



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Convexidad en Gráficas Orientadas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:
ALEJANDRA CAROLINA BARRIOS BAROCIO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Barrios
Apellido materno	Barocio
Nombre(s)	Alejandra Carolina
Teléfono	55 54 59 39 30
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	305040769
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Martha Gabriela
Apellido paterno	Araujo
Apellido materno	Pardo
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Montserrat
Apellido paterno	Reyna
Apellido materno	Miranda
7. Datos del trabajo escrito.	
Título	Convexidad en Gráficas Orientadas
Número de páginas	68 p.
Año	2013

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Conceptos básicos y notación	9
1.2. Gráficas con orden y número de convexidad prescritos	18
2. Números de convexidad orientable	27
2.1. Números de convexidad superior e inferior	27
2.2. Los espectros de convexidad de Gráficas completas	42
3. Los números de convexidad orientable inferior de Gráficas exteriormente planas	49
3.1. Gráficas Planas	49
3.2. Convexidad inferior en gráficas exteriormente planas	53
Índice Alfabético	61

Resumen

En múltiples ramas de las Matemáticas como son la Geometría, la Topología, el Análisis Matemático y la Teoría de Gráficas nos encontramos con la función de distancia. Esta función también denominada métrica, asocia un número real (la distancia) a pares de elementos de un conjunto. Se dice que una función es una *métrica*, comúnmente denotada por $d(x, y)$, sobre un conjunto M cuando ésta cumple las siguientes cuatro propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ y
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

para todo $x, y, z \in M$. Y (M, d) es denominado un *espacio métrico*.

En la Teoría de Gráficas la distancia usual entre pares de vértices de una gráfica se define como la longitud de la trayectoria más corta que une estos pares de vértices, esta definición de distancia induce una métrica sobre el conjunto de vértices de la gráfica. Un *conjunto convexo* será aquel que contiene a todos los vértices de toda geodésica que conecta pares de vértices del conjunto. Entendiéndose por geodésica, la trayectoria de longitud más corta entre ambos vértices.

El *casco convexo* de un conjunto S de vértices de una gráfica es el conjunto convexo más pequeño conteniendo a S y es denotado por $[S]$. El casco convexo se puede formar tomando todas las geodésicas uniendo dos vértices de S e iterando esta operación. Esta operación es conocida como *clausura geodésica*, $I[S]$, y el número de veces que se hace esto para obtener el casco convexo se denomina número de iteración geodésica. Todos estos conceptos se pueden extender a *gráficas orientadas*, que son gráficas cuyas aristas tienen

orientación, por lo que aunque las definiciones básicamente son las mismas ahora debe tomarse en cuenta dicha orientación. Así, tendremos trayectorias dirigidas por lo que no necesariamente la distancia en este tipo de gráficas cumplirá simetría ($d(x, y) = d(y, x)$), en consecuencia no inducirá una métrica sobre el conjunto de vértices y por tanto los conjuntos convexos serán diferentes a los que se tiene en gráficas sin orientación. Esto último quizá sea una de las razones principales por las que el tema de la convexidad en gráficas orientadas ha sido poco estudiado hasta ahora.

La cardinalidad del subconjunto propio más grande de los vértices de una gráfica (orientada) con la propiedad de ser convexo nos da el *número de convexidad* de una gráfica (orientada). Ya que a una gráfica dada G se le pueden dar múltiples orientaciones, por cada una de estas orientaciones se tendrá un número de convexidad, lo cual da lugar a la construcción del conjunto que está conformado por todos estos números, a dicho conjunto se le llamará el *espectro de convexidad* de G . Al mínimo de esta gama de números se le conoce como *número de convexidad orientable inferior*, mientras que al máximo, *número de convexidad orientable superior*.

Nos enfocaremos principalmente en los artículos [3] y [4] ya que aquí es donde se encuentran la mayor cantidad de resultados y más importantes de la convexidad en gráficas orientadas; sin embargo, antes de adentrarnos al tema se platicará brevemente en la Introducción acerca de los trabajos más importantes de la convexidad en gráficas dando a conocer sus principales resultados y llegando finalmente hasta su estudio en gráficas orientadas.

Entre los resultados que se encontrarán de la convexidad en gráficas orientadas y que son expuestos a lo largo de la tesis tenemos: caracterizaciones del número de convexidad para cierto tipo de gráficas orientadas, la determinación del espectro de convexidad y el espectro de convexidad fuerte para las gráficas completas, se dará a conocer el número de convexidad orientable superior e inferior para ciertas gráficas, así como condiciones suficientes para que una gráfica orientada conexa tenga número de convexidad 1. También se darán algunos resultados para gráficas planas y particularmente gráficas exteriormente planas.

Introducción

La convexidad es un concepto fundamental en la Geometría, la Topología, y en el Análisis Matemático, ya que tiene lugar al estudiar conjuntos con determinadas características en espacios métricos. Un espacio métrico es un conjunto donde la noción de distancia (llamada métrica) entre elementos del conjunto esta definida. Formalmente, un *espacio métrico* es una pareja ordenada (M, d) donde M es un conjunto y d es una métrica sobre M ; es decir, una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in M$ se cumple:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Espacios métricos los encontramos en los números reales, en la geometría euclideana, en todo espacio euclideano de dimensión n , en todo espacio vectorial con norma, en la geometría elíptica, en la geomtría hiperbólica, y siendo de gran importancia para los fines de esta tesis, en la Teoría de Gráficas donde la distancia usual entre vértices inducirá una métrica sobre el conjunto de vértices.

La convexidad abstracta comenzó su desarrollo a principios de la segunda mitad del siglo pasado, con la búsqueda de un sistema axiomático que definiera a un conjunto convexo a fin de generalizar, de alguna manera, el concepto clásico de conjunto convexo euclideano. Se han realizado numerosas contribuciones a este tópico. Y para conocer el extenso estudio en este tema se puede consultar [16]. Entre la amplia variedad de estructuras en distintas ramas de las matemáticas que han sido estudiadas bajo este punto de vista, estamos particularmente interesados en las gráficas de la Teoría de Gráficas,

donde ciertas convexidades asociadas a los conjuntos de vértices son conocidas.

La distancia usual entre dos vértices u y v , denotada por $d(u, v)$, en una gráfica conexa G se define como la longitud de la uv -trayectoria más corta en G . De esta manera, la distancia usual entre pares de vértices en una gráfica naturalmente da lugar a la noción de un intervalo entre un par de vértices. Ésto a su vez, nos permite extender las nociones de conjuntos convexos, casco convexo y puntos extremos en el espacio euclideo al conjunto de vértices de una gráfica.

La *excentricidad* de un vértice $u \in V(G)$ es definida como $exc(u) = \max\{d(u, v) : v \in V(G)\}$. En [5] se introduce el concepto de *vértice de contorno* cuya propiedad es que su excentricidad es mayor o igual a la excentricidad de cualquier vértice en su vecindad; esto es, v es vértice de contorno si $exc(v) \geq exc(u)$ para todo $u \in N(v)$, donde $N(v) = \{u \in V(G) : (v, u) \text{ es una arista en } G\}$. Y se muestra que todo conjunto convexo de vértices en una gráfica es el casco convexo de la colección de sus vértices de contorno. Y se caracteriza a aquellas gráficas para las cuales todo conjunto convexo tiene la propiedad de que sus vértices de contorno coinciden con sus vértices extremos. Éstos últimos son aquellos que al ser removidos el resto de los vértices de la gráfica sigue siendo un conjunto convexo.

Al indagar sobre los inicios de la investigación en la convexidad en gráficas se ha encontrado que las definiciones formales de los conceptos relacionados con convexidad así como los primeros resultados se encuentran en el libro de Buckley y Harary [6] y en el artículo de Harary y Nieminen [7], en este último Harary y Nieminen definen el casco convexo de un conjunto S de vértices de una gráfica como el conjunto más pequeño T conteniendo a S tal que todos los vértices en cualquier geodésica uniendo vértices de T caen en T y denotan al casco convexo de S por $[S]$. El casco convexo T también se puede formar tomando todas las geodésicas uniendo dos vértices de S , e iterando esa operación. El número de veces que ésto se hace a S para obtener T se conoce como el *número de iteración geodésica* de S y es denotado por $gin(S)$. En este mismo artículo, [7], Harary y Nieminen determinan el número más pequeño de vértices en una gráfica G tal que $gin(G) = n$ y las gráficas extremales son construidas.

Se dice que S es convexo si $[S] = S$. Cuando S es convexo, entonces se puede hablar del número de casco (hull number) de S , el cual se denota por $h(S)$. Everett y Seidman [8] dieron la definición del número del casco (hull

number) de una gráfica como la cardinalidad de un subconjunto de vértices S mínimo por contención, con la propiedad de que su casco convexo sea el conjunto de vértices de la gráfica; es decir, $[S] = V(G)$. Si $S \subset V$ es convexo, entonces un vértice extremo de S es un vértice v tal que $S - v$ es convexo.

Everett y Seidman dan caracterizaciones para gráficas con valores particulares de h , y derivan cotas superiores e inferiores para h . Luego Harary et al. [9] abordó el concepto de número geodésico en gráficas. El número geodésico de una gráfica G es la mínima cardinalidad de un subconjunto de vértices S , con la propiedad de que todo vértice de G está contenido en alguna geodésica de un par de vértices en S .

Otra distancia que se encuentra con cierta frecuencia en gráficas es la distancia de Steiner. Si G es una gráfica conexa y A es un subconjunto de vértices de G , entonces la distancia de Steiner de A , $d_G(A)$, es el tamaño $|T|$ (número de aristas) de una subgráfica conexa más pequeña T de G que contiene a A . Tal subgráfica es un árbol y se denomina un árbol de Steiner de A . En el artículo de [14] se maneja el concepto de árboles de Steiner y como éstos llevan a definir la distancia de Steiner como una generalización de la distancia usual en gráficas. Esto también se puede consultar más ampliamente en [15].

En [14] se define una convexidad abstracta en el contexto de gráficas por medio de la distancia de Steiner y se compara con la convexidad en gráficas orientadas. Entre los resultados de este artículo se tiene que cualquier árbol de Steiner de un conjunto de vértices está incluido en el casco convexo geodésico del conjunto. También se caracteriza la clase de gráficas donde convexidad de Steiner se convierte en una geometría convexa, eso significa que todo conjunto convexo es el casco convexo de sus puntos extremos.

Como podemos observar la convexidad en gráficas se ha venido estudiando hace unos 30 a 40 años atrás, además se puede decir que no existe una gran cantidad de resultados en el tema; sin embargo, es aún menor lo que se puede decir de la convexidad en gráficas orientadas, que de hecho es un tema mucho más reciente. Quizá la falta de estudio en este tema se debe a que a diferencia de las gráficas sin orientación alguna para sus aristas, en gráficas orientadas la distancia dirigida entre vértices no cumple simetría por lo cual la definición usual de distancia no induce una métrica sobre el conjunto de vértices de la gráfica orientada. Así, los conjuntos convexos en estas gráficas se comportan de forma distinta. Razón por la cual llevó a este

trabajo de tesis cuyo objetivo es dar a conocer los primeros y más importantes resultados de manera detallada y con especial cuidado en la descripción de las demostraciones correspondientes, principalmente los encontrados en [3] y [4], pues son en estos artículos donde se concentran la mayor cantidad de los resultados. También mostraremos algunos problemas abiertos y las posibles líneas de investigación.

Los números geodésicos de gráficas y digráficas han sido investigados recientemente. Chartrand y Zhang [10] extendieron el estudio de número geodésico a gráficas orientadas. La definición es básicamente la misma que en gráficas, excepto que las direcciones de las aristas son tomadas en cuenta. En el artículo [11] se estudia el espectro geodésico de una gráfica. El espectro geodésico (fuerte) de una gráfica G es el conjunto de números geodésicos de todas las orientaciones (fuertemente conexas) de G . Además se determina el espectro geodésico y el espectro geodésico fuerte de varias clases de gráficas. También Chartrand, Fink y Zhang fueron los primeros en introducir el concepto de convexidad de una gráfica orientada en [4].

Para una gráfica orientada D , $I[u, v]$ denotará el conjunto de todos los vértices que caen en una uv -geodésica o una vu -geodésica. Para $S \subset V(D)$, $I[S]$ denota la unión de todos los $I[u, v]$ para todo $u, v \in S$. Sea $[S]$ el conjunto convexo más pequeño que contiene a S . El número geodésico $g(D)$ de una gráfica orientada D es la mínima cardinalidad de un conjunto S con $I[S] = V(D)$, el número de casco, $h(D)$ de una gráfica orientada D es la mínima cardinalidad de un conjunto S con $[S] = V(D)$, y el número de convexidad, $con(D)$, de una gráfica orientada D es la máxima cardinalidad de un conjunto convexo propio de D . Al igual que con el espectro geodésico, se tiene el espectro de convexidad (fuerte) de una gráfica el cual corresponde a toda la gama de los números de convexidad para todas las orientaciones (fuertes) de la gráfica. Ahora, si $O(G)$ es el conjunto de todas las orientaciones de G , se define

- $g^-(G) = \min\{g(D) : D \in O(G)\}$,
- $g^+(G) = \max\{g(D) : D \in O(G)\}$,
- $h^-(G) = \min\{h(D) : D \in O(G)\}$,
- $h^+(G) = \max\{h(D) : D \in O(G)\}$,
- $con^-(G) = \min\{con(D) : D \in O(G)\}$ y

- $con^+(G) = \max\{con(D) : D \in O(G)\}$.

A partir de estas de estas definiciones tenemos que

$$g^-(G) \geq h^-(G),$$

$$g^+(G) \geq h^+(G)$$

y

$$con^+(G) \geq con^-(G).$$

En [12] se encuentran las pruebas a 3 resultados establecidos por Chartrand y Zhang [10] y Chartrand et al. [4]: una gráfica conexa tiene orientaciones con diferentes números geodésicos, orientaciones con diferentes números de casco, y si no hay vértices finales, orientaciones con diferentes números de convexidad. Es decir,

$$g^-(G) < g^+(G)$$

$$h^-(G) < h^+(G)$$

$con^-(G) < con^+(G)$ si y sólo si G no tiene vértices finales.

Después en [13] se demuestra que $g^-(G) < h^+(G)$ para una gráfica G de orden al menos 3, y para cualesquiera dos números enteros no negativos a y b , existe una gráfica conexa G tal que $g^-(G) - h^-(G) = a$ y $g^+(G) - h^+(G) = b$. Estos resultados responden un problema de Farrugia en [12].

La tesis se encuentra conformada de tres capítulos con dos secciones cada una. El primer capítulo inicia con una sección donde se encuentran los conceptos básicos así como resultados necesarios de la Teoría de Gráficas para comprender la totalidad del trabajo. En la sección 1.2 se introducen las definiciones de gráfica orientada, trayectoria dirigida y distancia dirigida, para posteriormente entrar al tema de Convexidad en Gráficas Orientadas y entender qué es una geodésica, un conjunto convexo, el número de convexidad de una gráfica, etc. Además tenemos los primeros resultados de convexidad.

En el segundo capítulo se introducen los conceptos de espectro de convexidad y espectro de convexidad fuerte, el número de convexidad orientable inferior y superior para una gráfica G . Dadas estas definiciones se da una caracterización para aquellas gráficas cuya cardinalidad del espectro de convexidad es mayor o igual a 2. Dado que toda gráfica G tiene número de

convexidad orientable superior igual a $n - 1$, donde n es el orden de G , se enfocará el estudio en lo que podamos decir del número de convexidad orientable inferior. Finalmente se obtendrán el espectro de convexidad y el espectro de convexidad fuerte para las gráficas completas de orden n .

En el tercer y último capítulo recordaremos lo que es una gráfica plana, una gráfica exteriormente plana y el dual del interior de una gráfica plana. Primero veremos un resultado esencial del dual del interior de una gráfica exteriormente plana. Después tenemos que el número de convexidad orientable inferior de toda gráfica exteriormente plana 2-conexa de orden n está acotado superiormente por $n - 2$. Si además estas gráficas son exteriormente planas máximas entonces tendrán al menos dos vértices de grado 2. Se finaliza la tesis con el teorema que dice: Toda gráfica exteriormente plana máxima no trivial tiene número de convexidad orientable inferior 1.

Capítulo 1

Preliminares

Como se mencionó en la introducción, en esta sección se presentan las definiciones, los conceptos y resultados de Teoría de Gráficas, que sirven como base para el resto del trabajo, así como algunas convenciones de notación que serán usadas a lo largo del texto. También se tendrá el primer resultado de Convexidad en Gráficas Orientadas, el cual es una caracterización referente al número de convexidad de una gráfica orientada. Se finaliza el capítulo con la prueba de la existencia de una gráfica orientada de orden n con número de convexidad k , para cualesquiera par de enteros n y k , tal que $1 \leq k \leq n - 1$, $k \neq 2$ y $n \geq 4$.

1.1. Conceptos básicos y notación

Los *conjuntos* se denotarán con letras mayúsculas, salvo que se indique lo contrario. Se usa la notación estándar para relaciones entre conjuntos, es decir, si A y B son conjuntos, $A \subseteq B$ quiere decir que A es subconjunto de B , incluyendo la posibilidad de que $A = B$; cuando se excluya ese caso diremos que A es un subconjunto propio de B y lo denotaremos como $A \subset B$. Para decir que un objeto a es elemento de un conjunto A escribiremos $a \in A$. La negación de las proposiciones anteriores (no es subconjunto, no es subconjunto propio o no es elemento de) se denotan con los mismos símbolos cruzados por una diagonal, por ejemplo $a \notin A$ quiere decir que a no es elemento de A . Si A es un conjunto, denotaremos también a los subconjuntos de k elementos de A como $\binom{A}{k}$. Se usa \mathbb{N} para denotar al conjunto de los números naturales y \mathbb{Z} para denotar al conjunto de los números enteros.

