



Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración

**Análisis de escenarios Monte Carlo para decisiones de
cobertura de riesgos mediante opciones europeas de compra**

T e s i s

Que para optar por el grado de:

Maestro en Finanzas

Presenta:

Héctor Alonso Olivares Aguayo

Tutor:

Dr. Francisco López Herrera
Facultad de Contaduría y Administración

México, D. F. octubre de 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Expreso mis más sinceros agradecimientos a Dios por darme la oportunidad de vivir, a mi núcleo familiar (Héctor, Blanca, Jennifer y Arturo) por su paciencia, comprensión y sobre todo por la educación y principios que me han enseñado.

Espero seguir siendo un ejemplo a seguir para mi hermana, de quien aprendo y me sorprende día a día. Hermana sabes que eres mi princesa y te adoro, siempre estaré contigo.

A la Familia Olivares. Por la solidaridad y cariño que me han brindado. En especial al pilar familiar, mi abuelo Maximiliano Olivares Peralta por todos sus consejos.

A mis amigos de trabajo.

Asimismo me honra haber estudiado en la UNAM, institución a la cual le agradezco por haberme formado académicamente; es mi casa y lugar donde conocí a mis mejores amigos.

A mis amigos de la UNAM les agradezco por todos los buenos tiempos; a mis compañeros y amigo del posgrado de la FCA y del Posgrado de Ingeniería en Sistemas, a mis amigos de la Facultad de Ciencias (Alexander y Daniel). A mis amigos (Margarita Farfán, Lucero Real, Minerva Soto, Mario Nieto, Cesar Quezada y Claudia Durán) y a mis amigos de la Facultad de Química (Carlos, Raúl, Sergio, Héctor, Geovani, Antonio, Victor, Sandy, Flor, Mario, Jair y Cedric).

También espero me disculpen todas las personas que he dejado de ver por falta de tiempo, pero saben que día a día las llevo presentes en mi corazón.

Agradezco a la Mtra. María del Rosario Higuera Torres Coordinadora de la Maestría en Finanzas por aceptarme en el programa.

Agradezco por su enseñanza a todos los profesores del posgrado de FCA. Particularmente a Ricardo Morales, Gabriel Malpica, María Saavedra y Genoveva Barrera. Por sus cursos los cuales fueron el soporte de este trabajo.

También agradezco a todos mis alumnos y profesores que he tenido durante el transcurso de mi vida. Puesto que ha habido un aprendizaje mutuo. En particular quiero extender mi agradecimiento por todo su apoyo a mis mentores especialmente al Dr. Francisco López Herrera quien hizo posible la elaboración de este trabajo.

If life were so easy there would be no sense living it.

“La educación es el punto en el que decidimos si amamos el mundo lo bastante como para asumir una responsabilidad por él y así salvarlo de la ruina que, de no ser por la renovación, de no ser por llegada de los nuevos y los jóvenes, sería inevitable”.

Hannah Arendt

ÍNDICE

Agradecimientos.....	I
Introducción.....	VI
1 Introducción a la administración de riesgos.....	1
1.1 Clasificación de riesgos financieros.....	4
1.2 Mercado de dinero.....	7
1.2.1 Bonos.....	7
1.2.2 Instrumentos de deuda.....	7
1.2.3 Duración y convexidad.....	9
1.2.4 Inmunización de Redington.....	11
1.3 Mercado de capitales.....	13
1.3.1 Valor del dinero en el tiempo.....	13
1.3.2 Frontera eficiente de los portafolios de Markowitz.....	15
1.3.3 Especulación arbitraje y mercados eficientes.....	18
1.3.4 Extensión del modelo de Markowitz.....	20
1.4 Mercado de derivados.....	22
1.4.1 Derivado.....	22
1.4.2 Forwards.....	23
1.4.3 Futuros.....	24
1.4.4 Swaps.....	25
2 Opciones financieras.....	26
2.1 Introducción a las opciones.....	26
2.2 Opciones.....	27
2.2.1 Posición larga.....	28
2.2.2 Posición corta.....	28
2.3 Opciones americanas y europeas.....	28
2.4 Opciones dentro, en y fuera del dinero.....	29
2.5 Factores de influencia sobre el valor de la prima de la opción.....	31
2.6 Gráficas de opciones.....	32
2.6.1 Opción de compra	33
2.6.2 Opción de compra corta	33
2.6.3 Opción de venta.....	34
2.6.4 Opción de venta corta.....	34

2.7	Estrategias de Inversión.....	35
2.7.1	Estrategias de cobertura.....	36
2.7.1.1	Bull spread.....	36
2.7.1.2	Bear spread.....	37
2.7.2	Especulación de volatilidad.....	37
2.7.2.1	Straddle.....	38
2.7.2.2	Strangle.....	38
2.7.2.3	Short Straddle.....	39
2.7.2.4	Short Strangle.....	40
2.7.2.5	Butterfly	40
3	Series de tiempo.....	42
3.1	Series de tiempo estacionarias.....	42
3.1.1	Operadores de retraso y diferencia.....	43
3.1.2	Análisis de series con tendencia.....	45
3.1.3	Fluctuaciones estacionales	46
3.1.4	Autocorrelación.....	47
3.2	Procesos estocásticos para modelar series de tiempo.....	49
3.2.1	Proceso estacionario	50
3.2.1.1	Proceso estacionario de segundo orden.....	51
3.2.1.2	Pruebas de estacionariedad	52
3.2.2	Proceso aleatorio puro	53
3.2.3	Caminata aleatoria	54
3.2.4	Prueba de raíz unitaria	56
3.2.5	Proceso de promedios móviles (MA)	56
3.2.6	Proceso autorregresivo (AR)	60
3.2.7	Proceso lineal general	64
3.2.8	Modelos ARMA y ARIMA	65
3.2.8.1	Modelos mixtos (ARMA)	65
3.2.8.2	Modelos integrados (ARIMA)	67
3.2.8.3	Modelos ARIMA para series estacionarias.....	67
3.2.8.4	Puntos importantes de la construcción de un modelo.....	70

3.3	Pronósticos.....	71
3.3.1	Procedimientos univariados	72
3.3.1.1	Extrapolación de curvas de tendencia	72
3.3.1.2	Suavizador exponencial	73
3.3.1.3	Procedimiento de Holt Winters	75
3.3.1.4	Procedimiento de pronóstico Box Jenkins	77
3.3.2	Procedimientos multivariados	77
3.3.2.1	Regresión múltiple	77
3.3.2.2	Modelos econométricos	78
3.3.2.3	Método Box Jenkins	79
3.3.3	Comparación entre los procedimientos.....	79
3.3.4	Capacidad de pronóstico del modelo.....	80
4	Modelos GARCH e implementación del modelo de simulación Monte Carlo para valuación de opciones europeas.....	82
4.1	Introducción.....	82
4.2	Modelos generalizados ARCH (GARCH).....	82
4.3	Extensión del modelo GARCH.....	85
4.3.1	Memoria de largo plazo en la varianza.....	85
4.3.2	Efecto de apalancamiento.....	86
4.4	Simulación Monte Carlo	87
4.5	Modelo GARCH de valuación de opciones	89
4.6	Implementación del modelo: Simulación Monte Carlo	92
4.7	Resultados.....	95
4.8	Análisis de los resultados	96
	Conclusiones.....	178
	Apéndices.....	180
	A.1 Portafolio de mínima varianza global de Markowitz.....	180
	A.2 Correlación.....	182
	A.3 Función de autocorrelación.....	184
	Bibliografía.....	186

Introducción

El inversionista desea obtener ganancias al realizar sus inversiones puesto que quiere enriquecerse; sin embargo debe de tomar en cuenta el riesgo al que está expuesto, es decir es importante tomar medidas de prevención para disminuir las pérdidas potenciales que pudiera tener, por lo que le gustaría conocer la mayor cantidad de escenarios previos a su decisión de inversión; dichas pérdidas pueden ser ocasionadas por la incertidumbre de los activos que se comercializan en los mercados financieros; lo cual conlleva a buscar día a día metodologías cada vez más eficientes para la medición del riesgo al que está expuesto.

Consciente de las crisis financieras que han impactado a las empresas en los últimos años, se propone como alternativa que el inversionista pueda invertir en contratos de opciones europeas, generando diversos escenarios mediante la simulación Monte Carlo para una mejora en su toma de decisión a través de la administración de riesgos financieros; utilizando herramientas probabilísticas, estadísticas, financieras y computacionales. Con el objetivo de crear estrategias de coberturas de riesgos, es decir, se pretende mostrar que al obtener las primas de las opciones financieras mediante un número grande de simulaciones se pueden obtener estrategias de cobertura de riesgos que determinen la tendencia del mercado en el corto plazo, lo cual conlleva a una mejora en la toma de decisión del inversionista.

Esta tesis está conformada por cuatro capítulos, los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo uno se dará a conocer una clasificación general de los diferentes riesgos que constituyen la administración de riesgos financieros, haciendo énfasis en el riesgo de mercado. Por lo que se dará un panorama general, de conceptos, instrumentos e indicadores de riesgo que conforman los mercados de dinero, capitales y derivados.

En el capítulo dos se explicarán las opciones financieras, es decir, se dará a conocer su historia y sus características como: posición, estilo, vigencia del contrato y los factores de influencia en la prima de la opción; asimismo se mostrarán gráficamente las estrategias de inversión de cobertura y de especulación.

En el capítulo tres se dará una introducción a las series de tiempo, mostrando desde el punto de vista matemático las condiciones que deben de cumplir para ser modeladas, particularmente las series estacionarias.

En el capítulo cuatro se dará a conocer la generalización de los modelos ARCH (GARCH), para valorar opciones que a diferencia del modelo de Fisher Black y Marion Scholes (1973), se rompe el supuesto de volatilidad constante, volatilidad que será empleada en la implementación del modelo Monte Carlo, para valorar las opciones europeas de compra sobre veintiún componentes del IPC y del mismo IPC, para así poder conformar las estrategias de cobertura de riesgos y analizar si la tendencia es a la baja o a la alza.

Finalmente, se mostrarán las conclusiones de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción a la administración de riesgos

La administración del riesgos¹ es una de las áreas donde más se requiere de las habilidades de los ingenieros financieros, para llevar a cabo cuatro procesos básicos, identificación del riesgo al que la empresa está expuesta, cuantificar la exposición, determinar la forma de los resultados buscados, y diseñar una estrategia financiera para transformar la exposición al riesgo en una figura deseada.

Desde 1970 el mundo se volvió más riesgoso debido al cambio en los mercados extranjeros seguidos por la depresión de Bretton Woods, no pasó mucho tiempo antes de que se incrementara la volatilidad² en los precios mostrados entre las tasas de interés³ y los precios en los commodities⁴.

El administrador del riesgo necesita saber no sólo que existe riesgo⁵ sino también el grado de riesgo que tiene éste. El primer paso después de medir la volatilidad de un precio, es medir la exposición y esto se hace construyendo perfiles de riesgo por separado. Uno para cada riesgo al que se está expuesto. Un perfil del riesgo es una especificación de la relación que existe entre una medida de comportamiento y el precio. Algunas veces es conveniente estandarizar los cambios de precio, al nivel del precio actual en vez de considerar el precio simple para efectos de una mejor medición. Los perfiles de riesgo son usados por muchas razones entre ellas, para desarrollar perfiles de riesgo que muestren fielmente los riesgos a los que estamos expuestos. Considerando que sin un serio esfuerzo para medir esta exposición, resulta inútil e imposible medir la eficiencia con que éste se administra, y finalmente. La naturaleza y la forma de las exposiciones y de todos aquellos perfiles de riesgo que puedan surgir, así como las aproximaciones para administrarlos adecuadamente.

¹ Conjunto de objetivos, políticas, procedimientos, acciones que se llevan a cabo para identificar, limitar, medir, cuantificar, revelar, informar, mitigar, contratar y dar seguimiento a los riesgos.

² Medida por excelencia de riesgos; dispersión de los resultados conforme a lo esperado cambios bruscos en el valor de los activos desviación de los valores los cuales fluctúan y dichas fluctuaciones se miden a través de la desviación estándar la cual es una medida de dispersión.

³ Rentabilidad obtenida con un instrumento financiero.

⁴ Cualquier producto destinado a uso comercial.

⁵ Probabilidad de que un evento esperado no suceda.

Al comprar un seguro para administrar activos se obtiene cobertura; las coberturas dan protección en caso de cambios bruscos, como consecuencia de la incertidumbre⁶ de los activos financieros y se pueden construir a través de productos derivados; los más comúnmente utilizados por los administradores de riesgo son: swaps, futuros, forwards y opciones. Estos cuatro instrumentos son técnicas al alcance de cada ingeniero financiero.

Un riesgo asegurable es un riesgo en el cual muchas empresas o individuos están expuestos. Sus manifestaciones no están altamente correlacionadas entre sí y su probabilidad de manifestación está asociada con el grado de certeza en el mercado.

Para saber si un riesgo es convenientemente asegurable o no es necesario obtener el monto de exposición. El monto de exposición por año se obtiene de multiplicar la probabilidad de ocurrencia del siniestro por el valor de la pérdida resultante del desastre, generalizando lo anterior y trasladándolo a la administración del riesgo del portafolio, podríamos decir que en el caso del riesgo no sistemático, su medición dependerá de la correlación de los riesgos de los diferentes eventos, es decir: Mientras el asegurador asume que el riesgo de las empresas o individuos por separado es significativo en sí mismo porque los riesgos individuales no están altamente correlacionados, dichos riesgos son asistemáticos debido a su naturaleza. Si asumimos una correlación cero, una aproximación razonable para el asegurador es decir que el riesgo por empresa es muy pequeño. Esta es una aplicación muy simple de la teoría de portafolio debido a que los riesgos son independientes uno de otro.

Respecto al costo de la cobertura los académicos han buscado durante mucho tiempo determinar si existe dicho costo. En primer lugar, la idea de que debe haber un costo para la cobertura fue postulada por Keynes (1930), quien argumentó que, en el contexto de las coberturas de futuros, un exceso de cobertura corta (por los usuarios de los productos básicos) crea una necesidad para los especuladores.

El papel del especulador, en este punto de vista, es tener los riesgos que los productores no pueden permitirse el lujo de tener o no están dispuestos a asumir. Pero, los especuladores, razonó, no estarían dispuestos a asumir los riesgos de los productores a menos que ellos, los especuladores, fueron compensados por hacerlo. Por lo tanto, existe la implicación de compensar los servicios especulativos de riesgo de los especuladores.

⁶ Es algo desconocido, de lo cual no se sabe su comportamiento y no se puede medir hasta que se le asocie una probabilidad

Una vista diferente sostiene que los especuladores no pueden percibirse como portadores de riesgo sino, más bien, como pronosticadores. Bajo este punto de vista, los especuladores ganan sus beneficios por el movimiento de precios posteriores de predicción y posicionamiento.

Los ingenieros financieros que diseñan estrategias de cobertura para sus propias empresas o para otros. Argumentan que es importante emplear la metodología analíticamente correcta en la determinación de la proporción de cobertura óptima, ajustar el tamaño de una cobertura para reflejar la proporción de cobertura de riesgo mínimo y comparar la eficacia de los instrumentos de cobertura alternativa, examinar la posibilidad de cobertura compuesta y los beneficios que se derivan de ese enfoque y comparar el costo de la alternativa realizada para coberturas en un esfuerzo por eliminar las coberturas ineficientes.

La ingeniería financiera continúa mostrando su inventiva en el desarrollo de nuevos productos y nuevas variantes de producto para ajustar mejor las necesidades de los usuarios finales de los servicios de administración de riesgo. Distribuidores de swaps han ampliado sus líneas de productos para incluir los tipos de interés futuros acuerdos y todas las formas de opciones de tasa de interés y tipo de cambio de período único y de varios periodos. Intercambios de futuros y opciones también se han vuelto más innovadoras. El intercambio reconoce que los productos de “mostrador” ofrecidos por los bancos comerciales y de inversión compiten directamente con sus líneas de productos tradicionales.

La mayoría de los ingenieros financieros entienden la teoría básica económica y financiera; la cual incluye principalmente fuentes de valuación y riqueza; medidas de valor y rendimiento, métodos para identificar la exposición al riesgo, varias medidas de riesgo y la aplicación básica de varias teorías como: portafolios, coberturas y del precio de las opciones. Asimismo los ingenieros financieros relacionan el riesgo y el rendimiento, al inversor con su satisfacción. Pocos Ingenieros financieros entienden la teoría avanzada financiera; donde se estudia y maneja el riesgo a través de conocimientos avanzados de la teoría del precio de las opciones. Los Ingenieros financieros más exitosos tienen una base sólida en matemáticas y estadística; quienes trabajan en la medición de los riesgos financieros y el diseño de estrategias de cobertura; las habilidades matemáticas suelen incluir el conocimiento de cálculo, técnicas de optimización lineal y no lineal, el uso de logaritmos y funciones exponenciales, y la capacidad de trabajar con fórmulas, ecuaciones y gráficos; por otro lado el conocimiento estadístico incluye conocimiento de distribuciones, medición de parámetros estadísticos, el conocimiento de las técnicas de regresión y correlación, y la familiaridad con las técnicas de análisis de varianza y sus usos. El ingeniero financiero que posee todas estas habilidades es llamado “Quant”; quien hace uso extensivo del cálculo estocástico para lograr innovación de productos exitosos mediante estrategias de negociación.

Todas las áreas de ingeniería financiera requieren el conocimiento del producto. Con la gran cantidad de productos que existen actualmente, es poco probable que haya algún ingeniero financiero que conozca todos. Sin embargo, si debe de conocer los instrumentos y los procesos para diseñar soluciones a los diversos tipos de problemas en los que se ocupa. Los ingenieros financieros que trabajan en la gestión de riesgos deben estar bien informados en los productos derivados. El área en la que el talento de los ingenieros financieros se destaca es en el arbitraje que implica replicar las carteras (instrumentos sintéticos); para formar éstas, por la combinación de instrumentos necesarios para disminuir la exposición al riesgo puede ser un ejercicio complejo de matemáticas y estadística.

Los ingenieros financieros que trabajan en la planificación financiera deben estar bien informados en los productos financieros a nivel de minoristas, deben tener conocimiento de la tecnología relevante. La tecnología incluye la teoría económica y financiera, técnicas matemáticas y estadísticas, informática y telecomunicaciones y programas informáticos; desde este punto de vista la ingeniería financiera se define como “la aplicación de la tecnología financiera a la solución de problemas en las finanzas”. La tecnología ha revolucionado las finanzas modernas. Se ha hecho posible realizar millones de cálculos, llamado instrucciones por segundo.

1.1 Clasificación de riesgos financieros

Los riesgos financieros los regula la CONSAR, CNSF y CNBV, los cuales establecen dos tipos de riesgos:

- i) Cuantificables. Se tiene información histórica, estadística, se cuenta con distribuciones de probabilidad y existen bases de datos.
- ii) No cuantificables. No existen bases de datos.

Dentro de los riesgos cuantificables hay dos tipos:

- a) Discrecionales. Proviene de una posición de riesgo.
- b) No discrecionales. No proviene de una posición de riesgo sino de la operación del negocio.

Los discrecionales provienen de dos posiciones:

- a) Posición larga. Tiene derecho a recibir flujos y rendimientos (activo en el balance general).
- b) Posición corta. Tiene la obligación de dar flujos y rendimientos (pasivo en el balance general).

Hay tres tipos de riesgos discretionales (crédito, liquidez y mercado):

- i) Riesgo de crédito. Pérdida potencial derivada del incumplimiento de los prestatarios, es decir, es la probabilidad de que un prestatario incumpla con sus compromisos de pago tanto de intereses como de capital. Se le asocia el paradigma del valor de mercado, donde se da el fenómeno de que a mayor rendimiento, el valor de las inversiones disminuye por efecto de valuación de mercado, es decir, hay un riesgo de crédito asociado al valor de mercado de las inversiones. Los factores de riesgo sistémico. Son variables económicas y financieras que permiten la valuación de las posiciones de riesgo. Afectan a todo el sistema económico y financiero por igual. Por ejemplo el IPC, las tasas de interés y el tipo de cambio suben y bajan para todos los inversionistas.
- ii) Riesgo de liquidez. Al fondearse el banco a través de la captación, se tiene un pasivo para él, el cual paga tasa pasiva, generalmente es de muy corto plazo. Luego mediante la colocación cobra tasa activa. Por ejemplo por consumo, créditos comerciales, crédito a la vivienda, donde el margen de intermediación es la diferencia entre la tasa activa y la pasiva. En México la colocación es de mediano y largo plazo, la cual genera riesgo de liquidez o descalce (Gap⁷), es decir, que no tenga el banco los suficientes recursos para entregar a los ahorradores y tenga que vender activos por debajo de su valor de mercado. El riesgo de liquidez es un riesgo discrecional porque proviene de la posición corta (captación) y posición larga (colocación). En otras palabras el riesgo se da cuando los ahorradores deciden retirar su dinero y éste no sea suficiente. Se puede hacer frente a este riesgo emitiendo un bono a corto plazo o vendiendo los activos.
- iii) Riesgo de mercado. Principalmente se da cuando hay variaciones o modificaciones en la tasa de interés, acciones, otros instrumentos financieros, y estos afectan a las divisas, es decir, es la probabilidad de fluctuaciones de riesgo sistémico, aunque el resultado no sea igual para todos, como puede ser el tipo de cambio y el precio del subyacente. Se asocia al mercado de dinero, capitales y derivados; los cuales se explicarán más adelante.

⁷ Igualación de activos y pasivos con el fin de que sean inmunes ante cambios en la tasa de interés.

Los riesgos no discretionales provienen de la operación, donde:

- i) Riesgo operativo. Pérdidas potenciales derivadas del fallo en los sistemas, procedimientos, control interno, prácticas laborales inadecuadas, fraude, entre otras; se conforma por el riesgo legal y tecnológico.
- ii) Riesgo legal. Expedientes no perfectamente armados para llevar a cabo una demanda ante tribunales.
- iii) Riesgo tecnológico. Pérdidas potenciales derivadas del fallo en hardware o software.

En el siguiente cuadro se aprecia de mejor manera los tipos de riesgos:

Cuadro 1.1 Tipos de riesgo que conforman a la administración de riesgos



Fuente: Elaboración Propia.

1.2 Mercado de Dinero

1.2.1 Bonos

Instrumentos financieros que cotizan en bolsa, principalmente en los mercados de dinero⁸ y que indica que el emisor del bono (busca financiamiento), debe una cantidad específica de dinero y que adicionalmente ha acordado pagar intereses sobre esta cantidad. El principal en una o más fechas indicadas, por lo regular al vencimiento del plazo. En general los pagos de intereses se realizan cada 180 días a interés simple, al plazo del pago, se le conoce como el plazo del cupón. El precio del bono es lo que recibe quien emite (para financiarse) paga a valor nominal (puede estar por arriba, igual o por abajo de lo que pago). Los instrumentos de deuda pueden ser bonos cupón cero o bonos con cupones, el tipo de bono más común es el bono de plazo certero, el cual es similar al pago de una deuda con pagos periódicos de interés más el pago del principal al final del plazo.

En el contrato de un bono se especifica un monto o valor facial, la tasa de interés (tasa cupón), fecha de maduración o plazo para madurar durante la cual, los pagos de interés del bono llamados cupones serán pagados al comprador del bono y por último especifica el valor de redención que es el monto a pagar a la fecha de maduración. Comúnmente el valor facial es igual al valor de redención; al menos que se especifique lo contrario.

Es importante señalar que por lo general en este tipo de contratos; las tasas de interés se dan de manera nominal convertibles semestralmente, pagando el primer cupón un periodo después de emitirse el bono, dando así una serie de cupones de manera periódica y el último cupón se da al mismo tiempo que el valor de redención.

También es importante decir que los bonos tienen un precio sucio⁹ y pueden ser emitidos por empresas privadas (bonos corporativos) o por el gobierno (bonos gubernamentales).

1.2.2 Instrumentos de deuda

Todos los instrumentos del mercado de dinero son de renta fija sin riesgos a corto plazo; sin embargo su valor puede variar ya sea por el efecto inflacionario o si se vende antes de cumplir el plazo y operan a una tasa de rendimiento “esperada”.

⁸ Lugar donde realizan operaciones de corto plazo entre oferentes y demandantes intercambiando instrumentos de deuda; las principales características del mercado de dinero es de bajo riesgo, altamente líquido y en México es el mercado financiero más grande.

⁹ Precio del bono más los intereses devengados; dicho precio se negocia en el mercado secundario.

Si son emitidos por el gobierno federal, para estatal se encuentran en el mercado secundario (mercado de capitales), de tal manera que el inversionista le paga una comisión al agente colocador.

Si son emitidos directamente por el sistema bancario son de renta fija y no se paga comisión por su adquisición.

Los instrumentos de deuda tienen como elementos:

- i) Emisión.
 - a) Gobierno federal (PEMEX).
 - b) Bancos (BANCOMER).
 - c) Papel privado (Empresas industriales o comerciales).
 - d) Gobiernos estatales y municipales (Certificados bursátiles del DF).
- ii) Garantías (El gobierno federal no tiene garantía específica, garantiza con flujos).
- iii) Monto de emisión (Depende de los flujos que genera la empresa. Gobiernos y estados los cuales dependen de su capacidad de endeudamiento).
- iv) Plazo (En México el plazo más corto es a 7 días).

Algunos tipos de instrumentos de deuda son:

- Bonos cupón cero. No pagan intereses el rendimiento se da por ganancia de capital (si se vende bajo par o descuento implica ganancia), por ejemplo los pagarés, aceptaciones, CETES, papel comercial, etc.
- Bonos cupones fijos .Amortizan únicamente el valor nominal al vencimiento, pagan cupones periódicos; donde todos los pagos son iguales al calcularse con la misma tasa cupón, por ejemplo los Bondes, UMS, etc.
- Bonos con cupones variables, revisables o flotantes. Solo el primer cupón es conocido. Al vencimiento el valor nominal es conocido y los plazos están establecidos desde el inicio por ejemplo los bonos M.

- Bonos con cupones indexados a la inflación. El plazo cupón puede ser de 28,91 y 182 días, la amortización puede ser parcialmente o al vencimiento, se conoce el valor nominal y la tasa de interés. Los instrumentos más conocidos son UDIBONOS.
- Bonos Chatarra. Los bonos chatarra son conocidos por sus altos rendimientos con grado de especulación, bonos con una calificación menor a la de grado de inversión, son comúnmente llamados *ángeles caídos*.
- Bono Catastrófico. Su tasa cupón e interés son muy altas y en caso de una catástrofe no pagan el valor nominal.

1.2.3 Duración y convexidad

Un bono es sensible a cambios en la tasa de rendimiento o la estructura de plazo con la que fue calculado. Una medida convencional para la medida del riesgo, volatilidad, o sensibilidad del precio de un bono a cambios en las tasas de rendimiento del mercado es la duración modificada de J. Hicks (1939), la cual se basa en la derivada (tasa instantánea de cambio) del valor presente del bono con respecto a cambios en la tasa de rendimiento.

Para el caso de un bono cupón cero se tiene lo siguiente:

$$P = (1+i)^{-n} \Rightarrow \frac{d}{di}P = -n(1+i)^{-n-1} \Rightarrow DM = -\frac{dP(i)}{di} = \frac{n(1+i)^{-n-1}}{(1+i)^{-n}} = nv \quad (1.1)$$

De aquí la duración de F. Macaulay (1938) se define como:

$D = DM(1+i) \Rightarrow D = nv(1+i) = n$ para el caso anterior de un bono cupón cero; Esta duración coincide con el tiempo de recuperación del capital inicial invertido.

Una de las aplicaciones de la duración modificada en un instrumento financiero, es la aproximación del cambio del precio cuando se presentan pequeños cambios en la tasa de interés.

Debido a que $\frac{d}{di}P(i) = h \rightarrow 0 \lim \frac{P(i+h) - P(i)}{h}$, entonces una aproximación para el cambio en el precio del bono, para cambios pequeños en i , está dada por:

$$P(i+h) - P(i) \approx h * \frac{d}{di}P(i) = -h * P(i) * DM \quad (1.2)$$

Al utilizar dicha aproximación se tiene que $(1+i)^{-n}$ es más sensible para cambios en i cuando n aumenta. Estos cambios se ven reflejados en el cambio de precio relativo por unidad monetaria invertida.

De la ecuación (1.1) se observa que para considerar la magnitud del cambio del precio respecto a la tasa “ i ” por unidad monetaria invertida. Se divide la derivada entre el precio del bono “ $P(i)$ ”. A esta medida de cambio se le llama duración modificada “ DM ” del bono.

Para el caso de los bonos que no son cupón cero la duración modificada se calcula de la siguiente manera:

$$DM = \frac{1+i}{i} - \left[\frac{1+i + [n(r-i)]}{r[(1+i)^n - 1] + i} \right] \quad (1.3)$$

donde:

i : Tasa de rendimiento.

r : Tasa cupón.

n : número de periodos.

Por otro lado la convexidad se define como: $\frac{d^2 P(i)}{di^2} = \frac{dDM}{di}$ es la razón de cambio que hay entre la duración modificada respecto a la tasa de interés, es decir, la convexidad nos dice el cambio de la tasa de interés en la inversión (aceleración).

Cabe señalar que existe un modelo de inmunización de cartera propuesto por F.M Redington (1952) el cual garantiza por la convexidad que se obtiene un rendimiento localmente, por el criterio de la segunda derivada ya que la función es cóncava hacia arriba. En la siguiente sección se describirá de mejor manera las condiciones que debe de cumplir dicho modelo de inmunización de cartera.

Sabemos que mayor volatilidad implica mayor convexidad ya que las tasas no son fijas para todo el plazo, por lo que conviene que las tasas de interés aumenten; de aquí se tiene que la convexidad aumenta si disminuyen las tasas de interés. Por lo tanto lo que describe la convexidad es la razón de cambio al tiempo que se espera recuperar la inversión de acuerdo al comportamiento de las tasas de interés; y los factores que influyen a dicho cambio como son: tiempo, tasas de interés y el precio del bono.

En resumen la convexidad de un bono cumple con las siguientes características:

- Entre más dispersos estén los flujos, mayor será la convexidad.
- Mayor volatilidad => mayor convexidad.
- Bonos a mayor plazo tendrán una mayor convexidad.
- La convexidad aumenta mientras disminuyan las tasas de interés.
- Mayor convexidad para un bono cupón cero.

Fórmula para la convexidad de un bono que paga cupones:

$$c = \frac{2c(1+r)^2 \left\{ (1+r)^n - \left[\frac{(1+r) + rn}{1+r} \right] \right\} + [n((n+1)r^2(r-c))]}{r^2(1+r)^2 [c((1+r)^n - 1) + r]} \quad (1.4)$$

Fórmula para la convexidad de un bono cupón cero:

$$c_0 = \frac{n(n+1)}{(1+r)^2} > c \quad (1.5)$$

La duración y la convexidad, son medidas de riesgo de bonos, es decir, al analizarlas el inversionista puede tener una mejora en su decisión de inversión.

1.2.4 Inmunización de Redington

Al considerar las siguientes variables:

L_t : El pago neto saliente a tiempo t.

A_t : El activo o inversión que madura a tiempo t.

Donde A_t será utilizado para cubrir la obligación a tiempo t. Si la compañía puede combinar sus inversiones de tal manera que los activos entrantes cubran exactamente a las obligaciones, es decir $A_t = L_t$ para toda t, entonces los activos proyectados y obligaciones a pagar se dice que están siendo igualados de manera exacta. Ya que sin igualación exacta, existe un riesgo en el cual, si la tasa de interés cambia de un valor i_0 a un valor i , entonces $PV_A(i) < PV_L(i)$. Esto provocaría que la entrada de activos sea insuficiente para cubrir las obligaciones, sufriendo pérdidas para la empresa.

Redington (1952) desarrolló la teoría de la inmunización para flujos de activos y obligaciones. De acuerdo con esta teoría, con una cuidadosa estructura de flujos entrantes en relación con flujos salientes, las pequeñas desviaciones en la tasa de interés \Rightarrow que $PV_A(i) > PV_L(i)$, para $i > i_0$ o $i < i_0$. Es decir cuando las tasas de interés se incrementan o disminuyan (en pequeñas cantidades), entonces el valor presente de los activos será mayor al valor presente de las obligaciones.

De tal forma que la teoría básica de la inmunización supone las siguientes condiciones:

$$(1) \quad PV_A(i_0) = \sum_{t=0}^n A_t V_{i_0}^t = \sum_{t=0}^n L_t V_{i_0}^t = PV_L(i_0)$$

$$(2) \quad \frac{d}{di} PV_A(i)[\text{evaluado en } i_0] = \frac{d}{di} PV_L(i)[\text{evaluado en } i_0]$$

$$(3) \quad \frac{d^2}{di^2} PV_A(i)[\text{evaluado en } i_0] > \frac{d^2}{di^2} PV_L(i)[\text{evaluado en } i_0]$$

Esta última condición pide que el valor presente de los activos sea mayor que el valor presente de las obligaciones. Pero si definimos a $h(i) = PV_A(i) - PV_L(i)$:

$$(1) \quad h(i_0) = 0.$$

$$(2) \quad h'(i_0) = 0.$$

$$(3) \quad h''(i_0) > 0.$$

$\therefore h(i)$ Alcanza un mínimo relativo en i_0 .

En resumen para la inmunización de Redington se pide lo siguiente:

$$(1) \quad \text{Igualación en valor presente: } \sum A_t V_{i_0}^t = \sum L_t V_{i_0}^t$$

$$(2) \quad \text{Igualación en la duración: } \sum t A_t V_{i_0}^t = \sum t L_t V_{i_0}^t$$

$$(3) \quad \text{Mayor convexidad en activos: } \sum t^2 A_t V_{i_0}^t > \sum t^2 L_t V_{i_0}^t$$

Por último notemos que las condiciones de un mínimo local solo garantizan inmunización para pequeños cambios en la tasa de interés. En algunas ocasiones, nuestro portafolio puede estar protegido contra cualquier cambio en la tasa de interés, sin importar el tamaño del cambio. En este caso se dice que el portafolio está completamente inmunizado y $PV_A(i) > PV_L(i) \forall i \neq i_0$.

1.3 Mercado de capitales

1.3.1 Valor del dinero en el tiempo

Los cálculos en las finanzas tradicionales son usados principalmente en acciones y bonos; para finanzas corporativas se utilizan para tomar decisiones de presupuesto de capital, por los banqueros de inversión para ofertas públicas de adquisición de valores, y en la banca para generar planes de amortización y los swaps de precios y otros instrumentos de gestión de riesgos, entre otras aplicaciones, los cálculos para la valuación son tediosos; sin embargo las computadoras han ayudado notablemente a la realización de estos cálculos. Aunque en la actualidad se sigue utilizando técnicas como la interpolación; dicha técnica es lineal aplicada a una relación no lineal, por lo que genera error con un sesgo distinto. La desventaja es que pequeños errores han representado pérdidas potenciales para las empresas.

Una forma de sintetizar el valor presente de todos los flujos, es a través de anualidades; dichas anualidades son de gran ayuda al momento de construir las tablas de amortización. Asimismo existe una fórmula similar a la de anualidades para el valor futuro que también simplifica notablemente los cálculos por concepto de valor futuro.

Por último existe la perpetuidad que es otorgar una renta de manera vitalicia, por ejemplo cuando se le paga la pensión a una persona.

Valuar mediante valor presente o futuro representa una valuación absoluta, mientras el valor de una oportunidad de inversión en relación con otras oportunidades de inversión es la valuación relativa. El concepto de valor relativo es de vital importancia en situaciones de mucho comercio y de financiación. Es decir, el valor absoluto en la toma de decisiones de inversión y de financiación es tan importante como el valor relativo, por lo cual es necesario comparar ambos valores. A continuación se expresarán algunos indicadores de valuación como TIR y VAN.

Al calcular el VAN, se trae a valor presente a tasa de rendimiento “i”, todos los flujos de efectivo del proyecto de inversión, donde se tienen los siguientes criterios:

Si el $VAN > 0 \Rightarrow$ Se acepta el proyecto de inversión.

Si el $VAN < 0 \Rightarrow$ Se rechaza el proyecto de inversión.

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+i)^t} \quad (1.6)$$

donde:

I_0 : Inversión inicial del proyecto.

F_t : Flujos de efectivo al tiempo t.

n: Número de periodos del proyecto.

VAN: Valor Actual Neto.

Es decir si el mercado paga más por el proyecto entonces tiene sentido invertir en dicho proyecto; es decir el VAN representa lo que vale la empresa hoy en función de lo que se espera recibir en el futuro.

Cuando se da el caso particular de que el $VAN=0=TIR^{10}$ (Tasa Interna de Retorno).

A pesar de valuar el valor del dinero en el tiempo la TIR tiene dos desventajas:

- 1) No distingue el riesgo entre los proyectos.
- 2) Si se tienen flujos con cambio de signo se pueden obtener $TIR < 0$ puesto que se pueden tener tantas TIR como raíces del polinomio de echo pueden ser hasta complejas.

Por lo que es importante obtener otros modelos de medición donde se obtenga la tasa de interés esperada para un agente o inversionista en donde se considere un premio por el riesgo al que está dispuesto a correr.

¹⁰ Máxima tasa de rentabilidad que podemos pedirle a un proyecto.

1.3.2 Frontera eficiente de los portafolios de Markowitz

La economía y las finanzas van de la mano; ya que desde el punto de vista económico, un agente racional busca satisfacer sus necesidades con la mayor cantidad de bienes y servicios. Por ejemplo en el problema del consumidor un agente racional quiere maximizar su utilidad (satisfacción o felicidad) sujeto a su presupuesto. En general se piensa que el agente económico racional quiere maximizar su utilidad, sujeto a los diversos instrumentos donde puede invertir; ya que busca la mayor cantidad de rendimiento, relacionado con su respectiva tasa en un horizonte de inversión; donde el horizonte de inversión es menor al plazo del contrato; lo anterior porque se supone que mientras el agente económico tenga más dinero puede tener una mejor calidad de vida para satisfacer sus necesidades. Sin embargo los agentes económicos pueden ser conservadores o agresivos; de acuerdo al riesgo que deseen adquirir al momento de realizar sus inversiones; es decir los agentes conservadores son adversos al riesgo y por lo general se conforman con obtener poco rendimiento ya que se preocupan más por evitar las pérdidas potenciales que pudieran tener.

Por otro lado los agentes agresivos; invierten más dinero en los instrumentos, incluso pueden realizar inversiones en acciones de alto riesgo; es decir dichas acciones tienen más probabilidad de que bajen a que suban. Por lo que se puede decir que mediante modelos matemáticos se relacionan conceptos tanto financieros con económicos, principalmente logrando una relación entre riesgo, rendimiento y utilidad. Dichos modelos son utilizados tanto para agentes conservadores como agresivos. Si son conservadores elaboran estrategias, donde puedan cubrirse del riesgo; por ejemplo mediante techos y pisos. Mientras que los agresivos pueden elaborar notas estructuradas tan complejas como quieran para así buscar el mayor rendimiento posible, diversificando riesgos.

Es decir al diversificar el riesgo se espera que la volatilidad de los instrumentos financieros disminuya de manera conjunta; puesto que éstos comparten el riesgo; ya que si se realizaran las inversiones por separado se tendría un riesgo mayor. Lo anterior puede ser visto en casos de portafolios de Markowitz. El cual es un modelo que optimiza el portafolio de mínima varianza global dado un rendimiento donde dicho portafolio es de referencia para determinar a los portafolios eficientes.

El problema de Optimización que plantea Markowitz es el siguiente:

$$(1) \min \frac{1}{2} \sigma_p^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

s.a:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N w_i R_i, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0$$

De aquí que el problema Dual se puede ver de la siguiente manera:

$$(2) \max \bar{R}_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

s.a:

$$\frac{1}{2} \sigma_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j = 1$$

De donde si se cumplen además de (1) y (2) las siguientes propiedades:

- Todos los instrumentos son divisibles.
- No existen costos de transacción.
- No existen ventas en corto.

Entonces tendremos la optimización de Markowitz; la cual tiene como objetivo ponderar el riesgo del portafolio. Al resolver el problema mediante el método de Lagrange (ver A.1), se obtiene que las ponderaciones óptimas (w_1 y w_2) a invertir en los activos 1 y 2 respectivamente son:

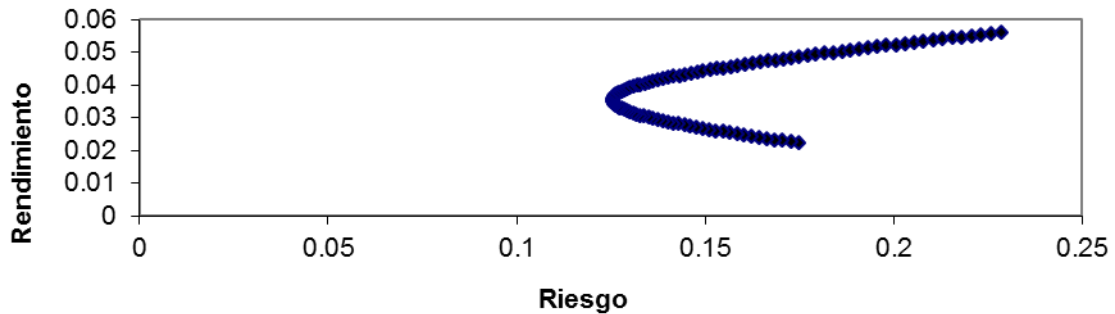
$$w_1 = \frac{R_2 - R_p}{R_2 - R_1}$$

$$w_2 = \frac{R_p - R_1}{R_2 - R_1}$$

Por lo tanto esta solución garantiza que existe solución también en el problema dual.

Gráficamente la curva de Markowitz se puede apreciar a continuación:

Gráfica 1.1: Minimización del riesgo del portafolio formado por dos activos



Fuente: Elaboración Propia.

La curva conformada por los portafolios de inversión de los agentes económicos; distingue de los que son racionales con los que no lo son; a partir del portafolio de mínima varianza global (Vértice de la parábola). Donde los racionales se encuentran por encima de dicho portafolio (región eficiente) y los irracionales por debajo; puesto que por el mismo riesgo están obteniendo un menor rendimiento.

También se Observa que a medida que el riesgo tiende a infinito el rendimiento tiende a estabilizarse. Por tal razón no es conveniente un riesgo muy grande.

De aquí que se tiene las siguientes propiedades al conformar un portafolio con 2 acciones:

$$E(R_1) < E(R_2) \quad \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \text{PREFERIMOS ACTIVO 2}$$

$$E(R_1) > E(R_2) \quad \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \text{PREFERIMOS ACTIVO 1}$$

$$E(R_1) = E(R_2) \quad \sigma_1 > \sigma_2 \Rightarrow \text{PREFERIMOS ACTIVO 2}$$

donde:

$E(R_i)$: Rendimiento esperado.

σ_i : Riesgo del portafolio.

1.3.3 Especulación arbitraje y mercados eficientes.

Muchos investigadores tienen por objetivo explorar el porqué de los precios erróneos, la relación y otras ineficiencias en los mercados, explorando estas oportunidades que requieren de la especulación y el arbitraje, dicho de otra manera, los mercados eficientes son el propio producto de la especulación y el arbitraje. Aunque en general no se conoce mucho del arbitraje y la especulación, muchas personas asocian éstos términos con esfuerzos que injusta o maliciosamente implican a productores y distribuidores.

La especulación y el arbitraje provee de manera directa e indirecta de grandes beneficios a los productores y consumidores, de hecho como extralimitación se podría decir que en la economía moderna de los mercados no sería posible la función sin la existencia de estas actividades.

La economía de mercados consiste en miles de mercados individuales en los cuales bienes y servicios son intercambiados, los consumidores demandan bienes y servicios, y los productores abastecen bienes y servicios, que son el resultado de su producción, los consumidores vienen al mercado a comprar los bienes y servicios con el fin de satisfacer sus demandas y los productores vienen al mercado con el fin de vender su producción.

Los consumidores obedecen a la Teoría económica fundamental “Ley de la demanda” establece que la cantidad de un bien demandado está inversamente relacionado con su precio.

Por otro lado los productores obedecen fundamentalmente a la “Ley de la oferta”, la ley de la oferta establece que la cantidad de bienes ofrecidos está directamente relacionada con el propio precio. Si más consumidores individuales y productores obedecen a las leyes mencionadas, entonces las leyes se mantendrán dentro del agregado.

La intersección entre la curva de la oferta y la curva de la demanda representa un equilibrio en el mercado o equilibrio en el precio, sobre el eje vertical y la cantidad de equilibrio sobre el eje horizontal, este es un precio donde tanto consumidores como productores están satisfechos, todas las cosas, en igualdad de condiciones tienden hacia su precio de equilibrio. A cualquier precio por debajo del equilibrio de mercado, habrá un exceso de oferta, ya que los productores no son capaces de vender sus productos, el exceso de demanda causará que los consumidores hagan una oferta entre otros productos disponibles, la excesiva oferta hará que los precios suban. A cualquier precio por arriba del equilibrio de mercado, habrá un exceso de oferta, los productores no serán capaces de vender sus productos al precio actual, los precios bajarán. Sólo en los mercados perfectos no habrá excesos de demanda ni de oferta, entonces los mercados competitivos presionarán a que haya un equilibrio en el mercado.

El precio no es el único determinante de la demanda de los consumidores y la oferta de los productores, existen otros factores en la demanda como son gustos y preferencias, los precios de otros bienes consumibles y servicios, tasas de interés (especialmente de bienes duraderos a menudos comprados a crédito), el número de consumidores, ingresos desechables en los consumidores, expectativas acerca del futuro y así sucesivamente. En el caso de la oferta, incluye precio de otros productores, precio de los insumos, la tecnología, el número de los productores, expectativas del futuro y así sucesivamente.

Ante cualquier cambio en la oferta o en la demanda, la curva de la oferta o de la demanda cambia, estos cambios “cambio en la oferta o cambio en la demanda” temporalmente se afectan, la fuerza en los mercados se pone en marcha y en el corto tiempo tiende a regresar al equilibrio de mercado.

La especulación implica contemplación al futuro, formulación o expectativas y tomar posiciones con el fin de ganar. Los especuladores son básicamente pronosticadores que actúan con el fin de ganar un retorno. Los especuladores no se ven a sí mismos como controladores de precios, más bien los precios son determinados por la interacción de la oferta y la demanda. La especulación es en gran medida es una forma de pronosticar la oferta y la demanda. Pronosticar exitosamente depende de la información y de las habilidades para interpretar la información y sus implicaciones mejor que los otros.

En la economía ideal, cada especulador, como cada consumidor y cada productor representa sólo una pequeña parte del mercado completo, y sólo puede ejercer un cambio mínimo, entonces el especulador es un pronosticador y no un manipulador, si los precios crecen cuando el especulador va en largo, o caen cuando el especulador va en corto, entonces el especulador, tendrá beneficios de un correcto pronóstico, si los precios caen cuando el especulador va en corto o crecen cuando opera en largo, entonces el especulador sufre una pérdida por un incorrecto pronóstico. Los especuladores se sienten presionados cuando cosechan ganancias honestas, los no especuladores escucharán el final de los especuladores cuando el mercado se haya movido con rapidez, porque ellos se fueron en largo cuando los precios subieron, o en corto cuando los mercados colapsaron.

En cuanto al arbitraje, es tomar simultáneamente posiciones en dos o más mercados como resultado de explotar la discrepancia de la valuación entre el precio de los activos de diferentes mercados, entonces a diferencia de la especulación donde parece que los beneficios a partir de un cambio en el nivel de precios, el arbitraje es más bien una diferencia por la discrepancia entre la relación de precios.

Existen tres tipos de eficiencia de mercado:

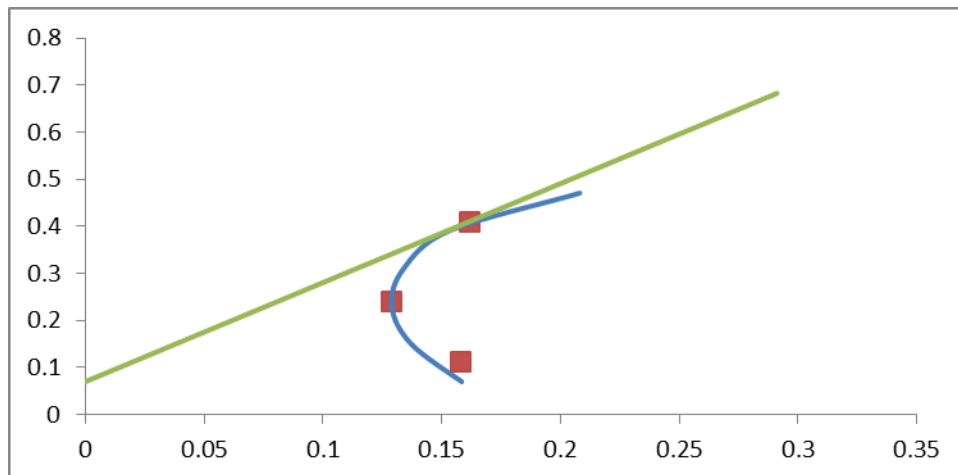
- Débil. Según esta hipótesis, los precios corrientes reflejan totalmente toda la información contenida en los precios históricos.
- Semifuerte. Sugiere un grado mayor de eficiencia. Propone que los precios corrientes (últimos) reflejan toda la información pública disponible en el mercado.
- Fuerte. Define la eficiencia de un mercado en términos aún más restrictivos: toda información pública y privada se refleja inmediatamente en los precios.

