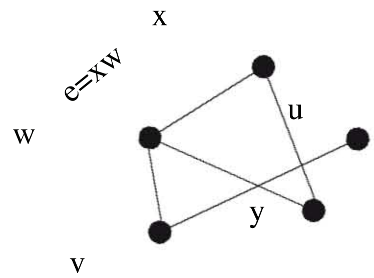

Figura 1.1: Una gráfica G.

Grado mínimo de G: Es el mínimo grado de los vértices de una gráfica G. Denotado por $\delta(G)$.

Orden de una gráfica: La cardinalidad del conjunto de vértices de una gráfica.

Subgráfica: La gráfica H es llamada subgráfica de G si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$.

Subgráfica inducida: La subgráfica inducida de G por los vértices de $X \subseteq V_G$ es denotada por $\langle X \rangle = (X, E_X)$ y es tal que si $u, v \in X$ y $uv \in E_G$, entonces $uv \in E_X$. Figura 1.2.

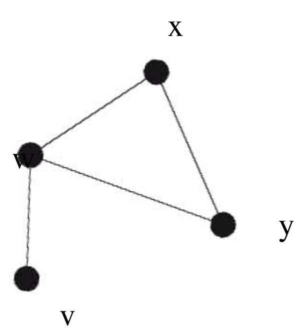

Figura 1.2: Subgráfica inducida de G.

Gráfica completa: Una gráfica en la cual cada par de vértices son adyacentes. La gráfica completa de n vértices, es denotada por K_n.

Subgráfica generadora: Es una subgráfica H de G tal que $V_H = V_G$. Figura 1.3.

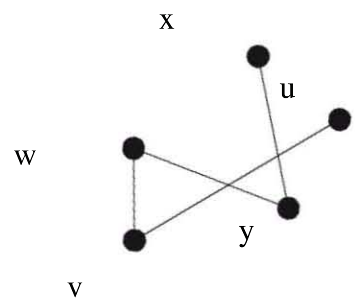

Figura 1.3: Subgráfica generadora de G.

Gráfica complemento: La gráfica $\bar{G}$ es llamada gráfica complemento de G si $V_{\bar{G}} = V_G$ y $e \in E_{\bar{G}}$ si y sólo si $e \notin E_G$. Figura 1.4.

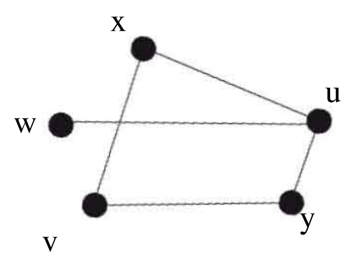

Figura 1.4: Gráfica complemento de G.

Camino: Es una sucesión alternada de vértices y aristas $\{x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, ..., x_l, e_l, x_{l+1}\}$ tal que $e_i = x_i x_{i+1}$, $i = 1, 2, ..., l$. El número de aristas en un camino define su **longitud** y el número de vértices define su **orden**.

Trayectoria: Es un camino en el cual ningún vértice es repetido. La trayectoria de orden n, es denotada por P_n.

Ciclo: Es un camino de orden $n \geq 3$, en el cual el vértice de inicio también es el vértice final y ningún otro vértice es repetido. Denotado por C_n.

Gráfica acíclica: Es una gráfica que no contiene ciclos.

Gráfica conexa: Una gráfica en la cual entre cada par de vértices u y v, existe una trayectoria de u a v. Decimos que u y v son conexos.

Componente (conexa) de G: Una subgráfica conexa de G que no es subgráfica inducida por cualquier otra subgráfica conexa de G, es decir, es una **subgráfica conexa maximal**.

Clan: Es una subgráfica completa de G que no es una subgráfica inducida de cualquier otra subgráfica completa de G, es decir, es una **subgráfica completa maximal de** G.

Gráfica n**-partita**: Una gráfica es n-partita, $n \geq 2$, si el conjunto de vértices puede ser particionado en n subconjuntos, tal que ninguna arista de G conecta vértices del mismo conjunto.

Gráfica n**-partita completa**: Es una gráfica n-partita, con todas las aristas posibles, esto es, cada par de vértices en distintos subconjuntos son adyacentes.

Gráfica bipartita: Una gráfica n-partita con $n = 2$. Denotamos por $K_{p,p'}$ la gráfica completa bipartita, donde p y p' son los dos subconjuntos en los que es particionado V.

Árbol: Es una gráfica conexa y acíclica. Figura 1.5

Hoja: Es un vértice de grado igual a uno.

Vértice soporte: Es un vértice adyacente a una hoja.

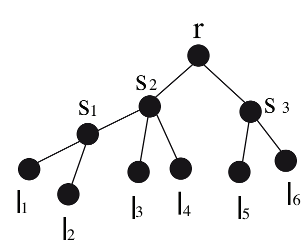

Figura 1.5: Un árbol T.

Vecindad abierta de $x \in V$ es $N(\{x\}) = \{u \in V : xu \in E\}$ que denotaremos simplemente como $N(x)$. Así, la vecindad abierta de $X \subseteq V$ es $N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x) \setminus \{X\}$.

Vecindad cerrada de $x \in V$ es $N[\{x\}] = N(x) \cup \{x\}$ que denotaremos simplemente como $N[x]$. Así, la vecindad cerrada de X es $N[X] = \bigcup_{x\in X} N[x]$.

Vecindad privada externa de $x \in X$ **relativa** a X es definida por $epn(x, X) = \{w \in V \setminus X : N(w) \cap X = \{x\}\}$.

Vecindad privada interna de $x \in X$ **relativa** a X es definida por $ipn(x, X) = \{w \in X : N(w) \cap X = \{x\}\}$.

Vecindad privada de $x \in X$ **relativa** a X es definida por $pn(x, X) = ipn(x, X) \cup epn(x, X)$. Además $epn(x, X) = pn(x, X) \setminus X$.

Los vértices de $pn(x, X)$, $epn(x, X)$ y de $ipn(x, X)$ son llamados **vecinos privados, vecinos privados externos y vecinos privados internos**, respectivamente.

Rueda de carro: La gráfica resultante de unir un ciclo de orden n con otro vértice (llamado centro), mediante n aristas. Denotada por W_n.

Coloración propia de una gráfica: Es la asignación de colores a todos los vértices de una gráfica tal que dos vértices adyacentes no tienen el mismo color.

Número cromático: El mínimo número de colores necesarios para una coloración propia de G. Denotado por $\chi(G)$. Si $\chi(G) = k$, entonces G es k-cromática.

Oruga: Es un árbol tal que al remover todas las hojas, la gráfica resultante es una trayectoria.

1.2. Definiciones

En esta sección definiremos los conceptos relacionados con la dominación segura y dominación total segura en gráficas, la siguiente información es vital para el desarrollo del trabajo, por lo que se recomienda tener siempre presentes los siguientes conceptos:

Sea $G = (V, E)$ una gráfica:

Un **conjunto dominante** de G es un conjunto $X \subseteq V$ con la propiedad que para cada $u \in V \setminus X$, existe $x \in X$ adyacente a u. Figura 1.6.

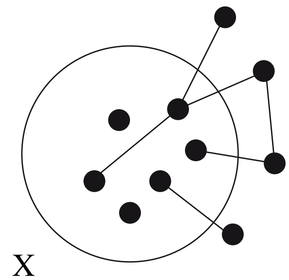

Figura 1.6: Un conjunto dominante X de G.

El **número de dominación** de G es igual a la cardinalidad de un conjunto dominante mínimo de G. Se denota $\gamma(G)$.

Un γ**-conjunto** de G es un conjunto dominante X de G tal que: $|X| = \gamma(G)$.

Un **conjunto dominante total** (CDT) de G es un conjunto $X \subseteq V$ con la propiedad que para cada $u \in V$, existe $x \in X$ adyacente a u. Figura 1.7.

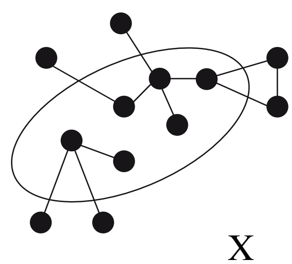

Figura 1.7: Un conjunto dominante total X de G.

El **número de dominación total** de G es igual a la cardinalidad de un conjunto dominante total mínimo de G. Se denota $\gamma_t(G)$, definido si y sólo si, G no tiene vértices aislados.

Un γ_t**-conjunto** de G es un conjunto dominante total X de G tal que: $|X| = \gamma_t(G)$.

Un **conjunto dominante seguro** (CDS) de G es un conjunto $X \subseteq V$ con la propiedad que para cada $u \in V \setminus X$, existe $x \in X$ adyacente a u tal que

$(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante. Cuando esto sucede, diremos que x **protege** (o X**-protege**) a u y que X **protege a** G. Es claro que X es un conjunto dominante. Figura 1.8.

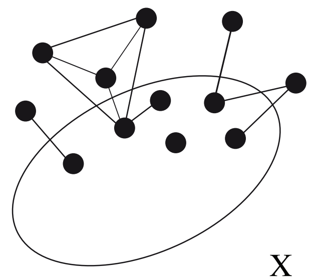

Figura 1.8: Un conjunto dominante seguro X de G.