Teoría de Gráficas

Una *gráfica* es una terna ordenada $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ tal que $V(G) \neq \emptyset$, $E(G)$ es un conjunto arbitrario y $\psi_G : E(G) \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$. Al conjunto $V(G)$ se le conoce como el conjunto de *vértices* de la gráfica G , mientras que al conjunto $E(G)$ se le conoce como el conjunto de *aristas* de G . Si para alguna $e \in E(G)$ se tiene que $\psi_G(e) = \{u, v\}$ se dice que u y v son *adyacentes*. Un *lazo* en G es una arista e tal que $\psi_G(e) = \{v\}$ para algún $v \in V(G)$. Una gráfica es *simple* si no tiene lazos y ψ_G es inyectiva. De hecho, si G es simple, ésta se puede ver como una pareja ordenada $G(V(G), E(G))$ donde $V(G) \neq \emptyset$ y $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$; en lugar de $\{u, v\} \in E(G)$ escribiremos simplemente $uv \in E(G)$. Cuando una gráfica tiene lazos o más de una arista entre un par de vértices se le conoce como *multigráfica*. En esta tesis se trabajará con gráficas simples a menos que se indique lo contrario.

El *orden*, denotado por ν , y el *tamaño*, denotado por ε , de una gráfica G es el número de vértices y aristas de G respectivamente. La gráfica de orden 1 y tamaño 0 se denomina *la gráfica trivial*. El *grado* de $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, es el número de aristas de G que inciden en él. Denotamos por δ y Δ , respectivamente, al mínimo y al máximo de los grados de los vértices en G . Si $d(v) = 0$, se dice que v es un *vértice aislado* de G . La *vecindad* de v es el conjunto $N(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$. Si $u \in N(v)$, decimos que u es vecino de v . (Fig. 1.1).

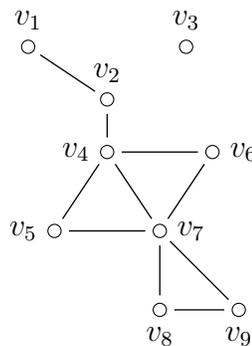


Figura 1.1: Gráfica de orden 9 y tamaño 10 con $d(v_4) = 4$, $N(v_4) = \{v_2, v_5, v_6, v_7\}$ y v_3 un vértice aislado.

Dos gráficas H y G son *isomorfas* si existe una función $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ biyectiva, tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$.

Si $G = (V(G), E(G))$ es una gráfica, diremos que $H = (V(H), E(H))$ es una *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ y H es una gráfica por sí misma. Decimos que H es una *subgráfica generadora* de G si $V(H) = V(G)$. Y diremos que H es una *subgráfica inducida* de G , si existe $V_1 \subseteq V(G)$ tal que $V(H) = V_1$ y las aristas de H sean todas las aristas de G con ambos extremos en V_1 , generalmente se denota por $H = G[V_1]$. (Fig. 1.2).

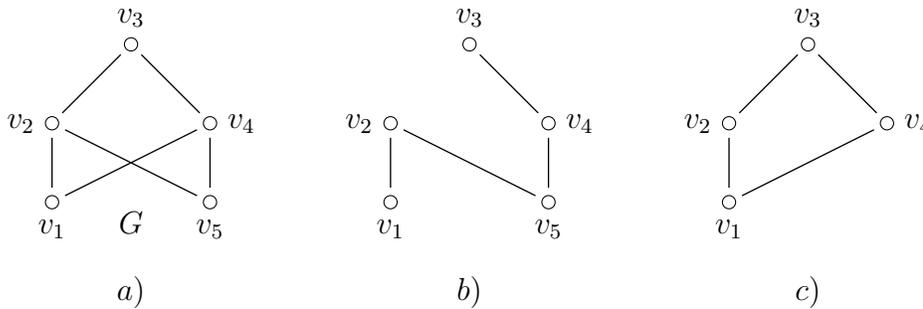


Figura 1.2: b) subgráfica generadora de G y c) subgráfica inducida de G .

Las siguientes gráficas tienen una estructura especial, además de ser comunes e importantes en Teoría de Gráficas, por esta razón se les ha proporcionado un nombre:

La *gráfica completa de orden n* , denotada por K_n , es aquella tal que $E(G) = \binom{V}{2}$. Una gráfica G es *bipartita* si existe una partición de $V(G)$ en dos conjuntos (X, Y) tales que si $u, v \in X$, entonces $(u, v) \notin E(G)$ y $u, v \in Y$ implica que $(u, v) \notin E(G)$. La gráfica G es *bipartita completa* si es una gráfica bipartita simple, con bipartición (X, Y) en la que todo vértice de X es adyacente a todo vértice de Y . Si $|X| = m$, $|Y| = n$, la denotaremos por $K_{m,n}$. (Véase Fig. 1.3).

A continuación definiremos otros conceptos importantes. Un *camino* en G , es una sucesión de vértices y aristas alternados, $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$, tal que $e_i = v_{i-1}v_i$; si $v_0 = v_n$ se tiene un *camino cerrado*. En gráficas simples se omiten las aristas; es decir, un camino tendría la siguiente notación

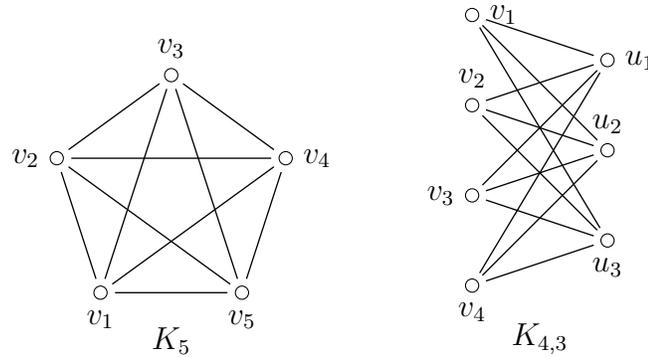


Figura 1.3: Gráfica completa de orden 5 y gráfica bipartita completa de orden 7.

$C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, y la *longitud de este camino*, $l(C)$, es igual a n . Un *paseo* en G es un camino que no repite aristas, mientras que una *trayectoria* en G es un camino que no repite vértices. Si T_1 y T_2 son dos uv -trayectorias en G , se dice que son *trayectorias internamente ajenas* si $V(T_1) \cap V(T_2) = \{u, v\}$. Ahora, un *ciclo* es un camino cerrado que no repite vértices (salvo el primero que es igual al último) y cuya longitud es mayor o igual a 3.

En la Figura 1.4, $C = (v_3, v_4, v_5, v_3, v_5, v_1, v_3)$ es un camino el cual además es cerrado y cuya longitud es $l(C) = 6$. Ahora, $P = (v_4, v_5, v_3, v_4, v_2, v_1)$ es un paseo mientras que $T = (v_2, v_3, v_1, v_5, v_4)$ es una trayectoria y $C' = (v_2, v_3, v_1, v_5, v_4, v_2)$ es un ciclo. Un ejemplo con esta gráfica de dos trayectorias internamente ajenas sería $T_1 = (v_2, v_3, v_4)$ y $T_2 = (v_2, v_1, v_5, v_4)$.

Dos vértices $u, v \in V(G)$ están *conectados* si existe un camino en G con vértice inicial u y vértice final v ó vértice inicial v y vértice final u (uv -camino ó vu -camino). La relación *estar conectados* es una relación de equivalencia, a las clases de equivalencia de esta relación se les conoce como *componentes conexas* y una *gráfica es conexa* si tiene una única componente conexa. Ahora podemos introducir el concepto de distancia entre dos vértices en una gráfica. La *distancia* entre u y v , vértices de G , se define como:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} \min\{l(C) : C \text{ es un } uv\text{-camino}\}, & \text{si } u \text{ y } v \text{ están conectados} \\ \infty, & \text{si } u \text{ y } v \text{ no están conectados.} \end{cases}$$

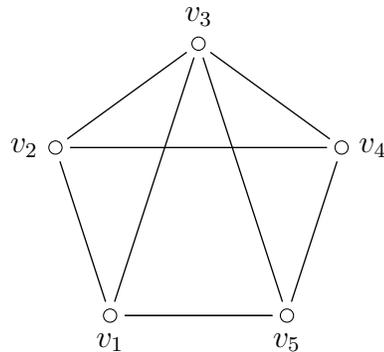


Figura 1.4: $C = (v_3, v_4, v_5, v_3, v_5, v_1, v_3)$, $P = (v_4, v_5, v_3, v_4, v_2, v_1)$, $T = (v_2, v_3, v_1, v_5, v_4)$ y $C' = (v_2, v_3, v_1, v_5, v_4, v_2)$ es un camino, un paseo, una trayectoria y un ciclo respectivamente.

Además para $v \in V(G)$, la *excentricidad* de v se define como

$$exc(v) = e(v) = \max\{d_G(v, u) : u \in V(G)\}.$$

Y el *diámetro* de G es

$$diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}.$$

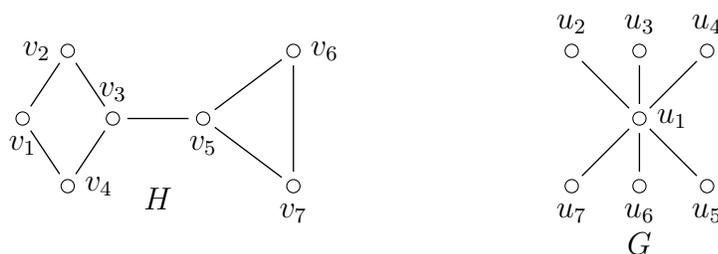


Figura 1.5: Gráficas con diámetro 4, $diam(H) = 4$, diámetro 2, $diam(G) = 2$, y $e(u_1) = 1$, $e(u_2) = 2$

Otro tipo de gráfica que frecuentemente se estudia en teoría de gráficas son los *árboles*; los cuales son gráficas conexas y acíclicas (no hay ciclos).

Un vértice de grado 1 en un árbol se llamará *hoja*. (Fig. 1.6).

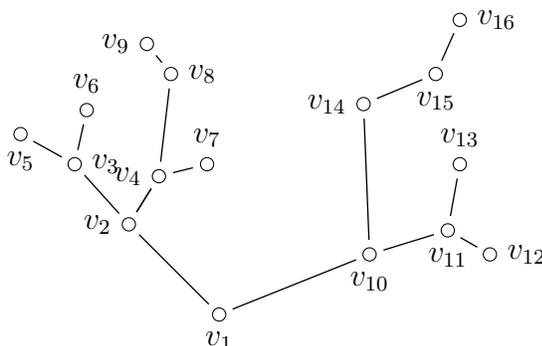


Figura 1.6: Un árbol de orden 16. Los vértices $v_5, v_6, v_7, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{16}$ corresponden a hojas.

Lema 1.1.1. *Si G es una gráfica con $\delta_G \geq 2$, entonces G contiene al menos un ciclo.*

Demostración. Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Como $d_G(x_0) \geq 2$ y $x_0x_1 \in E(G)$, x_0 tiene al menos un vecino en G distinto de x_1 , digamos u . Si $u \notin V(C) \setminus \{x_0, x_1\} = \{x_2, \dots, x_n\}$ entonces $(ux_0) \cup C$ es una trayectoria de longitud estrictamente mayor que la longitud de C , lo cual resultaría en una contradicción y por lo tanto $u \in \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$. De esta manera existe $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ tal que $u = x_i$ por tanto $(x_i, x_0) \in E(G)$ y $(x_i, x_0) \cup x_0Cx_i$ es un ciclo en G . La notación x_0Cx_i significa que comenzamos el recorrido en el vértice x_0 y después pasamos por los vértices de C con el orden creciente de sus índices hasta llegar a x_i . ■

Proposición 1.1.2. *Si G es un árbol con orden ν y tamaño ε entonces $\varepsilon = \nu - 1$.*

Demostración. Por inducción sobre ν .

Si $\nu = 1$, G es un vértice aislado y por tanto $\varepsilon = 0$. Pero $\varepsilon = 1 - 1 = \nu - 1$.

Si $\nu = 2$, $G = K_2$, entonces $\varepsilon = 1 = 2 - 1 = \nu - 1$.

Si G es un árbol con $\nu - 1$ vértices entonces $\varepsilon = (\nu - 1) - 1$. Sea G un árbol con ν vértices, por el lema anterior G tiene al menos un vértice de grado 1 digamos v . Como en G no hay ciclos, en $G - v$ tampoco hay ciclos pues $G - v \subseteq G$. Además como todo vértice en un camino distinto del inicial o final tiene grado mayor o igual a 2, v no puede estar en ningún uw -camino en G con $u \neq v \neq w$. Por lo tanto $G - v$ es conexa y $G - v$ es un árbol con $\nu_{G-v} = \nu - 1$, por hipótesis de inducción $\varepsilon_{G-v} = \nu - 2$ pero $\nu_{G-v} = \nu_G - 1$ y $\varepsilon_{G-v} = \varepsilon_G - 1$ entonces $\varepsilon_G = \varepsilon_{G-v} + 1 = \nu - 2 + 1 = \nu - 1$. ■

Corolario 1.1.3. *Si G es un árbol, existen $u, v \in V(G)$ con $u \neq v$ tal que $d(u) = 1 = d(v)$.*

Demostración. Ya que para toda gráfica, la suma de los grados de sus vértices es dos veces el tamaño de la gráfica (resultado básico de Teoría de Gráficas cuya demostración se puede consultar en [1] y [2]), y por la proposición anterior, en un árbol se tiene que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon = 2(\nu - 1) = 2\nu - 2$. Si solo existiera un vértice de grado 1, digamos v_0 , entonces $d(v) \geq 2$ para toda $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = d(v_0) + \sum_{v \in V(G) \setminus \{v_0\}} d(v)$$

y

$$2\varepsilon \geq 1 + \sum_{v \in V(G) \setminus \{v_0\}} 2 = 1 + 2(\nu - 1) = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$$

así,

$$2(\nu - 1) = 2\varepsilon \geq 2\nu - 1 > 2\nu - 2$$

siendo esto una contradicción.

Por tanto, todo árbol tiene al menos 2 hojas. ■

Sea $c(G)$ el número de componentes conexas de G . Un vértice $v \in V(G)$ es un *vértice de corte* si $c(G - v) > c(G)$, de igual manera una arista e es una *arista de corte* o *punto* si $c(G - e) > c(G)$, (Fig. 1.7). Este concepto se extiende también a conjuntos de vértices; esto es, un *corte por vértices* para la gráfica G es un subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G \setminus S$ es inconexa o trivial. Si $|S| = k$ diremos que S es un k -corte por vértices. Diremos que G es k -conexa (por vértices) si G no tiene $(k - 1)$ -corte por vértices.

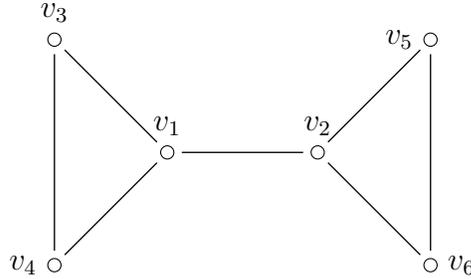


Figura 1.7: v_1 y v_2 son vértices de corte, v_1v_2 es un puente.

Ahora conociendo la definición de un vértice de corte podemos introducir el término de bloque. Un *bloque* es una gráfica conexa sin vértices de corte. Si G es una gráfica, un bloque de G es una subgráfica sin vértices de corte y máxima por contención con esta propiedad, (Fig. 1.8). Además, un bloque B de G se denomina un *bloque final* de una gráfica G si B contiene exactamente un vértice de corte de G .

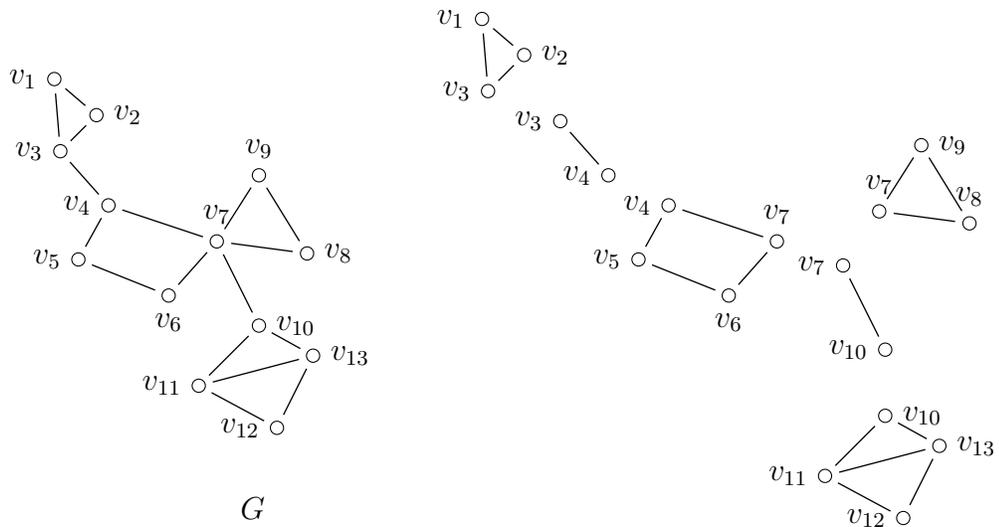


Figura 1.8: Una gráfica G y sus bloques.

Aunque los siguientes conceptos sólo aparecen una vez en el trabajo, es conveniente mencionarlos.

Un *circuito euleriano* es un paseo cerrado C tal que $E(C) = E(G)$, para una gráfica conexa G . Una gráfica es *euleriana* si tiene un circuito euleriano. (Véase Fig. 1.9). El siguiente resultado es una importante caracterización para gráficas eulerianas que no solo es válida para gráficas simples sino también para multigráficas.