1.3.4 Extensión del Modelo de Markowitz

La línea de mercado de capitales (CML). Es una extensión del modelo de Markowitz donde William F. Sharpe (1963) y (1970) y James Tobin (1958) dicen que si los inversionistas pueden prestar y pedir prestado a la tasa de interés libre de riesgo se obtiene una frontera eficiente lineal por encima a la curva de Markowitz; donde dicha frontera eficiente es tangente a la curva de Markowitz.

Como se muestra en la gráfica siguiente:

Gráfica 1.2: Línea de mercado de capitales sobre la curva de Markowitz



Fuente: Elaboración propia.

Para la determinación de la CML se necesita conocer la tasa de interés libre de riesgo y las ponderaciones óptimas de los activos que conforman el portafolio.

La tangencia se da con el portafolio correspondiente a la curva de Markowitz porque éste es el portafolio óptimo del conjunto de inversiones riesgosas. Además es importante señalar que la frontera lineal de inversiones eficientes representa los diversos portafolios que se pueden derivar al combinar el activo libre de riesgo con los riesgosos. Los portafolios a la izquierda del portafolio donde se da la tangencia son portafolios prestamistas y los portafolios a la derecha de dicho portafolio son portafolios apalancados. En los primeros, los inversionistas invierten primordialmente en el activo libre de riesgo. En los segundos, los inversionistas piden prestado para invertir más del 100% de sus recursos en el portafolio de Markowitz. La selección de una cartera riesgosa es independiente, o separada de la combinación óptima de carteras (Teorema de separación). Esta última es igual para todos los inversionistas si existe la posibilidad de prestar y pedir prestado. Así, las necesidades individuales se limitan a solamente determinar la cantidad a prestar o a pedir prestado.

En este caso, el rendimiento esperado del portafolio se mide tomando como base el rendimiento libre de riesgo y además es una función lineal de la relación entre el riesgo del mercado y el riesgo del portafolio. Es decir, en este modelo todos los rendimientos de otros activos, en circunstancias normales deberían ofrecer una prima por el riesgo al agente o inversionista sobre el rendimiento ofrecido por el activo libre de riesgo; y dicha prima depende del nivel de riesgo que el activo mantiene con el riesgo del mercado.

$$E(r_p) = r_f + \left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \right) * \sigma_p \quad (1.7)$$

donde:

r_f : rendimiento del activo libre de riesgo.

$E(r_m)$: rendimiento esperado del mercado.

σ_m : desviación estándar del mercado.

σ_p : desviación estándar del portafolio.

$E(r_p)$: rendimiento esperado del portafolio.

Así, el rendimiento de un portafolio es una función lineal de su riesgo, medido con su desviación estándar. La pendiente de la línea del mercado de capitales $(E(r_m) - r_f / \sigma_m)$ representa el precio del riesgo, o sea el rendimiento adicional por cada unidad de riesgo.

1.4 Mercado de derivados

1.4.1 Derivado

Los derivados son productos que permiten compensar las pérdidas potenciales de aquellos que hacen negocios y permite generar rendimientos o riesgos importantes para aquellos que han decidido especular con ellos. Se llama derivado porque su valor depende de algún subyacente o de otro producto derivado, es decir, es un contrato entre dos partes cuyo valor del activo subyacente es determinado por el precio de ciertos factores. A grandes rasgos se dice que un derivado es una apuesta que se hace sobre el precio futuro de un producto. Este tipo de contratos otorga un seguro a ambas partes.

Los derivados financieros tienen las siguientes características:

- Productos derivados más comunes (futuros, forwards, swaps, opciones).
- Su valor deriva de un activo subyacente (índice, divisas, acciones, tasas, etc.).
- Se pueden emplear como cobertura de riesgo (cambio de los precios).
- Se pueden comercializar en el MexDer¹¹.

Los derivados que se comercializan en el MexDer tienen una cámara de compensación, la cual es una entidad que garantiza el pago a los clientes por concepto de sus contratos derivados a través de un fideicomiso¹²; y su función es disminuir el riesgo de impago. Además la cámara de compensación tiene otro objetivo, monitorear las posiciones de los clientes, así como los precios de los activos subyacentes y otros índices.

¹¹ MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. es la Bolsa de Derivados de México, la cual inició operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de futuros sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Este hecho, constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano. MexDer y su Cámara de Compensación (Asigna) son entidades autorreguladas que funcionan bajo la supervisión de las Autoridades Financieras (SHCP, Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores-CNBV).

¹² Es un contrato mercantil mediante el cual una persona física o jurídica destina sus bienes o derechos a la realización de una finalidad lícita y determinada encargado a una institución fiduciaria el llevar a cabo esa finalidad en beneficio propio o de otra persona. Los elementos personales son: fideicomitente, quien es la persona que crea el fideicomiso, o sea el que da los bienes; fiduciario, entidad jurídica que maneja el patrimonio dado en fideicomiso; fideicomisario, persona beneficiada del fideicomiso.

Cuando un inversionista toma una o varias posiciones en el mercado de derivados, ya sea como coberturista¹³, o especulador la cámara de compensación le pedirá un depósito de no más del 10% del precio de ejercicio del activo subyacente. Cuando el plazo del instrumento llega a su término entonces ya deberá cobrar, o en su caso, pagar la diferencia.

1.4.2 Forwards

Al suponer que el inversionista necesita comprar una acción o algún otro activo subyacente entonces se debe cumplir con los pasos siguientes:

- Fijar el precio que se debe pagar por la adquisición del activo subyacente.
- Transferencia de efectivo del comprador al vendedor.
- Transferencia de la acción del vendedor al comprador.

De aquí una venta al contado cumple con estos tres puntos de forma simultánea. Sin embargo se puede utilizar un contrato forward; es decir fijar el precio del activo subyacente al inicio del contrato; ya sea que éste se compre o se venda y la transferencia del dinero y del activo subyacente ocurra en cierto tiempo, cuando se cumpla la fecha de término o expiración de dicho contrato.

Las características de un contrato forward son las siguientes:

- Se estipula de manera exacta la cantidad y el tipo de activo subyacente que el vendedor debe entregar al comprador.
- Se estipula de manera exacta la vigencia del contrato, el lugar y la fecha de entrega.
- Se estipula de manera exacta el precio del activo subyacente que el comprador debe pagar al vendedor al realizar la entrega del activo subyacente.
- A ambas partes se obligan a cumplir con las condiciones acordadas en el contrato; es decir se obliga al comprador a comprar el activo subyacente y al vendedor a vender el activo subyacente.
- No requiere un pago inicial o prima, excepto por el concepto de comisiones.

¹³ Un individuo que gestiona operaciones de cobertura.

En estos contratos, una posición espera que el precio del activo subyacente al final del contrato sea mayor al precio forward y su contraparte espera lo contrario; es decir que sea menor al precio del activo subyacente al final del contrato. Por lo que es claro que las ganancias de una posición son las pérdidas de la otra.

En el lenguaje financiero, se dice que el inversionista que compra el activo subyacente tiene la posición larga, mientras que el vendedor del activo subyacente tiene la posición corta. Ambas partes fijan las condiciones de intercambio de activos, es decir son contratos a la medida, no son estandarizados y no se negocian en mercados organizados.

1.4.3 Futuros

A grandes rasgos los contratos de futuros son contratos forwards estandarizados de intercambio que se comercializan en el MexDer y se negocian en mercados organizados. Al ser los futuros contratos estandarizados, es decir, que tienen las características de: fecha de entrega, lugares y procedimientos regulados por un mercado¹⁴ y una cámara de compensación¹⁵. Los contratos futuros pueden ser estipulados en mercados de negocio o de forma electrónica; cabe señalar que cada mercado tiene una cámara de compensación determinada, la cual se encarga de relacionar las compras y ventas de los contratos futuros durante el día; además de observar las obligaciones requeridas y el pago a las partes negociantes. Por lo que básicamente la cámara de compensación es la parte contraria tanto del comprador como del vendedor.

En el siguiente cuadro se observan algunas diferencias entre los contratos futuros y los forwards:

Cuadro 1.2: Resumen de las diferencias entre contratos Forwards y Futuros

Forwards	Futuros
Contratos OTC	Contratos negociados en Bolsa
Conocen las contrapartes	No se conocen las contrapartes
Hechos a la medida de la contraparte	Estandarizados
Liquidación al vencimiento	Liquidación diaria
Garantías	Llamadas al margen
No hay mercado secundario	Hay mercado secundario
Riesgo de crédito	No hay riesgo de Crédito

Fuente: Elaboración Propia.

¹⁴Lugar de encuentro de la oferta y la demanda. No tiene porque ser un sitio físico, sino que puede ser un lugar o entorno electrónico.

¹⁵Empresa que garantiza la actuación de las partes en una transacción de derivados en un mercado organizado.

1.4.4 Swaps

Un contrato forward fija el precio de un activo al inicio del contrato es decir al tiempo inicial t_0 , para la transacción que ocurre en el futuro. Pero al suponer que a una empresa le interesa fijar el precio del activo subyacente para la entrega de éste en fechas futuras, es decir le interesa fijar dicho precio en el tiempo cero para más de una transacción financiera en el futuro. Y al suponer que a partir de hoy a dicha empresa le interesa comprar una gran cantidad de litros de agua al término de un año y al término de dos años respectivamente; entonces le interesa obtener el precio del agua en dichos años. Una alternativa para la empresa, puede ser, realizar varios contratos forwards que le permiten fijar el precio del agua en el tiempo inicial, con fechas de término de la vigencia de los contratos dependientes de las necesidades de la propia empresa.

Pero como en este caso se realizan varios contratos esto puede implicar una fuerte cantidad a pagar por concepto de comisiones para la empresa por lo que se puede considerar otra alternativa; dicha alternativa cubre las entregas de los litros de agua que tiene que realizar la empresa en distintos períodos y mediante un solo contrato. Este contrato es llamado contrato swap el cual especifica transacciones de pagos y entregas de activos subyacentes (en este caso litros de agua); al transcurrir cierto tiempo; es decir un contrato swap es una generalización de los contratos forwards, ya que cubre muchos contratos forwards en diferentes períodos.

Por lo anterior se puede decir que es más fácil para la empresa tener un solo contrato swap para varias ventas futuras; fijando un solo precio, que tener muchos contratos forwards con diferentes precios a las fechas de expiración respectivas.

El siguiente capítulo se dedicará a explicar las opciones; puesto que dicho producto derivado será de relevancia en esta tesis.

Capítulo 2

Opciones financieras

2.1 Introducción a las opciones

A principios del siglo XIX realizaron una expedición Lewis y Clark observando plantas del oeste del río Misisipi; entre ellas sobresalía una hermosa planta de pétalos rosas “Clarkia pulchella”; Clarkia en honor a Clark y pulchella cuyo significado en latín es hermosa.

Tiempo después (1827) esta planta es analizada por el botánico y médico escocés Robert Brown (1773-1858) quien tritura los granos de polen; observándolos bajo el microscopio cuyo portaobjetos accidentalmente tenía gotas de agua. Lo cual originó que Brown observara un movimiento continuo “Movimiento Browniano” de las partículas producto de los choques instantáneos que tienen entre ellas; en la vida diaria existen muchos movimientos de esta forma como pueden ser: aerosoles, coloides, el humo del cigarro, las reacciones instantáneas que tiene el organismo del ser humano, entre otros.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX un joven francés de nombre Louis Bachelier (1870-1946) se hace cargo de sus hermanos a la edad de 18 años; puesto que sus padres habían fallecido; sin embargo tenían un negocio de venta de vino; por lo que Bachelier trabajaba en dicho negocio; dentro de sus clientes resalta un matemático de nombre Henri León Lebesgue (1875-1941); quien al observar el interés de Bachelier por las matemáticas lo invita a estudiar en la Sorbonne de París (1892); Bachelier acepta la oferta de Lebesgue y logra concluir su tesis doctoral “La teoría de la especulación” (1900). En dicha tesis Bachelier muestra como el movimiento browniano también se observa en movimientos de las acciones que se comercializan en la bolsa de París; donde el precio de las acciones siguen una distribución normal; sin embargo a pesar de obtener antes que Albert Einstein (1879-1955) las conclusiones sobre la modelación del movimiento browniano, Bachelier muere en el anonimato.

Poco después de mediados del siglo XX un economista americano de nombre Paul Samuelson (1915-2009) realiza una visita a la Sorbonne de París (1960) donde observa la tesis de Bachelier; sacándola de la Sorbonne para analizarla más a detalle y encuentra que los precios de las acciones no son los que siguen una distribución normal; más bien son los rendimientos los que siguen dicha distribución. Por la anterior contribución Paul Samuelson recibe el premio nobel de economía (1970).

Samuelson deja pendiente el tema sobre la valuación de opciones financieras; por lo que mediante investigaciones posteriores Fischer Black (1938-1995), Myron Scholes (1941-) y Robert C. Merton (1944-) desarrollan un modelo cerrado para la valuación de opciones publicando el artículo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” (1973); dicho artículo cambió la forma de ver a las finanzas; pasando de las tradicionales a las modernas.

En 1997 Myron Scholes y Robert C. Merton reciben el premio nobel de economía; debido a que Fischer Black falleció dos años antes.

2.2 Opciones

Como bien se mencionó en el capítulo anterior un portafolio de inversión está conformado por el riesgo y rendimiento que está dispuesto a correr el inversionista. A diferencia de este portafolio una opción financiera es un seguro que tiene el inversionista para protegerse de los cambios que tiene el activo subyacente¹⁶ a lo largo del tiempo.

Una *opción* es un contrato estandarizado¹⁷; donde el comprador (posición larga) por el pago de una prima tiene el derecho más no la obligación de comprar o vender el activo subyacente; mientras que el vendedor (posición corta) está obligado a vender o comprar dicho activo al precio pactado en la fecha futura. Por lo que el comprador puede ejercer su derecho, según lo acordado en el contrato respectivo; sin embargo si en el contrato se pacta el ejercicio¹⁸ en efectivo, entonces no se realizará la entrega física del activo subyacente.

Aunque es claro que un contrato de opciones es un juego de suma cero entre comprador (parte) y vendedor (contraparte); puesto que las ganancias de la parte son las pérdidas de la contraparte y viceversa. Se tiene que la Cámara de Compensación es la parte legal que se interpone entre las partes, convirtiéndose en la contraparte de los contratos, garantizando que estos se cumplan.

Al invertir en opciones también es posible especular¹⁹ realizando operaciones de arbitraje²⁰ aprovechando desequilibrios temporales en la prima de las opciones.

¹⁶ Algunos activos subyacentes son: acciones, divisas, metales, índices bursátiles, tasas de interés, productos derivados, bienes (commodities), entre otros.

¹⁷ Los contratos estandarizados permiten que las transacciones se efectúen en mercados abiertos, organizados y con garantías de su cumplimiento. Esta característica genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión.

¹⁸ El precio de ejercicio es el precio del activo subyacente a partir del cual ambas partes del contrato pueden obtener ganancias o pérdidas.

¹⁹ Obtener ganancias extraordinarias asumiendo riesgos sobre tendencias inesperadas.

²⁰ Hacer dinero de la nada, es decir, obtener ganancia sin riesgo alguno.

Las opciones financieras o también llamadas opciones, pueden clasificarse de acuerdo a su tipo, clase y serie. El tipo nos indica si la *opción es de compra* “call” u *opción de venta* “put”. Todas las opciones que sean del mismo tipo y que tengan una fecha de vencimiento común determinan una clase. Las opciones que pertenezcan a una clase y que tengan el mismo precio formarán una serie.

2.2.1 Posición larga

La *opción de compra larga* le otorga al comprador de la opción el derecho de comprar el activo subyacente a un precio de ejercicio determinado en una fecha futura. Dicho derecho se le otorga por el pago de la prima al estipular el contrato; obligando al vendedor del activo subyacente a venderlo.

La *opción de venta larga* le otorga al vendedor de la opción el derecho de vender el activo subyacente a un precio de ejercicio en una fecha futura. Dicho derecho se le otorga por el pago de la prima; obligando al comprador del activo subyacente a comprarlo.

Es importante mencionar que hablar de una opción de compra larga es lo mismo que hablar de una opción de compra “call”; asimismo hablar de una opción de venta larga es lo mismo que hablar de una opción de venta “put”.

2.2.2 Posición corta

La *opción de compra corta* “short-call” es la contraparte de la opción de compra larga, esta contraparte tiene la obligación de vender el activo subyacente al precio de ejercicio en la fecha futura determinada en el contrato al comprador de la opción debido a que recibe de éste una prima.

La *opción de venta corta* “short-put” es la contraparte de la opción de venta larga, ésta contraparte tiene la obligación de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio en la fecha futura determinada en el contrato al vendedor de la opción debido a que recibe de éste una prima.

2.3 Opciones americanas y europeas

Las opciones también se pueden clasificar por su estilo en opciones americanas y europeas; dicha clasificación depende del tiempo en que se puede ejercer el derecho que ellas otorgan, es decir:

Las *opciones americanas* son aquellas en las que se puede ejercer el derecho a comprar o vender el activo subyacente durante la vigencia del contrato, es decir, el inversionista puede ejercer su derecho en cualquier fecha hasta el día de vencimiento.

Las *opciones europeas* son aquellas en las que se puede ejercer el derecho a comprar o vender el activo subyacente al término de la vigencia del contrato, es decir, el inversionista puede ejercer su derecho solo en la fecha de vencimiento. De aquí se puede apreciar que al comprador de una opción americana debe pagar una prima mayor, que al comprador de una opción europea bajo los mismos factores de influencia sobre el precio del activo subyacente, ya que la contraparte tiene la incertidumbre de que le puedan ejercer en cualquier instante dentro del plazo pactado.

Generalmente se negocian contratos de opciones americanas; aunque es importante decir que su valuación es más compleja que las opciones europeas.

De lo anterior se pueden expresar las siguientes definiciones:

Opción call europea es donde el comprador de la opción al pagar una prima a su contraparte; adquiere el derecho; más no la obligación de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio pactado con la contraparte al final de la vigencia del contrato.

Opción put europea es donde el vendedor de la opción al pagar una prima a su contraparte; adquiere el derecho; más no la obligación de vender el activo subyacente al precio de ejercicio pactado con la contraparte al final de la vigencia del contrato.

Opción call americana es donde el comprador de la opción al pagar una prima a su contraparte; adquiere el derecho; más no la obligación de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio pactado con la contraparte durante la vigencia del contrato.

Opción put americana es donde el vendedor de la opción al pagar una prima a su contraparte; adquiere el derecho; más no la obligación de vender el activo subyacente al precio de ejercicio pactado con la contraparte durante la vigencia del contrato.

2.4 Opciones dentro, en y fuera del dinero

Para comprender de mejor forma la manera de observar si una opción está dentro, en o fuera del dinero se expresa el valor intrínseco de una opción de la manera siguiente:

$$I_c = \text{Max}(S_t - X, 0) \quad (2.1)$$

$$I_p = \text{Max}(X - S_t, 0) \quad (2.2)$$

donde:

I_c : Valor intrínseco de una opción de compra.

I_p : Valor intrínseco de una opción de venta.

X : Precio de ejercicio.

S_t : Precio del activo subyacente a tiempo t .

Cuando el valor intrínseco es mayor a cero tanto para la opción de compra o de venta, se garantiza no perder el total de la prima. Por lo que las opciones también se pueden clasificar, según la relación existente entre el precio de ejercicio y el precio del activo subyacente a tiempo t ²¹ de la siguiente manera:

Dentro del dinero “in the money” es cuando el precio del activo subyacente a tiempo t excede el precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio del activo subyacente a tiempo t es menor al precio de ejercicio para una opción de venta.

En el dinero “at the money” es cuando el precio del activo subyacente a tiempo t es el mismo que el precio de ejercicio, sin importar si la opción es de compra o de venta.

Fuera del dinero “out of the money” es cuando el precio del activo subyacente a tiempo t es menor al precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio del activo subyacente a tiempo t es mayor al precio de ejercicio en una opción de venta.

La explicación anterior se resume en el siguiente cuadro:

Cuadro 2.1: Clasificación de una opción según la relación entre S_t y X

Opción	Dentro del dinero	Fuera del dinero	En dinero
Call	$S_t > X$	$X > S_t$	$X = S_t$
Put	$X > S_t$	$S_t > X$	$X = S_t$

Fuente: Elaboración propia.

²¹ el precio del activo subyacente debido a los cambios que sufrió al transcurrir el tiempo.

De esta clasificación se tiene que si al inicio del contrato se está dentro del dinero entonces las primas a pagar serán más altas; por otro lado si al inicio del contrato se está fuera del dinero las primas serán más bajas; esto se debe a la probabilidad de que el inversionista al final del contrato obtenga ganancias.

2.5 Factores de influencia sobre el valor de la prima de la opción.

Se describe el tipo de relación que existe entre los factores de influencia con las opciones; explicando si es directa (primas altas) o inversa (primas bajas):

Precio del activo subyacente al inicio del contrato. Este factor depende de la probabilidad de obtener ganancias, es decir, cuando se está dentro del dinero; en el caso de las opciones de compra se tiene una relación directa y en las opciones de venta una relación inversa.

Precio de ejercicio. Sucede lo contrario respecto al factor anterior; puesto que si el precio de ejercicio es muy grande; entonces desde el inicio del contrato la opción de compra estará fuera de dinero y la opción de venta dentro del dinero.

De lo anterior se tiene para las opciones de compra una relación inversa y para las opciones de venta una relación directa.

Tasa de interés libre de riesgo. Si la tasa de interés libre de riesgo tiende a cero el precio de las opciones de compra disminuye; mientras que el precio de las opciones de venta aumenta. El efecto anterior puede ser visto de manera más clara en la ecuación de paridad put-call²².

Por lo que se tiene para las opciones de compra una relación inversa y para las opciones de venta una relación directa.

Sin embargo al considerar opciones sobre divisas, es decir, además de la tasa nacional libre de riesgo se considera una tasa extranjera, la cual disminuirá el valor de la tasa nacional libre de riesgo que al traer a valor presente con la tasa de interés continuamente capitalizable resultado de la diferencia de tasas se tiene para las opciones de compra una relación directa y para las opciones de venta una relación inversa; lo anterior respecto a las acciones que no consideran dichas divisas.

²²Ecuación que relaciona las primas de las opciones europeas de compra con las de venta cuando no hay arbitraje.

Dividendos. Sucede un efecto similar al ocurrido con el factor del precio de ejercicio; solo que ahora al considerar altos dividendos que descuenten el valor del activo subyacente (acciones) logrando poner subyacentes fuera del dinero cuando posiblemente desde el inicio del contrato estaban dentro, es decir, este efecto produce para las opciones de compra una relación inversa y para las opciones de venta una relación directa.

Volatilidad. El factor volatilidad siempre tiene una relación directa tanto para el precio de una opción de compra, como para el precio de una opción de venta; sin importar si son americanas o europeas, es decir mientras más volátil sea el precio del activo subyacente; entonces mayor será el precio de la opción que desee obtener el inversionista. Debido a que el rango de posibles variaciones del precio del activo subyacente es grande, eso implica un riesgo alto ya sea que suba o baje el precio de dicho activo a lo largo del tiempo.

Tiempo. Sucede que al tener mayor plazo de vigencia de la opción; entonces mayor será la posibilidad de ejercer, por lo que se incrementa el valor de la prima de las opciones; tanto de compra como de venta.

Desde el punto de vista del estilo de la opción el factor tiempo influye en las opciones europeas y americanas; dicha influencia depende de la posibilidad de ejercicio a la contraparte; por lo que las opciones americanas deben de ser más caras que las europeas debido a que las opciones americanas pueden obtener ganancias durante la vigencia del contrato. Sin importar si son opciones de compra o de venta; las cuales tienen una relación directa con el factor tiempo.

A continuación se muestra un cuadro en donde se resume la influencia sobre el precio de la opción (prima) que tienen dichos factores:

Cuadro 2.2: Relación de los factores de influencia sobre la opción

Opción	Precio del activo subyacente al inicio del contrato	Precio de ejercicio	Tasa de interés libre de riesgo	Dividendos	Volatilidad	Tiempo
Call	directa	inversa	directa	inversa	directa	directa
Put	inversa	directa	inversa	directa	directa	directa

Fuente: Elaboración propia.

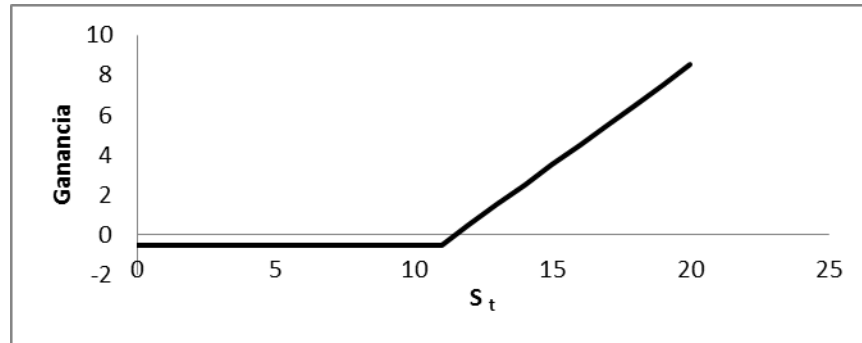
2.6 Gráficas de opciones

Anteriormente se han mencionado factores analíticos que influyen en el precio de la opción; sin embargo es importante observar gráficamente la opción, para complementar de una mejor manera los aspectos teóricos de la investigación.

2.6.1 Opción de compra

En una opción de compra el inversionista tiene la expectativa de que el precio del activo subyacente subirá, es decir, si ocurre la expectativa de dicho inversionista entonces obtendrá ganancias, de echo las ganancias pueden ser ilimitadas, mientras que la pérdida máxima que puede tener el inversionista es el pago de la prima como se muestra en la gráfica 2.1:

Gráfica 2.1: Opción de compra “call”

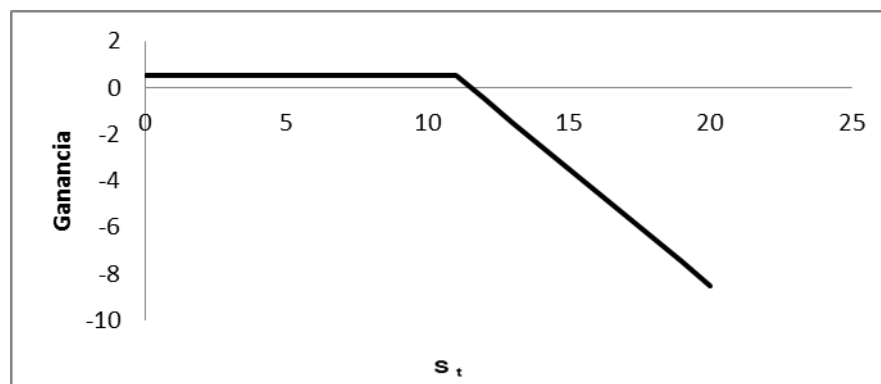


Fuente: Elaboración propia.

2.6.2 Opción de compra corta

Es la contraparte de la opción de compra la cual tiene la expectativa de que el precio del activo subyacente baje; es decir, si dicho activo es menor al precio de ejercicio, entonces la máxima ganancia que puede obtener la contraparte es la prima que recibió del comprador; sin embargo las pérdidas pueden ser ilimitadas como se muestra en la gráfica 2.2:

Gráfica 2.2: Opción de compra corta “short call”

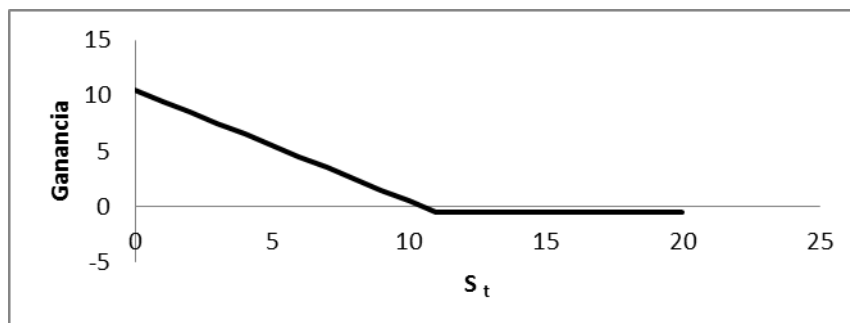


Fuente: Elaboración propia.

2.6.3 Opciones de venta

En una opción de venta el inversionista tiene la expectativa de que el precio del activo subyacente bajará, es decir, si ocurre la expectativa de dicho inversionista entonces obtendrá ganancias, de echo las ganancias y las pérdidas son limitadas, teniendo como pérdida máxima el pago de la prima como se muestra en la gráfica 2.3:

Gráfica 2.3: Opción de venta “put”

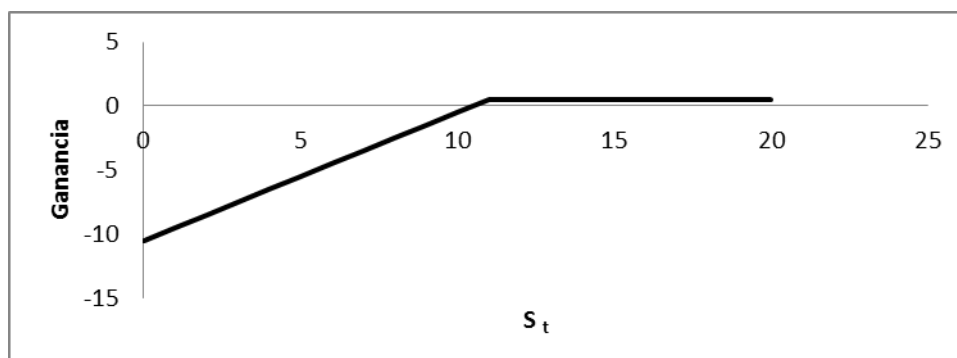


Fuente: Elaboración propia.

2.6.4 Opciones de venta corta

Es la contraparte de la opción de venta la cual tiene la expectativa de que el precio del activo subyacente suba; es decir, si dicho activo es mayor al precio de ejercicio, entonces la máxima ganancia que puede obtener la contraparte es la prima que recibió del comprador de la opción de venta; también las pérdidas son limitadas como se muestra en la gráfica 2.4:

Gráfica 2.4: Opción de venta corta “short put”



Fuente: Elaboración propia.

Parecería injustas las máximas ganancias (primas) que pueden tener las contrapartes de las opciones de compra y venta respectivamente; sin embargo en el mercado existen primas muy atractivas por lo cual están dispuestos a entrar en juego las contrapartes; además que en la práctica se realizan contratos con un lote de 100 opciones.

A continuación se muestra un cuadro resumen:

Cuadro 2.3: Resumen de las ganancias y pérdidas de las opciones según el comportamiento del activo subyacente a lo largo del tiempo

Opción	Ganancias	Intervalo de ganancias	Pérdidas	Intervalo de pérdidas	Especulación sobre el activo subyacente
Call	No acotadas	$S_t \in [X, \infty)$	Acotadas	$S_t \in [0, X)$	Alza
Short Call	Acotadas	$S_t \in [0, X)$	No acotadas	$S_t \in [X, \infty)$	Baja
Put	Acotadas	$S_t \in [0, X)$	Acotadas	$S_t \in [X, \infty)$	Baja
Short Put	Acotadas	$S_t \in [X, \infty)$	Acotadas	$S_t \in [0, X)$	Alza

Fuente: Elaboración propia.

De aquí se observa que al invertir en una opción de compra, las ganancias que se pueden obtener son las pérdidas de la contraparte y viceversa, ya que se puede observar que la opción de compra se encuentra dentro del dinero cuando $S_t \in (11, \infty)$ mientras que la opción de compra corta tiene ganancias cuando $S_t \in [0, 11]$. También es importante observar que las pérdidas de la opción de compra están acotadas mientras que las de su contraparte no lo están.

Análogamente se aprecia que al invertir en una opción de venta, las ganancias que se pueden obtener son las pérdidas de la contraparte y viceversa; ya que se puede observar que la opción de venta tiene ganancias cuando $S_t \in [0, 11)$ mientras que la opción de venta corta tiene ganancias cuando $S_t \in [11, \infty]$. También es importante observar que tanto las pérdidas de la opción de venta como las de su contraparte están acotadas.

2.7 Estrategias de inversión

Las estrategias son generadas al comprar o vender opciones, o por las posibles combinaciones de al menos dos de éstas, de acuerdo a la especulación que se tenga.

Las estrategias de inversión sirven para que el inversionista se pueda proteger principalmente de los cambios que produce la volatilidad del activo subyacente; asimismo las estrategias pueden ser de cobertura o de volatilidad.

2.7.1 Estrategias de cobertura

Una cobertura se realiza al combinar opciones de compra y opciones de venta, las cuales ofrecen diferentes estrategias financieras principalmente de especulación. Las coberturas más comunes son las llamadas “Bull spread” y “Bear spread”.

Para realizar las coberturas es importante entender que comprar una opción de compra corta es lo mismo que vender una opción de compra y que comprar una opción de venta corta es lo mismo que vender una opción de venta.

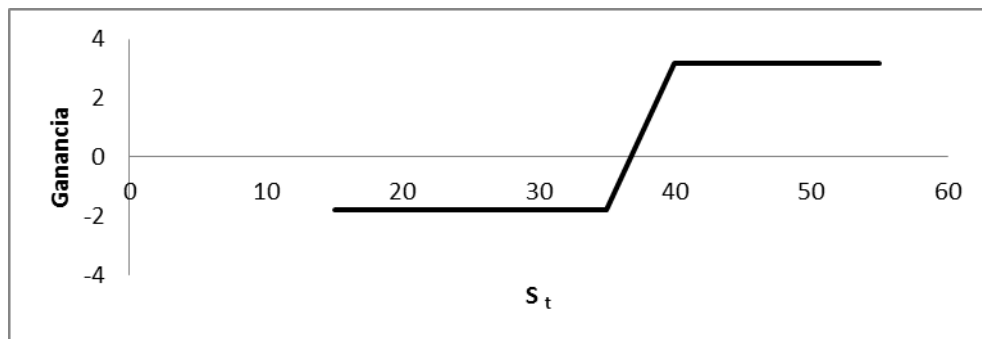
2.7.1.1 Bull spread

La estrategia bull spread se utiliza cuando el inversionista especula que el precio del activo subyacente puede subir; pero el inversionista está protegido en caso de baja en dicho precio; al realizar la estrategia bull; el inversionista tiene que pagar una prima menor por la estrategia que si solo compra la opción de compra debido a que recibe una prima por concepto de la venta de otra opción de compra. Por lo que la estrategia consiste en lo siguiente:

Tener la posición larga en una opción de compra a menor precio de ejercicio y tener la posición corta en una opción de compra a mayor precio de ejercicio del mismo activo subyacente con la misma fecha de término de la vigencia del contrato.

En la gráfica 2.5 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.5: Bull spread



Fuente: Elaboración propia.

Es importante decir que se obtiene el mismo resultado si se toma la posición larga en una opción de venta; a bajo precio de ejercicio $X=35$ y se toma la posición corta en una opción de venta a un alto precio de ejercicio $X=40$.

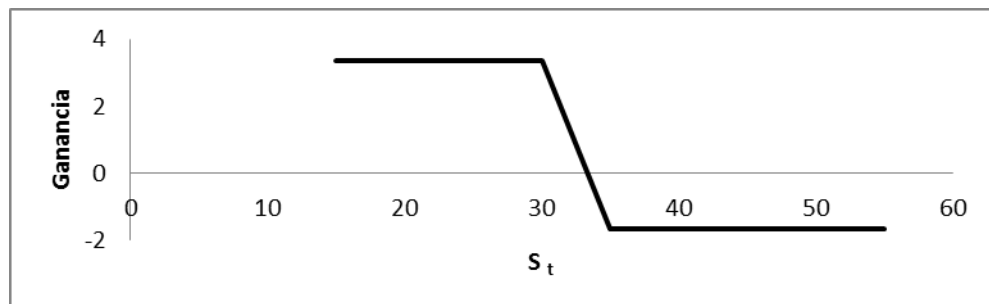
2.7.1.2 Bear spread

La estrategia bear spread es utilizada cuando el inversionista especula que el precio del activo subyacente puede bajar; pero el inversionista está protegido en caso de alza en dicho precio; esta estrategia es contraria a la bull spread; es decir consiste en lo siguiente:

Tener la posición larga en una opción de compra a mayor precio de ejercicio y tener la posición corta en una opción de compra a menor precio de ejercicio del mismo activo subyacente con la misma fecha de término de la vigencia del contrato.

En la gráfica 2.6 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.6: Bear spread



Fuente: Elaboración propia.

2.7.2 Especulación de volatilidad

Otra forma en la que puede especular el inversionista es por medio de la volatilidad o variabilidad en el precio del activo subyacente; en donde puede crear estrategias para obtener ganancias cuando haya alta volatilidad; es decir con las estrategias straddle y strangle; y como es de esperarse por el contrario cuando el inversionista especula baja volatilidad, se tiene a las estrategias short straddle y short strangle.

2.7.2.1 Straddle

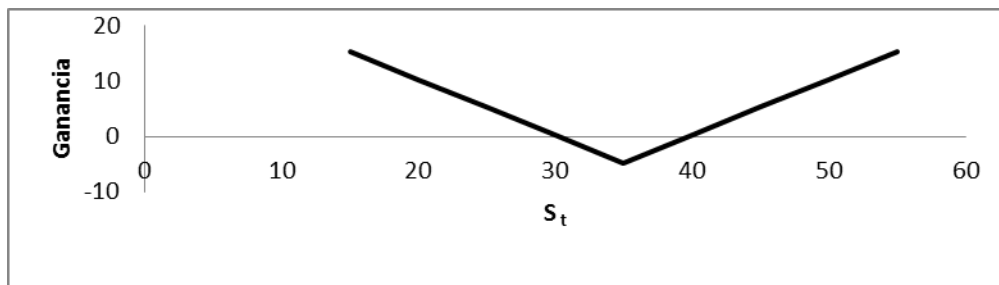
Cuando el inversionista especula que puede haber gran volatilidad en el precio del activo subyacente, es decir, que el precio del activo subyacente puede subir demasiado o bajar demasiado; entonces el inversionista puede construir un straddle. Ya que si el precio del activo subyacente sube, entonces el inversionista obtiene ganancias con la opción de compra, mientras que si el precio del activo subyacente baja entonces se tienen ganancias con la opción de venta.

Cabe decir que el costo de la prima de la estrategia para el inversionista es más alto que si opta por invertir solo en una opción de compra o en una opción de venta por separado ya que en esta estrategia hay que pagar ambas primas. Además en este caso el inversionista piensa que es poco probable que el activo subyacente este cercano al precio de ejercicio que haya pactado. Por lo que la estrategia consiste en lo siguiente:

Tener la posición larga en una opción de compra y en una opción de venta con el mismo precio de ejercicio en ambos casos.

En la gráfica 2.7 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.7: Straddle



Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar el problema de esta estrategia es que la prima que debe de pagar el inversionista es muy alta; por lo que para solucionar este problema se puede construir la estrategia strangle.

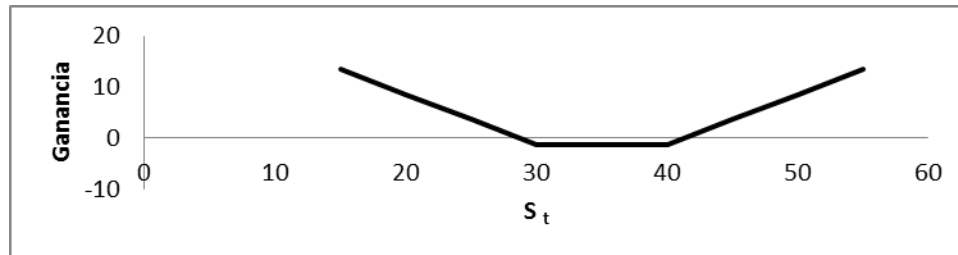
2.7.2.2 Strangle

Esta estrategia; es de gran utilidad para el inversionista cuando especula alta volatilidad, porque disminuye el costo de la prima de la estrategia straddle, ya que el inversionista puede construir la estrategia strangle. La cual consiste en lo siguiente:

Tomar la posición larga en una opción de compra a un precio de ejercicio mayor y tomar la posición larga en una opción de venta a un precio de ejercicio menor.

En la gráfica 2.8 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.8: Strangle



Fuente: Elaboración propia.

A través de esta gráfica podemos observar que se disminuye el costo de la prima de la estrategia pero también se disminuyen las posibles ganancias respecto al straddle.

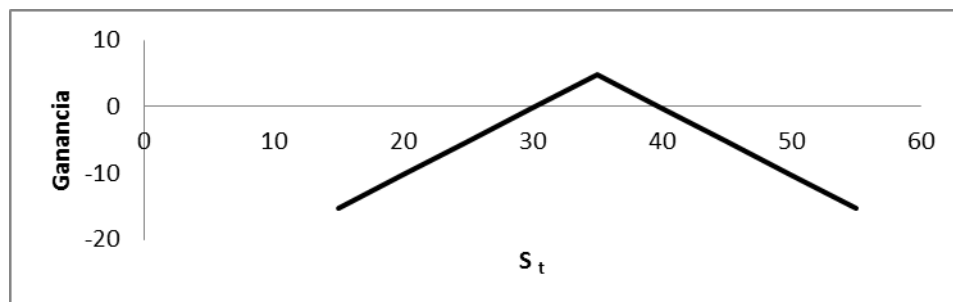
2.7.2.3 Short Straddle

Esta estrategia es contraria a la estrategia straddle; ya que esta estrategia prevé baja volatilidad en el precio del activo subyacente. La estrategia consiste en:

Tener la posición corta en una opción de compra y en una opción de venta con el mismo precio de ejercicio.

En la gráfica 2.9 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.9: Short Straddle



Fuente: Elaboración propia.

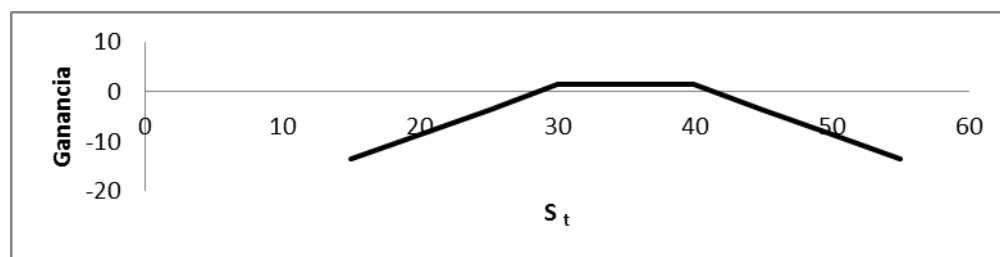
2.7.2.4 Short Strangle

Esta estrategia es contraria a la estrategia strangle; ya que esta estrategia prevé baja volatilidad en el precio del activo subyacente. La estrategia consiste en:

Tener la posición corta en una opción de compra con precio de ejercicio mayor y tener la posición corta en una opción de venta con precio de ejercicio menor.

En la gráfica 2.10 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.10: Short Strangle



Fuente: Elaboración propia.

2.7.2.5 Butterfly

Cuando el inversionista vende un straddle; es decir obtiene un short straddle ya que especula a baja volatilidad, entonces adquiere el riesgo²³ de tener una gran pérdida si el precio del activo subyacente sube o baja demasiado y de manera rápida.

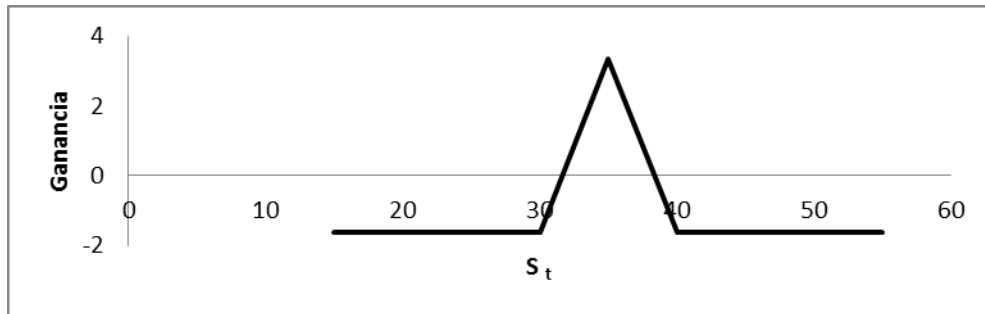
Esto se puede prevenir con la estrategia butterfly, ya que dicha estrategia permite al inversionista la posibilidad de vender si el precio del activo subyacente baja y la posibilidad de comprar si el precio del activo subyacente sube; por lo que el inversionista compra una opción de venta con precio de ejercicio menor y una opción de compra con precio de ejercicio mayor, es decir se compra un strangle. Por lo que la estrategia butterfly consiste en:

Tener la posición larga de un strangle y tener la posición corta de un straddle.

²³ Probabilidad de que un evento esperado no ocurra.

En la gráfica 2.11 se muestra el efecto de dicha estrategia:

Gráfica 2.11: Butterfly



Fuente: Elaboración propia.

En el capítulo se ha explicado tanto los factores analíticos que influyen en el precio de la opción como las gráficas que pueden conformar la combinación de opciones para que el inversionista pueda realizar un mejor análisis de inversión de acuerdo a su especulación.

Las estrategias vistas son importantes ya que en algunos casos ayudan a disminuir el precio que tiene que pagar el inversionista por la obtención de la estrategia; es decir cuando el inversionista vende al menos una opción, pero como se ha observado gráficamente, en éstos casos las ganancias están acotadas; sin embargo si el inversionista decide apostar por aumentar la posibilidad de tener ganancias; entonces deberá pagar una prima mayor por la obtención de la estrategia; ya que dicha estrategia puede obtener ganancias infinitas.

Por último es importante decir que aunque la probabilidad de obtener ganancias al realizar una inversión sea muy grande; esto no garantiza que ocurrirá el evento, simplemente nos dice que es muy probable que ocurra ya que si los eventos en los mercados financieros fueran seguros; entonces no tendría sentido el análisis realizado.

Capítulo 3

Series de tiempo

El primer paso en el análisis de un conjunto de datos es el de graficar las observaciones a lo largo del tiempo. Esto normalmente mostrará las propiedades más importantes de las series. Características como tendencia, estacionalidad (temporalidad) y discontinuidad, usualmente serán visibles en las gráficas.

3.1 Series de tiempo estacionarias

Un trabajo empírico basado en series de tiempo supone que la serie de tiempo en cuestión es estacionaria. Se dice que una serie de tiempo es estacionaria si no tiene un cambio sistemático en la media (no tendencia), si no tiene un cambio sistemático en la varianza y si se removieron las variaciones estrictamente periódicas.

La mayor parte de la teoría de probabilidades está enfocada a las series de tiempo estacionarias, por lo que el análisis de series de tiempo requiere convertir las series no estacionarias en estacionarias, para así poder aplicar esta teoría. Si al graficar, se observa que las series son aproximadamente estacionarias, será útil el calcular la media y la desviación estándar de las observaciones.

Al graficar los datos, estos posiblemente indicarán si es deseable transformar los valores de la variable observada. Las dos principales razones para hacer una transformación son:

- 1) *Para estabilizar la varianza.* Si existe una tendencia en la serie y la varianza se incrementa junto con la media entonces es recomendable hacer una transformación a los datos. En particular, si la desviación estándar es directamente proporcional a la media, es apropiado aplicar una transformación logarítmica.
- 2) *Para hacer el efecto estacional aditivo.* Si existe tendencia en la serie y el tamaño del efecto estacional se incrementa con la media, entonces se recomienda hacer una transformación para lograr que el efecto estacional sea constante. En particular, si el tamaño del efecto estacional es directamente proporcional a la media, se dice que el efecto estacionario es multiplicativo y para lograr un efecto aditivo se recomienda hacer una transformación logarítmica. A veces esta transformación solo estabilizará a la varianza cuando el error sea multiplicativo, punto que luego pasa por desapercibido.

Comúnmente se utilizan tres modelos estacionales:

a) $x_t = \mu_t + s_t + \varepsilon_t$

b) $x_t = \mu_t s_t + \varepsilon_t$

c) $x_t = \mu_t s_t \varepsilon_t$

donde:

x_t : Observación al tiempo t.

μ_t : Media general.

s_t : Efecto estacional.

ε_t : Error aleatorio.

El modelo **a** es completamente aditivo, por lo que no requiere ninguna transformación. El modelo **c** es completamente multiplicativo, por lo que es apropiado aplicar una transformación logarítmica. El modelo **b** tiene estacionalidad multiplicativa y error aditivo, el tamaño relativo de estos efectos determinarán la transformación que es adecuada aplicar.

3.1.1 Operadores de retraso y diferencia

Estos operadores serán indispensables para definir lo que más adelante se conocerá como modelos ARIMA.

El *operador de retraso* se denota por la letra B (del inglés Backward). Este operador se define mediante la relación:

$$Bx_t = x_{t-1}, \forall t$$

Generalizando el resultado del operador B , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 B^2 x_t &= B(Bx_t) = x_{t-2} \\
 B^3 x_t &= B(B^2 x_t) = x_{t-3} \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 B^k x_t &= B(B^{k-1} x_t) = x_{t-k}
 \end{aligned}$$

Es decir, la serie que originalmente contaba con t observaciones, se reducirá a una serie de solamente $t-k$ observaciones, lo anterior se obtiene al aplicar el operador B^k .

