



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Construcción de campos vectoriales y
foliaciones holomorfas con holonomía
prescrita

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
MIRIAM RAMÍREZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Gracias a Dios por permitirme creer en él y hacerse presente en mi vida a través del amor de mi familia y amigos.

Agradezco a mi madre por ser mi mayor ejemplo, a mi padre por ser quien más me alienta y a mi hermana por ser mi mejor amiga. A los tres doy gracias por su cariño, consejos, regaños e infinito tiempo.

Quiero agradecer a mi directora de tesis, Laura Ortiz Bobadilla, por todo lo que he aprendido de ella, como matemática y como persona.

También quiero expresar mi gratitud a la universidad que me forjó, porque en ella encontré excelentes maestros y entrañables amigos (conjuntos no disjuntos). Principalmente doy gracias a Mayela, Carlos, Oziel, Vicky, Héctor, Andrés y al profesor Javier Paéz porque me hicieron sentir en familia estando lejos de casa.

Por último agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida para la realización de este trabajo a través del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM en los proyectos IN 103010 Geometría de foliaciones y ecuaciones holomorfas e IN 102413 Geometría de ecuaciones diferenciales analíticas y foliaciones holomorfas.

Índice general

1. Campos, foliaciones y singularidades	9
1.1. Campos vectoriales y foliaciones por curvas	10
1.2. Holonomía	18
2. Explosiones e índice de Camacho-Sad	23
2.1. Explosión de singularidades	24
2.1.1. Casos dicrítico y no dicrítico	32
2.2. Índice de Camacho-Sad	36
3. Sistemas lineales y conexiones	45
3.1. Sistemas lineales	46
3.1.1. Holonomía y monodromía	47
3.1.2. Singularidades regulares	49
3.1.3. Singularidades fuchsianas	51
3.1.4. Monopolos	52

3.2. Conexiones	53
3.2.1. Conexiones y sistemas lineales	55
3.2.2. Conexiones sobre haces lineales	55
4. Teoremas de realización	59
4.1. Teorema de realización de Lins Neto	60
4.1.1. Generalización a varias explosiones	66
4.2. Problema de Riemann-Hilbert	70
A. Variedades y haces	75
A.1. Grado de un haz	80
B. Clasificación de haces vectoriales	83
B.1. Clasificación de haces lineales	83
B.2. Clasificación de haces de rango n	85

Introducción

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias surge esencialmente con el trabajo de Henri Poincaré, quien descubrió que las ecuaciones diferenciales no sólo pertenecen al ámbito del análisis, sino también al de la geometría. Tanto Poincaré como Dulac y posteriormente Siegel estudiaron el comportamiento formal y analítico de las ecuaciones diferenciales en una vecindad de sus puntos singulares, interesándose, entre otras cosas, por aquellas ecuaciones no lineales $\dot{z} = v(z)$ que en una vecindad del punto singular conservan las propiedades analíticas de la parte lineal de la ecuación.

El estudio de la topología de las ecuaciones diferenciales $\dot{z} = Az + \dots$ con $A \neq 0$, $z \in (\mathbb{C}^n, 0)$ ¹ y $t \in \mathbb{C}$, se inició hasta 1969 con el trabajo de Arnold “*Remarks on singularities of finite codimension in complex dynamical systems*”([2]), en donde observa que la topología de las hojas de una foliación definida por una ecuación lineal $\dot{z} = Az$ cuya colección de valores propios $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es tal que $0 \notin \text{conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} := \{\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i : c_i \geq 0, \sum_{i=1}^n c_i = 1\}$ tiene una estructura de cono (las hojas intersectan transversalmente a esferas centradas en el origen). Posteriormente surgieron los trabajos de Guckenheimer, Camacho, Kuiper, Palis, Ladis e Ilyashenko. Estos últimos estudiaron la clasificación topológica de gérmenes genéricos de ecuaciones diferenciales $\dot{z} = Az + \dots$.

En $(\mathbb{C}^2, 0)$ se pueden estudiar los casos no genéricos recurriendo al método de explosión de singularidades, el cual permite reducir la complejidad de la singularidad de una ecuación cambiando, mediante el proceso de explosión, el punto singular por un espacio proyectivo $\mathbb{C}P^1$. Este espacio proyectivo (también conocido como divisor excepcional) es, en los casos genéricos, una

¹En lo sucesivo denotaremos por (\mathbb{C}^n, p) a una vecindad abierta del punto p en \mathbb{C}^n .

hoja solución de la foliación explotada salvo por un número finito de puntos singulares, los cuales son (por lo regular) más simples que el punto singular de la ecuación original.

Una forma de comprender el comportamiento de las hojas de una foliación cercanas al divisor excepcional es a través del grupo de gérmenes de transformaciones inducido por el grupo fundamental del divisor excepcional en alguna sección transversal a esta hoja, el *grupo de holonomía evanescente o proyectiva* asociado a la ecuación. Una pregunta natural es ver si todo grupo de gérmenes de transformaciones conformes con ciertas características mínimas puede ser realizado como el grupo de holonomía de alguna ecuación. En este trabajo, siguiendo el artículo de Alcides Lins Neto “*Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*” ([12]) veremos que todo grupo de gérmenes de biholomorfismos en $(\mathbb{C}, 0)$ cuyos generadores son linealizables se puede realizar como la holonomía proyectiva de un campo vectorial analítico en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Para ello usaremos los conceptos, ejemplos y resultados básicos de la teoría de foliaciones y explosión de singularidades presentados en los primeros dos capítulos.

Además del resultado de Lins Neto expondremos otro problema de realización: el problema de Riemann-Hilbert o problema 21 de Hilbert, el cual tiene una historia peculiar. En la versión original Hilbert pide construir una ecuación diferencial lineal con ciertas características que realice a la información de monodromía. A principios de siglo XX se piensa que el problema ha sido resuelto por Plemelj e incluso casi 50 años más tarde con el desarrollo de la teoría de haces fibrados Birkhoff dio una demostración alternativa a la prueba de Plemelj. Lamentablemente ambos matemáticos cometieron un error con respecto al tipo de singularidades obtenidas. Hoy sabemos, gracias al trabajo de Bolibruch, que no toda la información de monodromía puede realizarse para alguna ecuación con las características enunciadas por Hilbert. Sin embargo, el problema tiene solución si se consideran singularidades menos restrictivas. En la segunda parte del Capítulo 4 daremos una prueba de este hecho valiéndonos de la teoría desarrollada en el Capítulo 3.

Por último incluimos dos apéndices, en el primero se presentan algunos conceptos básicos de Topología Diferencial, como las variedades diferenciables y los haces vectoriales, pretendiendo con ello que este texto pueda ser consultado por lectores con conocimientos de Cálculo Diferencial, Variable Compleja y Topología General. En el segundo apéndice se ofrece una clasificación de los haces vectoriales, la cual ocuparemos al final de este trabajo.

Capítulo 1

Campos, foliaciones y sus singularidades

Este capítulo contiene nociones y resultados básicos que emplearemos a lo largo de la tesis. Empezaremos definiendo las ecuaciones diferenciales ordinarias holomorfas, introduciremos geoméricamente las foliaciones holomorfas por curvas y posteriormente daremos una correspondencia entre ambos conceptos, i.e., veremos que las soluciones de toda ecuación diferencial holomorfa determinan una foliación por curvas y que, recíprocamente, para cualquier foliación holomorfa por curvas existe una clase de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones coinciden con las hojas de la foliación. En la segunda sección presentaremos la noción de holonomía, el cual es un concepto esencial en este trabajo.

1.1. Campos vectoriales y foliaciones por curvas

Un *campo vectorial holomorfo* X definido en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es una n -ada de funciones holomorfas

$$X = (X_1, \dots, X_n) : U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

que a cada punto $p \in U$ le asocia un vector $X(p)$ que varía de manera holomorfa. Dado X , la función que a cada punto $p \in U$ le asocia la recta compleja que pasa por p en la dirección de $X(p)$ se llama el *campo de direcciones* de X .

Sobre cualquier abierto $V \subseteq \mathbb{C}^n$ biholomorfo a U podemos determinar un campo vectorial a partir de un campo vectorial $X = (X_1, \dots, X_n)$. Si $\phi : U \rightarrow V$ es un biholomorfismo definimos

$$\phi_* X := D\phi(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi^n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

Si X es un campo vectorial holomorfo en U definimos la *ecuación diferencial asociada a X* como

$$\dot{x} = X(x) \quad \text{donde } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

Una función holomorfa $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow U$ definida en un abierto de \mathbb{C} que en cada punto $t \in A$ satisface

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

se llama *solución de la ecuación diferencial* (1.1). En otras palabras φ es solución de (1.1) si puntualmente X le asocia su vector velocidad. A la representación gráfica de las soluciones se le denomina *retrato de las fases*.

Observemos que en cada punto $p \in U$ donde X no se anula, la solución de (1.1) que pasa por él es tangente al campo. Si por el contrario $X(p) = 0$ tendremos que la función constante $\varphi(t) = p$ es solución de (1.1). El

comportamiento de los campos vectoriales alrededor de este tipo de puntos suele complicarse, razón por la cual los llamaremos *puntos singulares*.

El *Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales holomorfas*¹ asegura que hay una única solución de la ecuación (1.1) definida en $(\mathbb{C}, 0)$ que satisface la condición inicial $\varphi(0) = p$. Dichas soluciones se ven localmente como una familia de subespacios afines paralelos, esto sugiere el siguiente concepto.

Definición 1.1.1. Una *foliación holomorfa no singular por curvas* \mathcal{F} de un abierto V de \mathbb{C}^n , es una descomposición de V en subconjuntos conexos disjuntos $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ llamados **hojas**, donde Δ un conjunto de índices, tal que todo punto $p \in V$ tiene una vecindad U_p y un biholomorfismo $\varphi : U_p \rightarrow W_p \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisface que para toda hoja L_α , las componentes conexas de $U_p \cap L_\alpha$ quedan descritas en W_p por la ecuación

$$w_2 = c_2, \dots, w_{n-1} = c_{n-1}.$$

A las parejas (U_p, φ) **cartas coordenadas distinguidas** de la foliación.

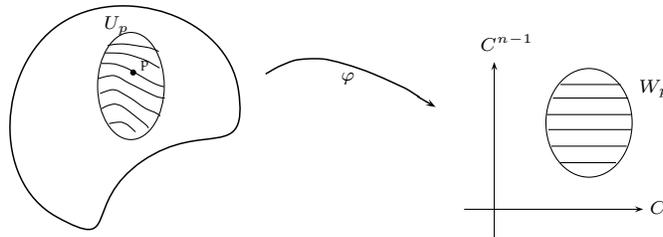


Figura 1.1: Foliación holomorfa no singular por curvas de un abierto $V \subseteq \mathbb{C}^n$.

Veamos que, en efecto, las soluciones de la ecuación diferencial asociada a un campo que no se anula determinan una foliación no singular por curvas. Para ello construiremos biholomorfismos que lleven soluciones de (1.1) en curvas constantes en las últimas $n - 1$ coordenadas.

Dado $p \in V$ tomamos un hiperplano A de dimensión $n - 1$ transversal al vector $X(p)$ en el punto p . Al considerar la solución de (1.1) que pasa por cada

¹Ver [11] (Teorema 1.1)

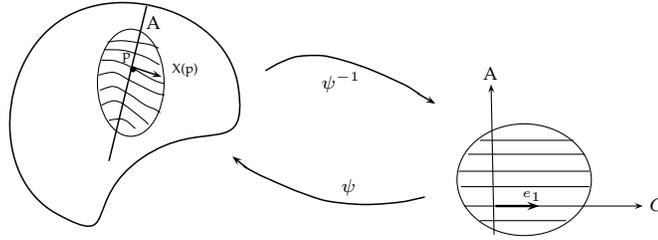
punto $q \in A \cap V$ obtenemos una aplicación $\psi(t, q) = (\psi^1(t, q), \dots, \psi^n(t, q))$ de una vecindad de $(0, p) \in \mathbb{C} \times A$ en V tal que

$$\frac{d\psi}{dt}(t, q) = X(\psi(t, q)), \quad \psi(0, q) = q \tag{1.2}$$

El *Teorema de dependencia analítica de soluciones con respecto a condiciones iniciales*² garantiza que ψ es holomorfa, así que

$$D\psi(0, p) = \begin{bmatrix} \psi_t^1 & \psi_q^1 \\ \vdots & \vdots \\ \psi_t^n & \psi_q^n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} X(p) & 0 \\ \hline & Id_A \end{array} \right] \tag{1.3}$$

Como A es transversal a $X(p)$ en p , $D\psi(0, p)$ es invertible y por el Teorema de la Función Inversa ψ es un biholomorfismo entre un abierto de $\mathbb{C} \times A$ y un abierto de V . Tomando $\varphi := \psi^{-1}$ obtenemos una transformación entre una vecindad de V y una vecindad de $\mathbb{C} \times A$ que lleva soluciones de (1.1) en curvas de la forma $\mathbb{C} \times (c_2, \dots, c_n)$.



Repitiendo el argumento construimos una cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de V y una familia de biholomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$. Por construcción los cambios de coordenadas $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ conservan la descomposición de \mathbb{C}^n en curvas de la forma $\mathbb{C} \times (c_2, \dots, c_n)$, i.e., las transformaciones $\varphi_{ij} = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ satisfacen

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial w_1} = \dots = \frac{\partial \varphi^n}{\partial w_1} = 0.$$

En $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ introducimos una nueva topología considerando a \mathbb{C}^{n-1} con topología la discreta y a \mathbb{C} con la usual. De esta manera las componentes conexas de $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ son rectas complejas. Ahora definimos una nueva

²Ver [11] (Teorema 1.1)

topología en V , estableciendo que un subconjunto $W \subseteq V$ es abierto si y sólo si $\varphi_i(W \cap U_i)$ es abierto en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ con la topología anterior. Sean \mathcal{L}_α las componentes conexas de V con la nueva topología. Por construcción, $\mathcal{F} = \{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es la única foliación no singular por curvas de V que tiene a las parejas (U_i, φ_i) como cartas distinguidas.

Lema 1.1.1. *Las soluciones de la ecuación diferencial (1.1) asociada a un campo vectorial nunca nulo X definido en un abierto V de \mathbb{C}^n determinan una foliación $\mathcal{F}(X)$ no singular por curvas de V . De hecho, si Y es otro campo vectorial que no se anula, entonces las foliaciones $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{F}(Y)$ coinciden si y sólo si existe una función holomorfa $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ y nunca nula tal que $Y = f \cdot X$.*

Demostración. Sólo falta ver que la foliación depende del campo de direcciones asociado más que de el campo vectorial mismo. Sean $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$. Supongamos que $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$. Como para cada $p \in V$ los vectores $X(p)$ y $Y(p)$ son tangentes en p a la hoja de la foliación que pasa por p , $X(p)$ y $Y(p)$ son colineales y entonces existe una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $Y = f \cdot X$. Como $X(p) \neq 0$, alguna de sus componentes $X_i(p)$ es distinta de cero, por lo cual en una vecindad de p , $f = Y_i/X_i$ es una función holomorfa que no se anula.

Ahora supongamos que $Y = f \cdot X$ con $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa nunca nula. Consideremos las cartas distinguidas (U_i, φ_i) que determinan a la foliación $\mathcal{F}(X)$ y recordemos que cada φ_i se construyó como ψ^{-1} con ψ solución de (1.2). Así, para cada $p \in V$, $D\varphi_i(p) = [D\psi(\psi^{-1}(p))]^{-1}$ y por (1.3), $D\psi(\psi^{-1}(p))e_1 = X(p)$ y $D\psi(\psi^{-1}(p))f(p)e_1 = f(p)X(p)$. Como φ_i es un biholomorfismo, X induce un campo vectorial $(\varphi_i)_*$ en $\varphi_i(U_i)$ dado por

$$D\varphi_i(X)(p) = [D\psi(\psi^{-1}(p))]^{-1} D\psi(\psi^{-1}(p))e_1 = e_1.$$

Haciendo lo mismo para el campo $Y = f \cdot X$ obtenemos

$$D\varphi_i(Y)(p) = f(p)e_1 = (f \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(p)), 0, \dots, 0).$$

Para cada i consideramos $\alpha_i : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ la solución de la ecuación

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, v) = (f \circ \varphi_i^{-1}, 0, \dots, 0), \quad \alpha(0, v) = (0, v)$$

y de ser necesario refinamos la cubierta de V para que α_i sea un biholomorfismo sobre $\varphi_i(U_i)$. Para mostrar que el biholomorfismo $\varphi_i^{-1} \circ \alpha_i$ transforma el campo $D\varphi_i(X)(p) = e_1$ en $D\varphi_i(Y)(p)$ sólo debemos calcular la primera columna de la matriz $D(\varphi_i^{-1} \circ \alpha_i)(s, v)$, por lo que denotaremos con $*$ a los elementos de la matriz que no sean de nuestro interés.

$$\begin{aligned} D(\varphi_i^{-1} \circ \alpha_i)(s, v) &= D\varphi_i^{-1}(\alpha_i(s, v)) \cdot D\alpha_i(s, v) \\ &= [X(\varphi^{-1}(\alpha_i(s, v))) \quad *] \begin{bmatrix} f(\varphi^{-1}(\alpha_i(s, v))) \quad * \\ 0 \quad * \\ \vdots \quad * \\ 0 \quad * \end{bmatrix} \\ &= [X(\varphi^{-1}(\alpha_i(s, v)))f(\varphi^{-1}(\alpha_i(s, v))) \quad *]. \end{aligned}$$

De esta manera el campo $D\varphi_i(X)(p) = (1, 0, \dots, 0)$ definido en $\varphi_i(U_i)$ a partir de X , se transforma bajo el biholomorfismo $\varphi_i^{-1} \circ \alpha_i$ en el campo

$$D(\varphi_i^{-1} \circ \alpha_i)(1, 0, \dots, 0) = (f \cdot X, 0, \dots, 0) = D\varphi_i(Y)(p).$$

Por lo cual la foliación $\mathcal{F}(Y)$ queda definida en la misma cubierta $\{U_i\}$ por los biholomorfismos $\alpha_i^{-1} \circ \varphi_i$.

Como $\alpha_i : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ es un homeomorfismo con respecto a la topología que definimos, considerando a \mathbb{C}^{n-1} con la topología discreta y \mathbb{C} con la usual, se sigue que las topologías inducidas por φ_i y por $\alpha_i^{-1} \circ \varphi_i$ en V coinciden. Por lo tanto también sus componentes conexas y en consecuencia $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$. \square

En el lema anterior trabajamos con campos vectoriales nunca nulos, para poder estudiar los campos vectoriales con singularidades debemos extender el concepto de foliación.

Definición 1.1.2. *Una foliación con singularidades por curvas \mathcal{F} de un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es una foliación no singular de $U \setminus \Sigma$ donde Σ es un subconjunto analítico³ de U con codimensión mayor que 1.*

El siguiente resultado afirma que toda foliación con singularidades puede verse localmente como el retrato de las fases de un campo vectorial holomorfo que no se anula fuera del conjunto singular.

³Un subconjunto Σ de $U \subseteq \mathbb{C}^n$ se llama analítico si todo punto de Σ tiene una vecindad V y un conjunto de funciones holomorfas $\{f_1, \dots, f_k\}$ tales que el conjunto donde todas las f_i 's se anulan es precisamente $\Sigma \cap V$. Si $U \setminus \Sigma$ es conexo decimos que Σ tiene dimensión k y codimensión $n - k$.

Lema 1.1.2. Sean $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto, $\Sigma \subseteq U$ un conjunto analítico de codimensión mayor que 1 y \mathcal{F} una foliación no singular por curvas de $U \setminus \Sigma$. Entonces para todo $p \in U$ existe un campo vectorial holomorfo X definido en una vecindad U_p de p tal que X no se anula en $U_p \setminus \Sigma$ y es tangente a las hojas de \mathcal{F} . Además X es único módulo multiplicación por una función holomorfa que no se anula en una vecindad de p .

Demostración. Dada $p \in U \setminus \Sigma$ tomamos (U_p, φ) una carta distinguida de \mathcal{F} . Como φ es un biholomorfismo, el campo $(1, 0, \dots, 0)$ definido en $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ se transforma mediante φ^{-1} , en un campo X definido en U_p por

$$X(q) = D\varphi_{\varphi(q)}^{-1}(1, 0, \dots, 0) = (D\varphi)_q^{-1}(1, 0, \dots, 0).$$

Si $p \in \Sigma$, tomamos U_p una vecindad conexa de p y para cada $q \in U_p \setminus \Sigma$ consideramos $V = (V_1, \dots, V_n)$ un campo que determina a la foliación en una vecindad U_q de q . Como V nunca es nulo, podemos suponer que V_1 no es idénticamente cero. En U_q definimos $n - 1$ funciones meromorfas dadas por

$$W_2 = \frac{V_2}{V_1}, \dots, W_n = \frac{V_n}{V_1},$$

obteniendo en cada punto $z \in U_q \setminus \Sigma$ un vector $W = (1, W_2, \dots, W_n)$ tangente a la hoja de \mathcal{F} que pasa por z .

Repetiendo el argumento para cada $q \in U_p \setminus \Sigma$ y por la unicidad del campo tangente (vimos que es único módulo multiplicar por una función holomorfa nunca nula, pero notemos que la primera coordenada está fija) obtenemos un campo vectorial meromorfo $(1, W_2, \dots, W_n)$ en $U_p \setminus \Sigma$. Como $U_p \setminus \Sigma$ tiene codimensión mayor que 1, el *Teorema de extensión de Levi*⁴ nos asegura que las funciones W_2, \dots, W_n se extienden a funciones meromorfas en U_p . Eligiendo U_p suficientemente pequeño, podemos escribir cada una de estas funciones como $W_i = f_i/g_i$ con f_i, g_i funciones holomorfas y primas relativas.⁵

Sea $g := m.c.m.\{g_2, \dots, g_n\}$ y definimos $X := (g, gW_2, \dots, gW_n)$. Entonces X es un campo vectorial holomorfo en U_p , tangente a las hojas de \mathcal{F} en

⁴*Teorema de extensión de Levi:* Si M es una subvariedad de un abierto $D \subseteq \mathbb{C}^n$ de codimensión mayor que 1 y f es una función meromorfa en $D \setminus M$, entonces existe una única función meromorfa \tilde{f} en D tal que $\tilde{f}|_{D \setminus M} = f$ (ver [9], pág. 168).

⁵Es sencillo ver que el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas en p es un dominio de factorización única (ver [7], pág. 10).

$U_p \setminus \Sigma$ y que no se anula en $U_p \setminus \Sigma$.