Teorema 1.1.4. *Si G es conexa son equivalentes:*

- 1) G es euleriana
- 2) $d_G(v)$ es par para todo $v \in V(G)$

Demostración. Sea $P = (x_0, x_1, \dots, x_n, x_0)$ un paseo euleriano cerrado de G , entonces $V(P) = V(G)$ y $d_P(x_i) = d_G(x_i)$ para todo $x_i \in V(G)$. Cada vez que $x_i \neq x_0$ aparece en el paseo usamos dos aristas distintas incidentes en x_i la de “entrada” y la de “salida”. Así, si x_i aparece n veces entonces $d_P(x_i) = 2n = d_G(x_i)$. Ahora si $x_i = x_0$ la primera y última aristas en el circuito así como las de “entrada y salida” en las ocasiones que se haya pasado por x_0 en el circuito nos da un número par de aristas. Por tanto $d_G(x_i)$ es par.

La afirmación recíproca se hará por inducción sobre el orden de G .

En una multigráfica, los lazos en un vértice contribuyen al grado del vértice en dos. Si G tiene un solo vértice, todas las aristas son lazos, en consecuencia recorrer cada lazo es un circuito euleriano. Supóngase que para toda gráfica G con $\nu - 1$ vértices y tal que el grado de cada vértice es par, se tiene que G es euleriana.

Sea G con ν vértices y tal que $d(v)$ es par para todo $v \in V(G)$. Sea $v \in V(G)$ un vértice que no sea de corte, entonces $G \setminus \{v\}$ es conexa. Sean $N(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq N(v)$ tal que hay más de una arista entre v y v_i con $1 \leq i \leq k$, y $B = \{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq N(v)$ tal que hay exactamente una arista entre v y v_i con $k+1 \leq i \leq n$. Para cada vértice en A por cada dos aristas incidentes en v agregamos un lazo en $G \setminus \{v\}$, de esta manera bajo esta construcción los grados de los vértices en A serán iguales a sus grados en G o iguales a sus grados en G menos 1, aquellos vértices que no tengan el mismo grado que en G junto con B forman un conjunto de cardinalidad par, por tanto basta formar parejas con los elementos restantes y añadir una arista entre cada pareja. Obsérvese que de esta manera el grado

en cada vértice de A y B es igual a su grado en G , por lo que es par y en consecuencia existe por hipótesis de inducción, $C = (x_0, x_1, \dots, x_n = x_0)$ un circuito euleriano. Para cada una de las aristas que agregamos cuando aparezca en C la podemos intercambiar por una trayectoria de longitud 2 por el vértice v . Afirmamos que el circuito obtenido de esta manera es un circuito euleriano de G pues existe una biyección entre las aristas incidentes en v y las aristas agregadas a A y B . ■

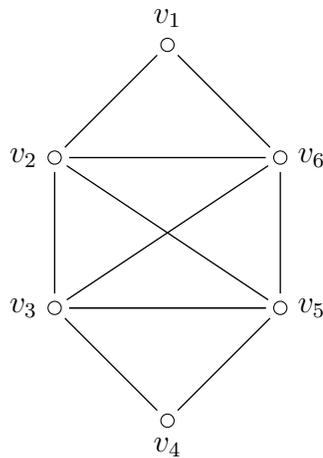


Figura 1.9: Gráfica euleriana con $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_3, v_5, v_6, v_1)$ un circuito euleriano.

Si G es una gráfica, una *coloración* de los vértices de G es una función $c : V(G) \rightarrow C$ donde C es un conjunto de colores. Una *k-coloración* de G es una coloración con k colores (es decir, $|C| = k$). Una *coloración propia* es aquella en la que vértices adyacentes reciben colores distintos. Y una gráfica es *k-coloreable* si tiene una coloración propia con k colores.

1.2. Gráficas con orden y número de convexidad prescritos

El concepto de convexidad se encuentra con frecuencia en la Geometría, la Topología y en el Análisis Matemático. Debido a que en la Teoría de

Gráficas la distancia entre vértices de una gráfica G induce una métrica sobre $V(G)$, se tiene que $(V(G), d)$ forma un espacio métrico, por lo que tiene sentido hablar del término convexidad en gráficas. En el presente trabajo nos concentraremos en gráficas orientadas y en consecuencia se usará la distancia dirigida entre vértices. Para esto, situémonos en el ambiente para desarrollar estos temas.

Una *gráfica orientada* es una orientación de alguna gráfica; esto es, en vez de aristas se tendrán flechas en una sola dirección. Una gráfica orientada D es una pareja ordenada $D = (V(D), A(D))$ donde $V(D)$ es un conjunto no vacío y $A(D)$ es una relación irreflexiva y asimétrica sobre $V(D)$; los conjuntos $V(D)$ y $A(D)$ son los conjuntos de vértices y flechas de D , respectivamente. Si G es una gráfica, una *orientación* de G es una gráfica orientada D con $V(D) = V(G)$ y tal que para cada arista $uv \in E(G)$ exactamente una de las flechas (u, v) o (v, u) pertenece a $A(D)$; la gráfica G será llamada la *gráfica subyacente* de D . Una *subgráfica orientada* $D' = (V'(D), A'(D))$ de una gráfica orientada $D = (V(D), A(D))$ es una gráfica orientada con $V'(D) \subseteq V(D)$ y $A'(D) \subseteq A(D)$. Una *gráfica orientada es conexa* si su gráfica subyacente es conexa.

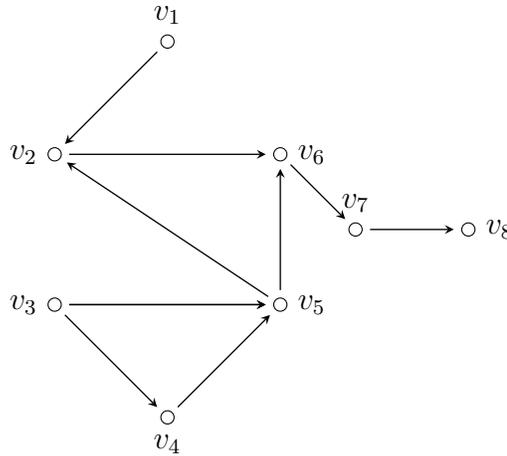


Figura 1.10: Una gráfica orientada conexa.

En una gráfica orientada D , un *camino dirigido* es una sucesión de vértices (x_1, x_2, \dots, x_n) en D tal que $(x_i, x_{i+1}) \in A(D)$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ mientras que, una *trayectoria dirigida* es una sucesión (v_1, v_2, \dots, v_k) de vértices de D

tal que v_1, v_2, \dots, v_k son distintos y $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ para $i = 1, 2, \dots, k - 1$. De esta manera la *distancia dirigida* entre dos vértices u y v de D , denotada por $d(u, v)$, es la longitud de la trayectoria dirigida más corta entre u y v . Y toda uv -trayectoria dirigida de longitud $d(u, v)$ es referida como una uv -geodésica. En la Figura 1.10, $T = (v_4, v_5, v_2, v_6, v_7, v_8)$ es una trayectoria dirigida de longitud 5. Sin embargo $d(v_4, v_8) = 4$ y $T' = (v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ es una v_4v_8 -geodésica.

Observemos que en una gráfica orientada el concepto de distancia dirigida no necesariamente cumple simetría, pues puede existir una uv -trayectoria dirigida para algún par de vértices, u y v , pero no así una vu -trayectoria dirigida por lo que la distancia en las gráficas orientadas no necesariamente es una métrica sobre $V(G)$. Así el comportamiento de los conjuntos convexos en las gráficas orientadas diferirá bastante a su comportamiento en las gráficas no orientadas.

El *intervalo cerrado* $I[u, v]$ consiste en u y v junto con todos los vértices que caen en una uv -geodésica o en una vu -geodésica en D . De manera que si no existe uv -geodésica ni vu -geodésica en la gráfica orientada, entonces $I[u, v] = \{u, v\}$. La noción de intervalo cerrado es aplicable a conjuntos de más de dos vértices; sea $S \subseteq V(D)$ y $S \neq \emptyset$, entonces se define

$$I[S] = \bigcup_{u, v \in S} I[u, v]$$

Obsérvese que $S \subseteq I[S]$. Además S es un *conjunto convexo* si $I[S] = S$. Otro concepto es el de *casco convexo* de un conjunto. El casco convexo de S , $[S]$, es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S . Así, S es un conjunto convexo en D si y sólo si $[S] = S$. Es claro que la totalidad de los vértices de D , esto es, $V(D)$, es un conjunto convexo.

La definición de casco convexo de un conjunto puede darse de manera recursiva:

Definición 1.2.1. Sea $S \subseteq V(G)$, definimos el casco convexo de S como sigue

$$S_0 = S$$

$$S_{i+1} = S_i \cup \{V(P) : P \text{ es una } uv\text{-geodésica para algún } u, v \in S_i\}$$

Proposición 1.2.2. $[S] = \bigcup S_i$

Demostración. Sea $x \in [S]$, entonces $x \in S$ ó $x \notin S$. Si $x \in S$, entonces $x \in S_0$ y en consecuencia $x \in \bigcup S_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Si $x \notin S$, entonces x está en una uv -geodésica con $u, v \in S_j$, $j < i$, en consecuencia $x \in S_{j+1} \subseteq \bigcup S_i$. Por tanto, $[S] \subseteq \bigcup S_i$.

Para la otra contención, sea n el primer natural tal que S_n es convexo. Dicho natural existe pues la totalidad de los vértices de una gráfica es un conjunto convexo. Se probará por inducción sobre i , que $[S_{n-i}] = S_n$, donde $0 \leq i \leq n$.

Para $i = 0$, $[S_{n-0}] = [S_n] = S_n$ pues S_n es convexo y el casco convexo de S_n es el mínimo conjunto convexo que lo contiene. Supóngase que $[S_{n-i}] = S_n$. Por demostrar que $[S_{n-(i+1)}] = S_n$. Consideremos $S_{n-(i+1)}$, éste no es un conjunto convexo. Y por la definición recursiva del casco convexo, S_{n-1} es el conjunto de todos los vértices que caen en geodésicas entre vértices de $S_{n-(i+1)}$, así como a los vértices de $S_{n-(i+1)}$. Por otro lado $[S_{n-(i+1)}]$ es el mínimo conjunto convexo que contiene a $S_{n-(i+1)}$; por lo que $S_{n-i} \subseteq [S_{n-(i+1)}]$. Ahora, $[S_{n-i}]$ es el menor conjunto convexo que contiene a S_{n-i} y ya que $[S_{n-(i+1)}]$ es un conjunto convexo conteniendo a S_{n-i} , se sigue que $[S_{n-i}] \subseteq [S_{n-(i+1)}]$. Además por definición $S_{n-(i+1)} \subseteq S_{n-i} \subseteq [S_{n-i}]$, por lo que $[S_{n-(i+1)}] \subseteq [S_{n-i}] = S_n$ esta igualdad debido a la hipótesis inductiva. Por tanto $[S] = S_n = \bigcup S_i$. ■

El *número de convexidad*, $con(D)$, de D es la máxima cardinalidad de un conjunto convexo propio de D . Un conjunto convexo es máximo si $|S| = con(D)$.

El objetivo de esta sección será dar a conocer los primeros resultados importantes en convexidad de gráficas orientadas: caracterizaciones para que una gráfica orientada de orden $n \geq 2$ y $n \geq 3$ tenga los números de convexidad extremos; esto es, $n - 1$ y 1 respectivamente, así como condiciones suficientes para la existencia de una gráfica orientada dado un orden y un número de convexidad arbitrario.

Antes de probar el primer resultado, veamos un par de definiciones más: si D es una gráfica orientada y $v \in V(D)$, la *exvecindad* y la *invecindad* de v respectivamente se definen como sigue

$$N^+(v) = \{x : (v, x) \in A(D)\} \quad \text{y} \quad N^-(v) = \{x : (x, v) \in A(D)\}.$$

El *exgrado* de v , $d^+(v)$, es la cardinalidad de su exvecindad; esto es, $d^+(v) = |N^+(v)|$ y el *exgrado mínimo* de G , δ^+ , es el mínimo de los exgrados de los vértices de G . El *ingrado* de v , $d^-(v)$, es la cardinalidad de su invecindad; es decir, $d^-(v) = |N^-(v)|$ y el *ingrado mínimo* de G , δ^- , es el mínimo de los ingrados de los vértices de G . Ahora, el *grado de v en D* , $d(v)$, es la suma de su ingrado y exgrado; esto es, $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$. Si $d(v) = 1$, se dice que v es un *vértice final*. Un vértice es un *transmisor* si tiene exgrado positivo e ingrado cero, mientras que es un *receptor* si tiene ingrado positivo y exgrado cero. Obsérvese que si v es un transmisor, entonces $N^-(v) = \emptyset$ y si es un receptor, entonces $N^+(v) = \emptyset$. Un vértice v en D es un *vértice transitivo* si $d^+(v) > 0$, $d^-(v) > 0$, y para todo $u \in N^+(v)$ y $w \in N^-(v)$, $(w, u) \in A(D)$.

Proposición 1.2.3. *Sea D una gráfica orientada conexa de orden $n \geq 2$. Entonces $\text{con}(D) = n - 1$ si y sólo si D contiene un transmisor, un receptor o un vértice transitivo.*

Demostración. La suficiencia se demostrará por contradicción.

Sea D una gráfica orientada conexa de orden $n \geq 2$ con número de conexasidad $\text{con}(D) = n - 1$. Supóngase que D no contiene vértices transmisores, receptores ni transitivos. Ahora, como $\text{con}(D) = n - 1$, donde n es el orden de D entonces existe $u \in V(D)$ tal que $S = V(D) \setminus \{u\}$ es un conjunto convexo propio de D . Además como D no tiene transmisores ni receptores se tiene que el exgrado y el ingrado de u es positivo; esto es, $d^+(u) > 0$, $d^-(u) > 0$. También, dado que D no contiene vértices transitivos, entonces existe un vértice $x \in N^-(u)$ y un vértice $y \in N^+(u)$ tales que $(x, y) \notin A(D)$, pero como existe la trayectoria dirigida x, u, y en D tenemos que u está en una xy -geodésica, de modo que S no era convexo y $u \in [S]$, lo cual nos lleva a una contradicción pues ahora $[S] = V(D)$ pero se sabía que S era un conjunto convexo propio. Por tanto, D contiene un vértice transmisor, receptor o transitivo.

Para la necesidad, sea D que contiene un vértice v que es un transmisor, receptor o transitivo. Por demostrar que $\text{con}(D) = n - 1$. Si v es un transmisor, entonces $N^-(v) = \emptyset$ por lo que es el vértice inicial de toda geodésica que contiene a v . Si v es un receptor, entonces $N^+(v) = \emptyset$ por lo cual es el vértice final de toda geodésica que contiene a v . Si v es transitivo, entonces para todo vértice $x \in N^-(v)$ y todo vértice $y \in N^+(v)$ existe $(x, y) \in A(D)$. Considérese el conjunto de vértices $V(D) \setminus \{v\}$, por los tres casos anteriores

$v \notin I[V(D) \setminus \{v\}]$ por lo que $V(D) \setminus \{v\}$ es convexo en D . Así, $con(D) = n - 1$.

■

Corolario 1.2.4. *Si D es una gráfica orientada conexa que contiene un vértice final, entonces $con(D) = n - 1$*

Demostración. Ya que un vértice final v es aquel que $d(v) = 1$ entonces $d^-(v) = 1$ y $d^+(v) = 0$ o $d^-(v) = 0$ y $d^+(v) = 1$, lo cual equivale a que v es un receptor o un transmisor respectivamente. Entonces por la proposición anterior $con(D) = n - 1$. ■

Corolario 1.2.5. *El número de convexidad de cualquier árbol dirigido no trivial de orden n es $n - 1$.*

Demostración. Ya que todo árbol tiene al menos dos hojas (Corolario 1.1.3.), que son vértices finales en cualquier orientación, entonces por mismo argumento dado en la demostración del corolario anterior se tiene que el número de convexidad de todo árbol dirigido no trivial de orden n es $n - 1$.

■

Proposición 1.2.6. *Sea D una gráfica orientada de orden al menos 3. Entonces $con(D) = 1$ si y sólo si $[\{u, v\}] = V(D)$ para cualesquiera dos vértices u y v en D .*

Demostración. La suficiencia se demostrará por contrapositiva.

Si existe $u, v \in V(D)$ tal que $[\{u, v\}] \neq V(D)$ entonces $[\{u, v\}]$ es un conjunto convexo el cual $|\{u, v\}| < |V(D)|$ y $\{u, v\} \subseteq [\{u, v\}]$ por lo que $2 = |\{u, v\}| \leq |[\{u, v\}]|$. Por tanto, $con(D) \neq 1$.

Ahora para la necesidad, ya que el número de convexidad de D es la cardinalidad máxima de un conjunto convexo propio de D (esto es, un conjunto diferente a $V(D)$), entonces tal conjunto sólo constará de un elemento. De lo contrario su casco convexo será $V(D)$ ya que $[\{u, v\}] = V(D)$ para todo $u, v \in V(D)$. Y puesto que todo conjunto cuyo único elemento es un vértice de D es convexo entonces $con(D) = 1$ ■

Teorema 1.2.7. *No existen gráficas orientadas conexas de orden al menos 4 con número de convexidad 2.*

Demostración. Supóngase lo contrario, que existe una gráfica orientada D de orden $n \geq 4$ con número de convexidad 2. Sea $\{u, v\}$ un conjunto convexo máximo de D . Ya que $[\{u, v\}] = \{u, v\}$ se sigue que D no contiene una uv -trayectoria dirigida y una vu -trayectoria dirigida de longitud mayor o igual a 2, de hecho, a lo más puede contener o una uv -flecha ó una vu -flecha, ya que de no ser así el casco convexo de $\{u, v\}$ tendría más vértices o la gráfica no sería una gráfica orientada.