El **número de dominación segura** de G es igual a la cardinalidad de un conjunto dominante seguro mínimo de G. Se denota por $\gamma_s(G)$.

Un γ_s**-conjunto** de G es un conjunto dominante seguro X de G tal que: $|X| = \gamma_s(G)$.

Un **conjunto dominante total seguro** (CDTS) de G es un conjunto dominante total $X \subseteq V$ con la propiedad que para cada $u \in V \setminus X$, existe $x \in X$ adyacente a u tal que $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante total. Cuando esto sucede, diremos que x **protege totalmente** (o X**-protege totalmente**) a u y que X **protege totalmente a** G. Figura 1.9.

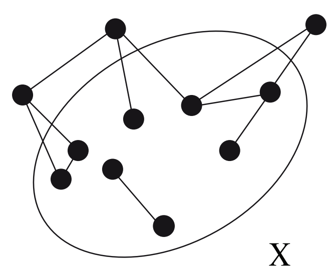

Figura 1.9: Un conjunto dominante total seguro X de G.

El **número de dominación total segura** de G es igual a la cardinalidad de un conjunto dominante total seguro mínimo de G. Se denota por $\gamma_{st}(G)$, definido si y sólo si, G no tiene vértices aislados.

Un γ_{st}**-conjunto** de G es un conjunto dominante total seguro X de G tal que: $|X| = \gamma_{st}(G)$.

Decimos que x **protege con exclusividad a** u si $u \in V \setminus X$ es protegido por $x \in X$ y por ningún otro vértice en X, de otra manera decimos que x **protege conjuntamente a** u.

Capítulo 2

Caracterización de la dominación segura y dominación total segura

Vamos a entender la dominación segura, a través de la caracterización de los conjuntos dominantes seguros y generalizaremos a la dominación total segura, mediante la demostración de varios resultados.

2.1. Primeros resultados

Comenzamos revisando las propiedades que tienen los vértices de un conjunto dominante seguro:

Proposición 2.1.1. *[6] Sea $X \subseteq V$ un conjunto dominante de G. El vértice $u \in V \setminus X$ es X-protegido por x si y sólo si $epn(x, X) \cup \{x\} \subseteq N[u]$.*

Demostración:

$\Longrightarrow$)

Supongamos que $u \in V \setminus X$ es X-protegido por x, entonces x es adyacente a u y $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante. Como x es adyacente a u, $x \in N[u]$. Sea $v \in epn(x, X)$, así $(X \setminus \{x\})$ no domina a v. Por otro lado $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante, entonces $vu \in E$. Por tanto $v \in N[u]$ y $epn(x, X) \cup \{x\} \subseteq N[u]$.

$\Longleftarrow$)

Si $epn(x, X) \cup \{x\} \subseteq N[u]$, es claro que x es vecino de u y cada vértice en $epn(x, X)$ es vecino de u, entonces $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante. Por lo tanto, el vértice u es X-protegido por x. $\square$

Proposición 2.1.2. *[6] X es un conjunto dominante seguro de G si y sólo si para cada $u \in V \setminus X$ existe $x \in X$ tal que $\langle \{u, x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa.*

Demostración:

$\Longrightarrow$)

Supongamos que X es un conjunto dominante seguro y $u \in V \setminus X$ es X-protegido por x, entonces x es adyacente a cada vértice de $epn(x, X) \cup \{u\}$. Sea $v_1 \in epn(x, X) \setminus \{u\}$, como X es dominante seguro, $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es dominante y $(X \setminus \{x\})$ no domina a v_1. Por tanto $uv_1 \in E$. Consideremos $\{v_2, v_3\} \subseteq epn(x, X) \setminus \{u\}$, entonces v_2 es exclusivamente protegido por x y $(X \setminus \{x\}) \cup \{v_2\}$ es dominante, pero $X \setminus \{x\}$ no domina a v_3. Por lo tanto $v_2v_3 \in E$. Lo anterior se cumple para cualquier pareja de vértices en $epn(x, X) \setminus \{u\}$. Así $\langle \{u, x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa.

$\Longleftarrow$)

Si $\langle \{u, x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa para cada $u \in V \setminus X$, resulta claro que $(X \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante. Por lo tanto X es un conjunto dominante seguro de G.

$\square$

Proposición 2.1.3. *[5] Sea $Z \subseteq V$ un CDT. El vértice z Z-protege totalmente a $u \in V \setminus Z$ si y sólo si $u \notin epn(z, Z)$ y $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$.*

Demostración:

$\Longrightarrow$)

Consideremos $Z \subseteq V$ un CDT y z que Z-protege totalmente a $u \in V \setminus Z$, entonces z es adyacente a u y $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante total, es decir: para todo vértice de V existe $z' \in (Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ adyacente a él. Supongamos que $u \in epn(z, Z)$, entonces $N(u) \cap Z = \{z\}$ pero como $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ es dominante total, existe $z_1 \in (Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ tal que $z_1 u \in E_G$. Así $z_1 \in N(u) \cap (Z \setminus \{z\}) \subset N(u) \cap Z$, lo cual contradice que $N(u) \cap Z = \{z\}$. Por tanto $u \notin epn(z, Z)$. Sea $z_2 \in ipn(z, Z)$, entonces $N(z_2) \cap Z = \{z\}$, dado que $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ es dominante total y el único vecino de z_2 en Z es z, concluimos que $z_2 \in N(u)$. Por lo tanto, $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$.

$\Longleftarrow$)

Si $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$ y $u \notin epn(z, Z)$, entonces z es adyacente a u, todos los vecinos privados internos de z respecto a Z son vecinos de u y existe $z_3 \in (Z \setminus \{z\})$ adyacente a u. Así, si Z es un conjunto dominante total, $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ es domintante total. Por lo tanto, z Z-protege totalmente a $u \in V \setminus Z$.

$\square$

Proposición 2.1.4. *[5] Z es un CDTS de G si y sólo si $epn(z, Z) = \emptyset$ para cada $z \in Z$ y para cada $u \in V \setminus Z$ existe $z \in Z$ tal que $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$.*

Demostración:

$\Longrightarrow$)

Sea Z un CDTS. Entonces para cada $u \in V \setminus Z$, existe $z \in Z$ adyacente a u tal que $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u\}$ es un conjunto dominante total, es decir, para cada $u \in V \setminus Z$ existe un $z \in Z$ que lo Z-protege totalmente. Por la Proposición 2.1.3 concluimos que: para cada $u \in V \setminus Z$ existe $z \in Z$ tal que $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$. Supongamos que existe $u' \in V \setminus Z$, $u' \in epn(z, Z)$ para algún $z \in Z$. Así, $N(u') \cap Z = \{z\}$ pero como $(Z \setminus \{z\}) \cup \{u'\}$ es dominante total, existe $z' \in (Z \setminus \{z\}) \cup \{u'\}$ tal que $z'u' \in E_G$. Así $z' \in N(u') \cap (Z \setminus \{z\}) \subset N(u') \cap Z$. Lo cual contradice que $N(u') \cap Z = \{z\}$. Por tanto, $epn(z, Z) = \emptyset$ para cada $z \in Z$.

$\Longleftarrow$)

Suponemos que para cada $z \in Z$, $epn(z, Z) = \emptyset$ y para cada $u \in V \setminus Z$ existe $z \in Z$ tal que $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(u)$. Por la Proposición 2.1.3, sabemos que para cada $u \in V \setminus Z$ existe $z \in Z$ tal que Z-protege totalmente a u. Por lo tanto, Z es un CDTS.

$\square$

2.2. Número de dominación segura y número de dominación total segura

Denotamos el **conjunto de hojas** de una gráfica por $L = \{l \in V : g(l) = 1\}$. Y el **conjunto de vértices de soporte** por $S = \{s \in V : s \in N(L)\}$, que es el conjunto que contiene a los vértices adyacentes a hojas.

El siguiente resultado establece que el número de dominación total segura de una gráfica iguala su orden si y sólo si, la eliminación de los conjuntos de vértices S y L resulta en una gráfica sin aristas.

Teorema 2.2.1. *[5] Para cualquier gráfica G sin vértices aislados, el número de dominación total segura $\gamma_{st}(G) = n = |V|$ si y sólo si $V \setminus (L \cup S)$ es independiente.*

Demostración:

$\Longrightarrow$)

Supongamos que $\gamma_{st}(G) = n = |V|$ y que G no tiene vértices aislados. Si $L \cup S = V$, entonces $V \setminus (L \cup S) = \emptyset$, el cual es independiente. Consideremos que $L \cup S \subset V$ y que $V \setminus (L \cup S)$ no es independiente. Entonces existe $ab \in \langle V \setminus (L \cup S) \rangle$, como $a, b \notin L$, existen $c \neq a$, $d \neq b$, $c, d \in S \cup V \setminus (L \cup S)$, tales que $ad, bc \in E$. Sea $Z = V \setminus \{a\}$, es un conjunto dominante total seguro: para $a \in V \setminus Z$, existe $b \in Z$, b adyacente a a y es tal que $(Z \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ es un conjunto dominante total, pues a es adyacente a d y b es adyacente a c. Por lo tanto $\gamma_{st}(G) < |Z| = n - 1 < n$. Tal contradicción implica que $V \setminus (L \cup S)$ es independiente. Figura 2.1.