El *operador diferencia* está denotado por ∇ y está íntimamente relacionado con B . Este operador se utiliza para expresar relaciones del tipo $y_t = x_t - x_{t-1}$ donde si x_t es una variable de saldo, entonces y_t será la correspondiente variable de flujo; es decir ∇ se define como:

$$\nabla x_t = x_t - x_{t-1}, \forall t$$

La relación que liga a ∇ con B es la siguiente:

$$\nabla = 1 - B \Rightarrow \nabla x_t = (1 - B)x_t, \forall t$$

De esta manera, así como se obtuvo una expresión general para B^k mediante la aplicación sucesiva del operador B ; así también se obtiene la siguiente forma general para ∇^k :

$$\nabla^k x_t = (1 - B)^k x_t, \forall t$$

En el análisis de series de tiempo se utilizan operadores de retraso en forma de polinomios. El uso de polinomios de retraso es de particular importancia, porque permiten expresar, de una manera simple, algunos de los modelos de mayor utilidad en la práctica, como son promedios móviles, autorregresivos, autorregresivos de promedios móviles y autorregresivos integrados y de promedios móviles; los cuales se describirán más adelante.

3.1.2 Análisis de series con tendencia

El análisis de una serie de tiempo que muestra un cambio en la media por un periodo largo, depende de lo que se desea hacer:

- a) Medir la tendencia.
- b) Remover la tendencia para así poder analizar fluctuaciones locales.

Con datos estacionales, es buena idea empezar para calcular promedios anuales sucesivos que mostrarán una descripción de la tendencia. Una aproximación de este tipo en algunas situaciones es perfectamente adecuada, en especial cuando la tendencia es pequeña, pero algunas otras veces es necesaria una aproximación más sofisticada y se debe considerar las siguientes técnicas:

- i) **Ajuste de una curva.** Un método tradicional para tratar con los datos no estacionales que contienen una tendencia, particularmente cuando son anuales, es ajustarlos a una función simple como una curva polinomial (lineal, cuadrática, cúbica, etc). Por ejemplo la curva de Gompertz está dada por:

$$\log(x_t) = a - br^t$$

Para todas las curvas de este tipo, la función ajustada mide la tendencia y los residuales son las diferencias entre las observaciones y sus valores correspondientes en la curva ajustada.

- ii) **Filtros.** Un segundo método para tratar a la tendencia, es usar un filtro lineal que transforma a una serie de tiempo, $\{x_t\}$, en otra $\{y_t\}$, a través de una operación lineal.

$$y_t = \sum_{r=-q}^s a_r x_{t-r} = S_m(x_t)$$

Donde $\{a_r\}$ es el conjunto de ponderaciones tal que:

$$\sum a_r = 1$$

Esta operación es conocida como promedios móviles. Los promedios móviles normalmente son simétricos con $s=q$ y $a_r = a_{-r}$.

Los promedios móviles simples no son generalmente recomendados para medir la tendencia, aunque puedan ser útiles para remover la variación estacional.

- iii) **Diferenciación.** Un tipo especial de filtro, que es particularmente útil para remover la tendencia, es un simple operador diferencia, aplicado a la serie de tiempo, para convertirla en una serie estacionaria. Para datos no estacionales, basta aplicar una sola vez el operador diferencia para convertirlos en estacionarios, por lo que la nueva serie $\{y_1, y_2, \dots, y_{t-2}, y_{t-1}\}$ está formada por la serie original $\{x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t\}$, es decir:

$$y_t = x_{t-1} - x_t = \nabla x_{t+1}$$

El operador diferencia de primer orden actualmente es usado en algunas series económicas, siempre y cuando, estas series no sean de niveles, ya que al tomar la primera diferencia se puede perder la valiosa relación de largo plazo que tienen estas variables en niveles. La mayor parte de la teoría económica se postula con base en relaciones de largo plazo entre las variables en niveles.

Ocasionalmente el operador de segundo orden será ocupado, y está dado por:

$$\nabla^2 x_{t+2} = \nabla x_{t+2} - \nabla x_{t+1} = x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t, \forall t$$

3.1.3 Fluctuaciones estacionales

El análisis de series de tiempo con fluctuaciones estacionales depende de lo que se desea hacer:

- a) Medir la estacionalidad.
- b) Eliminarla.

Para series que muestran una tendencia pequeña, es adecuado un simple cálculo de promedio para cada mes y compararlo con el resto de los promedios, Para series mensuales que tienen una tendencia sustanciosa, la manera más común de eliminar el efecto estacional es calculando:

$$Sm(x_t) = \frac{\frac{x_{t-6}}{2} + x_{t-5} + \dots + x_{t+5} + \frac{x_{t+6}}{2}}{12}$$

Para datos trimestrales el efecto estacional puede ser eliminado, calculando:

$$Sm(x_t) = \frac{\frac{x_{t-2}}{2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \frac{x_{t+2}}{2}}{4}$$

Es importante observar que en ambos casos la suma de los coeficientes es uno.

El efecto estacional puede ser calculado como $x_t - Sm(x_t)$ ó $\frac{x_t}{Sm(x_t)}$ dependiendo si el efecto estacional es aditivo o multiplicativo. Si la variación estacional se mantiene aproximadamente en el mismo nivel sin tomar en cuenta el nivel de la media, entonces se dice que es aditiva, pero si se incrementa de forma directamente proporcional al nivel de la media, se dirá que es multiplicativa. La gráfica indicará que descripción es mejor.

Como ya se había comentado, un efecto estacional puede ser eliminado a través de un operador diferencial, por ejemplo para datos trimestrales se utiliza el operador ∇_{12} donde:

$$\nabla_4 x_t = x_t - x_{t-4}$$

3.1.4 Autocorrelación

El término auto correlación se puede definir como la correlación entre miembros de series de observaciones ordenadas en el tiempo. Algunas causas son las siguientes:

- a) **Inercia.** Una característica relevante de la mayoría de las series de tiempo económicas es la inercia o lentitud. Como bien se sabe, las series de tiempo tales como el Producto Nacional Bruto, los índices de precios, la producción, el empleo y el desempleo, presentan ciclos económicos. Empezando en el fondo de la recesión, cuando se inicia la recuperación económica, la mayoría de estas series empieza a moverse hacia arriba. En este movimiento hacia arriba, el valor de una serie en un punto del tiempo es mayor que su valor anterior, así, hay un "momentum" construido en ellas y éste continuará hasta que algo suceda (por ejemplo, un aumento en la tasa de interés o en los impuestos o ámbos) para reducirlo.

- b) **Fenómeno de la telaraña.** La oferta de muchos productos agrícolas refleja el llamado fenómeno de la telaraña en donde la oferta reacciona al precio con un rezago de un periodo de tiempo debido a que la implementación de las decisiones de oferta toman tiempo (periodo de gestación). Por lo tanto, en la siembra de cosechas al principio de este año, los agricultores están influenciados por el precio del año anterior. Supóngase que al final del periodo t , el precio P_t resulta ser inferior a P_{t-1} . Por consiguiente, es muy probable que los agricultores decidan producir en el periodo $t+1$ menos de lo que produjeron en el periodo t . Si los agricultores producen excedentes en el año t , es probable que reduzcan su producción en $t+1$ y así sucesivamente, conduciendo a un patrón de telaraña.
- c) **Manipulación de datos.** En el análisis empírico, los datos simples son frecuentemente “manipulados”. Por ejemplo, las series de tiempo que contienen información trimestral, que por lo general se obtiene de información mensual, agregando simplemente las observaciones de tres meses y dividiendo entre 3. Este procedimiento de promediar las cifras introduce cierto suavizamiento en los datos al eliminar las fluctuaciones en la información mensual. Por consiguiente, la gráfica referente a la información trimestral aparece mucho más suave que la que contiene información mensual y este suavizamiento puede, en sí mismo, introducir a un patrón sistemático en la parte considerada como aleatoria, introduciendo con esto autocorrelación. Otra fuente de manipulación es la interpolación o extrapolación de la información. Todas estas técnicas de “manejo” pueden imponer sobre la información un patrón sistemático que pudiera no estar presente en la información original.

Como en las series de tiempo, la información está ordenada en orden cronológico, es probable que haya interrelaciones entre las observaciones sucesivas, especialmente si el intervalo de tiempo entre éstas es corto, como por ejemplo un día o una semana en lugar de un mes o un año.

Debe mencionarse que la autocorrelación puede ser positiva o negativa, aunque la mayoría de las series de tiempo económicas presentan autocorrelación positiva porque se mueven hacia arriba o hacia abajo durante periodos prolongados.

Una importante guía acerca de las propiedades de una serie de tiempo está dada por las series de coeficientes de autocorrelación, que miden la correlación entre las observaciones a diferentes distancias. Estos coeficientes nos dan idea del modelo de probabilidad que genera los datos.

El coeficiente de correlación entre 2 variables está dado por:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}$$

Una idea similar se aplica en las series de tiempo, para ver la correlación entre observaciones sucesivas (ver A.2).

3.2 Procesos estocásticos para modelar series de tiempo

La mayoría de los procesos físicos en el mundo real contienen un elemento aleatorio o estocástico en su estructura, un proceso estocástico puede ser descrito como “un fenómeno estadístico que se desarrolla a través del tiempo de acuerdo a reglas de probabilidad”. La palabra “estocástico” es de origen griego y significa “perteneciente al azar”.

Matemáticamente, un proceso estocástico se define como una colección de variables aleatorias $\{x(t), t \in T\}$, donde T es un conjunto de puntos en el tiempo en los cuales el proceso está definido. Por lo que un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias que están ordenadas en el tiempo.

Cualquier serie de tiempo puede ser generada por un proceso estocástico o aleatorio y un conjunto concreto de información, que puede ser considerado como una realización (particular) del proceso estocástico subyacente. La distinción entre un proceso estocástico y su realización es semejante a la distinción entre la información poblacional y muestral. De la misma manera como se utiliza información muestral para inferir sobre una población, en las series de tiempo se utiliza la realización para inferir sobre el proceso estocástico subyacente.

En el análisis de series de tiempo se supondrá que no se tiene más de una observación al tiempo t, por lo que se tiene una observación de la variable aleatoria al tiempo t. Sin embargo se debe considerar a una serie de tiempo sólo como un ejemplo del conjunto infinito de series de tiempo que pueden ser observadas, cada elemento de este conjunto infinito es una posible realización del proceso estocástico.

Cada observación puede ser vista como una realización particular, la cual se denota como $x(t)$ para $(0 \leq t \leq T)$ si las observaciones son continuas, y como x_t para $t = 1, 2, \dots, n$ si son discretas.

Como hay solamente una población en mente, el análisis de series de tiempo está esencialmente relacionado con la evaluación de la descripción de las propiedades del modelo de probabilidad que genera la serie de tiempo observada.

Una forma de describir un proceso estocástico es especificando la función de probabilidad conjunta de X_{t_1}, \dots, X_{t_n} para cualquier conjunto de tiempos $t_1, \dots, t_n \forall n$. Lo cual es complicado y no se usa en la práctica. Otra forma más fácil y útil para describir un proceso estocástico es obtener los momentos del proceso, especialmente el primero y el segundo, es decir, las funciones de la media, la varianza y la autocovarianza. Definidas para tiempo discreto:

Media: La función media:

$$\mu(t) = E(X_t)$$

Varianza: La función varianza:

$$\sigma^2(t) = Var(X_t)$$

Autocovarianza²⁴: La función autocovarianza (f.acv):

$$\gamma(t_1, t_2) = Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E\{[X_{t_1} - \mu(t_1)][X_{t_2} - \mu(t_2)]\}$$

es importante decir que la función varianza es un caso especial de la f.acv cuando $t_1=t_2$.

3.2.1 Proceso Estacionario

El análisis de series de tiempo supone implícitamente que la serie de tiempo en la cual se basa es estacionaria. En la práctica la mayoría de las series de tiempo económicas son no estacionarias.

Se dice que una serie de tiempo es estrictamente estacionaria si la distribución conjunta de $X(t_1), \dots, X(t_n)$ es la misma que la distribución conjunta de $X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau), \forall t_{i=1, \dots, n}, \tau$. En otras palabras el trasladar el origen τ unidades no tendrá efecto en las distribuciones conjuntas que dependen solamente de los intervalos entre $t_1, \dots, t_n \forall n$. En particular si $n=1 \Rightarrow$ la distribución de $X(t), \forall t$ debe ser la misma $\Rightarrow \mu(t) = \mu, \sigma^2(t) = \sigma^2$ son constantes, y no dependen del valor de t .

Más aún si $n=2$, la distribución conjunta de $X(t_1)$ y $X(t_2)$ depende solamente de t_2-t_1 que es llamado *lag* o retraso. De esta manera la f. acv también depende solo de t_2-t_1 y puede ser expresada como $\gamma(t_2 - t_1)$, donde:

²⁴ Se sabe que si X y Y son dos variables aleatorias entonces la covarianza de X y Y está definida por:

$$Cov(x, y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Si X y Y son variables aleatorias del mismo proceso estocástico en diferentes tiempos, entonces el coeficiente de covarianza es llamado un coeficiente de autocovarianza y el coeficiente de correlación es llamado coeficiente de autocorrelación.

$\gamma(t_2 - t_1) = E\{[X_{t_1} - \mu][X_{t_2} - \mu]\}$ que es el coeficiente de autocovarianza en el retraso $t_2 - t_1$. De forma general la f. acv en el retraso τ , es la covarianza entre los valores de X_t y $X_{t+\tau}$, es decir, entre dos valores X que están separados τ periodos, y es de la forma:

$$\gamma(\tau) = E\{[X_t - \mu][X_{t+\tau} - \mu]\}$$

Si $\tau = 0$, se obtiene $\gamma(0)$, que es simplemente la varianza de X , o sea σ_X^2 ; si $\tau = 1$, $\gamma(1)$ es la covarianza entre dos valores adyacentes de X .

El tamaño de los coeficientes de autocovarianza depende de las unidades en las cuales está medido $X(t)$, por lo que para fines de interpretación conviene estandarizar a la f.acv., dividiendo entre la varianza, originando con esto a la función de autocorrelación (f.ac) que está dada por $\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$, el cual mide la autocorrelación entre $X(t)$ y $X(t + \tau)$.

Es importante observar que tanto $\gamma(\tau)$ como $\rho(\tau)$, por ser funciones de $X(t)$, son discretas si la serie de tiempo es discreta y continuas si la serie de tiempo es continua.

3.2.1.1 Proceso estacionario de segundo orden

Un proceso será estacionario de segundo orden, si su media es constante y su f. acv depende solamente del retraso τ , es decir:

$$E[X(t)] = \mu \text{ y } Cov[X(t), X(t + \tau)] = \gamma(\tau)$$

Lo anterior implica que la varianza, al igual que la media, es constante y finita. No se hacen suposiciones acerca de momentos superiores a los de segundo orden.

En otras palabras se dice que un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende solamente de la distancia o retraso entre estos dos periodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza. Si una serie de tiempo no es estacionaria en este sentido, se denomina una serie de tiempo no estacionaria.

Una clase importante de procesos donde esto es particularmente cierto es la clase de procesos normales, esto sucede debido a que su distribución conjunta es una normal multivariada, la cual está completamente caracterizada por su primer y segundo momento, y por lo tanto por $\mu(t)$ y $\gamma(t_1, t_2)$, y como el proceso es estacionario, $\mu(t)$ es constante y $\gamma(t_1, t_2)$ es una función exclusiva de τ . En el caso de que el proceso sea muy no normal; μ y $\gamma(t)$ pueden no ser adecuadas para describir el proceso.

3.1.1.2 Pruebas de estacionariedad

Existen diferentes formas de determinar si un proceso estocástico es estacionario o no estacionario, a continuación se muestran dos de las formas más comunes y sencillas para poder determinar o rechazar la estacionariedad de un proceso.

1) Función de autocorrelación

Así como los coeficientes de autocorrelación son un útil conjunto de estadísticas para describir una serie de tiempo, de forma similar la función de autocorrelación (f.ac) de un proceso estocástico estacionario es una importante herramienta para evaluar sus propiedades (ver Apéndice, A.3).

La función de autocorrelación describe la evolución de un proceso a través del tiempo. La inferencia realizada con esta función se llama *análisis en el dominio del tiempo*.

2) Estadísticas Box-Pierce (Q) y Ljung-Box (LB)

Para hacer una prueba más formal, la significancia estadística de cualquier $\rho(\tau)$ puede ser evaluada por su desviación estándar. Bartlett demostró que si una serie de tiempo es puramente aleatoria, los coeficientes de autocorrelación están distribuidos en forma aproximadamente normal con media cero y varianza $\frac{1}{N}$, donde N es el tamaño de la muestra. Entonces siguiendo las propiedades de la distribución normal estándar, con un intervalo de confianza al 95% para cualquier $\rho(\tau)$ será $\pm 1.96 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$ a cualquier lado del cero. Así, si un $\rho(\tau)$ estimado se encuentra de este intervalo, no se rechaza la hipótesis de que el verdadero $\rho(\tau)$ es cero. Pero si se encuentra por fuera de este intervalo de confianza, entonces se puede rechazar la hipótesis de que el verdadero $\rho(\tau)$ sea cero.

Para probar la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación $\rho(\tau)$ son simultáneamente iguales a cero, se puede utilizar la estadística Q desarrollada por Box y Pierce en 1970, que está definida como:

$$Q = N \sum_{\tau=1}^m \rho^2(\tau)$$

donde:

N : Tamaño de la muestra.

m : Longitud máxima del retraso.

la estadística Q se distribuye aproximadamente como una ji-cuadrada con m grados de libertad. Si la Q calculada excede el valor Q crítico de la tabla ji-cuadrada al nivel de significancia seleccionado, se puede rechazar la hipótesis nula de que todos los $\rho(\tau)$ son iguales a cero; por lo menos algunos de ellos deben ser diferentes de cero.

una variante de la Q de Box-Pierce es la estadística Ljung-Box (LB) que está definida como:

$$LB = N(N+2) \sum_{\tau=1}^m \left(\frac{\rho^2(\tau)}{N-\tau} \right) \sim \chi_m^2$$

Aunque en muestras grandes tanto la Q como LB siguen la distribución ji-cuadrada con m grados de libertad, se ha encontrado que la estadística LB posee mejores propiedades que la estadística Q.

3.2.2 Proceso aleatorio puro

Un proceso discreto $\{Z_T\}$ se denomina proceso aleatorio puro si las variables de la sucesión $\{Z_T\}$ son variables aleatorias mutuamente independientes e idénticamente distribuidas. De la definición se sigue que el proceso tiene media y varianza constantes y que:

$$\gamma(k) = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = 0, \forall k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Con la media y la f. acv no dependen del tiempo, por lo que el proceso es estacionario. De hecho es claro que el proceso es estrictamente estacionario, ya que la f.ac está dada por:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Un proceso aleatorio puro, en términos de ingeniería, también se conoce como ruido blanco. Los procesos de este tipo son muy útiles, sobre todo como componentes de procesos tales como procesos de promedios móviles.

Existe controversia de si es posible tener un proceso aleatorio puro en tiempo continuo. Tal proceso tendría una f.ac dada por:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

La cual es una función discontinua. Puede demostrarse que tal proceso tendrá varianza infinita, y es un fenómeno físicamente irrealizable. De hecho, es una idealización matemática usada para propósitos teóricos, y es una aproximación para ciertos procesos que ocurren en la práctica, tales como las fluctuaciones del voltaje en un conductor ocasionadas por ruido terminal, y los impulsos que actúan sobre una partícula suspendida en un fluido que producen un movimiento Browniano.

Cox y Miller (1968), señalaron que se puede encontrar una aproximación al ruido blanco considerando cualquiera de los siguientes puntos:

- a) A un proceso continuo con f.ac $\rho(t) = e^{-\lambda|t|}$ y haciendo $\lambda \rightarrow \infty$, con lo que la f.ac disminuirá rápidamente.
- b) A un proceso aleatorio puro discreto en intervalos $\Delta t \rightarrow 0$.

De forma general, se debe considerar como ruido blanco continuo a cualquier señal ocasionada por la superposición de un gran número de efectos independientes con duración breve, los cuales parecen comportarse como ruido blanco continuo cuando se realiza muestreo en intervalos discretos.

3.2.3 Caminata aleatoria

Sea $\{Z_T\}$ un proceso discreto aleatorio puro, con media μ y varianza σ_Z^2 . El proceso $\{X_T\}$ se dirá que es una caminata aleatoria si:

$$X_t = X_{t-1} + Z_t$$

En el modelo de caminata aleatoria, el valor de X en el tiempo t es igual a su valor en el tiempo (t-1) más un choque aleatorio. Sea $X_0=0$ en el tiempo t=0, de tal manera que:

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z_1 \\
X_2 &= X_1 + Z_2 = Z_1 + Z_2 \\
X_3 &= X_2 + Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3
\end{aligned}$$

•
•
•

$$X_t = X_{t-1} + Z_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{t-1} + Z_t$$

y en general,

$$X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$$

De esta expresión se sigue que:

$$E[X_t] = E\left[\sum_{i=1}^t Z_i\right] = t\mu$$

$$Var[X_t] = Var\left[\sum_{i=1}^t Z_i\right] = t\sigma_Z^2$$

Como la media y la varianza dependen de t , entonces el proceso no es estacionario. Sin embargo, $X_t - X_{t-1} = Z_t$ es un proceso puramente aleatorio, es decir, las primeras diferencias de una serie de tiempo de caminata aleatoria son estacionarias. Ahora bien, si una serie de tiempo ha sido diferenciada una vez y la serie diferenciada resulta ser estacionaria, se dice que la serie original es integrada de orden 1. En forma similar, si la serie original debe ser diferenciada dos veces para hacerla estacionaria, se dice que la serie original es integrada de orden 2, y así sucesivamente.

Los precios de los bonos emitidos por el Gobierno Federal esta son no estacionarios, debido a que son un ejemplo de caminata aleatoria, ya que:

$$P_t = P_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde:

P_t : Precio al día t .

P_{t-1} : Precio al día $t-1$.

ε_t : Error aleatorio.

3.2.4 Prueba de raíz unitaria

Una prueba alternativa sobre estacionariedad es la prueba de raíz unitaria. La forma más sencilla de introducir esta prueba es considerar el siguiente modelo:

$$X_t = \delta X_{t-1} + Z_t$$

donde Z_t es el término de error estocástico con media cero, varianza constante σ^2 y no está correlacionado, es decir, es un término de error ruido blanco. Ahora bien, si el coeficiente de X_{t-1} es en realidad igual a uno, surge lo que se conoce como el problema de raíz unitaria, es decir, se trata de una caminata aleatoria, y por tanto es un proceso no estacionario. Si se encuentra que una serie de tiempo dada, posee una raíz unitaria, se puede concluir que dicha serie de tiempo presenta una tendencia estocástica. Si ésta no tiene una raíz unitaria, la serie de tiempo presenta una tendencia determinística.

3.2.5 Procesos de promedios móviles (MA)

Los modelos de promedios móviles fueron propuestos por Yule (1926) y Slutsky (1927). El punto clave de este proceso es, que representa a un proceso estocástico $\{Z_t\}$ como una suma finita ponderada de choques aleatorios independientes.

Sea $\{Z_t\}$ un proceso aleatorio puro, con media cero y varianza σ_z^2 . El proceso $\{X_t\}$ se irá que es un proceso de promedios móviles de orden m , MA (m), sí:

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_m Z_{t-m} \quad (3.1)$$

donde $\{\beta_i\}$ son constantes, y representan las ponderaciones (parámetros de promedios móviles) asociados con los choques aleatorios en los periodos $t-1, t-2, \dots, t-m$, respectivamente, por lo regular $\beta_0 = 1$.

El término de promedios móviles parece seguir que el modelo se obtiene como un promedio de los choques aleatorios que intervienen, pero esto no sucede puesto que los parámetros no tienen necesariamente que ser positivos, ni su suma debe ser la unidad, como requeriría un promedio. Se obtiene fácilmente que:

$$E[X_t] = 0$$

$$Var[X_t] = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^m \beta_i^2$$

También:

$$\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t+k}) = Cov(\beta_0 Z_t + \dots + \beta_m Z_{t-m}, \beta_0 Z_{t+k} + \dots + \beta_m Z_{t+k-m})$$

Por lo anterior:

$$\gamma(k) = \begin{cases} 0, & k > m \\ \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{m-k} \beta_i \beta_{i+k}, & k = 0, 1, \dots, m \\ \gamma(-k), & k < 0 \end{cases}$$

Puesto que:

$$Cov(Z_s, Z_t) = \begin{cases} \sigma_z^2, & s = t \\ 0, & s \neq t \end{cases}$$

Como $\gamma(k)$ no depende de t y la media es constante, el proceso es estacionario de segundo orden para todos los valores de $\{\beta_i\}$. Más aún, si las Z 's se distribuyen de forma normal, se obtiene un proceso normal completamente determinado por su media y su f.acv, por lo que el proceso será estrictamente estacionario.

La función de autocorrelación del proceso de promedios móviles está dada por:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{m-k} \beta_i \beta_{i+k}}{\sum_{i=0}^m \beta_i^2}, & k = 1, \dots, m \\ 0, & k > m \\ \rho(-k), & k < 0 \end{cases}$$

En particular, para el proceso de promedios móviles de primer orden, se tiene que:

$$X_t = Z_t + \beta Z_{t-1}$$

De donde se obtiene:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\beta}{(1 + \beta^2)}, & k = \pm 1 \\ 0, & c.o.c \end{cases}$$

El hecho que las autocorrelaciones para retrasos mayores que un promedio sean cero, indica que el proceso MA(1) no recuerda más allá de lo ocurrido en el periodo anterior, es decir tiene una memoria limitada a un solo periodo.

Aunque no se requieren restricciones de $\{\beta_i\}$ para que un proceso MA sea estacionario, Box y Jenkins (1970) propusieron restricciones de $\{\beta_i\}$ para que el proceso sea invertible. Un proceso invertible, es aquel en que aunque se tomen como nuevos coeficientes los recíprocos de sus coeficientes $\{\beta_i\}$, este nuevo proceso tendrá la misma f.ac que el primero, por ejemplo:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad \dots A$$

$$X_t = Z_t + \frac{1}{\theta} Z_{t-1} \quad \dots B$$

Tanto A como B tienen exactamente la misma f.ac, por lo que es imposible identificar un proceso MA únicamente por su f. ac, por lo tanto, las condiciones de invertibilidad permitirán asociar un proceso MA a solo una f.ac.

Las condiciones de invertibilidad del proceso de la ecuación (3.1) según el teorema de Schur, para que el proceso MA (m) sea invertible, se requiere que los m determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \beta_m \\ \beta_m & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \beta_m & \beta_{m-1} \\ \beta_1 & -1 & 0 & \beta_m \\ \beta_m & 0 & -1 & \beta_1 \\ \beta_{m-1} & \beta_m & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

•
•
•

$$D_m = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \beta_m & \beta_{m-1} & \dots & \beta_1 \\ \beta_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \beta_m & \dots & \beta_2 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \beta_{m-1} & \beta_{m-2} & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & \beta_m \\ \beta_m & 0 & \dots & 0 & -1 & \beta_1 & \dots & \beta_{m-1} \\ \beta_{m-1} & \beta_m & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & \beta_{m-2} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Sean todos positivos, es decir, bastará que uno de ellos no sea positivo para concluir que el proceso no es invertible.

También existen restricciones sobre los posibles valores de las autocorrelaciones, los cuales fueron generalizados por Davies, Pate y Frost (1974) para procesos MA (m) y se pueden expresar como:

$$|\rho_k| \leq \begin{cases} \cos\left[\frac{\pi}{M+1}\right] & \text{si } k \text{ es divisor de } m+1 \\ \cos\left[\frac{\pi}{M+2}\right] & \text{c.o.c} \end{cases}$$

En donde M es el mayor entero menor o igual a $\frac{m+1}{k}$.

El proceso de MA se usa en muchas áreas, especialmente en econometría. Por ejemplo los indicadores económicos son afectados por eventos aleatorios como decisiones gubernamentales, devaluaciones, conflictos, escasez de productos básicos, etc. Estos eventos, no tienen solamente un efecto inmediato, sino que afectan periodos subsecuentes, por lo que es apropiado utilizar MA.

En resumen, un proceso de promedios móviles es sencillamente una combinación lineal de choques aleatorios, tales choques no necesariamente se asimilan de manera instantánea, sino que pueden seguir causando efectos aún después de transcurrido un cierto número de periodos, y además la intensidad del choque se refleja en el valor de su ponderación β_i . Así mismo, todo proceso MA es estacionario.

3.2.6 Procesos autorregresivos (AR)

Sea $\{Z_T\}$ un proceso aleatorio puro, con media cero y varianza σ_Z^2 . El proceso $\{X_T\}$ se dirá que es un proceso autorregresivo de orden m , sí:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_m X_{t-m} + Z_t \quad (3.2)$$

Esto es muy parecido a un modelo de regresión múltiple, ya que el valor de la variable dependiente X_t depende, no de los valores de un cierto conjunto de variables independientes, sino de sus propios valores observados en periodos anteriores a t y ponderados de acuerdo con los coeficientes autorregresivos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. De aquí se deriva el nombre de proceso autorregresivo.

Un proceso AR podrá ser estacionario o no ser estacionario, dependiendo de los valores que tomen las raíces de la ecuación característica $\alpha(x) = 0$, la cual describe el comportamiento del proceso autorregresivo. El caso general de la ecuación en diferencia puede escribirse como:

$$\alpha(B) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_p B)$$

De tal manera que el proceso AR por $\alpha(B)$ será estacionario siempre y cuando $|g_i| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, p$, o dicho de otra manera, sí y solo sí las raíces de $\alpha(X) = 0$, que son $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_p^{-1}$, se encuentran fuera del círculo unitario.

a) Proceso de primer orden cuando $m=1$:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + Z_t \quad (3.3)$$

Este proceso también es conocido como Proceso de Markov. Este proceso dice que el valor del pronóstico de X en el periodo t es simplemente una proporción α de su valor en el periodo $t-1$ más un “shock” o perturbación en el tiempo t .

Sustituyendo de forma sucesiva en la ecuación (3.3), se obtiene:

$$X_t = \alpha_1[\alpha X_{t-2} + Z_{t-1}] + Z_t = \alpha^2[\alpha X_{t-3} + Z_{t-2}] + \alpha Z_{t-1} + Z_t$$

Con lo cual se encuentra que X_t puede ser expresado como un proceso MA de orden infinito, es decir:

$$X_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots \text{ si } -1 < \alpha < 1$$

Esta relación entre los procesos MA y AR es útil para varios propósitos, por lo cual se retomará este punto más adelante.

Otra forma de encontrar esta relación es, en vez de sustituir de forma simultánea, se usa un operador de retraso B , por lo que la ecuación (3.3) se puede escribir de la siguiente forma:

$$(1 - \alpha B)X_t = Z_t \Rightarrow X_t = \frac{Z_t}{(1 - \alpha B)} = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots)Z_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots$$

de aquí que:

$$E[X_t] = 0$$

$$Var[X_t] = \sigma_Z^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)$$

por lo que la varianza será finita con $|\alpha| < 1$, en ese caso:

$$Var[X_t] = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \alpha^2} = \sigma_X^2$$

la f.acv está dada por:

$$\gamma(k) = E\{X_t X_{t+k}\} = E\left\{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Z_{t-i}\right] \left[\sum_{j=i+k}^{\infty} \alpha^j Z_{t+k-j}\right]\right\} = \sigma_Z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \alpha^{k+i}, \forall k \geq 0$$

la cual converge cuando $|\alpha| < 1$ a:

$$\gamma(k) = \frac{\alpha^k \sigma_Z^2}{1 - \alpha^2} = \alpha^k \sigma_X^2$$

para $k < 0$ se tiene que $\gamma(k) = \gamma(-k)$. Debido que $\gamma(k)$ no depende de t , un proceso de AR de orden 1, es estacionario siempre y cuando $|\alpha| < 1$. La f.ac está dada por:

$$\rho(k) = \alpha^k, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

o bien:

$$\rho(k) = \alpha^{|k|}, \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

de esta expresión resulta que, conforme $k > 0$ crece, la f.ac tiende a cero, cayendo de forma exponencial cuando $0 < \alpha < 1$ y con signos alternados cuando $-1 < \alpha < 0$.

Existe una forma más sencilla de obtener la f.ac, suponiendo a priori que el proceso es estacionario, por lo que $E[X_t] = 0$. Multiplicando la ecuación (3.3) por X_{t-k} y tomando esperanzas en ambos miembros de la ecuación, se obtiene que para $k > 0$:

$$\gamma(-k) = \alpha\gamma(-k+1)$$

debido a que $E[Z_t X_{t-k}] = 0$ para $k > 0$. Y como $\gamma(k)$ es simétrica con respecto al retraso, se tiene:

$$\gamma(k) = \alpha\gamma(k-1), \forall k > 0$$

Si $\gamma(0) = \sigma_x^2$, y $\gamma(k) = \alpha^k \sigma_x^2, \forall k \geq 0 \Rightarrow \rho(k) = \alpha^k, \forall k \geq 0$. Como $|\rho(k)| \leq 1$, se tiene que $|\alpha| < 1$. Pero si $|\alpha| = 1 \Rightarrow |\rho(k)| = 1, \forall k$, lo cual es un caso degenerado. Por lo que $|\alpha| < 1$ es la adecuada para un proceso estacionario.

El método anterior para obtener la f.ac es usado normalmente, también es válido dicho método involucrando el supuesto inicial de estacionariedad.

- b) Caso de orden general: así como en el caso de primer orden, en el que se puede expresar un proceso AR de orden finito como un proceso MA de orden infinito con sustituciones sucesivas o usando el operador de retraso, la ecuación (3.2) se puede escribir como:

$$(1 + \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m) X_t = Z_t \Rightarrow X_t = \frac{Z_t}{(1 + \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m)} = f(B) Z_t$$

donde:

$$f(B) = (1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m)^{-1} = (1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \dots)$$

una vez expresada X_t como un proceso de MA, se sigue que $E[X_t] = 0$. La varianza es finita, dado que $\sum \beta_i^2$ converge y es necesaria la condición de estacionariedad. La f.acv está dada por:

$$\gamma(k) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \beta_{i+k}$$

una condición suficiente para que $\gamma(k)$ converja es que $\left| \sum \beta_i \right|$ converja, al cumplirse esta condición el proceso será estacionario.

En principio se puede calcular la f.ac, usando el siguiente procedimiento: suponiendo que el proceso es estacionario, se multiplica a la ecuación (3.2) por X_{t-k} , luego de calcular las esperanzas, dividir entre σ_x^2 suponiendo que la varianza de X_t es finita, Después, usando la propiedad de que $\rho(k) = \rho(-k), \forall k$, se llega a que:

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \dots + \alpha_m \rho(k-m), \forall k > 0$$

El proceso de AR debe ser aplicado en los casos que se pueda suponer que el valor presente de la serie de tiempo depende del valor inmediato anterior junto con un error aleatorio. Por simplicidad solamente se consideró el proceso con media cero, pero en el caso de que la media es diferente de cero se puede reescribir la ecuación (3.2) como:

$$X_t - \mu = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \dots + \alpha_m (X_{t-m} - \mu) + Z_t$$

la expresión anterior no afectará a la f.ac.

En la práctica, el Teorema de Schur se utiliza para saber si un proceso AR es estacionario en términos de los parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Se dirá que un proceso AR es estacionario si, sin excepción alguna, los m determinantes son positivos:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & \alpha_m \\ \alpha_m & -1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \alpha_m & \alpha_{m-1} \\ \alpha_1 & -1 & 0 & \alpha_m \\ \alpha_m & 0 & -1 & \alpha_1 \\ \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

•
•
•

$$D_m = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \alpha_m & \dots & \alpha_2 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \alpha_{m-1} & \alpha_{m-2} & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_m & 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-1} & \alpha_m & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & \alpha_{m-2} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Si el proceso AR(m) resulta ser estacionario, es posible representarlo como una suma ponderada infinita de choques aleatorios, es decir como un MA(∞):

$$X_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots$$

donde:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = c < \infty$$

3.2.7 Proceso lineal general

El proceso MA de orden infinito con media distinta de cero está dada por:

$$X_t - \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i Z_{t-i}$$

Es llamado proceso lineal general, debido que los procesos de este tipo pueden ser obtenidos convirtiendo un proceso aleatorio en un sistema lineal, tanto los procesos MA como AR son casos especiales del proceso lineal general y la dualidad entre estos dos procesos es fácil demostrarla usando el operador diferencia. Un proceso MA de orden finito puede ser expresado como un proceso AR de orden infinito, así como un proceso AR de orden finito puede escribirse como un proceso MA de orden infinito.

3.2.8 Modelos ARMA y ARIMA

3.2.8.1 Modelos mixtos (ARMA)

Una generalización de los procesos AR y MA previamente descritos, consiste en combinarlos para obtener lo que se conoce como modelos autorregresivos y de promedios móviles, los cuales fueron estudiados por Wold (1938) y Bartlett (1946). Esta generalización surge del hecho de que en las series de tiempo que se observan en la práctica muchas veces presentan características tanto de procesos AR como de procesos MA.

Un modelo autorregresivo-promedio móviles (abreviado como ARMA) que contiene p términos AR y q términos MA, se dice que es de orden (p,q) y está dado por:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_q Z_{t-q} \quad (3.4)$$

Usando el operador de retraso B , la ecuación (3.4) se puede escribir como:

$$\varphi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

donde $\varphi(B), \theta(B)$ son polinomios de orden p y q respectivamente, tales que:

$$\varphi(B) = 1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q$$

los valores de $\{\alpha_i\}$ que hacen al proceso estacionario, son las raíces de $\varphi(B) = 0$ que están fuera del círculo unitario. Los valores de $\{\beta_i\}$ que hacen el proceso invertible son las raíces de $\theta(B) = 0$ que están fuera del círculo unitario.

La importancia de los procesos ARMA radica en el hecho de que una serie de tiempo estacionaria puede ser generalmente expresada como un modelo ARMA involucrando menos parámetros que los procesos MA o AR.

Granger y Morris (1976) presentan algunos casos especiales de procesos ARMA que surgen al considerar:

- i) Series obtenidas por agregación de componentes (por ejemplo los intereses devengados de la cartera de crédito).
- ii) Series en donde los datos contienen errores de observación.

Si X_t satisface la relación:

$$X_t = Y_{1t} + Y_{2t}$$

donde Y_{1t} y Y_{2t} son dos procesos estacionarios (individuales), independientes y con media cero; entonces el proceso (combinado) X_t estará determinado como se indica en el cuadro 3.1:

Cuadro 3.1: Construcción del proceso combinado

Y_{1t}	Y_{2t}	X_t
$AR(p)$	Ruido blanco	$ARMA(p, p)$
$AR(p_1)$	$AR(p_2)$	$ARMA(p_1 + p_2, \max\{p_1, p_2\})$
$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p, p + q)$
$MA(q)$	Ruido blanco	$ARMA(0, q)$
$MA(q_1)$	$MA(q_2)$	$ARMA(0, \max\{q_1, q_2\})$
$ARMA(p, q)$	Ruido blanco	$ARMA(p, \max\{p, q\})$

Fuente: Elaboración propia.

Hasta ahora se ha centrado la exposición en modelos que son estacionarios, pero en la práctica lo más común es que las series sean no estacionarias, ya sea porque exhiben algún tipo de tendencia, porque su varianza no es constante o porque están influenciadas por algún factor de tipo semideterminístico, como puede ser la estacionariedad. Si el problema que se aprecia es por tendencia (cambio en la media), ésta puede eliminarse mediante la aplicación del operador diferencia, dando origen a los modelos ARIMA. Por otro lado si la no estacionariedad se debe también a que la varianza no es constante, quizá la causa sea que en cada punto de observación t , la variable X_t tiene varianza σ_t^2 la cual es función de su media μ_t , si esto ocurre, Bartlett recomienda hacer una transformación del tipo:

$$Y_t = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log(X_t), & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

esta transformación puede ser útil para estabilizar la varianza de la serie, antes de eliminar el cambio en la media.

3.2.8.2 Modelos integrados (ARIMA)

En la práctica la mayoría de las series de tiempo son no estacionarias. Con el propósito de ajustar un modelo estacionario es necesario remover las variaciones no estacionarias según Yaglom (1955), si la serie de tiempo observada es no estacionaria en la media, se puede aplicar el operador diferencia, ésta aproximación es ampliamente utilizada en econometría. Si X_t se remplazara por $\nabla^d X_t$ en la ecuación (3.4), se obtiene un modelo capaz de describir a ciertos tipos de series de tiempo no estacionarias. Por lo cual el modelo se llama integrado debido a que el modelo estacionario es ajustado a datos obtenidos por el operador diferencia, es decir el operador diferencia debe ser integrado para datos no estacionarios.

Escribiendo $W_t = \nabla^d X_t$, el proceso autorregresivo integrado de medias móviles (ARIMA) es:

$$W_t = \alpha_1 W_{t-1} + \dots + \alpha_p W_{t-p} + Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_q Z_{t-q}$$

en resumen, si se debe diferenciar una serie de tiempo d veces para hacerla estacionaria y luego aplicarle ésta el modelo ARMA(p,q), entonces se hablará de un modelo ARIMA(p,d,q), donde p denota el número de términos autorregresivos, d el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerse estacionaria y q el número de términos de promedios móviles.

Es interesante notar que la caminata aleatoria es un ejemplo particular de un proceso ARIMA, donde $\nabla X_t = Z_t$.

3.2.8.3 Modelos ARIMA para series estacionarias

Conviene extender la aplicabilidad de los modelos ARIMA para cubrir la necesidad de análisis de las series de tiempo estacionarias las cuales aparecen con gran frecuencia en la práctica. Por una serie estacionaria se entenderá una serie de tiempo que, aparte de contener una tendencia de larga duración, muestre fluctuaciones que se repiten anualmente, quizá con cambios graduales a través de los años. Muchas series de tiempo tienen un componente estacional periódico, que se repite cada s observaciones, es decir, cada intervalo de tiempo determinado. Por comodidad, se consideran observaciones mensuales donde $s=12$.

Si se tiene información mensual y al calcular el coeficiente de autocorrelación al retraso 12 se obtiene un valor cercano o igual a uno, esto indicará estacionariedad; o bien, si el coeficiente no resultara ser significativamente distinto de cero, esto indicaría que los meses no están relacionados con su respectivo mes del año anterior, por lo que dichos datos serían no estacionarios. Para series estacionarias, la estacionariedad puede detectarse identificando a los coeficientes de autocorrelación de retrasos mayores a 3, que sean significativamente mayores que cero, fijándose en los coeficientes más grandes.

Por lo tanto, se establece como regla primero hacer la serie estacionaria y luego determinar si existe o no estacionariedad, porque si no la serie no estacionaria podría aparentar una estacionariedad no existente, o bien ocultar a una presente. Cuando la tendencia en comparación con la estacionariedad, es mucho más fuerte, entonces los coeficientes de autocorrelación de la serie original al ser gratificados disminuyen de forma lineal.

Muchas series de tiempo presentan un comportamiento estacional, como pueden ser las ventas de almacenes de departamentos realizadas durante días festivos, el consumo estacionario del helado, los viajes durante días festivos, etc. Si por ejemplo, se dispone de la información trimestral de ventas de los almacenes de los departamentos, estas cifras mostrarán picos en el cuarto trimestre, en este caso es posible eliminar la influencia estacional considerando las diferencias de orden cuatro de las cifras de ventas y luego decidiendo que clase de modelo ARIMA ajustar.

Box y Jenkins (1970) generalizando el modelo ARIMA para tratar la estacionariedad y definir un modelo estacionario multiplicativo de la forma:

$$\varphi_p(B)\Psi_P(B^{12})w_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^{12})a_t \quad (3.5)$$

donde B es el operador de retraso, $\varphi_p, \Psi_P, \theta_q, \Theta_Q$ son polinomios de orden p,P,q,Q, respectivamente, y $\{a_t\}$ son variables aleatorias independientes con media cero y varianza σ_a^2 . Se seleccionan valores razonables para p,P,q,Q examinando el correlograma de series diferenciadas $\{w_t\}$. Los valores p,q se seleccionan examinando algunos de los primeros valores de r_k , mientras que los de P,Q cuando $k=12,24,\dots$ (esto cuando el periodo estacionario es 12). Por ejemplo, si r_{12} es grande y r_{24} pequeño, se sugiere un término estacionario de promedios móviles, por lo que se toma P=0 y Q=1. El operador B^{12} es tal que:

$$B^{12}w_t = w_{t-12}$$

por ejemplo, si $p=Q=1$, y $P=q=0$, entonces la ecuación (3.5) se convierte en:

$$(1 - \alpha B)w_t = (1 + \beta B^{12})a_t \Rightarrow w_t = \alpha w_{t-1} + a_t + \beta a_{t-12}$$

la ecuación (3.5) define un modelo estacionario, dado que sus raíces:

$$\varphi_p(B)\Psi_p(B^{12}) = 0$$

caen fuera del círculo unitario. El proceso de construcción de modelos para series de tiempo estacionarias es el mismo que para series no estacionarias, pero ahora la etapa de identificación es un tanto más complicada debido a que el número de modelos que podrían postularse para representar a una serie de tiempo dada aumenta considerablemente. Como una ayuda en la etapa de identificación de modelos, es conveniente visualizar los comportamientos de las funciones de autocovarianza de algunos modelos estacionarios, en especial de aquellos que se utilizan con mayor frecuencia en la práctica.

Con la idea de ajustar el modelo a series no estacionarias, Box y Jenkins (1970) sugieren diferenciar a la serie original para remover tanto la tendencia como la estacionariedad con:

$$w_t = \nabla^d \nabla_{12}^D x_t$$

donde:

$$\nabla_{12} x_t = x_t - x_{t-12}$$

$$\nabla \nabla_{12} x_t = \nabla_{12} x_t - \nabla_{12} x_{t-1} = x_t - x_{t-1} - \dots - x_{t-12} + x_{t-13}$$

para datos estacionarios con periodo 12, es usado el operador $\nabla \nabla_{12}$ si el efecto estacionario es aditivo, mientras que cuando es multiplicativo, se utiliza el operador ∇_{12}^2 . Algunas veces será suficiente usar solamente ∇_{12} . Se debe evitar el diferenciar de más. En los casos de datos trimestrales, se deberá usar el operador ∇_4 , y así sucesivamente.

Las series diferenciadas se denotan como $\{w_t; t=1, \dots, N-c\}$, donde c términos han sido perdidos al diferenciar. Por ejemplo, si es utilizado el operador $\nabla \nabla_{12}$ entonces $c=13$.

Los valores de los enteros d y D usualmente no exceden al valor de 1. Estos valores deben determinarse de tal manera que la serie resultante $\{W_t\}$, sea aproximadamente estacionaria; para esto podrían graficarse las f.ac muestrales de $\{X_t\}$, $\{\nabla X_t\}$, $\{\nabla^2 X_t\}$, $\{\nabla_{12} X_t\}$, $\{\nabla\nabla_{12} X_t\}$, $\{\nabla^2\nabla_{12} X_t\}$, la inspección visual de estas gráficas permitirá decidir el grado de diferenciación requerido para estacionarizar la serie.

La construcción de modelos para series estacionarias se realiza también de manera eficiente de acuerdo con la estrategia sugerida por Box y Jenkins, esto es, se siguen exactamente las mismas etapas que para el caso de series no estacionarias. No obstante, importa notar que en la etapa de verificación existen algunos pequeños cambios originados por la aparición de parámetros estacionarios.

3.2.8.4 Puntos importantes en la construcción de un modelo

¿Cómo saber cuándo ya se ha elegido el modelo adecuado para una serie de tiempo? La respuesta depende de distintos factores, incluyendo las propiedades de la serie obtenidas de las gráficas de los datos, el número de observaciones disponibles y el modo en que el modelo será usado.

Los procesos ARMA y ARIMA son los más utilizados ya que proporcionan un buen ajuste a la mayoría de las series de tiempo, y su uso puede ser generalizado cuando se tiene más de 50 observaciones disponibles. Sin embargo, algunas veces es más útil ocupar otro tipo de modelos, en oceanografía, donde los modelos estacionarios y/o de tendencia son más apropiados.

En muchas áreas como economía y mercadotecnia, ocurren con frecuencia series no estacionarias y además pueden ser cortas. Si se tienen más de 50 observaciones, Box y Jenkins (1970) recomiendan ajustar modelos ARIMA, diferenciando la serie de tiempo hasta volverla estacionaria y luego ajustando un modelo ARMA a la serie diferenciada.

Para series estacionarias, el modelo estacional ARIMA puede ser utilizado. Algunas veces es claro reconocer cuando la estacionariedad y tendencia de la serie de tiempo es dominante, la efectividad de un modelo ARIMA está principalmente determinada por las primeras operaciones de diferenciación y no por el ajuste subsecuente a un modelo ARMA, aun cuando esta última operación es la que lleva más tiempo en su realización. Por lo que los modelos simples vistos anteriormente pueden ser adecuados para algunas series de tiempo con una tendencia y/o efecto estacionario largo muy marcado. Por ejemplo, se puede representar a una serie de tiempo con una tendencia lineal junto con un término estacionario y un error, de la forma:

$$x_t = a + bt + s_t + \varepsilon_t, \quad a, b \text{ ctes}$$

los modelos de este tipo tienen la ventaja de ser simples, son fáciles de interpretar y son robustos. Además pueden ser utilizados en series de tiempo cortas, donde es imposible ajustar un modelo ARIMA. Pero tienen restricciones en considerar la tendencia y normalmente asumen que los errores son independientes cuando en algunas veces este no es el caso.

3.3 Pronósticos

El pronóstico de valores futuros de una serie de tiempo observada es un problema en muchas áreas, incluyendo economía, planeación de la producción, ventas y control del almacén.