La unicidad se obtiene como sigue: si V es otro campo vectorial holomorfo en U_p tangente a las hojas de \mathcal{F} y nunca nulo en $U_p \setminus \Sigma$, por el Lema 1.1.1 existe una función holomorfa f que no se anula en $U_p \setminus \Sigma$ y tal que $V = f \cdot X$. Como $U_p \cap \Sigma$ tiene codimensión mayor que 1, el *Teorema de extensión de Hartogs*⁶ nos permite extender f a una función holomorfa en U_p . Además dicha extensión nunca se anula, pues sólo podría anularse en $U_p \cap \Sigma$ que tiene codimensión mayor que 1 y por lo tanto no puede ser el conjunto de ceros de una función holomorfa no nula. \square

Es importante notar que los conceptos desarrollados hasta este momento son de carácter local, pues estuvimos trabajando en abiertos de \mathbb{C}^n . Por fortuna, dichos conceptos se pueden extender fácilmente al caso de variedades complejas⁷ ya que éstas se ven localmente como abiertos de \mathbb{C}^n . Sea M una variedad holomorfa de dimensión n y TM su haz tangente (con proyección $\pi : TM \rightarrow M$). Un *campo vectorial holomorfo* en M es una transformación holomorfa $X : M \rightarrow TM$ tal que el mapeo $\pi \circ X : M \rightarrow M$ es la identidad. En palabras, X le asigna a cada punto $p \in M$ un vector de su espacio tangente T_pM de forma holomorfa. Si en vez de asignarle a cada punto un elemento de su tangente le asignamos un elemento de su cotangente T_pM^* obtenemos objetos duales a los campos vectoriales, conocidos como 1–formas holomorfas

$$\omega : M \rightarrow TM^*, \quad w_p : T_pM \rightarrow \mathbb{C}.$$

Los campos vectoriales y las 1–formas comparten algunas características, por lo que suelen usarse 1–formas para estudiar algunas propiedades relativas a los campos vectoriales.

Por ejemplo, si tomamos una 1–forma holomorfa ω en un abierto U de \mathbb{C}^2 es fácil ver que ω puede expresarse como $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Consideremos la ecuación $\omega = 0$ y supongamos que el punto $p = (x, y)$ no es

⁶*Teorema de extensión de Hartogs*: Si M es una subvariedad de un abierto $D \subseteq \mathbb{C}^n$ de codimensión mayor que 1 y f es una función holomorfa en $D \setminus M$, entonces existe una única función holomorfa \tilde{f} en D tal que $\tilde{f}|_{D \setminus M} = f$. (Ver [8], pág. 48)

⁷Al lector no familiarizado con los conceptos de variedades y haces vectoriales se le recomienda leer el apéndice A.

un punto singular de ω ($\omega_p \neq 0$). Sea $X = (X_1, X_2) \in T_pU \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}\omega_p(X) &= f(x, y)dx(X_1, X_2) + g(x, y)dy(X_1, X_2) \\ &= f(x, y)X_1 + g(x, y)X_2.\end{aligned}$$

Entonces $\omega_p(X) = 0$ si y sólo si $X = (k(x, y)g(x, y), -k(x, y)f(x, y))$ para alguna función $k : U \rightarrow \mathbb{C}$ que no se anula. Como k no se anula, X define la misma foliación de U (con singularidades en los puntos $p \in U$ tales que $\omega_p = 0$) que el campo $V = (g(x, y), -f(x, y))$.

Por lo tanto si $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$, la ecuación $\omega = 0$ define la misma foliación (con singularidades) que el campo $(g(x, y), -f(x, y))$.

Además del concepto de campos vectoriales, también podemos extender de manera natural la noción de foliación a variedades holomorfas.

Definición 1.1.3. Una *foliación holomorfa no singular por curvas* \mathcal{F} de una variedad compleja conexa M de dimensión n es una descomposición de M en subconjuntos conexos disjuntos $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ llamados **hojas**, donde Δ un conjunto de índices, tal que todo punto $p \in M$ tiene una vecindad U_p y un biholomorfismo $\varphi : U_p \rightarrow W_p \subseteq \mathbb{C}^n$ que satisface que para toda hoja L_α , las componentes conexas de $U_p \cap L_\alpha$ quedan descritas en W_p por la ecuación

$$w_2 = c_2, \dots, w_{n-1} = c_{n-1}.$$

Una *foliación por curvas con singularidades* \mathcal{F} de M es una foliación no singular de $M \setminus N$ donde N es una subvariedad analítica de M de codimensión mayor que 1.

Nos interesa trabajar con foliaciones con singularidades y sobre todo con ciertas hojas de ellas, las cuales pueden extenderse analíticamente en los puntos singulares.

Definición 1.1.4. Sea \mathcal{F} una foliación con singularidades aisladas. Una *separatriz* S de \mathcal{F} es una hoja \mathcal{L} cuya cerradura $(\mathcal{L} \cup \Sigma)$ es una curva analítica, i.e., S está definida localmente por los ceros de una función analítica.

1.2. Holonomía

No es sencillo entender el comportamiento de las hojas de una foliación con singularidades, pero una herramienta útil para hacerlo es el mapeo de holonomía que construiremos a continuación. Trabajaremos con la definición geométrica que dimos de las foliaciones por curvas; sin embargo, por los resultados anteriores también es posible considerar foliaciones asociadas a campos vectoriales holomorfos, tal como veremos en el Ejemplo 1.2.1.

Primero recordemos el concepto de gérmenes de funciones. Dados X y Y espacios topológicos y $x \in X$, en el conjunto de funciones de X a Y definidas en una vecindad de x en X consideramos la siguiente relación: $f \sim g$ si y sólo si existe una vecindad de x en X en la cual f y g coinciden. Ésta resulta ser una relación de equivalencia y a la clase de equivalencia $[f]$ de una función f se les llama *gérmen* de f en x . Si $X = Y$ el conjunto de gérmenes de homeomorfismos locales que fijan a x es un grupo con la composición $[f] \circ [g] = [f \circ g]$, donde el dominio de $f \circ g$ es la intersección de los dominios de f y g^{-1} . Para aligerar la notación denotaremos nuevamente con f al gérmen de una función f .

Ahora consideremos \mathcal{F} una foliación (posiblemente singular) por curvas de $U \subseteq \mathbb{C}^n$ y \mathcal{L} una hoja de \mathcal{F} . Dados $p, q \in \mathcal{L}$ puntos no singulares de \mathcal{F} y un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$ que los une y tal que γ no contiene puntos singulares de \mathcal{F} , consideramos pequeñas transversales Γ_p y Γ_q a \mathcal{L} en p y q respectivamente. Vamos a definir un mapeo entre estas transversales. Para ello, observemos que cada punto de \mathcal{L} tiene una vecindad en la cual la foliación es trivial, i.e., existe un biholomorfismo local que lleva hojas de la foliación en curvas constantes en las últimas $n - 1$ coordenadas. Como γ es compacto, existe un número finito de puntos $p_j \in \mathcal{L}$ tales que los conjuntos $V_j = U_{p_j} \cap \mathcal{L}$ lo cubren, donde cada U_{p_j} es una vecindad de p_j en U en la cual la foliación es trivial. Ordenamos estos conjuntos para que $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset$ y consideramos una transversal suficientemente pequeña Γ_{p_j} a \mathcal{L} por p_j . Para cualquier punto $q_j \in V_j$ y una transversal suficientemente Γ_{q_j} a \mathcal{L} , definimos el mapeo Δ_{p_j, q_j} que a cada punto $z \in \Gamma_{p_j}$ le asocia el punto $\Delta_{p_j, q_j}(z) \in \Gamma_{q_j}$ de forma tal que las últimas $n - 1$ coordenadas de $\varphi_j(z)$ y $\varphi_j(\Delta_{p_j, q_j}(z))$ coincidan, donde φ_j es un biholomorfismo que trivializa a la foliación en U_{p_j} (ver Figura 1.2).

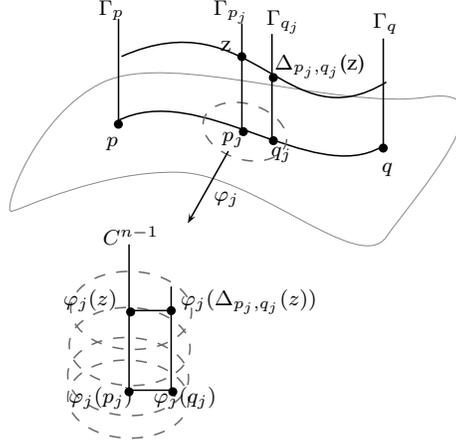


Figura 1.2: Mapeo de holonomía

Claramente si $r_j \in V_j$ es otro punto,

$$\Delta_{p_j, q_j} = \Delta_{r_j, q_j} \circ \Delta_{p_j, r_j}. \quad (1.4)$$

Ahora definamos $\Delta_\gamma = \Delta_{p_k, q} \circ \dots \circ \Delta_{p_1, p_2} \circ \Delta_{p, p_1}$. Por (1.4) Δ_γ no depende de los puntos intermedios. De hecho mostraremos que sólo depende de la clase de homotopía de γ .

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$ curvas homotópicas que empiezan p y terminan en q . Esto significa que existe $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$ continua tal que

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, 1] \quad \psi(s, 0) &= \gamma_0(s), \quad \psi(s, 1) = \gamma_1(s) \\ \forall t \in [0, 1] \quad \psi(0, t) &= p, \quad \psi(1, t) = q. \end{aligned}$$

Para cada $t \in [0, 1]$ fija consideramos $\gamma_t(s) = \psi(s, t)$, obteniendo una familia de curvas uniparamétricas de p a q .

Proposición 1.2.1. *Sea γ_t una familia de curvas uniparamétricas que empiezan en x y terminan en y , i.e., $\gamma_t(0) = x$ y $\gamma_t(1) = y$. Si definimos Δ_{γ_t} para toda $t \in [0, 1]$ como antes, entonces $\Delta_{\gamma_0} = \Delta_{\gamma_1}$.*

Demostración. De hecho probaremos que Δ_{γ_t} no depende de t mostrando que para cada $t \in [0, 1]$, existe una vecindad $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ en la cual $\Delta_{\gamma_t} = \Delta_{\gamma_u}$ para toda $u \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$.

Sea $t \in [0, 1]$ fija, usando la construcción anterior sean $p_1, \dots, p_k \in \gamma_t$ los puntos con los que nos auxiliamos para definir Δ_{γ_t} . Tomemos $r_j = \gamma_t^{-1}(\{q_j\}) \in [0, 1]$, $r_0 = \gamma_t^{-1}(x)$, $r_{k+1} = \gamma_t^{-1}(y)$ y reordenamos si es necesario para que $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k < r_{k+1} = 1$ y $\gamma_t([r_j, r_{j+1}]) \subseteq V_j$.

Como $\gamma_t[r_j, r_{j+1}]$ es compacto y $V_j^c = \mathcal{L} \setminus V_j$ es cerrado,

$$d_j = \text{dist}(\gamma_t[r_j, r_{j+1}], V_j^c) > 0.$$

Sea $\varepsilon = \min\{d_0, \dots, d_k\}$. Como ψ es continua y $[0, 1]$ es compacto, ψ es uniformemente continua, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|u - t| < \delta$ entonces $|\gamma_t(s) - \gamma_u(s)| < \varepsilon$ para toda $s \in [0, 1]$, i.e., $\bigcup V_j$ cubre a γ_u .

Sean $q_1, \dots, q_k \in \gamma_u$ tales que $q_j \in V_j$, entonces por (1.4)

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_u} &= \Delta_{q_k, q} \circ \dots \circ \Delta_{q_1, q_2} \circ \Delta_{p, q_1} \\ &= \Delta_{p_k, p} \circ \Delta_{q_k, p_k} \circ \dots \circ \Delta_{p_1, q_2} \circ \Delta_{q_1, p_1} \circ \Delta_{p, q_1} \\ &= \Delta_{\gamma_t}. \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.1. Dada una foliación \mathcal{F} , \mathcal{L} una hoja de ella, $\gamma \subseteq \mathcal{L}$ un camino de p a q y Γ_p, Γ_q transversales a \mathcal{L} en p y en q respectivamente, al mapeo Δ_γ definido arriba lo llamaremos el mapeo de **holonomía** asociado a γ con respecto a \mathcal{F} .

Nótese que no excluimos el caso donde $p = q$. Dado un punto $p \in \mathcal{L}$ y $\gamma \subseteq \mathcal{L}$ un camino que empiece y termine en p , nos fijamos en todos los lazos homotópicos a él, i.e., en $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{L}, p)$. Entonces la holonomía de γ con respecto a la foliación \mathcal{F} sólo depende de $[\gamma]$.

Observemos que en la construcción del mapeo Δ_γ tuvimos que ser cuidadosos con el “tamaño” de las transversales, pues el mapeo $\Delta_{p, q}$ está bien definido sólo para puntos suficientemente cercanos a p en Γ_p , por esta razón trabajaremos con gérmenes de funciones. Así, el *grupo de holonomía* de la foliación \mathcal{F} sobre la hoja \mathcal{L} es la imagen del grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{L}, p)$ en el grupo de gérmenes de transformaciones holomorfas de una transversal a \mathcal{L} en si misma que fijan a p , donde la composición está definida por $\Delta_{\gamma * \delta} := \Delta_\delta \circ \Delta_\gamma$.

Si el grupo fundamental de \mathcal{L} es trivial, su grupo de holonomía también lo será. Lo interesante viene cuando tenemos foliaciones singulares y tomamos \mathcal{L} tal que $\mathcal{L} \setminus \Sigma$ sea una hoja de \mathcal{F} , donde Σ es el conjunto singular de \mathcal{F} . Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.2.1. En \mathbb{C}^2 consideremos la ecuación diferencial dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Veamos cómo se comporta la holonomía de la foliación \mathcal{F} inducida en \mathbb{C}^2 por la ecuación (1.5).

Primero notemos que el único punto singular es $(0, 0)$ y que los ejes coordenados son separatrices de la foliación \mathcal{F} . En efecto, las curvas

$$(\mathbb{C} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\} \text{ y } (\{0\} \times \mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}$$

parametrizadas respectivamente como $\varphi_1(t) = (e^{\lambda_1 t} c_1, 0)$ y $\varphi_2(t) = (0, e^{\lambda_2 t} c_2)$ son solución de (1.5), por lo que son hojas de la foliación \mathcal{F} .

Como el origen es el único punto singular, cualquier lazo contenido en el eje X sin el origen ($\rho \subseteq (\mathbb{C} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}$) es homotópico a

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \times \{0\}, \quad \gamma_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Observemos que para toda $n \in \mathbb{Z}$, el lazo γ_n pasa por el punto $(1, 0)$, por lo que calcularemos el mapeo de holonomía de \mathcal{F} asociado a γ_n en la transversal $\Gamma := \{1\} \times \mathbb{C}$.

Es fácil ver que las soluciones de (1.5) son de la forma

$$\varphi(t, (p_1, p_2)) = \left(e^{\lambda_1 t} p_1, e^{\lambda_2 t} p_2 \right).$$

Dado un punto $(1, y) \in \Gamma$, recorremos la solución que pasa por él hasta volver a la transversal Γ , lo cual sucede tras un tiempo $t = 2\pi in/\lambda_1$,

$$\varphi\left(\frac{2\pi in}{\lambda_1}, (1, y)\right) = \left(1, e^{2\pi in \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y\right).$$

Por lo tanto, la holonomía de γ_n en Γ con respecto a la foliación \mathcal{F} es de la forma

$$y \mapsto e^{2\pi in \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y.$$

Nótese que la transformación de holonomía está definida con respecto a un punto base $p \in \mathcal{L}$ y una transversal Γ_p que pasa por él. Si $\tilde{\Gamma}$ es una transversal a \mathcal{L} en otro punto $\tilde{p} \in \mathcal{F}$ entonces sus transformaciones de holonomía son conjugadas, i.e., si $\alpha \subseteq \mathcal{L}$ es un camino simple de p a \tilde{p} y $\gamma \in \pi_1(\mathcal{L}, p)$, entonces la holonomía de cualquier lazo $\tilde{\gamma} \subseteq \mathcal{L}$ homotópico a γ está dada por

$$\Delta_{\tilde{\gamma}} = \Delta_{\alpha^{-1} * \gamma * \alpha} = \Delta_{\alpha} \circ \Delta_{\gamma} \circ \Delta_{\alpha^{-1}}.$$

El grupo de holonomía nos proporciona mucha información sobre el comportamiento de las hojas de la foliación, de hecho es un invariante en el siguiente sentido.

Definición 1.2.2. *Decimos que dos foliaciones holomorfas por curvas \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ definidas en abiertos $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ respectivamente, son **analíticamente equivalentes** si existe un biholomorfismo $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ que mande hojas de \mathcal{F} en hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$.*

Proposición 1.2.2. *Si \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ son dos foliaciones analíticamente equivalentes y \mathcal{L} es una hoja de \mathcal{F} que se transforma en una hoja $\tilde{\mathcal{L}}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$, entonces sus grupos de holonomía G y \tilde{G} son analíticamente conjugados. i.e., para cualesquiera $p \in \mathcal{L}$ y $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{L}}$, existe un biholomorfismo φ que conjuga a cada $h \in G$ con algún $\tilde{h} \in \tilde{G}$.*

Demostración. Sea ϕ el biholomorfismo que manda hojas de \mathcal{F} en hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$. Si $p \in \mathcal{L}$ y Γ_p es una transversal a \mathcal{L} en el punto p , entonces $\varphi := \phi|_{\Gamma_p} : \Gamma_p \rightarrow \phi(\Gamma_p)$ es el biholomorfismo que buscamos

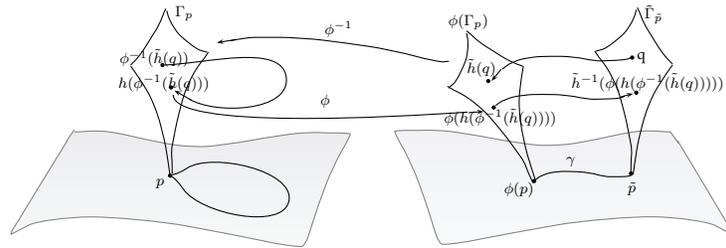


Figura 1.3: Holonomía de foliaciones analíticamente equivalentes.

□

Capítulo 2

Explosiones e índice de Camacho-Sad

Como dijimos antes, el comportamiento de los campos vectoriales suele complicarse cerca de los puntos singulares. Una técnica muy usada para analizarlo es el proceso de explosión, que consiste en reemplazar un punto singular p de una 2-variedad analítica (real o compleja) por una línea proyectiva $\mathbb{R}P^1$ o $\mathbb{C}P^1$ considerada como el conjunto de todas las direcciones en p . En este capítulo describiremos el proceso de explosión de puntos singulares de un campo vectorial holomorfo. También introduciremos el índice de Camacho-Sad, el cual es una forma de medir cómo está encajada una curva compacta suave S en una variedad compleja M de dimensión 2 cuando tenemos una foliación de M que tiene a S como curva invariante. Si bien ambos conceptos (explosión de singularidades e índice de Camacho-Sad) son interesantes por sí mismos, los introducimos aquí porque serán una herramienta fundamental para el capítulo 4.

2.1. Explosión de singularidades

En esta sección describiremos el proceso de explosión sólo para campos vectoriales holomorfos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ (o campos vectoriales diferenciables en $(\mathbb{R}^2, 0)$). Lo haremos suponiendo que la singularidad es el origen, pues cuando el punto singular sea otro bastará trasladarlo.

Dada U una vecindad abierta de 0 en \mathbb{R}^2 o \mathbb{C}^2 , la idea es construir una 2-variedad \mathcal{U} y una transformación analítica $\pi : \mathcal{U} \rightarrow U$ tal que la preimagen del origen sea una curva \mathbb{D} difeomorfa a la línea proyectiva y tal que $\pi|_{\mathbb{D}} : \mathcal{U} \setminus \mathbb{D} \rightarrow U \setminus \{0\}$ sea una biyección.

Con el fin de visualizar a \mathcal{U} haremos la explosión para el caso real y posteriormente analizaremos el caso complejo.

A cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le asociamos la recta que lo une con el origen $\{(tx, ty) | t \in \mathbb{R}\}$, obteniendo el mapeo

$$T : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^1 \\ (x, y) \mapsto (x : y),$$

cuya gráfica $Gr(T)$ está contenida en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$. Además, para cualquier punto $(x : y) \in \mathbb{R}P^1$, $T^{-1}((x : y))$ es homeomorfa a \mathbb{R} , de donde $Gr(T) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}P^1$.

Nótese que $Gr(T)$ no es cerrada en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ pues le falta el $0 \in \mathbb{R}^2$ en la primera coordenada y su imagen bajo T en la segunda, así que para construir su cerradura debemos añadir la curva $\mathbb{D} := \{0\} \times \mathbb{R}P^1$, a la cual llamaremos el *divisor excepcional* y a la cerradura $\overline{Gr(T)} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^1) \cup \mathbb{D}$ la denotaremos por \mathcal{U} .

Sea $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\pi((x, y), (x : y)) := (x, y)$. Entonces $\pi^{-1}(0) = \mathbb{D}$ y $\pi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo. Para ver que efectivamente \mathcal{U} es una variedad de dimensión 2 daremos un atlas. A cada recta que pasa por el origen $(x : y)$ le asociamos su pendiente $u = y/x$ si $x \neq 0$ o su inversa $v = x/y$ si $y \neq 0$. Consideramos las siguientes cartas para \mathcal{U}

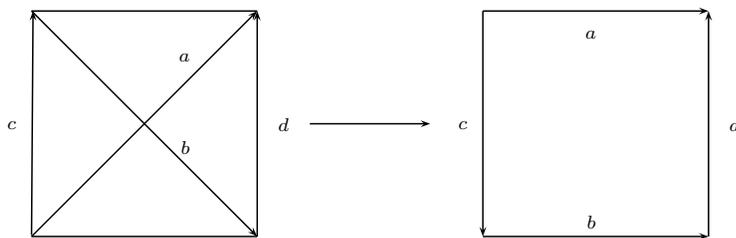
$$\begin{aligned} \{((x, y), (x : y)) | x \neq 0\}, & \quad ((x, y), (x : y)) \mapsto (x, u) \\ \{((x, y), (x : y)) | y \neq 0\}, & \quad ((x, y), (x : y)) \mapsto (y, v), \end{aligned}$$

donde los cambios de coordenadas están dados por $y = xu$, $v = u^{-1}$ o bien $x = yv$, $u = v^{-1}$. Como todas las rectas $(x : y)$ pasan por el origen, a \mathbb{D} se le asocian todas las pendientes bajo estas cartas, por ello \mathbb{D} se corresponde con la unión de los ejes u y v . Por lo tanto \mathcal{U} es variedad diferenciable.

Para entender cómo es \mathcal{U} concentrémonos en una vecindad del origen.

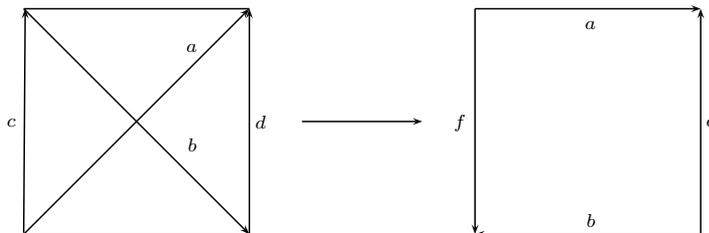
Si $x \neq 0$ tomamos $((x, y), (x : y)) \mapsto (x, u)$ con $u = y/x$.

$$\begin{aligned} a &= ((x, x), (x : x)) \mapsto (x, 1) \\ b &= ((x, -x), (x : -x)) \mapsto (x, -1) \\ c &= ((-1, y), (-1 : y)) \mapsto (-1, -y) \\ d &= ((1, y), (1 : y)) \mapsto (1, y). \end{aligned}$$

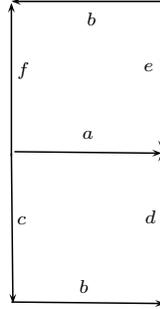


Si $y \neq 0$ tomamos $((x, y), (x : y)) \mapsto (y, v)$ con $v = x/y$.