$\Longleftarrow$)

Supongamos que $V \setminus (L \cup S)$ es independiente. Sea X un conjunto mínimo de dominación total segura de G. Como $V \setminus (L \cup S)$ es independiente, entonces $\langle V \setminus (L \cup S) \rangle$ no tiene aristas. Supongamos que $L \nsubseteq X$, entonces existe $l \in L$, $l \in V \setminus X$ y existe un único $x \in X$ tal que $xl \in E$. Así, $(X \setminus \{x\}) \cup \{l\}$ no domina totalmente a l, pues $g(l) = 1$. Por tanto X no es un conjunto dominante total seguro. Esta contradicción implica que $L \subseteq X$. Supongamos que $S \nsubseteq X$, entonces existe $s \in S$ tal que $s \notin X$, s es adyacente a alguna $l \in L$. Como X es un conjunto dominante total seguro, existe $u \in X$ tal que $ul \in E$, entonces $u \in N(l)$ y $g(l) > 1$, lo que es una contradicción, pues l es hoja. Así $S \subseteq X$. Por lo tanto $L \cup S \subseteq X$ y para cada $s \in S$, existe una hoja $u \in ipn(s, X)$. Sea $x \in V \setminus (L \cup S)$ y $s \in S$, $x \notin N(l)$ para toda $l \in L$ y $(X \setminus \{s\}) \cup \{x\}$ no es un CDT, ya que existe una hoja $u \in ipn(s, X)$ que no es adyacente a los vértices de $(X \setminus \{s\}) \cup \{x\}$. Entonces $V \setminus (L \cup S) \subset X$. Por lo tanto $V = X$ y $\gamma_{st}(G) = n = |V|$.

□

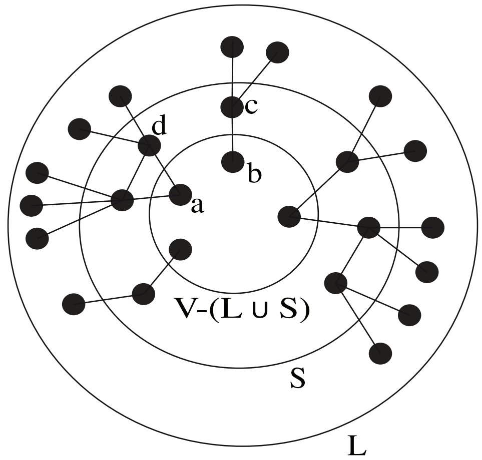

Figura 2.1: Gráfica G con número de dominación total segura $\gamma_{st}(G) = n = |V|$.

2.2.1. Gráficas γ_s-críticas en aristas

Es evidente que en cualquier gráfica G se cumple que $\gamma_s(G-e) \geq \gamma_s(G)$ para toda arista $e \in E$. En esta parte vamos a describir las gráficas que cumplen estrictamente la desigualdad, ya que estas gráficas nos serán de utilidad más adelante.

Una gráfica G es γ_s**-crítica en aristas**, si $\gamma_s(G-e) > \gamma_s(G)$ para toda arista $e \in E$.

Para cualquier $X \subseteq V$ definimos:

$P = \bigcup_{x \in X} epn(x, X)$

$Y = V \setminus (X \cup P)$

Además definimos los siguientes subconjuntos de X:

$X_1 = \{x \in X : N(x) \cap Y = \emptyset\}$

$X_2 = \{x \in X \setminus X_1 : x$ no X-protege a ningún vértice en $N(x) \cap Y\}$

$X_3 = \{x \in X \setminus X_1 : x$ X-protege algunos pero no todos los vértices en $N(x) \cap Y\}$

$X_4 = \{x \in X \setminus X_1 : x$ X-protege todos los vértices en $N(x) \cap Y\}$

(Ver Figura 2.2)

Así, $X = \uplus_{i=1}^{4} X_i$, es claro que X_i podría ser vacío para alguna i.

Definimos:

$U_x = \{y \in Y : x$ exclusivamente X-protege a $y\}$

$Y_{xx'} = \{y \in Y : x, x' \in X$ conjuntamente protegen a $y\}$

Debemos notar que $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$ si $x \neq x'$

Teorema 2.2.2. *[8] Sea G una gráfica, X, Y, P y U_x como se definieron anteriormente. La gráfica G es γ_s-crítica en aristas si y sólo si, para cada γ_s-conjunto X de G:*

1) X y Y son independientes.

2) Cada $y \in Y$ tiene exactamente dos vecinos en X.

3) Si $x \in X$ protege un vértice en Y, entonces $|U_x| \geq 2$.

4) Las únicas aristas en P están en $\langle epn(x, X)\rangle$, $x \in X$.

5) Las únicas aristas entre Y y P están entre $epn(x, X)$ y $y \in Y$ protegido por x.

6) Si $x \in X$ protege conjuntamente un vértice en Y, entonces $epn(x, X) = \emptyset$

Demostración:
(Véase Figura 2.2)
$\Longrightarrow$)

Sea X un γ_s-conjunto de G:

1) Supongamos que $x, y \in X$ ó $x, y \in Y$ con $xy \in E_G$. Si $a \in Y \cup P$ $(a \neq x, y)$ es X-protegido por b $(b \neq x, y)$ en G, entonces a es X-protegido por b en $G - xy$. Así X es un conjunto dominante seguro en $G - xy$, entonces $\gamma_s(G - xy) \leq |X|$, *i.e.* $\gamma_s(G - xy) \leq \gamma_s(G)$. Lo cual es una contradicción, ya que G es γ_s-crítica en aristas. Por lo tanto, X y Y son independientes.

2) Por la definición de Y, $y \in Y$ no es vecino privado de algún $x \in X$. Esto implica que cada vértice en Y es adyacente a por lo menos dos vértices en X. Supongamos que $y \in Y$ tiene al menos tres vecinos $a, b, c \in X$ y que a protege a y (existe pues X es un conjunto dominante seguro de G). Consideremos la arista cy. Entonces y es protegido por a en $G-cy$ y para todo $y' \neq y$, $y' \in Y \cup P$, es protegido por algún d en G, y como la arista cy no incide en y', y' es protegido por d en $G-cy$. Así X es un conjunto dominante seguro en $G-cy$ *i.e.* $\gamma_s(G-cy) \leq \gamma_s(G)$. Lo anterior contradice el hecho de que G es γ_s-crítica en aristas. Y concluimos que $y \in Y$ tiene precisamente dos vecinos en X.

3) Supongamos que x_i protege a $y \in Y$ y que $N(y) \cap X = \{x_i, w\}$. Entonces para todo $x_j \in X - \{x_i\}$, $epn_{G-yw}(x_j, X) = epn(x_j, X)$ y $epn_{G-yw}(x_i, X) = epn(x_i, X) \cup \{y\}$. Por tanto, todos los vértices en $P \cup (Y \setminus U_{x_i})$ permanecen protegidos en $G - yw$. Por otra parte, como x_i protege a y en G, $\langle epn(x_i, X) \cup \{y\} \rangle$ es completa (Proposición 2.1.2). Así, x_i protege a y en $G - yw$. Pero X no es un conjunto dominante seguro de $G - yw$. Por lo tanto, existe $y' \in U_{x_i} \setminus \{y\}$. Repitiendo este argumento para y' en lugar de y, mostramos que existe $y'' \in U_{x_i} \setminus \{y'\}$. Por tanto, $|U_{x_i}| \geq 2$.

4) Supongamos que existe $e \in E$ tal que incide en vecinos privados externos de los vértices $x_1, x_2 \in X$, entonces X es un conjunto dominante seguro de $G - e$. Por lo tanto, $\gamma_s(G - e) \leq |X| = \gamma_s(G)$. Lo que contradice el hecho de que G es γ_s-crítica en aristas. Así, las únicas aristas en P están en $\langle epn(x, X) \rangle$, $x \in X$.

5) Supongamos que existe $e \in E$ tal que incide en un vecino privado externo de $x \in X$ y en $y \in Y$, tal que x no protege a y. Entonces, X es dominante seguro de $G-e$, pues y sigue siendo protegido por algún $u \in X$ en $G-e$. Así $\gamma_s(G-e) \leq |X| = \gamma_s(G)$. Lo que contradice el hecho de que G es γ_s-crítica en aristas. Por lo tanto, las únicas aristas entre Y y P están entre $epn(x, X)$ y $y \in Y$ protegido por X.

6) Supongamos que $x_i, x_j \in X$ protegen a $y \in Y_{x_i x_j}$ y que $epn(x_i, X) \neq \emptyset$. Así, $yz \in E$ para todo $z \in epn(x_i, X) \cup epn(x_j, X)$, pues X es dominante seguro en G. Tomemos $z \in epn(x_i, X)$ y $e = yz$, para todo $x_k \in X$, $epn_{G-e}(x_k, X) = epn(x_k, X)$, x_j protege a y en $G - e$ y todo vértice en $(Y \cup P) \setminus \{y\}$ está protegido en $G - e$. Entonces, X es un conjunto dominante seguro en $G-e$. Esto es, $\gamma_s(G-e) \leq |X| = \gamma_s(G)$. Lo que contradice el hecho de que G es γ_s-crítica en aristas. Por lo tanto, si $x \in X$ protege conjuntamente un vértice en Y, entonces $epn(x, X) = \emptyset$.