Suponga que se tiene una serie de tiempo x_1, x_2, \dots, x_N . El problema es estimar x_{N+1} , o de forma general x_{N+q} . La predicción del valor de x_{N+q} hecha al tiempo N , a q pasos hacia adelante, será denotada por $\hat{x}(N, q)$. El entero q es llamado el tiempo futuro. Claramente no existe un procedimiento de pronóstico universalmente aplicable. Por lo que se debe de buscar el procedimiento que sea más apropiado para cada conjunto de condiciones.

Los diferentes tipos de pronóstico pueden ser clasificados en tres categorías generales:

- a) *Subjetiva*. Los pronósticos pueden hacerse en una base subjetiva, usando la intuición, el juicio, conocimiento comercial y cualquier información relevante.
- b) *Univariado*. Los pronósticos pueden hacerse solo con base en las observaciones anteriores de una serie de tiempo ajustando un modelo a los datos y extrapolando. Por ejemplo, los pronósticos de futuras ventas de un producto pueden basarse por completo en ventas pasadas. A los métodos de este tipo se les conoce como métodos de proyección.
- c) *Multivariado*. Los pronósticos pueden hacerse tomando observaciones de otras variables. Por ejemplo las ventas pueden depender de las existencias en el almacén. Los modelos econométricos son de este tipo de modelos de regresión. A los modelos multivariados se les conoce como modelos de predicción o causales.

En la práctica, un procedimiento de pronóstico involucra a los tres anteriores. Por ejemplo se calculan pronósticos univariados y luego son ajustados subjetivamente. Davis (1974) hace un pronóstico de mercado mesclando proyecciones y predicciones desarrolladas estadísticamente de datos anteriores y con el conocimiento de gente muy involucrada con el mercado. Otro tipo de combinación es la sugerida por Bates y Granger (1969), donde se calculan dos o más pronósticos objetivos y luego se calcula el promedio ponderado.

Antes de elegir el procedimiento de pronóstico es esencial considerar el uso que se le dará al pronóstico, que precisión es requerida, cuánto dinero está disponible, cuántos artículos serán pronosticados, cuántos datos están disponibles y que tan lejano está el punto a pronosticar.

Algunos procedimientos dan simplemente pronósticos puntuales, pero lo ideal es obtener un intervalo cuyos límites pueden estar determinados por elementos subjetivos.

3.3.1 Procedimientos univariados

En esta sección se muestran algunos métodos de proyección. En todos los procedimientos el primer paso debe ser graficar los datos, ya que se puede obtener mucha información al observar las gráficas, al grado de sugerir un procedimiento de pronóstico adecuado.

3.3.1.1 Extrapolación de curvas de tendencia

En los casos de pronósticos muy lejanos, es conveniente ajustar una curva de tendencia a los datos de años sucesivos y luego extrapolar. Se puede utilizar una variedad de curvas incluyendo polinomiales, exponenciales y curvas de Gompertz. Como mínimo se deben considerar de 7 a 10 años de datos históricos, además Harrison y Pearce (1972) sugieren que no se deben de hacer pronósticos por más de la mitad de años históricos disponibles.

Para datos estacionarios, la tendencia y la variación estacionaria pueden estimarse con los métodos vistos anteriormente, en ambos casos usando promedios móviles o ajustando una curva. La curva ajustada puede ser extrapolada a futuro. Este método es simple, pero no por eso deja de ser robusto. Una desventaja de usar curvas de tendencia es que no hay bases lógicas para elegir entre las diferentes curvas. Desafortunadamente es frecuente el caso en que se puedan encontrar curvas que se ajustan casi a la misma forma de los datos, pero a la hora de hacer las proyecciones dan pronósticos muy distintos entre sí.

3.3.1.2 Suavizador exponencial

Este procedimiento fue sugerido por Holt, originalmente, fue usado en su forma básica para series no estacionarias y sin tendencia. Obviamente en la práctica, muchas series tienen un patrón de tendencia y estacionariedad, pero estos efectos pueden ser medidos y removidos para obtener series estacionarias. Con lo que resulta que las adaptaciones del suavizador exponencial. Pueden ser usadas en muchos tipos de series de tiempo.

Dada una serie de tiempo estacionaria y no estacionaria, x_1, x_2, \dots, x_N , es válido tomar como una estimación de x_{N+1} a la suma ponderada de observaciones:

$$\hat{x}(N,1) = c_0 x_N + c_1 x_{N-1} + c_2 x_{N-2} + \dots \quad (3.6)$$

donde $\{c_t\}$ son ponderaciones. Es razonable dar una mayor ponderación a las observaciones recientes y menos a las más antiguas. Un conjunto de ponderaciones que es atractivo es el de ponderaciones geométricas, las cuales decrecen a razón constante. En el orden de que las ponderaciones sumen 1, se toma:

$$c_i = \alpha(1-\alpha)^i, \forall i = 0,1,\dots$$

donde α es una constante tal que $0 < \alpha < 1$. Por lo que (3.6) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}(N,1) &= \alpha x_N + \alpha(1-\alpha)x_{N-1} + \alpha(1-\alpha)^2 x_{N-2} + \dots = \alpha x_N + (1-\alpha)[\alpha x_{N-1} + \alpha(1-\alpha)x_{N-2} + \dots] \\ &\Rightarrow \hat{x}(N,1) = \alpha x_N + (1-\alpha)\hat{x}(N-1,1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si se fija $\hat{x}(1,1) = x_1$, la ecuación (3.7) puede usarse recursivamente para calcular el pronóstico. Esta ecuación también reduce la cantidad de cálculos involucrados al actualizar un pronóstico, debido a que solo bastará tener la última observación y el pronóstico previo.

El pronóstico definido por la ecuación (3.7) es llamado suavizador exponencial y ha resultado ser muy útil. El adjetivo “exponencial” radica en el hecho de que las ponderaciones geométricas se aproximan a una curva exponencial, aunque el procedimiento bien podría llamarse suavizador geométrico.

La ecuación (3.7) puede describirse como:

$$\hat{x}(N,1) = \alpha \left[x_N + \hat{x}(N-1,1) \right] + \hat{x}(N-1,1) = \alpha \varepsilon_N + \hat{x}(N-1,1)$$

donde:

$$\varepsilon_N = x_N - \hat{x}(N-1,1).$$

tal que:

ε_N : Error de predicción al tiempo N.

Box y Jenkins demostraron que resulta óptimo utilizar el suavizador exponencial si el modelo fundamental de la serie de tiempo está dada por:

$$x_t = \mu + \alpha \sum_{j < t} Z_j + Z_t$$

Este proceso infinito de promedios móviles es no estacionario, pero las primeras diferencias $x_{t+1} - \hat{x}_t$ forman un proceso de promedios móviles de primer orden.

El valor de la constante α del suavizador exponencial, depende de las propiedades de la serie de tiempo dada. Los valores comúnmente utilizados son los que están entre 0.1 y 0.3, creando un pronóstico que depende de un gran número de observaciones pasadas. Los valores cercanos a uno son normalmente menos usados y dan pronósticos que dependen más bien de observaciones recientes. Cuando $\alpha = 1$, el pronóstico es igual a la mayoría de las últimas observaciones.

El valor de α , puede ser estimado a partir de los datos pasados con un procedimiento similar utilizado para estimar los parámetros de un proceso de promedios móviles. La suma de cuadrados de los errores es calculada para diferentes valores de α , eligiendo el valor que minimice la suma de cuadrados. Con un valor dado de α , se calculan:

$$\begin{aligned} \hat{x}(1,1) = x_1 &\Rightarrow e_2 = x_2 - \hat{x}(1,1) \\ \hat{x}(2,1) = \alpha e_2 + \hat{x}(1,1) &\Rightarrow e_3 = x_3 - \hat{x}(2,1) \\ &\bullet \\ &\bullet \\ &\bullet \\ e_N = x_N - \hat{x}(N-1,1) \end{aligned}$$

Con esto se obtiene $\sum_{i=2}^N e_i^2$, repitiendo este procedimiento para valores de α entre 0 y 1, de preferencia en incrementos de 0.1, se podrá elegir el valor de α que minimiza a la $\sum e_i^2$, o bien se pueden emitir algunos de los primeros valores de los errores y minimizar $\sum_{i=c}^N e_i^2$.

Normalmente la superficie de la suma de cuadrados es algo plana cerca del mínimo, por lo que no es difícil determinar el valor buscado de α .

3.3.1.3 Procedimiento de Holt Winters

El resultado de generalizar el suavizador exponencial para series de tiempo con tendencia y variación estacionaria, es conocido como procedimiento Holt Winters.

Suponga que se tienen observaciones mensuales. Sea m_t la media general estimada en el mes t , r_t es la tendencia estimada en el mes t , es decir, el incremento o decremento mensual operado en la media general, y s_t es el factor estacionario estimado para el mes t . Entonces, cada vez que aparece un dato nuevo, los tres números anteriores se deben de actualizar:

Si la variación estacionaria es multiplicativa, las ecuaciones de actualización son:

$$m_t = \frac{\alpha x_t}{s_{t-12}} + (1 - \alpha)(m_{t-1} + r_{t-1})$$

$$s_t = \frac{\beta x_t}{m_t} + (1 - \beta)s_{t-12}$$

$$r_t = \gamma(m_t - m_{t-1}) + (1 - \gamma)r_{t-1}$$

donde x_t es la última observación, α, β, γ son constantes tales que $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$. Los pronósticos a partir del tiempo t son:

$$\hat{x}(t, h) = (m_t + hr_t)s_{t-12+h}, \quad h = 1, 2, \dots, 12$$

Si la variación estacionaria es aditiva, las ecuaciones de actualización son:

$$m_t = \alpha(x_t - s_{t-12}) + (1 - \alpha)(m_{t-1} + r_{t-1})$$

$$s_t = \beta(x_t - m_t) + (1 - \beta)s_{t-12}$$

$$r_t = \gamma(m_t - m_{t-1}) + (1 - \gamma)r_{t-1}$$

al observar la gráfica de los datos se determinará si el efecto estacionario adecuado es aditivo o multiplicativo.

Si el periodo estacionario no es de 12 observaciones, las ecuaciones deberán ser adaptadas al periodo respectivo.

Los valores iniciales para m_t, r_t y s_t pueden estimarse de forma bruta, de los datos de los primeros dos años, tomando: $m_t = \frac{\sum_{t=1}^{12} x_t}{12}$ y $r_t = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{12}$,

donde \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son las medias del año uno y año dos respectivamente, y s_1, s_2, \dots, s_{12} , los promedios de los efectos estacionarios en los primeros dos años, al compararse los distintos meses son comparados con las medias anuales. Las tres constantes suavizadoras α, β, γ son elegidas como se mostró anteriormente, excepto que ahora la cantidad a minimizar es $\sum_{i=25}^N e_i^2$.

Si la constante β es casi cero, las ecuaciones de actualización para s_t tienen que modificarse. Para que la técnica de actualización del suavizador exponencial sea efectiva, es necesario contar con una cantidad infinita de datos pasados. Pero si se cuenta, digamos, con la información mensual de seis años, cada factor mensual deberá ser corregido con letra cinco veces y sus valores iniciales deberán ser excesivamente grandes.

Por ejemplo si $\beta = 0.1$ y el valor inicial para el mes 1 es s_1 , entonces la expresión multiplicativa es:

$$s_{13} = \frac{0.1x_{13}}{m_{13}} + 0.9s_1$$

y eventualmente se encuentra:

$$s_{61} = \frac{0.1x_{61}}{m_{61}} + \frac{0.09x_{49}}{m_{49}} + \dots + 0.9^5 s_1$$

este efecto indeseable puede evitarse utilizando valores grandes para β en algunos de los primeros años. Una estrategia es tomar $\beta = \frac{1}{n}$ en el año n hasta un máximo de aproximadamente $n=8$. No tomando en cuenta la decisión entre estacionariedad aditiva y multiplicativa, el procedimiento Holt Winters puede ser automatizado en el sentido, de que se escribe un solo programa de computadora para realizar pronósticos para una serie de tiempo, sin necesidad de intervención humana, esta técnica es muy utilizada en la industrial.

3.3.1.4 Procedimiento de Pronóstico Box Jenkins

La mayor aportación de Box y Jenkins, fue la de dar una “estrategia” general para el pronóstico de series de tiempo, la cual permite ajustar modelos a series no estacionarias. También proporcionan estimaciones y procedimientos de diagnóstico generales.

En contraste con el procedimiento Holt Winters, el cual supone una familia simple de modelos, en el Box Jenkins el modelo es elegido de una gran familia de modelos ARIMA de acuerdo a las propiedades particulares de la serie de tiempo, que se esté analizando, esto requiere tener experiencia para poder identificar el modelo ARIMA apropiado. La gran desventaja de este procedimiento es que para tener un buen resultado se necesitan por lo menos 50 observaciones, de preferencia 100.

3.3.2 Procedimientos multivariados

3.3.2.1 Regresión múltiple

Se usa la regresión lineal múltiple cuando la variable de interés (sea y) está linealmente relacionada con valores presentes y pasados de otras variables (sean x_1, x_2, \dots, x_p) y también posiblemente con valores pasados de y (estos son términos autorregresivos).

Los modelos de regresión múltiple normalmente funcionan muy bien, particularmente en el contexto de la mercadotecnia. Pero existen varios riesgos que deben considerarse al aplicar este método. En primer lugar, la variedad y accesibilidad de paquetes de computadora ocasionan la tendencia de poner más y más variables explicativas en el modelo, obteniendo resultados dudosos. Incluyendo, digamos, 20 variables explicativas, se puede conseguir un coeficiente de correlación múltiple, R^2 , tan alto como 0.995, pero este buen ajuste puede ser falso y no necesariamente significa que el modelo dará buenos pronósticos. Un mejor número de variables explicativas es como máximo 6 o 7, y es recomendable ajustar el modelo a una parte de los datos y luego verificar el modelo pronosticado al resto de los datos.

No es necesario que las variables explicativas sean totalmente independientes, pero deben eliminarse las correlaciones significativas. Es recomendable ver la matriz de correlación de las variables “independientes” antes de llevar a cabo una regresión múltiple, con esto si es necesario, se podrán excluir algunas variables.

Otra dificultad que se presenta en la regresión múltiple es que algunas variables explicativas pueden ser tomadas como constantes en el pasado, por lo que será imposible ver sus efectos e incluirlas en el modelo de forma cuantitativa. Por ejemplo, una compañía que quiere incrementar su gasto en publicidad y desea construir un modelo que prediga los efectos de las ventas, pero si la publicidad se ha estado tomando en el pasado relativamente como una constante entonces será imposible estimar el efecto de la publicidad, y el modelo que no considera cambios en el gasto de publicidad será inútil.

Una vez ajustado el modelo de regresión múltiple, se debe verificar la autocorrelación de los residuales. Si los residuales están autocorrelacionados, se debe tratar de ajustar un modelo de regresión múltiple con errores autocorrelacionados, a través de un método dado por Kendall (1973). Alternativamente se puede probar una aproximación Box Jenkins.

Es muy riesgoso aplicar este tipo de modelos, excepto en los casos en que se tiene la certeza de que una serie está relacionada con otra.

3.3.2.2 Modelos econométricos

Los modelos econométricos suponen que un sistema económico puede describirse, no por una ecuación, sino por un conjunto de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, los salarios no solamente dependen de los precios, pero algunos precios dependen de la estimación de los salarios. Los economistas distinguen dos tipos de variables, las exógenas que son las que afectan al sistema pero ellas mismas no son afectadas, y las endógenas que interactúan con cada una.

Las ecuaciones simultáneas se pueden escribir de la forma:

$$Ax_t + By_t + \sum_j B_j y_{t-j} = u_t$$

donde:

x_t : Un vector mxl de variables exógenas.

y_t : Un vector nxl de variables endógenas.

u_t : Un vector nxl de errores aleatorios.

$A, B, \{B_j\}$: Matrices de parámetros que tiene que ser estimados por métodos econométricos. Cada matriz tiene n filas, por lo que el número de ecuaciones es igual al número de variables endógenas.

3.3.2.3 Método Box Jenkins

Box y Jenkins (1968) consideran pronósticos multivariados como pronósticos univariados.

Propusieron una clase de modelos llamados “modelos de transferencia”, que obviamente es una extensión de la clase ARIMA. Se concentraron en describir la relación entre una variable de salida (ventas) y la variable de entrada (gasto en publicidad), aunque el método puede ser generalizado para abarcar muchas variables de salida. Muestran cómo identificar el modelo apropiado para hacer las predicciones.

3.3.3 Comparación entre los procedimientos

Se deben considerar muchos factores al elegir el procedimiento de pronóstico más apropiado para un conjunto de condiciones dadas. Estos factores incluyen el propósito del pronóstico, el grado de precisión requerido, y la cantidad de dinero disponible. No se han establecido reglas, pero los siguientes puntos pueden utilizarse como una guía general.

La consideración más importante es la de cómo se va a utilizar el pronóstico. Muchos son utilizados para planear metas, producción o controlar las existencias.

Alternativamente, un pronóstico puede actuar como una norma o un patrón. Los pronósticos univariados están proyectados para actuar como una norma, debido a que no toman en cuenta otras variables. Si se requiere al pronóstico para tomar una decisión o hacer una planeación, lo ideal será usar un modelo multivariado. Los modelos multivariados son relativamente caros y difíciles de construir particularmente los econométricos.

El método Box Jenkins brinda pronósticos más precisos que los otros métodos. Aunque por lo regular es más caro, tanto en términos económicos como en inversión de tiempo.

Los métodos Holt Winters y de autorregreción paso a paso tienen aproximadamente la misma precisión. Granger en 1974 descubrió que una combinación de Holt Winters con autorregreción paso a paso (los dos son automatizables) da resultados tan precisos como la aproximación Box Jenkins.

La elección de un procedimiento de pronóstico también dependerá del número de productos que se van a predecir. Si están involucrados muchos productos, un ciento, como en planeación de producción o control de almacenes, será útil crear rutinas en la computadora, con esto se descarta el uso del procedimiento Box Jenkins y se opta por usar procedimientos automatizados como Holt Winters o autorregresión paso a paso.

Normalmente el procedimiento Box Jenkins involucra a un elemento subjetivo que permite elegir de una gran variedad de modelos, ésta versatilidad es la grandeza y debilidad de esta aproximación, grandeza por la amplia gama de modelos disponibles, y debilidad debido a que para elegir el modelo se requiere de mucha experiencia en la interpretación de funciones de autocorrelación de la muestra y cuando se carece de ella se cometen muchos errores. Box Jenkins se recomienda en series de tiempo de carácter macroeconómico, pero definitivamente no en las de ventas.

3.3.4 Capacidad de pronóstico del modelo

Una vez que se ha construido uno o más modelos para representar una serie de tiempo dada y se está en condiciones de obtener pronósticos a partir de él o ellos, resulta conveniente analizar y comparar la capacidad de pronóstico de cada uno de los métodos en consideración.

Una forma de estudiar dicha capacidad de pronóstico radica en contrastar los pronósticos de valores ya observados en la serie, con sus valores reales. Si la serie $\{T(X_t)\}$ para la cual existe un modelo ARIMA que la representa, consta de N observaciones, podrían pronosticarse $H \geq 1$ valores a partir del origen $\tau \leq N - H$ o un solo valor a partir de los orígenes $\tau, \tau + 1, \dots, \tau + H - 1$; en el primer caso se hablará de que se realiza una simulación dinámica, mientras que en el segundo caso corresponderá a una simulación estática.

La diferencia entre los pronósticos y las observaciones (errores del pronóstico) permitirá distinguir la existencia de sub o sobreestimación en los pronósticos, para ello puede calcularse la media de los errores de pronóstico como:

$$M_1 = \sum_{h=1}^H \frac{e_\tau(h)}{H} \text{ ó } M_2 = \sum_{h=1}^H \frac{e_{\tau+h-1}}{H} \quad (3.8)$$

donde:

$$e_\tau(h) = T(X_{\tau+h}) - \hat{T}(X_\tau)(h)$$

Otra medida de la bondad de los pronósticos se obtiene al calcular su error cuadrático medio a través de:

$$ECM_1 = \sum_{h=1}^H \frac{e_\tau^2(h)}{H} \text{ ó } ECM_2 = \sum_{h=1}^H \frac{e_{\tau+h-1}^2}{H} \quad (3.9)$$

desde luego, la inspección de los errores individuales puede ser útil para detectar, entre otras cosas, observaciones con efectos causados por eventos exógenos al comportamiento histórico de la serie, por ello en ocasiones es conveniente registrar los errores cuya magnitud sea “sospechosa”. Además, debe ser claro que mientras más cercanas a cero sean las medidas M_1, M_2, ECM_1 y ECM_2 , mejores serán los pronósticos, o dicho de otra manera, mayor será la capacidad de pronóstico del modelo.

Por otro lado, es importante advertir que las medidas correspondientes a las ecuaciones (3.8) y (3.9) no son del todo válidas si los pronósticos empleados fueron calculados a partir de un modelo que contenía ya la información provista por todas las observaciones (N en total); esto es, si en la estimación del modelo se utilizaron las observaciones $T(X_{t+h}), \forall h = 1, 2, \dots, H$, los pronósticos de tales valores tendrán un cierto sesgo a proporcionar errores pequeños, esto se debe a que con el proceso de estimación se intentó disminuir las discrepancias entre los pronósticos un periodo hacia adelante y los correspondientes valores reales. A consecuencia de lo anterior es aconsejable “cortar” la serie en el instante $\tau < N$, construir un modelo con las observaciones $T(X_1), \dots, T(X_\tau)$ y pronosticar los valores $T(X_{\tau+1}), \dots, T(X_N)$ que, aunque ya eran conocidos, no fueron utilizados en la construcción del modelo. Las medidas de la bondad de los pronósticos serían, ahora sí, completamente válidas para reflejar la calidad de los pronósticos obtenidos.

Los modelos vistos anteriormente por lo general son usados cuando se tiene problemas de autocorrelación sin embargo cuando hay problemas de heterocedasticidad, es decir, cuando la varianza no es constante; como ocurre en la mayoría de las series financieras se utilizan modelos GARCH, los cuales se describen en el siguiente capítulo puesto que éstos serán utilizados para la implementación del modelo Monte Carlo.

Capítulo 4

Modelos GARCH e implementación del modelo de simulación Monte Carlo para valuación de opciones europeas

4.1 Introducción

En este capítulo se da un resumen de los modelos Generalizados ARCH (GARCH), algunas de sus extensiones y su relación con la simulación Montecarlo. Estos modelos son importantes por el hecho de que permiten modelar la volatilidad de las series de tiempo que se encuentran en finanzas tales como precios de acciones, precios de commodities, tipos de cambio, entre otros.

4.2 Modelos generalizados ARCH (GARCH)

En esta sección se introduce un conjunto de modelos que capturan características importantes en los rendimientos y que son bastante flexibles al capturar aspectos específicos de activos simples. Un inconveniente de estos modelos es que requieren la estimación no lineal de los parámetros, que será discutida posteriormente. El modelo GARCH fue desarrollado independientemente por Bollerslev (1986) y Taylor (1986).

En la actualidad los modelos de la clase GARCH son los más populares modelos de volatilidad. Los modelos GARCH gozan de renombre porque son capaces de describir no solamente la característica de clusters de volatilidad, sino también de algunas otras características de las series de tiempo financieras, tales como su pronunciado exceso de kurtosis o colas pesadas. Todavía el modelo estándar GARCH no puede capturar otras características empíricas relevantes de la volatilidad. Por ejemplo, desde Black (1976), los choques negativos o las noticias se cree afectan la volatilidad en forma absolutamente diferente que los choques positivos de igual tamaño. En el modelo estándar GARCH, sin embargo, el efecto de un choque en la volatilidad depende solamente de su tamaño. El signo del choque es irrelevante. Otra limitación del modelo estándar GARCH es que no implica que el rendimiento esperado y la volatilidad están relacionadas directamente, como en el caso del CAPM.

Se define el rendimiento logarítmico diario, R_{t+1} , usando el precio de cierre diario, S_{t+1} , como:

$$R_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$$

se supone que la media de R_t es cero pues es dominado por la desviación estándar de los rendimientos, que las innovaciones o las noticias que golpean el rendimiento del activo están distribuidas normalmente. Note que el supuesto de normalidad no es realista, y puede ser relajado. El supuesto de normalidad permite enfocarse en modelar la varianza condicional de la distribución.

Dados los supuestos anteriores, se puede escribir el rendimiento diario como:

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}$$

donde z_{t+1} son variables aleatorias idénticamente distribuidas y siguen una distribución normal estándar $N(0,1)$.

El modelo más simple o estándar GARCH de la dinámica de la varianza se puede escribir como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \quad \alpha_1 + \beta < 1 \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) es un modelo GARCH (1,1). σ_{t+1}^2 es conocida como la varianza condicional porque es una estimación futura para la varianza calculada, basada en cualquier información pasada relevante. Usando el modelo GARCH es posible interpretar la actual varianza estimada σ_{t+1}^2 como una función ponderada de un valor promedio de largo plazo (dependiente de α_0), la información de los rendimientos al cuadrado durante los periodos previos $\alpha_1 R_t^2$ y la varianza ajustada por el modelo durante los periodos previos $\beta \sigma_t^2$. Se puede definir la varianza incondicional, o varianza de largo plazo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[\sigma_{t+1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[R_t^2] + \beta E[\sigma_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 + \beta \sigma^2 \\ \Rightarrow \sigma^2 - \alpha_1 \sigma^2 - \beta \sigma^2 &= \alpha_0 \Rightarrow \sigma^2 (1 - \alpha_1 - \beta) = \alpha_0 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta} \quad (4.2)$$

La varianza de largo plazo en el modelo GARCH se obtiene resolviendo para α_0 en (4.2) y sustituyendo en (4.1) la siguiente expresión:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha_1 - \beta) \sigma^2 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2 = \sigma^2 \quad (4.3)$$

así, la varianza del periodo t+1 es un promedio ponderado de la varianza de largo plazo, el rendimiento al cuadrado y la varianza en el periodo t, es decir, la varianza en t+1 es la varianza de largo plazo más menos algo, si el rendimiento al cuadrado en t está por arriba o debajo de su varianza de largo plazo, y más menos algo si la varianza en t está por arriba o debajo de la varianza a largo plazo. Una ventaja clave de los modelos GARCH para la administración del riesgo es que el pronóstico es de un periodo para la varianza, $\sigma_{t+1|t}$, está dado directamente por el modelo como σ_{t+1}^2 . Considere ahora el pronóstico de la varianza de los rendimientos diarios k periodos adelante, usando solamente la información disponible al final del periodo t. En el modelo GARCH, el valor esperado de la varianza futura en el horizonte k es:

$$\begin{aligned} E[\sigma_{t+K}^2 - \sigma^2 | F_t] &= \alpha E[R_{t+K-1}^2 - \sigma^2 | F_t] + \beta E[\sigma_{t+K-1}^2 - \sigma^2 | F_t] \\ &= \alpha E[\sigma_{t+K-1}^2 z_{t+K-1}^2 - \sigma^2 | F_t] + \beta E[\sigma_{t+K-1}^2 - \sigma^2 | F_t] \end{aligned}$$

por lo que:

$$E[\sigma_{t+K}^2 - \sigma^2 | F_t] = (\alpha + \beta)(E[\sigma_{t+K-1}^2 | F_t] - \sigma^2) \quad (4.4)$$

de donde se tiene que:

$$E[\sigma_{t+K}^2 | F_t] - \sigma^2 = (\alpha + \beta)^{K-1} (E[\sigma_{t+1}^2 | F_t] - \sigma^2) = (\alpha + \beta)^{K-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2) \quad (4.5)$$

la esperanza condicional, $E[\sigma_{t+K}^2 | F_t]$, se refiere a calcular el valor esperado de la varianza usando toda la información disponible al final del periodo t, que incluye rendimiento ajustado al periodo t también. El término $\alpha + \beta$ en la ecuación (4.5) se conoce como la persistencia del modelo. Un alta persistencia (indica un $\alpha + \beta$ cerca de 1) implica que las acciones muevan la varianza de su promedio de largo plazo, lo cual persistirá durante mucho tiempo, pero eventualmente el pronóstico de largo plazo será la varianza de largo plazo promedio, σ^2 . Por lo tanto, el modelo GARCH supone que eventualmente en el futuro, la varianza regresará al valor promedio. Hasta ahora se ha considerado pronosticar la varianza de los rendimientos diarios k periodos hacia adelante. Es más interesante el pronóstico de la varianza de los rendimientos acumulados K periodos adelante:

$$R_{t+1:t+k} = \sum_{k=1}^K R_{t+k}$$

bajo el supuesto de que los rendimientos tienen autocorrelación cero; la varianza de los rendimientos acumulados a K periodos es simplemente:

$$\sigma_{t+1:t+k}^2 = E \left[\left(\sum_{k=1}^K R_{t+k} \right)^2 \middle| F_t \right] = \sum_{k=1}^K E \left[\sigma_{t+k}^2 \middle| F_t \right] \quad (4.6)$$

en el modelo GARCH se obtiene:

$$\sigma_{t+1:t+k}^2 = K\sigma^2 + \sum_{k=1}^K (\alpha + \beta)^{k-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2) \quad (4.7)$$

un inconveniente del modelo es que la distribución conjunta es desconocida incluso si la distribución al periodo t+1 se supone normal. Así, mientras que es fácil pronosticar la varianza del largo plazo en el modelo, no es fácil pronosticar la distribución condicional completa.

4.3 Extensión del modelo GARCH

Como se observó anteriormente, uno de los distintos beneficios de los modelos GARCH es su flexibilidad. En esta sección, se explora esta flexibilidad y se presentan algunos de los modelos más útiles para la administración del riesgo.

4.3.1 Memoria de largo plazo en la varianza

El modelo GARCH estándar discutido anteriormente se denomina GARCH(1,1) porque está compuesto solamente por un retraso de los rendimientos al cuadrado y un retraso de la varianza. Para el pronóstico a corto plazo de la varianza, este modelo es suficiente, pero en general se puede tener en cuenta una dinámica de orden mayor considerando el modelo GARCH (p,q) , que incluye retrasos de orden mayor como sigue:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (4.8)$$

El modelo GARCH simple supone que la varianza de largo plazo es constante en el tiempo. Los componentes del modelo GARCH, el cual es un GARCH(2,2) restringido, pueden ser vistos al permitir que la varianza de largo plazo cambie en el tiempo y sea capturada por el factor v_{t+1} en:

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= v_{t+1} + \alpha(R_t^2 - v_t) + \beta(\sigma_t^2 - v_t) \\ v_{t+1} &= \alpha_0 + \alpha_v(R_t^2 - \sigma_t^2) + \beta_v v_t \end{aligned} \quad (4.9)$$

este modelo puede capturar potencialmente los patrones de autocorrelación en la varianza, que desaparecen más lento que en el modelo estándar de memoria a corto plazo GARCH (1,1).

4.3.2 Efecto de apalancamiento

Uno de los hechos estilizados que presentan los rendimientos de los activos financieros es que un rendimiento negativo aumenta la varianza más que un rendimiento positivo de la misma magnitud, lo cual se ha denominado como el efecto de apalancamiento, debido a que un rendimiento negativo en una acción implica una caída en el valor del capital (equity), lo que implica que una empresa está más apalancada y por ende es más riesgosa (suponiendo que el nivel de la deuda permanece constante). Se puede modificar el modelo GARCH de tal forma que la ponderación dada al rendimiento dependa de si el rendimiento es positivo o negativo de la siguiente manera:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (R_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_t^2(z_t - \theta)^2 + \beta\sigma_t^2 \quad (4.10)$$

El modelo en la ecuación (4.10) se denomina NGARCH. Note que estrictamente se trata de un arribo de noticias positivo, $z_t > 0$, comparado con un rendimiento simple R_t , que tiene menos de un impacto en la varianza que un arribo negativo de noticias, si $\theta > 0$. La persistencia de la varianza en este modelo es $\alpha(1 + \theta^2) + \beta$, y la varianza a largo plazo es $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1(1 + \theta^2) - \beta}$. Otra manera de capturar el efecto de apalancamiento es definir una variable indicadora, I_t , que toma el valor de uno si el rendimiento del día t es negativo y cero cualquier otro caso:

$$I_t = \begin{cases} 1, & R_t < 0 \\ 0, & \text{c.o.c} \end{cases}$$

La dinámica de la varianza se puede especificar como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \alpha_1 \theta I_t R_t^2 + \beta \sigma_t^2 \quad (4.11)$$

así, un θ mucho mayor que cero capturarán de nuevo el efecto de apalancamiento. El modelo definido en (4.11) es conocido como el modelo GJR-GARCH, por sus autores Glosten, Jagannathan y Runkle (1993). Un modelo diferenciado que también captura el apalancamiento es el modelo GARCH exponencial o EGARCH (Nelson 1991), en el que la dinámica de la varianza es:

$$\ln(\sigma_{t+1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1(\phi R_t + \gamma[|R_t| - E[|R_t|]]) + \beta \ln(\sigma_t^2) \quad (4.12)$$

el cual exhibe el efecto usual de apalancamiento si $\alpha_1 \phi < 0$. El modelo EGARCH tiene la ventaja de que la especificación logarítmica asegura que la varianza sea siempre positiva, pero tiene la desventaja que la varianza esperada futura más allá de un periodo no se puede calcular analíticamente.

4.4 Simulación Monte Carlo

Se ilustra el algoritmo de la simulación Montecarlo con un ejemplo sencillo. Considere el modelo GARCH(1,1) bajo el supuesto de normalidad de los rendimientos, donde:

$$R_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1}, z_{t+1} \sim N(0,1)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

Según lo mencionado anteriormente, al final del periodo t se obtiene R_t y se calcula σ_{t+1}^2 , que es la varianza del periodo t+1 en el modelo GARCH. Usando un generador de números aleatorios, que son estándares la mayoría de los paquetes de software, se puede obtener un conjunto de números aleatorios artificiales:

$$\hat{z}_{i,1}, \forall i = 1, 2, \dots, M$$

provenientes de la distribución normal estándar, $N(0,1)$. M denota el número de muestras que podría ser, por ejemplo, 10,000. Para verificar que los números aleatorios provienen de una distribución normal estándar, se puede construir un histograma de los números aleatorios y comparar con la función de distribución normal teórica.

De estos números aleatorios se puede calcular un conjunto de rendimientos estimados para el periodo t+1 como:

$$\hat{R}_{i,t+1} = \sigma_{t+1} \hat{z}_{i,1}$$

dados estos rendimientos hipotéticos se puede actualizar la varianza para obtener un sistema de varianzas hipotéticas para el periodo t+2 como sigue:

$$\hat{\sigma}_{i,t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{R}_{i,t+1}^2 + \beta \hat{\sigma}_{t+1}^2$$

dado un nuevo conjunto de números aleatorios de una distribución $N(0,1)$:

$$\hat{z}_{i,2}, \forall i = 1, 2, \dots, M$$

se puede calcular el rendimiento estimado al periodo t+2 como:

$$\hat{R}_{i,t+2} = \hat{\sigma}_{i,t+2} \hat{z}_{i,2}$$

entonces la nueva varianza se actualiza por:

$$\hat{\sigma}_{i,t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{R}_{i,t+2}^2 + \beta \hat{\sigma}_{i,t+2}^2$$

La expresión general se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 4.1: Simulación de los rendimientos de t+1 a t+K.

	$\hat{z}_{1,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{1,t+2}^2$	$\hat{z}_{1,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{1,t+3}^2$...	$\hat{z}_{1,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+K}$
$\sigma_{t+1}^2 =$	$\hat{z}_{2,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{2,t+2}^2$	$\hat{z}_{2,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{2,t+3}^2$...	$\hat{z}_{2,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+K}$

	$\hat{z}_{M,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{M,t+2}^2$	$\hat{z}_{M,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{M,t+3}^2$...	$\hat{z}_{M,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+K}$

Fuente elaboración propia.

En el cuadro 4.1 se puede apreciar la simulación de rendimientos diarios estimados a partir del periodo t+1 al periodo t+K.

Cada renglón corresponde a la denominada trayectoria de una simulación Monte Carlo, la cual inicia a partir de σ_{t+1}^2 en el primer periodo, pero no para los demás periodos. En cada periodo una nueva trayectoria se actualiza con un nuevo número aleatorio, que es diferente al usado en cualquier otro periodo anterior. Finaliza el proceso con M sucesiones de rendimientos estimados comenzando desde el periodo t+1 hasta t+K. a partir de estos rendimientos futuros estimados es posible calcular el K-ésimo rendimiento estimado de cada trayectoria de Monte Carlo como:

$$\hat{R}_{i,t+1:t+K} = \sum_{k=1}^K \hat{R}_{i,t+k}, \forall i = 1, 2, \dots, M$$

observe que el método GARCH correspondiente a la simulación Monte Carlo descrito anteriormente es condicional en naturaleza porque se construye a partir de la estimación en el periodo t para la varianza del periodo t+1. Otra ventaja dominante de la técnica de simulación Monte Carlo es su flexibilidad.

Se puede utilizar simulación Monte Carlo para otra distribución donde el supuesto de rendimientos estandarizados normales no es requerido. Si se asume que la distribución estandarizada $t(d)$ con $d=12$ por ejemplo, describe mejor los datos, entonces simplemente se generan muestras a partir de dicha distribución. Finalmente, la técnica de simulación Monte Carlo se puede utilizar para cualquier modelo correctamente especificado para la dinámica de la varianza.

4.5 Modelo GARCH de valuación de opciones

En esta sección se presenta la valuación de opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, bajo la metodología de Duan, J.C., (1995), "The GARCH Option Pricing Model". Este modelo combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, se supone que la volatilidad es conducida por un proceso GARCH calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción se basa en argumentos de no arbitraje condicional a la volatilidad del proceso GARCH. En este contexto, el modelo es capaz de reflejar los cambios en la volatilidad condicional del activo subyacente en una forma sencilla.

Debido a que no se cuenta con una fórmula cerrada para encontrar el precio de la opción se recurre a la simulación Monte Carlo. El análisis numérico de los resultados de la implementación empírica del modelo sugiere que éste puede ser capaz de explicar algunas desviaciones sistemáticas asociadas con el modelo de Black y Scholes.

El modelo de Black y Scholes, no obstante su renombre, exhibe algunos sesgos sistemáticos. Puesto que las opciones son activos derivados, el asunto crítico es si o no el proceso asumido en un modelo es consistente con las características de la serie de tiempo del activo subyacente. Dado el hecho de que un cuerpo extenso en la literatura ha demostrado que el GARCH proporciona una descripción excelente de la dinámica del precio de un activo, Duan (1995) desarrolló un modelo GARCH de valuación de opciones y sugirió que puede evitar potencialmente los errores de valuación asociados al modelo Black & Scholes. Debido a que el modelo GARCH de valuación de opciones no tiene una solución en forma cerrada, la afirmación de su superioridad solamente puede ser probada empíricamente.

Suponga que los rendimientos diarios de un activo son independientes e idénticamente distribuidos en forma normal:

$$R_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

el rendimiento agregado en T días se distribuye también normal con media μ y varianza σ^2 escaladas de la siguiente manera:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{S_{t+T}}{S_t}\right) \sim N(T\mu, T\sigma^2)$$

y el precio futuro del activo es:

$$S_{t+T} = S_t e^{R_{t+1:t+T}}$$

ahora considere la valuación de opciones bajo el supuesto de que los rendimientos del activo subyacente siguen un proceso GARCH. El modelo supone que el rendimiento esperado del activo subyacente es igual a la tasa libre de riesgo, r , más un premio al riesgo por la volatilidad, λ , y un término de normalización. El rendimiento diario observado es igual al rendimiento esperado más un término de perturbación. La distribución condicional de este término de perturbación es normal con media cero y la varianza sigue un proceso GARCH (1,1) con apalancamiento. Dejando que el rendimiento pasado entre en la varianza con la magnitud del signo del rendimiento, el efecto de apalancamiento crea una asimetría en la distribución de los rendimientos. Esta asimetría es importante para capturar el sesgo implícito observado en precios de opciones. Especialmente, se puede escribir el proceso de rendimientos como:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}, z_{t+1} \sim N(0,1) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2$$

note que el valor esperado y la varianza del rendimiento del periodo siguiente condicional a toda la información disponible al tiempo t son:

$$\begin{aligned} E(R_{t+1}|F_t) &= r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{\sigma_{t+1}^2}{2} \\ \text{Var}(R_{t+1}|F_t) &= \sigma_{t+1}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

para una variable $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, se sabe que $E(e^x) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$, por lo que la esperanza condicional del proceso anterior es:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \middle| F_t\right] &= E\left[r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \middle| F_t\right] \\
 &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} E\left[\exp(\sigma_{t+1}z_{t+1}) \middle| F_t\right] \\
 &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} \\
 &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} \\
 &= e^{r + \lambda\sigma_{t+1}} \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado $\sigma_{t+1}z_{t+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$. La ecuación del rendimiento esperado en la ecuación (4.13) destaca el papel de λ como la prima al riesgo de la volatilidad. Podemos obtener el valor de la opción bajo neutralidad al riesgo como:

$$\begin{aligned}
 c &= e^{-rT} E\left[\max(S_{t+T} - K, 0) \middle| F_t\right] \\
 \Rightarrow E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \middle| F_t\right] &= e^r \tag{4.14} \\
 \Rightarrow \text{Var}[R_{t+1} \middle| F_t] &= \sigma_{t+1}^2
 \end{aligned}$$

de modo que la tasa esperada de rendimiento en el activo con riesgo es igual a la tasa libre de riesgo y la varianza condicional bajo neutralidad al riesgo es la misma que bajo el proceso original. Considere el proceso siguiente:

$$\begin{aligned}
 R_{t+1} &= \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}, z_{t+1} \sim N(0,1) \\
 \sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2
 \end{aligned}$$

en este caso, se puede comprobar que la esperanza condicional es:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t} \middle| F_t\right] &= E\left[r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1} \middle| F_t\right] \\
 &= e^{\frac{r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}{1}} E\left[\exp(\sigma_{t+1}z_{t+1}) \middle| F_t\right] \\
 &= e^{\frac{r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}{1}} e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} \\
 &= e^r e^{-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2} \\
 &= e^r
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

lo cual satisface la primera condición en la ecuación (4.14). Además, la varianza condicional bajo el proceso neutral al riesgo es:

$$\begin{aligned}
 Var[R_{t+1} | F_t] &= E\left[\alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 \middle| F_t\right] \\
 &= E\left[\alpha_0 + \alpha_1\left(R_t - r + \frac{\sigma_{t+1}^2}{2} - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t\right)^2 + \beta\sigma_t^2 \middle| F_t\right] \\
 &= E\left[\alpha_0 + \alpha_1(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t)^2 + \beta\sigma_t^2 \middle| F_t\right] \\
 &= \sigma_{t+1}^2
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde la última igualdad sale de la varianza del periodo t+1, que es conocida a final del periodo, t, en el modelo GARCH. Por lo tanto, se puede concluir que las condiciones para un proceso neutral al riesgo se cumplen. Una ventaja del enfoque del modelo GARCH de valuación de opciones es su flexibilidad: el análisis anterior se podía hacer de nuevo fácilmente para cualquiera de los modelos GARCH.

4.6 Implementación del modelo: Simulación Monte Carlo

Se ha encontrado una manera de evaluar la opción europea bajo neutralidad al riesgo, pero como se tiene una fórmula cerrada para realizar el cálculo se recurre a la simulación para calcular el precio:

$$c = e^{-rT} E[\max(S_{t+T} - K, 0 | F_t)] \tag{4.17}$$

a continuación se muestra un cuadro donde se simulan los rendimientos desde el periodo t+1 hasta el period t+T:

Cuadro 4.2: Simulación de los rendimientos t+1 a t+T

	$\hat{z}_{1,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{1,t+2}^2$	$\hat{z}_{1,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{1,t+3}^2$...	$\hat{z}_{1,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{1,t+T}$
$\sigma_{t+1}^2 =$	$\hat{z}_{2,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{2,t+2}^2$	$\hat{z}_{2,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{2,t+3}^2$...	$\hat{z}_{2,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{2,t+T}$

	$\hat{z}_{M,1}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+1}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{M,t+2}^2$	$\hat{z}_{M,2}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+2}$	\rightarrow	$\hat{\sigma}_{M,t+3}^2$...	$\hat{z}_{M,T}$	\rightarrow	$\hat{R}_{M,t+T}$

Fuente elaboración propia.

El cuadro 4.2 muestra la simulación de los rendimientos diarios estimados a partir del día t+1 hasta el vencimiento en el día t+T, donde las $\hat{z}_{i,j}$ se obtienen de un generador de números aleatorios de una distribución N(0,1) y M es el número de trayectorias de los rendimientos simulados.

La simulación puede ser echa como sigue: en primer lugar, observe que se puede eliminar un parámetro escribiendo:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \lambda \sigma_t - \theta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - (\lambda + \theta) \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\sigma_t z_t - \delta \sigma_t)^2 + \beta \sigma_t^2$$

con $\delta = \lambda + \theta$. Ahora, para una varianza condicional dada σ_{t+1}^2 , y parámetros, α_1, β, δ , se puede utilizar simulación Monte Carlo para crear trayectorias estimadas de los rendimientos del activo. La estimación de los parámetros será discutida posteriormente.

Es necesario calcular la esperanza en la ecuación (4.17) usando el proceso neutral al riesgo.

Primero se calcula el rendimiento simulado neutral al riesgo en el periodo $t+j$ para la trayectoria i de la simulación como:

$$\hat{R}_{i,t+j} = r - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i,t+j}^2 + \hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j} \quad (4.18)$$

y la varianza es actualizada por:

$$\hat{\sigma}_{i,t+j+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\hat{\sigma}_{i,t+j} \hat{z}_{i,j} - \delta \hat{\sigma}_{i,t+j} \right)^2 + \beta \hat{\sigma}_{i,t+j}^2 \quad (4.19)$$

una vez que se han simulado por ejemplo 1,000,000 trayectorias ($M=1,000,000$) cada día hasta la fecha de vencimiento, T , es posible calcular los precios estimados del activo neutral al riesgo en el vencimiento como:

$$S_{i,t+T} = S_t e^{\sum_{j=1}^T \hat{R}_{i,t+j}}, \forall i = 1, 2, \dots, M \quad (4.20)$$

el precio de la opción de compra (call) se calcula como el promedio sobre los pagos futuros estimados traídos a valor presente, como se muestra a continuación:

$$C_{GARCH} = e^{-rT} E \left[\max(S_{t+T} - K, 0 | F_t) \right] \approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{i,t+T} - K, 0) \quad (4.21)$$

para el caso de la opción de venta (put) se tiene:

$$P_{GARCH} = e^{-rT} E \left[\max(K - S_{t+T}, 0 | F_t) \right] \approx e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(K - S_{i,t+T}, 0) \quad (4.22)$$

así, estamos utilizando la simulación para calcular el pago promedio futuro, que es usado como una estimación del valor esperado en las ecuaciones (4.21) y (4.22). A mayor número de realizaciones, el promedio converge a la esperanza. Con base en las ideas anteriores, se puede proponer el siguiente algoritmo para determinar el valor de la opción:

- (1) Elegir y calibrar un proceso GARCH para la volatilidad de los rendimientos del subyacente de la opción.
- (2) Generar muestras del proceso GARCH elegido.
- (3) A partir de las muestras obtenidas, generar rendimientos del subyacente en un mundo neutral al riesgo.

- (4) Repetir los pasos (2) y (3) M veces con la función de pago de la opción.
- (5) Calcular el promedio de las M muestras de la función de pago para obtener una estimación de la esperanza del pago de la opción.
- (6) Descontar el promedio obtenido a la tasa libre de riesgo para obtener una estimación del valor de la opción.

Observe que entre mayor sea el número de realizaciones, mayor será la precisión del resultado. Por supuesto, la precisión también depende del método usado para generar los números aleatorios por lo que es recomendable llevar a cabo una prueba de aleatoriedad.

4.7 Resultados

Se muestra la valuación de opciones europeas de compra sobre veintiuno de los treinta y cinco componentes del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC); bajo el supuesto que la volatilidad del activo subyacente no es constante y sigue un proceso GARCH (1,1). Los precios de dichas opciones son simulados con el paquete Matlab a través del método Monte Carlo, los cuales conforman las estrategias de cobertura de riesgos Bull (expectativa del inversionista a la alza) y Bear (expectativa del inversionista a la baja); el análisis se obtiene a partir de datos históricos diarios de las cotizaciones de los componentes del IPC anteriormente descritos; a partir del primero de Febrero de 2008 hasta el veintidós de Marzo de 2013 (1294 observaciones) comparando las valuaciones obtenidas a 45, 60 y 90 días. Las cuales se observan en la siguiente sección.