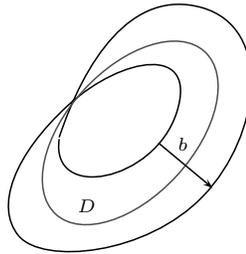
$$\begin{aligned} a &= ((y, y), (y : y)) \mapsto (y, 1) \\ b &= ((y, -y), (y : -y)) \mapsto (-y, -1) \\ e &= ((x, 1), (x : 1)) \mapsto (1, x) \\ f &= ((x, -1), (x : -1)) \mapsto (-1, -x). \end{aligned}$$



Identificamos los puntos de a en (x, u) con los correspondientes en (y, v) .



Para identificar los puntos de a debemos torcer una vez este rectángulo, obteniendo una banda de Möbius, cuya alma corresponde con el divisor excepcional \mathbb{D} .



La explosión compleja se realiza de la misma manera y obtenemos una variedad $\mathcal{U} = (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1) \cup \mathbb{D}$ donde $\mathbb{D} = \{0\} \times \mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{S}^2$ es el divisor excepcional. Por analogía con el caso real a \mathcal{U} la llamaremos la banda de Möbius compleja.

A continuación presentaremos un par de ejemplos que funcionan tanto en el caso real como el complejo, pero por razones de dimensión sólo podremos graficarlos en el primero.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos un campo con una singularidad del tipo silla

$$\dot{x} = 2x$$

$$\dot{y} = -y$$

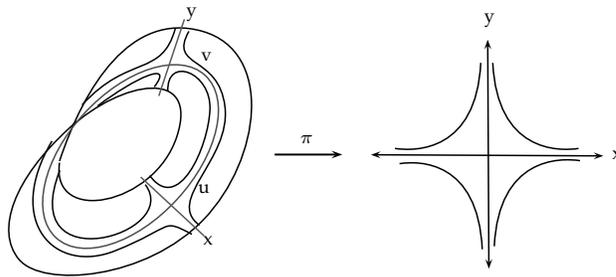
Explotando en coordenadas (x, u) con $u = y/x$ si $x \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x \\ \dot{u} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = \frac{-x^2u - 2x^2u}{x^2} = -3u.\end{aligned}$$

Mientras que en coordenadas (y, v) con $v = x/y$ para $y \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -y \\ \dot{v} &= \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y^2} = \frac{2y^2v + y^2v}{y^2} = 3v.\end{aligned}$$

Observemos que en ambos casos los campos obtenidos tienen nuevamente punto singular de tipo silla.



Ejemplo 2.1.2. Ahora explotemos un campo cuyo punto singular es de tipo nodo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= y,\end{aligned}$$

En coordenadas (x, u) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x \\ \dot{u} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = \frac{x^2u - 2x^2u}{x^2} = -u.\end{aligned}$$

Y en coordenadas (y, v)

$$\begin{aligned}\dot{y} &= y \\ \dot{v} &= \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y^2} = \frac{2y^2v - y^2v}{y^2} = v.\end{aligned}$$

Ambos campos tienen al origen como punto singular. Por el ejemplo anterior al explotar el primer campo obtenemos de nuevo puntos silla. Veamos qué sucede con el segundo. Usando coordenadas (y, r) con $r = \frac{v}{y}$ si $y \neq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2y \\ \dot{r} &= \frac{y\dot{v} - v\dot{y}}{y^2} = \frac{2y^2r - 2y^2r}{y^2} = 0. \end{aligned}$$

Fuera del origen y del divisor excepcional este campo constituye una foliación no singular por curvas, y por el Lema 1.1.1 determina la misma foliación que el campo sin puntos singulares dado por

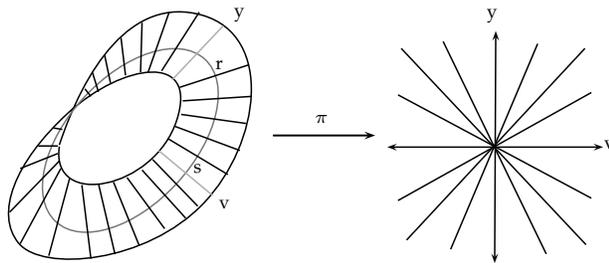
$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2 \\ \dot{r} &= 0. \end{aligned}$$

En coordenadas (s, v) con $s = \frac{y}{v}$ si $v \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 2v \\ \dot{s} &= \frac{v\dot{y} - y\dot{v}}{v^2} = \frac{2v^2s - 2v^2s}{v^2} = 0. \end{aligned}$$

El cual determina la misma foliación que

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 2 \\ \dot{s} &= 0. \end{aligned}$$



Los ejemplos anteriores nos ilustran los casos en que el proceso de explosión se estabiliza (sillas) o se detiene (nodos degenerados)¹.

¹Hay un único valor propio real de multiplicidad 2.

Ejemplo 2.1.3. Explotemos el siguiente campo hasta lograr que todas las singularidades resultantes tengan parte lineal de alguno de estos tipos. Las explosiones funcionan tanto en el caso real como en el complejo pero sólo haremos el retrato de las fases para el caso real.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 3x^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

El único punto singular es el origen. Para $x \neq 0$ usamos cartas (x, u) con $u = y/x$ y para $y \neq 0$ tomamos (y, v) con $v = x/y$, obteniendo:

$$V_1 \begin{cases} \dot{x} &= 2ux \\ \dot{u} &= 3x - 2u^2 \end{cases} \quad V_2 \begin{cases} \dot{y} &= 3v^2y^2 \\ \dot{v} &= 2 - 3vy \end{cases}$$

El campo V_2 no tiene singularidades, mientras que V_1 tiene al $(0, 0)$ como único punto singular. Nótese que $S_1 := \{x = 0\}$ es una curva invariante para V_1 que pasa por el punto singular, i.e., es una separatriz. Explotamos el campo V_1 en una vecindad del origen tomando coordenadas (x, r) con $r = u/x$ si $x \neq 0$ y (u, w) con $w = x/u$ si $u \neq 0$.

$$V_3 \begin{cases} \dot{x} &= 2x^2r \\ \dot{r} &= 3 - 4xr^2 \end{cases} \quad V_4 \begin{cases} \dot{u} &= 3uw - 2u^2 \\ \dot{w} &= 4uw - 3w^2 \end{cases}$$

Obsérvese V_3 es un campo no singular y V_4 sólo es singular en el origen. Además V_4 tiene como curvas invariantes a $\tilde{S}_1 = \{w = 0\}$ y $S_2 = \{u = 0\}$. La primera se corresponde con S_1 pues $w = x/u$. Explotamos el punto singular de V_4 considerando (u, s) con $s = w/u$ para $u \neq 0$ y (w, t) con $t = u/w$ para $w \neq 0$.

$$V_5 \begin{cases} \dot{u} &= -2u^2 + 3u^2s \\ \dot{s} &= 6us - 6us^2 \end{cases} \quad V_6 \begin{cases} \dot{w} &= -3w^2 + 4tw^2 \\ \dot{t} &= 6tw - 6t^2w \end{cases}$$

Como sólo nos interesa la foliación que inducen estos campos, por el Lema 1.1.1 podemos multiplicar por funciones que no se anulan fuera del origen. Multiplicando V_5 por u^{-1} y V_6 por w^{-1} obtenemos los siguientes campos que definen la misma foliación.

$$V_7 \begin{cases} \dot{u} &= -2u + 3us \\ \dot{s} &= 6s - 6s^2 \end{cases} \quad V_8 \begin{cases} \dot{w} &= -3w + 4tw \\ \dot{t} &= 6t - 6t^2 \end{cases}$$

Ambos campos tienen a $(0, 0)$ y $(0, 1)$ como únicas singularidades, de hecho el punto $(0, 1)$ en las coordenadas (u, s) corresponde con $(0, 1)$ de (w, t) pues $t = s^{-1}$.

Por otro lado la parte lineal de V_7 y V_8 en los puntos singulares está dada por

$$\begin{aligned} DV_7(0,0) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, & DV_7(0,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \\ DV_8(0,0) &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, & DV_8(0,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que todos los valores propios de estas matrices tienen parte real distinta de cero, luego por el *Teorema de Grobman-Hartman*² los campos V_7 y V_8 son topológicamente equivalentes a su parte lineal en los puntos singulares. Así, podemos concluir que las singularidades de los campos V_7 y V_8 son de tipo silla y por lo tanto son irreducibles.

Cabe mencionar que las foliaciones definidas por estos campos tienen como separatrices a $\mathbb{D}_1 := \{s = 0\}$, $\mathbb{D}_2 := \{t = 0\}$ y a la curva \mathbb{D}_3 definida por $\{u = 0\}$ en coordenadas (u, s) y por $\{w = 0\}$ vista en coordenadas (w, t) . Además \mathbb{D}_1 y \mathbb{D}_2 se corresponden con \tilde{S}_1 y S_2 respectivamente.

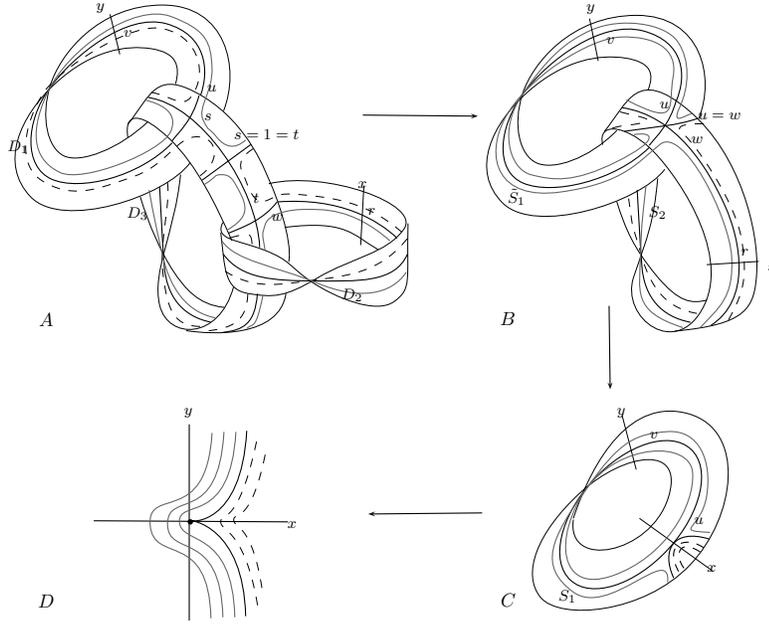
Para hacer el retrato de las fases de la ecuación (2.1) empezamos graficando las soluciones de los campos definidos sobre la última banda obtenida. Como vimos, hay tres puntos singulares y todos son de tipo silla, por lo que las soluciones tienen un comportamiento asintótico con respecto a $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$ y a la recta $s = 1 = t$ (ver Figura 2.1.A).

Nótese que esta recta se proyecta en la identidad de las cartas (u, w) . En efecto, recordemos que $s = w/u$ para $u \neq 0$, por lo que $u = w$ si $s = 1$. Así, las soluciones de V_4 son asintóticas a las curvas \tilde{S}_1, S_2 y $\{u = w\}$, las primeras corresponden con \mathbb{D}_1 y \mathbb{D}_2 respectivamente (ver Figura 2.1.B).

Proyectamos nuevamente observando que la curva $\{u = w\}$ se transforma en $x = u^2$, pues $w = x/u$ (ver Figura 2.1.C).

Por último notamos que $x = u^2$ se proyecta en $y^2 = x^3$. Así, la Figura 2.1.D representa a la foliación definida por la ecuación (2.1).

²Teorema de Grobman-Hartman: Sea p es un punto crítico de la ecuación $\dot{z} = V(z)$. Si los valores propios de $DV(p)$ tienen parte real distinta de cero, entonces la ecuación $\dot{z} = V(z)$ es localmente topológicamente equivalente a su parte lineal $\dot{z} = DV(p)z$ (ver [1] Capítulo 3, Sección 13, [13] pág. 60).



En el ejemplo anterior tuvimos que repetir varias veces el proceso de explosión, reemplazando en cada paso el punto singular por una línea proyectiva. Empezamos explotando una vecindad del $0 \in \mathbb{C}^2$ obteniendo una foliación $\mathcal{F}^{(1)}$ definida en una variedad $\mathcal{U}^{(1)}$ que localmente se ve como \mathbb{C}^2 y que posee como curva invariante a \mathbb{D}_1 . Como los campos a los que llegamos tenían singularidades explotamos nuevamente consiguiendo una foliación $\mathcal{F}^{(2)}$ de una variedad $\mathcal{U}^{(2)}$ que deja invariante a $\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2$ y repetimos el proceso hasta lograr que todas las singularidades fueran irreducibles. A la k -ésima explosión la denotaremos por $\pi^{(k)} : \mathcal{U}^{(k)} \rightarrow \mathcal{U}^{(k-1)}$ donde $\mathcal{U}^{(0)}$ es una vecindad U de $0 \in \mathbb{C}^2$, a las $\pi^{(k)}$'s las llamaremos explosiones intermedias. Denotaremos simplemente por $\pi : \mathcal{U}^{(n)} \rightarrow U$ a la proyección propia que resulta al componer todas estas proyecciones, donde $\mathcal{U}^{(n)}$ es la última variedad que se obtuvo de las explosiones intermedias. Cada explosión intermedia $\pi^{(k)}$ tiene asociada un divisor excepcional \mathbb{D}_k , así $\pi^{-1}(0) = \bigcup_k \mathbb{D}_k$ será el divisor excepcional de la explosión π . A las foliaciones inducidas en $\mathcal{U}^{(k)}$ por los campos obtenidos por la k -ésima explosión las denotaremos por $\mathcal{F}^{(k)}$.

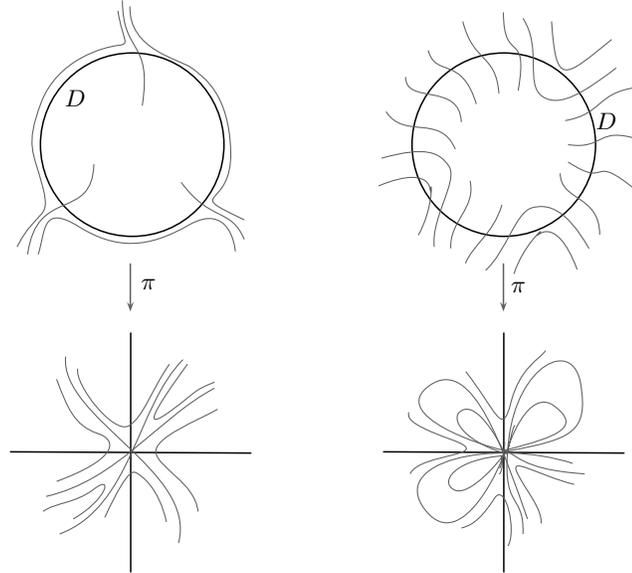


Figura 2.1: Casos no dicrítico y dicrítico.

2.1.1. Casos dicrítico y no dicrítico

Consideremos X un campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad en 0 y sea \mathcal{F} la foliación de la variedad \mathcal{U} obtenida por una explosión. En el Ejemplo 2.1.1 el divisor excepcional resultó ser una curva invariante de la foliación, sin embargo en el Ejemplo 2.1.2 al explotar un nodo degenerado, el divisor excepcional no es una hoja de la foliación. En general, tenemos dos posibilidades:

1. *Caso no dicrítico:* \mathbb{D} es invariante para \mathcal{F} . En este caso si denotamos por Σ al conjunto de singularidades de la foliación, entonces $\mathbb{D} \setminus \Sigma$ es una hoja de \mathcal{F} .
2. *Caso dicrítico:* \mathbb{D} no es invariante para \mathcal{F} . Aquí \mathcal{F} es transversal a \mathbb{D} excepto en un número finito de puntos, algunos de los cuales son singularidades de \mathcal{F} .

Para analizar a detalle ambos casos tomemos un campo vectorial holomorfo $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ singular en $(0, 0)$ y escribámoslo como suma de

polinomios homogéneos de grado $k \geq 1$, i.e.,

$$X(x, y) = (P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \cdots, Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \cdots)$$

donde (P_n, Q_n) no es idénticamente cero. Consideremos la ecuación diferencial asociada a X ,

$$\dot{x} = P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \cdots$$

$$\dot{y} = Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \cdots$$

y exploremos en una vecindad del origen. En las coordenadas $(x, u = \frac{y}{x})$ para $x \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(x, ux) + P_{n+1}(x, ux) + \cdots \\ &= x^n [P_n(1, u) + xP_{n+1}(1, u) + \cdots] \\ \dot{u} &= \frac{x [Q_n(x, ux) + Q_{n+1}(x, ux) + \cdots] - xu [P_n(x, ux) + P_{n+1}(x, ux) + \cdots]}{x^2} \\ &= x^{n-1} [(Q_n - uP_n)(1, u) + x(Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u) + \cdots]. \end{aligned}$$

Caso no dicrítico. Si $(Q_n - uP_n)(1, u)$ no es idénticamente cero, multiplicamos por x^{-n+1} obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x [P_n(1, u) + xP_{n+1}(1, u) + \cdots] \\ \dot{u} &= (Q_n - uP_n)(1, u) + x(Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u) + \cdots \end{aligned}$$

Observemos que $x = 0$ es solución y que las raíces de $(Q_n - uP_n)(1, u)$ determinan los puntos singulares sobre el divisor.

Cuando el campo vectorial original cumple ciertas condiciones de genericidad, es fácil ver que por cada punto singular pasan exactamente dos separatrices (una de las cuales corresponde al divisor (ver Figura 2.1)).

Caso dicrítico. Si $(Q_n - uP_n)(1, u) \equiv 0$ multiplicamos por x^{-n} ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(1, u) + xP_{n+1}(1, u) + \cdots \\ \dot{u} &= (Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u) + \cdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

El divisor no es solución, pues en $x = 0$ tenemos

$$\dot{x} = P_n(1, u), \quad \dot{u} = (Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u).$$

Observemos que si $P_n(1, u)$ y $(Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u)$ no se anulan simultáneamente, entonces las soluciones de este campo son transversales al divisor cuando $P_n(1, u) \neq 0$ y son tangentes a él si $P_n(1, u) = 0$. Notemos también que las soluciones que son transversales al divisor se proyectan en curvas que se extienden analíticamente al origen, i.e., en separatrices de la foliación original (ver Figura 2.1).

A continuación veremos cómo debe ser un campo en $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuya explosión define una foliación transversal al divisor excepcional \mathbb{D} .

Lema 2.1.1. *Sea \mathcal{G} la foliación de la variedad \mathcal{U} obtenida por una explosión de $(\mathbb{C}^2, 0)$. Si todas las hojas de \mathcal{G} son transversales al divisor excepcional \mathbb{D} , entonces hay un campo vectorial X en $(\mathbb{C}, 0)$ singular en 0 con parte lineal la identidad cuya explosión es tangente a \mathcal{G} .*

Demostración. Sea X un campo vectorial en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tangente a las hojas de la foliación definida en $(\mathbb{C}^2, 0)$ por el biholomorfismo $\pi : \mathcal{U} \setminus \mathbb{D} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$. Escribamos a X como suma de polinomios homogéneos

$$X(x, y) = (P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \cdots, Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \cdots)$$

donde (P_n, Q_n) no es idénticamente cero. Usaremos las cuentas anteriores para mostrar que $n = 1$. Como \mathcal{G} es dicrítica, $(Q_n - uP_n)(1, u) \equiv 0$.

En las cartas (x, u) el divisor \mathbb{D} está dado por $\{x = 0\}$. Haciendo $x = 0$ en (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(1, u) \\ \dot{u} &= (Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u). \end{aligned}$$

Observemos que en las raíces de $P_n(1, u)$, \mathcal{G} es tangente a \mathbb{D} , pero por hipótesis \mathcal{G} es transversal a \mathbb{D} , de donde $P_n(1, u) \equiv c$ para alguna $c \neq 0$. Por otro lado $P_n(x, y) = P_n(x, xu) = x^n P_n(1, u)$, entonces $P(x, y) = cx^n$. Además como $Q_n(1, u) = uP_n(1, u)$, entonces $Q_n(x, y) = x^n Q_n(1, u) = cx^n u = cx^{n-1}(xu) = cx^{n-1}y$. Así,

$$P_n(x, y) = cx^n$$

$$Q_n(x, y) = cx^{n-1}y.$$

Si ahora explotamos en las cartas (y, v) con $v = x/y$ para $y \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\dot{y} &= y^n [Q_n(v, 1) + yQ_{n+1}(v, 1) + \cdots] \\ \dot{v} &= y^{n-1} [(P_n - vQ_n)(v, 1) + y(P_{n+1} - vQ_{n+1})(v, 1) + \cdots].\end{aligned}$$

Como $P_n(v, 1) = cv^n$ y $Q_n(v, 1) = cv^{n-1}$, $(P_n - vQ_n)(v, 1) \equiv 0$. Entonces podemos multiplicar por y^{-n} obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Q_n(v, 1) + yQ_{n+1}(v, 1) + \cdots \\ \dot{v} &= (P_{n+1} - vQ_{n+1})(v, 1) + \cdots.\end{aligned}$$

En estas cartas \mathbb{D} está dado por $\{y = 0\}$, haciendo $y = 0$ en la ecuación anterior resulta

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Q_n(v, 1) \\ \dot{v} &= (P_{n+1} - vQ_{n+1})(v, 1).\end{aligned}$$

Como $Q_n(v, 1)$ no puede tener raíces (pues serían puntos de tangencia de \mathcal{G} en \mathbb{D}), $Q_n(v, 1)$ es constante. Pero teníamos $Q_n(x, y) = cx^{n-1}y$ por lo que $Q_n(v, 1) = cv^{n-1}$. Por lo tanto $n - 1 = 0$, i.e., X tiene parte lineal, para calcularla supongamos $P_1(x, y) = a_1x + a_2y$ y $Q_1(x, y) = b_1x + b_2y$. Como

$$\begin{aligned}0 &= Q_n(1, u) - uP_n(1, u) \\ &= (b_1 + b_2u) + u(a_1 + a_2u) \\ &= b_1 + (b_2 - a_1)u + a_2u^2,\end{aligned}$$

entonces $b_1 = 0$, $a_1 = b_2$ y $a_2 = 0$.

Por lo tanto la parte lineal de X en 0 es de la forma (ax, ay) y si multiplicamos por a^{-1} obtenemos un campo V que define la misma foliación que X con parte lineal $DV(0)(x, y) = (x, y)$.

□

2.2. Índice de Camacho-Sad

En 1982 César Camacho y Paulo Sad definieron el índice de una separatriz compacta de una foliación holomorfa, el cual resultó ser un invariante topológico del encaje de una curva holomorfa suave y compacta en una variedad compleja de dimensión 2, se puede probar que coincide con el índice de autointersección, el cual es un invariante topológico³. De hecho probaron que su índice coincide con la clase de Chern del haz normal de la curva en la variedad⁴. En esta sección daremos la definición de dicho índice y veremos algunas propiedades que nos serán de gran utilidad para desarrollar el capítulo 4.