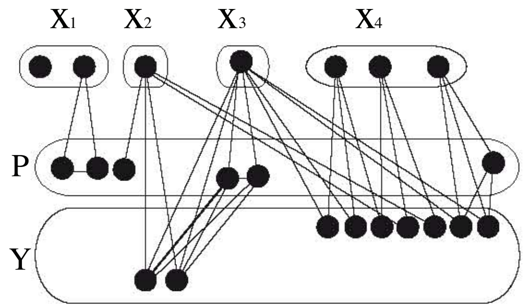

Figura 2.2: Un γ_s-conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ en una gráfica γ_s-crítica en aristas.

$\Longleftarrow$)

Supongamos que cualquier γ_s-conjunto X de G satisface $1 - 6$ y que $\gamma_s(G - e) = \gamma_s(G)$, para algún $e \in E$. Sea X un γ_s-conjunto de $(G - e)$. Entonces X es claramente un γ_s-conjunto de G, así que satisface 1-6.

Caso 1: Sea $e = x_i x_j$ donde $x_i, x_j \in X$. Entonces X no es independiente, lo cual es una contradicción de 1.

Caso 2: Sea $e = y_i y_j$ donde $y_i, y_j \in Y$. Entonces Y no es independiente, lo cual es una contradicción de 1.

Caso 3: Sea $e = zz'$ donde $z, z' \in P$, obsérvese por 4 que: $z, z' \in epn(x_i, X)$, para algún $x_i \in X$. Entonces x_i exclusivamente protege en $G - e$ a z y z', pero $zz' \notin E_{G-e}$. Lo que contradice la Proposición 2.1.2.

Caso 4: Sea $e = x_i v$ donde $v \in epn(x_i, X) \cup U_{x_i}$. Así x_i exclusivamente protege a v en G y X no protege a v en $G - e$. Lo cual es una contradicción, ya que X es un conjunto dominante seguro de $G - e$.

Caso 5: Sea $e = x_i y$ donde $y \in Y_{x_i x_j}$ para algún $j \neq i$. Entonces por 2: $N_{G-e}(y) = \{x_j\}$, $epn(x_i, X) = \emptyset = epn(x_j, X)$ por 6 y además $|U_{x_j}| \geq 2$ por 3. En $G - e$, x_j protege exclusivamente a $U_{x_j} \cup \{y\}$. Sin embargo, para cualquier $y' \in U_{x_j}$, $(X \setminus \{x_j\}) \cup \{y'\}$ no domina a y en $G - e$. Lo cual es una contradicción, ya que X es un conjunto dominante seguro de $G - e$.

Caso 6: Sea $e = x_i u$ donde $u \in U_{x_j}$, $j \neq i$. Sea $u' \in U_{x_j} - \{u\}$. Entonces $N_{G-e}(u) = \{x_j\} \cup epn(x_j, X)$ (por 2 y 5) y x_j protege exclusivamente a u'. Sin embargo, $(X \setminus \{x_j\}) \cup \{u'\}$ no domina a u. Lo cual es una contradicción, ya que X es un conjunto dominante seguro de $G - e$.

Caso 7: Sea $e = uz$ donde $z \in epn(x_i, X)$, $u \in Y$. Por 5, u es protegido por x_i. Si $u \in Y_{x_i x_j}$ para algún x_j, entonces por 6: $epn(x_i, X) = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues $z \in epn(x_i, X)$. Por lo tanto $u \in U_{x_i}$, entonces x_i protege exclusivamente a u y z, pero $uz \notin E_{G-e}$. Lo cual contradice la Proposición 2.1.2.

Estos casos representan todas las aristas de G, por lo tanto, G es γ_s- crítica en aristas.

□

Proposición 2.2.1. *[8] Sea X un γ_s-conjunto de una gráfica G γ_s-crítica en aristas:*

i) Si $x \in X_1$, entonces $\langle N[x] \rangle$ es una subgráfica completa de G.

ii) Si $x \in X_2$, entonces $epn(x, X) \neq \emptyset$ y $\langle \{x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa.

iii) Si $x \in X_3$, entonces $epn(x, X) \neq \emptyset$ y cada vértice en U_x es adyacente a cada vértice en $epn(x, X)$.

iv) Si $y \in Y_{xx'}$, entonces $x, x' \in X_4$ y $deg_G\ y = 2$.

Demostración:

Sea X un γ_s-conjunto de una gráfica G γ_s-crítica en aristas:

i) Si $x \in X_1$, entonces $N(x) = epn(x, X)$. Como X es un conjunto dominante seguro, x protege exclusivamente a $epn(x, X)$ y por la Proposición 2.1.2: $\langle \{x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa. Como $N[x] = \{x\} \cup epn(x, X)$, se tiene que $\langle N[x] \rangle$ es una subgráfica completa de G.

ii) Si $x \in X_2$, entonces x es adyacente a $y \in Y$, pero no protege a y ni a los otros vértices de Y. Por la Proposición 2.1.2, $\langle \{x, y\} \cup epn(x, X) \rangle$ no es completa. Así, existe $z \in epn(x, X)$ tal que z no es adyacente a y, por lo tanto $epn(x, X) \neq \emptyset$. Como X es un conjunto dominante seguro, x protege exclusivamente a $epn(x, X)$, entonces $\langle \{x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa.

iii) Si $x \in X_3$, existe $y \in Y$ tal que x es adyacente a $y \in Y$ y no es protegido por x. Entonces $\langle \{x, y\} \cup epn(x, X) \rangle$ no es completa. Así, existe $z \in epn(x, X)$ tal que z no es adyacente a y, por lo tanto $epn(x, X) \neq \emptyset$. Si existe $y_1 \in U_x$, entonces x protege exclusivamente a y_1, por la Proposición 2.1.2, $\langle \{x, y_1\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa y por tanto, y_1 es adyacente a cada vértice en $epn(x, X)$. Por lo que cada vértice en U_x es adyacente a cada vértice en $epn(x, X)$.

iv) Si $y \in Y_{xx'}$, por el Teorema 2.2.2 (6): $epn(x, X) = \emptyset = epn(x', X)$. Es claro que $x, x' \notin X_1$, pues tienen a y como vecino, $x, x' \notin X_2 \cup X_3$ porque su vecindad es vacía (usamos ii y iii). Entonces $x, x' \in X_4$. Como X y Y son independientes, cada $y \in Y$ tiene exactamente dos vecinos en X y las únicas aristas entre Y y P están entre $epn(x, X)$ y $u \in Y$ protegido por $x \in X$, entonces $deg_G\ y = 2$.

De manera natural, diremos que una gráfica G es γ_{st}-**crítica en aristas**, si $\gamma_{st}(G - e) > \gamma_{st}(G)$ para toda arista $e \in E$.

Capítulo 3

Dominación segura contra dominación total segura

3.1. Relación entre números de dominación segura y total segura

Estableceremos la relación existente entre el número de dominación segura y el número de dominación total segura en gráficas con $\delta(G) = 1$, mediante la siguiente prueba.

Proposición 3.1.1. *[1] Si $\delta(G) = 1$, entonces $\gamma_s(G) < \gamma_{st}(G)$.*

Demostración:
(Véase Figura 3.1)

Sean $l, s \in V$, l una hoja, s el vértice soporte de l y sea Z un conjunto dominante total seguro de G. Observamos que $l, s \in Z$ y s no protege totalmente a ningún vértice de $G \setminus Z$, de otra manera l no estaría dominado totalmente en el conjunto $(Z \setminus \{s\}) \cup \{v\}$ (para algún $v \in V \setminus Z$ adyacente a s), pues l sería un vértice aislado en Z. Por tanto, cada $u \in N(s) \setminus Z$ es adyacente a algún vértice en $Z \setminus \{s\}$, por ser Z un conjunto dominante total seguro. Sea $X = Z \setminus \{l\}$, cada vértice en $V \setminus Z$ es X-protegido por el mismo vértice que Z-protege totalmente y l es X-protegido por s. Entonces X es un conjunto dominante seguro de G y $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) - 1$. Así, $\gamma_s(G) < \gamma_{st}(G)$.

$\square$

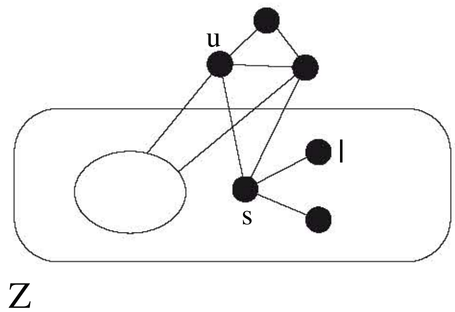

Figura 3.1: Esquema de G.

3.2. Cotas para los Números de dominación segura y total segura

El siguiente resultado exhibe una característica importante de la dominación, pues el número de dominación total segura, queda acotado por el doble del número de dominación segura.