4.8 Análisis de Resultados

De los treinta y cinco componentes del IPC se analizaron veintiuno, la distribución por sector se observa en el siguiente cuadro:

Cuadro 4.3: Distribución de los componentes que conforman el IPC

Componente	Sector (eco)	Subsector (NAICS tercera clasificación)
GAPB	Servicios de transporte	Servicios relacionados con el transporte aéreo
AC	Alimentos y bebidas	Industria de bebidas
URBI	Construcción	Construcción de edificios residenciales
GRUMAB	Alimentos y bebidas	Molienda de granos y de semillas oleaginosas
GEOB	Construcción	Construcción de edificios residenciales
ELEKTRA	Comercio	Tienda de mercancías diversas
BIMBOA	Alimentos y bebidas	Elaboración de productos de panadería y tortillas
ALSEA	Alimentos y bebidas	Industria alimentaria
HOMEX	Construcción	Construcción de edificios residenciales
AMXL	Telecomunicación	Otras telecomunicaciones
GFNORTEO	Finanzas y seguros	Bancos
WALMEXV	Comercio	Tienda de mercancías diversas
ALFAA	Siderurgia y metalurgia	Fabricación de productos metálicos forjados y troquelados
KOFL	Alimentos y bebidas	Industria de bebidas
GMEXICOB	Minería	Minería de minerales metálicos y no metálicos
CEMEXCPO	Minerales no metálicos	Fabricación de cemento y productos de concreto
GFINBURO	Finanzas y seguros	Actividades bursátiles cambiarias y de inversión financiera
MEXCHEM	Química	Fabricación de productos químicos
KIMBERA	Papel y celulosa	Fabricación de productos de papel y cartón
ICHB	Siderurgia y metalurgia	Fabricación de herramientas de mano sin motor y utensilios de cocina metálicos
ASURB	Servicios de transporte	Servicios relacionados con el transporte aéreo

Fuente: Elaboración propia con datos de Economática.

En el cuadro 4.3 se observa que de los 21 componentes analizados del IPC, la distribución que se tienen respecto al sector económico es la siguiente: Alimentos y bebidas (5), Comercio (2), Construcción (3), Finanzas y seguros (2), Minerales no metálicos (1), Minería (1), Papel y celulosa (1), Química (1), Servicios de transporte (2), Siderurgia y metalurgia (2), Telecomunicación (1).

La volatilidad para cada componente analizado del IPC y la volatilidad para el IPC, se calculó mediante un modelo GARCH, el cual es alimentado por los rendimientos logarítmicos históricos. Lo anterior genera que la volatilidad a través del tiempo no sea constante, por lo que se procede a realizar 100,000 simulaciones por el método Monte Carlo para calcular el precio de las opciones europeas de compra (Call) sobre cada activo subyacente, con sus respectivos parámetros con valuaciones a 45,60 y 90 días, a partir del 22/03/2013, como se muestra en las siguientes cuadros:

Cuadro 4.4: Precio de la opción Call sobre GAPB, con precio inicial del activo subyacente de 69.5

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
67	3.8003	4.1791	4.8296
68	3.1887	3.5915	4.2743
69	2.6449	3.0618	3.766
70	2.1683	2.591	3.3038
71	1.7577	2.1769	2.8868
72	1.4097	1.8167	2.5134
73	1.1195	1.5062	2.181

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.5: Precio de la opción Call sobre AC, con precio inicial del activo subyacente de 90.79

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
87	5.0602	34.7760	226.1801
88	4.4115	34.7636	226.1758
89	3.8244	34.7521	226.1717
90	3.2992	34.7413	226.1677
91	2.8356	34.7312	226.1638
92	2.4323	34.7216	226.1600
93	2.0847	34.7127	226.1564

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.6: Precio de la opción Call sobre URBI, con precio inicial del activo subyacente de 3.14

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
1	2.1286	2.1248	2.1175
2	1.1340	1.1323	1.1308
3	0.1511	0.1599	0.1801
4	2.029E-06	6.0112E-06	4.40E-05
5	0	0	4.19E-06
6	0	0	0
7	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.7: Precio de la opción Call sobre GRUMAB, con precio inicial del activo subyacente de 56.47

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
54	2.4683	2.479	21.3372
55	1.5077	1.5626	21.3358
56	0.6844	0.8466	21.3345
57	0.2324	0.4734	21.3332
58	0.0898	0.3343	21.3321
59	0.0475	0.2833	21.3311
60	0.0308	0.2602	21.3302

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.8: Precio de la opción Call sobre GEOB, con precio inicial del activo subyacente de 7.02

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
4	3.0039	2.9985	2.9878
5	2.0092	2.0056	1.9984
6	1.0146	1.0128	1.0094
7	0.0959	0.106	0.1211
8	3.50E-04	9.00E-04	0.0029
9	1.93E-05	5.88E-05	4.27E-04
10	4.86E-07	5.59E-07	1.30E-04

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.9: Precio de la opción Call sobre ELEKTRA, con precio inicial del activo subyacente de 491.49

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
340	150.6806	150.4114	149.8733
390	100.9477	100.7674	100.4069
440	51.2149	51.1236	50.9426
490	3.5264	4.1388	5.3055
540	0.0017	0.0102	0.1166
590	0	5.79E-04	0.0266
640	0	0	0.0119

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.10: Precio de la opción Call sobre BIMBOA, con precio inicial del activo subyacente de 36.6

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
34	2.9808	3.1646	3.5137
35	2.2596	2.4841	2.8883
36	1.6541	1.905	2.3453
37	1.1706	1.4302	1.8835
38	0.8036	1.0545	1.4989
39	0.5385	0.7658	1.1842
40	0.3546	0.5493	0.931

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.11: Precio de la opción Call sobre ALSEA, con precio inicial del activo subyacente de 32.35

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
30	2.3374	2.3333	2.3251
31	1.343	1.3412	1.3395
32	0.3887	0.4071	0.4399
33	0.0108	0.0202	0.0417
34	6.05E-05	3.36E-04	0.002
35	0	1.99E-06	1.29E-04
36	0	0	1.52E-05

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.12: Precio de la opción Call sobre HOMEX, con precio inicial del activo subyacente de 18.89

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
16	2.8746	2.8694	2.8593
17	1.8801	1.8771	1.8718
18	0.8981	0.9058	0.9223
19	0.1725	0.206	0.2596
20	0.0121	0.0232	0.0499
21	7.73E-04	0.0026	0.0106
22	6.23E-05	3.46E-04	0.0029

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.13: Precio de la opción Call sobre AMXL, con precio inicial del activo subyacente de 12.58

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
10	2.608	2.637	2.7002
11	1.7332	1.8026	1.9236
12	1.0301	1.1341	1.3021
13	0.5494	0.6636	0.8463
14	0.2692	0.3683	0.5361
15	0.1255	0.1976	0.3355
16	0.0571	0.1044	0.2094

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.14: Precio de la opción Call sobre GFNORTEO, con precio inicial del activo subyacente de 95.23

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
92	3.2166	3.2167	3.2256
93	2.2351	2.2491	2.2907
94	1.3031	1.3513	1.4496
95	0.5608	0.6473	0.7975
96	0.1731	0.2499	0.3907
97	0.0479	0.0888	0.1847
98	0.0147	0.0334	0.0911

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.15: Precio de la opción Call sobre WALMEXV, con precio inicial del activo subyacente de 38.52

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
36	2.9474	3.1356	3.4726
37	2.2385	2.463	2.8466
38	1.6414	1.8878	2.3007
39	1.1617	1.4133	1.8336
40	0.795	1.0352	1.4432
41	0.5279	0.7433	1.1228
42	0.3425	0.5246	0.8653

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.16: Precio de la opción Call sobre ALFAA, con precio inicial del activo subyacente de 29.83

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
27	2.8149	2.8099	2.8
28	1.8203	1.8172	1.8118
29	0.83	0.833	0.8422
30	0.0804	0.1046	0.1451
31	0.0013	0.0032	0.0093
32	5.41E-05	1.64E-04	9.85E-04
33	1.01E-05	2.73E-05	1.78E-04

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.17: Precio de la opción Call sobre KOFL, con precio inicial del activo subyacente de 194.42

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
105	88.9422	88.7833	88.4692
135	59.1037	59.007	58.8801
165	29.491	29.7675	30.6363
195	6.2145	7.5928	10.0351
225	0.3614	0.8053	2.0144
255	0.0137	0.0623	0.3282
285	6.81E-04	0.0048	0.0548

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.18: Precio de la opción Call sobre GMEXICOB, con precio inicial del activo subyacente de 49.27

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
47	2.2579	2.2539	2.2465
48	1.2646	1.2651	1.2705
49	0.355	0.3856	0.439
50	0.0179	0.0333	0.0682
51	3.19E-04	0.0013	0.0067
52	7.25E-06	4.03E-05	7.44E-04
53	0	0	9.49E-05

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.19: Precio de la opción Call sobre CEMEXCPO, con precio inicial del activo subyacente de 15.11

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
12	3.0934	3.0879	3.0768
13	2.0987	2.095	2.0875
14	1.1041	1.1021	1.0982
15	0.1381	0.1496	1.70E-01
16	9.61E-06	6.74E-05	6.91E-04
17	0	0	8.17E-06
18	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.20: Precio de la opción Call sobre GFINBURO, con precio inicial del activo subyacente de 33.5

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
31	2.4866	2.4822	2.4733
32	1.492	1.4893	1.4842
33	0.5067	0.5141	0.5309
34	0.0105	0.0196	0.0397
35	3.99E-06	3.10E-05	4.06E-04
36	0	0	3.55E-06
37	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.21: Precio de la opción Call sobre MEXCHEM, con precio inicial del activo subyacente de 63.83

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
62	1.8217	1.8217	1.8273
63	0.8606	0.8836	0.9309
64	0.1843	0.2301	0.3069
65	0.0135	0.0275	0.0621
66	5.93E-04	0.0022	0.0095
67	2.42E-05	1.41E-04	0.0014
68	0	3.89E-06	2.27E-04

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.22: Precio de la opción Call sobre KIMBERA, con precio inicial del activo subyacente de 39.77

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
37	3.3977	3.6197	4.0058
38	2.7097	2.9632	3.3922
39	2.115	2.389	2.847
40	1.6165	1.8992	2.3695
41	1.212	1.4914	1.9578
42	0.8946	1.1591	1.6076
43	0.6527	0.8931	1.313

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.23: Precio de la opción Call sobre ICHB, con precio inicial del activo subyacente de 103.01

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
90	12.9405	12.9174	12.8712
95	7.9672	7.953	7.9246
100	2.9961	2.9951	3.0006
105	0.0194	0.0394	0.0884
110	0	0	1.73E-04
115	0	0	0
120	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.24: Precio de la opción Call sobre ASURB, con precio inicial del activo subyacente de 165.38

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
105	60.0574	59.9502	59.7411
125	40.1681	40.1152	40.0951
145	2.06E+01	20.9586	21.8059
165	5.6375	6.6984	8.5436
185	0.6364	1.1771	2.3876
205	0.0396	0.1382	0.5299
225	0.0014	0.0127	0.106

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 4.25: Precio de la opción Call sobre IPC, con precio inicial del activo subyacente de 42,686.68 puntos

Precio de ejercicio (K)	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 60 días	Call GARCH a 90 días
40000	2.78E+03	2.86E+03	3.02E+03
41000	1.95E+03	2.07E+03	2.29E+03
42000	1.25E+03	1.40E+03	1.67E+03
43000	731.7023	896.2864	1.18E+03
44000	395.2637	544.3217	812.2133
45000	201.2439	317.4673	547.811
46000	99.0778	180.1104	365.2833

Fuente: Elaboración propia.

Para los cálculos representados en los cuadros anteriores se trabajó con información real, es decir, la información de las cotizaciones se extrajo de BLOOMBERG, la tasa de interés se obtuvo de la curva TIIE 28-IRS y se tomó la convención del plazo de 360 días como un año, por lo que en el cuadro 4.26 se muestran los valores de los parámetros de la tasa de interés y la temporalidad utilizada:

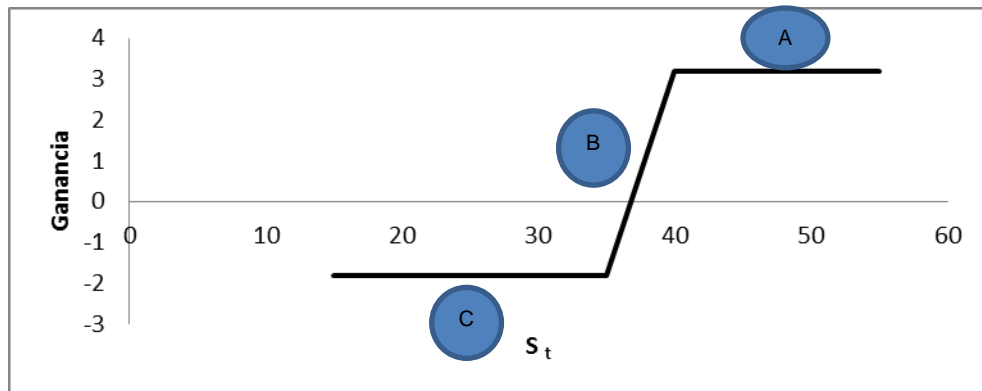
Cuadro 4.26: Valores de los parámetros TIIE 28-IRS y temporalidad a 45, 60 y 90 días, utilizados para la valuación del precio de las opciones europeas de compra simuladas por el método Monte Carlo.

Plazo	TIIE 28-IRS	Tiempo
45	4.345389	0.125
60	4.346715	0.167
90	4.351325	0.25

Fuente: Elaboración propia.

A partir de la obtención de los precios de las opciones europeas de compra anteriormente descritos, se construyen 792 estrategias de cobertura de riesgos (Bull y Bear) las cuales se dividen en 3 zonas como se muestra en las siguientes gráficas:

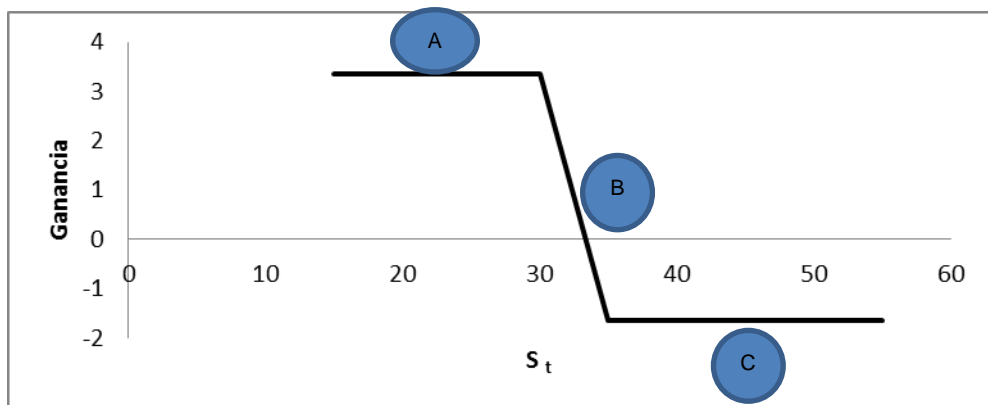
Gráfica 4.1: Representación por zona de la estrategia Bull



Fuente: Elaboración propia.

La estrategia se compone por tres zonas. La **zona c**, representa la peor pérdida que se obtiene, en la **zona b** se pueden tener ganancias o pérdidas intermedias y en la **zona a** se tiene la máxima ganancia, por lo cual la expectativa del inversionista con la estrategia Bull es a la alza, es decir, espera que el valor del activo subyacente aumente.

Gráfica 4.2: Representación por zona de la estrategia Bear



Fuente: Elaboración propia.

La estrategia se compone por tres zonas. La **zona c**, representa la peor pérdida que se obtiene, en la **zona b** se pueden tener ganancias o pérdidas intermedias y en la **zona a** se tiene la máxima ganancia, por lo cual la expectativa del inversionista con la estrategia Bear es a la baja, es decir, espera que el valor del activo subyacente disminuya.

Al realizar la valuación a 45 días se obtuvieron los resultados que se muestran en los siguientes cuadros:

Cuadro 4.27: Distribución de las 132 estrategias Bull con plazo a 45 días

Componente	ZONA C	ZONA B	ZONA A
GAPB	4	1	1
AC	0	0	6
URBI	5	1	0
GRUMAB	0	0	6
GEOB	4	1	1
ELEKTRA	2	1	3
BIMBOA	0	1	5
ALSEA	0	0	6
HOMEX	6	0	0
AMXL	2	1	3
GFNORTEO	4	1	1
WALMEXV	5	1	0
ALFAA	3	1	2
KOFL	2	1	3
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	3	1	2
GFINBURO	2	1	3
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	1	1	4
ICHB	4	1	1
ASURB	4	1	1
SUMA	63	15	48
IPC	3	1	2

Fuente: Elaboración propia.

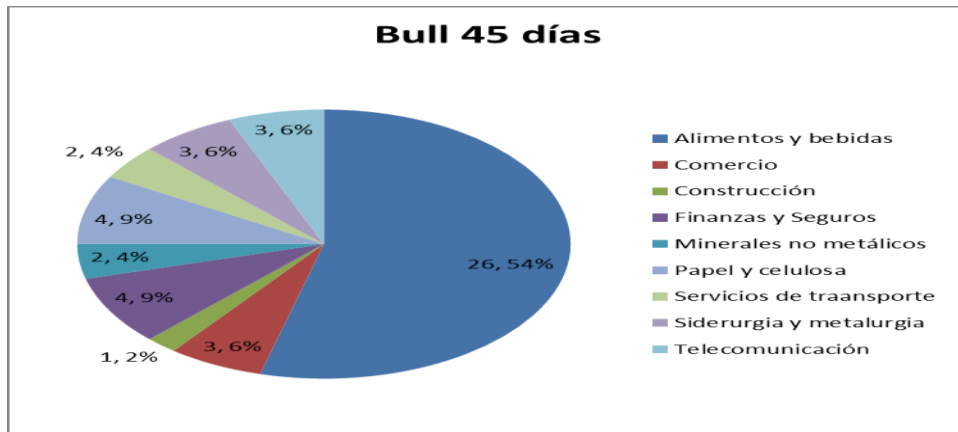
Cuadro 4.28: Distribución de las 132 estrategias Bear con plazo a 45 días

Componente	ZONA A	ZONA B	ZONA C
GAPB	4	1	1
AC	0	0	6
URBI	5	1	0
GRUMAB	0	0	6
GEOB	4	1	1
ELEKTRA	2	1	3
BIMBOA	0	1	5
ALSEA	0	0	6
HOMEX	6	0	0
AMXL	2	1	3
GFNORTEO	4	1	1
WALMEXV	5	1	0
ALFAA	3	1	2
KOFL	2	1	3
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	3	1	2
GFINBURO	2	1	3
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	1	1	4
ICHB	4	1	1
ASURB	4	1	1
SUMA	63	15	48
IPC	3	1	2

Fuente: Elaboración propia.

La distribución sectorial de la máxima ganancia obtenida con la estrategia, se observa en las siguientes gráficas:

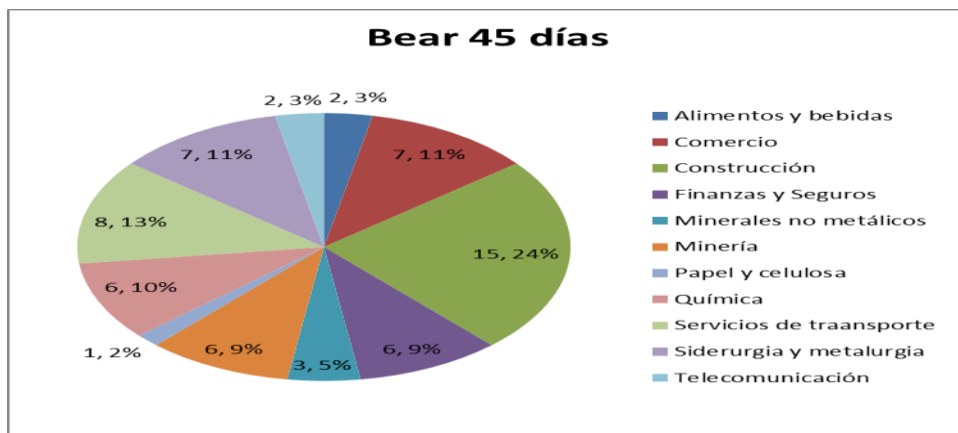
Gráfica 4.3: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bull a 45 días.



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que en los sectores de Minería y Química nunca se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada no es adecuada para dichos sectores.

Gráfica 4.4: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bear a 45 días



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que todos los sectores se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada es adecuada.

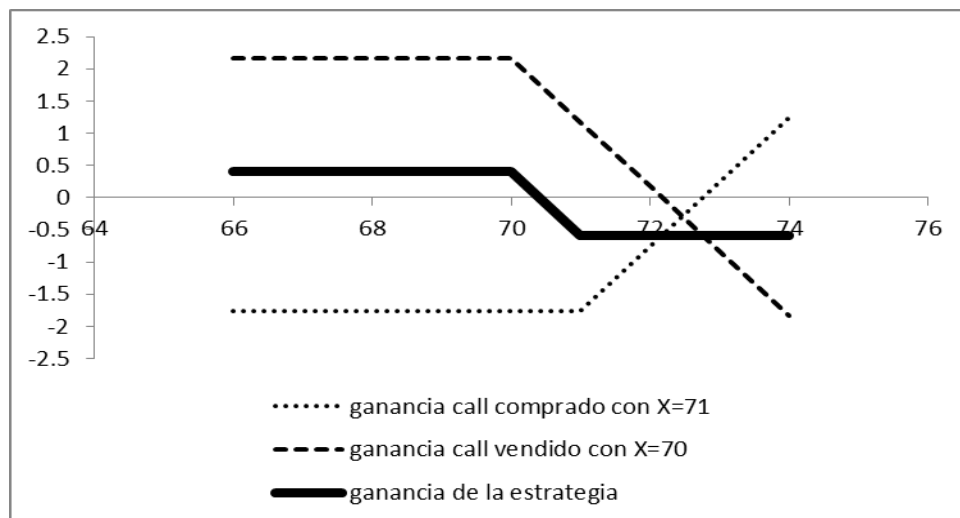
Los cuadros 4.27 y 4.28 reflejan el análisis sobre las estrategias de cobertura construidas con las opciones sobre los subyacentes que componen el IPC y las opciones sobre el mismo IPC, considerando el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento, es decir, a 45 días. Asimismo en las gráficas 4.3 y 4.4 se puede apreciar el análisis por sectores de dichas estrategias. Para ejemplificar de manera más clara al lector la expectativa del inversionista, en los siguientes cuadros se observa estrategias de cobertura de riesgos con sus respectivas gráficas:

Cuadro 4.29: Estrategia Bear para el componente GAPB

S	ganancia call comprado con X=71	ganancia call vendido con X=70	ganancia de la estrategia
66	-1.7577	2.1683	0.4106
67	-1.7577	2.1683	0.4106
68	-1.7577	2.1683	0.4106
69	-1.7577	2.1683	0.4106
70	-1.7577	2.1683	0.4106
71	-1.7577	1.1683	-0.5894
72	-0.7577	0.1683	-0.5894
73	0.2423	-0.8317	-0.5894
74	1.2423	-1.8317	-0.5894
68.78	-1.7577	2.1683	0.4106

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.5: Representación de expectativa a la baja para el componente GAPB



Fuente: Elaboración propia.

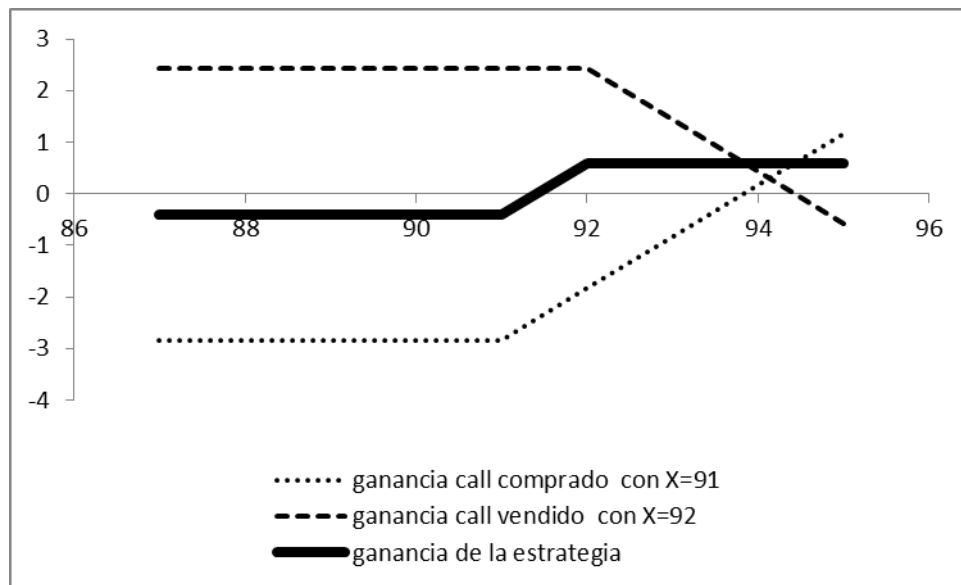
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 70 para valores del subyacente $S_t \in [73, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.30: Estrategia Bull para el componente AC

S	ganancia call comprado con X=91	ganancia call vendido con X=92	ganancia de la estrategia
87	-2.8356	2.4323	-0.4033
88	-2.8356	2.4323	-0.4033
89	-2.8356	2.4323	-0.4033
90	-2.8356	2.4323	-0.4033
91	-2.8356	2.4323	-0.4033
92	-1.8356	2.4323	0.5967
93	-0.8356	1.4323	0.5967
94	0.1644	0.4323	0.5967
95	1.1644	-0.5677	0.5967
102.08	8.2444	-7.6477	0.5967

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.6: Representación de expectativa a la alza para el componente AC



Fuente: Elaboración propia.

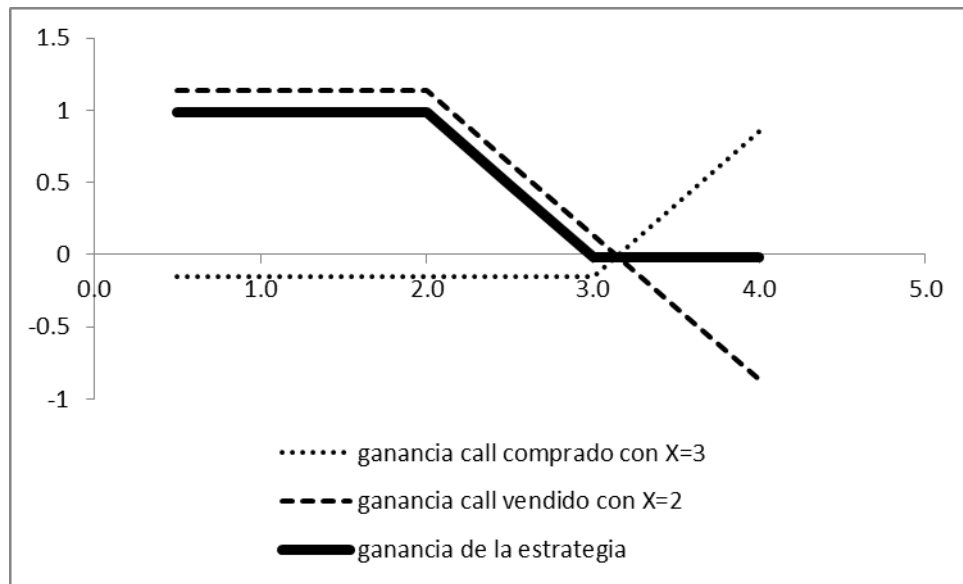
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 92 para valores del subyacente $S_t \in [94, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.31: Estrategia Bear para el componente URBI

S	ganancia call comprado con X=3	ganancia call vendido con X=2	ganancia de la estrategia
0.5	-0.1511	1.134	0.9829
1	-0.1511	1.134	0.9829
1.5	-0.1511	1.134	0.9829
2	-0.1511	1.134	0.9829
2.5	-0.1511	0.634	0.4829
3	-0.1511	0.134	-0.0171
3.5	0.3489	-0.366	-0.0171
4	0.8489	-0.866	-0.0171
1.95	-0.1511	1.134	0.9829

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.7: Representación de expectativa a la baja para el componente URBI



Fuente: Elaboración propia.

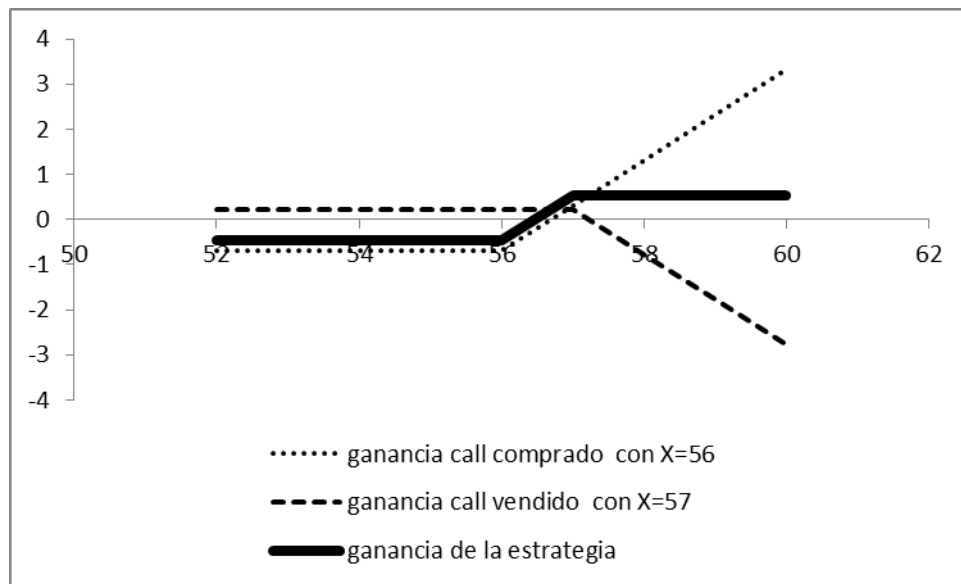
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 2 para valores del subyacente $S, \in [3.5, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.32: Estrategia Bull para el componente GRUMAB

S	ganancia call comprado con X=56	ganancia call vendido con X=57	ganancia de la estrategia
52	-0.6844	0.2324	-0.452
53	-0.6844	0.2324	-0.452
54	-0.6844	0.2324	-0.452
55	-0.6844	0.2324	-0.452
56	-0.6844	0.2324	-0.452
57	0.3156	0.2324	0.548
58	1.3156	-0.7676	0.548
59	2.3156	-1.7676	0.548
60	3.3156	-2.7676	0.548
60.50	3.8156	-3.2676	0.548

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.8: Representación de expectativa a la alza para el componente GRUMAB



Fuente: Elaboración propia.

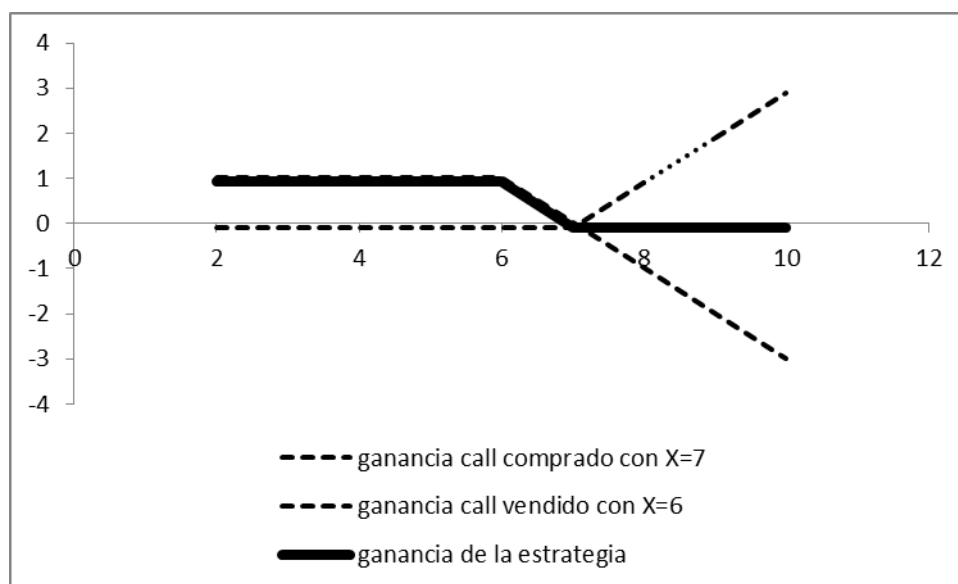
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 57 para valores del subyacente $S_t \in [57, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.33: Estrategia Bear para el componente GEOB

S	ganancia call comprado con X=7	ganancia call vendido con X=6	ganancia de la estrategia
2	-0.0959	1.0146	0.9187
3	-0.0959	1.0146	0.9187
4	-0.0959	1.0146	0.9187
5	-0.0959	1.0146	0.9187
6	-0.0959	1.0146	0.9187
7	-0.0959	0.0146	-0.0813
8	0.9041	-0.9854	-0.0813
9	1.9041	-1.9854	-0.0813
10	2.9041	-2.9854	-0.0813
5.83	-0.0959	1.0146	0.9187

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.9: Representación de expectativa a la baja para el componente GEOB



Fuente: Elaboración propia.

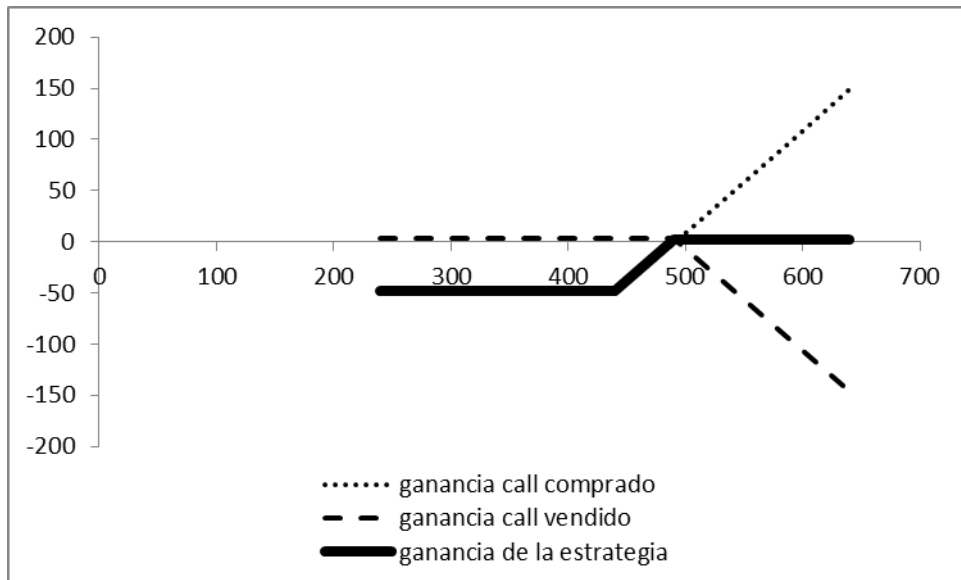
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 6 para valores del subyacente $S_t \in [8, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.34: Estrategia Bull para el componente ELEKTRA

S	ganancia call comprado con X=440	ganancia call vendido con X=490	ganancia de la estrategia
240	-51.2149	3.5264	-47.6885
290	-51.2149	3.5264	-47.6885
340	-51.2149	3.5264	-47.6885
390	-51.2149	3.5264	-47.6885
440	-51.2149	3.5264	-47.6885
490	-1.2149	3.5264	2.3115
540	48.7851	-46.4736	2.3115
590	98.7851	-96.4736	2.3115
640	148.7851	-146.4736	2.3115
536.52	45.3051	-42.9936	2.3115

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.10: Representación de expectativa a la alza para el componente ELEKTRA



Fuente: Elaboración propia.

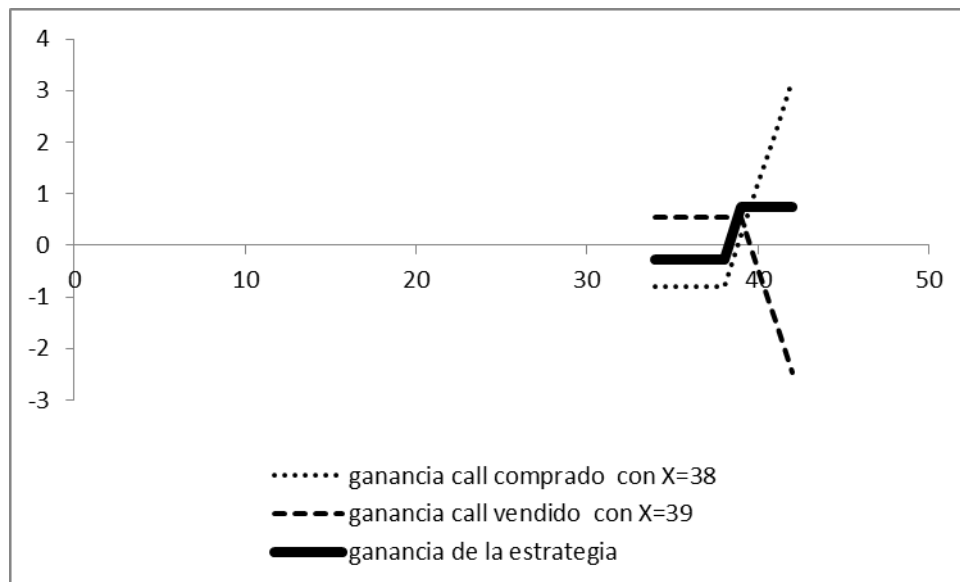
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 490 para valores del subyacente $S, \in [540, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.35: Estrategia Bull para el componente BIMBOA

S	ganancia call comprado con X=38	ganancia call vendido con X=39	ganancia de la estrategia
34	-0.8036	0.5385	-0.2651
35	-0.8036	0.5385	-0.2651
36	-0.8036	0.5385	-0.2651
37	-0.8036	0.5385	-0.2651
38	-0.8036	0.5385	-0.2651
39	0.1964	0.5385	0.7349
40	1.1964	-0.4615	0.7349
41	2.1964	-1.4615	0.7349
42	3.1964	-2.4615	0.7349
39.44	0.6364	0.0985	0.7349

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.11: Representación de expectativa a la alza para el componente BIMBOA



Fuente: Elaboración propia.

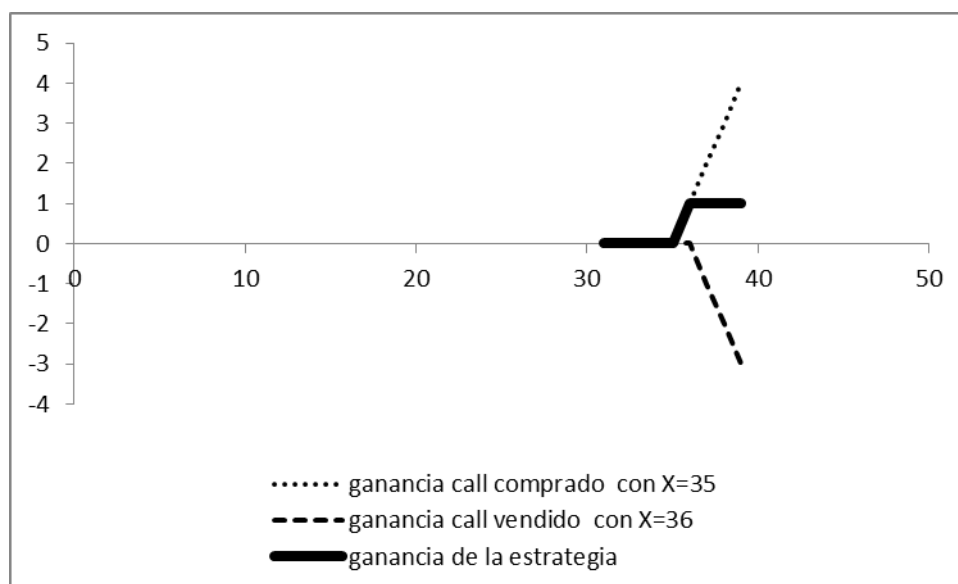
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 39 para valores del subyacente $S_t \in [39, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.36: Estrategia Bull para el componente ALSEA

S	ganancia call comprado con X=35	ganancia call vendido con X=36	ganancia de la estrategia
31	0	0	0
32	0	0	0
33	0	0	0
34	0	0	0
35	0	0	0
36	1	0	1
37	2	-1	1
38	3	-2	1
39	4	-3	1
36.15	1.15	-0.15	1

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.12: Representación de expectativa a la alza para el componente ALSEA



Fuente: Elaboración propia.

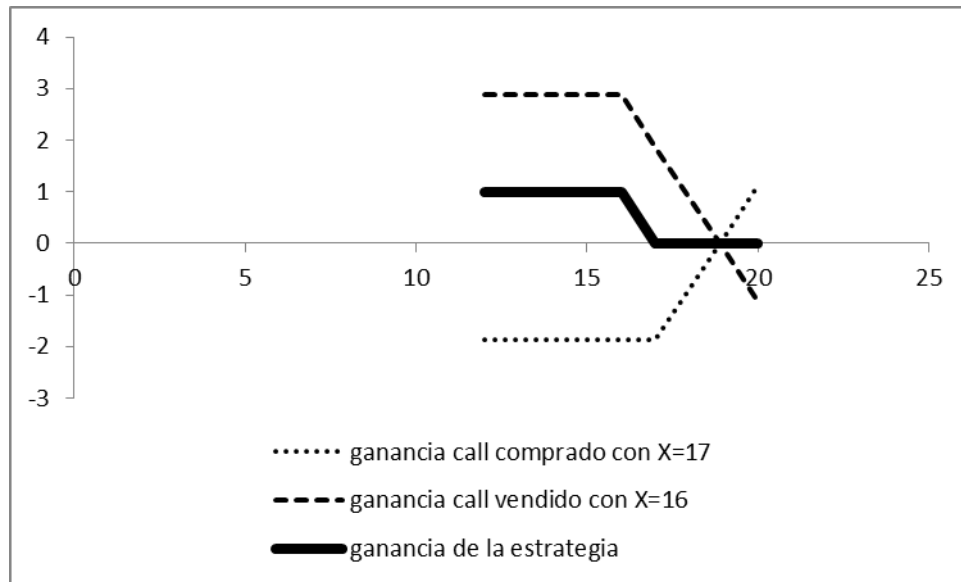
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 36 para valores del subyacente $S_t \in [36, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.37: Estrategia Bear para el componente HOMEX

S	ganancia call comprado con X=17	ganancia call vendido con X=16	ganancia de la estrategia
12	-1.8801	2.8746	0.9945
13	-1.8801	2.8746	0.9945
14	-1.8801	2.8746	0.9945
15	-1.8801	2.8746	0.9945
16	-1.8801	2.8746	0.9945
17	-1.8801	1.8746	-0.0055
18	-0.8801	0.8746	-0.0055
19	0.1199	-0.1254	-0.0055
20	1.1199	-1.1254	-0.0055
10.82	-1.8801	2.8746	0.9945

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.13: Representación de expectativa a la baja para el componente HOMEX



Fuente: Elaboración propia.

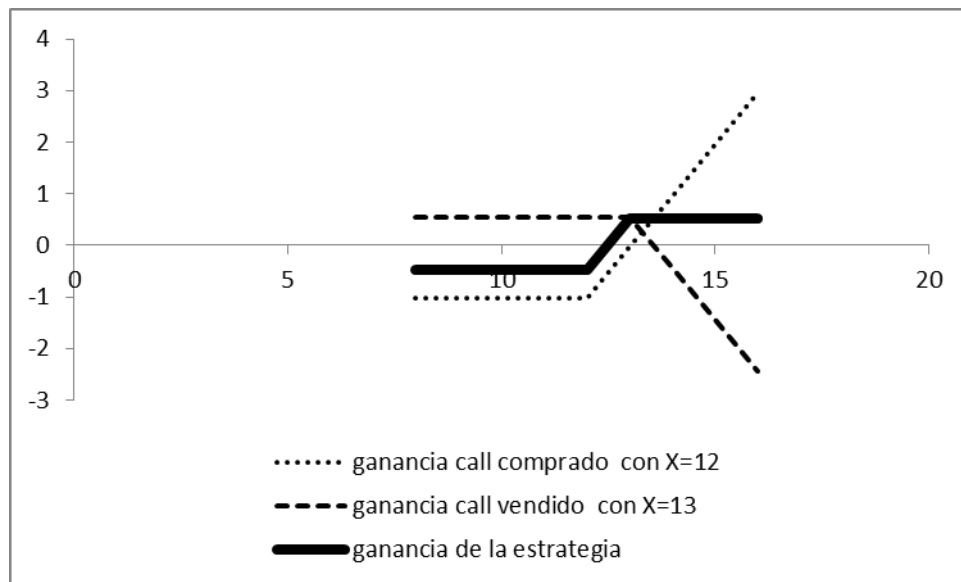
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 16 para valores del subyacente $S_t \in [19, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.38: Estrategia Bull para el componente AMXL

S	ganancia call comprado con X=12	ganancia call vendido con X=13	ganancia de la estrategia
8	-1.0301	0.5494	-0.4807
9	-1.0301	0.5494	-0.4807
10	-1.0301	0.5494	-0.4807
11	-1.0301	0.5494	-0.4807
12	-1.0301	0.5494	-0.4807
13	-0.0301	0.5494	0.5193
14	0.9699	-0.4506	0.5193
15	1.9699	-1.4506	0.5193
16	2.9699	-2.4506	0.5193
13.06	0.0299	0.4894	0.5193

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.14: Representación de expectativa a la alza para el componente AMXL



Fuente: Elaboración propia.

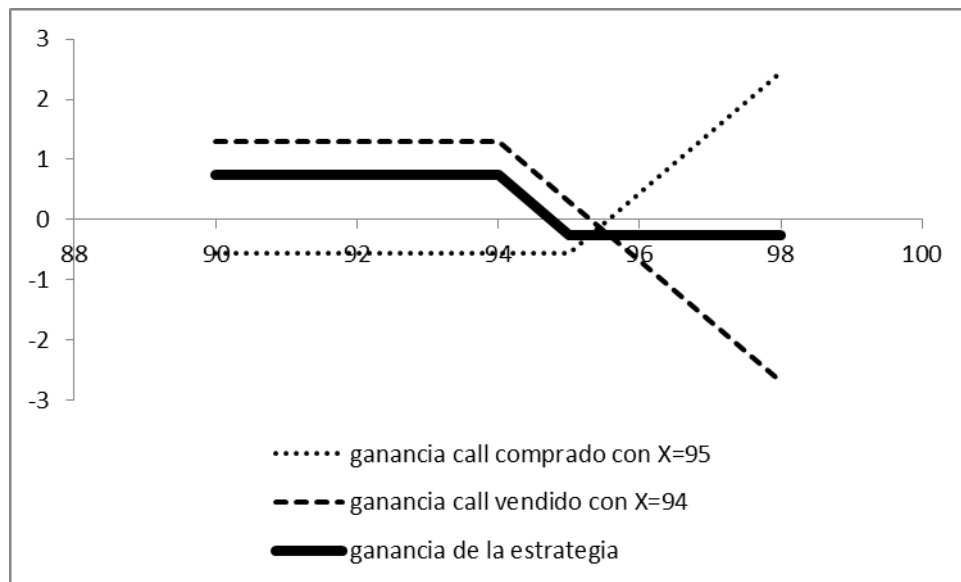
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 13 para valores del subyacente $S_t \in [14, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.39: Estrategia Bear para el componente GFNORTEO

S	ganancia call comprado con X=95	ganancia call vendido con X=94	ganancia de la estrategia
90	-0.5608	1.3031	0.7423
91	-0.5608	1.3031	0.7423
92	-0.5608	1.3031	0.7423
93	-0.5608	1.3031	0.7423
94	-0.5608	1.3031	0.7423
95	-0.5608	0.3031	-0.2577
96	0.4392	-0.6969	-0.2577
97	1.4392	-1.6969	-0.2577
98	2.4392	-2.6969	-0.2577
93.88	-0.5608	1.3031	0.7423

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.15: Representación de expectativa a la baja para el componente GFNORTEO



Fuente: Elaboración propia.

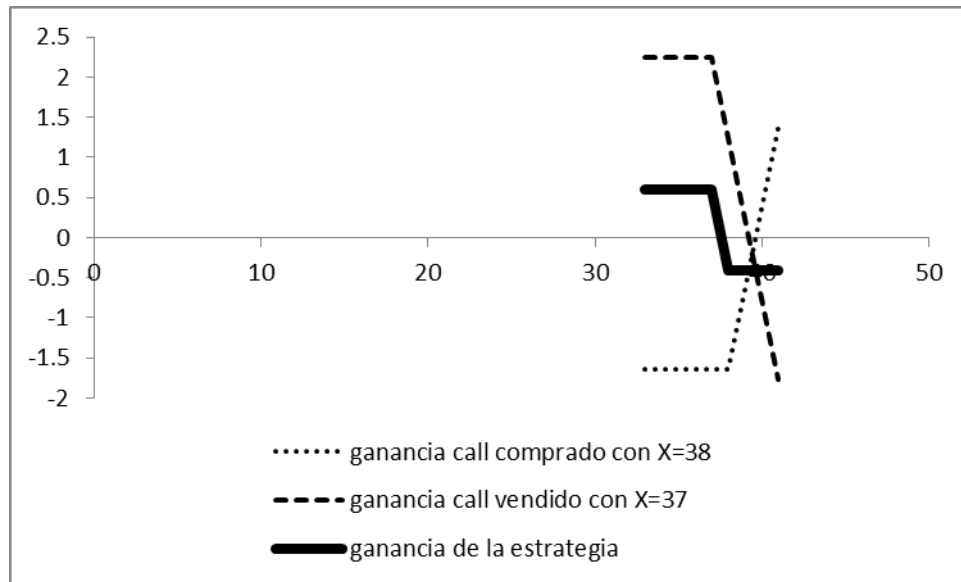
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 94 para valores del subyacente $S_t \in [96, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.40: Estrategia Bear para el componente WALMEXV

S	ganancia call comprado con X=38	ganancia call vendido con X=37	ganancia de la estrategia
33	-1.6414	2.2385	0.5971
34	-1.6414	2.2385	0.5971
35	-1.6414	2.2385	0.5971
36	-1.6414	2.2385	0.5971
37	-1.6414	2.2385	0.5971
38	-1.6414	1.2385	-0.4029
39	-0.6414	0.2385	-0.4029
40	0.3586	-0.7615	-0.4029
41	1.3586	-1.7615	-0.4029
36.75	-1.6414	2.2385	0.5971

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.16: Representación de expectativa a la baja para el componente WALMEXV



Fuente: Elaboración propia.