Sea $X = (P(x, y), -Q(x, y))$ un campo vectorial en $(\mathbb{C}^2, 0)$ con singularidad aislada en el origen y sea \mathcal{F} la foliación con singularidades inducida por X . Consideremos la 1-forma $\omega = Q(x, y)dx + P(x, y)dy$; en el Capítulo 1 vimos que $\omega = 0$ también define a \mathcal{F} . Sea $S = \{f = 0\}$ una separatriz suave de \mathcal{F} ; para simplificar los cálculos mostraremos primero que S puede verse localmente como uno de los ejes coordenados. En efecto, como S es una curva analítica $Df(0, 0) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\partial f / \partial y(0, 0) \neq 0$, por el Teorema de la Función Implícita existe una vecindad de 0 en la cual podemos ver a y como función holomorfa de x digamos $y = g(x)$. Entonces S localmente se escribe como $\{f(x, g(x)) = 0\}$. Consideremos la transformación $H : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dado por $H(x, y) = (x, y - g(x))$, H transforma la curva $S \cap (\mathbb{C}^2, 0)$ en el eje X ($\{y = 0\}$). Además

$$DH(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que H es un biholomorfismo.

Ahora consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{2.3}$$

cuyas soluciones definen la misma foliación que X .

³[11] 8F-8H.

⁴[3] Apéndice: Foliaciones singulares y clases de Chern, pág. 592.

En general si tenemos una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (2.4)$$

y conocemos una solución $\varphi(x)$, con condición inicial $\varphi(x_0) = y_0$, podemos considerar una familia de soluciones $\phi(x, y)$ de (2.4) que satisfacen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(F(x, \phi(x, y))), \quad \phi(x_0, y) = y.$$

Expandiendo $\phi(x, y)$ en su serie de potencias en una vecindad de (x_0, y_0) se tiene

$$\phi(x, y) = \varphi(x) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y_0)(y - y_0)^2 + \dots$$

A la función $\varphi_1(x) := \partial \phi / \partial y(x, y_0)$ se le llama *primera variación*⁵ de la solución $\varphi(x)$ y tiene una relación muy interesante con los puntos singulares de (2.4) en la cerradura de $\varphi(x)$. Calculemos la derivada de φ_1 con respecto a x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [F(x, \phi(x, y))] (x, y_0) \\ &= F_y(x, \varphi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_0) \\ &= F_y(x, \varphi(x)) \varphi_1(x) \end{aligned}$$

Así, la primera variación es solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = F_y(x, y)y.$$

⁵[5] pág. 109.

Calculemos la ecuación de primera variación de (2.3) en $\{y = 0\}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right) \right|_{(x, 0)} &= \left(\frac{-P(x, y)Q_y(x, y) + Q(x, y)P_y(x, y)}{(P(x, y))^2} \right) \Big|_{(x, 0)} \\ &= \frac{-P(x, 0)Q_y(x, 0) + Q(x, 0)P_y(x, 0)}{(P(x, 0))^2} \\ &= \frac{-Q_y(x, 0)}{P(x, 0)} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de primera variación de (2.3) con respecto a S es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q_y(x, 0)}{P(x, 0)}y \quad (2.5)$$

Las soluciones de esta ecuación definen la misma foliación que el campo $(P(x, 0), -Q_y(x, 0)y)$ o que la ecuación $\omega = 0$ dada por la 1-forma

$$\omega = yQ_y(x, 0)dx + P(x, 0)dy.$$

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{F} una foliación singular y S una separatriz suave de \mathcal{F} . Si $X = (P, Q)$ es un campo vectorial holomorfo que define a \mathcal{F} y S se ve localmente como $\{y = 0\}$ se define el **índice** de S en un punto $p = (x_0, 0) \in S$ con respecto a \mathcal{F} como

$$i_p(\mathcal{F}, S) := \text{Res}_{x_0} - \frac{Q_y(x, 0)}{P(x, 0)}dx.$$

Nótese que $\theta := -Q_y(x, 0)/P(x, 0)dx$ es una 1-forma meromorfa cuyos polos son los puntos singulares de la foliación en S . Entonces si p no es punto singular de X , $i_p(\mathcal{F}, S) = 0$. Por razones que explicaremos en el capítulo 3, llamaremos a θ la *forma de conexión*. A continuación veremos cómo luce el índice de una foliación con parte lineal en el punto p .

Proposición 2.2.1. Sea X un campo vectorial holomorfo en (\mathbb{C}^2, p) con singularidad aislada en p y sean λ_1, λ_2 los valores propios de su parte lineal en p . Si S es una separatriz suave por p y λ_1 (el valor propio asociado al vector propio tangente a S) es distinto de cero entonces $i_p(\mathcal{F}, S) = \lambda_2/\lambda_1$.

Demostración. Como S localmente está definida por $\{y = 0\}$, $Q(x, 0) = 0$. Entonces podemos escribir a Q como $Q(x, y) = a(x)y + \mathcal{O}(y^2)$. Si además escribimos a P como $P(x, y) = b(x) + \mathcal{O}(y)$ obtenemos

$$X(x, y) = (b(x) + \mathcal{O}(y), -a(x)y + \mathcal{O}(y^2)).$$

Así la parte lineal de X en p está dada por

$$DX(x_0, 0) = \begin{bmatrix} b_x(x_0) & c \\ 0 & a(x_0) \end{bmatrix},$$

y tiene valores propios $\lambda_1 = b_x(x_0)$ y $\lambda_2 = a(x_0)$. De donde

$$\begin{aligned} i_p(\mathcal{F}, \mathcal{S}) &= \text{Res}_{x_0} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \left(\frac{a(x)}{b(x) - 0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{a(x)}{\frac{b(x) - b(x_0)}{x - x_0}} \right) = \frac{a(x_0)}{b_x(x_0)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

□

Observación 2.2.1. Si un punto singular p de \mathcal{F} tiene dos separatrices transversales S y \tilde{S} que se ven localmente como los ejes coordenados $S = \{y = 0\}$ y $\tilde{S} = \{x = 0\}$ entonces por la proposición anterior

$$i_p(\mathcal{F}, \tilde{S}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = i_p(\mathcal{F}, S)^{-1}$$

Si S es una separatriz suave de una foliación holomorfa \mathcal{F} definida en una variedad holomorfa dos dimensional, y S contiene varias singularidades de \mathcal{F} , definimos el *índice total o índice de Camacho-Sad*⁶ de S como la suma de los índices en cada singularidad de \mathcal{F} en S , esto es,

$$i(\mathcal{F}, S) := \sum_{p \in S} i_p(\mathcal{F}, S).$$

Ejemplo 2.2.1. Sea \mathcal{U} la variedad obtenida al final del proceso de explosión que hicimos en el Ejemplo 2.1.3. Calculemos el índice de Camacho-Sad del divisor \mathbb{D}_3 obtenido en la última explosión, el cual está dado por las curvas

⁶[11]

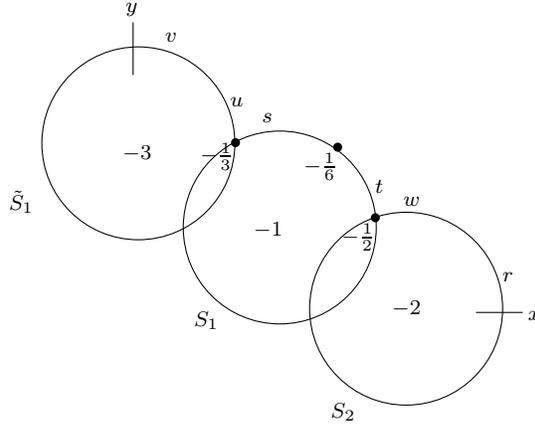
$S_1 = \{u = 0\}$ y $S_2 = \{w = 0\}$. Recordemos que los campos que definían localmente la foliación eran

$$V_7 \begin{cases} \dot{u} &= -2u + 3us \\ \dot{s} &= 6s - 6s^2 \end{cases} \quad V_8 \begin{cases} \dot{w} &= -3w + 4tw \\ \dot{t} &= 6t - 6t^2 \end{cases}$$

y ambos tienen singularidades en $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Pero el punto $(0, 1)$ en las coordenadas (u, s) corresponde con el punto $(0, 1)$ en las coordenadas (w, t) . Así, por la Proposición 2.2.1, el índice de Camacho-Sad de \mathbb{D}_3 está dado por

$$i_{(0,0)}(\mathcal{F}, S_1) + i_{(0,1)}(\mathcal{F}, S_1) + i_{(0,0)}(\mathcal{F}, S_2) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -1.$$

Ahora sean $\tilde{S}_1 = \{s = 0\}$ y $\tilde{S}_2 = \{t = 0\}$, como S_i y \tilde{S}_i son transversales en $(0, 0)$, por la Observación 2.2.1 se cumple que $i_{(0,0)}(\mathcal{F}, \tilde{S}_1) = -3$ y $i_{(0,0)}(\mathcal{F}, \tilde{S}_2) = -2$. Y como $(0, 0)$ en las coordenadas (u, s) es el único punto singular de la foliación en \mathbb{D}_1 , entonces $i(\mathcal{F}, \mathbb{D}_1) = -3$. Análogamente $i(\mathcal{F}, \mathbb{D}_2) = -2$.



No es coincidencia que el índice de Camacho-Sad a largo del divisor \mathbb{D}_3 obtenido al explotar el $(0, 0)$ de las coordenadas (u, w) sea -1 . De hecho esto sucede al explotar cualquier punto singular de una foliación.

Proposición 2.2.2. *El índice de Camacho-Sad del divisor excepcional obtenido al explotar un punto singular no dicrítico es -1 .*

Demostración. Sea $X = (P, Q)$ un campo vectorial holomorfo y singular, sin pérdida de generalidad supongamos que es singular en $(0, 0)$. Escribamos a X como suma de polinomios homogéneos

$$X(x, y) = (P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \cdots, Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \cdots)$$

donde (P_n, Q_n) no es idénticamente cero y consideremos su ecuación diferencial asociada. En la sección 2.1.1 vimos que al hacer la explosión en una vecindad del origen obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x [P_n(1, u) + xP_{n+1}(1, u) + \cdots] \\ \dot{u} &= (Q_n - uP_n)(1, u) + x(Q_{n+1} - uP_{n+1})(1, u) + \cdots\end{aligned}$$

En el caso no dicrítico $\mathbb{D} = \{x = 0\}$ es una separatriz de la foliación \mathcal{F} asociada a este campo y las raíces de $(Q_n - uP_n)(1, u)$ determinan los puntos críticos sobre el divisor excepcional. Para $0 \leq j \leq n$ sean $p_j = (0, u_j)$ los puntos singulares de \mathcal{F} , entonces

$$\begin{aligned}i_{p_j}(\mathcal{F}, \mathbb{D}) &= \text{Res}_{u=u_j} \left[\frac{P_x(x, u)}{Q(x, u)} \Big|_{x=0} \right] \\ &= \text{Res}_{u=u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right].\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j=0}^n \text{Res}_{u=u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] + \text{Res}_{\infty} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] = 0,$$

basta calcular el residuo en el infinito:

$$\begin{aligned}\text{Res}_{\infty} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] &= -\text{Res}_{u=0} \left[\frac{1}{u^2} \left(\frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{Q_n(1, \frac{1}{u}) - \frac{1}{u}P_n(1, \frac{1}{u})} \right) \right] \\ &= -\text{Res}_{u=0} \left[\frac{P_n(1, \frac{1}{u})}{u^2 Q_n(1, \frac{1}{u}) - uP_n(1, \frac{1}{u})} \right] \\ &= -\text{Res}_{u=0} \left[\frac{P_n(u, 1)}{u^2 Q_n(u, 1) - uP_n(u, 1)} \right] \\ &= -\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{uP_n(u, 1)}{u^2 Q_n(u, 1) - uP_n(u, 1)} \right] \\ &= -\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{P_n(u, 1)}{uQ_n(u, 1) - P_n(u, 1)} \right] \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$i(\mathcal{F}, \mathbb{D}) = \sum_{j=0}^n \operatorname{Res}_{u=u_j} \left[\frac{P_n(1, u)}{Q_n(1, u) - uP_n(1, u)} \right] = -1.$$

□

La pregunta inmediata es ¿Por qué en el Ejemplo 2.2.1 $i(\mathcal{F}, \mathbb{D}_1)$ y $i(\mathcal{F}, \mathbb{D}_2)$ no son -1 , si \mathbb{D}_1 y \mathbb{D}_2 también fueron el resultado de la explosión de un punto singular? Es importante notar que al explotar una singularidad sobre un divisor se reemplaza dicho punto por otro divisor, modificándose así la variedad en donde estaba encajado el primer divisor. Observemos que \mathbb{D}_2 surgió tras dos explosiones y si lo vemos encajado en la variedad obtenida en la segunda explosión, su índice de Camacho-Sad será -1 (pues es el divisor excepcional obtenido al explotar el punto singular $(0, 0)$ de (x, u)). Como \mathbb{D}_2 tenía al punto singular $(0, 0)$ del campo V_4 lo explotamos nuevamente, obteniendo una nueva variedad, en la cual se sustituyó la singularidad por \mathbb{D}_3 ; aquí el índice de Camacho-Sad de \mathbb{D}_2 es -2 , o sea, disminuyó en 1. Lo mismo sucedió para \mathbb{D}_1 quien apareció en la primera explosión y sufrió dos explosiones más, por lo que su índice llegó a -3 . Esto sugiere que cada vez que explotamos un punto singular el índice de Camacho-Sad disminuye en uno.

Proposición 2.2.3. *Si denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}$ y \tilde{S} a la foliación y a la curva obtenidas tras la explosión de un punto p en una separatriz S de una foliación \mathcal{F} entonces*

$$i_p(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}) = i_p(\mathcal{F}, S) - 1.$$

Demostración. Sea S una separatriz suave de un punto singular p de una foliación \mathcal{F} y tomemos coordenadas (x, u) en las que p coincida con el origen y $S = \{x = 0\}$. Supongamos que la foliación está dada por un campo $X = (P, Q)$ y consideramos la ecuación diferencial asociada a X . Explotando en las coordenadas (u, s) con $s = x/u$ tenemos que $\tilde{S} = \{s = 0\}$ se corresponde con S , de hecho son la misma curva, sólo difieren por la variedad en que están encajadas.

$$\dot{u} = Q(su, u), \quad \dot{s} = \frac{uP(su, u) - usQ(su, u)}{u^2}$$

Multiplicando por u ,

$$\dot{u} = uQ(su, u), \quad \dot{s} = P(su, u) - sQ(su, u).$$

Así, el índice de S en p en la nueva variedad con respecto a la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ ahí definida, está dado por

$$\begin{aligned}
i_p(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}) &= \text{Res}_{u=0} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial s}(P(su, u) - sQ(su, u))}{uQ(s, u)} \Big|_{s=0} \right] \\
&= \text{Res}_{u=0} \left[\frac{uP_s(su, u) - suQ_s(su, u) - Q(su, u)}{uQ(s, u)} \Big|_{s=0} \right] \\
&= \text{Res}_{u=0} \left[\frac{uP_s(0, u) - Q(0, u)}{uQ(0, u)} \right] \\
&= \text{Res}_{u=0} \left[\frac{P_s(0, u)}{Q(0, u)} - \frac{1}{u} \right] \\
&= i_p(\mathcal{F}, S) - 1.
\end{aligned}$$

□

Se puede probar que el índice de Camacho-Sad de una separatriz suave y compacta S en una variedad M de dimensión compleja 2 no depende de la foliación, i.e., para cualquier foliación \mathcal{F} de M tangente a S , la suma de los índices de \mathcal{F} en todos los puntos singulares de \mathcal{F} en S es la misma y sólo depende de la curva S y de la variedad M . Este resultado, conocido como el *Teorema del índice de Camacho-Sad*⁷, es un caso particular del Teorema 3.2.1 y para verlo requerimos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea M una variedad holomorfa de dimensión compleja 2. Asumamos que $U \cong (\mathbb{C}^2, 0)$ es una vecindad coordenada en M que contiene una curva suave S dada por la ecuación $\{h = 0\}$, donde $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa. Entonces cualquier 1-forma holomorfa ω tangente a S (que se anula en la dirección tangente a S) puede expresarse como*

$$\omega = g(dh - h\theta) \quad (2.6)$$

para alguna función holomorfa g en U que se anula en los puntos singulares de ω en S y una 1-forma θ meromorfa en U cuyos polos son los puntos singulares de ω . Además las restricciones de g en S y de θ en TS están unívocamente definidas por ω y h .

Demostración. Como ω y dh son 1-formas con el mismo espacio nulo (TS) entonces $\omega = gdh$ para alguna función holomorfa $g : (S, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ que se anula

⁷[11],[3]

en los puntos singulares de ω en S . Tomamos un sistema de coordenadas locales (x, y) en las que S está definida por la ecuación $\{y = 0\}$. En dicho sistema g es una función de $(\mathbb{C}, 0)$ en \mathbb{C} que sólo depende de x . Por lo que g puede extenderse a una función holomorfa en una vecindad $(\mathbb{C}, 0)$ de S . Consideremos una extensión \tilde{g} que sólo se anule en puntos singulares de ω en S . Observemos que $\tilde{g}dh - \omega \equiv 0$ en S y por tanto es divisible por h , i.e.,

$$\tilde{g}dh - \omega = h\eta \tag{2.7}$$

para alguna 1-forma holomorfa η en U . Sea θ la 1-forma meromorfa η/\tilde{g} cuyos polos son los ceros g que a su vez son los puntos singulares de ω en S . Despejando ω en (2.7) se tiene

$$\omega = \tilde{g}(dh - h\theta)$$

Para ver que en S y TS g y ω están unívocamente determinadas tomemos otra representación de ω ,

$$\omega = g'(dh - h\theta'),$$

\tilde{g} y g' coinciden en S por ser extensiones de la misma función. Así $\tilde{g} - g' \equiv 0$ en S , por lo que $\tilde{g} - g'$ es divisible por h , i.e., $\tilde{g} - g' = hu$ para alguna función holomorfa u que no se anula en S . Igualando las dos representaciones de ω tenemos

$$\tilde{g}(dh - h\theta) = g'(dh - h\theta') = (\tilde{g} + uh)(dh - h\theta').$$

De donde $\tilde{g}(\theta' - \theta) = u(dh - h\theta')$. Y como dh se anula en los vectores tangentes a S , i.e., en TS y h se anula en S , se tiene que $\tilde{g}(\theta' - \theta) \equiv 0$ en TS . Por lo tanto $\theta = \theta'$ en TS . \square

Observación 2.2.2. Veamos que la forma de conexión con la que definimos el índice de Camacho-Sad coincide con la 1-forma meromorfa θ de la expresión (2.6). Si S localmente está definido por $y = 0$, podemos escribir a S (localmente) como los ceros de $h(x, y) = y$. Consideremos una 1-forma

$$\omega = yQ_y(x, 0)dx + P(x, 0)dy$$

tangente a S . Por el lema anterior $\omega = g(dh - h\theta) = g(dy - y\theta)$ en S . Comparando ambas representaciones tenemos que g restringido a S debe ser $P(x, 0)$ y θ restringido a TS es $-Q_y(x, 0)/P(x, 0)dx$, coincidiendo con la 1-forma de conexión que habíamos definido.

Capítulo 3

Sistemas lineales y conexiones

Hasta ahora hemos estudiado foliaciones holomorfas en variedades de dimensión 2, analizar foliaciones en variedades de dimensión mayor es muy difícil. El caso más sencillo de examinar es el de los *sistemas lineales*, los cuales están definidos en un tipo especial de variedades, los *haces vectoriales holomorfos*¹. Localmente, los haces vectoriales se ven como “cilindros” definidos por un producto cartesiano de la forma $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, donde U_α es un abierto de \mathbb{C} . Esto sugiere estudiar primero los sistemas lineales de manera local y luego valerse de las “funciones de pegado” para pasar de lo local a lo global. Empezaremos este capítulo estudiando puntos singulares que tienen un “buen comportamiento” e introduciremos la noción de *conexiones* sobre haces lineales y haremos un paralelismo entre el lenguaje de sistemas lineales y el de conexiones. Por último restringiremos nuestro estudio a haces vectoriales de dimensión 1, donde definiremos el *residuo* de una conexión, el cual, como veremos, se relaciona con el índice de Camacho-Sad.

¹Ver A.

3.1. Sistemas lineales

Sea M una superficie de Riemann \mathbb{C} o $\mathbb{C}P^1$. Si (t, U) es una carta de M ($t : U \subseteq M \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$). tomamos una colección de 1-formas holomorfas en U acomodadas en una matriz de $n \times n$

$$\Omega := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \dots & \omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

En $U \times \mathbb{C}^n$ consideremos la ecuación

$$dx = \Omega x, \quad (3.1)$$

o visto mediante la carta t

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in W \subseteq \mathbb{C}^n. \quad (3.2)$$

Además de los vectores solución de (3.1) y (3.2), es útil considerar tuplas de soluciones de los sistemas de ellos y acomodarlas en una matriz de $n \times n$. Para diferenciarlas de los vectores solución las denotaremos con letras mayúsculas

$$dX = \Omega X \quad \text{o} \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

Cuando dichas matrices sean no degeneradas (que su determinante no se anule idénticamente) las llamaremos *matrices fundamentales de soluciones*.

Lema 3.1.1. *Cualesquiera dos matrices fundamentales de soluciones $X(t)$ y $\tilde{X}(t)$ de un sistema lineal (3.1) se relacionan por una matriz constante de la siguiente manera*

$$\tilde{X}(t) = X(t)C, \quad C \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}).$$

Demostración. Sea $C(t) = X^{-1}(t)\tilde{X}(t)$ veamos que C es constante. En efecto,

$$\begin{aligned} dC &= dX^{-1} \cdot \tilde{X} + X^{-1} \cdot d\tilde{X} \\ &= (-X^{-1} \cdot dX \cdot X^{-1}) \tilde{X} + X^{-1} \cdot d\tilde{X} \\ &= -X^{-1} (dX \cdot X^{-1}) \tilde{X} + X^{-1} \cdot d\tilde{X} \\ &= -X^{-1} \Omega \tilde{X} + X^{-1} \Omega \tilde{X} = 0. \end{aligned}$$

□

No todas las soluciones de ecuaciones diferenciales pueden continuarse a lo largo de cualquier camino, sin embargo, es fácil ver que siempre es posible extender las soluciones de sistemas lineales. De hecho, el resultado de esa continuación (a lo largo de un camino γ de p a q) resulta ser un mapeo lineal Δ_γ entre las fibras Γ_p y Γ_q . Se sigue de las propiedades del mapeo de holonomía definido en el capítulo 1, que Δ_γ sólo depende de la clase de homotopía de γ .

3.1.1. Holonomía y monodromía

Si ahora consideramos superficies de Riemann M no simplemente conexas (trabajaremos sólo con $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ o $\mathbb{C}P^1 \setminus \Sigma$ donde Σ es un conjunto finito de puntos), las hojas de foliación \mathcal{F} tangente a la distribución $dx - \Omega x = 0$ no necesariamente se ven como la gráfica de una función, pues pueden intersectar a la fibra $\Gamma_p = \{t = p\} \times \mathbb{C}^n$ en más de un punto, en este caso decimos que son funciones multivaluadas.