Teorema 3.2.1. *[1] Para cualquier gráfica G con $\delta(G) \geq 2$, $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq 2\gamma_s(G)$.*

Demostración:

Sea G una gráfica con $\delta(G) \geq 2$:

Como todo CDTS es un CDS, entonces $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G)$.

Consideremos H' una gráfica generadora γ_s-crítica en aristas de G tal que $\gamma_s(H') = \gamma_s(G)$. Sea H una subgráfica de H' consistente de todos los componentes no triviales y X un CDS de H, tal que $|X| = \gamma_s(H)$.

Construimos el conjunto Z: Sea $x \in X$, si $epn(x, X) \neq \emptyset$, tomamos $u_x \in epn(x, X)$ y añadimos $u_x, x \in Z$. Si $epn(x, X) = \emptyset$, por la Proposición 2.2.1 y la construcción de H, $x \in X_4$ y x exclusivamente protege algún $y_x \in Y$. Añadimos $x, y_x \in Z$. Notemos que $X \subset Z$ y $|Z| = 2|X|$, pues para cada $x \in X$ se agregan dos elementos a Z. Veamos que Z es un CDTS de H, para eso utilizaremos la proposición 2.1.4:

Como X domina a H, entonces Z domina a H y como $\langle Z \rangle$ no tiene vértices aislados (por su construcción), concluimos que Z es un conjunto dominante total de H. Consideremos $z \in Z$. Si $z \in X$ y $epn(z, X) = \emptyset$, entonces $epn(z, Z) = \emptyset$, ya que $X \subset Z$. Si $z \in X$ y $epn(z, X) \neq \emptyset$, existe $u_z \in epn(z, X) \cap Z$. Por la Proposición 2.1.2 sabemos que $\langle epn(z, X) \rangle$ es completa, así $epn(z, Z) = \emptyset$. Si $z \in Z \setminus X$, entonces $epn(z, Z) = \emptyset$, de lo contrario cualquier $v \in epn(z, Z)$ es tal que $N(v) \cap X = \emptyset$ y X no dominaría a H. Por lo tanto, para cada $z \in Z$ tenemos que $epn(z, Z) = \emptyset$.

Sea $v \in V_H \setminus Z$. Por la construcción de H hay dos casos:

Caso 1: Si $v \in epn(x, X)$ para algún $x \in Z$, entonces (por la construcción de Z) $ipn(x, Z) = \{u_x\}$, donde $u_x \in epn(x, X)$. Pero $\langle \{x\} \cup epn(x, X) \rangle$ es completa por la proposición 2.1.2, así $\{x\} \cup \{u_x\} = \{x\} \cup ipn(x, Z) \subseteq N(v)$.

Caso 2: Si $v \in Y$, por el Teorema 2.2.2, inciso 2: v es adyacente a exactamente dos vértices $x, x' \in X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x X-protege a v. Si $epn(x, X) \neq \emptyset$, existe $u_x \in epn(x, X) \cap Z$. Entonces $ipn(x, Z) = \{u_x\}$, por la proposición 2.1.2: $u_x v \in E_H$, así $\{x\} \cup ipn(x, Z) \subseteq N(v)$. Si $epn(x, X) = \emptyset$, entonces $N(x) \cap Z = \{y_x\}$ por la construcción de Z, pero y_x es adyacente a algún vértice $x'' \in X \setminus \{x\}$. Así $ipn(x, Z) = \emptyset$. Claramente $\{x\} \cup ipn(x, Z) \subseteq N(v)$. Por lo tanto, para cada $v \in V \setminus Z$ existe $z \in Z$ tal que $\{z\} \cup ipn(z, Z) \subseteq N(v)$.

Por la Proposición 2.1.4 concluimos que Z es un CDTS de H, así $\gamma_{st}(H) \leq |Z| = 2|X| = 2\gamma_s(H)$. Notemos que $\gamma_{st}(H') \geq \gamma_{st}(G)$, pues $V_{H'} = V_G$ y $E_{H'} \subseteq E_G$. Si $H' = H$, es decir, H' no tiene vértices aislados, entonces $\gamma_{st}(G) \leq \gamma_{st}(H) \leq 2\gamma_s(H) = 2\gamma_s(H') = 2\gamma_s(G)$.

Supongamos que $H \neq H'$, sea $W = \{w \in V : w \text{ es vértice aislado en } H'\} \neq \emptyset$, así que $X' = X \cup W$ es un CDS de H'. Dado que $|X| = \gamma_s(H)$, entonces $|X'| = \gamma_s(H')$, pues estamos agregando vértices aislados que invariablemente elevan el número de dominación segura. Como $\delta(G) \geq 2$, cualquier $w \in W$ es adyacente a por lo menos dos vértices en G.

Construimos el conjunto Z': para cualquier $w \in W$, si w es adyacente a lo más a un vértice en Z, con Z como se contruyó arriba, elegimos cualquier $r_w \in N_G(w) \setminus Z$ y sea $r_w \in Z'$. Además $Z \cup W \subseteq Z'$. Veamos que Z' es un CDTS de G. Para ello haremos uso de la Proposición 2.1.4:

Para cualquier $z \in Z$, $epn_G(z, Z') = \emptyset$. Además cada vecino en $G \setminus Z'$ de

$w \in W$ es adyacente a un vértice en X. Entonces $epn_G(w, Z') = \emptyset$. Similarmente, si $r_w \in Z'$, entonces $epn_G(r_w, Z') = \emptyset$. Así $epn_G(z', Z') = \emptyset$ para cada $z' \in Z'$.

Si w es adyacente a $z \in Z$, entonces $w \notin ipn_G(z, Z')$ porque w es adyacente a otro vértice en Z o es adyacente a un vértice $r_w \in Z'$. Por otra parte, $r_w \notin ipn_G(z, Z')$ para cualquier $z \in Z'$ porque r_w es adyacente a w y a algún $x \in X$. Así para cada $z \in Z$, $ipn_G(z, Z') \subseteq ipn_H(z, Z)$, por lo que cada vértice en $G \setminus Z'$ es Z'-protegido totalmente por el mismo vértice que lo Z-protege totalmente en H. Por lo tanto, Z' es un CDTS de G.

Por la construción de Z': $|Z'| \leq |Z| + 2|W| = 2|X| + 2|W| = 2|X \cup W| = 2|X'|$. Por lo tanto, $\gamma_{st}(G) \leq |Z'| \leq 2|X'| = 2\gamma_s(H') = 2\gamma_s(G)$. Finalmente $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq 2\gamma_s(G)$.

$\square$

En el Teorema 3.2.1, se puede observar que las cotas son justas. Para mostrar que la igualdad $\gamma_s(G) = \gamma_{st}(G)$ se puede cumplir, consideremos el ciclo C_{2m}, cuyo conjunto de vértices es $W = \{1, 2, 3, ..., 2m\}$. Ahora, para cada $i \in W$ impar, agregamos u_i y v_i adyacentes a i e $i + 1$, respectivamente y llamamos G a la gráfica resultante, $\delta(G) \geq 2$. Por la construcción es claro que W es un CDTS de G, entonces $\gamma_{st}(G) \leq 2m$. Supongamos que X es un CDS de G, tal que $|X| < 2m$. Por el principio de distribución de Dirichlet (principio del palomar), considerando m cajas: $1, 3, 5, ..., 2m-1$ donde la caja j contiene sólo a los vértices: j, $j+1$, u_j ó v_j, existe i tal que $|\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X| \leq 1$. Dado que los vértices u_i y v_i son protegidos por algún $x \in X$, entonces $|\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X| = 1$ y $\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X = \{i\}$ o $\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X = \{i+1\}$, ya que i e $i+1$ son los únicos vecinos de u_i y v_i. Consideremos que $\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X = \{i\}$, entonces $(X \setminus \{i\}) \cup \{u_i\}$ no domina a v_i, lo cual contradice que X es un CDS de G. Si $\{i, i+1, u_i, v_i\} \cap X = \{i+1\}$, entonces $(X \setminus \{i+1\}) \cup \{u_i\}$ no domina a v_i, lo cual contradice que X es un CDS de G. Por lo tanto, $|X| \geq 2m$ y sabemos que W es un CDTS de G, $|W| = 2m$. Así $\gamma_s(G) = 2m = \gamma_{st}(G)$. Figura 3.2.

Para demostrar que la igualdad: $2\gamma_s(G) = \gamma_{st}(G)$ se puede cumplir, consideremos una gráfica G sin vértices aislados, γ_s-crítica en aristas y X un γ_s-conjunto de G tal que ningún vértice en X conjuntamente protege a algún vértice de Y (Y como fue definido anteriormente). Por el Teorema 2.2.2, inciso 1), X es independiente. Para cada $i \in X$, definimos $A_i = \{i\} \cup epn(i, X) \cup U_i$, de esta forma $V_G = \uplus_{i \in X} A_i$.