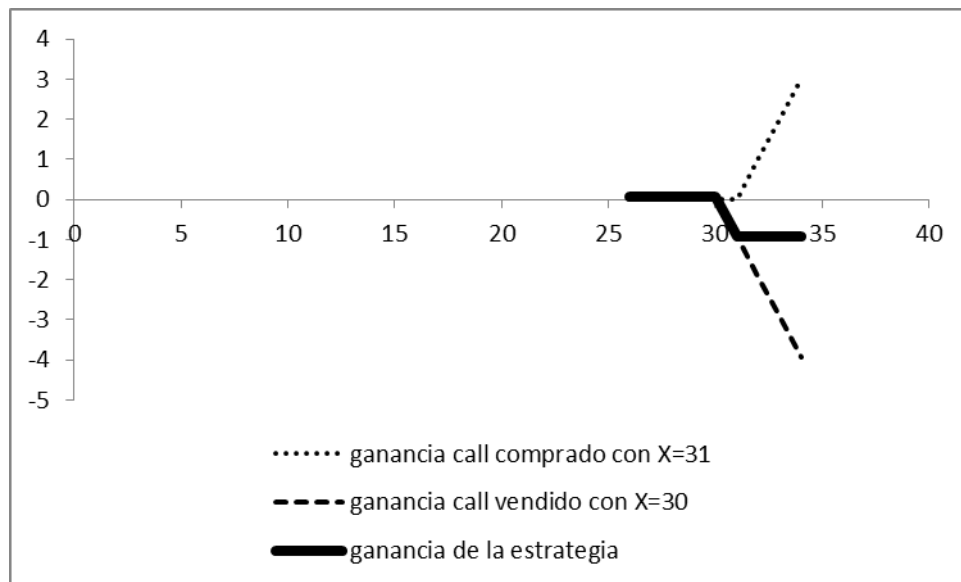
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 37 para valores del subyacente $S_t \in [40, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.41: Estrategia Bear para el componente ALFAA.

S	ganancia call comprado con X=31	ganancia call vendido con X=30	ganancia de la estrategia
26	-0.0013	0.0804	0.0791
27	-0.0013	0.0804	0.0791
28	-0.0013	0.0804	0.0791
29	-0.0013	0.0804	0.0791
30	-0.0013	0.0804	0.0791
31	-0.0013	-0.9196	-0.9209
32	0.9987	-1.9196	-0.9209
33	1.9987	-2.9196	-0.9209
34	2.9987	-3.9196	-0.9209
29.11	-0.0013	0.0804	0.0791

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.17: Representación de expectativa a la baja para el componente ALFAA



Fuente: Elaboración propia.

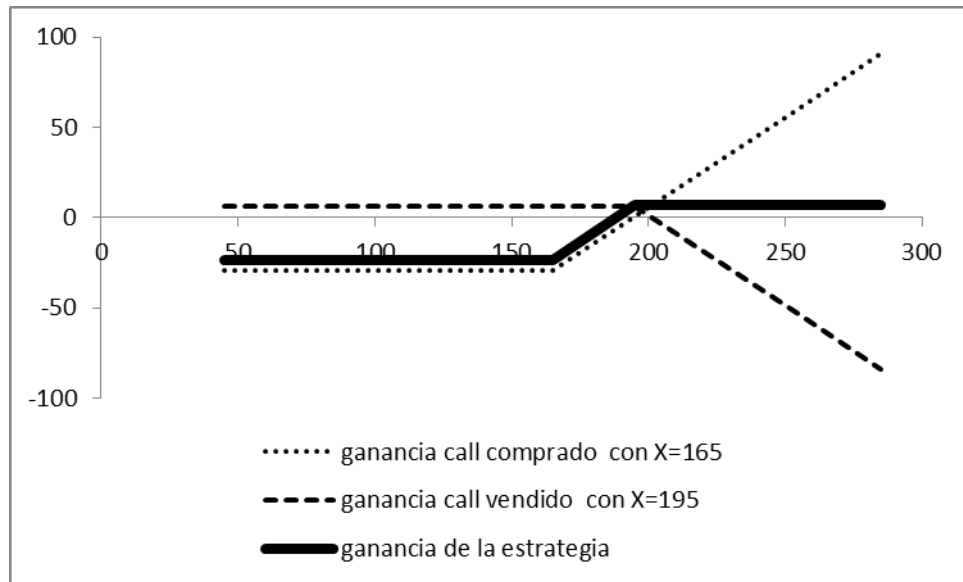
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 30 para valores del subyacente $S_t \in [32, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.42: Estrategia Bull para el componente KOFL

S	ganancia call comprado con X=165	ganancia call vendido con X=195	ganancia de la estrategia
45	-29.491	6.2145	-23.2765
75	-29.491	6.2145	-23.2765
105	-29.491	6.2145	-23.2765
135	-29.491	6.2145	-23.2765
165	-29.491	6.2145	-23.2765
195	0.509	6.2145	6.7235
225	30.509	-23.7855	6.7235
255	60.509	-53.7855	6.7235
285	90.509	-83.7855	6.7235
197.26	2.769	3.9545	6.7235

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.18: Representación de expectativa a la alza para el componente KOFL



Fuente: Elaboración propia.

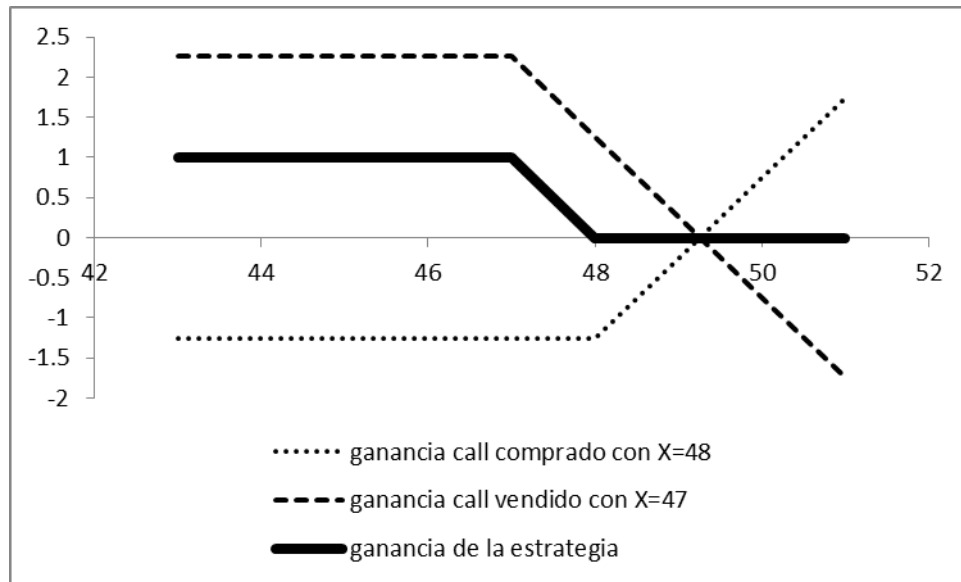
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 195 para valores del subyacente $S, \in [195, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.43: Estrategia Bear para el componente GMEXICOB

S	ganancia call comprado con X=48	ganancia call vendido con X=47	ganancia de la estrategia
43	-1.2646	2.2579	0.9933
44	-1.2646	2.2579	0.9933
45	-1.2646	2.2579	0.9933
46	-1.2646	2.2579	0.9933
47	-1.2646	2.2579	0.9933
48	-1.2646	1.2579	-0.0067
49	-0.2646	0.2579	-0.0067
50	0.7354	-0.7421	-0.0067
51	1.7354	-1.7421	-0.0067
43.70	-1.2646	2.2579	0.9933

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.19: Representación de expectativa a la baja para el componente GMEXICOB



Fuente: Elaboración propia.

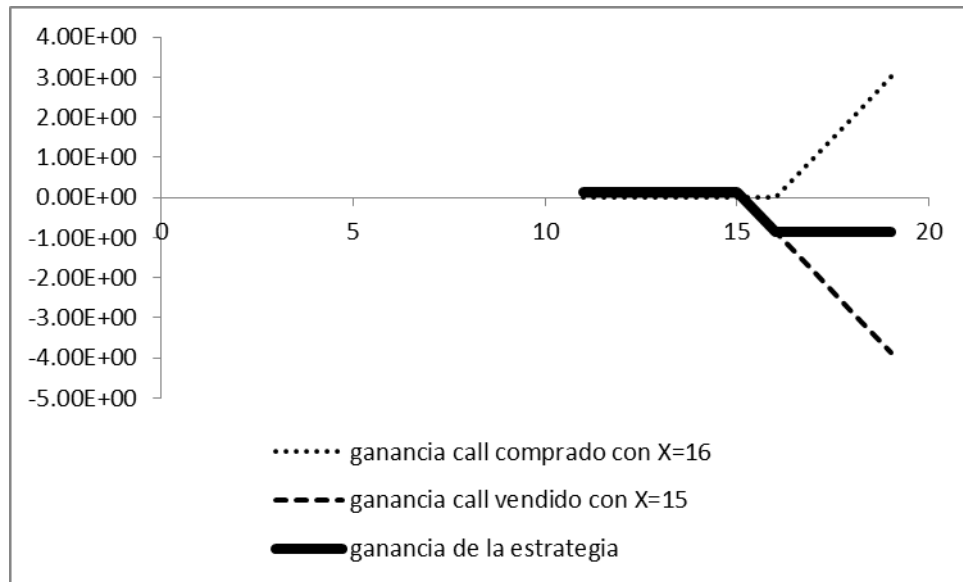
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 47 para valores del subyacente $S_t \in [50, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.44: Estrategia Bear para el componente CEMEXCPO

S	ganancia call comprado con X=16	ganancia call vendido con X=15	ganancia de la estrategia
11	-9.61E-06	0.1381	0.138090387
12	-9.61E-06	0.1381	0.138090387
13	-9.61E-06	0.1381	0.138090387
14	-9.61E-06	0.1381	0.138090387
15	-9.61E-06	0.1381	0.138090387
16	-9.61E-06	-0.8619	-0.861909613
17	1.00E+00	-1.8619	-0.861909613
18	2.00E+00	-2.8619	-0.861909613
19	3.00E+00	-3.8619	-0.861909613
14.47	-9.6127E-06	0.1381	0.138090387

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.20: Representación de expectativa a la baja para el componente CEMEXCPO



Fuente: Elaboración propia.

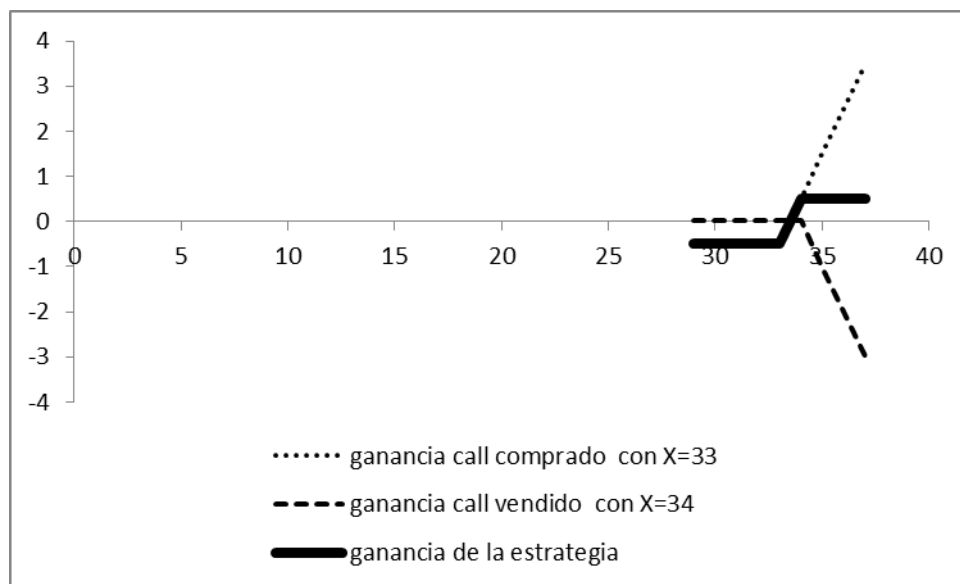
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 15 para valores del subyacente $S_t \in [17, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.45: Estrategia Bull para el componente GFINBURO.

S	ganancia call comprado con X=33	ganancia call vendido con X=34	ganancia de la estrategia
29	-0.5067	0.0105	-0.4962
30	-0.5067	0.0105	-0.4962
31	-0.5067	0.0105	-0.4962
32	-0.5067	0.0105	-0.4962
33	-0.5067	0.0105	-0.4962
34	0.4933	0.0105	0.5038
35	1.4933	-0.9895	0.5038
36	2.4933	-1.9895	0.5038
37	3.4933	-2.9895	0.5038
34.69	1.1833	-0.6795	0.5038

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.21: Representación de expectativa a la alza para el componente GFINBURO



Fuente: Elaboración propia.

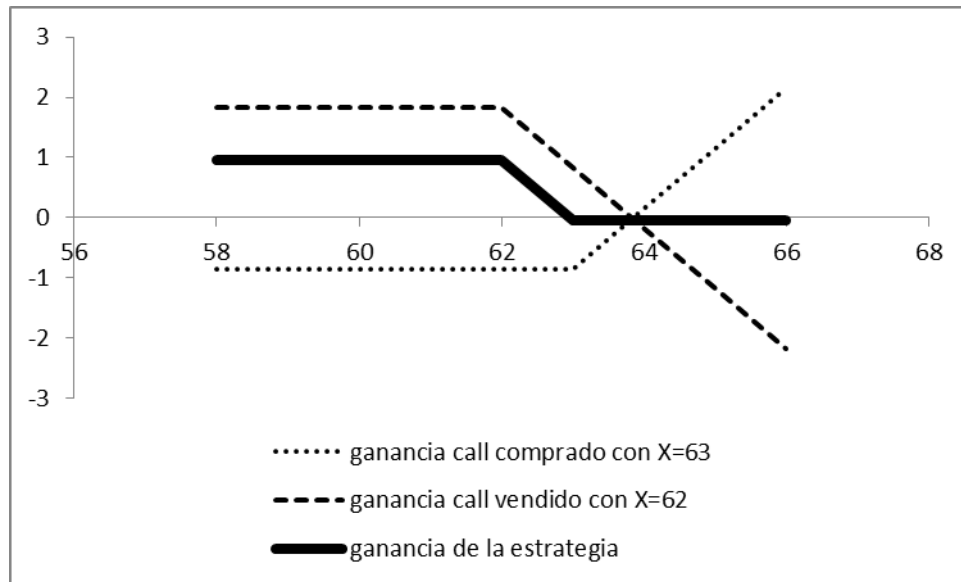
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 34 para valores del subyacente $S_t \in [34, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.46: Estrategia Bear para el componente MEXCHEM

S	ganancia call comprado con X=63	ganancia call vendido con X=62	ganancia de la estrategia
58	-0.8606	1.8217	0.9611
59	-0.8606	1.8217	0.9611
60	-0.8606	1.8217	0.9611
61	-0.8606	1.8217	0.9611
62	-0.8606	1.8217	0.9611
63	-0.8606	0.8217	-0.0389
64	0.1394	-0.1783	-0.0389
65	1.1394	-1.1783	-0.0389
66	2.1394	-2.1783	-0.0389
61.35	-0.8606	1.8217	0.9611

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.22: Representación de expectativa a la baja para el componente MEXCHEM



Fuente: Elaboración propia.

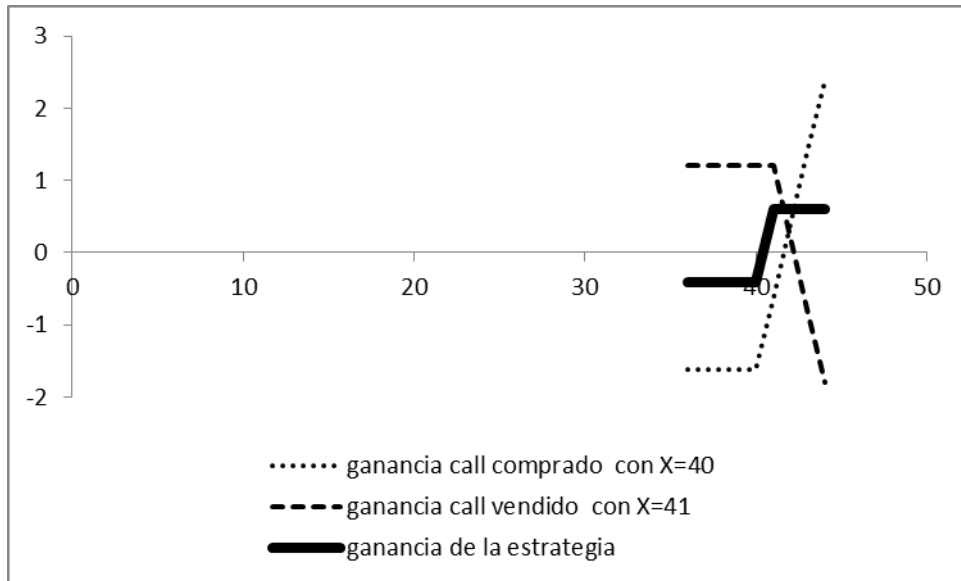
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 62 para valores del subyacente $S_t \in [64, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.47: Estrategia Bull para el componente KIMBERA

S	ganancia call comprado con X=40	ganancia call vendido con X=41	ganancia de la estrategia
36	-1.6165	1.212	-0.4045
37	-1.6165	1.212	-0.4045
38	-1.6165	1.212	-0.4045
39	-1.6165	1.212	-0.4045
40	-1.6165	1.212	-0.4045
41	-0.6165	1.212	0.5955
42	0.3835	0.212	0.5955
43	1.3835	-0.788	0.5955
44	2.3835	-1.788	0.5955
41.29	-0.3265	0.922	0.5955

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.23: Representación de expectativa a la alza para el componente KIMBERA



Fuente: Elaboración propia.

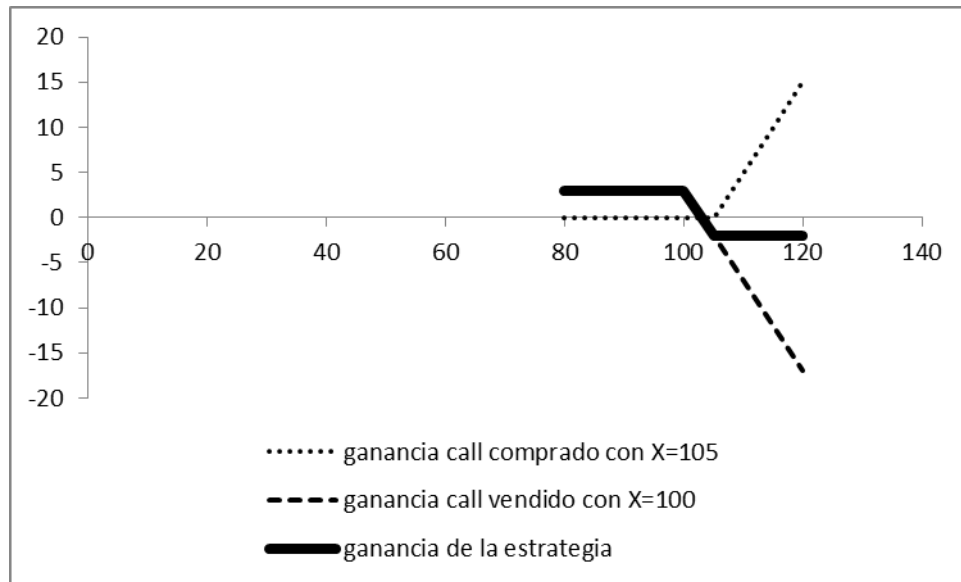
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 41 para valores del subyacente $S_t \in [42, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.48: Estrategia Bear para el componente ICHB

S	ganancia call comprado con X=105	ganancia call vendido con X=100	ganancia de la estrategia
80	-0.0194	2.9961	2.9767
85	-0.0194	2.9961	2.9767
90	-0.0194	2.9961	2.9767
95	-0.0194	2.9961	2.9767
100	-0.0194	2.9961	2.9767
105	-0.0194	-2.0039	-2.0233
110	4.9806	-7.0039	-2.0233
115	9.9806	-12.0039	-2.0233
120	14.9806	-17.0039	-2.0233
95.73	-0.0194	2.9961	2.9767

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.24: Representación de expectativa a la baja para el componente ICHB



Fuente: Elaboración propia.

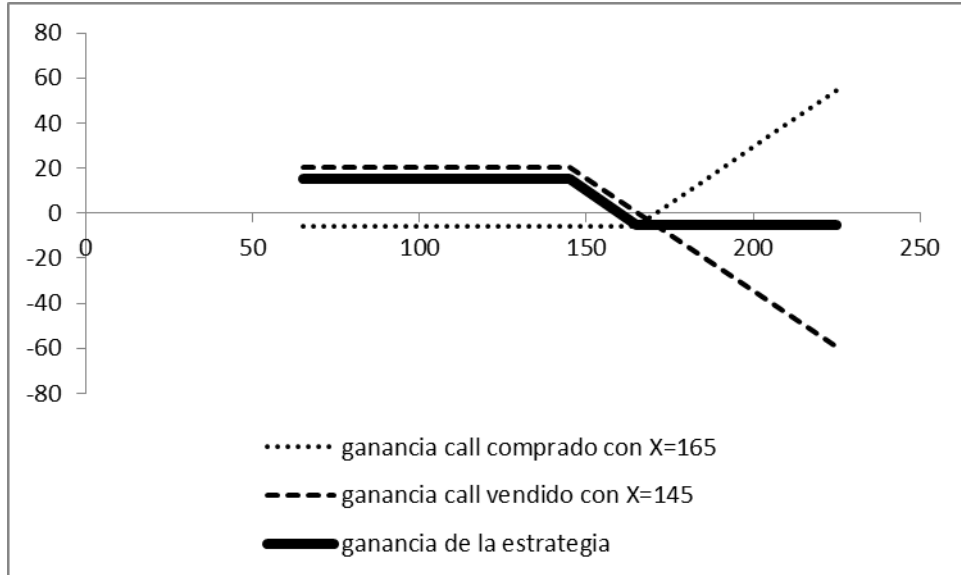
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 100 para valores del subyacente $S_t \in [110, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.49: Estrategia Bear para el componente ASURB.

S	ganancia call comprado con X=165	ganancia call vendido con X=145	ganancia de la estrategia
65	-5.6375	2.06E+01	14.9851
85	-5.6375	2.06E+01	14.9851
105	-5.6375	2.06E+01	14.9851
125	-5.6375	2.06E+01	14.9851
145	-5.6375	2.06E+01	14.9851
165	-5.6375	6.23E-01	-5.0149
185	14.3625	-1.94E+01	-5.0149
205	34.3625	-3.94E+01	-5.0149
225	54.3625	-5.94E+01	-5.0149
144.26	-5.6375	20.6226	14.9851

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.25: Representación de expectativa a la baja para el componente ASURB



Fuente: Elaboración propia.

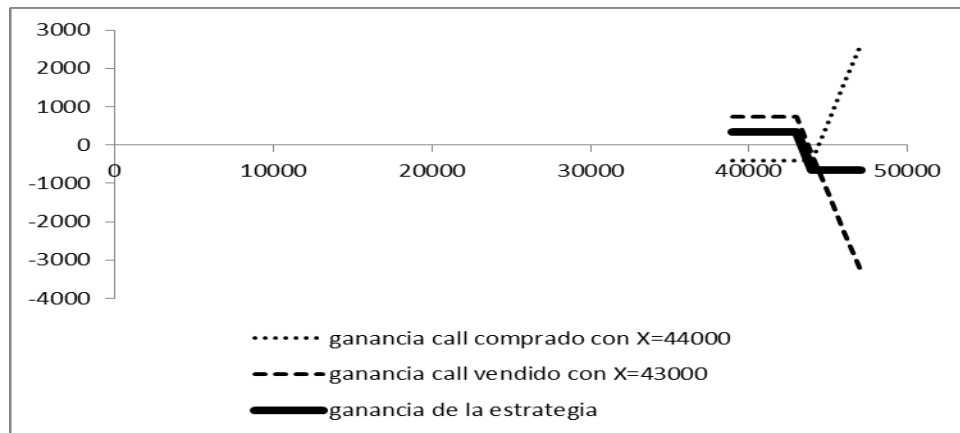
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 145 para valores del subyacente $S_t \in [185, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.50: Estrategia Bear para el componente IPC

S	ganancia call comprado con X=44000	ganancia call vendido con X=43000	ganancia de la estrategia
39000	-395.2637	731.7023	336.4386
40000	-395.2637	731.7023	336.4386
41000	-395.2637	731.7023	336.4386
42000	-395.2637	731.7023	336.4386
43000	-395.2637	731.7023	336.4386
44000	-395.2637	-268.2977	-663.5614
45000	604.7363	-1268.2977	-663.5614
46000	1604.7363	-2268.2977	-663.5614
47000	2604.7363	-3268.2977	-663.5614
42406.67	-395.2637	731.7023	336.4386

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.26: Representación de expectativa a la baja para el componente IPC



Fuente: Elaboración propia.

Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 43,000 para valores del subyacente $S_t \in [45000, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

En el siguiente cuadro se muestra un resumen de las estrategias analizadas:

Cuadro 4.51: Expectativas de estrategias Bear y Bull para los componentes del IPC y para el mismo IPC

	Bear	Bull
IPC	1	0
Componentes	12	9

Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la valuación a 60 días se obtuvieron los resultados que se muestran en los siguientes cuadros:

Cuadro 4.52: Distribución de las 132 estrategias Bull con plazo a 60 días.

Componente	ZONA C	ZONZ B	ZONA A
GAPB	6	0	0
AC	0	0	6
URBI	5	1	0
GRUMAB	0	0	6
GEOB	5	1	0
ELEKTRA	3	1	2
BIMBOA	3	1	2
ALSEA	2	1	3
HOMEX	6	0	0
AMXL	3	1	2
GFNORTEO	6	0	0
WALMEXV	5	1	0
ALFAA	6	0	0
KOFL	3	1	2
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	3	1	2
GFINBURO	6	0	0
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	2	1	3
ICHB	5	1	0
ASURB	4	1	1
SUMA	85	12	29
IPC	6	0	0

Fuente: Elaboración propia.

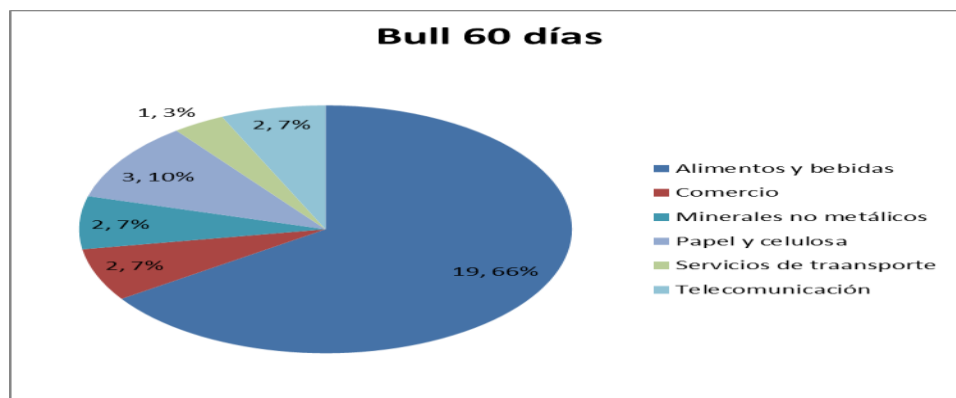
Cuadro 4.53: Distribución de las 132 estrategias Bear con plazo a 60 días.

Componente	ZONA A	ZONA B	ZONA C
GAPB	6	0	0
AC	0	0	6
URBI	5	1	0
GRUMAB	0	0	6
GEOB	5	1	0
ELEKTRA	3	1	2
BIMBOA	3	1	2
ALSEA	2	1	3
HOMEX	6	0	0
AMXL	3	1	2
GFNORTEO	6	0	0
WALMEXV	5	1	0
ALFAA	6	0	0
KOFL	3	1	2
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	3	1	2
GFINBURO	6	0	0
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	2	1	3
ICHB	5	1	0
ASURB	4	1	1
SUMA	85	12	29
IPC	6	0	0

Fuente: Elaboración propia.

La distribución sectorial en forma porcentual de la máxima ganancia obtenida con la estrategia, se observa en las siguientes gráficas:

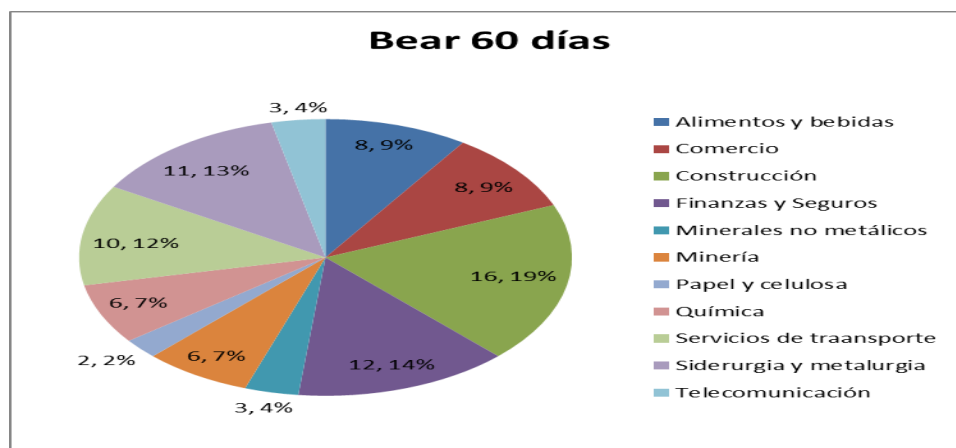
Gráfica 4.27: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bull a 60 días



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que en los sectores de Construcción, Finanzas y Seguros, Minería, Química y Siderurgia y metalurgia nunca se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada no es adecuada para dichos sectores.

Gráfica 4.28: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bear a 60 días



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que todos los sectores se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada es adecuada.

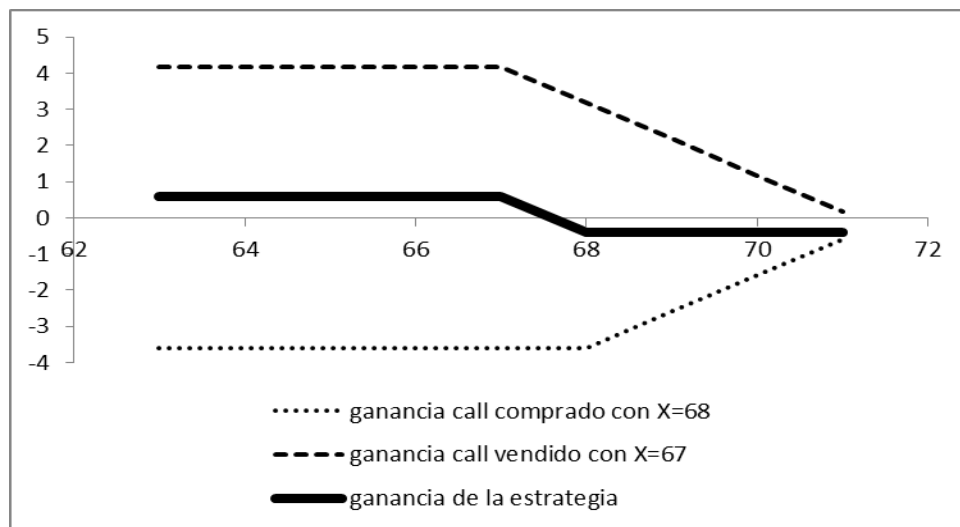
Los cuadros 4.52 y 4.53 reflejan el análisis sobre las estrategias de cobertura construidas con las opciones sobre los subyacentes que componen el IPC y las opciones sobre el mismo IPC, considerando el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento, es decir, a 60 días. Asimismo en las gráficas 4.27 y 4.28 se puede apreciar el análisis por sectores de dichas estrategias. Para ejemplificar de manera más clara al lector la expectativa del inversionista, en los siguientes cuadros se observa estrategias de cobertura de riesgos con sus respectivas gráficas:

Cuadro 4.54: Estrategia Bear para el componente GAPB

S	ganancia call comprado con X=68	ganancia call vendido con X=67	ganancia de la estrategia
63	-3.5915	4.1791	0.5876
64	-3.5915	4.1791	0.5876
65	-3.5915	4.1791	0.5876
66	-3.5915	4.1791	0.5876
67	-3.5915	4.1791	0.5876
68	-3.5915	3.1791	-0.4124
69	-2.5915	2.1791	-0.4124
70	-1.5915	1.1791	-0.4124
71	-0.5915	0.1791	-0.4124
65.10	-3.5915	4.1791	0.5876

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.29: Representación de expectativa a la baja para el componente GAPB



Fuente: Elaboración propia.

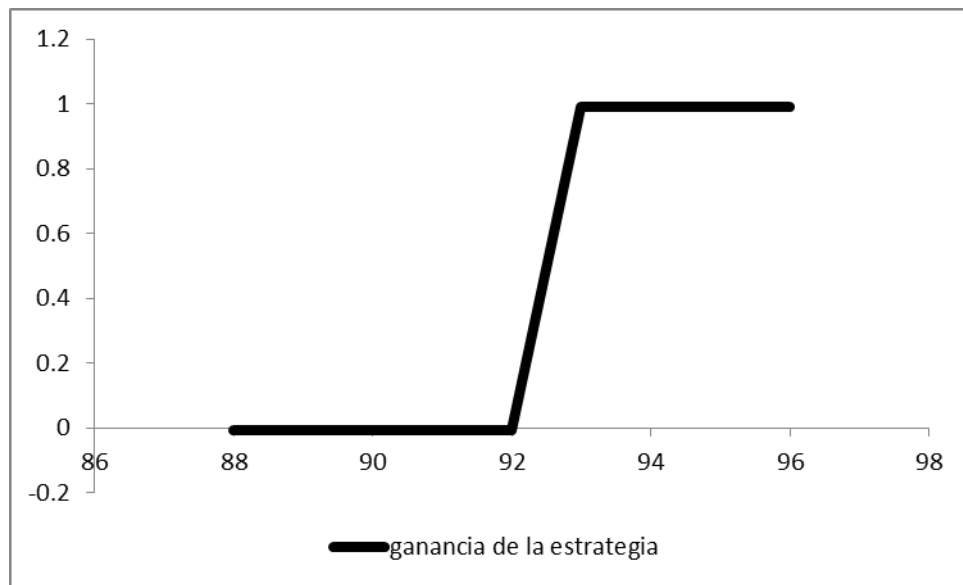
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 67 para valores del subyacente $S_i \in [72, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.55: Estrategia Bull para el componente AC

S	ganancia call comprado con X=92	ganancia call vendido con X=93	ganancia de la estrategia
88	-34.7216	34.7127	-0.0089
89	-34.7216	34.7127	-0.0089
90	-34.7216	34.7127	-0.0089
91	-34.7216	34.7127	-0.0089
92	-34.7216	34.7127	-0.0089
93	-33.7216	34.7127	0.9911
94	-32.7216	33.7127	0.9911
95	-31.7216	32.7127	0.9911
96	-30.7216	31.7127	0.9911
100.92	-25.8016	26.7927	0.9911

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.30: Representación de expectativa a la alza para el componente AC



Fuente: Elaboración propia.

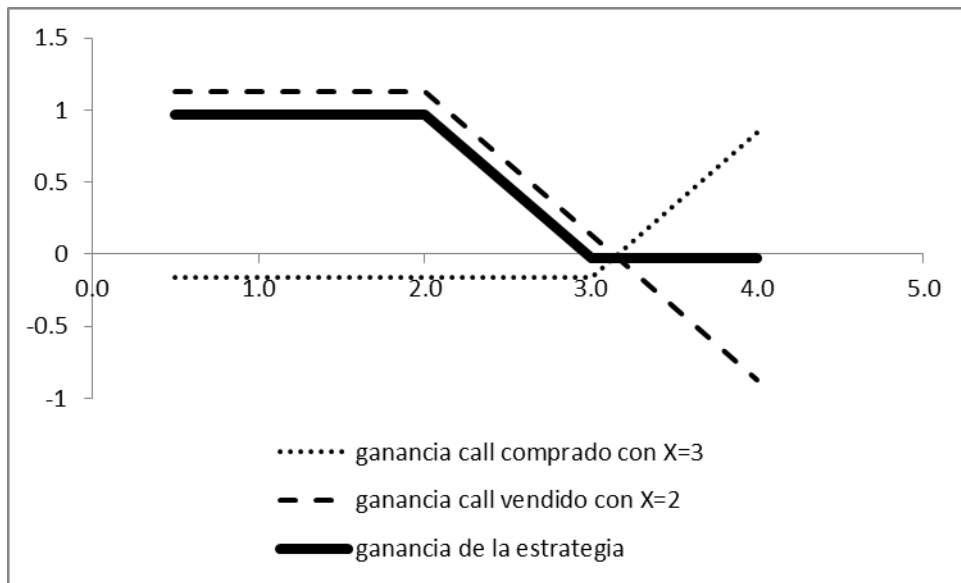
Se tiene que con el call vendido con precio de ejercicio de 93 para valores del subyacente $S_t \in [127, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.56: Estrategia Bear para el componente URBI

S	ganancia call comprado con X=3	ganancia call vendido con X=2	ganancia de la estrategia
0.5	-0.1599	1.1323	0.9724
1	-0.1599	1.1323	0.9724
1.5	-0.1599	1.1323	0.9724
2	-0.1599	1.1323	0.9724
2.5	-0.1599	0.6323	0.4724
3	-0.1599	0.1323	-0.0276
3.5	0.3401	-0.3677	-0.0276
4	0.8401	-0.8677	-0.0276
1.81	-0.1599	1.1323	0.9724

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.31: Representación de expectativa a la baja para el componente URBI



Fuente: Elaboración propia.

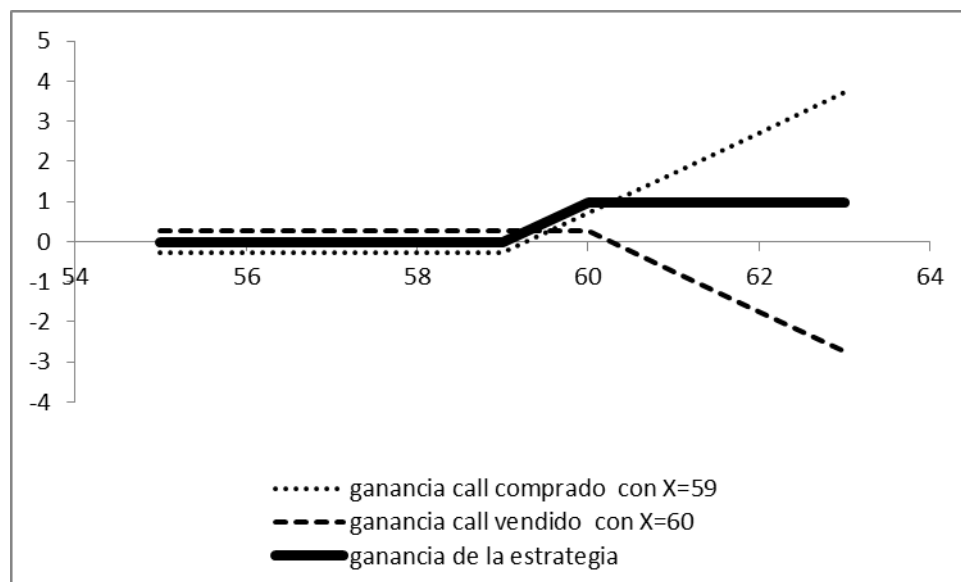
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 2 para valores del subyacente $S_t \in [3.5, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.57: Estrategia Bull para el componente GRUMAB

S	ganancia call comprado con X=59	ganancia call vendido con X=60	ganancia de la estrategia
55	-0.2833	0.2602	-0.0231
56	-0.2833	0.2602	-0.0231
57	-0.2833	0.2602	-0.0231
58	-0.2833	0.2602	-0.0231
59	-0.2833	0.2602	-0.0231
60	0.7167	0.2602	0.9769
61	1.7167	-0.7398	0.9769
62	2.7167	-1.7398	0.9769
63	3.7167	-2.7398	0.9769
61.63	2.3467	-1.3698	0.9769

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.32: Representación de expectativa a la alza para el componente GRUMAB



Fuente: Elaboración propia.

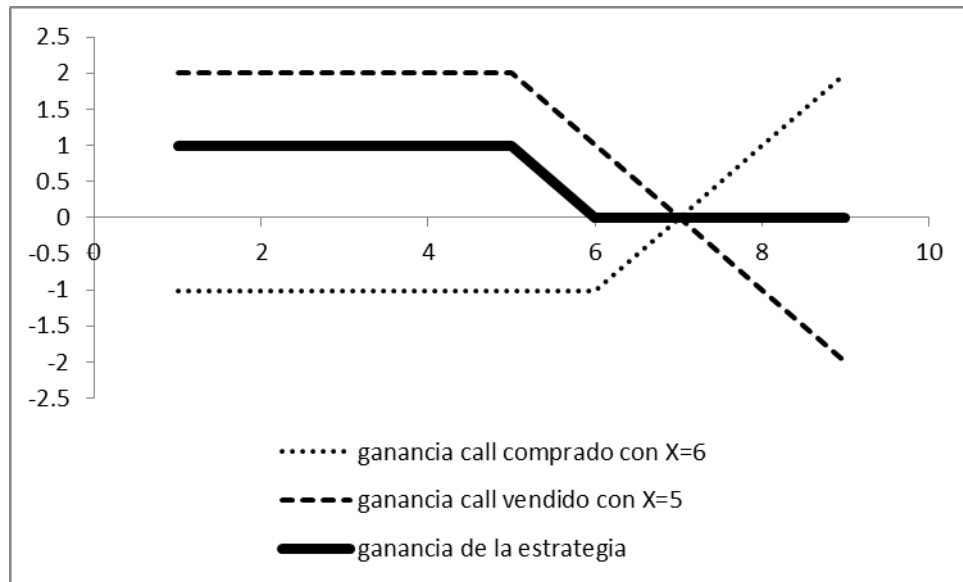
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 60 para valores del subyacente $S_t \in [60, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.58: Estrategia Bear para el componente GEOB

S	ganancia call comprado con X=6	ganancia call vendido con X=5	ganancia de la estrategia
1	-1.0128	2.0056	0.9928
2	-1.0128	2.0056	0.9928
3	-1.0128	2.0056	0.9928
4	-1.0128	2.0056	0.9928
5	-1.0128	2.0056	0.9928
6	-1.0128	1.0056	-0.0072
7	-0.0128	0.0056	-0.0072
8	0.9872	-0.9944	-0.0072
9	1.9872	-1.9944	-0.0072
4.87	-1.0128	2.0056	0.9928

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.33: Representación de expectativa a la baja para el componente GEOB



Fuente: Elaboración propia.

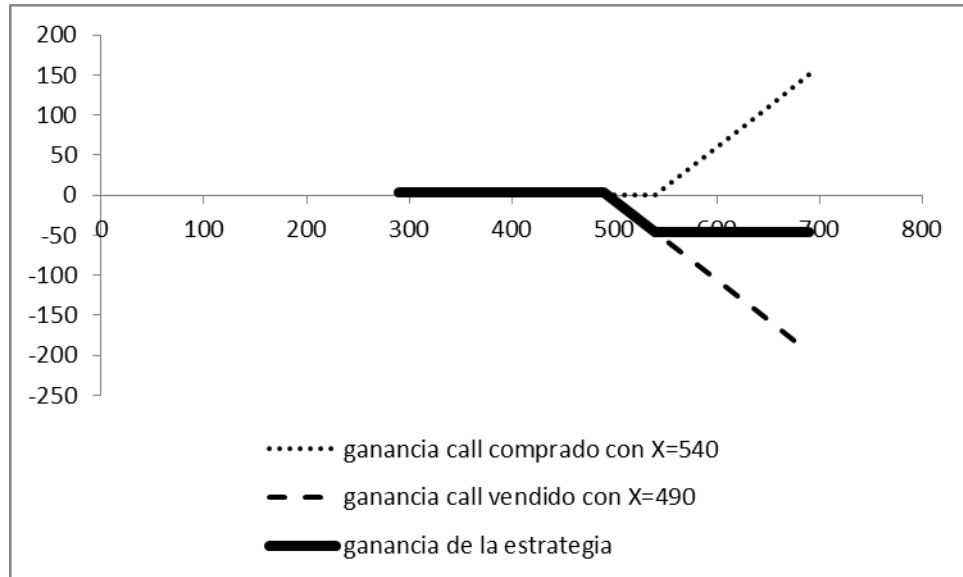
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 5 para valores del subyacente $S_t \in [8, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.59: Estrategia Bear para el componente ELEKTRA

S	ganancia call comprado con X=540	ganancia call vendido con X=490	ganancia de la estrategia
290	-0.0102	4.1388	4.1286
340	-0.0102	4.1388	4.1286
390	-0.0102	4.1388	4.1286
440	-0.0102	4.1388	4.1286
490	-0.0102	4.1388	4.1286
540	-0.0102	-45.8612	-45.8714
590	49.9898	-95.8612	-45.8714
640	99.9898	-145.8612	-45.8714
690	149.9898	-195.8612	-45.8714
446.55	-0.0102	4.1388	4.1286

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.34: Representación de expectativa a la baja para el componente ELEKTRA



Fuente: Elaboración propia.

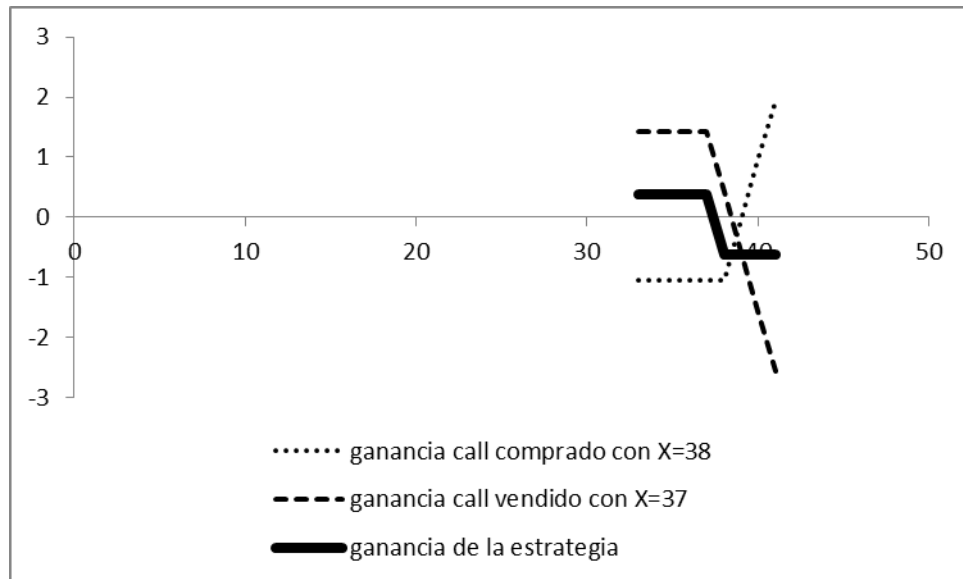
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 490 para valores del subyacente $S_t \in [590, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.60: Estrategia Bear para el componente BIMBOA

S	ganancia call comprado con X=38	ganancia call vendido con X=37	ganancia de la estrategia
33	-1.0545	1.4302	0.3757
34	-1.0545	1.4302	0.3757
35	-1.0545	1.4302	0.3757
36	-1.0545	1.4302	0.3757
37	-1.0545	1.4302	0.3757
38	-1.0545	0.4302	-0.6243
39	-0.0545	-0.5698	-0.6243
40	0.9455	-1.5698	-0.6243
41	1.9455	-2.5698	-0.6243
36.69	-1.05	1.43	0.38

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.35: Representación de expectativa a la baja para el componente BIMBOA



Fuente: Elaboración propia.