Consideremos el grupo de holonomía generado por los mapeos de holonomía Δ_γ en alguna transversal Γ_p a la hoja $M \times \{0\}$ introducidos en el capítulo 1 (ver Definición 1.2.1). Fijando un sistema coordenado en Γ_p obtenemos una matriz cuadrada $H_\gamma \in GL(n, \mathbb{C})$. Así, la continuación a lo largo de γ de cualquier matriz fundamental de soluciones $X(t)$ está dada por

$$\Delta_\gamma X(p) = H_\gamma X(p).$$

Nótese que H_γ depende de la elección del punto $p \in M$. A la matriz H_γ se le conoce como *matriz de holonomía*. Por otra parte, si $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones, su continuación a lo largo de γ también lo es. Aplicando el Lema 3.1.1, existe una matriz $M_\gamma \in GL(n, \mathbb{C})$, llamada la *matriz de monodromía*, tal que

$$\Delta_\gamma X(t) = X(t)M_\gamma. \tag{3.3}$$

Las matrices de monodromía no dependen del punto base $p \in M$ en el siguiente sentido: la condición (3.3) se satisface para todos los lazos $\tilde{\gamma} \in \pi_1(M, q)$ con q suficientemente cercano a p . Sin embargo, sí dependen de la elección de la matriz fundamental, pues si tomamos otra solución fundamental $\tilde{X}(t) = X(t)C$ se tiene que $\tilde{M}_\gamma = C^{-1}M_\gamma C$.

Observemos que la matriz de holonomía coincide numéricamente con la matriz de monodromía si elegimos las coordenadas canónicas en \mathbb{C}^n y condición inicial $X(t) = id$.

Ahora, si M y M' son superficies de Riemann, tomemos $E = M \times \mathbb{C}^n$, $E' = M' \times \mathbb{C}^n$, $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : E' \rightarrow M'$ las proyecciones sobre la base. Se dice que una transformación $H : E \rightarrow E'$ es un *mapeo de gauge* si respeta la proyección en cada fibra, i.e., si existe $h : M \rightarrow M'$ tal que $h \circ \pi = \pi' \circ H$.²

Como los sistemas lineales están definidos en productos cartesianos ($M \times \mathbb{C}^n$) podemos considerar mapeos de gauge. Decimos que dos sistemas lineales del mismo orden definidos sobre la misma superficie de Riemann M son *gauge equivalentes* si existe una transformación de gauge invertible que lleve uno en otro. Sea $G(t)$ dicho mapeo y tomemos una solución fundamental de cada sistema $X(t)$ y $\tilde{X}(t) = G(t)X(t)$.

Veamos que sus matrices de monodromía coinciden: $\Delta_\gamma X(t) = X(t)M_\gamma$ se transforma bajo la acción de G en $G(t)X(t)M_\gamma$. Por otro lado $\Delta_\gamma \tilde{X}(t) = \tilde{X}(t)\tilde{M}_\gamma = G(t)X(t)\tilde{M}_\gamma$. Como $G(t)X(t)M_\gamma = G(t)X(t)\tilde{M}_\gamma$ pues $G(t)$ es un mapeo de gauge, concluimos que $M_\gamma = \tilde{M}_\gamma$.

En cambio para las matrices de holonomía (basadas en el mismo punto) sólo podemos afirmar que son conjugadas: $\Delta_\gamma X(t) = H_\gamma \tilde{X}(t)$ se transforma bajo la acción de G en $G(t)H_\gamma X(t)$ y la holonomía de $\tilde{X}(t)$ es $\Delta_\gamma \tilde{X}(t) = \tilde{H}_\gamma \tilde{X}(t) = \tilde{H}_\gamma G(t)X(t)$, por lo que $G(t)H_\gamma G^{-1}(t) = \tilde{H}_\gamma$.

Por esta razón suele ser más conveniente usar las matrices de monodromía que las de holonomía.

El siguiente paso es considerar *sistemas lineales con singularidades* sobre una superficie de Riemann, i.e., vamos a trabajar con sistemas lineales de la forma $dX = \Omega X$ donde Ω es una matriz de $n \times n$ de 1-formas meromorfas en M . Si denotamos por Σ a las polos de Ω , dicha matriz define un sistema lineal holomorfo en $M \setminus \Sigma$ y este espacio puede no ser simplemente conexo si $\Sigma \neq \emptyset$, por lo que su grupo de holonomía (monodromía) no es trivial. Así definimos el grupo de holonomía (monodromía) de un sistema lineal con singularidades en una superficie de Riemann M como el grupo de holonomía (monodromía) del sistema restringido a $(M \setminus \Sigma) \times \mathbb{C}^n$.

²Ver A, pág. 76 para más detalles.

Ejemplo 3.1.1 (Sistema de Euler). El ejemplo más simple (con el menor número de polos simples) y no trivial de un sistema lineal sobre la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$ está dado por

$$dX = \Omega X, \quad \Omega = At^{-1}dt, \quad (3.4)$$

donde $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ y $\Sigma = \{0, \infty\}$. Encontramos una solución fundamental:

$$dX \cdot X^{-1} = At^{-1}dt \Rightarrow X(t) = e^{A \ln t}.$$

Como el grupo fundamental de $\mathbb{C}P^1 \setminus \Sigma$ es generado por el lazo $e^{2\pi\theta}$ con $\theta \in [0, 1]$,

$$\Delta_\gamma X(t) = X(te^{2\pi i}) = e^{A(\ln t + 2\pi i)} = e^{A \ln t} e^{2\pi i A} = X(t)e^{2\pi i A},$$

por lo que la matriz de monodromía es $M_\gamma = e^{2\pi i A}$.

3.1.2. Singularidades regulares

Recordemos que una función meromorfa $f(t)$ tiene un polo en un punto p si su norma crece a lo más polinomialmente en $|t - p|^{-1}$. Sin pérdida de generalidad, pensaremos que $p = 0$. Consideremos un análogo a este tipo de singularidades ahora para sistemas lineales teniendo presente que las soluciones pueden ser multivaluadas.

Definición 3.1.1. Decimos que una matriz $X(t)$, eventualmente multivaluada en 0, es de **crecimiento moderado** en el origen si en cualquier sector $\alpha < \arg(t) < \beta$ con $\beta - \alpha < 2\pi$ existen $C, k > 0$ tales que

$$\|X(t)\| \leq C|t|^{-k}$$

cuando $t \rightarrow 0$. Un punto singular de un sistema lineal es llamado **regular** si alguna matriz fundamental de soluciones $X(t)$ tiene crecimiento moderado en dicho punto.

Nótese que si $X(t)$ es de crecimiento moderado, entonces todas sus derivadas de orden finito también lo son. Una observación no tan inmediata es que su inversa también lo es. En efecto, observemos que el determinante de $X(t)$ tiene crecimiento moderado por ser suma de productos finitos de las entradas de $X(t)$, por lo que $(\det X(t))^{-1}$ tiene crecimiento moderado en 0.

Además como la matriz adjunta está formada por los cofactores de $X(t)$, $\text{Adj}X(t)$ también es de crecimiento moderado en 0. Y como $X(t)^{-1} = (\det X(t))^{-1} \text{Adj}X(t)$, entonces $X(t)^{-1}$ es de crecimiento moderado.

Proposición 3.1.1. *Sea $X(t)$ una función matricial con la propiedad de monodromía, i.e., $\Delta_\gamma X(t) = X(t)M_\gamma$ para alguna matriz no degenerada M_γ . Si $X(t)$ tiene crecimiento moderado entonces la derivada logarítmica $\Omega := dX \cdot X^{-1}$ es una matriz de 1-formas meromorfas.*

Demostración. Primero mostraremos que Ω es una función monovaluada en una vecindad agujerada de un punto singular. En efecto, sea γ un lazo simple que rodea sólo una singularidad y consideremos la continuación analítica de Ω a lo largo de γ :

$$\Delta_\gamma \Omega = \Delta_\gamma (dX \cdot X^{-1}) = (dX M_\gamma)(M_\gamma^{-1} X^{-1}) = \Omega.$$

Además como Ω tiene crecimiento moderado por las observaciones anteriores, en el peor de los casos sus singularidades son polos y por lo tanto, es una matriz de 1-formas meromorfas. \square

A continuación emplearemos las matrices de monodromía para clasificar de manera meromorfa a los sistemas lineales definidos con singularidades regulares.

Teorema 3.1.1. *Cualesquiera dos sistemas lineales definidos en una vecindad de 0, con singularidad regular en un el origen y que tengan la misma monodromía son meromorfaamente gauge equivalentes. En particular, son equivalentes a un sistema lineal de la forma (3.4).*

Demostración. Tomemos $X(t)$ y $\tilde{X}(t)$ soluciones fundamentales de cada sistema con la misma matriz de monodromía M_γ y sea $H(t) := \tilde{X}(t)X^{-1}(t)$. La matriz $H(t)$ es monovaluada en una vecindad agujerada de un punto singular, pues al continuarla analíticamente a lo largo de un lazo simple γ que rodea a una singularidad volvemos al mismo punto:

$$\Delta_\gamma H(t) = \tilde{X}(t)M_\gamma M_\gamma^{-1} X^{-1}(t) = H(t).$$

De hecho como $\tilde{X}(t)$ y $X(t)$ tienen crecimiento moderado, $H(t)$ también tiene crecimiento moderado. Así H es una transformación meromorfa que conjuga a X con \tilde{X} .

Construyamos el sistema de Euler al que son equivalentes: como M_γ es no degenerada tiene matriz logaritmo, i.e., existe A tal que $M_\gamma = e^{2\pi i A}$, como el sistema de Euler $dX = At^{-1}dtX$ tiene a $e^{2\pi i A}$ como matriz de monodromía, dichos sistemas son equivalentes. \square

3.1.3. Singularidades fuchsianas

A veces es difícil detectar singularidades regulares; por fortuna existe una condición sencilla y suficiente de regularidad.

Definición 3.1.2. *Un punto singular es llamado **fuchsiano** si la matriz Ω que define el sistema tiene un polo simple en el punto.*

$$\Omega = (A_0 + A_1 t + \cdots) t^{-1} dt, \quad A_0, A_1, \dots \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}).$$

A la matriz A_0 se le conoce como **matriz de residuo**.

Teorema 3.1.2 (Savage). ([11]) *Toda singularidad fuchsiana es regular.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad tomaremos al origen como el punto singular, entonces el sistema está definido por $\Omega = A(t)t^{-1}dt$ y tiene un polo simple en 0. Consideremos la carta $z = \ln t$, la cual transforma una vecindad $(\mathbb{C}, 0)$ en un semiplano suficientemente a la izquierda $\{\text{Re}(z) < -B\}$ con $B \gg 0$. En esta carta el sistema está dado por la matriz $\tilde{\Omega} = A(\exp(z))dz$ que tiene periodo $2\pi i$. Por la *desigualdad de Gronwall*³, para toda z tal que $\text{Re}(z) < -B$ y $\alpha < \text{Im}(z) < \beta$ se satisface

$$\|X(z)\| \leq \|X(a)\| e^{c\|z-a\|},$$

donde $a \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = -B, \alpha < \text{Im}(z) < \beta\}$ y $c = \sup \|A(z)\| < \infty$. Como

$$\|z - a\| \leq |\text{Re}(z) - \text{Re}(a)| + |\text{Im}(z) - \text{Im}(a)| \leq (-B - \text{Re}(z)) + (\beta - \alpha),$$

$$\|X(z)\| \leq \|X(a)\| e^{c\|z-a\|} \leq cte \cdot e^{-c\text{Re}(z)}.$$

Por lo tanto, en la carta original, $\|X(t)\| \leq cte|t|^{-c}$ si $\alpha < \text{Arg}(t) < \beta$. \square

³*Desigualdad de Gronwall*([11]): Sea $A(\cdot)$ un función matricial continua en el intervalos real $[t_0, t_1]$ y de norma acotada ($\|A(t)\| \leq c$) entonces cualquier solución $x(t)$ del sistema (3.2) satisface $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp(c|t - t_0|)$

3.1.4. Monopolos

La imposibilidad de definir globalmente transformaciones holomorfas sobre la esfera de Riemann, no nos permite hablar de equivalencia holomorfa entre sistemas lineales ahí definidos. Sin embargo, podemos considerar transformaciones meromorfas que son holomorfas excepto en un punto.

Definición 3.1.3. *Una transformación matricial sobre la esfera de Riemann es un **monopolo** si y sólo si ella y su inversa son transformaciones holomorfas excepto por un punto.*

Como cualquier función meromorfa con polo en el infinito es un polinomio, si $\pi(t)$ es un monopolo con polo en el infinito, entonces debe ser una matriz con entradas polinomiales y como es invertible fuera del infinito, el determinante de $\pi(t)$ es un polinomio sin raíces, y por lo tanto una constante no nula. Así $\pi^{-1}(t)$ también es una matriz polinomial. Inversamente, si $\pi(t)$ y $\pi^{-1}(t)$ son matrices polinomiales, entonces son monopolos con polo en el infinito.

Ejemplo 3.1.2. Sea $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ una matriz diagonal con entradas enteras $d_1 \geq \dots \geq d_n$ y $\pi(t)$ una matriz polinomial triangular superior. Entonces conjugar $\pi(t)$ con t^D (la matriz diagonal con entradas t^{d_j}) nos da otra matriz triangular superior.

$$\begin{aligned} (t^D \pi(t) t^{-D})_{ij} &= \sum_k (t^D)_{ik} (\pi(t) t^{-D})_{kj} \\ &= \sum_k (t^D)_{ik} (\pi_{kj} t^{-d_j}) \\ &= t^{d_i} \pi_{ij} t^{-d_j} \\ &= t^{d_i - d_j} \pi_{ij}. \end{aligned}$$

Como $\pi(t)$ es diagonal superior, $\pi_{ij} = 0$ si $i > j$. Así, $t^D \pi(t) t^{-D}$ es una matriz con entradas polinomiales y por lo tanto tiene polo en $t = \infty$. En particular si $\pi(t)$ es una matriz constante triangular superior, $t^D \pi(t) t^{-D}$ es un monopolo.

Observemos que al multiplicar un sistema lineal por un monopolo con polo en el infinito, éste será una singularidad regular pero si es fuchsiana o no, depende del orden del polo.

3.2. Conexiones

Dado un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$, una *sección*⁴ de π es un mapeo $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id$. El conjunto de secciones meromorfas de π es un espacio vectorial denotado por $\Gamma(\pi)$.

Dado un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ y $s \in \Gamma(\pi)$, no siempre es posible derivar de manera canónica a s ya que la derivada exterior puede no estar definida sobre todo el haz. El concepto de conexión busca una forma de *extender* la noción de derivada.

Definición 3.2.1. Una **conexión meromorfa** sobre un haz vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ es un operador \mathbb{C} -lineal $\nabla : \Gamma(\pi) \rightarrow \Lambda^1(M) \otimes \Gamma(\pi)$ que satisface

1. $\nabla(\lambda s + \tilde{\lambda} \tilde{s}) = \lambda \nabla s + \tilde{\lambda} \nabla \tilde{s}$
2. $\nabla(\varphi s) = \varphi \nabla s + d\varphi \otimes s$

para cada $s, \tilde{s} \in \Gamma(\pi)$, $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ y φ función meromorfa en M .

Por ejemplo, en el haz trivial $\pi : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$ la derivada exterior (coordinada a coordinada) es una conexión

$$\nabla x = dx, \quad \forall x : M \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Observemos que si $\nabla, \tilde{\nabla}$ son dos conexiones en el haz trivial $\pi : M \times \mathbb{C}^n$, su diferencia es un operador lineal en cada fibra

$$\begin{aligned} (\nabla - \tilde{\nabla})(\varphi x) &= \nabla(\varphi x) - \tilde{\nabla}(\varphi x) \\ &= (\varphi \nabla x + d\varphi \otimes x) - (\varphi \tilde{\nabla} x + d\varphi \otimes x) \\ &= \varphi(\nabla - \tilde{\nabla})x, \end{aligned}$$

i.e., la diferencia de cualesquiera dos conexiones en π es una matriz ω de 1-formas meromorfas en M . Así, podemos escribir cualquier conexión sobre un haz trivial $\pi : M \times \mathbb{C}^n$ como

$$\nabla x = dx - \Omega x, \quad \forall x : M \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

⁴Ver A, pág. 79.

La matriz de 1-formas Ω se llama la *forma de conexión* de ∇ .

Si $\pi : E \rightarrow M$ y $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ son dos haces vectoriales del mismo rango y existe un mapeo H entre ellos fibrado sobre la identidad, podemos llevar conexiones en un haz en el otro. Diremos que dos conexiones $\nabla, \tilde{\nabla}$ están *H-relacionadas* si $H(\nabla s) = \tilde{\nabla}(Hs)$ para toda $s \in \Gamma(\pi)$.

Consideremos dos haces triviales del mismo rango sobre la misma base ($\pi : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$ y $\tilde{\pi} : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$) y H un mapeo de gauge entre ellos. Si $\nabla = d - \Omega, \tilde{\nabla} = d - \tilde{\Omega}$ son conexiones en π y $\tilde{\pi}$ que están *H* relacionadas, entonces

$$H(dx - \Omega x) = H(\nabla x) = \tilde{\nabla}(Hx) = d(Hx) - \tilde{\Omega}Hx.$$

De donde $-H\Omega x = dHx - \tilde{\Omega}Hx$ y por tanto $dH = \tilde{\Omega}H - H\Omega$ o equivalentemente

$$\tilde{\Omega} = dHH^{-1} + H\Omega H^{-1}. \quad (3.5)$$

Cuando el haz no es trivial, podemos repetir el razonamiento anterior usando las trivializaciones $\{\phi_i\}$ para obtener que en las intersecciones por pares U_{ij} , las matrices de conexión correspondientes a ∇_i y ∇_j satisfagan

$$dH_{ji} = \tilde{\Omega}_j H_{ji} - H_{ji} \Omega_i. \quad (3.6)$$

donde Ω_i y Ω_j son las formas de conexión de ∇_i y ∇_j respectivamente y H_{ij} son las matrices de cociclo⁵ correspondientes al haz.

Inversamente, dada una colección de trivializaciones $\{\phi_i\}$ relacionadas por la familia de cociclos $\{H_{ij}\}$ y dada una familia de matrices $\{\Omega_i\}$ que en las intersecciones por pares de los dominios satisface (3.6), podemos definir una conexión meromorfa cuyas matrices de conexión sean Ω_i considerando el operador que envía vectores cocadena⁶ x_i de una sección arbitraria $s \in \Gamma(\pi)$ en $\theta_i = dx_i - \Omega x_i$.

⁵Ver A, pág. 78.

⁶Las trivializaciones (ϕ_i) nos permiten asociar a cada sección $s \in \Gamma(\pi)$ una familia de funciones vectoriales definidas en los dominios U_i de las ϕ_i 's. $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n, x_i = \phi_i \circ s|_{U_i}$. A dichas funciones se les conoce como *vectores cocadena*.

3.2.1. Conexiones y sistemas lineales

Como las conexiones están determinadas por su matriz de conexión en las trivializaciones correspondientes, podemos aplicar todas las propiedades de los sistemas lineales para ir de la teoría local a la global.

Sea ∇ una conexión meromorfa sobre un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ con M una superficie de Riemann. Si $\{\phi_i\}$ son trivializaciones locales de π , el *espacio singular* de ∇ se define como los puntos de M en los cuales las matrices de conexión Ω_i tienen un polo. Una conexión holomorfa es una conexión sin polos. Un punto singular de ∇ se llama *fuchsiano* si el polo es simple. Más generalmente decimos que es regular si es una singularidad regular de un sistema lineal $dx = \Omega_i x$.

Para extender la noción de holonomía observemos que una función $x(\cdot)$ cuya derivada se anula es localmente constante, por lo que su gráfica es un hiperplano horizontal en el cilindro $M \times \mathbb{C}^n$. Si tomamos dos fibras $\{a\} \times \mathbb{C}^n$ y $\{b\} \times \mathbb{C}^n$ podemos identificar sus puntos cuando ambos pertenecen al mismo hiperplano horizontal. Para hacer en general usamos las conexiones: diremos que s es una *sección horizontal* para ∇ si $\nabla s = 0$. En las cartas trivializadoras $\{\phi_i\}$, una sección horizontal $t \rightarrow x(t)$ satisface $dx = \Omega_i x(t)$. En analogía con el caso anterior, podemos pensar que las secciones horizontales son localmente constantes con respecto a ∇ e identificar puntos de las fibras $\pi^{-1}(a)$ y $\pi^{-1}(b)$ cuando ambos pertenezcan al mismo “hiperplano” (con $a, b \in M \setminus \Sigma$ suficientemente cercanos). Dicha identificación también se conoce como *transporte paralelo* y es precisamente el mapeo de holonomía definido por los sistemas $dX = \Omega_i X$. Así, como los sistemas lineales que son gauge equivalentes tienen grupos de holonomía isomorfos, si tenemos dos haces vectoriales sobre la misma base y un mapeo H entre ellos fibrado sobre la identidad, los mapeos de holonomía entre conexiones que están H -relacionadas son conjugados.

3.2.2. Conexiones sobre haces lineales

Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz lineal y ∇ es una conexión sobre él. Por (3.5), en las intersecciones por pares de las trivializaciones $\{\phi_i\}$ se satisface

$$\omega_j = dh_{ji} \cdot h_{ji}^{-1} + h_{ji} \omega_i h_{ji}^{-1} = \omega_i + \frac{dh_{ji}}{h_{ji}} = \omega_i + d \ln(h_{ji}) \quad (3.7)$$

donde ω_i y ω_j son las formas de conexión de ∇_i y ∇_j respectivamente y h_{ji} son las matrices de cociclo correspondientes al haz.

Como $\text{Res}_p d \ln(h_{ji}) = 0$ para cualquier punto $p \in M$, $\text{Res}_p \omega_i = \text{Res}_p \omega_j$. Entonces, definimos el residuo de la conexión ∇ en un punto $p \in M$ como

$$\text{Res}_p \nabla = \text{Res}_p \omega_i, \quad p \in U_i.$$

A la suma de dichos residuos sobre todos los puntos de M la llamaremos el residuo total de la conexión ∇ .

El residuo total de cualquier 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta es cero.⁷ A continuación presentamos una importante generalización de este hecho.

Teorema 3.2.1. *El residuo total de cualquier conexión meromorfa en un haz lineal $\pi : E \rightarrow M$ sobre una superficie compacta de Riemann es el mismo para todas las conexiones y es igual al grado del haz*⁸.

Demostración. Sean $\nabla, \tilde{\nabla}$ dos conexiones sobre el haz, por (3.7), en las intersecciones por pares la diferencia de sus 1-formas de conexión está dada por

$$\omega_i - \tilde{\omega}_i = \omega_j + d \ln h_{ji} - \tilde{\omega}_j - d \ln h_{ji} = \omega_j - \tilde{\omega}_j.$$

Así la 1-forma de conexión de $\nabla - \tilde{\nabla}$ está definida globalmente por una 1-forma meromorfa $\eta = \omega_i - \tilde{\omega}_i$. Por el Teorema del residuo

$$0 = \sum_{p \in M} \text{Res}_p \eta = \sum_{p \in M} \text{Res}_p \nabla - \sum_{p \in M} \text{Res}_p \tilde{\nabla}.$$

Para ver que coincide con el grado de π tomemos una sección $s \in \Gamma(\pi)$ y sean $\{x_i\}$ sus vectores cocadena. Sin pérdida de generalidad tomamos una cubierta abierta $\{U_i\}$ de M tal que si $x_i(p) = 0$ y $p \in U_{ij}$ entonces $i = j$. Vamos a construir una conexión que se anule en s .