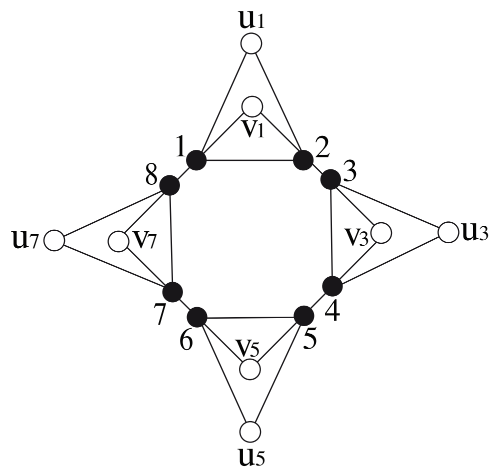

Figura 3.2: Una gráfica G con $\gamma_s(G) = \gamma_{st}(G) = 8$.

Supongamos que G tiene un CDTS Z tal que $|Z| \leq 2\gamma_s(G) - 1 = 2|X| - 1$. Por el principio del palomar, considerando las cajas: $1, 2, 3, ..., |X|$, donde la caja i contiene sólo a los vértices de A_i, entonces $|Z \cap A_x| \leq 1$ para alguna $x \in X$. Supongamos que $x \in X_1$, en consecuencia $\langle N[x] \rangle$ es una subgráfica completa de G (Proposición 2.2.1 i) y como Z es un CDTS de G, $|Z \cap A_x| \geq 2$; de lo contario no hay forma de dominar totalmente a los vértices de $\langle N[x] \rangle$, pues tendríamos un vértice aislado en $\langle Z \rangle$ o Z no dominaría a $\langle N[x] \rangle$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $x \in X_i$, $i \neq 1$. Supongamos que $epn(x, X) \neq \emptyset$. Por el Teorema 2.2.2 y la proposición 2.2.1, para cada $v \in epn(x, X)$, $N[v] = epn(x, X) \cup \{y \in Y : x\ X\text{-protege a } y\} \cup \{x\}$. Dado que ningún vértice en X protege conjuntamente a algún vértice en Y, tenemos que $U_x = \{y \in Y : x\ X\text{-protege a } y\}$, por tanto $N[v] = A_x$. Para dominar a v, $|Z \cap A_x| = 1$, pero si $v \in Z$, entonces v está aislado en $\langle Z \rangle$, así Z no es CDTS, lo cual es una contradicción. Si $u \in Z$ para algún $u \in A_x - \{v\}$, entonces $v \in epn(u, Z)$, lo cual contradice la Proposición 2.1.4, pues Z es un CDTS.

Ahora podemos asumir que $epn(x, X) = \emptyset$, por la Proposición 2.2.1, $x \in X_4$ y por la definición de X_4, x X-protege todos los vértices en $N(x) \cap Y$, esto es, $N[x] \subseteq A_x$. Si $x \in Z$, entonces x es un vértice aislado en $\langle Z \rangle$ y por tanto Z no es un CDTS de G, lo cual es una contradicción. Si $u \in Z$ para algún $u \in A_x \setminus \{x\}$, entonces $x \in epn(u, Z)$, que contradice la Proposición 2.1.4.

Así, $2\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G)$, pero como $2\gamma_s(G) \geq \gamma_{st}(G)$, concluimos que $2\gamma_s(G) = \gamma_{st}(G)$.

$\square$

Capítulo 4

Dominación total, dominación total Segura, cubierta clánica e Independencia

En este capítulo vamos a mostrar las relaciones que guardan los conceptos mencionados en su título. Claramente $\gamma_t(G) \leq \gamma_{st}(G)$ para cualquier gráfica G sin vértices aislados. Y pueden diferir considerablemente. Por ejemplo $\gamma_t(K_{1,m}) = 2$ y $\gamma_{st}(K_{1,m}) = m + 1$.

4.1. Dominación total y dominación total segura

Comenzamos esta sección caracterizando gráficas para las cuales γ_t es igual a γ_{st}.

Para $n \geq 1$, sea $J_{2,n}$ la gráfica obtenida de $K_{2,n}$ al unir mediante una arista los dos vértices de grado n (o dos vértices no adyacentes de C_4, si $n = 2$). Figura 4.1.

Teorema 4.1.1. *[1] Si G es conexa, entonces $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$ si y sólo si, $\gamma_{st}(G) = 2$. Esto es, $\gamma_{st}(G) = 2$ si y sólo si, $G = K_2$ o $J_{2,n}$ es una subgráfica generadora de G para algún $n \geq 1$.*

Demostración:

Sea G conexa:

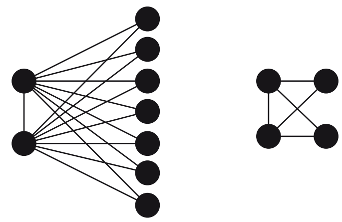

Figura 4.1: Gráficas $J_{2,7}$ y $J_{2,2}$.

Probemos primero que $\gamma_{st}(G) = 2$ si y sólo si, $G = K_2$ o $J_{2,n}$ es una subgráfica generadora de G para algún $n \geq 1$.

$\Longrightarrow$)

Supongamos que $\gamma_{st}(G) = 2$ con $X = \{x_1, x_2\}$ un γ_{st}-conjunto de G, es decir, un CDTS con $|X| = \gamma_{st}(G)$. Entonces $x_1x_2 \in E_G$ y por la Proposición 2.1.4: $epn(x_1, X) = \emptyset = epn(x_2, X)$. Así, cada vértice en $V \setminus X$ es adyacente a x_1 y x_2. Por lo tanto, $G = K_2$ o $J_{2,n}$ es una subgráfica generadora de G.

$\Longleftarrow$)

Si $G = K_2$ o G tiene a $J_{2,n}$ como subgráfica generadora, es claro que $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G) = 2$.

$\square$

Ahora probemos que $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$ si y sólo si, $\gamma_{st}(G) = 2$.

Es claro que el Teorema 4.1.1 se cumple si $|V| \leq 3$.

$\Longrightarrow$)

Supongamos que $|V| \geq 4$, $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$ y que $J_{2,n}$ no es una subgráfica generadora de G, entonces $\gamma_{st}(G) \geq 3$. Supongamos sin pérdida de generalidad que G es crítica en aristas respecto a la dominación total segura, esto es, $\gamma_{st}(G - e) > \gamma_{st}(G)$ para toda $e \in E_G$. Sea X un γ_{st}-conjunto de G, es decir, $|X| = \gamma_{st}(G)$. Notemos que $|X| = \gamma_t(G)$, pues $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$. Como X es un CDTS de G, por la Proposición 2.1.4, cada vértice en $Y' = V \setminus X$ es adyacente al menos a dos vértices en X. Como cada $y \in Y'$ es dominado totalmente por algún $x \in X$, entonces $xy \in E_G$ y dado que $epn(x, X) = \emptyset$, existe $x' \in X$ tal que $x'y \in E_G$. Como X es un CDT, la subgráfica inducida por X, $\langle X \rangle$ de G no tiene vértices aislados. Dado que G es crítica en aristas respecto a la dominación total segura, entonces Y'

es independiente. De otro modo, cualquier arista $e = y'y''$, con $y', y'' \in Y'$ podría ser eliminada sin modificar $\gamma_{st}(G)$.

Si la subgráfica inducida por X, $\langle X \rangle$ tiene una componente C de tamaño por lo menos tres, sea $w \in V_C$ tal que w no es vértice de corte de C. Entonces $\langle X - \{w\} \rangle$ no tiene vértices aislados. Por otro lado, como cada vértice en Y' es adyacente a al menos a dos vértices en X, $X - \{w\}$ es un CDT de G. Así, $\gamma_t(G) < \gamma_{st}(G)$, lo cual es una contradicción , pues $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$. Por lo tanto, $\langle X \rangle = mK_2$ para alguna $m \geq 2$.

Dado que G es conexa, consideremos $x_1y_1, x_2y_2 \in E_{\langle X \rangle}$ tales que algún $u \in Y'$ es adyacente (sin pérdida de generalidad) a x_1 y x_2. Así, $ipn(y_1, X) = \{x_1\}$ y $ipn(y_2, X) = \{x_2\}$. Si existe un vértice $u' \in Y'$ tal que $N(u') \cap X \subseteq \{y_1, y_2\}$, entonces y_1 y y_2 no satisfacen la Proposición 2.1.4, esto es, $\{y_i\} \cup ipn(y_i, X) \nsubseteq N(u')$, $i = 1, 2$. Así cada vértice en Y' es adyacente a algún $x \in X - \{y_1, y_2\}$.

Sea $X' = (X - \{y_1, y_2\}) \cup \{u\}$, así $\langle X' \rangle$ no tiene vértices aislados. Por otro lado, x_1 domina a y_1 y x_2 domina a y_2. Como cada vértice en Y' es adyacente a algún vértice $x \in X - \{y_1, y_2\}$, entonces X' domina a Y'. Así, X' es un CDT de G, como $|X'| < |X|$, entonces $\gamma_t(G) < \gamma_{st}(G)$. Lo cual es una contradicción, pues $\gamma_{st}(G) = \gamma_t(G)$. Por lo tanto, no pueden existir ambas aristas $x_1y_1, x_2y_2 \in E_{\langle X \rangle}$ y como $\langle X \rangle = mK_2$ para alguna $m \geq 2$, entonces $\gamma_{st}(G) = 2$.