Supóngase entonces que no existe una vu -trayectoria dirigida en D . Sea $U = \{x \in V \mid D \text{ contiene una } xu\text{-trayectoria}\}$. Ya que D no contiene vu -trayectoria dirigida, $v \notin U$ así $|U| \leq n - 1$. Si $U = \{u\}$, entonces u es un transmisor y por la Proposición 1.2.3 se tiene que $con(D) = n - 1 \geq 3$ lo cual no puede ser pues se ha supuesto que el número de convexidad de D es 2. Por tanto $|U| \geq 2$.

Ahora, obsérvese que D no tiene flechas de la forma (w, x) , con $x \in U$ y $w \in V(D) \setminus U$. Ya que de ser el caso, puesto que D contiene una xu -trayectoria dirigida, entonces ésta en unión con la flecha (w, x) nos daría que D tiene una wu -trayectoria dirigida y por definición de U , $w \in U$ siendo una contradicción. Entonces toda geodésica que conecta dos vértices de U usa sólo vértices de U ; es decir, U es convexo.

Ya que $con(D) = 2$ y U es un conjunto convexo con $2 \leq |U| \leq n - 1$, se sigue que $|U| = 2$. Sea $U = \{u, x\}$, como no existen flechas en D con su vértice inicial en $V(D) \setminus U$ y su vértice final en U , se sigue que x es un transmisor y en consecuencia $con(D) = n - 1 \geq 3$, una contradicción.

Por tanto no existen gráficas orientadas conexas de orden al menos 4 con número de convexidad 2. ■

Teorema 1.2.8. *Para todo par de enteros k, n con $1 \leq k \leq n - 1$, $k \neq 2$, y $n \geq 4$, existe una gráfica orientada de orden n con número de convexidad k .*

Demostración. Sea $n \geq 4$. Si $k = 1$, entonces el ciclo dirigido de orden n tiene la propiedad deseada, pues para cualquier par de vértices distintos u y v de C_n se tiene $I[\{u, v\}] = V(C_n)$ dado que todo vértice del ciclo diferente de u y v cae en una uv -geodésica o en una vu -geodésica. Entonces, si S es un

subconjunto propio de $V(C_n)$ conteniendo más de un vértice, tenemos que S no es convexo. Por tanto, $con(C_n) = 1$, ya que el conjunto que consta de un sólo vértice es un conjunto convexo.

Ahora, si $k = n - 1$, entonces la trayectoria dirigida P_n tiene la propiedad deseada puesto que P_n tiene un transmisor y un receptor, y por la Proposición 1.2.3 $con(P_n) = n - 1$.

Por lo anterior, supóngase que $3 \leq k \leq n - 2$. Sea D la gráfica orientada formada a partir del ciclo dirigido $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$, la trayectoria dirigida $P_{n-k} = (u_1, u_2, \dots, u_{n-k})$ y las flechas (v_1, u_1) y (u_{n-k}, v_3) . (Véase Fig. 1.11). Demostraremos que $con(D) = k$.

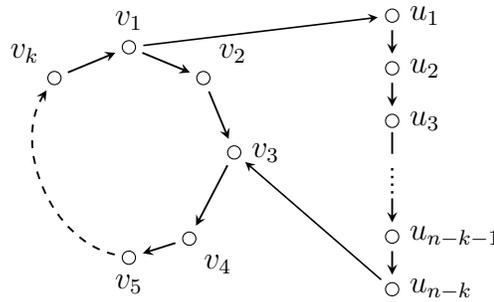


Figura 1.11: Gráfica orientada D formada por $C_k, P_{n-k}, (v_1 u_1)$ y (u_{n-k}, v_3) .

Ya que $V(C_k)$ es convexo, pues las geodésicas entre dos vértices de C_k caen en $V(C_k)$, entonces $con(D) \geq k$. Se probará que $con(D) \leq k$.

Sea $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$. Para $u_i, u_j \in U$, donde $1 \leq i \leq j \leq n - k$, obsérvese que $[\{u_i, u_j\}] = V(D)$ ya que la única $u_j u_i$ -geodésica pasa por todos los vértices de P_{n-k} y de C_k excepto v_2 pero dado que el proceso para obtener el casco convexo de un conjunto es iterativo, una vez que v_1 y v_3 están en él, al tomar una $v_1 v_3$ -geodésica se tiene que v_2 esta en ella y por tanto en el casco convexo; esto es, en $[\{u_i, u_j\}]$. De esta manera, si S_0 es un conjunto de vértices de D conteniendo dos vértices de U , entonces $[S_0] = V(D)$. Más aún, $[\{v_i, u_j\}] = V(D)$ para $i = 1, 3$ y $1 \leq j \leq n - k$.

Supóngase que $con(D) > k$, y sea S un conjunto convexo propio de D con $|S| \geq k + 1$. Ya que S contiene a lo más un vértice de U , se sigue que $S = V(C_k) \cup \{u_j\}$, donde $1 \leq j \leq n - k$. Esto implica que $\{v_i, u_j\} \subseteq S$ con $i = 1, 3$ y así $[S] = V(D)$ ya que $[\{v_i, u_j\}] = V(D)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $con(D) = k$. ■

Capítulo 2

Números de convexidad orientable

Este capítulo es el más extenso de la tesis y el que tiene la mayor cantidad de resultados en el tema de Convexidad en Gráficas Orientadas. En la primer sección tenemos las definiciones de espectro de convexidad y espectro de convexidad fuerte para una gráfica dada G , el número de convexidad orientable inferior y el número de convexidad orientable superior de G . Observaremos que será más interesante lo que podamos decir del número de convexidad orientable inferior de una gráfica dada G , y lo determinaremos para ciertas gráficas. Veremos condiciones suficientes para que una gráfica orientada conexa tenga número de convexidad 1. En la siguiente sección se determinarán los espectros de convexidad para las gráficas completas de cualquier orden.

2.1. Números de convexidad superior e inferior

Dada cualquier gráfica G , se le puede dar una orientación arbitraria D , pues simplemente es asignarle una dirección a las aristas de G . Teniendo esto en mente podemos enfocar el estudio en el conjunto conformado de todas las posibles orientaciones que se le pueden dar a una gráfica G . Ya que para cada orientación habrá un número de convexidad, tendremos un espectro de números de convexidad para toda gráfica G .

Definición 2.1.1. *Sea G una gráfica conexa no trivial, el espectro de convexidad de G , $S_C(G)$, es el conjunto formado por los números de convexidad*

de todas las orientaciones de G

Se dice que una orientación D es *fuertemente conexa* si para cualesquiera dos vértices distintos u y v , existe una trayectoria dirigida de u a v . Una *componente fuerte* es una subgráfica orientada fuertemente conexa máxima en D .

Definición 2.1.2. *El espectro de convexidad fuerte de una gráfica G , $S_{SC}(G)$, es el conjunto de los números de convexidad de todas las orientaciones fuertemente conexas de G .*

Los espectros de convexidad de una gráfica G , son en realidad conjuntos de números naturales; por lo que tienen tanto un valor mínimo como un valor máximo. A estos valores se les referirá con un nombre.

Definición 2.1.3. *Para una gráfica conexa no trivial G , el número de convexidad orientable inferior de G , $con^-(G)$, es el mínimo número de convexidad entre las orientaciones de G y el número de convexidad orientable superior, $con^+(G)$, es el máximo de tales números de convexidad; esto es,*

$$con^-(G) = \min\{con(D) : D \text{ es una orientación de } G\} = \min S_C(G)$$

y

$$con^+(G) = \max\{con(D) : D \text{ es una orientación de } G\} = \max S_C(G).$$

A partir de estas definiciones es claro que para toda gráfica conexa no trivial G de orden n ,

$$1 \leq con^-(G) \leq con^+(G) \leq n - 1$$

Teorema 2.1.4. *Supóngase que G es una gráfica conexa de orden $n \geq 3$. Entonces $con^-(G) < con^+(G)$ si y sólo si G no tiene vértices finales.*

Demostración. Supóngase que G tiene un vértice final v , entonces $d(v) = 1$, de manera que en cualquier orientación D de G , $d(v) = d^+(v) + d^-(v) = 1$; es decir, v será un transmisor o un receptor y por Proposición 1.2.3, $con(D) = n - 1$. Así $S_C(G) = n - 1$ y en consecuencia $con^-(G) = con^+(G)$.

Para la necesidad se mostrará que una gráfica con grado mínimo 2 (sin vértices finales) puede ser orientada de tal manera que todos sus vértices no son vértices transitivos, transmisores ni receptores. Sea G una gráfica sin

vértices finales, ya que G tiene grado mínimo al menos 2, contiene un ciclo. Sea M un conjunto máximo de ciclos inducidos de G ajenos por aristas. Afirmamos que en toda orientación tal que produce ciclos dirigidos, los vértices en dichos ciclos no son vértices transitivos, transmisores ni receptores ya que si v está en un triángulo uvw en M entonces $(u, v), (v, w), (w, u)$ son todas las flechas. Por otro lado, si v está en un ciclo en M de longitud al menos 4, con vecinos u y w , entonces $uw \notin E(G)$ pero $(u, v), (v, w) \in A(G)$.

Ahora, si $E(G) \setminus E(M) \neq \emptyset$, las aristas en esa diferencia pueden orientarse de tal suerte que puede obtenerse una gráfica sin vértices transitivos, transmisores ni receptores. Cualquier vértice $u \in V(G)$ tal que sus aristas incidentes no tienen orientación debe pertenecer a una trayectoria u_0, \dots, u_{r+1} dado que G tiene grado mínimo al menos 2, y con u_0, u_{r+1} vértices donde al menos una arista incidente a ellos tiene orientación pues M es máximo. Sea r el mínimo entero tal que las aristas incidentes a u_1, \dots, u_r no tiene orientación. Orientamos la trayectoria con las flechas $(u_0, u_1), \dots, (u_r, u_{r+1})$. De esta manera u_1, \dots, u_r tienen tanto ingrado como exgrado positivo. Más aún, si $r > 1$, entonces para $1 \leq i \leq r$, $u_{i-1}u_{i+1} \notin E(G)$ por lo que u_i no es vértice transitivo. Si $r = 1$ y $u_0u_2 \in E(G)$, ya que u_0u_1 y u_1u_2 son aristas sin orientación y M es máximo, si $(u_0, u_2) \in A(G)$ entonces las aristas u_0u_1 y u_1u_2 serán orientadas como (u_1, u_0) y (u_2, u_1) , de lo contrario u_1 sería vértice transitivo.

De esta manera se ha construido una orientación para G sin vértices transitivos, transmisores ni receptores, por tanto $con^-(G) < n - 1$ y en consecuencia $con^-(G) < con^+(G)$. ■

Corolario 2.1.5. *Sea G una gráfica conexa de orden $n \geq 3$. Entonces $|S_C(G)| \geq 2$ si y sólo si G no tiene vértices finales.*

Demostración. Sea G una gráfica de orden $n \geq 3$ tal que $|S_C(G)| \geq 2$, es decir, el espectro de convexidad de G consta de dos o más números naturales, por tanto $S_C(G)$ tiene mínimo y máximo, así $con^-(G) < con^+(G)$ y por el teorema anterior se sigue que G no tiene vértices finales.

Ahora, supongamos que G no tiene vértices finales, entonces por el teorema anterior, $con^-(G) < con^+(G)$ y ya que $con^-(G), con^+(G)$ son elementos de $S_C(G)$ se concluye que $|S_C(G)| \geq 2$. ■

Para cualquier gráfica dada siempre podemos orientar las aristas incidentes en un vértice de manera que éste sea un transmisor o un receptor, entonces por la Proposición 3, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.6. *Toda gráfica conexa no trivial G de orden n tiene número de convexidad orientable superior $n - 1$.*

Demostración. Sea G una gráfica conexa no trivial de orden n . Entre todas las orientaciones que se le puede dar a G , existe aquella en la que, para un vértice $v \in V(G)$, todas las aristas incidentes a éste tengan cabeza v ; es decir, $N^+(v) = \emptyset$, teniéndose así una orientación D de G con un receptor, y por la Proposición 1.2.3 que $con(D) = n - 1$. Y puesto que $n - 1$ es el máximo número de convexidad que puede tener una gráfica orientada, se sigue que $con^+(G) = n - 1$. ■

Así que, tendrá mayor importancia lo que podamos decir del número de convexidad orientable inferior de una gráfica.

Proposición 2.1.7. *Para $n \geq 2$, si una gráfica G de orden n contiene un vértice final, entonces $con^-(G) = n - 1$. En particular, $con^-(T) = n - 1$ para todo árbol T de orden n .*

Demostración. Sea G una gráfica de orden $n \geq 2$, y v un vértice final de G . Entonces para toda orientación D de G , $d(v) = d^+(v) + d^-(v) = 1$. Así, v es un transmisor o un receptor y por la Proposición 1.2.3 $con(D) = n - 1$, y ya que es para cualquier orientación

$$\min\{con(D) : D \text{ es una orientación de } G\} = n - 1,$$

esto es, $con^-(G) = n - 1$.

Ahora, todo árbol T tiene al menos dos hojas, que por definición son vértices finales, en consecuencia de lo anterior $con^-(T) = n - 1$. ■

Proposición 2.1.8. *Para $n \geq 3$, $con^-(C_n) = 1$*

Demostración. Sabemos que para todo ciclo dirigido C_n de orden $n \geq 3$, $con(C_n) = 1$. Y puesto que el mínimo número de convexidad que puede tener una gráfica orientada es 1, se sigue que

$$\min\{con(D) : D \text{ es una orientación de } C_n\} = 1$$

por tanto, $con^-(C_n) = 1$. ■

Antes de determinar los números de convexidad orientable inferior para las gráficas completas K_n y gráficas bipartitas completas $K_{s,t}$, con $2 \leq s \leq t$, establecemos el siguiente lema y dos importantes corolarios obtenidos a partir de éste, lo cuales serán de gran utilidad para las demostraciones de resultados posteriores.

Lema 2.1.9. *Sean A y B conjuntos de vértices en una gráfica orientada conexa. Si $A \subseteq B$, entonces $[A] \subseteq [B]$.*

Demostración. Sea $w \in [A]$. Sabemos que para todo conjunto S , siempre se tiene que $S \subseteq [S]$ por definición de casco convexo. De manera que si $w \in A$, como por hipótesis $A \subseteq B$ entonces $w \in B$ y en consecuencia $w \in [B]$.

Ahora, si $w \notin A$, ya que $w \in [A]$ y $[A] = \bigcup A_i$, existen $u, v \in A_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$ tal que w está en una uv -geodésica. Pero $A_i \subseteq B_i$, así $u, v \in B_i \subseteq \bigcup B_i = [B]$, por lo que w está en el casco convexo de B . Por tanto $[A] \subseteq [B]$. ■

Corolario 2.1.10. *Si S y T son conjuntos de vértices en una gráfica orientada conexa D tal que $[S] = V(D)$ y $S \subseteq [T]$, entonces $[T] = V(D)$.*

Demostración. Por definición sabemos que el casco convexo de un conjunto X es el mínimo conjunto convexo que contiene a X . Así, si X es un conjunto convexo $[X] = X$.

Sea S y T conjuntos de vértices en una gráfica orientada conexa D tal que $[S] = V(D)$ y $S \subseteq [T]$. Por el lema anterior, haciendo $A = S$ y $B = [T]$, tenemos que $[S] \subseteq [[T]]$, pero $[S] = V(D)$ y $[[T]] = [T]$, entonces $V(D) \subseteq [T]$. Y ya que $V(D)$ es el máximo conjunto convexo en D se sigue que $V(D) = [T]$. ■

Corolario 2.1.11. *Sea D una gráfica orientada conexa de orden al menos 3. Si $[S] = V(D)$, con S algún conjunto de dos vértices de D y $S \subseteq [T]$ para todo conjunto T de dos vértices de D , entonces $\text{con}(D) = 1$.*

Demostración. Sea D una gráfica orientada conexa de orden $n \geq 3$. Sea S un conjunto de dos vértices de D tal que $[S] = V(D)$ y $S \subseteq [T]$ donde T es cualquier conjunto de dos vértices de D , entonces por el corolario anterior se tiene que $[T] = V(D)$ y dado que T es cualquier conjunto de dos vértices, por la Proposición 1.2.6 tenemos que $\text{con}(D) = 1$. ■

Ahora, estamos en condiciones para demostrar que tanto las gráficas completas como las gráficas bipartitas completas tienen número de convexidad orientable inferior igual a 1.

Proposición 2.1.12. *Para $n \geq 3$, $con^-(K_n) = 1$*

Demostración. Ya que $con^-(K_n) = \min\{con(D) : D \text{ es una orientación de } K_n\}$ y el mínimo número de convexidad que puede tener una gráfica orientada es 1, entonces basta con encontrar una orientación D de K_n tal que $con(D) = 1$ para tener que $con^-(K_n) = 1$.

Si $n = 3$, entonces una de las posibles orientaciones para K_3 es la del ciclo dirigido C_3 y por la Proposición 2.1.8, $con^-(C_3) = 1$, en consecuencia $con^-(K_3) = 1$.

Supongamos que $n \geq 4$ y sean $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Definimos una orientación D de K_n de la siguiente manera: A la arista v_1v_n le damos la orientación (v_n, v_1) y a todas las otras aristas v_iv_j se les dará la dirección (v_i, v_j) si y sólo si $i < j$ (vease la Fig. 2.1). Sea $S = \{v_1, v_n\}$ y T cualquier subconjunto de $V(D)$ con dos elementos. Como v_1, v_k, v_n es una v_1v_n -geodésica para cada k con $2 \leq k \leq n-1$ entonces $v_k \in [S]$ y además $v_1, v_n \in [S]$ pues $v_1, v_n \in S$; así $v_k \in [S]$ para toda $k = 1, \dots, n$ por lo que $[S] = V(D)$.