Como cualquier conexión se escribe como $\nabla x_i = dx_i - \omega_i x_i$, si ∇ es una conexión tal que $\nabla s = 0$ entonces $\omega_i = dx_i/x_i$. Así $\omega_i := d \ln x_i$ es la

⁷Ver A.1

⁸Ver A.1

1-forma de conexión correspondiente a la conexión ∇ que satisface $\nabla s = 0$. Entonces

$$\sum_{p \in M} \text{Res}_p \nabla = \sum_{p \in M} \text{Res}_p d \ln x_i.$$

Si $k = \text{Res}_p dx_i/x_i$, entonces x_i tiene un cero o un polo de orden k en p , i.e,

$$x_i(z) = (z - p)^k f(z),$$

donde f es una función sin ceros ni polos en p . Así $\text{Res}_p d \ln x_i = \text{ord}_p x_i$ donde $\text{ord}_p x_i$ denota el orden de x_i en el punto p . Por lo tanto

$$\sum_{p \in M} \text{Res}_p \nabla = \sum_{p \in M} \text{ord}_p x_i = \text{deg} \pi.$$

□

Para cerrar el capítulo, mostraremos la independencia del índice de Camacho-Sad con respecto a la foliación.

Teorema 3.2.2 (Índice de Camacho-Sad). ([11]). *Sea S es una curva holomorfa compacta y suave en una 2-variedad compleja M . Entonces para toda foliación \mathcal{F} de M tangente a S , $i(\mathcal{F}, S)$ es el mismo.*

Sean \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ dos foliación de M tangentes a S . Consideremos un atlas $\{U_\alpha\}$ de M . En cada U_α la curva S está definida por una ecuación $\{h_\alpha = 0\}$ con h_α una función holomorfa en U_α y las foliaciones \mathcal{F} y $\tilde{\mathcal{F}}$ están definidas por $\omega_\alpha = 0$ y $\tilde{\omega}_\alpha = 0$ con $\omega_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha$ 1-formas tangentes a S . Por el Lema 2.2.1 dichas 1-formas definen una colección de formas de conexión $\{\theta_\alpha\}$ y $\{\tilde{\theta}_\alpha\}$ en una cubierta abierta de S dada por abiertos relativos $U_\alpha \cap S$ y por la observación 2.2.2 coinciden con las formas de conexión con las que definimos el índice de Camacho-Sad. Entonces, por el teorema anterior,

$$i(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S} \text{Res}_p \theta_\alpha = \sum_{p \in S} \text{Res}_p \tilde{\theta}_\alpha = i(\tilde{\mathcal{F}}, S).$$

Capítulo 4

Teoremas de realización

Dada una foliación singular \mathcal{F} de una variedad compleja y una separatriz S de ella, podemos encontrar el grupo de holonomía de S con respecto a \mathcal{F} en alguna sección transversal a S . Ahora nos preguntamos si es posible construir una foliación singular que tenga como separatriz a una curva S y como grupo de holonomía a un subgrupo finitamente generado $H \subseteq \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ dados de antemano. En este capítulo expondremos dos teoremas de realización. El primer resultado, perteneciente a Alcides Lins Neto, nos dice que todo grupo de gérmenes en de biholomorfismos que fijan a 0 cuyos generadores son linealizables se puede realizar como la holonomía proyectiva de un campo. El segundo resultado es una respuesta parcial al problema de Riemann-Hilbert o problema 21 de Hilbert, el cual plantea (bajo ciertas condiciones de regularidad) la existencia de una ecuación diferencial con holonomía prescrita. Para la primera parte usaremos las herramientas desarrollada en los capítulos 1, 2 y la clasificación de haces lineales hecha en B.1. La segunda parte se basa en los resultados de capítulo 3 y la clasificación de haces de rango n presentada en B.2.

4.1. Teorema de realización de Lins Neto

Teorema 4.1.1. ([12]) *Si h_0, h_1, \dots, h_k son gérmenes de biholomorfismos en $(\mathbb{C}, 0)$ que fijan al 0, linealizables (no necesariamente en el mismo sistema de coordenadas) y tales que $h_0 \circ h_k \circ \dots \circ h_1 = id$, entonces existe un campo vectorial holomorfo X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ singular en 0 con las siguientes propiedades:*

1. *La primera explosión de X es no dicrítica.*
2. *$\mathcal{F}^{(1)}(X)$ tiene $k + 1$ singularidades en el divisor y todas son linealizables.*
3. *La holonomía proyectiva de $\mathcal{F}^{(1)}(X)$ es conjugada del grupo de gérmenes generado por h_1, \dots, h_k .*
4. *X tiene exactamente $k + 1$ variedades analíticas invariantes, las cuales están contenidas en $k + 1$ rectas complejas que pasan por el origen.*

La prueba consiste en construir una 2 variedad compleja pegando varios modelos de foliaciones lineales para obtener dos foliaciones, una de las cuales tendrá $k + 1$ puntos singulares, todos ellos contenidos en un conjunto difeomorfo a $\mathbb{C}P^1$, el cual tendrá índice de Camacho-Sad -1 y será transversal a las hojas de la otra foliación. Después aplicaremos un célebre resultado de H. Grauert, para dar una equivalencia entre una vecindad de dicho conjunto en la variedad construida y una vecindad de la sección cero del haz $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ obtenido por una explosión. Proyectando obtendremos un campo vectorial X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuya explosión determine la foliación obtenida en \mathcal{U} alrededor del divisor \mathbb{D} . Además la construcción se hará de tal forma que si Σ es el conjunto de singularidades de la foliación obtenida en $\tilde{\mathbb{C}}^2$ entonces la holonomía de $\mathbb{D} \setminus \Sigma$ será conjugada del grupo generado por h_1, \dots, h_k .

Teorema (De Grauert). ¹ *Sea M una variedad de dimensión compleja 2 y $T \hookrightarrow M$ una superficie de Riemann compacta. Si el haz normal de S en M tiene grado negativo, entonces existe una vecindad de T en M holomorfa-mente equivalente a una vecindad de la sección nula del haz normal.*

¹[11],[6]

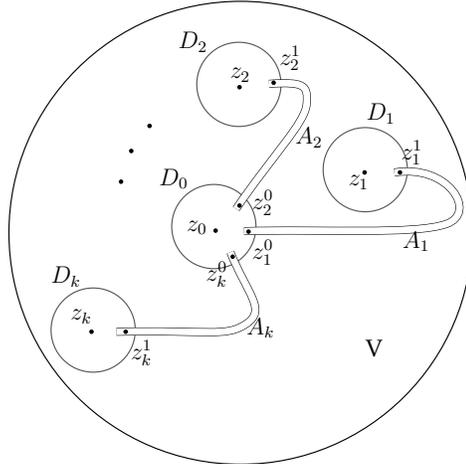
Demostración del Teorema 4.1.1. Para construir la variedad y la foliación mencionadas, empezaremos cubriendo a la esfera de Riemann por abiertos y definiremos foliaciones por curvas en el producto cartesiano de cada conjunto con \mathbb{C} .

Sean $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ puntos distintos y $z_0 = 0$. Alrededor de cada z_i consideramos el disco D_i con radio $r < (\min_{i \neq j} |z_i - z_j|)/2$ y si $1 \leq j \leq k$ elegimos puntos en D_0 y D_j dados por

$$z_j^0 = \frac{r}{2} e^{2\pi i(j-1)/k} \quad z_j^1 = z_j + \frac{r}{2}.$$

Unimos los puntos z_j^0 y z_j^1 mediante caminos simples y ajenos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ que cumplan que $\alpha_j \cap D_0$ y $\alpha_j \cap D_j$ son segmentos de rectas contenidos en los diámetros de D_0 y D_j , y si $i \neq j$ con $1 \leq i \leq k$ entonces $\alpha_j \cap D_i = \emptyset$.

Para cada α_j tomamos vecindades A_j suficientemente pequeñas para que sean ajenas entre sí, no contengan al 0 ni al z_j y tales que si $i \neq j$ entonces $A_j \cap D_i = \emptyset$. Sea $B_j = A_j \cup D_j$ si $1 \leq j \leq k$ y $B_0 = D_0$. Sea $U = \bigcup_{j=0}^k B_j$ y $\gamma = \partial U$. Observemos que γ es una curva cerrada simple y sea T una vecindad suficientemente pequeña de ella. Haciendo $V = (\mathbb{C}P^1 \setminus U) \cup T$ obtenemos una cubierta por abiertos $\{B_0, \dots, B_k, V\}$ de la esfera de Riemann.



A continuación consideraremos los conjuntos $B_j \times \mathbb{C}$ y $V \times \mathbb{C}$. En cada uno de ellos definiremos dos foliaciones lineales.

En $B_j \times \mathbb{C}$ damos coordenadas (z, w_j) y consideramos las foliaciones \mathcal{G}_j dada por z constante y \mathcal{F}_j definida por la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - z_j \\ w_j \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

donde λ_j es tal que $e^{2\pi i \lambda_j} = \mu_j := h'_j(0)$ si $1 \leq j \leq k$ y $\lambda_0 = -1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j$.

Observemos que las separatrices de \mathcal{F}_j son las curvas $\{z_j\} \times \mathbb{C}$, las cuales son hojas de \mathcal{G}_j . Para calcular la holonomía de un lazo que rodea al punto singular $(z_j, 0)$ consideremos $\gamma_j(\theta) = e^{i\theta} r/2 + z_j$ y $\Gamma_j = \{z_j^1\} \times \mathbb{C}$. Dado un punto $(z_j^1, w_j) \in \Gamma_j$, la solución de (4.1) con condición inicial $\varphi(0) = (z_j^1, w_j)$ es

$$\varphi(t) = \left(e^t(z_j^1 - z_j) + z_j, e^{\lambda_j t} w_j \right) = \left(\frac{r}{2} e^t + z_j, e^{\lambda_j t} w_j \right). \quad (4.2)$$

Además $\varphi(2\pi i) = (z_j + r/2, e^{2\pi i \lambda_j} w_j) = (z_j^1, \mu_j w_j)$. Por lo tanto, la holonomía de γ_j en Γ_j con respecto a la foliación \mathcal{F}_j es de la forma $\Delta_j(w_j) = \mu_j w_j$.

Así, la holonomía del lazo $\beta_j := \alpha_j * \gamma_j * \alpha_j^{-1}$ en $\Gamma_j^0 = \{z_j^0\} \times \mathbb{C}$ con respecto a \mathcal{F}_j es

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta_j}(w_j) &= \Delta_{\alpha_j^{-1}} \circ \Delta_{\gamma_j} \circ \Delta_{\alpha_j}(w_j) \\ &= e^{-\lambda_j t_0} \mu_j e^{\lambda_j t_0} w_j \\ &= \mu_j w_j. \end{aligned}$$

para algún tiempo t_0 .

Por otra parte, en $V \times \mathbb{C}$ tomamos coordenadas (v, u) con $v = 1/z \in V, u \in \mathbb{C}$ y definimos las foliaciones \mathcal{F}_V y \mathcal{G}_V dadas por u constante y v constante respectivamente.

El siguiente paso es pegar las foliaciones, lo cual se hace tomando dos foliaciones de variedades cuya intersección es no vacía, eligiendo Γ una transversal a las hojas de ambas foliaciones y un biholomorfismo $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ e identificando la hoja de la primera foliación que pasa por un punto $x \in \Gamma$ con la hoja de la segunda foliación que pasa por $\phi(x) \in \Gamma$.

Empezaremos pegando \mathcal{F}_0 con \mathcal{F}_j para $1 \leq j \leq k$. Como h_0, h_1, \dots, h_k son linealizables elegimos un sistema de coordenadas (z, w_0) para $B_0 \times \mathbb{C}$ en

el cual $h(w_0) = \mu_0 w_0$ y tomamos g_j un biholomorfismo que fije al cero y conjugue a h_j con su parte lineal, i.e.,

$$g_j^{-1} \circ h_j \circ g_j(w_j) = \mu_j.$$

Identifiquemos a $\Gamma_j^0 \subseteq B_j \times \mathbb{C}$ con $\Gamma_j^0 \subseteq B_0 \times \mathbb{C}$ mediante el biholomorfismo $(z_j^0, w_j) \mapsto (z_j^0, ag_j(w_j))$ para algún $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijo.

Como la solución de

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{w}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w_0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

con condición inicial $\varphi(0) = (z_j^0, w_0)$ es $\varphi(t) = (e^t z_j^0, e^{\lambda_0 t} w_0)$, la hoja de \mathcal{F}_0 que pasa por $(z_j^0, w_0) \in \Gamma_j^0$ es

$$\left\{ \left(z, e^{\lambda_0 \ln(z/z_j^0)} w_0 \right) \mid z \in B_0 \right\}.$$

Así, $(z, w_0) \in B_0 \times \mathbb{C}$ se identifica con $(z, w_j) \in B_j \times \mathbb{C}$ si y sólo si

$$w_0 = e^{\lambda_0 \ln(z/z_j^0)} ag_j(w_j).$$

Mediante este pegado, curvas con la primera coordenada constante son invariantes, por lo que \mathcal{G}_0 y \mathcal{G}_j se pegan bien. También es invariante el conjunto $(B_0 \cap B_j) \times \{0\}$, por lo que $(B_0 \cup B_j) \times \{0\}$ es una hoja de la nueva foliación $\tilde{\mathcal{F}}_j$ definida en la variedad \tilde{M}_j que acabamos de obtener.

La holonomía de β_j en $\Gamma_j^0 \subseteq B_0 \times \mathbb{C}$ con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}_j$ es

$$\tilde{\Delta}_{\beta_j}(w_0) = ag_j \left(\mu_j g_j^{-1}(a^{-1} w_0) \right).$$

Sea $\gamma_0 : [0, 2\pi] \rightarrow B_0$, $\gamma_0(\theta) = \frac{r}{2} e^{i\theta}$ y para $1 \leq j \leq k$ tomemos ρ_j el arco de γ_0 de $\frac{r}{2}$ a z_j^0 . Definimos $\delta_j := \rho_j * \beta_j * \rho_j^{-1}$ y $\Gamma := \{\frac{r}{2}\} \times \mathbb{C}$. Entonces la holonomía de δ_j con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}_j$ es

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\delta_j}(w) &= \tilde{\Delta}_{\rho_j^{-1}} \circ \tilde{\Delta}_{\beta_j} \circ \tilde{\Delta}_{\rho_j}(w) \\ &= \Delta_{\rho_j^{-1}} \circ \Delta_{\beta_j}(e^{\lambda_0 2\pi i(j-1)/k} w) \\ &= \Delta_{\rho_j^{-1}} \left(ag_j \left(\mu_j g_j^{-1}(a^{-1} e^{\lambda_0 2\pi i(j-1)/k} w) \right) \right) \\ &= e^{-\lambda_0 2\pi i(j-1)/k} ag_j \left(\mu_j g_j^{-1}(a^{-1} e^{\lambda_0 2\pi i(j-1)/k} w) \right). \end{aligned}$$

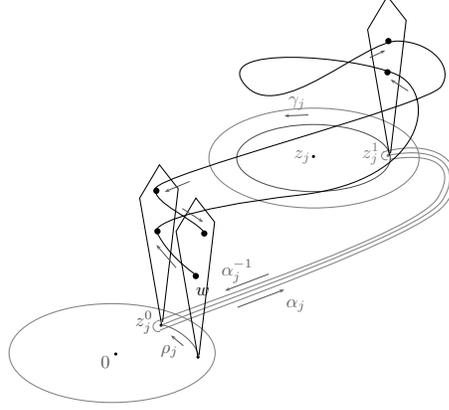


Figura 4.1: Holonomía de δ_j en Γ_j^0 con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}_j$.

Haciendo $a = e^{\lambda_0 2\pi i(j-1)/k}$ tenemos $\tilde{\Delta}_{\delta_j}(w) = g_j(\mu_j g_j^{-1}(w)) = h_j(w)$.

Llamemos \tilde{M} a la variedad formada por la unión de las variedades $\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_k$ y $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{G}}$ a las foliaciones definidas en ella. Por construcción $U \times \{0\}$ es una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$. Más aún, si consideramos la curva $\gamma = \delta_1 * \dots * \delta_k * \gamma_0 \subseteq U \times 0$, entonces su holonomía con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}$ es trivial,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\gamma(w) &= \tilde{\Delta}_{\gamma_0} \circ \tilde{\Delta}_{\delta_k} \circ \dots \circ \tilde{\Delta}_{\delta_1}(w) \\ &= h_0 \circ h_k \circ \dots \circ h_1(w) \\ &= w. \end{aligned}$$

Así el grupo de holonomía en Γ con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}$ es generado por $\{h_1, \dots, h_k\}$.

Resta pegar las foliaciones de \tilde{M} y de $V \times \mathbb{C}$. Para pegar $\tilde{\mathcal{F}}$ con \mathcal{F}_V tomamos un punto $p \in U \cap V$, $\Gamma_p := \{p\} \times \mathbb{C}$ y $g : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_p$ un biholomorfismo que fije al $(p, 0)$, e identificamos la hoja de $V \times \mathbb{C}$, $V \times \{u\}$ con la hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ que pasa por $(p, u) \in \Gamma_p$. Notemos que dicha identificación es válida pues $U \cap V$ es un anillo que rodea a todas las singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$, por lo que cualquier lazo en $U \cap V$ es contraíble u homotópico a γ , en ambos casos su holonomía en Γ_p con respecto a $\tilde{\mathcal{F}}$ es trivial. En consecuencia cada hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersecta a Γ_p sólo en un punto. Sean M y \mathcal{F} la variedad y la foliación obtenidas, obsérvese que $V \times \{0\} \cup U \times \{0\} \setminus \{z_0, \dots, z_k\}$ es una hoja de \mathcal{F} pues $g(p, 0) = (p, 0)$. Llamemos P a dicha hoja.

Por último, $\tilde{\mathcal{G}}$ y \mathcal{G}_V se pegan identificando las hojas con la misma primera coordenada, llamemos \mathcal{G} a la foliación que resulta. Observemos que \mathcal{G} es transversal a P , de hecho es transversal a \mathcal{F} excepto en las separatrices de \mathcal{F} , las cuales son hojas de \mathcal{G} .

Como se dijo al iniciar la demostración, nos valdremos del Teorema de Grauert para ver una vecindad de P en M como la sección cero de su haz normal. Para ello debemos mostrar que el grado del haz normal es negativo y como éste coincide con el índice de Camacho-Sad de P en M , podemos calcularlo fácilmente. Recordemos que los puntos singulares de \mathcal{F} son $(z_0, 0), \dots, (z_k, 0)$ y cerca de ellos la foliación se ve como el retrato fase del campo (4.1). Así el índice de Camacho-Sad de P en M está dado por

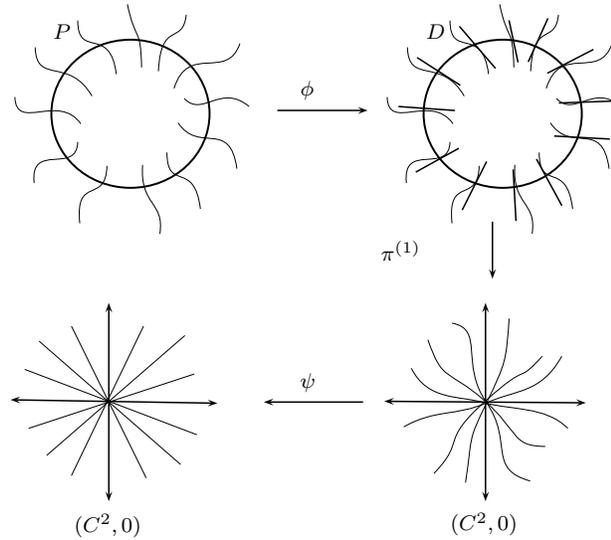
$$\sum_{j=0}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} \left[\frac{\partial}{\partial w_j} \left(\frac{\lambda_j w_j}{z - z_j} \right) \Big|_{w_j=0} \right] = \sum_{j=0}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} \left[\frac{\lambda_j}{z - z_j} \right] = \sum_{j=0}^k \lambda_j = -1.$$

Por el Teorema de Grauert, como el grado de el haz normal de P en M es -1 , existe un biholomorfismo φ entre una vecindad de P en M y una vecindad de la sección cero S_0 de su haz normal N tal que $\varphi(P) = S_0$. Además la Proposición 2.2.2 afirma que el índice de Camacho-Sad del divisor excepcional obtenido al explotar un punto singular no dicrítico es -1 , así el haz $\pi^{(1)}$ obtenido por una explosión en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tiene grado -1 .

Tenemos entonces dos haces lineales sobre la esfera de Riemann (N y $\pi^{(1)}$) que tienen el mismo grado. Por la clasificación de los haces lineales sobre la esfera de Riemann (B.1), existen biholomorfismos entre cada uno de estos haces y el haz estándar ξ_1 . Por lo tanto, N y $\pi^{(1)}$ son equivalentes por un biholomorfismo ζ que manda fibras de N en fibras de $\pi^{(1)}$ tal que $\zeta(S_0) = \mathbb{D}$. Tomando $\phi = \zeta \circ \varphi$ conseguimos una equivalencia entre una vecindades de P en M y una vecindad de \mathbb{D} en \mathcal{U} tal que $\phi(P) = \mathbb{D}$. Y como \mathcal{G} es transversal a P , \mathcal{G} determina mediante ϕ una foliación en una vecindad de \mathbb{D} en \mathcal{U} transversal a S_0 .

Aplicando el Lema (2.1.1) existe un campo vectorial X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ en el origen con parte lineal $DX(0)(x, y) = (x, y)$ cuya primera explosión define un campo tangente a \mathcal{G} . Como la colección de valores propios de $DX(0)$ es $(1, 1)$ que es no resonante y está en el dominio de Poincaré, X es analíticamente equivalentemente a su parte lineal², i.e., existe un biholomorfismo

²Decimos que una colección de valores propios $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es *no resonante*



$\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ que lleva hojas de la foliación definida por el campo X en hojas de la foliación definida por la parte lineal de X , las cuales son rectas que pasan por 0.

□

4.1.1. Generalización a varias explosiones

Observemos que en la construcción anterior pudimos haber definido λ_0 como $-\sum_{j=0}^k \lambda_j - n$ para cualquier entero n dado, obteniendo una foliación \mathcal{F} definida en una variedad M que tiene como separatriz un conjunto P difeomorfo a la esfera de Riemann con las mismas características que antes, sólo que ahora el grado del haz normal de P en M es $-n$.

Ahora consideremos una variedad compleja \mathcal{P} que tiene como subvariedades un número finito de espacios proyectivos transversales P_j con $j = 1, \dots, n$ y

si ningún λ_j se puede escribir como combinación lineal $\lambda_j = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$ con $m_i \in \mathbb{N}$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $m_1 + \dots + m_n \geq 2$. Cuando λ satisface que $0 \notin \text{conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ decimos que λ pertenece al *dominio de Poincaré*. El *Teorema de linealización Poincaré* ([11]) asegura que un campo vectorial $\dot{z} = Az + \dots$ con $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ espectro no resonante y en el dominio de Poincaré es analíticamente equivalente a su parte lineal.

definamos la gráfica G asociada a \mathcal{P} como la gráfica cuyos vertices p_j representan a los espacios proyectivos y tal que dos vértices p_i, p_j son adyacentes en G sí y sólo sí $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Diremos que \mathcal{P} es un árbol si su gráfica asociada lo es, i.e., si G es conexa y sin ciclos. A los puntos en la intersección de dos espacios proyectivos los llamaremos esquinas.

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{P}$ un conjunto finito que contiene propiamente a todas las esquinas de un árbol \mathcal{P} y definamos $\Sigma_j = \Sigma \cap P_j = \{p_0^j, \dots, p_{r_j}^j\}$. Supongamos que para cada j existe un grupo de biholomorfismos H_j generado por $\{h_1^j, \dots, h_{r_j}^j\}$ tal que cada h_i^j es linealizable y $h_0^j := (h_1^j \circ \dots \circ h_{r_j}^j)^{-1}$ también lo es.