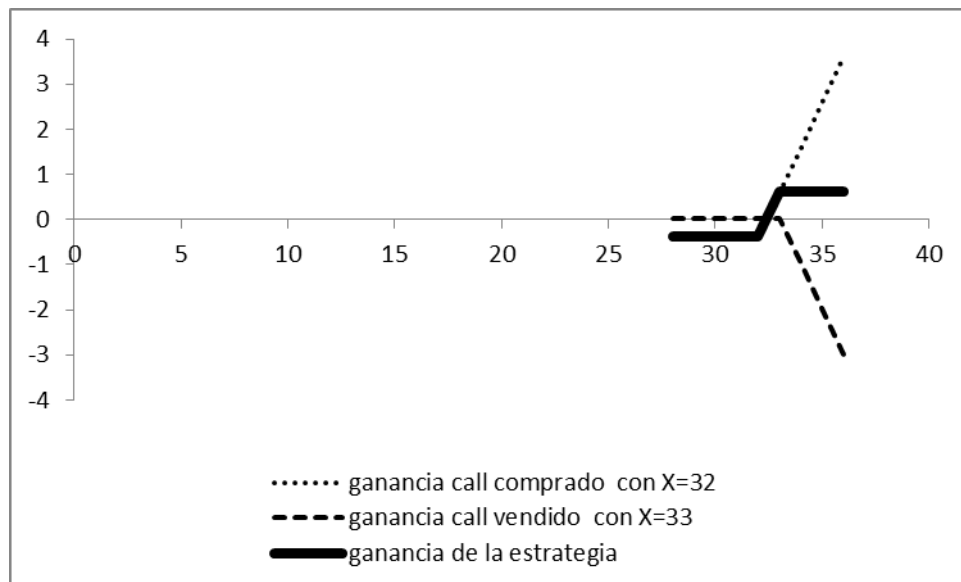
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 37 para valores del subyacente $S_t \in [40, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.61: Estrategia Bull para el componente ALSEA

S	ganancia call comprado con X=32	ganancia call vendido con X=33	ganancia de la estrategia
28	-0.4071	0.0202	-0.3869
29	-0.4071	0.0202	-0.3869
30	-0.4071	0.0202	-0.3869
31	-0.4071	0.0202	-0.3869
32	-0.4071	0.0202	-0.3869
33	0.5929	0.0202	0.6131
34	1.5929	-0.9798	0.6131
35	2.5929	-1.9798	0.6131
36	3.5929	-2.9798	0.6131
33.02	0.6129	0.0002	0.6131

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.36: Representación de expectativa a la alza para el componente ALSEA



Fuente: Elaboración propia.

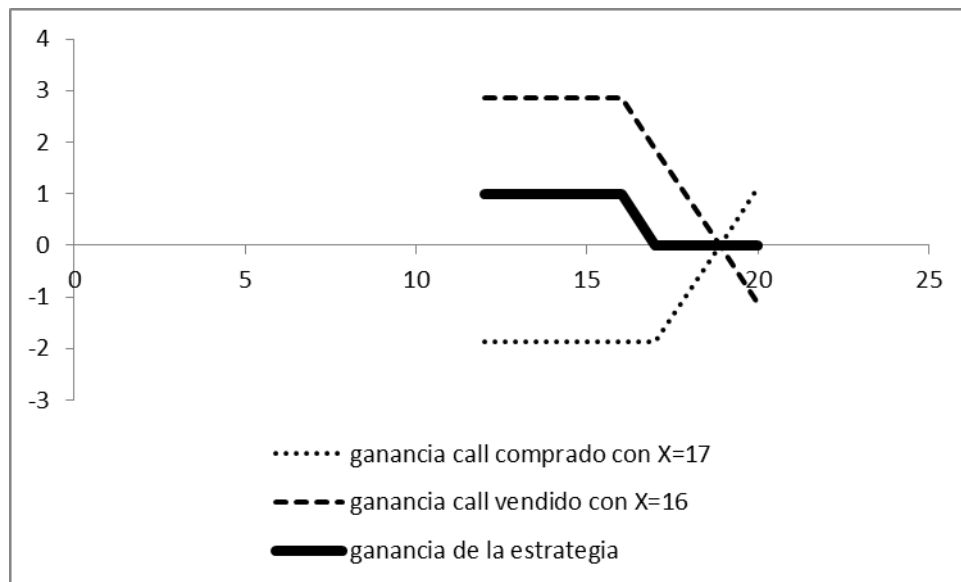
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 33 para valores del subyacente $S_t \in [33, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.62: Estrategia Bear para el componente HOMEX

S	ganancia call comprado con X=17	ganancia call vendido con X=16	ganancia de la estrategia
12	-1.8771	2.8694	0.9923
13	-1.8771	2.8694	0.9923
14	-1.8771	2.8694	0.9923
15	-1.8771	2.8694	0.9923
16	-1.8771	2.8694	0.9923
17	-1.8771	1.8694	-0.0077
18	-0.8771	0.8694	-0.0077
19	0.1229	-0.1306	-0.0077
20	1.1229	-1.1306	-0.0077
8.84	-1.8771	2.8694	0.9923

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.37: Representación de expectativa a la baja para el componente HOMEX



Fuente: Elaboración propia.

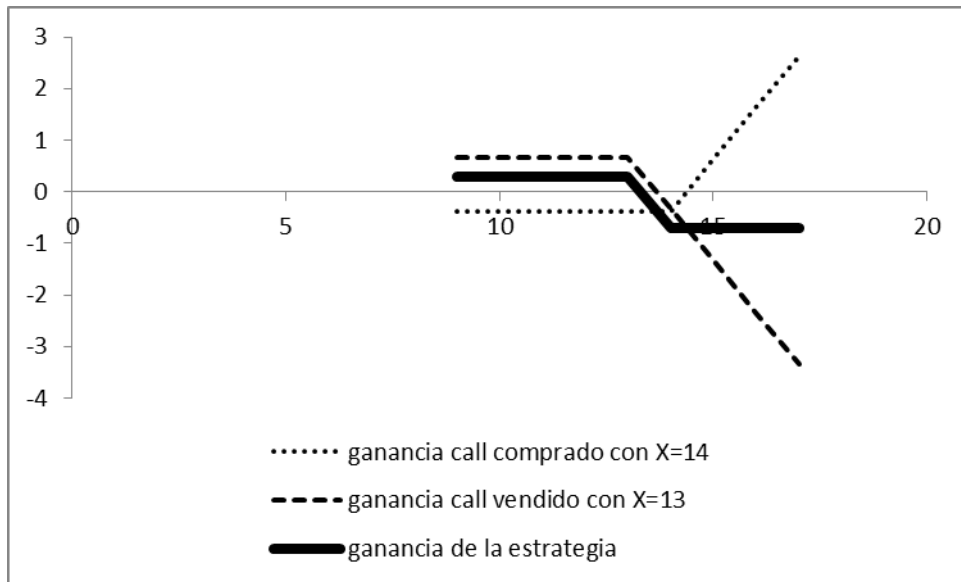
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 16 para valores del subyacente $S_i \in [19, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.63: Estrategia Bear para el componente AMXL

S	ganancia call comprado con X=14	ganancia call vendido con X=13	ganancia de la estrategia
9	-0.3683	0.6636	0.2953
10	-0.3683	0.6636	0.2953
11	-0.3683	0.6636	0.2953
12	-0.3683	0.6636	0.2953
13	-0.3683	0.6636	0.2953
14	-0.3683	-0.3364	-0.7047
15	0.6317	-1.3364	-0.7047
16	1.6317	-2.3364	-0.7047
17	2.6317	-3.3364	-0.7047
12.58	-0.3683	0.6636	0.2953

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.38: Representación de expectativa a la baja para el componente AMXL



Fuente: Elaboración propia.

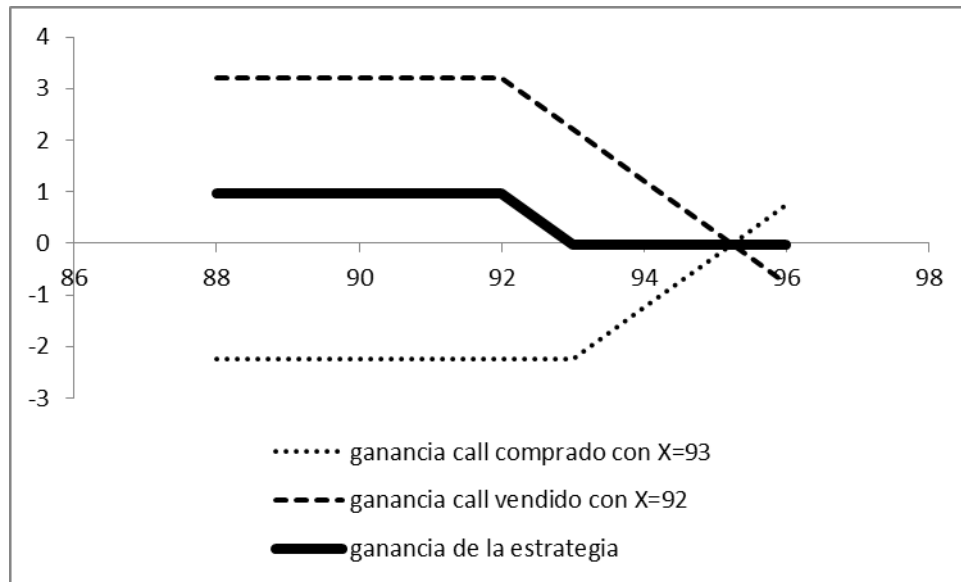
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 13 para valores del subyacente $S_t \in [15, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.64: Estrategia Bear para el componente GFNORTEO

S	ganancia call comprado con X=93	ganancia call vendido con X=92	ganancia de la estrategia
88	-2.2491	3.2167	0.9676
89	-2.2491	3.2167	0.9676
90	-2.2491	3.2167	0.9676
91	-2.2491	3.2167	0.9676
92	-2.2491	3.2167	0.9676
93	-2.2491	2.2167	-0.0324
94	-1.2491	1.2167	-0.0324
95	-0.2491	0.2167	-0.0324
96	0.7509	-0.7833	-0.0324
84.77	-2.2491	3.2167	0.9676

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.39: Representación de expectativa a la baja para el componente GFNORTEO



Fuente: Elaboración propia.

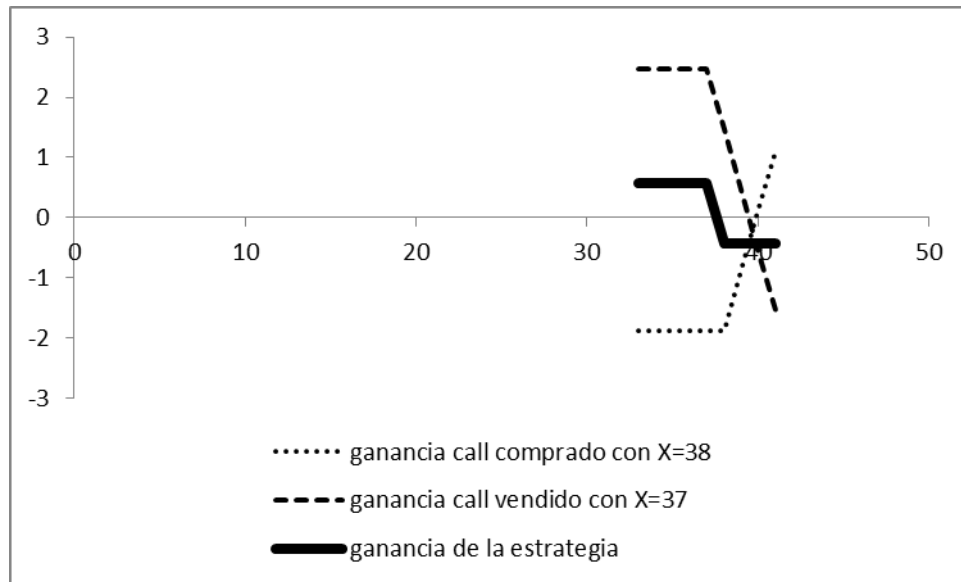
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 92 para valores del subyacente $S_t \in [96, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.65: Estrategia Bear para el componente WALMEXV

S	ganancia call comprado con X=38	ganancia call vendido con X=37	ganancia de la estrategia
33	-1.8878	2.463	0.5752
34	-1.8878	2.463	0.5752
35	-1.8878	2.463	0.5752
36	-1.8878	2.463	0.5752
37	-1.8878	2.463	0.5752
38	-1.8878	1.463	-0.4248
39	-0.8878	0.463	-0.4248
40	0.1122	-0.537	-0.4248
41	1.1122	-1.537	-0.4248
36.31	-1.8878	2.463	0.5752

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.40: Representación de expectativa a la baja para el componente WALMEXV



Fuente: Elaboración propia.

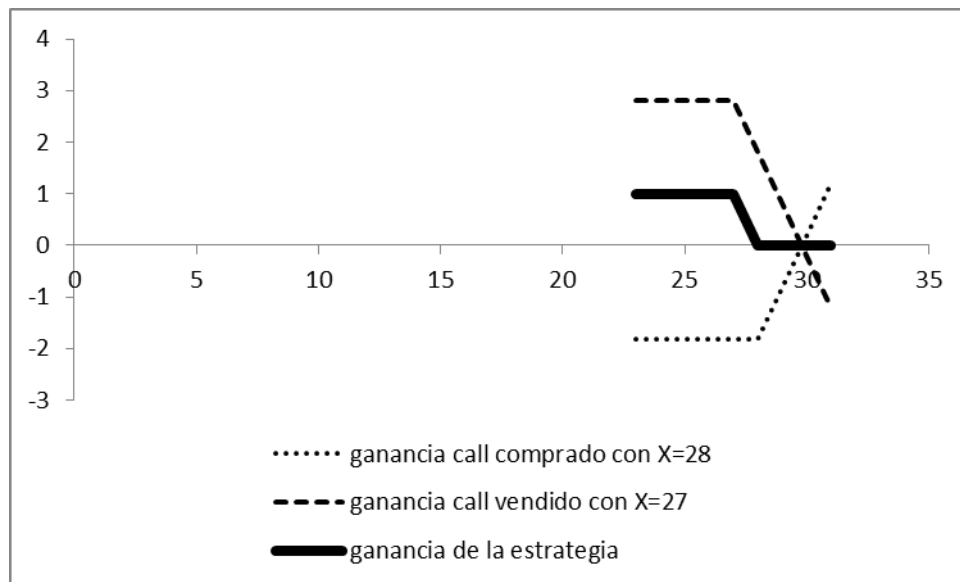
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 37 para valores del subyacente $S_t \in [40, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.66: Estrategia Bear para el componente ALFAA

S	ganancia call comprado con X=28	ganancia call vendido con X=27	ganancia de la estrategia
23	-1.8172	2.8099	0.9927
24	-1.8172	2.8099	0.9927
25	-1.8172	2.8099	0.9927
26	-1.8172	2.8099	0.9927
27	-1.8172	2.8099	0.9927
28	-1.8172	1.8099	-0.0073
29	-0.8172	0.8099	-0.0073
30	0.1828	-0.1901	-0.0073
31	1.1828	-1.1901	-0.0073
26.94	-1.8172	2.8099	0.9927

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.41: Representación de expectativa a la baja para el componente ALFAA



Fuente: Elaboración propia.

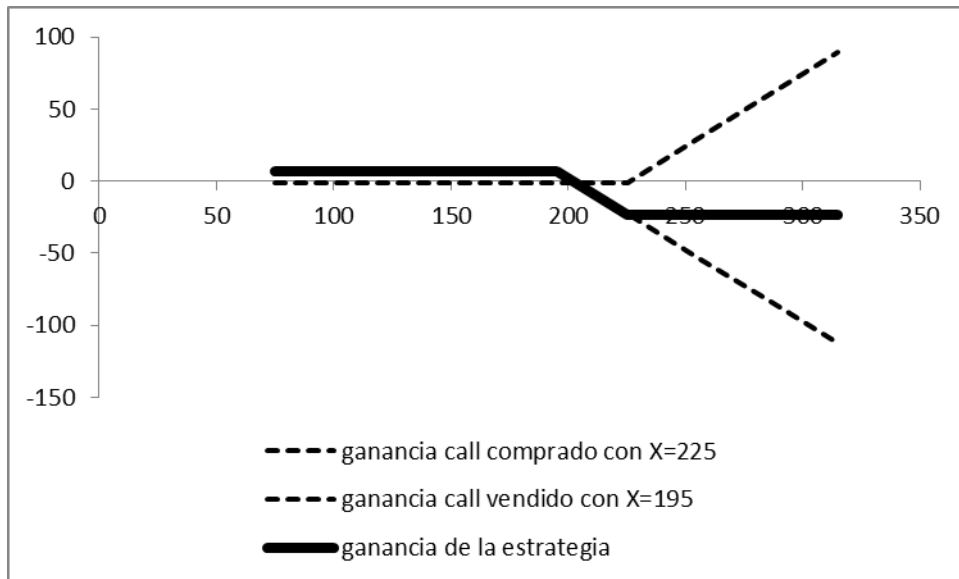
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 27 para valores del subyacente $S_t \in [30, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.67: Estrategia Bear para el componente KOFL

S	ganancia call comprado con X=225	ganancia call vendido con X=195	ganancia de la estrategia
75	-0.8053	7.5928	6.7875
105	-0.8053	7.5928	6.7875
135	-0.8053	7.5928	6.7875
165	-0.8053	7.5928	6.7875
195	-0.8053	7.5928	6.7875
225	-0.8053	-22.4072	-23.2125
255	29.1947	-52.4072	-23.2125
285	59.1947	-82.4072	-23.2125
315	89.1947	-112.4072	-23.2125
187.59	-0.8053	7.5928	6.7875

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.42: Representación de expectativa a la baja para el componente KOFL



Fuente: Elaboración propia.

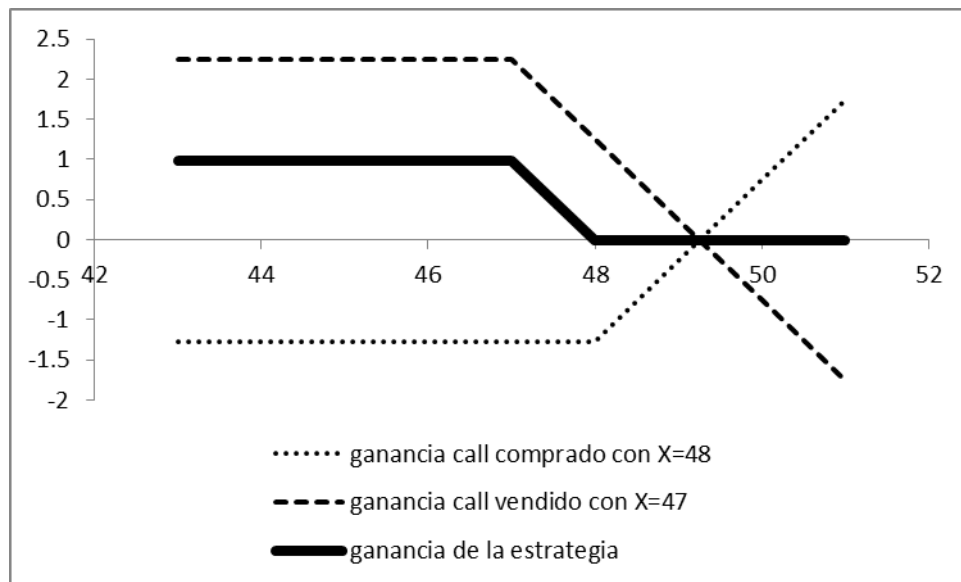
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 195 para valores del subyacente $S_t \in [255, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.68: Estrategia Bear para el componente GMEXICOB

S	ganancia call comprado con X=48	ganancia call vendido con X=47	ganancia de la estrategia
43	-1.2651	2.2539	0.9888
44	-1.2651	2.2539	0.9888
45	-1.2651	2.2539	0.9888
46	-1.2651	2.2539	0.9888
47	-1.2651	2.2539	0.9888
48	-1.2651	1.2539	-0.0112
49	-0.2651	0.2539	-0.0112
50	0.7349	-0.7461	-0.0112
51	1.7349	-1.7461	-0.0112
39.73	-1.2651	2.2539	0.9888

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.43: Representación de expectativa a la baja para el componente GMEXICOB



Fuente: Elaboración propia.

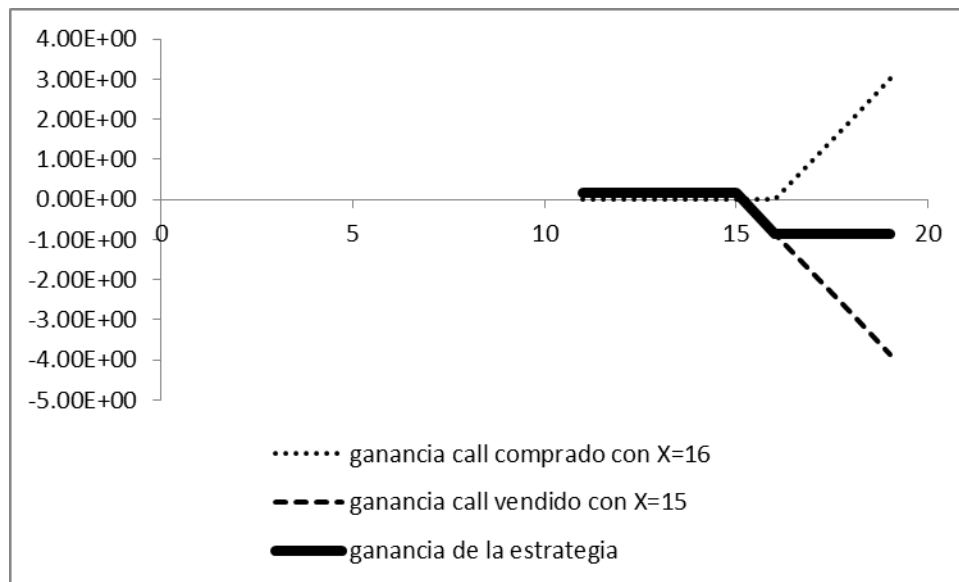
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 47 para valores del subyacente $S_t \in [50, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.69: Estrategia Bear para el componente CEMEXCPO

S	ganancia call comprado con X=16	ganancia call vendido con X=15	ganancia de la estrategia
11	-6.74E-05	0.1496	0.149532577
12	-6.74E-05	0.1496	0.149532577
13	-6.74E-05	0.1496	0.149532577
14	-6.74E-05	0.1496	0.149532577
15	-6.74E-05	0.1496	0.149532577
16	-6.74E-05	-0.8504	-0.850467423
17	1.00E+00	-1.8504	-0.850467423
18	2.00E+00	-2.8504	-0.850467423
19	3.00E+00	-3.8504	-0.850467423
14.27	-0.000067423	0.1496	0.149532577

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.44: Representación de expectativa a la baja para el componente CEMEXCPO



Fuente: Elaboración propia.

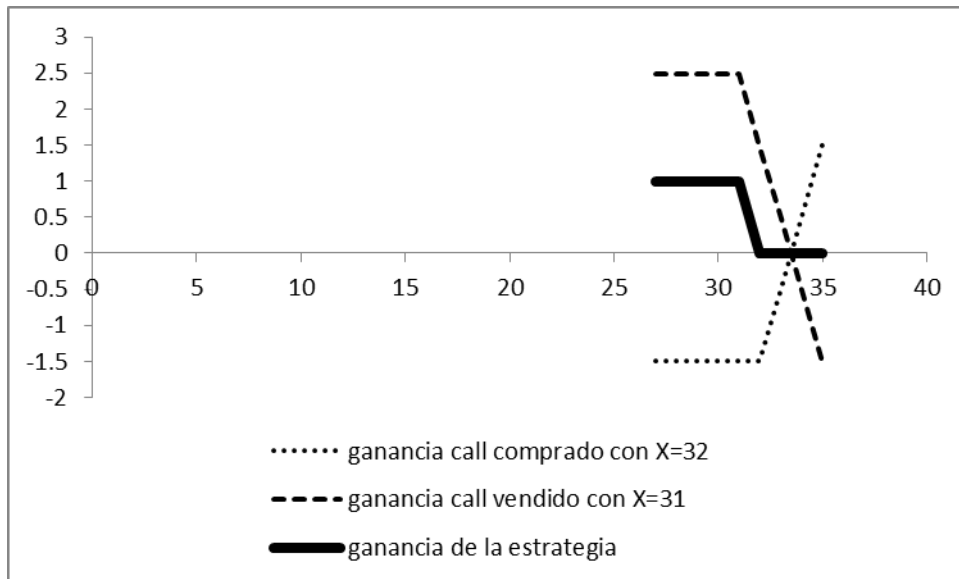
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 15 para valores del subyacente $S_t \in [17, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.70: Estrategia Bear para el componente GFINBURO

S	ganancia call comprado con X=32	ganancia call vendido con X=31	ganancia de la estrategia
27	-1.4893	2.4822	0.9929
28	-1.4893	2.4822	0.9929
29	-1.4893	2.4822	0.9929
30	-1.4893	2.4822	0.9929
31	-1.4893	2.4822	0.9929
32	-1.4893	1.4822	-0.0071
33	-0.4893	0.4822	-0.0071
34	0.5107	-0.5178	-0.0071
35	1.5107	-1.5178	-0.0071
29.38	-1.49	2.48	0.99

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.45: Representación de expectativa a la baja para el componente GFINBURO



Fuente: Elaboración propia.

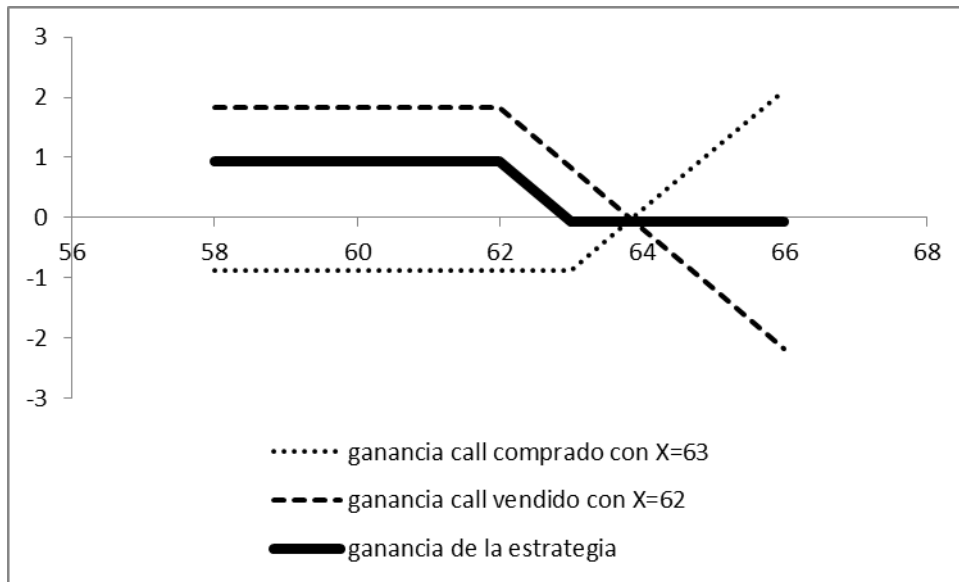
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 31 para valores del subyacente $S_t \in [34, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.71: Estrategia Bear para el componente MEXCHEM

S	ganancia call comprado con X=63	ganancia call vendido con X=62	ganancia de la estrategia
58	-0.8836	1.8217	0.9381
59	-0.8836	1.8217	0.9381
60	-0.8836	1.8217	0.9381
61	-0.8836	1.8217	0.9381
62	-0.8836	1.8217	0.9381
63	-0.8836	0.8217	-0.0619
64	0.1164	-0.1783	-0.0619
65	1.1164	-1.1783	-0.0619
66	2.1164	-2.1783	-0.0619
55.69	-0.8836	1.8217	0.9381

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.46: Representación de expectativa a la baja para el componente MEXCHEM



Fuente: Elaboración propia.

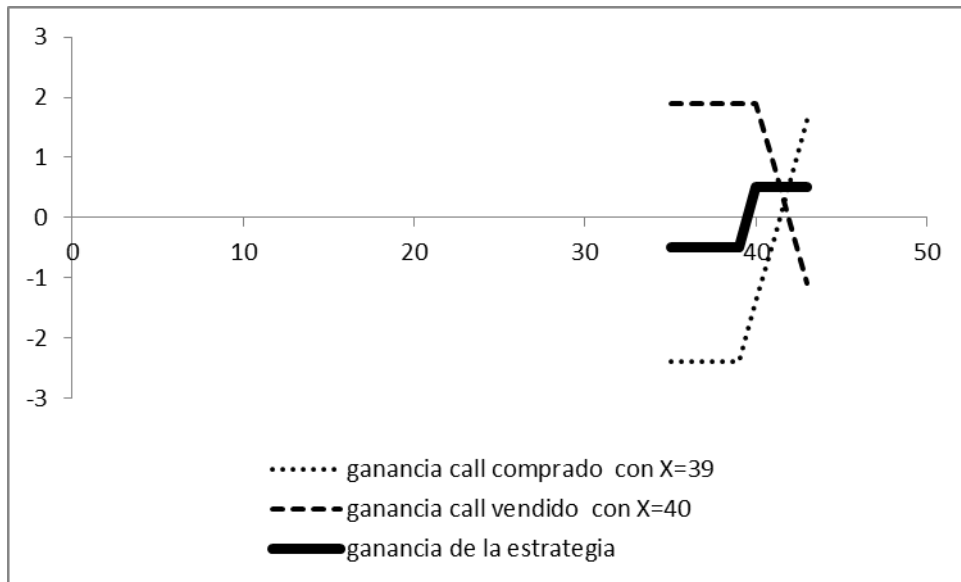
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 62 para valores del subyacente $S_t \in [64, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.72: Estrategia Bull para el componente KIMBERA

S	ganancia call comprado con X=39	ganancia call vendido con X=40	ganancia de la estrategia
35	-2.389	1.8992	-0.4898
36	-2.389	1.8992	-0.4898
37	-2.389	1.8992	-0.4898
38	-2.389	1.8992	-0.4898
39	-2.389	1.8992	-0.4898
40	-1.389	1.8992	0.5102
41	-0.389	0.8992	0.5102
42	0.611	-0.1008	0.5102
43	1.611	-1.1008	0.5102
40.66	-0.729	1.2392	0.5102

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.47: Representación de expectativa a la alza para el componente KIMBERA



Fuente: Elaboración propia.

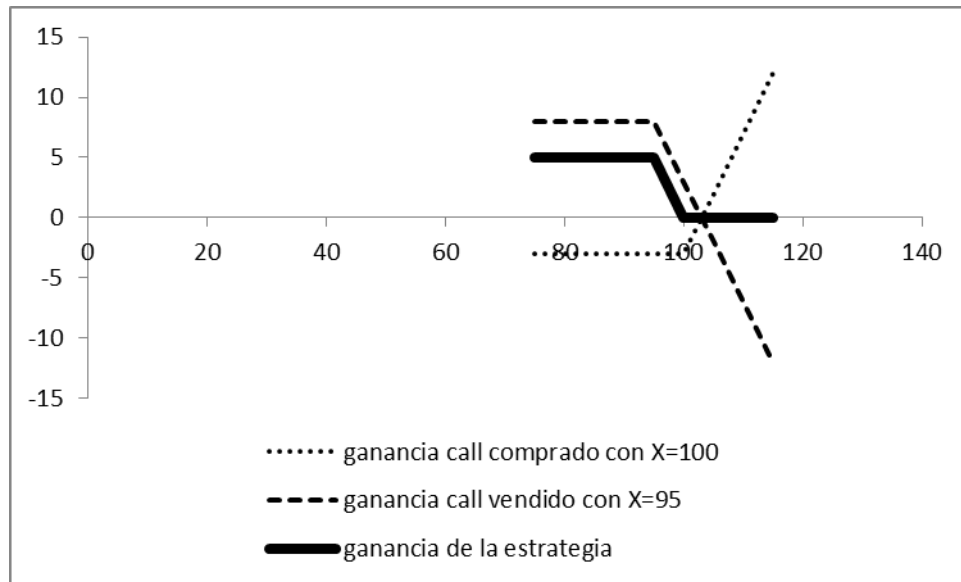
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 40 para valores del subyacente $S_t \in [42, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.73: Estrategia Bear para el componente ICHB

S	ganancia call comprado con X=100	ganancia call vendido con X=95	ganancia de la estrategia
75	-2.9951	7.953	4.9579
80	-2.9951	7.953	4.9579
85	-2.9951	7.953	4.9579
90	-2.9951	7.953	4.9579
95	-2.9951	7.953	4.9579
100	-2.9951	2.953	-0.0421
105	2.0049	-2.047	-0.0421
110	7.0049	-7.047	-0.0421
115	12.0049	-12.047	-0.0421
90.06	-2.9951	7.953	4.9579

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.48: Representación de expectativa a la baja para el componente ICHB



Fuente: Elaboración propia.

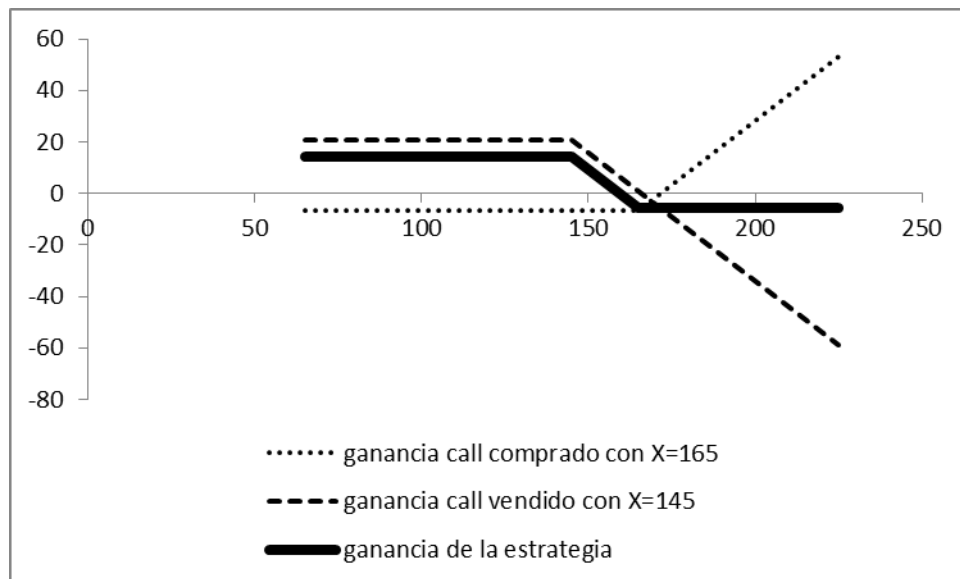
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 95 para valores del subyacente $S_t \in [105, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.74: Estrategia Bear para el componente ASURB

S	ganancia call comprado con X=165	ganancia call vendido con X=145	ganancia de la estrategia
65	-6.6984	2.10E+01	14.2602
85	-6.6984	2.10E+01	14.2602
105	-6.6984	2.10E+01	14.2602
125	-6.6984	2.10E+01	14.2602
145	-6.6984	2.10E+01	14.2602
165	-6.6984	9.59E-01	-5.7398
185	13.3016	-1.90E+01	-5.7398
205	33.3016	-3.90E+01	-5.7398
225	53.3016	-5.90E+01	-5.7398
142.41	-6.6984	20.9586	14.2602

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.49: Representación de expectativa a la baja para el componente ASURB



Fuente: Elaboración propia.

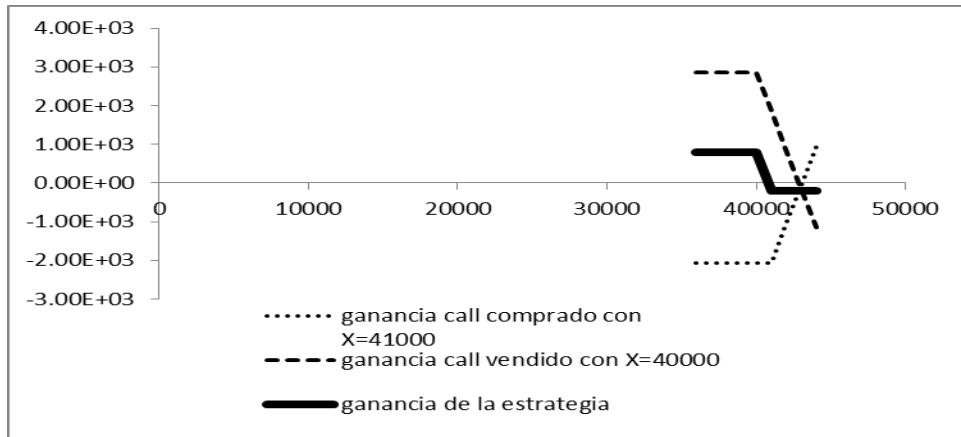
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 145 para valores del subyacente $S_t \in [185, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.75: Estrategia Bear para el componente IPC

S	ganancia call comprado con X=41000	ganancia call vendido con X=40000	ganancia de la estrategia
36000	-2.07E+03	2.86E+03	795
37000	-2.07E+03	2.86E+03	795
38000	-2.07E+03	2.86E+03	795
39000	-2.07E+03	2.86E+03	795
40000	-2.07E+03	2.86E+03	795
41000	-2.07E+03	1.86E+03	-205
42000	-1.07E+03	8.60E+02	-205
43000	-6.51E+01	-1.40E+02	-205
44000	9.35E+02	-1.14E+03	-205
40119.02	-2065.1	2741.08	675.98

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.50: Representación de expectativa a la baja para el componente IPC



Fuente: Elaboración propia.

Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 40,000 para valores del subyacente $S_t \in [44000, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

En el siguiente cuadro se muestra un resumen de las estrategias analizadas:

Cuadro 4.76: Expectativas de estrategias Bear y Bull para los componentes del IPC y para el mismo IPC.

	Bear	Bull
IPC	1	0
Componentes	17	4

Fuente: Elaboración propia.

Al realizar la valuación a 90 días se obtuvieron los resultados que se muestran en los siguientes cuadros:

Cuadro 4.77: Distribución de las 132 estrategias Bull con plazo a 90 días

Componente	ZONA C	ZONA B	ZONA A
GAPB	6	0	0
AC	0	0	6
URBI	4	1	1
GRUMAB	0	1	5
GEOB	5	1	0
ELEKTRA	4	1	1
BIMBOA	4	1	1
ALSEA	6	0	0
HOMEX	6	0	0
AMXL	3	1	2
GFNORTEO	6	0	0
WALMEXV	6	0	0
ALFAA	4	1	1
KOFL	3	1	2
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	4	1	1
GFINBURO	6	0	0
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	1	1	4
ICHB	6	0	0
ASURB	4	1	1
SUMA	90	11	25
IPC	6	0	0

Fuente: Elaboración propia.

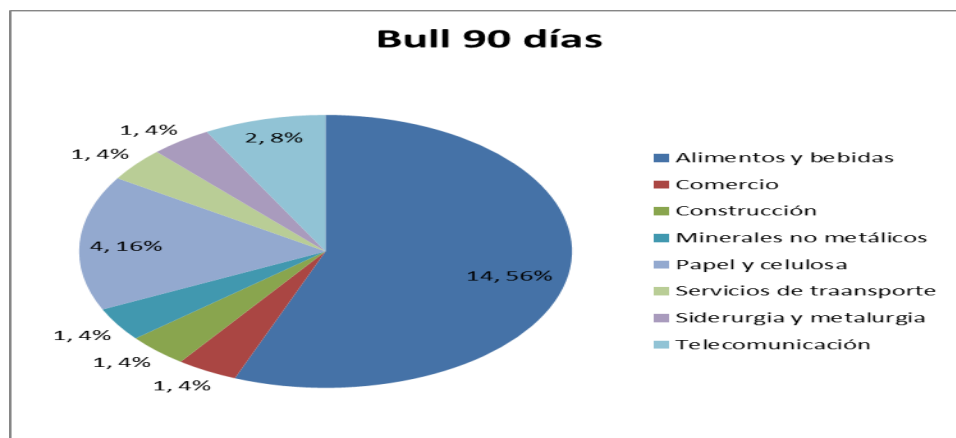
Cuadro 4.78: Distribución de las 132 estrategias Bear con plazo a 90 días

Componente	ZONA A	ZONA B	ZONA C
GAPB	6	0	0
AC	0	0	6
URBI	4	1	1
GRUMAB	0	1	5
GEOB	5	1	0
ELEKTRA	4	1	1
BIMBOA	4	1	1
ALSEA	6	0	0
HOMEX	6	0	0
AMXL	3	1	2
GFNORTEO	6	0	0
WALMEXV	6	0	0
ALFAA	4	1	1
KOFL	3	1	2
GMEXICOB	6	0	0
CEMEXCPO	4	1	1
GFINBURO	6	0	0
MEXCHEM	6	0	0
KIMBERA	1	1	4
ICHB	6	0	0
ASURB	4	1	1
SUMA	90	11	25
IPC	6	0	0

Fuente: Elaboración propia.

La distribución sectorial en forma porcentual de la máxima ganancia obtenida con la estrategia, se observa en las siguientes gráficas:

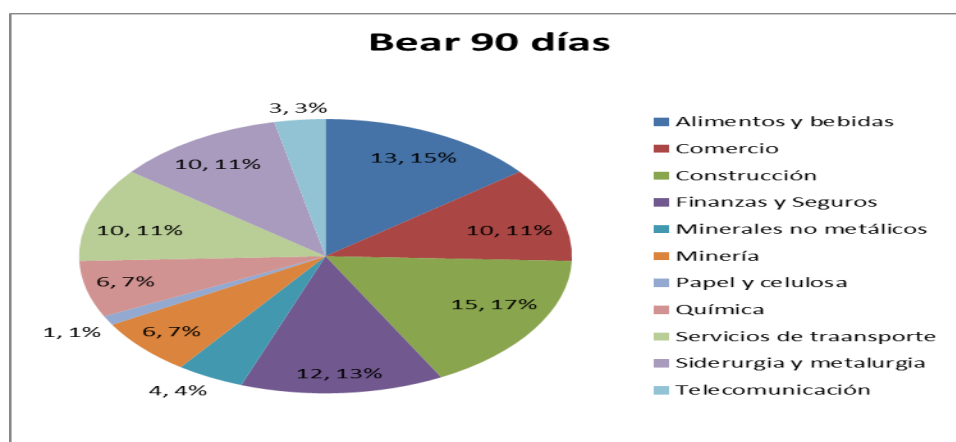
Gráfica 4.51: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bull a 90 días



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que en los sectores de Finanzas y Seguros, Minería y Química nunca se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada no es adecuada para dichos sectores.

Gráfica 4.52: Representación porcentual por sector del número de veces en que se encuentra el inversionista en la zona de máxima ganancia con la estrategia Bear a 90 días



Fuente: Elaboración propia.

En la gráfica anterior se observa que todos los sectores se encuentran en la zona de máxima ganancia, es decir, la estrategia empleada es adecuada.

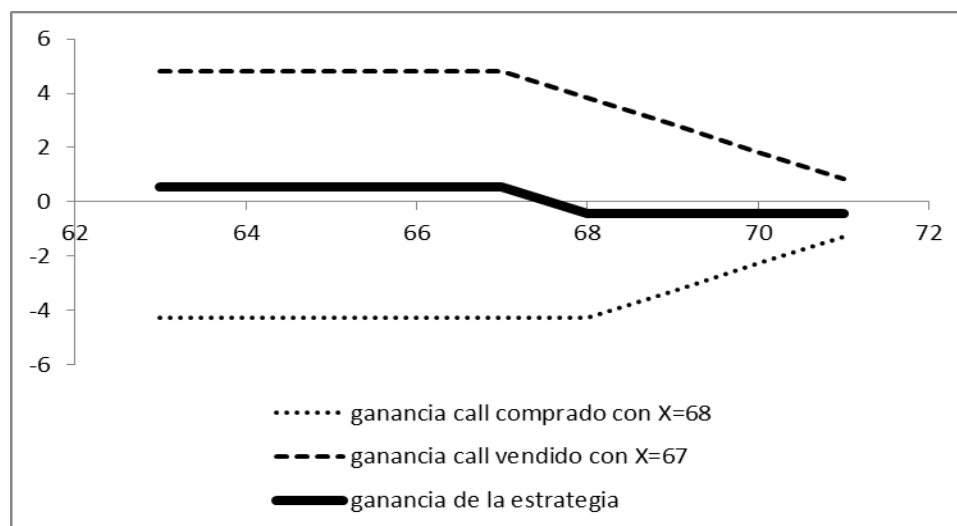
Los cuadros 4.77 y 4.78 reflejan el análisis sobre las estrategias de cobertura construidas con las opciones sobre los subyacentes que componen el IPC y las opciones sobre el mismo IPC, considerando el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento, es decir, a 90 días. Asimismo en las gráficas 4.51 y 4.52 se puede apreciar el análisis por sectores de dichas estrategias. Para ejemplificar de manera más clara al lector la expectativa del inversionista, en los siguientes cuadros se observa estrategias de cobertura de riesgos con sus respectivas gráficas:

Cuadro 4.79: Estrategia Bear para el componente GAPB

S	ganancia call comprado con X=68	ganancia call vendido con X=67	ganancia de la estrategia
63	-4.2743	4.8296	0.5553
64	-4.2743	4.8296	0.5553
65	-4.2743	4.8296	0.5553
66	-4.2743	4.8296	0.5553
67	-4.2743	4.8296	0.5553
68	-4.2743	3.8296	-0.4447
69	-3.2743	2.8296	-0.4447
70	-2.2743	1.8296	-0.4447
71	-1.2743	0.8296	-0.4447
58.43	-4.2743	4.8296	0.5553

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.53: Representación de expectativa a la baja para el componente GAPB



Fuente: Elaboración propia.

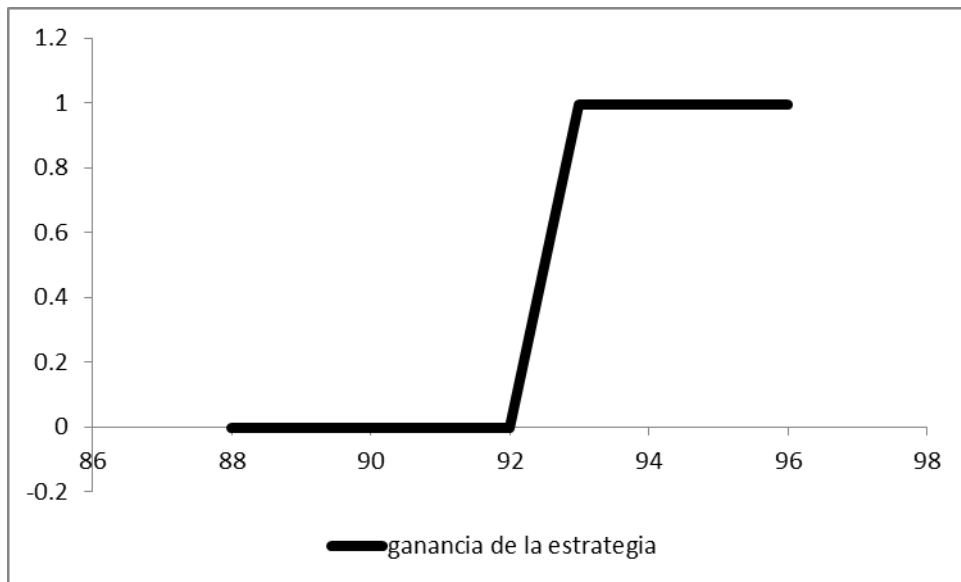
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 67 para valores del subyacente $S_t \in [72, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.80: Estrategia Bull para el componente AC

S	ganancia call comprado con X=92	ganancia call vendido con X=93	ganancia de la estrategia
88	-226.16	226.1564	-0.0036
89	-226.16	226.1564	-0.0036
90	-226.16	226.1564	-0.0036
91	-226.16	226.1564	-0.0036
92	-226.16	226.1564	-0.0036
93	-225.16	226.1564	0.9964
94	-224.16	225.1564	0.9964
95	-223.16	224.1564	0.9964
96	-222.16	223.1564	0.9964
93.40	-224.76	225.7564	0.9964

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.54: Representación de expectativa a la alza para el componente AC



Fuente: Elaboración propia.

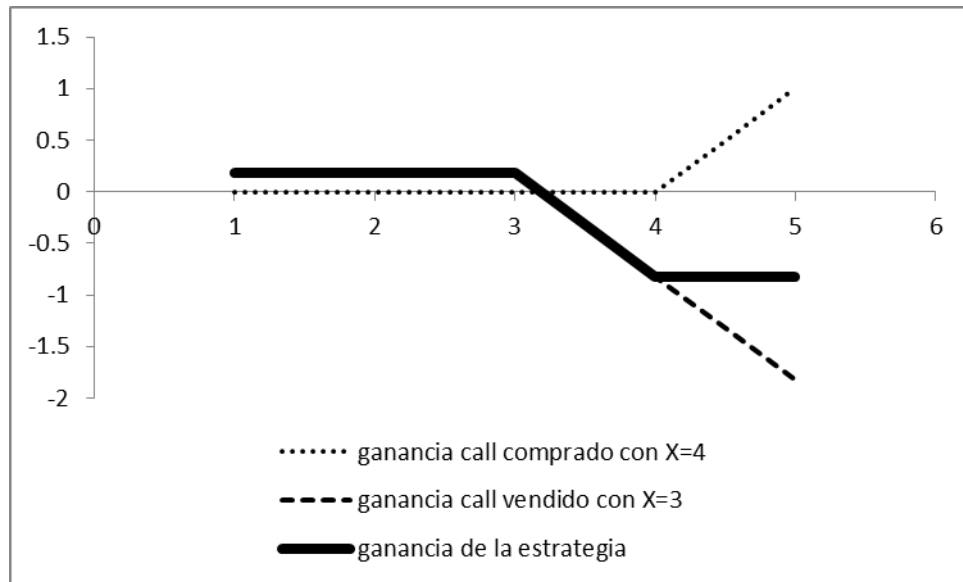
Se tiene que con el call vendido con precio de ejercicio de 93 para valores del subyacente $S_t \in [319, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.81: Estrategia Bear para el componente URBI

S	ganancia call comprado con X=4	ganancia call vendido con X=3	ganancia de la estrategia
1	-0.000044015	0.1801	0.180055985
1.5	-0.000044015	0.1801	0.180055985
2	-0.000044015	0.1801	0.180055985
2.5	-0.000044015	0.1801	0.180055985
3	-0.000044015	0.1801	0.180055985
3.5	-0.000044015	-0.3199	-0.319944015
4	-0.000044015	-0.8199	-0.819944015
4.5	0.499955985	-1.3199	-0.819944015
5	0.999955985	-1.8199	-0.819944015
2.04	-0.000044015	0.1801	0.180055985

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.55: Representación de expectativa a la baja para el componente URBI



Fuente: Elaboración propia.