Ahora, sea $T = \{v_i, v_j\}$, donde $1 \leq i < j \leq n$. Si $T = S$ entonces $S \subseteq T \subseteq [T]$ y por el Corolario 2.1.11, $con(D) = 1$. Sea $T \neq S$ y $T = \{v_1, v_j\}$. Ya que v_j, v_n, v_1 es una v_jv_1 -geodésica en D se sigue que $v_n \in [T]$ y por lo tanto $S \subseteq [T]$. Si $T = \{v_i, v_n\}$ entonces como v_n, v_1, v_i es una v_nv_i -geodésica en D , se tiene que $v_1 \in [T]$ y luego $S \subseteq [T]$. Finalmente, si $T = \{v_i, v_j\}$ con $1 < i < j < n$ entonces v_j, v_n, v_1, v_i es una v_jv_i -geodésica en D , por lo que $S \subseteq [T]$. De manera que para cualquier subconjunto T con dos vértices de $V(K_n)$, $S \subseteq [T]$ y $[S] = V(D)$, entonces por el Corolario 2.1.11, $con(D) = 1$ y por lo tanto $con^-(K_n) = 1$. ■

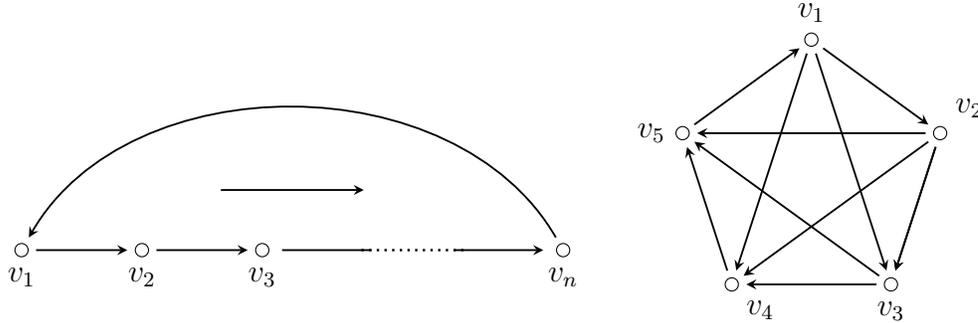


Figura 2.1: Una orientación D de K_n con $con(D) = 1$.

Proposición 2.1.13. Para enteros s y t con $2 \leq s \leq t$, $con^-(K_{s,t}) = 1$.

Demostración. De igual manera como para la Proposición 2.1.12, basta encontrar una orientación D de $K_{s,t}$, tal que $con(D) = 1$ para así, tener que $con^-(K_{s,t}) = 1$.

Sean $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ y $V = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ los conjuntos de la bipartición de $K_{s,t}$, donde $2 \leq s \leq t$. Y sea D la orientación de $K_{s,t}$, cuyo conjunto de flechas consiste de las flechas (u_1, v_1) , (v_1, u_i) , (v_j, u_1) y (u_i, v_j) , donde $2 \leq i \leq s$ y $2 \leq j \leq t$. Esta orientación D de $K_{3,4}$ se muestra en la Fig. 2.2.

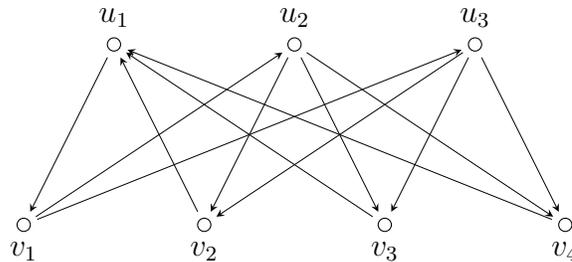


Figura 2.2: Una orientación D de $K_{3,4}$ con $con(D) = 1$.

Ahora, consideremos $S = \{u_1, v_1\}$ y $T = \{x, y\}$ cualquier subconjunto de $V(D)$ con dos elementos. Se mostrará que $[S] = V(D)$ y $S \subseteq [T]$, así por el Corolario 2.1.11 tendremos que $con(D) = 1$. Nótese que, como toda trayectoria v_1, u_i, v_j, u_1 con $2 \leq i \leq s$ y $2 \leq j \leq t$ es una $v_1 u_1$ -geodésica en D ,

se sigue que $[S] = V(D)$. Si $S = T$ entonces $S \subseteq T \subseteq [T]$ y por el Corolario 2.1.11, $con(D) = 1$. Para cada T , $T \neq S$, exhibiremos una xy -geodésica que contiene tanto a u_1 como a v_1 .

Sea $T = \{u_1, v_j\}$ con $j \geq 2$, entonces la trayectoria dirigida u_1, v_1, u_2, v_j es una u_1v_j -geodésica que contiene a u_1 y v_1 . Si $T = \{u_i, v_1\}$ con $i \geq 2$, entonces la trayectoria dirigida u_i, v_2, u_1, v_1 es una u_iv_1 -geodésica que contiene a u_1 y v_1 . Para $T = \{u_i, v_j\}$, donde $2 \leq i \leq s$ y $2 \leq j \leq t$, se tiene que la trayectoria dirigida v_j, u_1, v_1, u_i es una v_ju_i -geodésica con u_1 y v_1 en ella.

Consideremos ahora $T = \{u_1, u_i\}$, con $2 \leq i \leq s$, entonces la trayectoria dirigida u_1, v_1, u_i es una u_1u_i -geodésica que contiene a u_1 y v_1 . Para $T = \{u_i, u_j\}$, donde $2 \leq i < j \leq s$, la trayectoria dirigida u_i, v_2, u_1, v_1, u_j es una u_iu_j -geodésica con u_1 y v_1 en ella. Si $T = \{v_1, v_j\}$ con $2 \leq j \leq t$, entonces la trayectoria dirigida v_j, u_1, v_1 es una v_jv_1 -geodésica la cual contiene a u_1 y v_1 . Finalmente, si $T = \{v_i, v_j\}$, donde $2 \leq i < j \leq t$, entonces la trayectoria dirigida v_i, u_1, v_1, u_2, v_j es una v_iv_j -geodésica, la cual contiene a u_1 y v_1 .

Dado que hemos analizado todos los posibles casos para T , se concluye que $S \subseteq [T]$ para cualquier conjunto T con dos vértices de $V(D)$; así, por el Corolario 2.1.10 $[T] = V(D)$, y por el Corolario 2.1.11 $con(D) = 1$. Por tanto, $con^-(K_{s,t}) = 1$. ■

Hemos visto que para toda gráfica no trivial G de orden n que tiene vértices finales, $con^+(G) = con^-(G) = n - 1$ o equivalentemente $|S_C(G)| = 1$. De manera que ahora sólo vamos a considerar gráficas conexas sin vértices finales y sin triángulos pues esto garantiza que para cualquier orientación no existirán vértices transitivos. Además, observaremos que si una gráfica conexas G tiene un vértice de corte entonces existe una cota inferior de $con^-(G)$ que está relacionada a la cardinalidad de un bloque final mínimo de G y donde por mínimo se entenderá mínimo por contención.

Lema 2.1.14. *Sea G una gráfica conexas no trivial y sin triángulos de orden n . Una orientación D de G tiene número de convexidad $con(D) < n - 1$ si y sólo si D no tiene transmisor ni receptor.*

Demostración. Ya que G no tiene triángulos entonces para todo $v \in V(G)$ si $uv, vw \in E(G)$ se tiene que $uw \notin E(G)$; es decir, no hay orientación D de G que contenga un vértice transitivo. Con esta observación, considérese D una orientación de G con número de convexidad $con(D) < n - 1$; esto es,

$con(D) \neq n-1$ entonces por la Proposición 1.2.3, D no contiene ni transmisor ni receptor.

Ahora, supóngase que D no tiene transmisores ni receptores entonces por la Proposición 1.2.3, se sigue que $con(D) \neq n-1$ y puesto que el máximo número de convexidad que puede tener una gráfica es $n-1$, entonces se concluye que $con(D) < n-1$. ■

Teorema 2.1.15. *Si G es una gráfica conexa no trivial, sin triángulos, de orden n y sin vértices finales, entonces $con^-(G) \leq n-2$.*

Demostración. Es suficiente construir una orientación D de G con número de convexidad $con(D) < n-1$, pues de esta manera se garantiza que el mínimo de todos los números de convexidad para una orientación de G , esto es $con^-(G)$, será menor o igual a $con(D)$.

Si todos los vértices de G tienen grado par, entonces se puede dar una orientación D de G de manera que para todo $v \in V(G)$, $d^+(v) = d^-(v)$ y dado que G es conexa $d(v) \neq 0$. Así, D no tiene receptores ni transmisores y por el lema anterior, $con(D) < n-1$.

Ahora, si G tiene vértices de grado impar, ya que en toda gráfica el número de vértices de grado impar es par, entonces podemos dar una partición del conjunto de vértices impares de G en parejas y hacemos lo siguiente para obtener una nueva gráfica M . A cada pareja agregaremos una nueva arista entre sus vértices, teniendo así, que M es una multigráfica donde todos los vértices tienen grado par y por tanto M es euleriana. Para facilitar el análisis, es conveniente colorear cada arista de G de azul y cada arista de $M \setminus E(G)$ de rojo. Sea C un circuito euleriano de M y orientamos cada arista de M de acuerdo a como se recorre sobre C . Cada vértice de la multidigráfica resultante D_0 tiene ingrado y exgrado positivos. Ya que cada vértice incidente con una arista roja tiene grado al menos 3 en G , pues es impar y G no tiene vértices finales, entonces el grado es al menos 4 en M y así, el ingrado y exgrado será al menos 2 en D_0 . Cuando las flechas rojas de D_0 son removidas, una orientación D de G es obtenida. Como el ingrado y exgrado de cada vértice en D es positivo, D no tiene transmisores ni receptores, aplicando el Lema 2.1.14 se tiene que $con(D) < n-1$. Por tanto, $con^-(G) \leq n-2$. ■

Corolario 2.1.16. Si G es una gráfica bipartita conexa no trivial de orden n y sin vértices finales, entonces $\text{con}^-(G) \leq n - 2$.

Demostración. Ya que no hay ciclos de longitud impar en las gráficas bipartitas, en particular no hay triángulos, los cuales son ciclos de longitud 3. De manera que las gráficas bipartitas conexas no triviales, de orden n y sin vértices finales, cumplen con las hipótesis del teorema anterior, en consecuencia $\text{con}^-(G) \leq n - 2$. ■

Lema 2.1.17. Sea G una gráfica conexa no trivial de orden $n \geq 3$ y B un bloque final mínimo. Si D es una orientación de G , entonces $\text{con}(D) \geq n - |B| + 1$.

Demostración. Sea D una orientación de G y u el vértice de corte de G con $u \in V(B)$. Consideremos $D \setminus \{u\}$, entonces $D \setminus \{u\} = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ donde cada D_i , $i = 1, 2, \dots, k$, es una componente conexa en $D \setminus \{u\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que D_1 es la componente correspondiente al bloque B menos el vértice u , esto es, $V(D_1) = V(B) - \{u\}$. Ya que $G[V(D) - V(D_1)]$ es propiamente una gráfica y sabemos que la totalidad de los vértices de una gráfica es un conjunto convexo, entonces $V(D) - V(D_1)$ es un conjunto convexo y $|V(D) - V(D_1)| = n - |B| + 1$. Por tanto, $\text{con}(D) \geq n - |B| + 1$. ■

Siendo B un bloque final mínimo de G , se tiene por el lema anterior que

Teorema 2.1.18. Para enteros positivos $n \geq 3$, existe una gráfica conexa G tal que $\text{con}^-(G) \geq (n + 1)/2$.

Demostración. Sea G una gráfica de orden n construida de la siguiente manera. Sea $V(G) = \{v, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$, $E(G) = \{vu_i : i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_i u_j : i, j \leq n/2 \text{ o } i, j \geq n/2\}$ y tal que $c(G - v) > c(G)$; es decir, v es un vértice de corte. G así definida, es una gráfica conexa con dos bloques terminales B_1, B_2 . (Véase Fig. 2.3)

Si n es impar, entonces el orden de las componentes conexas C_1 y C_2 en $G - v$ será el mismo, a saber $\frac{n-1}{2}$. Considérese a B_1 , $|V(B_1)| = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ y sea D una orientación de G .

Por Lema 2.1.17, $con(D) \geq n - |B_1| + 1 = n - \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ y ya que es para cualquier orientación de G , se tiene que $con^-(G) \geq \frac{n+1}{2}$.

Ahora, si n es par, entonces en $G-v$, $|V(C_1)| = \frac{n}{2} - 1$ y $|V(C_2)| = \frac{n}{2}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $B_1 = C_1 + \{v\}$, entonces $|V(\overline{B_1})| = \frac{n}{2}$, y por Lema 2.1.17, para toda orientación D de G , $con(D) \geq n - |B_1| + 1 = n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2} > \frac{n+1}{2}$, por tanto $con^-(G) \geq \frac{n+1}{2}$. ■

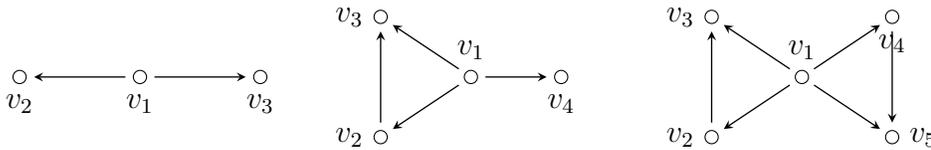


Figura 2.3: Gráficas de orden $n = 3$, $n = 4$ y $n = 5$ con número de convexidad inferior mayor o igual a $(n + 1)/2$.

Para terminar esta sección, mostraremos la existencia de alguna gráfica de orden $n \geq 4$ tal que si a es un entero con $1 \leq a \leq n - 2$ o $1 \leq a \leq n - 1$ y $a \neq 2$ entonces a esta en su espectro de convexidad. Y usaremos el Teorema de Menger para demostrar la inexistencia de una gráfica conexa de orden mayor o igual a 3 con espectro de convexidad fuerte igual a $n - 1$.

Teorema 2.1.19. *Para todo par de enteros positivos n y a con $n \geq 4$, $1 \leq a \leq n - 2$ y $a \neq 2$, existe una gráfica G 2-conexa con n vértices tal que $S_C(G) = S_{SC}(G) = \{a, n - 1\}$.*

Demostración. Para $a = 1$, definimos una gráfica conexa $G_1 = (V_1, E_1)$ con $V_1 = \{u, v, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$ y $E_1 = \{uv\} \cup \{uv_i, v_i v : i = 1, 2, \dots, n - 2\}$. Entonces G_1 es 2-conexa pues entre cualesquiera dos vértices hay dos trayectorias internamente ajenas.

Sea D una orientación de G_1 . Sin pérdida de generalidad supóngase que $(u, v) \in A(D)$. Si D tiene un vértice transmisor, receptor o transitivo entonces

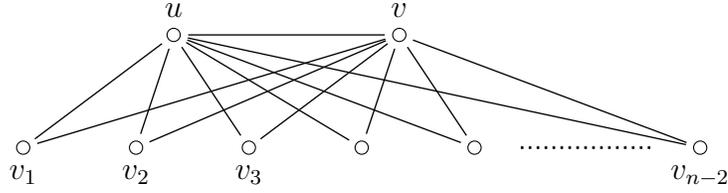


Figura 2.4: La gráfica $G_1 = (V_1, E_1)$ definida para $a = 1$.

$con(D) = n - 1$. De manera que, consideremos que D no tiene receptores, transmisores ni vértices transitivos. Claramente D es fuertemente conexa ya que los conjuntos de vértices $\{u, v, v_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, n - 2$ forman triángulos dirigidos, y todos comparten la misma flecha (u, v) , por lo que para todo par de vértices de G_1 existe un camino dirigido entre ellos. Ahora, (v, v_j, u) $1 \leq j \leq n - 2$, es una geodésica en D , entonces $[\{u, v\}] = V(D)$. Además, obsérvese que para cualesquiera dos vértices distintos x y y de D , $u, v \in I[x, y]$ en consecuencia $[\{x, y\}] = V(D)$ y por el Corolario 2.1.11, $con(D) = 1$. De esta manera se tiene que $S_C(G_1) = S_{SC}(G_1) = \{1, n - 1\}$.

Supongamos que $3 \leq a \leq n - 2$ y definamos G_a como la gráfica con $V(G_a) = \{u, v, u_1, \dots, u_{n-a}, v_1, \dots, v_{a-2}\}$ y $E(G_a) = \{uv, uu_1, vu_{n-a}\} \cup \{uv_i, vv_i : 1 \leq i \leq a - 2\} \cup \{u_i u_{i+1} : 1 \leq i \leq n - a - 1\}$. Observemos que G_a es 2-conexa pues entre cualesquiera dos vértices hay dos trayectorias internamente ajenas.

Sea D_{n-1} la orientación de G_a , $A(D_{n-1}) = \{(u, v), (u, v_1), (v_1, v), (v, u_{n-a}), (u_1, u)\} \cup \{(v, v_i), (v_i, u) : 2 \leq i \leq a - 2\} \cup \{(u_{i+1}, u_i) : 1 \leq i \leq n - a - 1\}$. Para $a \geq 3$, D_{n-1} es una gráfica fuertemente conexa y v_1 es un vértice transitivo. Entonces por Proposición 1.2.3, $con(D_{n-1}) = n - 1$; es decir, $n - 1 \in S_C(G_a) \cap S_{SC}(G_a)$.