Entonces existe una variedad compleja M_j de dimensión compleja 2 que contiene a P_j y una foliación singular de ella, tal que:

- El conjunto singular de \mathcal{F}_j es Σ_j y todas las singularidades son linealizables.
- $P_j \setminus \Sigma_j$ es una hoja de \mathcal{F}_j .
- La holonomía de $P_j \setminus \Sigma_j$ con respecto a \mathcal{F}_j es conjugada de H_j . Mas aún, si γ es un lazo simple que rodea todos los puntos de Σ_j , la holonomía de γ es trivial.
- El índice de Camacho-Sad de P_j es n_j para algún $n_j \in \mathbb{Z}$ dado.

Como todas las singularidades de \mathcal{F}_j son linealizables, dado $p \in \Sigma_j$ podemos elegirle una vecindad W y un sistema de coordenadas (x, y) en el cual $p = (0, 0)$, $W \cap P_j = \{(x, y) \in W | y = 0\}$ y \mathcal{F}_j esté definida por el campo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Notemos que si p es una esquina, i.e., si $p \in P_i \cap P_j$, tendremos dos vecindades W_i, W_j de p y sistemas coordenados (x, y) y (u, v) tales que $p = (0, 0)$, $W_i \cap P_i = \{(x, y) \in W_i | y = 0\}$, $W_j \cap P_j = \{(u, v) \in W_j | v = 0\}$ donde las foliaciones \mathcal{F}_i y \mathcal{F}_j están dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Si γ es un lazo en $W_i \cap P_i$ que rodea a p una vez, la holonomía de γ con respecto a \mathcal{F}_i en alguna transversal a $W_i \cap P_i$ es de la forma $y \mapsto e^{2\pi i \lambda_i} y$. Entonces si $h_i \in H_i$ es conjugado al elemento de holonomía relativo a $p \in P_i$ con respecto a \mathcal{F}_i se tiene que $h'_i(0) = e^{2\pi i \lambda_i}$. Análogamente $h'_j(0) = e^{2\pi i \lambda_j}$.

Como $W_i \cap P_i$ y $W_j \cap P_j$ son separatrices transversales de p , por la Observación 2.2.1 se debería cumplir que

$$\lambda_i \lambda_j = 1 \quad (4.7)$$

En este caso podemos pegar las foliaciones \mathcal{F}_i de M_i y \mathcal{F}_j de M_j mediante el difeomorfismo $\varphi(x, y) = (y, x)$ obteniendo una variedad M_{ij} y una foliación \mathcal{F}_{ij} que tiene como conjunto invariante a $P_i \cup P_j$ y tal que las holonomías de $P_i \setminus \Sigma_i$ y $P_j \setminus \Sigma_j$ con respecto a la nueva foliación sean conjugadas de H_i y H_j respectivamente.

Si la condición (4.7) se satisface en cada una de las esquinas de \mathcal{P} podremos pegar todas las foliaciones \mathcal{F}_j de M_j para obtener una foliación \mathcal{F} definida en una variedad M que contenga a \mathcal{P} como conjunto invariante, tal que la holonomía de cada $P_j \setminus \Sigma_j$ con respecto a \mathcal{F} sea conjugada de H_j y tal que el índice de Camacho-Sad de cada P_j sea n_j .

Por otra parte, observemos que el divisor excepcional $\pi^{-1}(0) = \bigcup_j P_j$ obtenido después de n explosiones es un árbol ($\pi : \mathcal{U}^{(n)} \rightarrow U$), y por la Proposición 2.2.3 el índice de Camacho-Sad de cada uno de los divisores en la variedad $\mathcal{U}^{(n)}$ depende del momento en que apareció: el índice de Camacho-Sad del último divisor obtenido es -1 y va disminuyendo en 1 hasta llegar a que P_1 tiene índice $-n$, entonces si P_j surgió en la j -ésima explosión su índice de Camacho-Sad será $n_j = j - n - 1 < 0$ (ver ejemplo 2.2.1).

Tomando en cuenta lo anterior, consideremos un árbol de espacios proyectivos $\mathcal{P} = \bigcup_j P_j$ que sea el divisor excepcional de $\pi : \mathcal{U}^{(n)} \rightarrow U$ un proceso de n explosiones en $(\mathbb{C}^2, 0)$; si a cada P_j le asociamos n_j el índice de Camacho-Sad correspondiente en $\mathcal{U}^{(n)}$, conseguimos una variedad $M^{(n)}$ y una foliación \mathcal{F} de ella que posee a \mathcal{P} como hoja, tal que el grupo de holonomía de cada $P_j \setminus \Sigma_j$ es conjugado de H_j y el índice de Camacho-Sad de \mathbb{D}_n en M es n_j .

Como el índice de Camacho-Sad de P_j en $M^{(n)}$ es negativo, podemos aplicar el Teorema de Grauert para obtener una equivalencia entre una vecindad de P_j en $M^{(n)}$ y una vecindad de la sección cero de su haz normal. Recordemos que P_n tiene índice -1 , por lo tanto podemos verlo como el divisor excepcional de una explosión, así P_n se proyecta en un punto $z \in P_{n-1} \cap P_{n-2}$. Por la Proposición 2.2.3 el índice de P_{n-2} en la variedad obtenida al proyectar aumentó en 1, i.e., pasó de -2 a -1 . Repitiendo el argumento n veces, conseguimos un foliación no singular $\tilde{\mathcal{F}}$ en $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$, pues la proyección $M^{(n)} \setminus \mathcal{P} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ es un biholomorfismo y las singularidades de \mathcal{F} están contenidas en \mathcal{P} . Por el Lema 1.1.2 existe un campo vectorial X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ singular sólo en 0 y tangente a las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Con esto, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2. ([12]) *Sea \mathcal{P} el divisor excepcional de un proceso de n explosiones empezando en $(\mathbb{C}^2, 0)$ y sean P_1, \dots, P_n los espacios proyectivos que lo forman. Tomemos $\Sigma \subseteq \mathcal{P}$ un subconjunto finito que contiene propiamente a todas las esquinas de \mathcal{P} . Para cada j sea $\Sigma_j = \Sigma \cap P_j = \{p_0^j, \dots, p_{r_j}^j\}$ y supongamos que existe un grupo de gérmenes de biholomorfismos linealizables $H_j = \langle \{h_1^j, \dots, h_{r_j}^j\} \rangle$ que fijan al 0 con las siguientes propiedades:*

- Para cada j , $h_1^j \circ \dots \circ h_{r_j}^j = id$.
- Si $(h_k^j)'(0) = e^{2\pi i \lambda_k}$ entonces $\sum_k \lambda_k$ es el índice de autointersección de P_j .
- La condición (4.7) se satisface en cada esquina.

Entonces existe un campo vectorial X en $(\mathbb{C}^2, 0)$ singular en 0, tal que la foliación $\mathcal{F}^{(n)}$ obtenida en la n -ésima explosión de X satisface:

1. \mathcal{P} es invariante para $\mathcal{F}^{(n)}$.
2. El conjunto de singularidades de $\mathcal{F}^{(n)}$ es Σ .
3. La holonomía de $P_j \setminus \Sigma$ con respecto a $\mathcal{F}^{(n)}$ es conjugada de H_j .

4.2. Problema de Riemann-Hilbert

En 1900, durante el Congreso Internacional de Matemáticas en París, Hilbert plantea 10 de los 23 problemas que conforman su famosa lista de problemas para las matemáticas del siglo XX. En el lugar 21 de esa lista aparece el siguiente: *Mostrar que siempre existe una ecuación diferencial lineal de clase fuchsiana, con puntos singulares y grupo de monodromía dados.* La formulación original de Hilbert es algo confusa, pues en la aclaración que da después del enunciado, describe sólo la condición de regularidad, mientras que en la formulación del problema menciona explícitamente sistemas fuchsianos ([11]). Poincaré dio una respuesta negativa al problema en el caso donde se busca una ecuación diferencial lineal de orden n y de clase fuchsiana que realice a un grupo de monodromía dado ([11]). Por su parte, J. Plemelj dio una solución afirmativa al problema si se considera un sistema lineal que sólo tenga singularidades regulares y realice al grupo de monodromía ([14]). En esta sección veremos una demostración del Teorema de Plemelj, para hacerlo, primero llevaremos el problema a un problema de conexiones meromorfas sobre haces vectoriales holomorfos.

Sabemos que cualquier conexión ∇ sobre el haz trivial $\pi : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$ queda determinada por una matriz Ω de 1-formas meromorfas (la forma de conexión de ∇)

$$\nabla x = dx - \Omega x \quad \forall x : M \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

De esta manera, construir una ecuación lineal con las características enunciadas por Hilbert se traduce en “*Construir una conexión meromorfa sobre el haz trivial sobre la esfera de Riemann, que tenga singularidades fuchsianas y grupo de monodromía preasignados*”.

Empezamos eligiendo, como en el Teorema 4.1.1, un sistema especial de generadores para el grupo de monodromía. Consideremos m puntos distintos $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{C}$ y elijamos una carta apropiada para garantizar que $a_i/a_j \notin \mathbb{R}_+$. Definamos los *lazos canónicos* γ_j que generan al grupo fundamental de $\mathbb{P} \setminus \Sigma$ como los lazos obtenidos al recorrer el segmento $[0, (1 - \varepsilon)a_j]$ rodear el círculo centrado en a_j y radio ε en sentido contrario a las manecillas del reloj y volver por el primer segmento recorrido en sentido opuesto, donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Siempre pensaremos que los puntos a_j están ordenados en sentido contrario a las manecillas del reloj y denotamos por U_0 un disco en \mathbb{C} de radio R que contenga a Σ . En ana-

logía con los sistemas lineales, diremos que la información de monodromía, la cual consta de m puntos a_1, \dots, a_m y m operadores lineales invertibles $M_1, \dots, M_m \in GL(n, \mathbb{C})$ cuya composición en ese orden da la identidad, es *realizada* por una conexión meromorfa ∇ en un haz vectorial de rango n sobre \mathbb{P}^1 si las singularidades de la conexión son los puntos a_j y la holonomía Δ_j (en la fibra $\Gamma_0 = \pi^{-1}(0)$ asociada con cada lazo canónico γ_j) coincide con el operador M_j .

Realizar un solo operador M_1 como la monodromía de una conexión meromorfa singular en un punto a_1 no presenta dificultad, simplemente consideremos la 1-forma meromorfa definida en una vecindad simplemente conexa del punto a_1 que contenga al origen

$$\Omega_1 := \frac{A_1 dt}{t - a_1},$$

donde A_1 es una matriz logaritmo³ de M_1 . Así la matriz de monodromía (en la fibra $\Gamma_0 = \{0\} \times \mathbb{C}^n$) es $e^{2\pi i A_1} = M_1$.

El siguiente objetivo es realizar una colección de operadores M_1, \dots, M_m como la monodromía de una conexión meromorfa sobre un haz y singular en los puntos $\{a_1, \dots, a_m\}$. Primero consideremos las 1-formas $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$ definidas arriba y observemos que como en el teorema de Lins Neto, la holonomía de un lazo simple que rodea todas las singularidades a_1, \dots, a_n debe ser la identidad.

Teorema 4.2.1. *Para cualquier colección de puntos $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{C}$ y matrices $\{M_j\}_{j=1}^m \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ tales que $M_m \cdots M_1 = id$, existe un haz vectorial de rango n sobre la esfera de Riemann y una conexión meromorfa ∇ en dicho haz cuyo espacio singular es Σ y tal que alrededor de cada punto singular a_j la conexión es holomorfamente equivalente a la conexión $d - \Omega_j$, donde*

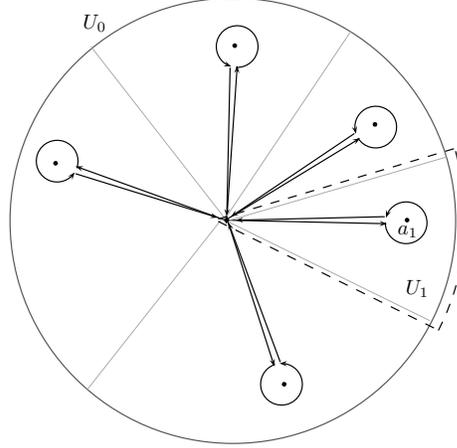
$$\Omega_j := \frac{A_j dt}{t - a_j}$$

y A_j satisface $M_j = e^{2\pi i A_j}$.

Demostración. Como ya debe sospecharse, la prueba consiste en construir una conexión meromorfa en un haz vectorial sobre el disco U_0 usando los operadores Ω_j y luego pegarla con la conexión trivial en el haz trivial sobre

³[11], pág. 35

otro disco para cubrir el punto al infinito. Como primer paso rebanemos el disco U_0 en sectores $S_j = \{t \in S_j | \alpha_j \leq \text{Arg}(t) \leq \alpha_{j+1}\}$ que sólo contengan un punto singular a_j . Engrosando un poco estos sectores, obtenemos una cubierta de U_0 por abiertos U_j que contienen al 0 y tales que su intersección $U_{ij} := U_i \cap U_j$ no contiene singularidades si $i \neq j$.



Ahora consideremos $U_j \setminus r_j$ con r_j el segmento del radio que pasa por a_j y que une a este punto con la frontera de U_0 . Aquí definimos el sistema

$$dx_j = \Omega_j x_j, \quad x_j(0) = id, \quad (4.8)$$

donde Ω_j se define como antes. Para cada j tomamos una matriz fundamental de soluciones $X_j(t)$ de la ecuación (4.8) y en las intersecciones por pares U_{ij} definimos los cociclos $H_{ij} = X_i X_j^{-1}$. Sea $\pi_0 : E \rightarrow U_0$ el haz inducido por $\mathcal{H} = \{H_{ij}\}$. Derivando el cociclo H_{ij} se tiene

$$\begin{aligned} dH_{ij} &= dX_i \cdot X_j^{-1} - X_i d(X_j)^{-1} \\ &= (dX_i \cdot X_i^{-1}) (X_i \cdot X_j^{-1}) - X_i (X_j^{-1} dX_j \cdot X_j^{-1}) \\ &= \Omega_i H_{ij} - H_{ij} \Omega_j. \end{aligned}$$

Observemos que los cociclos y los operadores Ω_j satisfacen la condición (3.6), por lo que existe una conexión meromorfa ∇ en π_0 , singular en Σ cuyas matrices de conexión son las 1-formas Ω_j . Además $H_{ij}(0) = id$ implica que la holonomía de ∇ en $\pi_0^{-1}(0)$ asociada a los lazos γ_j es precisamente M_j . En particular la holonomía al rodear todas las singularidades es trivial.

Por otra parte consideremos el haz trivial $\pi_1 : U_1 \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_1$ sobre el disco $U_1 = \{|t| > R - \varepsilon\} \subseteq \mathbb{P}$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $U_1 \cap \Sigma = \emptyset$ y sobre dicho haz tomemos la conexión trivial $\nabla_1 = d$. De manera análoga a como pegamos las foliaciones $\tilde{\mathcal{F}}$ de \tilde{M} y \mathcal{F}_V de $V \times \mathbb{C}$ en el Teorema 4.1.1 pegamos las conexiones $\nabla|_{\pi_0^{-1}(U_{01})}$ y $\nabla_1|_{\pi_1^{-1}(U_{01})}$ para obtener un haz vectorial π sobre \mathbb{P} y una conexión meromorfa en él con las propiedades deseadas. \square

Nada nos garantiza que el haz π que obtuvimos sea trivial. Si tuviéramos la suerte de que lo fuera, la conexión que definimos solucionaría el problema de Riemann-Hilbert en el lenguaje de conexiones. Lo que si podemos afirmar es que π es holomorfamente equivalente a algún haz estándar⁴ de Birkhoff-Grothendieck π_D definido por los cociclos $\{t^D, t^{-D}\}$ con $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ una matriz diagonal con entradas enteras y t^D la matriz diagonal cuyas entradas son de la forma t^{d_i} . Denotemos por $\mathcal{G} = \{G_0, G_1\}$ a las matrices cocadena que definen dicha equivalencia ($G_j \in GL(n, \mathcal{O}(U_j))$). Si logramos construir un mapeo entre haces que nos lleve a π en el haz trivial, dicho mapeo transformará la conexión ∇ en una conexión sobre el haz trivial con el mismo grupo de holonomía.

Observemos que las matrices cocadena $\{id, t^{-D}\}$ transforman a π_D en el haz trivial sobre \mathbb{P} .

$$\begin{array}{ccc} U_0 \supseteq U_{01} & \xrightarrow{H} & U_{01} \subseteq U_1 \\ G_0 \downarrow & & \downarrow G_1 \\ U_0 \supseteq U_{01} & \xrightarrow{t^D} & U_{01} \subseteq U_1 \\ id \downarrow & & \downarrow t^{-D} \\ U_0 \supseteq U_{01} & \xrightarrow{id} & U_{01} \subseteq U_1 \end{array}$$

Por lo tanto las matrices cocadena $\{G_0, t^{-D}G_1\}$ definen un mapeo meromorfo singular en el infinito que trivializa a π , con lo que resolvemos el problema de Hilbert (para singularidades regulares) en el lenguaje de conexiones.

Para resolver el problema como lo plantea Hilbert basta recordar que sobre el haz trivial cualquier conexión $d - \Omega$ corresponde al sistema lineal $dx = \Omega x$

⁴Ver B.2.

definido globalmente, por lo que la conexión meromorfa que construimos es solución. Así concluimos que cualquier grupo de monodromía puede realizarse por un sistema regular lineal en la esfera de Riemann y todas sus singularidades, excepto quizá el infinito, son fuchsianas.

Apéndice A

Variedades y haces

Una variedad compleja M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable que localmente se ve como \mathbb{C}^n , i.e., se puede cubrir con una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ tal que para cada $i \in \Delta$ existe un homeomorfismo φ_i entre U_i y un abierto de \mathbb{C}^n . A las parejas (U_i, φ_i) se les llama *cartas* y al conjunto de cartas $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \Delta}$ se le conoce como atlas. Si tomamos abiertos U_i y U_j cuya intersección es no vacía, a las funciones

$$\varphi_{ji} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

se les denomina *mapeos de transición o de pegado o cambios de coordenadas* entre las cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) . Cuando dichos mapeos son biholomorfismos se dice que M es una variedad holomorfa.

Un caso importante son las variedades conexas y holomorfas de dimensión 1, a las que se les conoce como *superficies de Riemann*. La cualidad de este tipo de variedades es que localmente tienen la estructura de \mathbb{C} por lo que heredan resultados de los complejos.

Ejemplo A.0.1. Claramente \mathbb{C} es una superficie de Riemann. Un ejemplo no trivial es la línea proyectiva $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para ver que efectivamente $\mathbb{C}P^1$ es una superficie de Riemann introducamos en ella la siguiente topología, diremos que un conjunto U es abierto en $\mathbb{C}P^1$ si $U \subseteq \mathbb{C}$ y es abierto con la topología usual, o si $U = K \cup \{\infty\}$ donde K es el complemento de algún conjunto compacto en \mathbb{C} . Así $\mathbb{C}P^1$ es homeomorfo a la esfera. Ahora construyamos un atlas para $\mathbb{C}P^1$, sean $(U_0 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}, \varphi_0 = Id)$ y

$(U_1 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}, \varphi_1)$ las cartas, donde $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Entonces $\varphi_{0,1}, \varphi_{1,0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ están dadas por $\varphi_{0,1}(z) = z$ y $\varphi_{1,0}(z) = \frac{1}{z}$ que son biholomorfismos. Por lo tanto $\mathbb{C}P^1$ es una variedad holomorfa de dimensión compleja 1 a la que se le llama esfera de Riemann y por comodidad la denotaremos por \mathbb{P} .

Podemos interpretar a los mapeos de transición como las instrucciones para pegar los abiertos $\{U_i\}$ que constituyen la cubierta de una variedad M . Ahora nos gustaría tomar cilindros cuya base sean dichos abiertos ($U_i \times \mathbb{C}^n$) y pegarlos a fin de conseguir una nueva variedad. Primero consideremos dos cilindros $S = U \times \mathbb{C}^n$, $\tilde{S} = \tilde{U} \times \mathbb{C}^n$ y en cada uno la proyección sobre la base

$$\pi : S \rightarrow U, \quad \tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{U}.$$

Un *mapeo de gauge* es una transformación holomorfa (o meromorfa) $H : S \rightarrow \tilde{S}$ que respeta la proyección en cada fibra, i.e., existe un mapeo holomorfo (meromorfo) $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{H} & \tilde{S} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ U & \xrightarrow{h} & \tilde{U} \end{array}$$

Se suele decir que H es fibrado sobre h . En coordenadas este mapeo se ve como $(p, v) \mapsto (h(p), H(p)v)$, donde $H \in GL(n, \mathcal{O}(U))$ y $\mathcal{O}(U)$ denota al conjunto de funciones holomorfas sobre U . Una transformación de gauge es invertible si y sólo si h es un biholomorfismo y $H(p)$ es invertible para cada $p \in U$.

Si tenemos transformaciones de gauge definidas en cilindros cuyas bases son abiertos que cubren a M , podemos verlos como las funciones de pegado para construir otra variedad llamada haz vectorial. La definición formal va así:

Definición A.0.1. *Un haz vectorial de rango n sobre M consiste de una terna (π, E, M) , donde $\pi : E \rightarrow M$ es un mapeo entre espacios topológicos continuo y suprayectivo llamado la proyección del haz, con las siguientes propiedades:*

- (Trivialidad local) Existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ de M y para cada abierto un biholomorfismo $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ que conjuga a π con la proyección del producto cartesiano $\pi_0 : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$ en la primera componente ($\pi_0 \circ \phi = \pi$). Así, para cada $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión n , llamado la fibra de p .
- La familia de trivializaciones $\{\phi_i\}_{i \in \Delta}$ respeta la estructura lineal de las fibras, i.e., si ϕ_i, ϕ_j son trivializaciones de π sobre dos abiertos U_i, U_j cuya intersección es no vacía, entonces el mapeo de transición entre ellos $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_{ij}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_{ij}) \times \mathbb{C}^n$ es de la forma

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(p, v) = (p, H_{ji}(p)v), \quad H_{ji}(p) \in GL(n, \mathbb{C}^n).$$

E y M se conocen como *espacio total* y *espacio base* respectivamente. Si dichos espacios son variedades holomorfas, π es una proyección holomorfa y las trivializaciones son biholomorfismos, diremos que se trata de un *haz vectorial holomorfo*.