$\Longleftarrow$)

Supongamos que $\gamma_{st}(G) = 2$, sea X un γ_{st}-conjunto de G, así X es un CDT, dado que $\gamma_t(G) \geq 2$ para toda G, entonces $\gamma_t(G) = |X| = \gamma_{st}(G) = 2$.

$\square$

4.2. Dominación total y cubierta clánica

Una **cubierta clánica** de G es una división de G en clanes distintos, es decir, que no comparten vértices.

El **número de cubierta clánica** $\theta(G)$, es igual a la cardinalidad de una cubierta clánica mínima.

Ahora vamos a comparar γ_t con el número de cubierta clánica $\theta(G)$. Notemos que $\gamma_t(G) = 2$ cuando $\theta(G) = 1$. Pues en tal caso, G es completa y cualesquiera dos vértices de G forman un conjunto dominante total.

Para cualquier gráfica G, fijamos una cubierta clánica mínima $\mathbf{C}$, construimos la gráfica de cubierta clánica $\mathbf{C}(G)$ de G con respecto a $\mathbf{C}$, al hacer corresponder cada clan en $\mathbf{C}$ a un vértice en $\mathbf{C}(G)$ tal que dos vértices en $\mathbf{C}(G)$ son adyacentes si y sólo si, sus respectivos clanes en G tienen vértices adyacentes. Figura 4.2.

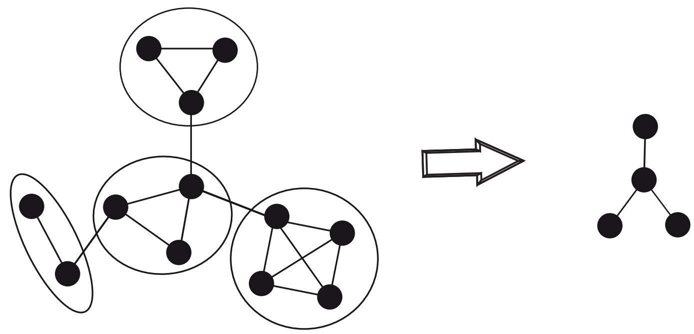

Figura 4.2: Gráfica con cubierta clánica mínima $\mathbf{C}$ y su respectiva gráfica de cubierta clánica $\mathbf{C}(G)$.

Proposición 4.2.1. *[1] Si G es conexa y $\theta(G) \geq 2$, entonces $\gamma_t(G) \leq 2\theta(G) - 2$. La cota es justa.*

Demostración:

Si $\theta(G) = 2$, dado que G es conexa, existe $uv \in E_G$ tal que u y v pertenecen a distintos clanes. Así, $\{u, v\}$ es un conjunto dominante total de G. Por lo tanto $\gamma_t(G) \leq 2\theta(G) - 2$.

Supongamos que $\theta(G) \geq 3$, fijemos una cubierta clánica mínima $\mathbf{C}$ de G y consideremos un árbol generador T de $\mathbf{C}(G)$. Notemos que V_T es un CDT de $\mathbf{C}(G)$, pues los vértices de T son los vértices de $\mathbf{C}(G)$.

Hacemos corresponder a V_T un conjunto dominante D de G, añadiendo a D a lo más dos vértices para cada vértice en T como sigue: fijamos un vértice de grado mayor a uno como raíz r de T. Sea d la distancia máxima de cualquier vértice de T a r. Empezamos con los vértices a distancia d, luego los vértices a distancia $d-1$, continuamos el proceso hasta $d=1$ y terminamos con r. Si un vértice $v \neq r$ es un vértice de T con padre u, lo hacemos corresponder a dos vértices en D, esto es, añadimos a D los siguientes dos vértices: un vértice v_1 en el clan de G correspondiente a v y un vértice v_2 en el clan correspondiente a u, donde $v_1v_2 \in E_G$. Dependiendo del número de hijos que tiene un vértice, es posible que todos lo vértices en el correspondiente clan de G sean incluidos en D, o que algún vértice de V_G sea considerado en D más de una vez. Cuando hemos llegado a r, no agregamos más vértices a D. Así, $|D| \leq 2\theta(G)-2$. Figura 4.3.

Veamos que D es un CDT. Supongamos que existe $v \in V_G$ tal que $N(v) \cap D = \emptyset$, entonces $v \notin D$, pues D no tiene vértices aislados. Por tanto $v \in V_G - D$. Así, v está en algún clan de G de orden mayor a dos, entonces es adyacente a algún $v_i \in D$, por construcción de D. Lo cual es una contradicción, ya que $N(v) \cap D = \emptyset$. Por lo tanto D es un CDT de G.

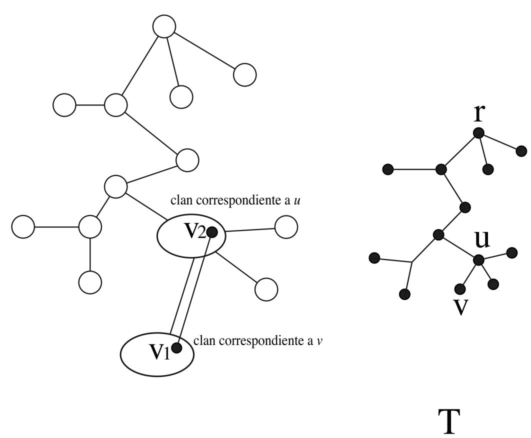

Figura 4.3: Construcción ejemplo de D.

La siguiente gráfica: figura 4.4, muestra que la cota es justa para todo $\theta \geq 2$:

Claramente $\gamma_{st}(G)-\theta(G)$ puede ser arbitrariamente grande. Si $P_{n,1}$ es la oruga obtenida de P_n al agregar una hoja a cada vértice de P_n, entonces $\theta(P_{n,1}) = \gamma_t(P_{n,1}) = n$ y $\gamma_{st}(P_{n,1}) = 2n$ (Teorema 2.2.1). Figura 4.5. Otro ejemplo es la figura 4.4.

La diferencia $\gamma_{st}(G)-\theta(G)$ puede ser menor o igual a cero; para la rueda W_n con $n > 4$, es fácil ver que $\theta(W_n) = \theta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, mientras $\gamma_{st}(W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. Figura 4.6.

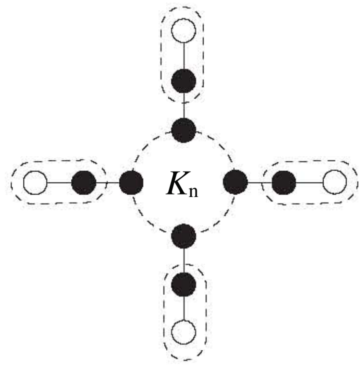

Figura 4.4: Gráfica con $\theta(G) = n + 1$ y $\gamma_t(G) = 2n$.

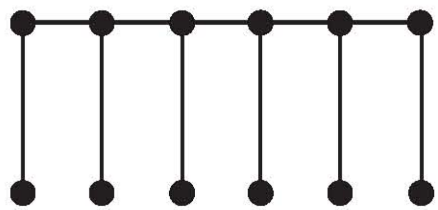

Figura 4.5: Gráfica $P_{6,1}$.

4.3. Dominación total segura y cubierta clánica

Podemos comparar $\gamma_{st}(G)$ con el número de cubierta clánica $\theta(G)$. Mediante el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1. *[1] Para toda gráfica G sin vértices aislados, $\gamma_{st}(G) \leq 2\theta(G)$. Y la cota es justa.*

Demostración:

Si $\theta(G) = 1$, entonces cualesquiera dos vértices de G forman un CDTS, por lo tanto, $\gamma_{st}(G) \leq 2\theta(G)$.

Supongamos que $\theta(G) \geq 2$ y sin pérdida de generalidad asumamos que G es conexa. Construyamos un CDTS D de G a partir de una cubierta clánica mínima fija $\mathbf{C}$. Dividamos a los clanes de $\mathbf{C}$ en dos tipos; clanes de tamaño uno y clanes de tamaño mayor a uno.

Notemos que si $\{v\}, \{w\} \in \mathbf{C}$, es decir, son clanes de tamaño uno en $\mathbf{C}$, entonces $vw \notin E_G$, de lo contrario; $(\mathbf{C} \backslash \{\{u\}, \{w\}\}) \cup \{v, w\}$ sería una cubierta clánica de G de menor cardinalidad que $\mathbf{C}$.

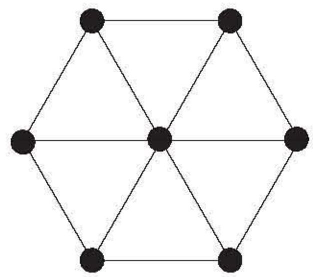

Figura 4.6: En la rueda W_6, se tiene que $\theta(W_6) = 3$ y $\gamma_{st}(W_6) = 3$.

Para cada vértice $v \in G$ tal que $\{v\} \in \mathbf{C}$, agregamos v a D. Como $\theta(G) \geq 2$ y G es conexa, v es adyacente a un vértice w en un clan de $\mathbf{C}$ de tamaño mayor a uno. Agregamos w a D, siempre que no haya sido agregado anteriormente; w pudo ser agregado a D cuando otro clan de tamaño uno fue considerado.