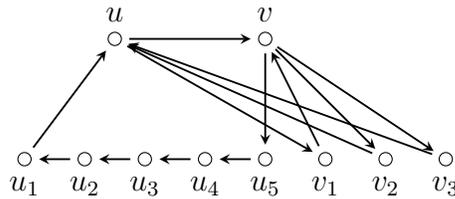


Figura 2.5: Orientación D_{n-1} de G_a con $a = 5$, $n = 10$ y $con(D_{n-1}) = n - 1$.

Ahora, sea D una orientación de G_a con $\text{con}(D) < n - 1$. Por la Proposición 1.2.3, D no tiene transmisores, receptores ni vértices transitivos. Sin pérdida de generalidad supóngase que $(u, v) \in E(D)$. Entonces (v, v_i, u) es una geodésica en D para $i = 1, 2, \dots, a - 2$. Ya que por hipótesis $a \leq n - 2$ entonces $2 \leq n - a$ y la longitud de la trayectoria $(u, u_1, \dots, u_{n-a}, v)$ en G_a es mayor que 2. Como u_1, u_2, \dots, u_{n-a} no son transmisores ni receptores, se tiene que $(u, u_1, u_2, \dots, u_{n-a}, v) \in D$ ó $(v, u_{n-a}, u_{n-a-1}, \dots, u_1, u) \in D$. En cualquier caso, D es fuertemente conexa dado que entre cualquier par de vértices existe un camino dirigido entre ellos, y el conjunto $\{u, v_1, \dots, v_{a-2}, v\}$ es un conjunto convexo propio de D .

Si un conjunto convexo S contiene a un u_i y x para algún $x \in V(D) \setminus \{u_i\}$, entonces $u, v_i, u_1, \dots, u_{n-a} \in I[u_i, x]$. Lo cual implica que $[\{u_i, x\}] = V(D)$, pues si $u, v \in I[u_i, x]$, $v_i \in I[u_i, x]$ dado que (v, v_i, u) es una geodésica. Por tanto, si S es un conjunto convexo propio en D , entonces S no puede tener vértices u_j . Así, $\{u, v_1, \dots, v_{a-2}, v\}$ es el único conjunto convexo propio máximo de D y su cardinalidad es a . En consecuencia, $\text{con}(D) = a$ y $S_C(G) = S_{SC}(G) = \{a, n - 1\}$.

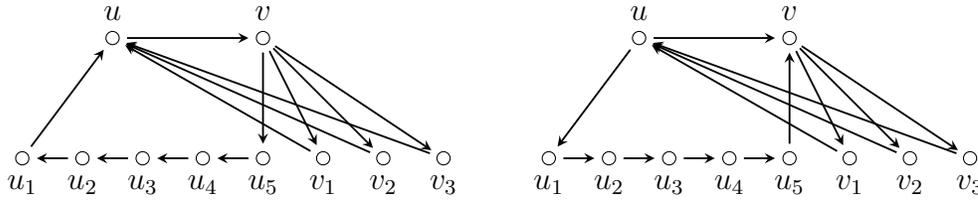


Figura 2.6: Orientaciones D de G_a con $a = 5$, $n = 10$ y $\text{con}(D) = a$.

■

Corolario 2.1.20. *Para todo par de enteros positivos n y a con $n \geq 4$, $1 \leq a \leq n - 1$ y $a \neq 2$, existe una gráfica conexa G con n vértices tal que $S_C(G) = \{a, n - 1\}$.*

Demostración. Si $1 \leq a \leq n - 2$ y $a \neq 2$, por el teorema anterior, existe una gráfica 2-conexa, por tanto conexa, G tal que $S_C(G) = \{a, n - 1\}$.

Si $a = n - 1$, sea G un árbol, entonces G es conexa y sabemos por Corolario 1.2.5 que para toda orientación D de G , $\text{con}(D) = n - 1$, en consecuencia $S_C(G) = \{n - 1\}$.

■

Corolario 2.1.21. *Para todo par de enteros positivos n y a con $n \geq 4$, $1 \leq a \leq n - 1$ y $a \neq 2$, existe una gráfica conexa G con n vértices tal que $con^-(G) = a$ y $con^+(G) = n - 1$.*

Demostración. Sea n y a enteros positivos tales que $n \geq 4$, $1 \leq a \leq n - 1$ y $a \neq 2$, entonces por el corolario anterior, existe una gráfica conexa G con n vértices tal que $S_C(G) = \{a, n - 1\}$. Pero por definición, $con^-(G) = \min S_C(G)$ y $con^+(G) = \max S_C(G)$. Así, $con^-(G) = a$ y $con^+(G) = n - 1$. ■

Teorema 2.1.22. *(Teorema de Menger). Supóngase que n y k son enteros positivos con $n \geq k + 1$. Entonces una gráfica G de orden n es k -conexa si y sólo si cualesquiera dos vértices distintos de G están conectados por al menos k trayectorias internamente ajenas.*

Tanto la demostración del teorema de Menger como el siguiente lema, conocido como el Lema del Abanico, se pueden encontrar en [1]

Lema 2.1.23. *(Del Abanico). Sea G es una gráfica k -conexa, $a \in V(G)$ y $B \subseteq V(G)$. El número máximo de aB -trayectorias que solo tiene a a como vértice común es el número mínimo de vértices distintos de a que separan a a de B .*

Teorema 2.1.24. *No existe gráfica conexa G de orden $n \geq 3$ con $S_{SC}(G) = \{n - 1\}$.*

Demostración. Supongamos que G es una gráfica conexa con $S_{SC}(G) = \{n - 1\}$. Entonces existe una orientación fuertemente conexa D de G , lo cual implica que todo bloque de G es 2-conexo; es decir, G no tiene puentes. Ya que si así fuera, en D solo existiría una forma de pasar de un bloque a otro que están conectados por dicho puente y en consecuencia D no sería fuertemente conexa. Así, cada bloque de G tiene, al menos 3 vértices. Ahora, si todo bloque de G tiene una orientación fuertemente conexa sin vértices transitivos entonces por ser una orientación fuertemente conexa, D no tiene transmisores ni receptores; esto es, D es una orientación fuertemente conexa sin transmisores, receptores ni vértices transitivos, por tanto, por la Proposición 1.2.3, $con(D) < n - 1$. Lo cual contradice el hecho de que $S_{SC}(G) = \{n - 1\}$. De esta manera, basta construir una orientación fuertemente conexa D de G sin vértices transitivos.

Sea G' 2-conexa. Por el Lema del Abanico, consecuencia del Teorema de Menger, se tiene que para tres vértices distintos x, y, z de G' , existen dos trayectorias P_1 de x a y y P_2 de x a z en G' tal que $V(P_1) \cap V(P_2) = \{x\}$.

Dado que G' es 2-conexa, entonces por el Teorema de Menger sabemos que entre cualquier par de vértices existen dos trayectorias internamente ajenas entre ellos, por lo que en G' existe un ciclo $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ el cual es una subgráfica inducida de G' y que no contiene cuerdas. Defínase el ciclo dirigido $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ en D . Para cada i , v_i tiene un exvecino y un invecino los cuales no son adyacentes ó se tiene el ciclo dirigido (v_1, v_2, v_3, v_1) (de lo contrario habría una diagonal en el ciclo). De esta manera v_1, v_2, \dots, v_k no son vértices transitivos, receptores ni transmisores.

Sea $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Si $V(G') \setminus S_1 \neq \emptyset$, entonces como consecuencia del Lema del Abanico, existe una trayectoria de longitud mínima $(v_i, x_1, \dots, x_r, v_j)$ de G' satisfaciendo $(k \geq i > j \geq 1$ y $(i, j) \neq (k, 1))$ ó $(i, j) = (1, k)$ tal que $r \geq 1$ y $x_1, \dots, x_r \notin S_1$. Definimos la trayectoria dirigida $(v_i, x_1, \dots, x_r, v_j)$ en D . Si $r > 1$, entonces cada uno de los vértices x_1, \dots, x_r tiene un exvecino y un invecino que no son adyacentes pues la trayectoria $(v_i, x_1, \dots, x_r, v_j)$ es mínima. Si $r = 1$, entonces $v_i v_j \notin E(G')$ (si $i > j + 1$) ó $(v_j, v_i) \in A(D)$. Sea $S_2 = S_1 \cup \{x_1, \dots, x_r\}$. Las otras aristas entre dos vértices de S_2 son orientadas de manera arbitraria en D . De esta manera los vértices x_1, \dots, x_r no son vértices transitivos, receptores ni transmisores en D . Recursivamente, podemos encontrar una trayectoria de longitud mínima (x, y_1, \dots, y_s, y) con $xy \notin E(G')$ ó $(y, x) \in E(D)$ tal que $s \geq 1$ y $y_1, \dots, y_s \notin S_i$, entonces se define la trayectoria dirigida (x, y_1, \dots, y_s, y) en D y $S_{i+1} = S_i \cup \{y_1, \dots, y_s\}$. Las otras aristas entre dos vértices de S_{i+1} son orientadas de manera arbitraria en D . Cuando se llega a $S_{i+1} = V(G')$, obtenemos una orientación fuertemente conexa D de G sin vértices transmisores, receptores o transitivos. En consecuencia, $con(D) < n - 1$ y por tanto $S_{SC} \neq \{n - 1\}$. ■

2.2. Los espectros de convexidad de Gráficas completas

Aquí se determinará tanto el espectro de convexidad como el espectro de convexidad fuerte para gráficas completas. Recordemos que

$$S_C(G) = \{con(D) : D \text{ es una orientación de } G\}$$

y

$$S_{SC}(G) = \{con(D) : D \text{ es una orientación fuertemente conexa de } G\}.$$

Se sigue que $S_{SC}(G) \subseteq S_C(G)$.

Cualquier orientación a una gráfica completa de orden n se le conoce como un *torneo* de orden n . Y un *torneo circulante* de orden n , con n impar y denotado como $C_n\{1, 2, \dots, (n-1)/2\}$, es aquel torneo con $V(C_n\{1, 2, \dots, (n-1)/2\}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A(C_n\{1, 2, \dots, (n-1)/2\}) = \{(v_i, v_j) : j - i \in \{1, 2, \dots, (n-1)/2\}\}$. Empezaremos con los siguientes lemas.

Lema 2.2.1. *Sea n un entero positivo con $n \geq 3$. Entonces existe un torneo fuertemente conexo D de orden n tal que $con(D) = 1$. Además, si $n \neq 4$, el diámetro de D es 2.*

Demostración. Sea $n \geq 3$, $n = 2k + 1$ y D el torneo circulante de orden n , $D = C_n\{1, 2, \dots, (n-1)/2\}$. $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$. Ya que $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ con $1 \leq i \leq 2k$ y $(v_{2k+1}, v_1) \in A(D)$ entonces D tienen un ciclo generador, por lo que D es un torneo fuertemente conexo. Y dado que cualquier par de vértices está en un 3-ciclo dirigido, la máxima distancia dirigida en D es 2, por tanto $diam(D) = 2$.

Ahora, consideremos el conjunto $S = \{v_1, v_{k+1}\} \subseteq V(D)$. Se tiene que (v_{k+1}, v_l, v_1) es una $v_{k+1}v_1$ -geodésica para $k+1 < l \leq 2k+1$, por tanto $v_{k+2} \in [S]$ y ya que (v_1, v_r, v_{k+2}) es una v_1v_{k+2} -geodésica, con $1 < r \leq k+1$ se tiene que $[S] = \{v_1, v_{k+1}\} = V(D)$.

Si $T = \{v_i, v_j\} \subseteq V(D)$ es cualquier subconjunto con dos elementos, se mostrará que $S \subseteq [T]$ y por el Corolario 2.1.11 se tendrá que $con(D) = 1$. Supóngase que $T \neq S$. Para cada T , se exhibirán geodésicas cuyos vértices extremos están en $[T]$ y que contienen a v_1, v_{k+1} .

Sea $T = \{v_1, v_j\}$ con $1 < j \leq k + 1$, entonces (v_j, v_{k+2}, v_1) es una $v_j v_1$ -geodésica, por lo que $v_{k+2} \in [T]$ y $(v_1 v_{k+1} v_{k+2})$ es una $v_1 v_{k+2}$ -geodésica, así $v_{k+1} \in [T]$ y $S \subseteq [T]$. Si $T = \{v_1, v_j\}$ con $k + 1 < j \leq 2k + 1$, (v_1, v_{k+1}, v_j) es una $v_1 v_j$ -geodésica, entonces $v_{k+1} \in [T]$ y $S \subseteq [T]$. Si $T = \{v_j, v_{k+1}\}$ con $1 < j < k + 1$, entonces (v_{k+1}, v_{2k+1}, v_j) es una $v_{k+1} v_j$ -geodésica, así $v_{2k+1} \in [T]$ y como (v_{2k+1}, v_1, v_{k+1}) es una $v_{2k+1} v_{k+1}$ -geodésica con $v_1 \in [T]$ se sigue que $S \subseteq [T]$.

Sea $T = \{v_j, v_{k+1}\}$ con $k + 1 < j < 2k + 1$ entonces (v_j, v_1, v_{k+1}) es una $v_j v_{k+1}$ -geodésica y $v_1 \in [T]$, por tanto $S \subseteq [T]$. Si $T = \{v_i, v_j\}$ con $1 < i < j < k + 1$, entonces (v_j, v_{j+k}, v_i) , (v_i, v_{k+1}, v_{j+k}) y (v_{j+k}, v_1, v_{k+1}) son geodésicas, las cuales contienen a v_1 y v_{k+1} , por tanto $S \subseteq [T]$. Si $T = \{v_i, v_j\}$ con $k + 1 < i < j \leq 2k + 1$, se tiene que (v_j, v_{i-k}, v_i) , (v_{i-k}, v_{k+1}, v_j) y (v_j, v_1, v_{k+1}) son geodésicas y $v_1, v_{k+1} \in [T]$, por lo que $S \subseteq [T]$. Finalmente, si $T = \{v_i, v_j\}$ con $1 < i < k + 1$ y $k + 1 < j \leq 2k + 1$ y $(v_i, v_j) \in A(D)$ entonces (v_j, v_1, v_i) es una $v_j v_i$ -geodésica y (v_1, v_{k+1}, v_j) es una $v_1 v_j$ -geodésica. Si en cambio, $(v_j, v_i) \in A(D)$ entonces (v_i, v_{k+1}, v_j) y (v_j, v_1, v_{k+1}) son geodésicas; sin embargo, en cualquier caso $v_1, v_{k+1} \in [T]$ y en consecuencia $S \subseteq [T]$ y $con(D) = 1$.

Ahora, sea $n = 2k$. Si $n = 4$, entonces existe un único torneo fuertemente conexo de orden n ; este torneo tiene diámetro 3 y número de convexidad 1. Para $n \geq 6$, sea D' el torneo circulante de orden $n - 1$ con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Sea D el torneo obtenido a partir de D' al añadir el vértice v_n y los conjuntos de flechas $\{(v_n, v_{2m}) : 1 \leq m \leq k - 1\}$ y $\{(v_n, v_{2m-1}) : 1 \leq m \leq k\}$. Nuevamente resulta claro que cualquier par de vértices distintos, a excepción de la pareja v_1, v_n , se encuentran en un triángulo dirigido, por lo que se encuentran a distancia menor o igual a 2. Claramente $d(v_1, v_n) = 1$ y, como $n \geq 5$, (v_n, v_{n-2}, v_1) es una trayectoria dirigida de longitud 2 en D . Por lo tanto, D tiene diámetro 2.

Puesto que el diámetro de D' es 2, al añadir al vértice v_n no se introducen geodésicas entre pares de vértices en D' . De esta forma, siguiendo el mismo argumento que en el caso anterior, podemos ver que para todo par de vértices $\{v_i, v_j\}$ con $1 \leq i < j \leq n - 1$, se tiene que $V(D') \subseteq [\{v_i, v_j\}]$. Además, (v_3, v_n, v_2) es una $v_3 v_2$ -geodésica en D , por lo que $[\{v_i, v_j\}] = V(D)$ para cualesquiera $1 \leq i < j \leq n - 1$. Por otro lado, para cada $1 \leq m \leq k - 1$, (v_{2m}, v_{2m+1}, v_n) es una $v_{2m} v_n$ -geodésica en D , por lo que $V(D) = [\{v_{2m}, v_{2m+1}\}] \subseteq [\{v_{2m}, v_n\}]$. También, para cada $1 \leq m \leq k - 1$, tenemos que (v_n, v_{2m}, v_{2m+1}) es una $v_n v_{2m+1}$ -geodésica en D , por lo que $V(D) =$

$[\{v_{2m}, v_{2m+1}\} \subseteq [\{v_{2m+1}, v_n\}]]$. Finalmente, (v_n, v_{n-2}, v_1) es una $v_n v_1$ -geodésica en D , con lo que podemos concluir que $V(D) = [\{v_1, v_{n-2}\}] \subseteq [\{v_1, v_n\}]$. De las tres observaciones anteriores se infiere que $[\{v_i, v_n\}] = V(D)$ para cada $1 \leq i \leq n - 1$. Por lo tanto el número de convexidad de D es 1. ■

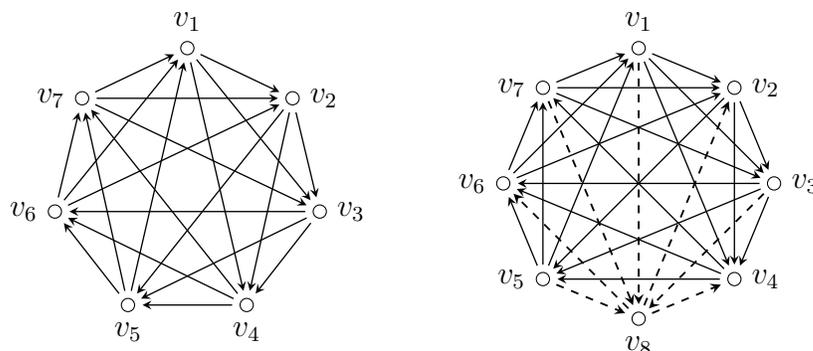


Figura 2.7: Torneos fuertemente conexos de orden 7 y 8 con número de convexidad 1 y diámetro 2.