Ejemplo A.0.2. El ejemplo clásico de un haz vectorial sobre una variedad holomorfa M es el haz tangente, formado por la colección de vectores tangentes en cada punto de M . Para verlo primero extendamos la noción de vectores tangentes en \mathbb{C}^n a variedades. Recordemos que en \mathbb{C}^n se definen los vectores tangentes en un punto q como la derivada de una curva que pasa por él, y varias curvas pueden definir al mismo vector si su derivada coincide en q , i.e., si $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son dos curvas en \mathbb{C}^n que en $t = 0$ pasan por $q \in \mathbb{C}^n$ y $\tilde{\alpha}'(0) = \tilde{\beta}'(0)$. La manera natural de extender esta definición a variedades es tomando cartas, si α es una curva en M tal que $\alpha(0) = p$ nos fijamos en una carta (U_i, φ_i) que contenga a p , entonces $\tilde{\alpha}_i = \varphi_i \circ \alpha$ parametriza a una curva en \mathbb{C}^n que en $t = 0$ pasa por $q_i = \varphi_i(p) = \varphi_i \circ \alpha(0) = \tilde{\alpha}_i(0)$. Como varias curvas pueden definir al mismo vector en un punto consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$$\alpha \sim_p \beta \iff \alpha(0) = p = \beta(0) \quad y \quad \tilde{\alpha}'_i(0) = \tilde{\beta}'_i(0)$$

Hay que revisar que esta definición es independiente de la carta elegida; si (U_j, φ_j) es otra carta tal que $p \in U_j$ entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_j(0) &= D(\varphi_j \circ (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i) \circ \alpha)(0) \\ &= D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{q_i} \tilde{\alpha}'_i(0) = D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{q_i} \tilde{\beta}'_i(0) \\ &= D(\varphi_j \circ (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i) \circ \beta)(0) = \tilde{\beta}'_j(0). \end{aligned}$$

Así, el *espacio tangente* de M en un punto p se define como el conjunto de clases de equivalencia de curvas en M que pasan por p .

$$T_p M := [\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M \mid \alpha(0) = p]_{\sim_p}$$

Por lo anterior podemos verlo como el conjunto de clases de equivalencia en \mathbb{C}^n que pasan por $\varphi_i(p)$ para alguna carta que contenga a p , por lo que en cada punto $p \in M$, $T_p M \cong \mathbb{C}^n$. Y el *haz tangente* de M está dado por $\pi : TM \rightarrow M$ donde

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

y π es la proyección sobre la primera coordenada $\forall p \in M \quad \pi(p, v) = p$.

La segunda condición en la definición de haz vectorial significa que para cada par de trivializaciones locales cuyos dominios se intersectan existe una función $H_{ji} : U_{ij} \rightarrow GL(n, \mathbb{C}^n)$ holomorfa e invertible ($H_{ji}^{-1} = H_{ij}$).

Definición A.0.2. Sea $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ una cubierta abierta de M . Un **cociclo** holomorfo subordinado a la cubierta es una colección de matrices holomorfas $\mathcal{H} = \{H_{ji}\}$ definidas en las intersecciones no vacías por pares U_{ij} que satisfacen

$$\begin{aligned} H_{ji} H_{ij} &= Id \quad \text{en } U_{ij} \\ H_{jk} H_{ki} &= H_{ji} \quad \text{en } U_{ik} \cap U_{kj}. \end{aligned}$$

Cualquier familia de trivializaciones de un haz vectorial holomorfo define un cociclo holomorfo, de hecho es fácil ver que cualquier cociclo subordinado a una cubierta de una variedad, determina un haz vectorial sobre ella.

La definición de haces vectoriales nos permite elegir distintas familias de trivializaciones. Si $\{\phi_i\}$ trivializa al haz en la cubierta $\{U_i\}$ y $\{G_i : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n\}$ es una colección de transformaciones de gauge invertibles fibradas sobre la identidad, entonces $\tilde{\phi}_i := G_i \circ \phi_i$ también trivializa al haz en cada U_i . Los cociclos H_{ij} y \tilde{H}_{ij} asociados al haz con cada familia de trivializaciones se relacionan de la siguiente manera

$$\tilde{H}_{ij} G_j = G_i H_{ij}. \tag{A.1}$$

Diremos que dos cociclos H_{ij} y \tilde{H}_{ij} definidos sobre la misma cubierta son equivalentes si existe una colección de matrices meromorfas $\{G_i\}$ que satisfacen (A.1). En particular las funciones de pegado del haz trivial son

la identidad. Así un haz, cuyo cociclo subordinado a una cubierta $\{U_i\}$ es $\{H_{ij}\}$, es equivalente al haz trivial si existe una familia de matrices holomorfas $\mathcal{G} = \{G_i\}$ definidas en los abiertos U_i tal que $H_{ji} = G_j G_i^{-1}$. En este caso se dice que el cociclo es *soluble*.

Como el espacio total de un haz vectorial en general no es un producto cartesiano, necesitamos generalizar la noción de funciones vectoriales.

Definición A.0.3. Una *sección* de un haz vectorial holomorfo $\pi : E \rightarrow M$ es un mapeo $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = id$, i.e., la imagen de cada punto $p \in M$ está contenida en la fibra $\pi^{-1}(p)$.

Las secciones en el espacio tangente TM son llamadas *campos vectoriales* en M , y las del cotangente $T^*M := \{(p, L) | L : T_p M \rightarrow \mathbb{C} \text{ lineal}\}$ se conocen como 1-formas holomorfas ¹.

Si $\{U_i\}$ es una cubierta de M y $\{\phi_i\}$ es una familia de trivializaciones locales de π , entonces

$$\begin{aligned} \phi_i \circ s|_{U_i} : U_i &\rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n \\ p &\mapsto (p, x_i(p)), \end{aligned}$$

donde cada $x_i : U_i \times \mathbb{C}^n$ es una función vectorial llamada vector cocadena. Si tomamos dos trivializaciones cuyo dominios se intersectan tendremos que

$$x_j = H_{ji} x_i \tag{A.2}$$

donde $\{H_{ij}\}$ es el cociclo correspondiente a π .

Inversamente no es difícil ver que dado un cociclo $\{H_{ij}\}$ y un haz definido por él, cualquier familia de vectores cocadena que satisface (A.2) en las intersecciones por pares de sus dominios define una sección del haz.

Cuando los vectores cocadena $\{x_i\}$ asociados a una sección s son funciones vectoriales holomorfas o meromorfas diremos que la sección asociada es holomorfa o meromorfa respectivamente. El conjunto de secciones meromorfas de un haz $\pi : E \rightarrow M$ admite una estructura de espacio vectorial sobre el campo de las funciones meromorfas en M con las siguientes operaciones:

$$s = s' + s'' \iff x_i = x'_i + x''_i, \quad s' = \varphi s \iff x'_i = \varphi x_i$$

Dicho espacio será denotado por $\Gamma(\pi)$.

¹Denotaremos por $\Lambda^1(M)$ al espacio de las 1-formas en M .

A.1. Grado de un haz

Recordemos que el orden en el origen de una función meromorfa en $(\mathbb{C}, 0)$ es el menor exponente que aparece en su serie de Laurent, cuando el punto en el que deseamos calcular el orden no es el origen trasladamos. Es fácil ver que el orden de una sección meromorfa φ es cero excepto en un número finito de puntos, pues escribiendo su serie de Laurent en un punto p ,

$$\varphi_p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n,$$

así $\text{ord}_{z_0}\varphi$ es distinto de cero si y sólo si p es un polo o un cero de φ .

Si tenemos un haz vectorial lineal sobre una superficie de Riemann $\pi : E \rightarrow M$ y una sección meromorfa $s \in \Gamma(\pi)$ definimos el orden de s en un punto $p \in M$ como el orden del correspondiente vector cocadena x_i si $i \in U_i$. Notemos que esta definición es independiente de la trivialización elegida, pues por (A.2) para cada $p \in U_{ij}$, $\text{ord}_p x_j = \text{ord}_p H_{ji} + \text{ord}_p x_i \geq \text{ord}_p x_i$ ya que H_{ji} es holomorfa. Análogamente obtenemos la otra desigualdad y por lo tanto el orden de s en un punto está bien definido.

Proposición A.1.1. *Para cualquier sección meromorfa s de un haz lineal sobre una superficie de Riemann compacta $\pi : E \rightarrow M$, $\sum_{p \in M} \text{ord}_p s$ es la misma.*

Demostración. Sean $s, s' \in \Gamma(\pi)$, como las fibras de π son lineales, s y s' deben ser proporcionales, i.e., $s' = \varphi s$ con $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa. Así

$$\sum_{p \in M} \text{ord}_p s' = \sum_{p \in M} \text{ord}_p(\varphi s) = \sum_{p \in M} \text{ord}_p \varphi + \sum_{p \in M} \text{ord}_p s.$$

Como φ es una función meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta, por el Teorema del residuo² $\sum_{p \in M} \text{ord}_p \varphi = 0$, por lo que las sumas de los ordenes de s y s' coinciden. \square

²Teorema del residuo ([4]): Para cualquier 1-forma meromorfa ω sobre una superficie de Riemann compacta M en $M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ se satisface que

$$\sum_{p \in M} \text{Res}_{a_k} \omega = 0.$$

Así definimos el *grado de un haz* lineal sobre una superficie de Riemann compacta como $\deg(\pi) = \sum_{p \in M} \text{ord}_p s$ para cualquier $s \in \Gamma(\pi)$.

Apéndice B

Clasificación de los haces vectoriales sobre la esfera de Riemann

B.1. Clasificación de los haces lineales sobre la esfera de Riemann

Los conceptos de haces vectoriales holomorfos, cociclos y cocadenas son más fáciles de trabajar cuando el rango es $n = 1$ porque las matrices de 1×1 conmutan. A los haces con este rango se les llama haces lineales.

Consideremos la cubierta estándar de la esfera de Riemann dada en el Ejemplo A.0.1, los cociclos inscritos sobre dicha cubierta son sólo un par de matrices holomorfas invertibles en U_{01} , $H_{10}^{-1}(t) = H_{01}(t)$, llamados *cociclos de Birkhoff-Grothendieck*. Como el rango es $n = 1$ en realidad tenemos una función holomorfa h que no se anula en U_{01} , $h(t) = h_{01}(t) = 1/h_{10}(t)$.

Denotaremos por ξ_d al haz lineal correspondiente al cociclo estándar de Birkhoff-Grothendieck

$$\mathcal{L}_d = \{h_{01}, h_{10}\}, \quad h_{01}(t) := t^d|_{t \in U_{01}} = \frac{1}{h_{10}(t)},$$

con d un entero al que llamaremos el grado del haz lineal ξ_d .

Probaremos que cualquier haz lineal sobre la esfera de Riemann es equivalente al haz estándar ξ_d para algún $d \in \mathbb{Z}$. Para eso requeriremos el siguiente resultado.

Lema B.1.1. *Sean $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}P^1$ dos dominios abiertos cuya intersección $V = U \cap \tilde{U}$ tiene frontera suave por pedazos. Entonces cualquier función f holomorfa en V y continua en \bar{V} puede escribirse como la diferencia de funciones holomorfas en U y \tilde{U} .*

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy f queda determinada por sus valores sobre ∂V . Escribimos dicha frontera como la unión disjunta $\partial V = A \sqcup B$ con $A \subseteq \partial V$ y $B \subseteq \partial \tilde{V}$. Entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z)}{z-t} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{f(z)}{z-t} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{f(z)}{z-t} dz.$$

Ambas integrales son holomorfas en sus dominios, U y \tilde{U} , y continuas en la frontera. \square

Lema B.1.2. *Cualquier cociclo de Birkhoff-Grothendieck $\mathcal{L}_d = \{h_{01}, h_{10}\}$ es equivalente a un cociclo estándar de algún grado d .*

Demostración. Sea $d = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz$ donde γ es la frontera del círculo unitario recorrida en sentido positivo. Para dicha d el logaritmo de la función $t^{-d}h(t)$ está bien definido (considerando la rama principal de logaritmo) y $f(t) := \ln(t^{-d}h(t))$ es holomorfa en U_{01} . Escribiendo a f como en el lema anterior obtenemos dos funciones u_0, u_1 holomorfas en U_0 y U_1 . Sean $g_0 = e^{u_0}$ y $g_1 = e^{u_1}$, entonces g_0, g_1 son holomorfas y no se anulan. Así $t^{-d}h(t) = \frac{g_0(t)}{g_1(t)}$ y por lo tanto

$$h(t)g_1(t) = t^d g_0(t),$$

i.e., los cociclos \mathcal{L} y \mathcal{L}_d son equivalentes. \square

El lema anterior clasifica a los cociclos inscritos en la cubierta estándar de la esfera por dos cartas, de hecho, esta clasificación es suficiente para describir a todos los haces lineales holomorfos sobre la esfera.

Teorema B.1.1. *Cualquier haz lineal sobre la esfera de Riemann es holomorfa equivalente al haz estándar ξ_d de algún grado $d \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea π un haz lineal sobre \mathbb{P} . Empezaremos mostrando que cualquier haz lineal sobre un disco $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{P}$ es equivalente al haz trivial.

Sea $U \subseteq \mathbb{P}$ una pequeña ε -vecindad de \mathbb{D} y consideremos el cociclo \mathcal{H} que define a π , el cual está inscrito en alguna cubierta $\{U_\alpha\}$ de U . Como \mathbb{D} es compacto lo cubrimos con un número finito de elementos de $\{U_\alpha\}$, refinamos dicha cubierta para que los abiertos sean pequeñas vecindades de una triangulación y los ordenamos de tal forma que $U_{k+1} \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)$ sea simplemente conexo para todo $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\{U_j\}$ a esta cubierta.

Para ver que $\pi|_{\mathbb{D}}$ es equivalente al haz trivial probaremos por inducción que \mathcal{H} es soluble sobre $\{U_i\}$. Sea $W_j = \bigcup_{i \leq j} U_i$ y supongamos que \mathcal{H} es soluble sobre W_j para toda $j < k$, entonces podemos asumir que todas las transiciones h_{ji} entre los dominios son triviales si $i, j < k$. Trivialicemos el cociclo sobre $W_k = W_{k-1} \cup U_k$: por construcción $V := W_{k-1} \cap U_k$ es simplemente conexo, por lo que el logaritmo del mapeo de transición h está bien definido y por el Lema B.1.1 podemos escribirlo como la diferencia de dos funciones holomorfas, una en W_{k-1} y otra en U_k . Exponenciando tenemos que $h = \frac{g_0}{g_1}$, i.e., el cociclo \mathcal{H} es soluble en W_k .

Así todo haz lineal puede trivializarse sobre las dos cartas de la cubierta estándar de Birkhoff-Grothendieck, reduciendo el problema al lema anterior. \square

B.2. Clasificación de haces de rango n sobre la esfera de Riemann

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que cualquier haz vectorial sobre la esfera de Riemann es holomorfamente equivalente a una suma directa de haces lineales estándar $\xi_D = \xi_{d_1} \oplus \dots \oplus \xi_{d_n}$. Para ello trabajaremos en las intersecciones por pares de las cartas que cubren a \mathbb{P} . Si $U_0, U_1 \subseteq \mathbb{P}$ son abiertos simplemente conexos tendremos dos casos para su intersección, que topológicamente U_{01} sea un disco o un anillo. Al primer caso lo llamaremos de Cartan y al segundo de Birkhoff-Grothendieck. Para probar la equivalencia holomorfa nos basaremos en el siguiente resultado cuya prueba se puede consultar en [10] (sección VI.E).

Teorema B.2.1. *Todo cociclo de Cartan o de Birkhoff-Grothendieck es*

meromorfa soluble, i.e., existe un par de matrices meromorfas F_0, F_1 con inversa meromorfa definidas en los abiertos U_0 y U_1 tales que $F_0 = H_{01}F_1$ en U_{01} .

Primero veamos que en el caso de discos, la trivialización se puede hacer de manera holomorfa.

Lema B.2.1. *Todo cociclo de Cartan es holomorfa soluble.*

Demostración. Para volver holomorfas a las matrices del teorema anterior, las multiplicamos por los factores adecuados $(t - t_k)^{r_k}$ con t_k polo de orden r_k . Notemos que al hacer esto hemos generado ceros en el determinante de las nuevas matrices denotadas nuevamente por $F_i(t)$ y como queremos que sean invertibles quitaremos los ceros multiplicando por la derecha una matriz adecuada (esta idea surge de las matrices elementales en álgebra lineal). Si t_0 es un cero de $\det(F_i(t))$, las columnas de $F_i(t_0)$ son linealmente dependientes, i.e., $v_k = \sum_{j < k} a_j v_j$ para alguna columna v_k . Considerando la matriz elemental

$$E := \begin{bmatrix} & & -a_1 & & & & \\ & \mathbf{Id}_{k-1} & \vdots & & \mathbf{0}_{(n-k) \times (k-1)} & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{0} & 0 & \dots & 0 \\ & & -a_{k-1} & & & & \\ \mathbf{0}_{(n-k) \times (k-1)} & & \vdots & & \mathbf{Id}_{n-k} & & \\ & & 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

Entonces $F_i(t_0)E$ tiene una columna de ceros, la cual podemos dividir entre $t - t_0$. Si definimos $R(t) := \text{diag}\{1, \dots, 1, (t - t_0)^{-1}, 1, \dots, 1\}$ tendremos que $F'_i(t) = F_i(t)ER(t)$ es holomorfa y $\det(F'_i(t)) = \det(F_i(t))(t - t_0)^{-1}$, así $\det(F'_i(t))$ tiene un cero menos que $\det(F_i(t))$. Repitiendo el argumento un número finito de veces conseguimos matrices holomorfas invertibles en sus dominios. \square

Para estudiar los cociclos de Birkhoff-Grothendieck consideraremos el caso límite de un anillo, i.e., un disco agujerado. Empezaremos tomando $U_0 = \mathbb{C}$ y $U_1 = (\mathbb{P}, \infty)$ una bola abierta del infinito en la esfera de Riemann. Una matriz cociclo meromorfa en el infinito definida en U_{01} se llama *cociclo de Savage*.

Lema B.2.2 (Savage). *Todo cociclo de Savage es holomorfaamente equivalente a una matriz de cociclo estándar $\{t^D\}$ con D una matriz diagonal con entradas enteras.*

Demostración. La idea de la demostración es llevar una matriz meromorfa a su forma diagonal mediante una serie de transformaciones holomorfas. Sea $H(t)$ un cociclo meromorfo con polo en el infinito, factorizando potencias adecuadas de t , podemos escribir a $H(t)$ como $t^{D_1} H_1(t)$ con $H_1(t)$ holomorfa en el infinito. Como primer paso para deshacernos del cero en el infinito del $\det(H_1(t))$ supongamos que $H_1(t)$ es holomorfa en (\mathbb{P}, ∞) y degenerada en $t = \infty$. Entonces algún renglón se escribe como combinación lineal de los siguientes renglones $v_k = \sum_{j>k} a_j v_j$. Definiendo

$$E := \begin{bmatrix} & & 0 & & & & \\ & \mathbf{Id}_{k-1} & \vdots & & \mathbf{0}_{(n-k) \times (k-1)} & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k+1} & \cdots & -a_n \\ & & 0 & & & & \\ \mathbf{0}_{(n-k) \times (k-1)} & & \vdots & & \mathbf{Id}_{n-k} & & \\ & & 0 & & & & \end{bmatrix},$$

obtenemos un renglón de ceros en la matriz $EH_1(\infty)$, el cual podemos dividir entre t . Haciendo $D' = \text{diag}\{0, \dots, -1, \dots, 0\}$ conseguimos una matriz holomorfa en infinito $H'_1(t) := t^{-D'} EH_1(t)$ tal que $\det(H'_1(t)) = t \det(H_1(t))$ y por lo tanto

$$\text{ord}_\infty \det(H'_1(t)) = \text{ord}_\infty H_1(t) - 1$$

Ahora supongamos que $D_1 = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ con enteros $d_1 \geq \dots \geq d_n$ y conjugemos E por t^{D_1}

$$\begin{aligned} (t^{D_1} E t^{-D_1})_{ij} &= \sum_{k=1}^n (t^D E)_{ik} (t^D)_{kj} \\ &= (t^{D_1} E)_{ij} t^{-d_j} \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (t^D)_{ik} E_{kj} \right] t^{-d_j} \\ &= t^{d_i - d_j} e_{ij}. \end{aligned}$$

Así $G(t) := t^{D_1} E t^{-D_1}$ es una matriz holomorfa triangular superior. Además como $EH_1(t) = t^{D'} H'_1(t)$, se satisface

$$G(t) t^{D_1} H_1(t) = t^{D_1} E H_1(t) = t^{D_1 + D'} H'_1(t),$$

lo que significa que $t^{D_1}H_1(t)$ es holomorfa y equivalente a $t^{D_1+D'}H'_1(t)$. Nótese que si las entradas de la matriz D_1 no están ordenadas de la forma conveniente, podemos elegir una matriz constante P que permute los renglones para llevarlos al caso anterior $D'_1 := Pt^{D_1}p^{-1}$. Repitiendo un número finito de veces el proceso anterior (pues el cero de $\det(H_1(t))$ en $t = \infty$ tiene multiplicidad finita) conseguimos una equivalencia holomorfa entre $H(t)$ y $t^{D_k}H_k(t)$ con $H_k(t)$ invertible. \square

Lema B.2.3. *Cualquier cociclo de Birkhoff-Grothendieck $\mathcal{H} = \{H_{01}, H_{10}\}$ es holomorfa y equivalente a un cociclo de la forma $\{t^D, t^{-D}\}$ donde D es una matriz diagonal con entradas enteras.*

Demostración. Por el Teorema B.2.1 existen matrices meromorfas $\{F_0, F_1\}$, con inversa meromorfa que satisfacen $F_0 = H_{01}F_1$ en la intersección de sus dominios. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que el polo es el infinito. Como F_1 es meromorfa en $t = \infty$, por el Lema de Sauvage es holomorfa y equivalente a una matriz diagonal t^D , i.e, existen matrices holomorfas e invertibles A y B tales que $F_1A = Bt^D$, así $F_0 = H_{01}Bt^D A^{-1}$ y por lo tanto $H_{01}B = (F_0A)t^{-D}$. \square

Combinando los Lemas B.2.1 y B.2.3 y copiando la idea de la prueba del Teorema B.1.1 de trivializar primero sobre los discos que forman la cubierta estándar de Birkhoff-Grothendieck, conseguimos una equivalencia entre cualquier haz vectorial holomorfo sobre la esfera de Riemann de rango n y un haz de la forma $\xi_D = \xi_{d_1} \oplus \cdots \oplus \xi_{d_n}$.

Bibliografía

- [1] Arnol'd V. I. *Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag (1988), ISBN 0-387-96649-8.
- [2] Arnol'd V. I. *Remarks on singularities of finite codimension in complex dynamical systems*, Funkts. Anal. Prilozh., 3:1 (1969), 1–6.
- [3] Camacho C.; Sad P. *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 3, 579-595.
- [4] Forster O. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [5] Gómez-Mont X.;Ortiz L. *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. Segunda edición, Sociedad Matemática Mexicana, México D.F., 2004, ISBN 968-36-0767-5.
- [6] Grauert H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331-368. MR0137127 (25 #583).
- [7] Griffiths P.; Harris J. *Principles of Algebraic Geometry* Wiley Interscience, 1978.
- [8] Gunning R., *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Vol. I. Wadsworth & Brooks/Cole, Function theory, 202 pp. ISBN 0-534-13308-8.
- [9] Gunning R., *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Vol. II. Wadsworth, Belmont, 1990. ISBN 0534133096 / 0-534-13309-6.
- [10] Gunning R.;Rossi H., *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965. MR 0180696 (31 #4927).

- [11] Ilyashenko Y.; Yakovenko S. *Lecture on Analytic Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Providence, RI, 2008, xiv+625p, ISBN 978-0-8218-3667-5.
- [12] Lins Neto A., *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*. J. Differential Geom. 26 (1987), no. 1, 1–31. MR 892029 (88f:32047).
- [13] Palis J. Jr.: Welington M., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq, 1978.
- [14] Plemelj J. *Problems in the Sense of Riemann and Klein* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Nr. 16. 173 S. m. 15 Fig. New York-London-Sydney 1964. John Wiley & Sons Inc.