Para cada clan $C_i \in \mathbf{C}$ de tamaño mayor que uno, agregamos dos vértices a D, siempre que sea posible; si en la primera fase algún C_i de tamaño $r > 1$, es tal que r o $r-1$ de sus vértices fueron agregados a D, no agregamos vértices o agregamos el vértice restante a D, respectivamente.

Por construcción $|D| \leq 2\theta(G)$ y claramente D es un CDT.

Para demostrar que D es un CDTS de G, utilizaremos la Proposición 2.1.4. Sea $u \in V \setminus D$, entonces $u \in C_i \in \mathbf{C}$. Por la construcción de D, C_i contiene al menos dos vértices $z, z' \in D$ que no son adyacentes a clanes de tamaño uno en $\mathbf{C}$. Entonces $ipn(z, D) \subseteq \{z'\}$ y $\{z\} \cup ipn(z, D) \subseteq N(u)$. Por construcción, para cada $z \in D$ tenemos que $epn(z, D) = \emptyset$. Por lo tanto, D es un CDTS de G.

4.4. Dominación total segura e independencia

En los siguientes resultados, podemos observar la relación que guarda el número de independencia y el número de dominación total segura.

Teorema 4.4.1. *[1] Para toda gráfica G sin vértices aislados, $\gamma_{st}(G) \leq 3\alpha(G) - 1$.*

Demostración:

Asumamos sin pérdida de generalidad que G es conexa. Sea X un conjunto independiente maximal que contiene todos los vértices de grado uno de G, notemos que $\langle epn(x, X)\rangle$ es completa para cada $x \in X$; de lo contrario existe un conjunto independiente de cardinalidad mayor a $|X|$.

Sea $X' = \{x \in X : epn(x, X) = \emptyset\}$ y definimos el conjunto X^* como:

$$X^* = \begin{cases} X \setminus X' & \text{si } X' \neq \emptyset \\ \\ X \setminus \{x^*\} & \text{si } X' = \emptyset, \text{ para un arbitrario } x^* \in X, \text{ fijo.} \end{cases}$$

Construimos un CDTS Z como sigue: para cada $x \in X$, agregamos x a Z. Para cada $x \in X'$, agregamos un vecino y_x de x a Z; notemos que $y_x \in Y = V \setminus X$. Para cada $x \in X^*$, si x tiene al menos dos vecinos privados externos, entonces agregamos dos de sus vecinos privados externos: u_x y v_x a Z. Si $x \in X^*$ tiene sólo un vecino privado externo u_x, agregamos u_x a Z. Por la elección de X, $\delta(u_x) \geq 2$. Elegimos $w_x \in N(u_x) \setminus \{x\}$ y agregamos w_x a Z. Por último, si $X^* = X \setminus \{x^*\}$, agregamos cualquier $u_{x^*} \in epn(x^*, X)$ a Z. Claramente, $|Z| < 3|X|$.

Veamos que Z es un CDTS, utilizando la Proposición 2.1.4:

Por construcción, $epn(z, Z) = \emptyset$ para cada $z \in Z$; pues para cada $x \in X$, $epn(x, X)$ es completa y para cada $z \in X^* \subset Z$ hemos agregado vecinos privados externos. Para cada $x \in X \setminus \{x^*\}$ y cada vértice $z \in Z \setminus X$ adyacente a x, z es adyacente a algún vértice en $Z \setminus \{x\}$: Si $z = v_x$, entonces z es adyacente a u_x, si $z = u_x$, entonces z es adyacente a v_x o w_x, si $z = w'_x$ para algún $x' \in X$, entonces z es adyacente a $u_{x'}$ y si $z = y_{x'}$ para algún $x' \in X$, entonces z es adyacente al menos a dos vértices en X. Por lo tanto $ipn(x, Z) = \emptyset$ para cada $x \in X \setminus \{x^*\}$ y $ipn(x^*, Z) \subseteq \{u_{x^*}\}$.

Consideramos cualquier $a \in V \setminus Z$. Como X es un conjunto dominante, a es adyacente a algún $x \in X$. Si $a \in epn(x^*, X)$, entonces a es adyacente a x^* y u_{x^*}. Así, $\{x^*\} \cup ipn(x^*, Z) \subseteq N(a)$. Si $a \notin epn(x^*, X)$, entonces $a \in epn(x, X)$ para algún $x \in X \setminus \{x^*\}$ o $a \in Y = V \setminus X$. En tal caso a tiene al menos dos vecinos en X, uno de ellos es $x \neq x^*$, como $ipn(x, Z) = \emptyset$ para algún $x \in X \setminus \{x^*\}$, y esto implica que $\{x\} \cup ipn(x, Z) \subseteq N(a)$, entonces Z es un CDTS de G. Por lo tanto, $\gamma_{st}(G) \leq 3\alpha(G) - 1$.

Para $\alpha(G) = 2$ la cota puede ser mejorada:

Teorema 4.4.2. *[1] Sea G una gráfica sin vértices aislados y $\alpha(G) = 2$, entonces $\gamma_{st}(G) \leq 4$.*

Demostración:

Sea $X = \{x, y\}$ un conjunto independiente, así, X es un conjunto dominante de G y sea $W = N(x) \cap N(y)$.

Caso 1: Si $epn(x, X) = epn(y, X) = \emptyset$, entonces $W = V \setminus X$. Si $G = P_3$, sea $Z = V_G$; de otra forma, sean $u, v \in V \setminus X$ y $Z = \{u, v\} \cup X$. Claramente Z es un CDTS de G.

Caso 2: Supongamos que $epn(x, X) = \emptyset$ y $epn(y, X) \neq \emptyset$. Entonces $\langle epn(y, X) \rangle$ es completa; pues $\alpha(G) = 2$. Si x y y tienen sólo un vecino en común, entonces $\theta(G) = 2$ y el resultado se sigue del Teorema 4.3.1. Supongamos que x y y tienen al menos dos vecinos en común. Sean $u \in N(x)$, $v \in epn(y, X)$ y $Z = X \cup \{u, v\}$. Entonces $epn(z, Z) = \emptyset$ para cada $z \in Z$. Consideremos $w \in V \setminus Z$, si $w \in epn(y, X)$, entonces y Z-protege totalmente a w. Ahora asumamos $w \in W$. Si $uw \in E_G$, entonces u Z-protege totalmente a w. Si $uw \notin E_G$, entonces al menos u o w es adyacente a v; pues $\alpha(G) = 2$. Si $vw \in E_G$, entonces y Z-protege totalmente a w. Por lo tanto, Z es un CDTS de G.

Caso 3: Si $epn(x, X) \neq \emptyset$ y $epn(y, X) = \emptyset$, es análogo al anterior.

Caso 4: Supongamos $epn(x, X) \neq \emptyset$ y $epn(y, X) \neq \emptyset$. Entonces ambos conjuntos inducen subgráficas completas de G. Sean $u \in epn(x, X)$, $v \in epn(y, X)$ y $Z = \{u, v, x, y\}$. Consideremos $w \in V \setminus Z$, si $w \in epn(x, X)$, entonces Z-protege totalmente a w; igualmente si $w \in epn(y, X)$. Por tanto asumimos que $w \in W$ y notemos que u, v, w, x, y es un camino en G. Si w es adyacente a u o v, sin pérdida de generalidad, $uw \in E_G$, entonces u Z-protege totalmente a w. Si w no es adyacente a cualquiera de u o v, entonces $uv \in E_G$, porque $\alpha(G) = 2$. En este caso, x Z-protege totalmente a w. Por tanto Z es un CDTS de G.

Por lo tanto, $\gamma_{st}(G) \leq |Z| = 4$.

Bibliografía

[1] W.F. Klostermeyer y C.M. Mynhardt, *Secure domination and secure total domination in graphs*, Discussiones Mathematicae. Graph Theory **28** (2008) 267-284.

[2] S. Benecke, *Higher Order Domination of Graphs*, (Master's Thesis, University of Stellenbosch, 1977).

[3] E.J. Cockayne, *Irredundance, secure domination and maximum degree in trees*, Discrete Math. **307** (2007) 12-17.

[4] E.J. Cockayne, O. Favaron and C.M. Mynhardt, *Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. **39** (2003) 87-100.

[5] S. Benecke, E.J. Cockayne and C.M. Mynhardt, *Secure total domination in graphs*, Utilitas Math. **74** (2007) 247-259.

[6] E.J. Cockayne, P.J.P. Grobler, W.R. Gründlingh, J. Munganga y J.H. van Vuuren, *Protection of a graph*. Utilitas Math. **67** (2005) 19-32.

[7] E.J. Cockayne, S. Benecke, C.M. Mynhardt, *Total Protection of a graph*. Utilitas Math. **68** (2005) 1-8.

[8] P.J.P. Grobler y C.M. Mynhardt, *Secure domination critical graphs*, Discrete Math. **309** (2009) 5820-5827.

[9] C.M. Mynhardt, H.C. Swart and E. Ungerer, *Excellent trees and secure domination*, Utilitas Math. **67** (2005) 255-267.

[10] M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman. ISBN 0-7167-1045-5. OCLC (1979).