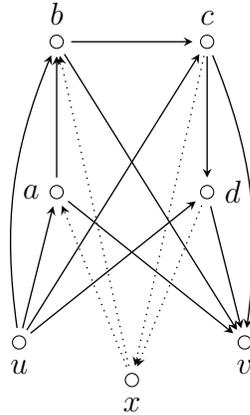
Lema 2.2.2. *Si D es un torneo fuertemente conexo de orden $n \geq 3$, entonces $\text{con}(D) \leq n - 2$.*

Demostración. Sea S un conjunto de vértices en D con $|S| = n - 1$. Entonces existe un vértice v tal que $v \in V(D) \setminus S$. Definamos los siguientes conjuntos, $X = \{x \in V(D) : (x, v) \in A(D)\}$ y $Y = \{y \in V(D) : (v, y) \in A(D)\}$. $X \neq \emptyset$ y $Y \neq \emptyset$ pues D es un torneo fuertemente conexo y en consecuencia existe $x \in X$ y $y \in Y$ tal que $(y, x) \in A(D)$. Entonces (x, v, y) es una geodésica en D ; es decir, S no es convexo y $v \in [S]$. Por tanto, si S' es un conjunto convexo propio de D , $|S'| \leq n - 2$ y así $\text{con}(D) \leq n - 2$. ■

Lema 2.2.3. *Para $n \geq 6$ un entero positivo, $4 \notin S_{SC}(K_n)$.*

Demostración. Sabemos que una orientación de la gráfica completa de orden n es denominado un torneo de orden n . Entonces supóngase que D es un torneo fuertemente conexo con S siendo un conjunto convexo propio de 4 vértices en D . Entonces la subgráfica inducida H de S es un torneo fuertemente

conexo, pues de lo contrario D no lo sería ó S no sería convexo. Como se vió en el Lema 2.2.1, $diam(H) = 3$, por lo que existe una geodésica (a, b, c, d) en la subgráfica inducida de S . Sea $A = \{u : u \in V(D) \setminus S \text{ y } (u, a) \in A(D)\}$ y $B = \{v : v \in V(D) \setminus S \text{ y } (d, v) \in A(D)\}$. Ya que D es un torneo fuertemente conexo se tiene que A y B son no vacíos, así tomemos $u \in A$ y $v \in B$. Ya que (a, b, c, d) es una trayectoria dirigida de D y S es convexo, $(u, b), (c, v) \in A(D)$, pues si no $u, v \in [S]$ y por tanto S no sería convexo, $(b, u, a), (d, v, c)$ serían una ba -geodésica y una dc -geodésica respectivamente. Si $(u, b), (c, v) \in A(D)$ entonces, dado que S es convexo, $(u, c), (b, v) \in A(D)$. De manera análoga, tenemos que $(u, d), (a, v) \in A(D)$. Ahora, $d_H(a, b) = diam(H) = 3$, entonces $d_D(a, b) \leq 3$ pues H es subgráfica inducida. Si $d_D(a, d) = 1$, $(a, d) \in A(D)$ y H no sería fuertemente conexa, mientras que si $d_D(a, d) = 2$ entonces S no sería convexo. Así, $d_D(a, d) = 3$. Veamos que A y B son ajenos. Supóngase que $x \in A \cap B$ entonces $(d, x), (x, a) \in A(D)$ y en consecuencia por el análisis anterior $(c, x), (x, b) \in A(D)$ y (c, x, b) es una cb -geodésica por lo que $x \in [S]$, contradiciendo el hecho de que S es un conjunto convexo. Por tanto, $A \cap B = \emptyset$. Y $(u, v) \in A(D)$, para $u \in A$ y $v \in B$, pues de lo contrario, $(v, u) \in A(D)$ y (c, v, u, b) sería una cb -geodésica y S no sería convexo. Si $V(D) \setminus (S \cup A \cup B)$ es vacío entonces u es un transmisor y D no sería fuertemente conexo. De manera que existe un vértice $x \in V(D) \setminus (S \cup A \cup B)$ con $(a, x), (x, d) \in A(D)$ lo cual contradice que $d_D(a, d) = 3$. Concluyéndose que no existe tal torneo D y $4 \notin S_{SC}(K_n)$ para $n \geq 6$.



■

Combinando las ideas de los lemas anteriores se tiene el siguiente teorema, el cual nos da el espectro de convexidad fuerte para K_n .

Teorema 2.2.4. $S_{SC}(K_3) = S_{SC}(K_4) = \{1\}$, $S_{SC}(K_5) = S_{SC}(K_6) = \{1, 3\}$, y $S_{SC}(K_n) = \{1, 3, 5, 6, \dots, n-2\}$ para enteros $n \geq 7$.

Demostración. Para $n = 3$, por el Lema 2.2.1 y Lema 2.2.2 $S_{SC}(K_3) = \{1\}$. Si $n = 4$, aplicando el Teorema 1.2.8 tenemos que $2 \notin S_{SC}(K_4)$ y por los Lemas 2.2.2 y 2.2.1, se sigue que $3 \notin S_{SC}(K_4)$ y $S_{SC}(K_4) = \{1\}$. Así $S_{SC}(K_3) = S_{SC}(K_4) = \{1\}$.

Para $n \geq 5$, se tiene por el Lema 2.2.1 que $1 \in S_{SC}(K_n)$, mientras que por el Teorema 1.2.8 y Lema 2.2.2, tenemos que $2, n-1 \notin S_{SC}(K_n)$ respectivamente. Y $4 \notin S_{SC}(K_n)$ gracias al Lema 2.2.3. En consecuencia, para K_5 , $2, 4 \notin S_{SC}(K_n)$. Para K_6 , se tiene que $2, 4, 5 \notin S_{SC}(K_6)$. A continuación construiremos un torneo fuertemente conexo D con orden $n \geq 5$ y $con(D) = k$ para $3 \leq k \leq n-2$ y $k \neq 4$.

Supóngase $n \geq 5$, $3 \leq k \leq n-2$ y $k \neq 4$. Sea el conjunto de vértices de K_n , $\{v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$ y sean $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-k}\}$. Por el Lema 2.2.1, existe una gráfica orientada fuertemente conexa D_1 con el conjunto de vértices V , donde $(v_k, v_1) \in A(D_1)$, $diam(D_1) = 2$ y $con(D_1) = 1$. Sea D_2 la gráfica orientada con el conjunto de vértices U y el conjunto de aristas $\{(u_i, u_j) : 1 \leq i < j \leq n-k\} - \{(u_1, u_{n-k})\} \cup \{(u_{n-k}, u_1)\}$ para $n-k \geq 3$. Si $n-k = 2$ entonces el conjunto de aristas de D_2 esta definido por $\{(u_2, u_1)\}$. Sea D_3 la gráfica orientada con el conjunto de vértices $V \cup U$ y el conjunto de aristas $\{(u_1, v_i) : 1 \leq i \leq k\} \cup \{(v_i, u_l) : 1 \leq i \leq k \text{ y } 2 \leq l \leq n-k\}$. Sea D con $V(D) = V \cup U$ y $A(D) = A(D_1) \cup A(D_2) \cup A(D_3)$. Entonces por la manera en que se definió $A(D_i)$, con $i = 1, 2, 3$, D es un torneo de orden n y además es fuertemente conexo ya que D_1 y D_2 lo son y $A(D_3)$ consta de flechas que nos llevan de D_1 a D_2 y viceversa.

Por el Lema 2.2.1, $d_D(v_i, v_j) \leq 2$ para todo $1 \leq i < j \leq k$. Y $u_l \notin I[v_i, v_j]$ en D para todo i, j, l , pues la $v_j v_i$ -trayectoria más corta en D pasando por un vértice en U es de longitud al menos 3. Entonces V es un conjunto convexo de D .

Sea S un conjunto convexo de D . Si existe $1 \leq l < m \leq n-k$ tal que $u_l, u_m \in S$, entonces (u_m, u_{n-k}, u_1, u_l) es una $u_m u_l$ -geodésica, por lo que $I[u_m, u_l]$ contiene a los vértices u_1 y u_{n-k} . Ya que (u_1, u_p, u_{n-k}) y (v_1, v_i, u_{n-k}) con $u_1 u_{n-k}$ -geodésicas en $V(D)$ para todo $1 < p < n-k$ y $1 \leq i \leq k$, se tiene que $S = V(D)$. Ahora, si existe $1 \leq l \leq n-k$ y $1 \leq m \leq k$ tal

que $u_l, v_m \in S$, entonces $I[u_l, v_m]$ contiene a los vértices u_1 y u_{n-k} pues (u_l, u_{n-k}, u_1, v_m) es una $u_l v_m$ -geodésica; así, por la misma razón que en el caso anterior, $S = V(D)$. De esta manera, V es el máximo conjunto convexo con $V \neq V(D)$. Y por tanto $con(D) = |V| = k$.

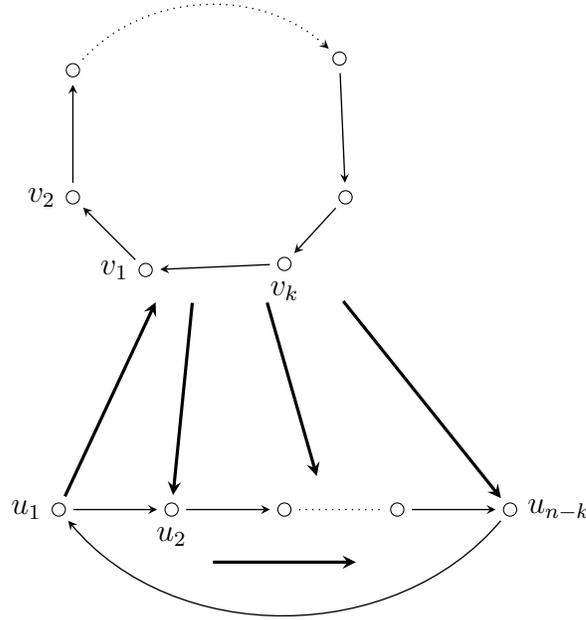


Figura 2.8: D con $V(D) = V \cup U$ y $A(D) = A(D_1) \cup A(D_2) \cup A(D_3)$.

■

Finalmente daremos el espectro de convexidad para toda gráfica completa de orden n .

Lema 2.2.5. Para enteros positivos $n \geq 7$, $4 \notin S_C(K_n)$.

Demostración. Sea D un torneo de orden $n \geq 7$. Si D es fuertemente conexo entonces por el Lema 2.2.3, $con(D) \neq 4$. Supóngase que D no es fuertemente conexo, entonces existe una componente fuerte (fuertemente conexas) S de D tal que $(x, y) \in A(D)$ ó $(y, x) \in A(D)$ para todo $x \in V(D) \setminus S$

y $y \in S$. Si $|S| = 1$ o $|V(D) \setminus S| = 1$, entonces D tiene un transmisor o un receptor; es decir, $con(D) = n - 1 \neq 4$. Ahora, si $|S|, |V(D) \setminus S| > 1$, entonces para $x \in V(D) \setminus S$ y $y \in S$, $S \cup \{x\}$ y $(V(D) \setminus S) \cup \{y\}$ son conjuntos propios convexos en D ; es decir, $con(D) \geq \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{7}{2} + 1 > 4$. Por tanto, $4 \notin S_C(K_n)$. ■

Teorema 2.2.6. $S_C(K_3) = \{1, 2\}$, $S_C(K_4) = \{1, 3\}$, $S_C(K_5) = \{1, 3, 4\}$, $S_C(K_6) = \{1, 3, 4, 5\}$ y $S_C(K_n) = \{1, 3, 5, 6, \dots, n - 1\}$ para enteros $n \geq 7$.

Demostración. Sabemos que en una digráfica sin ciclos dirigidos (acíclica) $\delta^- = 0$; es decir, tiene un transmisor. Entonces, si D es una orientación acíclica de K_n , D tiene un transmisor, en consecuencia $con(D) = n - 1$, así $n - 1 \in S_C(K_n)$ para $n \geq 2$.

Ya que $S_{SC}(G) \subseteq S_C(G)$, entonces por el Teorema 2.2.4 y el Lema 2.2.5 tenemos que $S_C(K_3) = \{1, 2\}$, $S_C(K_4) = \{1, 3\}$, $S_C(K_5) = \{1, 3, 4\}$ y $S_C(K_n) = \{1, 3, 5, 6, \dots, n - 2, n - 1\}$ para enteros $n \geq 7$, y $S_C(K_6) = \{1, 3, 5\}$. Para K_6 , se dará una orientación D tal que $con(D) = 4$. Sea $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_4)\} \cup \{(v_i, v_j) : 1 \leq i \leq 3 \text{ y } 4 \leq j \leq 6\}$.

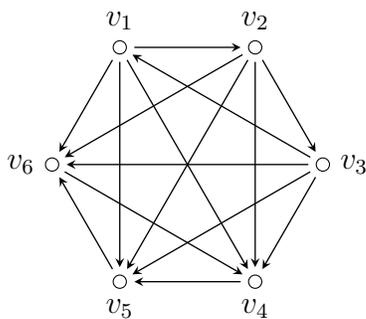


Figura 2.9: Una orientación D de K_6 tal que $con(D) = 4$.

Consideremos $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, S es un torneo fuertemente conexo y ya que $v_4, v_5 \notin [S]$ entonces S es el máximo conjunto convexo propio en D , en consecuencia $con(D) = 4$ y $S_C(K_6) = \{1, 3, 4, 5\}$. (Fig. 2.9). ■

Capítulo 3

Los números de convexidad orientable inferior de Gráficas exteriormente planas

Para este capítulo giraremos nuestra atención a las gráficas con la característica de ser planas y más concretamente a las gráficas exteriormente planas. Se dará la definición de una gráfica plana, una gráfica exteriormente plana y una gráfica exteriormente plana máxima. Los dos principales resultados que se tienen hablan acerca del número de convexidad orientable inferior, uno es para el caso de cualquier gráfica exteriormente plana 2-conexa de orden n y el segundo, con el que se concluye el trabajo de tesis, nos dice que para toda gráfica exteriormente plana máxima no trivial, su número de convexidad orientable inferior es 1.

3.1. Gráficas Planas

Una gráfica es *plana* si está dibujada en el plano de tal suerte que sus aristas no se cruzan. Y es *aplanable* si puede dibujarse en el plano euclidiano (\mathbb{R}^2) de tal manera que sus aristas no se crucen. Si G es aplanable, a dicha representación plana H de G se le denominará una *inmersión plana*.

Si G es una gráfica plana, las aristas y los vértices de G dividen al plano en regiones (conexas) a las cuales se les llama *caras* o *regiones* de G . Cada una de estas regiones estará acotada por un camino cerrado cuando G es conexa y posiblemente una unión de caminos cerrados cuando G no es conexa, donde



Figura 3.1: G una gráfica aplanable y H es una inmersión plana de G .

cada puente se recorre exactamente dos veces y si no hay puentes se forma un ciclo. En cada gráfica plana hay exactamente una región no acotada a la cual llamaremos *región exterior*. Dos regiones serán *adyacentes* si tienen una arista en común.

Se puede construir una nueva gráfica a partir de cualquier gráfica plana G dada de la siguiente manera. Identificamos todas las regiones de G incluyendo la región exterior y colocaremos un vértice en el centro de cada una. Estos nuevos vértices conformarán el conjunto de vértices de la gráfica que construiremos, así la cardinalidad del conjunto será el número de regiones en G . Ahora, dos de estos vértices son adyacentes si las regiones correspondientes en G son adyacentes y la nueva arista se colocará de manera que cruce la arista que divide dichas regiones en G , además por cada adyacencia que tengan estas regiones habrá una arista entre los vértices, de manera que la gráfica H construida de esta manera puede resultar en una multigráfica. Esta nueva gráfica H recibe un nombre particular:

Definición 3.1.1. *Si G es una gráfica plana, definimos a la gráfica dual de G , G^* , como aquella tal que $V(G^*) = \{\text{regiones de } G\}$. Donde si R_1, R_2 son dos regiones de G , éstos serán adyacentes tantas veces como aristas tengan en común.*

Si no se considera el vértice correspondiente a la región exterior se obtiene el dual del interior de G .

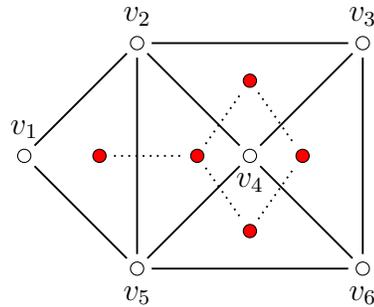


Figura 3.2: Una gráfica plana y su dual del interior.

Finalmente, una gráfica G es *exteriormente plana* si ésta tiene una inmersión plana de tal manera que todo vértice de G cae en la frontera de la región exterior. Una inmersión de una gráfica exteriormente plana con esta propiedad es llamada una *inmersión exteriormente plana*.

Nuestro primer resultado en este capítulo es un lema que da una caracterización de las gráficas exteriormente planas.

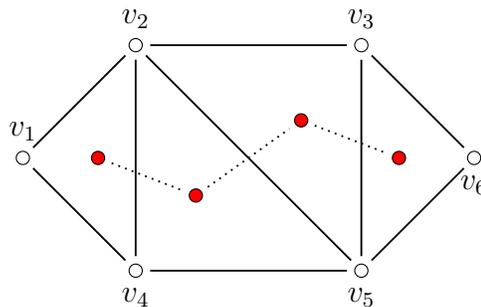


Figura 3.3: Una gráfica exteriormente plana y su dual del interior.

Lema 3.1.2. *Sea G una gráfica conexa plana la cual no es un árbol. El dual del interior de alguna inmersión plana de G es acíclica si y sólo si G es exteriormente plana.*

Demostración. Sea G una gráfica plana que no es exteriormente plana. Entonces para cada inmersión plana de G , existe $v \in V(G)$, el cual pertenece a las fronteras de regiones interiores solamente. Estas regiones serán adyacentes por medio de las aristas de G incidentes en v , lo cual en el dual interior H , formaría un ciclo y en consecuencia H no sería acíclica.

Para demostrar la necesidad, supóngase que G es exteriormente plana. Sea H el dual interior de una inmersión exteriormente plana de G . Ahora, si G tiene a lo más dos regiones interiores, entonces H sería K_2 y por tanto sería acíclica. Por lo que se asumirá que G tiene $l \geq 3$ regiones interiores. Sean R_1, R_2, \dots, R_l las regiones interiores de G y $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ donde el vértice v_i es colocado en la región R_i para $1 \leq i \leq l$.

Si R_i y R_j ($1 \leq i < j \leq l$) son regiones adyacentes en G , por tratarse de una gráfica exteriormente plana, entonces las fronteras de R_i y R_j pueden solamente tener una arista en común e_{ij} . Además, por la manera en que se construye el dual del interior de una gráfica, $v_i v_j$ es dibujada de manera que ésta cruza la arista e_{ij} exactamente una vez y no cruza otra arista de H o G .

Si H contiene un ciclo C , entonces C encierra un vértice $v \in V(G)$. Ya que H se encuentra completamente en el interior de G , en particular así lo esta C y en consecuencia v se encuentra en el interior de G , perteneciendo a fronteras de regiones interiores solamente. Por tanto, G no es exteriormente plana, siendo una contradicción. Así, H es acíclica. ■

Corolario 3.1.3. *Para toda inmersión exteriormente plana de una gráfica conexa exteriormente plana G , existe una orientación de G en la cual todas las regiones interiores tienen ciclos dirigidos para sus fronteras.*

Demostración. Si G tiene a lo más una región interior, toda inmersión exteriormente plana de G tiene sus vértices en la frontera de la región exterior, por lo que en realidad la inmersión es un solo ciclo y en consecuencia se cumple el resultado.

Sea G con dos o más regiones interiores. Por el lema anterior, el dual del interior H de G es acíclico, y ya que toda gráfica acíclica es bipartita, entonces H lo es. Por tanto, G puede ser 2-coloreada por regiones interiores, (digamos que los colores son rojo y azul), entonces regiones adyacentes tendrán diferentes colores. Ahora, orientamos todas las aristas en la frontera de una región interior roja en dirección horaria, mientras que todas las aristas

sobre la frontera de una región interior azul se les dará dirección antihoraria. Al resto de las aristas se les dará una orientación arbitraria.

Si $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ y dos regiones interiores la comparten, entonces dichas regiones tienen diferentes colores, pero e tendrá la misma orientación en ambas. Por lo que dicha orientación para G está bien definida y tiene la propiedad deseada. ■

3.2. Convexidad inferior en gráficas exteriormente planas

En la última sección de este trabajo demostraremos que el número de convexidad inferior en las gráficas exteriormente planas es 1.

Teorema 3.2.1. *El número de convexidad orientable inferior de toda gráfica exteriormente plana 2-conexa de orden n es a lo más $n - 2$.*

Demostración. Considérese una inmersión exteriormente plana de una gráfica exteriormente plana 2-conexa G . Por el Corolario 3.1.3, G tiene una orientación D en la cual todas sus regiones interiores tienen ciclos dirigidos para sus fronteras. Ya que G es 2-conexa, todo vértice de D cae sobre la frontera en al menos una región interior y por tanto sobre un ciclo dirigido en D . Así, ningún vértice de D es un transmisor ni receptor. Si G contiene un triángulo, digamos C , entonces, dado que G es exteriormente plana, C determina la frontera de una región interior R de G . Como la frontera de R en D es un ciclo dirigido de longitud 3, entonces D no tiene triángulos transitivos y en consecuencia no tiene vértices transitivos. De manera que D no tiene vértices transmisores, receptores ni transitivos. Se tiene por Proposición 1.2.3 que $con(D) \neq n - 1$. Por tanto, $con^-(G) \leq n - 2$. ■

A continuación determinaremos el valor del número de convexidad orientable inferior de una *gráfica exteriormente plana máxima* no trivial. En dichas gráficas, para todo par de vértices u y v no adyacentes si se agrega esta arista (u, v) , entonces la gráfica ya no es más exteriormente plana.

Lema 3.2.2. *Toda gráfica exteriormente plana máxima G de orden al menos 3 es 2-conexa y tiene al menos dos vértices de grado 2.*

Demostración. Si $v \in V(G)$ fuera tal que $G \setminus v$ es inconexa, entonces consideremos C_1 y C_2 dos componentes conexas en $G \setminus v$. Por la inconexidad de $G \setminus v$, para todo $x \in V(C_1)$ y $y \in V(C_2)$ tenemos que $xy \notin E(G)$. Sea $v_1 \in c_1$ y $v_2 \in c_2$ tales que $vv_1, vv_2 \in E(G)$ pero $v_1v_2 \notin E(G)$. Además por tratarse de una gráfica exteriormente plana máxima, v_1, v_2, v están en la región exterior y G es una triangulación. Entonces $G+v_1v_2$ forma el triángulo vv_1v_2 , con v estando aún en la región exterior (de lo contrario v no sería de corte), por tanto G no era exteriormente plana máxima.

Ahora, sea H el dual del interior de G . Ya que G es exteriormente plana máxima, G es una triangulación; esto es, la frontera de toda región interior de G es un triángulo y en consecuencia un vértice de H tienen grado 3, 2 ó 1 dependiendo si su región interior correspondiente en G es adyacente a 3 regiones interiores, a dos regiones interiores ó a una región interior de G respectivamente. Ya que H es un árbol entonces H tiene al menos dos hojas y estas corresponden en G a regiones interiores que son adyacentes a una sola región interior de G y por tanto dos veces adyacentes a la región exterior. Supongamos que w_1 y w_2 son dos hojas de H que corresponden a las regiones interiores en G delimitadas por los triángulos $u_1u_2u_3$ y $v_1v_2v_3$ donde sin pérdida de generalidad, $u_1u_2, u_1u_3, v_1v_2, v_1v_3 \in E(G)$, están en la región exterior entonces $d(u_1) = d(v_1) = 2$. ■

Teorema 3.2.3. *Toda gráfica exteriormente plana máxima no trivial tiene número de convexidad orientable inferior 1.*

Demostración. Es claro que para K_2 el resultado es verdadero, pues sólo hay dos posibles orientaciones D para K_2 y en ambas habrá un vértice transmisor y un receptor, por lo que $con(D) = n - 1 = 2 - 1 = 1$, en consecuencia $con^-(K_2) = 1$. Se probará el teorema para gráficas exteriormente planas máximas de orden al menos 3, determinando la veracidad del siguiente enunciado:

Dada una inmersión exteriormente plana de una gráfica exteriormente plana máxima G de orden al menos 3, si D es una orientación de G en la cual todas sus regiones interiores tienen ciclos dirigidos para sus fronteras, entonces D es fuertemente conexa y $con(D) = 1$. La prueba será por inducción sobre n .

Si $n = 3$, entonces considérese $G = C_3$. Existe solo una región interior y las únicas orientaciones para las cuales la frontera de la región interior es un ciclo dirigido se obtiene orientando a G como un 3-ciclo dirigido. Cada una de tales orientaciones D es fuertemente conexa y por la Proposición 2.1.8 $\text{con}(D) = 1$.

Supóngase que la proposición es verdadera para todas las inmersiones exteriormente planas de gráficas exteriormente planas de un orden fijo $n \geq 3$. Consideremos una inmersión exteriormente plana de una gráfica exteriormente plana máxima G de orden $n + 1$, y sea D una orientación de G en la cual todas sus regiones interiores tienen ciclos dirigidos para sus fronteras. Por el Lema 3.2.2, G tiene al menos dos vértices de grado 2. Sea u un vértice de grado 2 en G y sean $v, w \in V(G)$ sus vecinos. Ya que G es una gráfica exteriormente plana máxima, la arista vw está en G , pues en toda inmersión exteriormente plana de una gráfica exteriormente plana máxima, la frontera de toda región interior es un triángulo. Además, como G es una gráfica exteriormente plana máxima de orden al menos 4 y u tiene grado 2, la arista vw estará en la frontera de dos regiones interiores (triangulares) de G . De manera que existe un vértice x distinto de u que es adyacente a v y w . Sin pérdida de generalidad, supongamos que vw es orientada como (w, v) en D . Ya que la frontera de toda región interior es un ciclo dirigido, uv y uw son orientadas como (v, u) y (u, w) , mientras que vx y wx son orientadas como (v, x) y (x, w) .

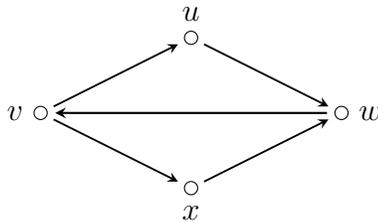


Figura 3.4: Una subgráfica de la orientación D .

La gráfica $G - u$ es exteriormente plana máxima, pues se remueve la región interior cuya frontera está determinada por las aristas uw , uv y vw , sin afectar ninguna otra región y por tanto la planaridad de G . Así, la inmersión de la gráfica exteriormente plana máxima $G - u$ de orden n es exteriormente plana

y $D' = D - u$ es una orientación de $G - u$ en la cual todas sus regiones interiores tienen ciclos dirigidos para sus fronteras, D' es fuertemente conexa y $\text{con}(D') = 1$. Dado que D' es fuertemente conexa y $(v, u), (u, w) \in A(D)$, se sigue que D es fuertemente conexa. De manera que, solo nos resta mostrar que $\text{con}(D) = 1$.

Ya que sólo en D , se tienen las flechas (v, u) y (u, w) , y tanto v, u, w y v, x, w son vw -geodésicas, se tiene que, para todo par de vértices y, z en D' , la distancia de y a z en D' es igual a la distancia de y a z en D . Entonces, para todo subconjunto S de $V(D')$, el casco convexo $[S]_{D'}$ de S en D' es un subconjunto del casco convexo $[S]_D$ de S en D . Si S es un subconjunto de $V(D')$, con cardinalidad al menos 2, entonces $[S]_{D'} = V(D')$, ya que $|V(D')| = n$ y por hipótesis inductiva $\text{con}(D') = 1$. Por lo que $V(D') \subseteq [S]_D$. En particular, $\{v, w\} \subseteq [S]_{D'} \subseteq [S]_D$ para todo subconjunto S de $V(D')$ con $|S| \geq 2$, y por el Lema 2.1.9, $[\{v, w\}]_D \subseteq [S]_D$. Además como v, u, w es una vw -geodésica en D , se sigue que $u \in [\{v, w\}]_D$. Ahora, $V(D') = [\{v, w\}]_{D'} \subseteq [\{v, w\}]_D$, donde recordemos que $D' = D - u$ y por tanto $V(D') = V(D) - \{u\}$, pero $u \in [\{v, w\}]_D$, en consecuencia $[\{v, w\}]_D = V(D)$. Y recordando que $[\{v, w\}]_D \subseteq [S]_D$ para todo subconjunto S de D' con $|S| \geq 2$, tenemos también que $[S]_D = V(D)$.

Finalmente, como toda trayectoria no trivial en D que termina en u contiene a v y toda trayectoria no trivial en D que inicia en u contiene a w , se sigue que si S es un subconjunto de $V(D)$ con $|S| \geq 2$ que contiene a u , entonces $\{v, w\} \in [S]_D$. Sin embargo, $[\{v, w\}]_D \subseteq [S]_D$ y $[\{v, w\}]_D = V(D)$, por lo que $[S]_D = V(D)$. Por tanto, $\text{con}(D) = 1$ y $\text{con}^-(G) = 1$. ■

Conclusiones

Finalmente, por lo explicado en la primeras páginas de la tesis y lo observado a través de los resultados expuestos en ésta, aún hay mucho trabajo por hacer en lo que se refiere a la convexidad de gráficas orientadas. Entre los problemas abiertos que podemos mencionar para un estudio posterior se encuentra la determinación del espectro de convexidad de algunas familias de gráficas. De hecho, recientemente se han calculado los espectros de convexidad exactos de las rejillas, mientras que se ha observado que en el caso de las gráficas regulares se trata de un problema sumamente difícil. También es de interés la búsqueda de parámetros con los que se pueda relacionar la cardinalidad del espectro de convexidad, así como construir gráficas con un espectro de convexidad dado. Y por supuesto, determinar la complejidad computacional al determinar el número de convexidad de una gráfica orientada.

Bibliografía

- [1] J.A.Bondy, U.S.R.Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press, 1976.
- [2] R.Diestel *Graph Theory*. Springer-Verlag, 2000.
- [3] L.-D. Tong, P.-L. Yen y A. Farrugia, *The convexity spectra of graphs*, Discrete Applied Mathematics 156 (2008) 1838–1845.
- [4] G. Chartrand, J.F. Fink y P. Zhang, *Convexity in oriented graphs*, Discrete Applied Mathematics 116 (2002) 115–126.
- [5] José Cáceres, Alberto Márquez, Ortrud R. Oellermann, María Luz Puer-
tas, *Rebuilding convex sets in graphs*, Discrete Mathematics, 297(1-
3)(2005)26-37
- [6] F. Buckley, F. Harary, *Distances in Graphs*, Addison-Wesley, Redwood
City, CA, 1990
- [7] F. Harary and J. Nieminen, *Convexity in graphs*, J. Diff. Geom. 161
(1981) 185-190
- [8] M.G. Everett, S.B. Seidma, *The hull number of a graph*, Discrete Math.
57 (1985) 217-223
- [9] F.Harary, E.Loukakis,C.Tsourus, *The geodetic number of a graph*, Math.
Comput. Modeling 17(1993) 89-95
- [10] G. Chartrand, P. Zhang, *The geodetic number of an oriented graph*,
European J. Combin. 21 (2000) 181-189.

-
- [11] Gerard J. Chang, Li-Da Tong, Hong-Tsu Wang, *Geodetic spectra of graphs*, European Journal of Combinatorics, Volumen 25(3)(2004) 383-391
- [12] Alastair Farrugia, *Orientable convexity, geodetic and hull numbers in graphs*, Discrete Applied Mathematics. Vol 148(3)(2005) 256-262
- [13] Jung-Ting Hung, Li-Da Tong, Hong-Tsu Wang, *The hull and geodetic number of orientations of graphs* Discrete Mathematics, Vol. 309(8)(2009) 2134-2139
- [14] J.Cáceres, A. Márquez, M.L. Puertas, *Steiner distance and convexity in graphs* European Journal of Combinatorics, 29(3)(2008) 726-736
- [15] G.Chartrand, O.R.Oellermann, S.Tian, H.-B. Zou, *Steiner distance in graphs* Math. Bohem. 144(4)(1989)
- [16] M.J.L. Van de Vel, *Theory of Convex Structures*, North Holland, Amsterdam, 1993

Índice alfabético

- k*-coloración, 18
- k*-coloreable, 18
- arista de corte, 15
- aristas, 10
- arista
 - puente, 15
- bloque, 16
 - final, 16
- camino, 11
 - longitud, 12
 - cerrado, 11
 - dirigido, 19
- casco convexo, 20
- ciclo, 12
- circuito euleriano, 17
- circulante
 - torneo, 42
- coloración, 18
 - propia, 18
- componente fuerte, 28
- componentes conexas, 12
- conjunto convexo, 20
- diámetro, 13
- distancia
 - dirigida, 20
- espectro de convexidad fuerte, 28
- espectro de convexidad, 27
- excentricidad, 13
- exvecindad, 21
- fuertemente conexa, 28
- geodésica, 20
- gráfica, 10
- gráfica orientada *G*
 - exgrado mínimo de una, 22
 - ingrado mínimo de una, 22
- gráficas
 - árboles, 14
 - isomórfas, 11
- gráfica
 - aplanable, 49
 - bipartita completa, 11
 - bipartita, 11
 - conexa, 12
 - dual, 50
 - exteriormente plana máxima, 53
 - exteriormente plana, 51
 - orientada conexa, 19
 - plana, 49
 - simple, 10
 - caras de una, 49
 - completa de orden *n*, 11
 - dual del interior, 50
 - euleriana, 17
 - inmersión plana de una, 49
 - orientada, 19
 - regiones de una, 49
 - subyacente, 19
 - trivial, 10
- grado, 10
- hoja, 14

- intervalo cerrado*, 20
- invecindad*, 21
- lazo*, 10
- multigráfica*, 10
- número de convexidad*, 21
 - orientable inferior*, 28
 - orientable superior*, 28
- orden*, 10
- paseo*, 12
- región exterior*, 50
- regiones*
 - adyacentes*, 50
- subgráfica*, 11
 - generadora*, 11
 - inducida*, 11
 - orientada*, 19
- tamaño*, 10
- torneo*, 42
- trayectorias internamente ajenas*, 12
- trayectoria*, 12
 - dirigida*, 19
- vértices*, 10
- vértice de corte*, 15
- vértices*
 - distancia entre*, 12
 - conectados*, 12
 - corte por*, 15
- vértice*
 - exgrado de un*, 22
 - grado de un*, 22
 - aislado*, 10
 - final*, 22
 - ingrado de un*, 22
 - receptor*, 22
 - transitivo*, 22
 - transmisor*, 22
- vecindad*, 10