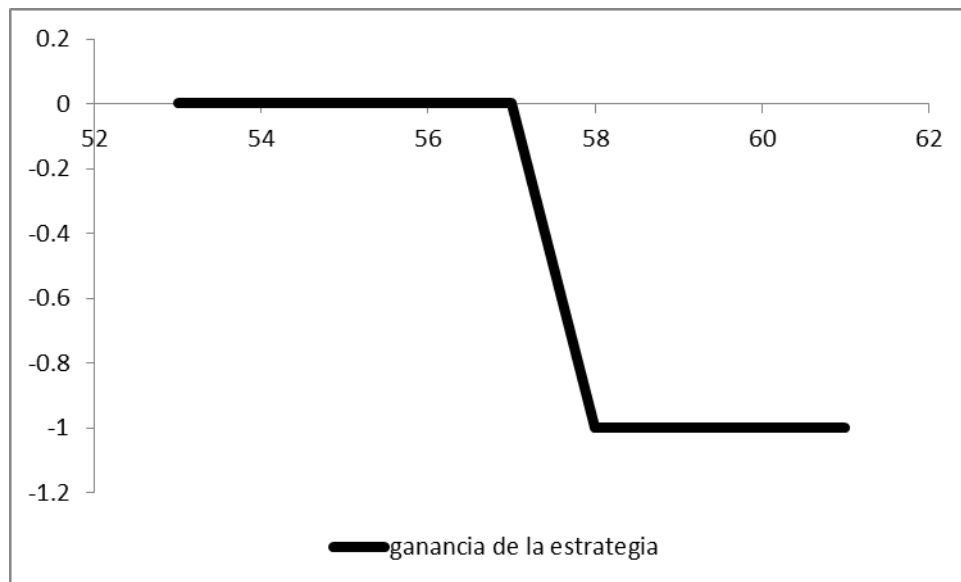
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 3 para valores del subyacente $S_t \in [4.5, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.82: Estrategia Bear para el componente GRUMAB

S	ganancia call comprado con X=58	ganancia call vendido con X=59	ganancia de la estrategia
54	-21.3321	21.3311	-0.001
55	-21.3321	21.3311	-0.001
56	-21.3321	21.3311	-0.001
57	-21.3321	21.3311	-0.001
58	-21.3321	21.3311	-0.001
59	-20.3321	21.3311	0.999
60	-19.3321	20.3311	0.999
61	-18.3321	19.3311	0.999
62	-17.3321	18.3311	0.999
59.14	-20.1921	21.1911	0.999

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.56: Representación de expectativa a la baja para el componente GRUMAB



Fuente: Elaboración propia.

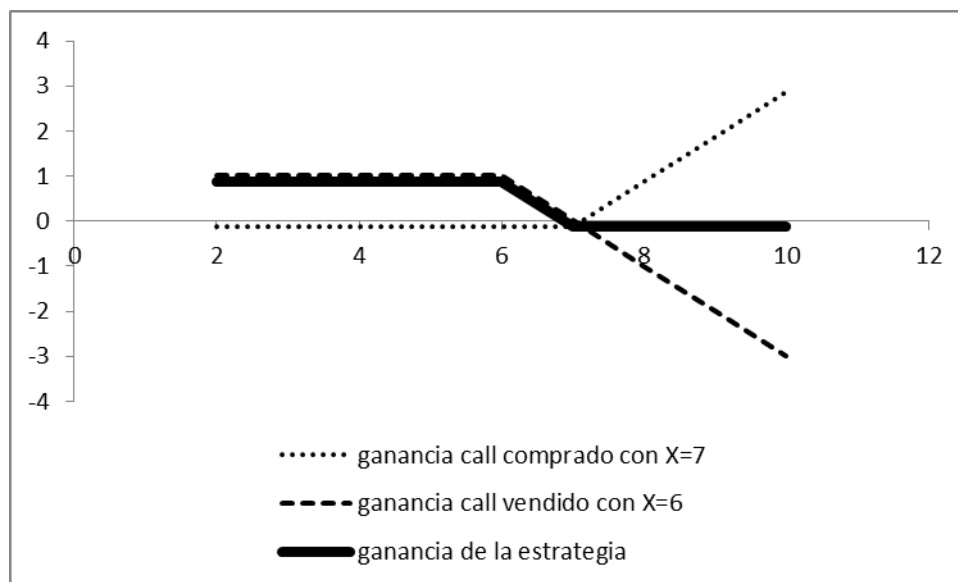
Se tiene que con el call vendido con precio de ejercicio de 59 para valores del subyacente $S_t \in [82, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.83: Estrategia Bear para el componente GEOB

S	ganancia call comprado con X=7	ganancia call vendido con X=6	ganancia de la estrategia
2	-0.1211	1.0094	0.8883
3	-0.1211	1.0094	0.8883
4	-0.1211	1.0094	0.8883
5	-0.1211	1.0094	0.8883
6	-0.1211	1.0094	0.8883
7	-0.1211	0.0094	-0.1117
8	0.8789	-0.9906	-0.1117
9	1.8789	-1.9906	-0.1117
10	2.8789	-2.9906	-0.1117
4.86	-0.1211	1.0094	0.8883

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.57: Representación de expectativa a la baja para el componente GEOB



Fuente: Elaboración propia.

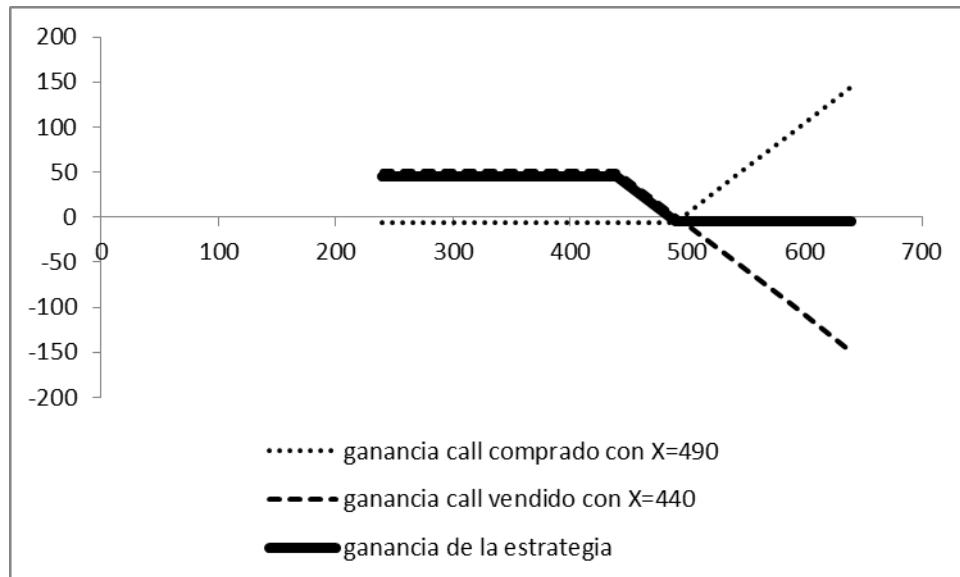
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 6 para valores del subyacente $S_t \in [8, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.84: Estrategia Bear para el componente ELEKTRA

S	ganancia call comprado con X=490	ganancia call vendido con X=440	ganancia de la estrategia
240	-5.3055	50.9426	45.6371
290	-5.3055	50.9426	45.6371
340	-5.3055	50.9426	45.6371
390	-5.3055	50.9426	45.6371
440	-5.3055	50.9426	45.6371
490	-5.3055	0.9426	-4.3629
540	44.6945	-49.0574	-4.3629
590	94.6945	-99.0574	-4.3629
640	144.6945	-149.0574	-4.3629
426.28	-5.3055	50.9426	45.6371

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.58: Representación de expectativa a la baja para el componente ELEKTRA



Fuente: Elaboración propia.

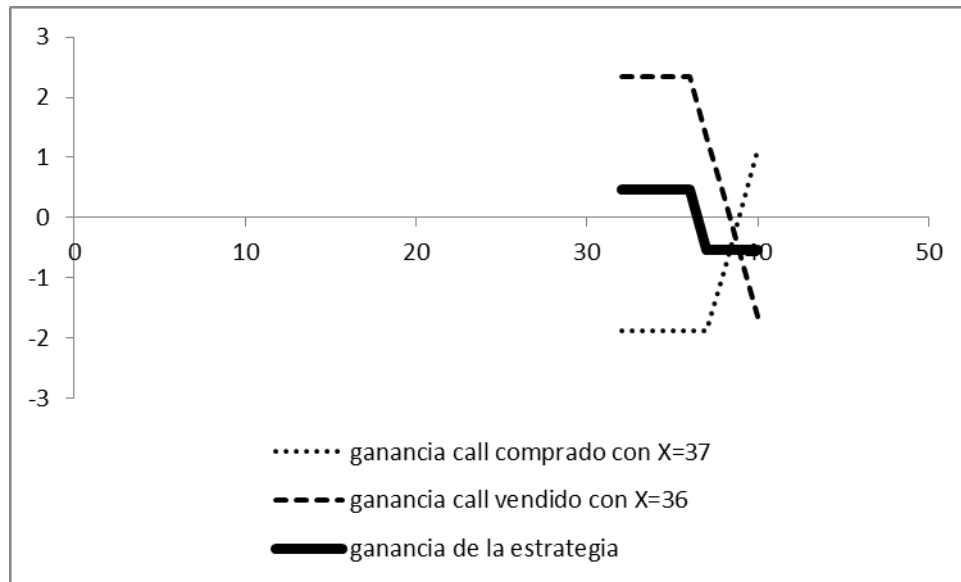
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 440 para valores del subyacente $S_t \in [540, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.85: Estrategia Bear para el componente BIMBOA

S	ganancia call comprado con X=37	ganancia call vendido con X=36	ganancia de la estrategia
32	-1.8835	2.3453	0.4618
33	-1.8835	2.3453	0.4618
34	-1.8835	2.3453	0.4618
35	-1.8835	2.3453	0.4618
36	-1.8835	2.3453	0.4618
37	-1.8835	1.3453	-0.5382
38	-0.8835	0.3453	-0.5382
39	0.1165	-0.6547	-0.5382
40	1.1165	-1.6547	-0.5382
35.57	-1.8835	2.3453	0.4618

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.59: Representación de expectativa a la baja para el componente BIMBOA



Fuente: Elaboración propia.

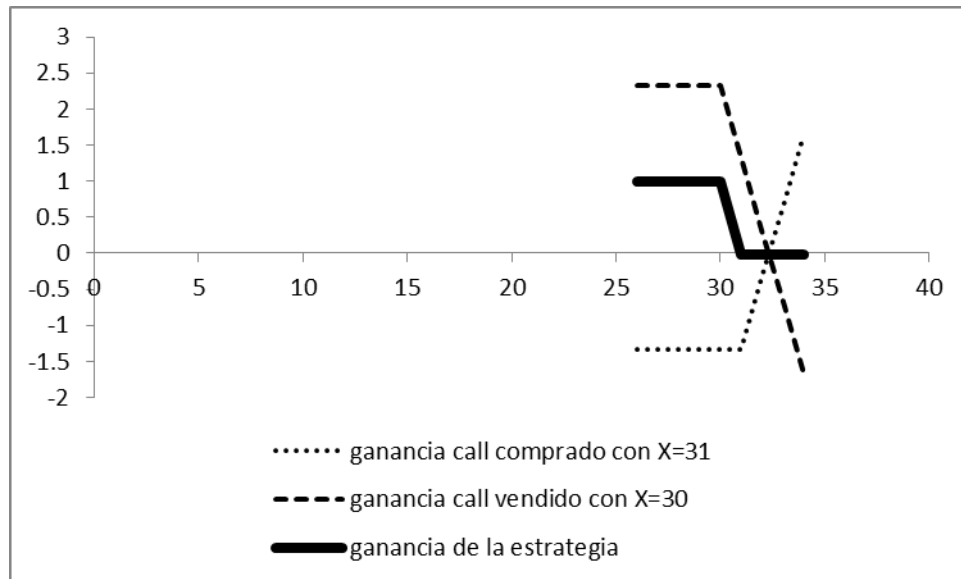
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 36 para valores del subyacente $S_t \in [39, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.86: Estrategia Bear para el componente ALSEA

S	ganancia call comprado con X=31	ganancia call vendido con X=30	ganancia de la estrategia
26	-1.3395	2.3251	0.9856
27	-1.3395	2.3251	0.9856
28	-1.3395	2.3251	0.9856
29	-1.3395	2.3251	0.9856
30	-1.3395	2.3251	0.9856
31	-1.3395	1.3251	-0.0144
32	-0.3395	0.3251	-0.0144
33	0.6605	-0.6749	-0.0144
34	1.6605	-1.6749	-0.0144
29.50	-1.3395	2.3251	0.9856

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.60: Representación de expectativa a la baja para el componente ALSEA



Fuente: Elaboración propia.

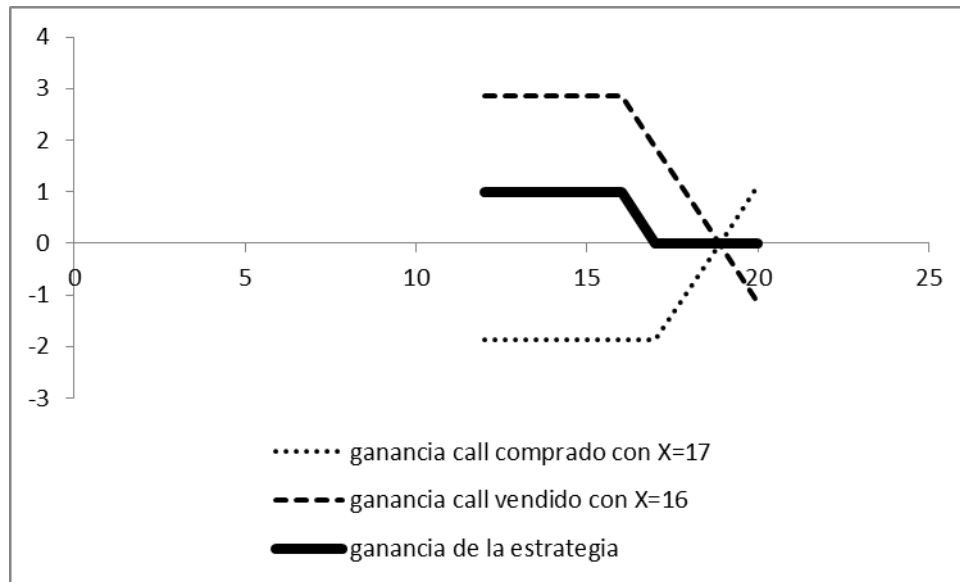
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 30 para valores del subyacente $S_t \in [33, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.87: Estrategia Bear para el componente HOMEX

S	ganancia call comprado con X=17	ganancia call vendido con X=16	ganancia de la estrategia
12	-1.8718	2.8593	0.9875
13	-1.8718	2.8593	0.9875
14	-1.8718	2.8593	0.9875
15	-1.8718	2.8593	0.9875
16	-1.8718	2.8593	0.9875
17	-1.8718	1.8593	-0.0125
18	-0.8718	0.8593	-0.0125
19	0.1282	-0.1407	-0.0125
20	1.1282	-1.1407	-0.0125
7.02	-1.8718	2.8593	0.9875

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.61: Representación de expectativa a la baja para el componente HOMEX



Fuente: Elaboración propia.

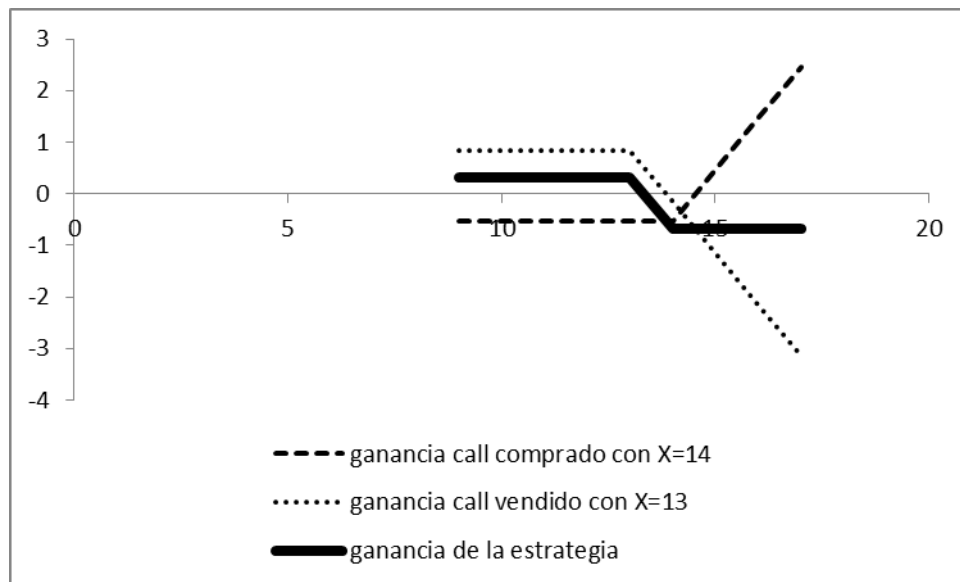
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 16 para valores del subyacente $S_t \in [19, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.88: Estrategia Bear para el componente AMXL

S	ganancia call comprado con X=14	ganancia call vendido con X=13	ganancia de la estrategia
9	-0.5361	0.8463	0.3102
10	-0.5361	0.8463	0.3102
11	-0.5361	0.8463	0.3102
12	-0.5361	0.8463	0.3102
13	-0.5361	0.8463	0.3102
14	-0.5361	-0.1537	-0.6898
15	0.4639	-1.1537	-0.6898
16	1.4639	-2.1537	-0.6898
17	2.4639	-3.1537	-0.6898
12.60	-0.5361	0.8463	0.3102

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.62: Representación de expectativa a la baja para el componente AMXL



Fuente: Elaboración propia.

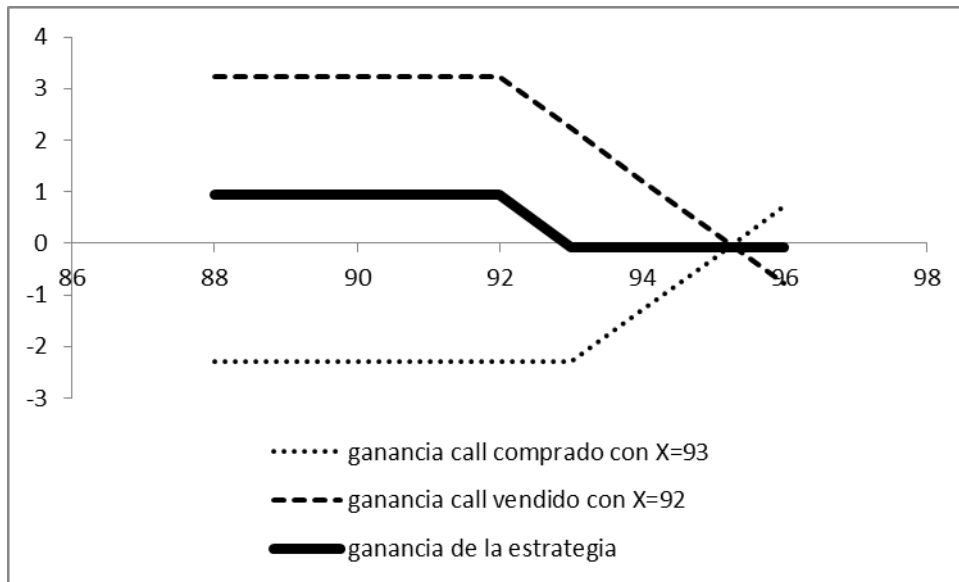
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 13 para valores del subyacente $S_t \in [15, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.89: Estrategia Bear para el componente GFNORTEO

S	ganancia call comprado con X=93	ganancia call vendido con X=92	ganancia de la estrategia
88	-2.2907	3.2256	0.9349
89	-2.2907	3.2256	0.9349
90	-2.2907	3.2256	0.9349
91	-2.2907	3.2256	0.9349
92	-2.2907	3.2256	0.9349
93	-2.2907	2.2256	-0.0651
94	-1.2907	1.2256	-0.0651
95	-0.2907	0.2256	-0.0651
96	0.7093	-0.7744	-0.0651
72.20	-2.2907	3.2256	0.9349

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.63: Representación de expectativa a la baja para el componente GFNORTEO



Fuente: Elaboración propia.

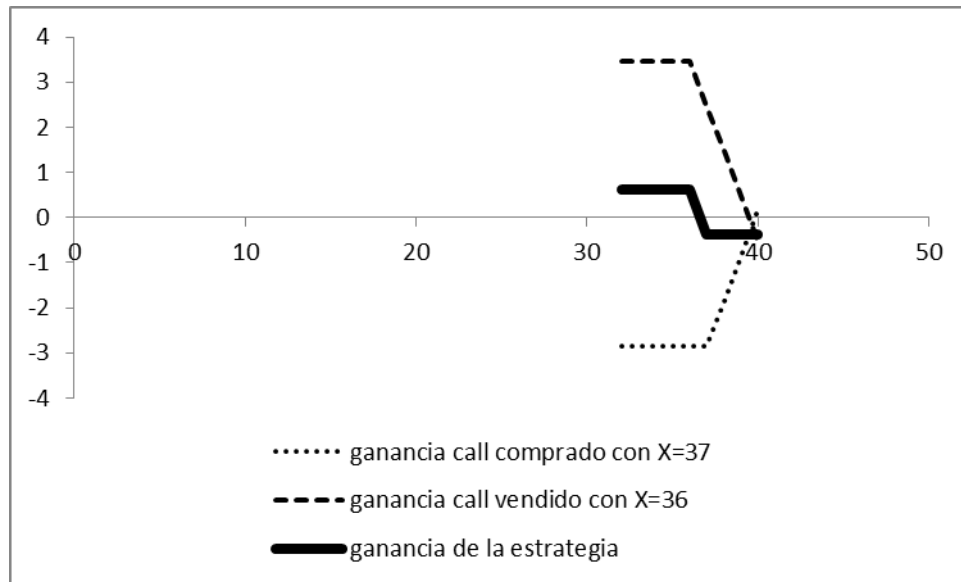
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 92 para valores del subyacente $S_t \in [96, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.90: Estrategia Bear para el componente WALMEXV

S	ganancia call comprado con X=37	ganancia call vendido con X=36	ganancia de la estrategia
32	-2.8466	3.4726	0.626
33	-2.8466	3.4726	0.626
34	-2.8466	3.4726	0.626
35	-2.8466	3.4726	0.626
36	-2.8466	3.4726	0.626
37	-2.8466	2.4726	-0.374
38	-1.8466	1.4726	-0.374
39	-0.8466	0.4726	-0.374
40	0.1534	-0.5274	-0.374
34.96	-2.8466	3.4726	0.626

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.64: Representación de expectativa a la baja para el componente WALMEXV



Fuente: Elaboración propia.

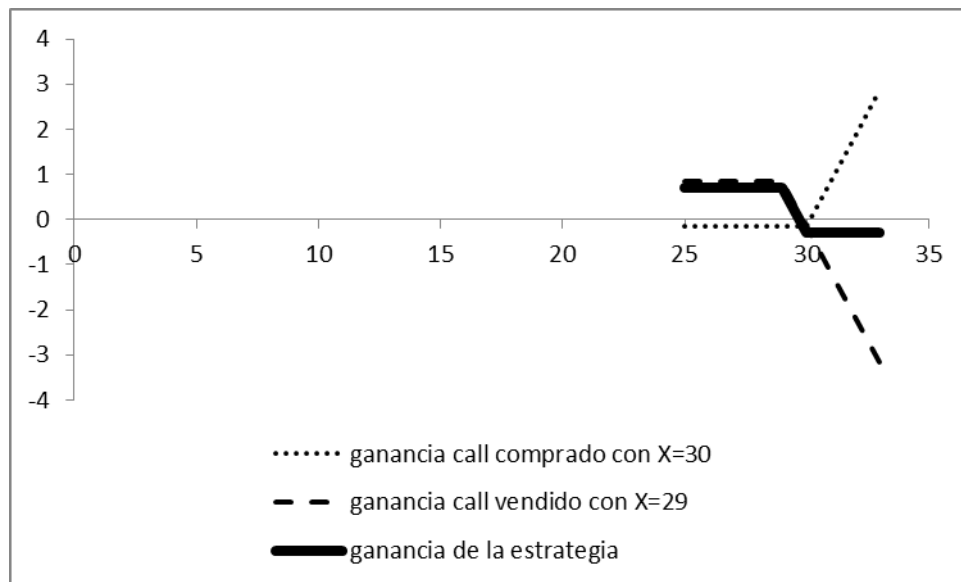
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 36 para valores del subyacente $S_t \in [40, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.91: Estrategia Bear para el componente ALFAA

S	ganancia call comprado con X=30	ganancia call vendido con X=29	ganancia de la estrategia
25	-0.1451	0.8422	0.6971
26	-0.1451	0.8422	0.6971
27	-0.1451	0.8422	0.6971
28	-0.1451	0.8422	0.6971
29	-0.1451	0.8422	0.6971
30	-0.1451	-0.1578	-0.3029
31	0.8549	-1.1578	-0.3029
32	1.8549	-2.1578	-0.3029
33	2.8549	-3.1578	-0.3029
28.66	-0.1451	0.8422	0.6971

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.65: Representación de expectativa a la baja para el componente ALFAA



Fuente: Elaboración propia.

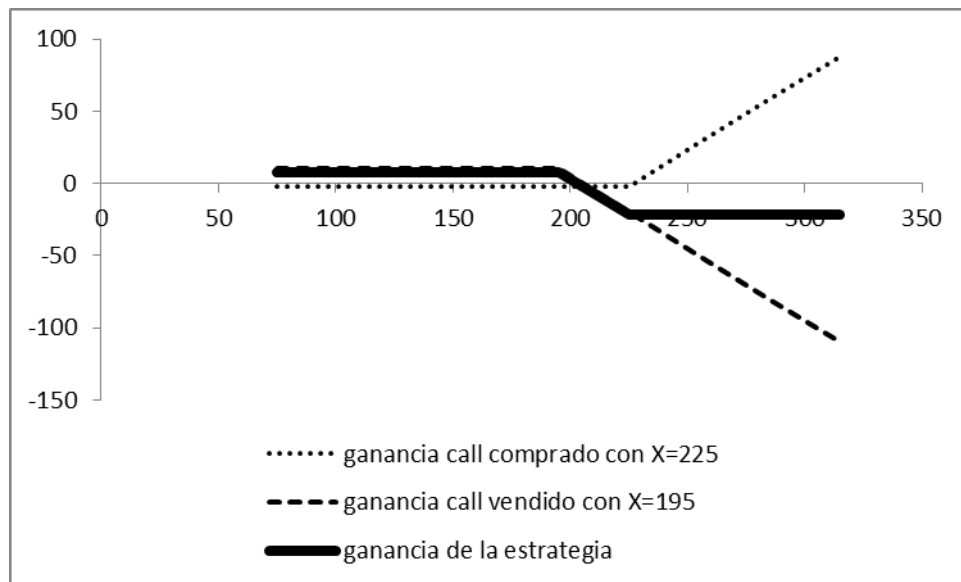
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 29 para valores del subyacente $S_t \in [31, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.92: Estrategia Bear para el componente KOFL

S	ganancia call comprado con X=225	ganancia call vendido con X=195	ganancia de la estrategia
75	-2.0144	10.0351	8.0207
105	-2.0144	10.0351	8.0207
135	-2.0144	10.0351	8.0207
165	-2.0144	10.0351	8.0207
195	-2.0144	10.0351	8.0207
225	-2.0144	-19.9649	-21.9793
255	27.9856	-49.9649	-21.9793
285	57.9856	-79.9649	-21.9793
315	87.9856	-109.9649	-21.9793
171.5	-2.0144	10.0351	8.0207

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.66: Representación de expectativa a la baja para el componente KOFL



Fuente: Elaboración propia.

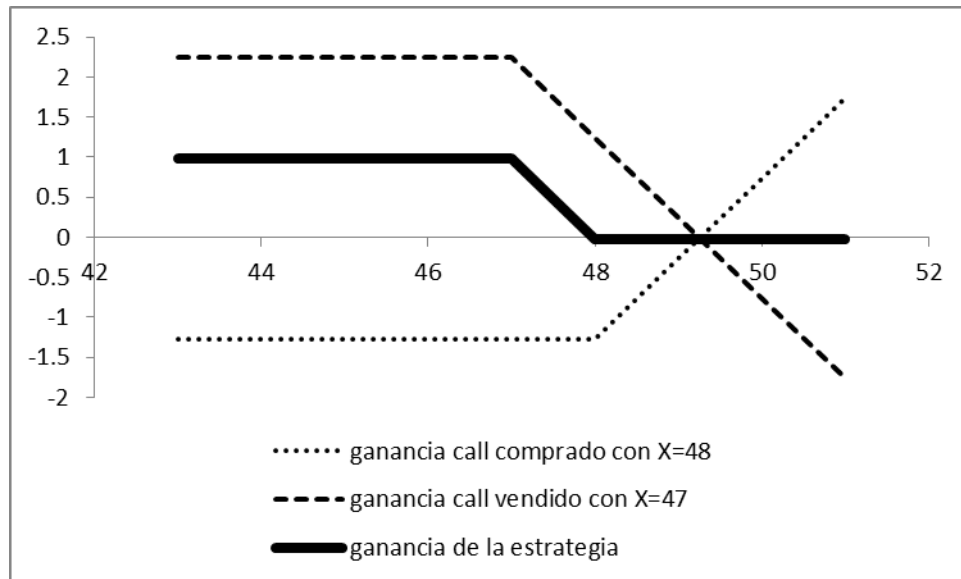
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 195 para valores del subyacente $S_t \in [255, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.93: Estrategia Bear para el componente GMEXICOB

S	ganancia call comprado con X=48	ganancia call vendido con X=47	ganancia de la estrategia
43	-1.2705	2.2465	0.976
44	-1.2705	2.2465	0.976
45	-1.2705	2.2465	0.976
46	-1.2705	2.2465	0.976
47	-1.2705	2.2465	0.976
48	-1.2705	1.2465	-0.024
49	-0.2705	0.2465	-0.024
50	0.7295	-0.7535	-0.024
51	1.7295	-1.7535	-0.024
35.52	-1.2705	2.2465	0.976

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.67: Representación de expectativa a la baja para el componente GMEXICOB



Fuente: Elaboración propia.

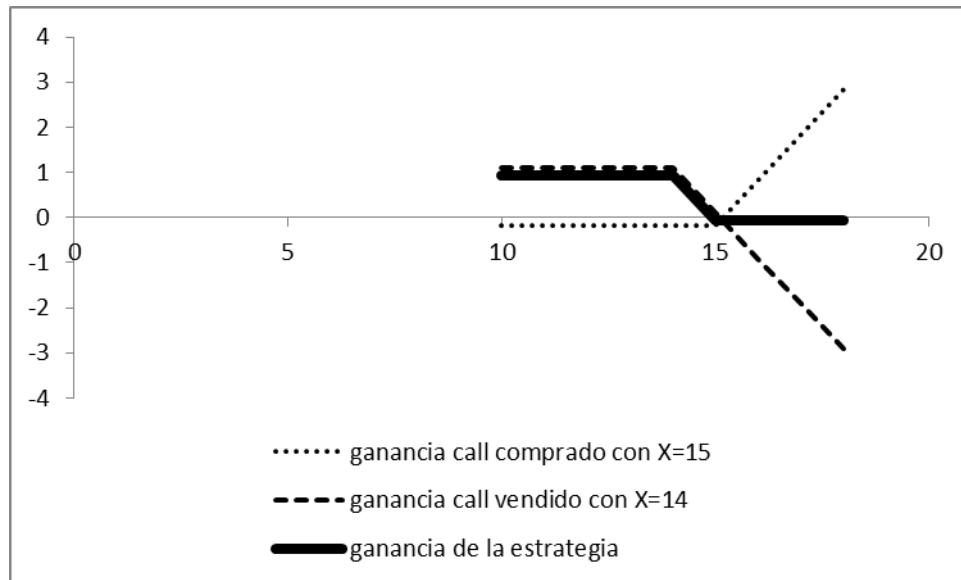
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 47 para valores del subyacente $S_t \in [50, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.94: Estrategia Bear para el componente CEMEXCPO

S	ganancia call comprado con X=15	ganancia call vendido con X=14	ganancia de la estrategia
10	-0.17	1.0982	0.9282
11	-0.17	1.0982	0.9282
12	-0.17	1.0982	0.9282
13	-0.17	1.0982	0.9282
14	-0.17	1.0982	0.9282
15	-0.17	0.0982	-0.0718
16	0.83	-0.9018	-0.0718
17	1.83	-1.9018	-0.0718
18	2.83	-2.9018	-0.0718
13.14	-0.17	1.0982	0.9282

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.68: Representación de expectativa a la baja para el componente CEMEXCPO



Fuente: Elaboración propia.

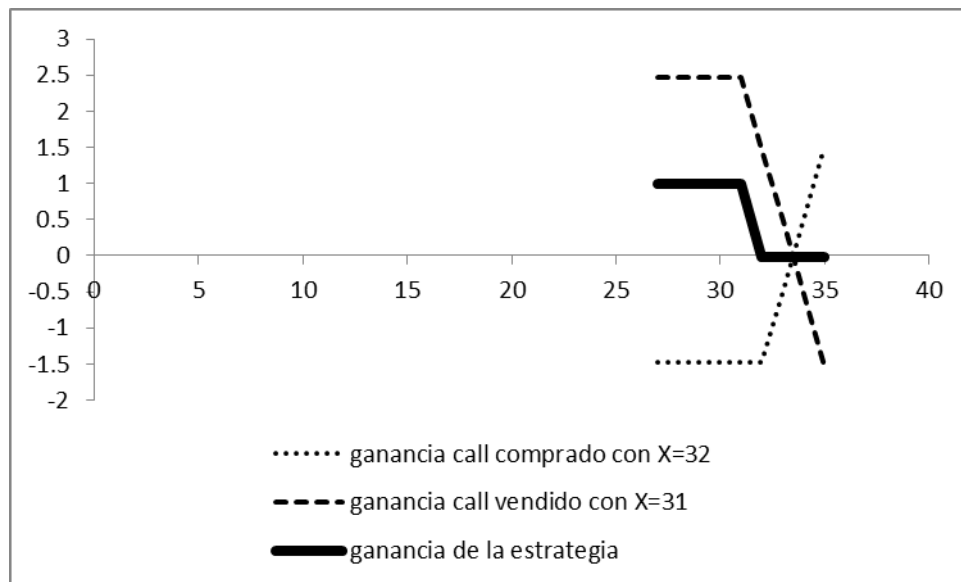
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 14 para valores del subyacente $S_t \in [16, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.95: Estrategia Bear para el componente GFINBURO

S	ganancia call comprado con X=32	ganancia call vendido con X=31	ganancia de la estrategia
27	-1.4842	2.4733	0.9891
28	-1.4842	2.4733	0.9891
29	-1.4842	2.4733	0.9891
30	-1.4842	2.4733	0.9891
31	-1.4842	2.4733	0.9891
32	-1.4842	1.4733	-0.0109
33	-0.4842	0.4733	-0.0109
34	0.5158	-0.5267	-0.0109
35	1.5158	-1.5267	-0.0109
27.76	-1.4842	2.4733	0.9891

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.69: Representación de expectativa a la baja para el componente GFINBURO



Fuente: Elaboración propia.

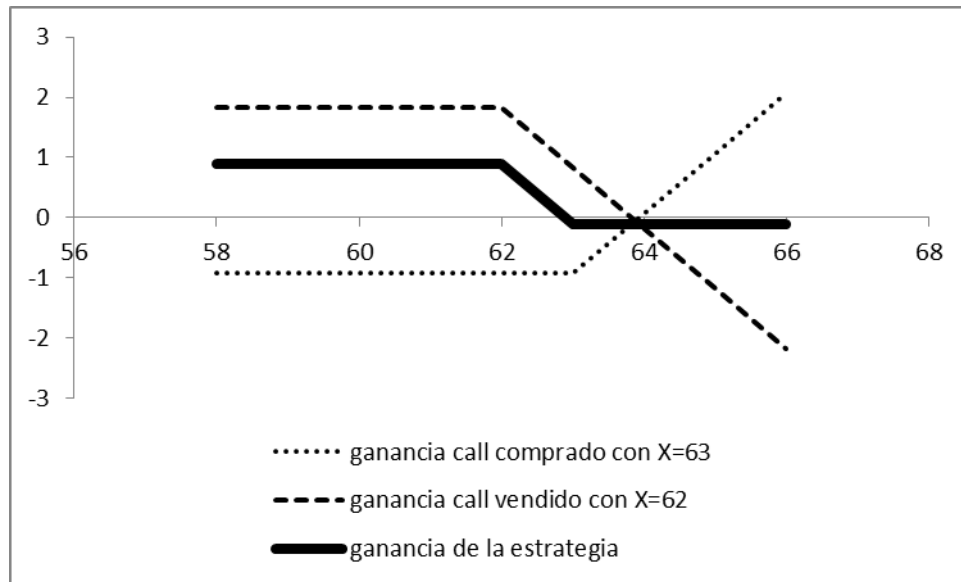
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 31 para valores del subyacente $S_t \in [34, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.96: Estrategia Bear para el componente MEXCHEM

S	ganancia call comprado con X=63	ganancia call vendido con X=62	ganancia de la estrategia
58	-0.9309	1.8273	0.8964
59	-0.9309	1.8273	0.8964
60	-0.9309	1.8273	0.8964
61	-0.9309	1.8273	0.8964
62	-0.9309	1.8273	0.8964
63	-0.9309	0.8273	-0.1036
64	0.0691	-0.1727	-0.1036
65	1.0691	-1.1727	-0.1036
66	2.0691	-2.1727	-0.1036
53.35	-0.9309	1.8273	0.8964

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.70: Representación de expectativa a la baja para el componente MEXCHEM



Fuente: Elaboración propia.

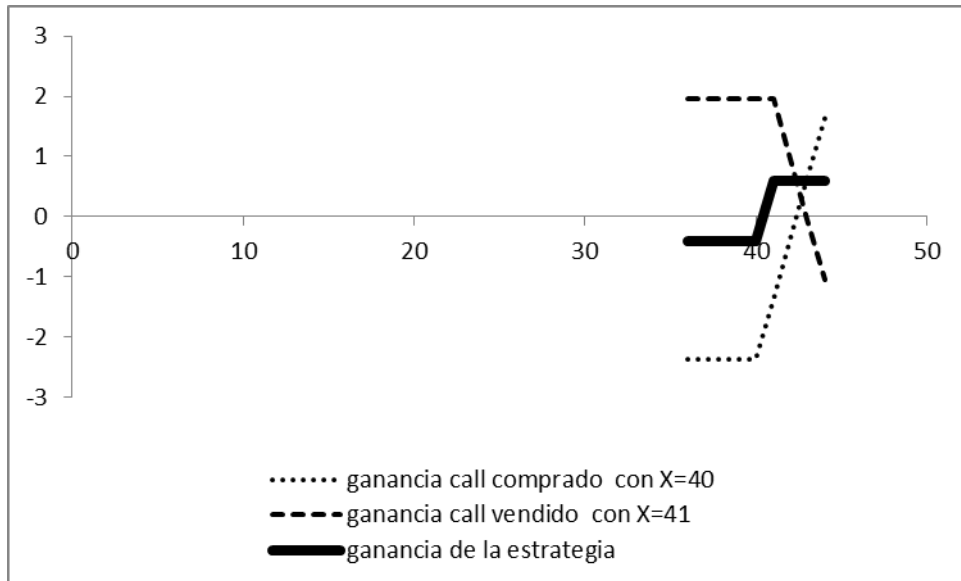
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 62 para valores del subyacente $S_t \in [64, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.97: Estrategia Bull para el componente KIMBERA

S	ganancia call comprado con X=40	ganancia call vendido con X=41	ganancia de la estrategia
36	-2.3695	1.9578	-0.4117
37	-2.3695	1.9578	-0.4117
38	-2.3695	1.9578	-0.4117
39	-2.3695	1.9578	-0.4117
40	-2.3695	1.9578	-0.4117
41	-1.3695	1.9578	0.5883
42	-0.3695	0.9578	0.5883
43	0.6305	-0.0422	0.5883
44	1.6305	-1.0422	0.5883
41.64	-0.7295	1.3178	0.5883

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.71: Representación de expectativa a la alza para el componente KIMBERA



Fuente: Elaboración propia.

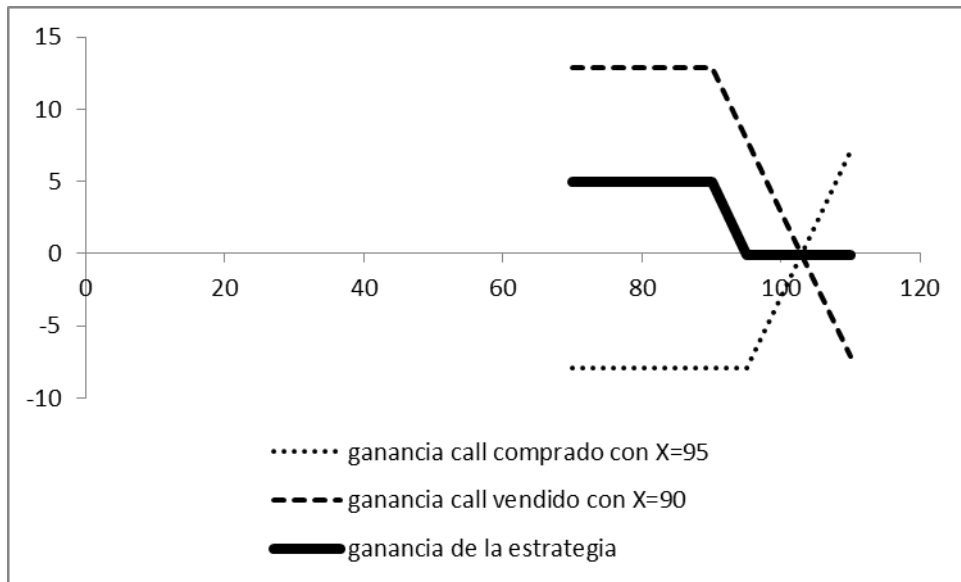
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 41 para valores del subyacente $S_t \in [43, \infty)$ la ganancia es menor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.98: Estrategia Bear para el componente ICHB

S	ganancia call comprado con X=95	ganancia call vendido con X=90	ganancia de la estrategia
70	-7.9246	12.8712	4.9466
75	-7.9246	12.8712	4.9466
80	-7.9246	12.8712	4.9466
85	-7.9246	12.8712	4.9466
90	-7.9246	12.8712	4.9466
95	-7.9246	7.8712	-0.0534
100	-2.9246	2.8712	-0.0534
105	2.0754	-2.1288	-0.0534
110	7.0754	-7.1288	-0.0534
78.47	-7.9246	12.8712	4.9466

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.72: Representación de expectativa a la baja para el componente ICHB



Fuente: Elaboración propia.

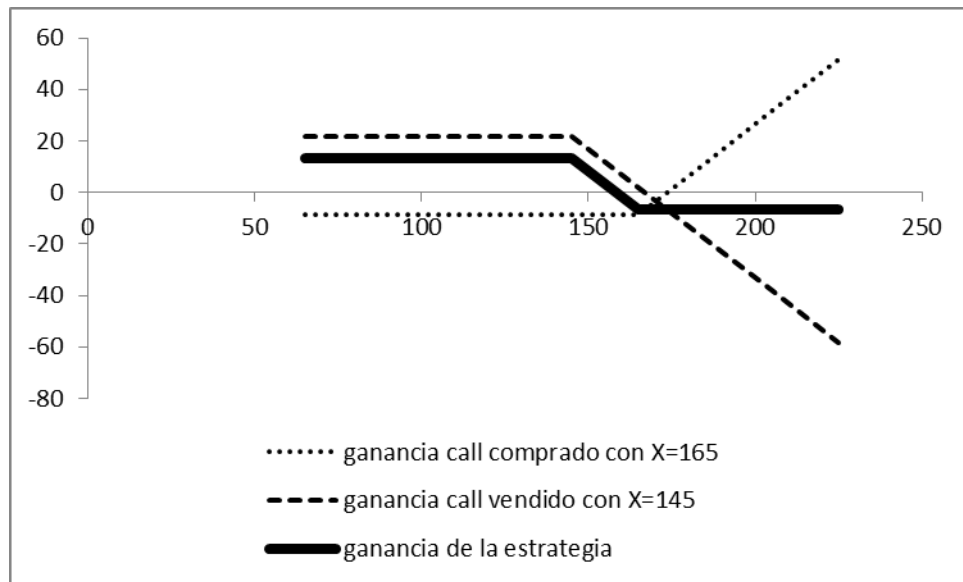
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 90 para valores del subyacente $S_t \in [105, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.99: Estrategia Bear para el componente ASURB

S	ganancia call comprado con X=165	ganancia call vendido con X=145	ganancia de la estrategia
65	-8.5436	2.18E+01	13.2623
85	-8.5436	2.18E+01	13.2623
105	-8.5436	2.18E+01	13.2623
125	-8.5436	2.18E+01	13.2623
145	-8.5436	2.18E+01	13.2623
165	-8.5436	1.81E+00	-6.7377
185	11.4564	-1.82E+01	-6.7377
205	31.4564	-3.82E+01	-6.7377
225	51.4564	-5.82E+01	-6.7377
137.68	-8.5436	21.8059	13.2623

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.73: Estrategia Bear para el componente ASURB



Fuente: Elaboración propia.

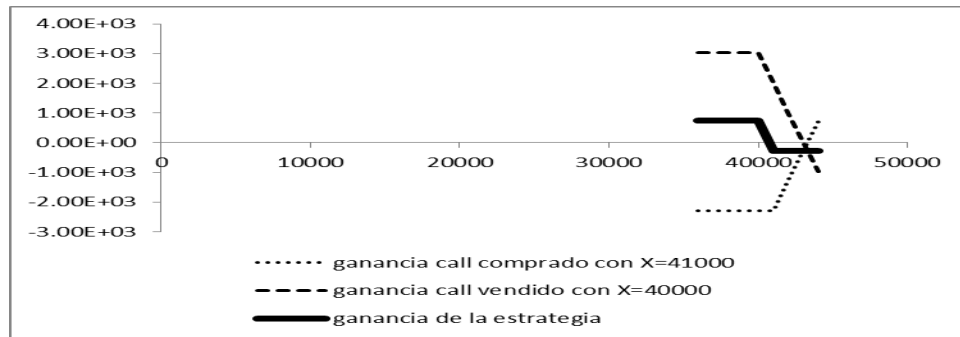
Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 145 para valores del subyacente $S_t \in [185, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

Cuadro 4.100: Estrategia Bear para el componente IPC

S	ganancia call comprado con X=41000	ganancia call vendido con X=40000	ganancia de la estrategia
36000	-2.29E+03	3.02E+03	732.7
37000	-2.29E+03	3.02E+03	732.7
38000	-2.29E+03	3.02E+03	732.7
39000	-2.29E+03	3.02E+03	732.7
40000	-2.29E+03	3.02E+03	732.7
41000	-2.29E+03	2.02E+03	-267.3
42000	-1.29E+03	1.02E+03	-267.3
43000	-2.88E+02	2.09E+01	-267.3
44000	7.12E+02	-9.79E+02	-267.3
38,036.46	-2.29E+03	3.02E+03	732.7

Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4.74: Representación de expectativa a la baja para el componente IPC



Fuente: Elaboración propia.

Se observa que con el call vendido con precio de ejercicio de 40,000 para valores del subyacente $S_t \in [44000, \infty)$ la pérdida es mayor que la obtenida con la estrategia de cobertura.

En el siguiente cuadro se muestra un resumen de las estrategias analizadas:

Cuadro 4.101: Expectativas de estrategias Bear y Bull para los componentes del IPC y para el mismo IPC

	Bear	Bull
IPC	1	0
Componentes	18	3

Fuente: Elaboración propia.

Al comparar los resultados para los tres periodos distintos es claro que el mercado (IPC) y sus componentes tienen una tendencia a la baja en el corto plazo.

Conclusiones

Actualmente la ingeniería financiera ha tenido avances notables en información tecnológica y en el desarrollo de software para modelar fenómenos financieros, buscando la creación de nuevos productos, para mejorar la toma de decisión del inversionista.

En esta tesis se ha presentado la valuación de opciones europeas de compra sobre veintiún de los treinta y cinco componentes del IPC y del mismo IPC bajo el supuesto de que la volatilidad en los rendimientos de los activos subyacentes es conducida por un modelo GARCH calibrado con datos históricos.

Los modelos GARCH pueden corregir los sesgos asociados al modelo de Black y Scholes. Debido a que estos modelos se han desarrollado tecnológicamente, fue posible diseñar pruebas realizando simulaciones por el método Monte Carlo. La ventaja de utilizar dicho método es que se tiene una precisión hasta de cuatro decimales, al obtener el valor esperado de las primas de las opciones financieras, es decir, el sustento teórico que hay detrás del método Monte Carlo es la ley de los grandes números, la cual establece que a medida que el número de las simulaciones tiende a infinito, se tendrá una convergencia al valor esperado de la prima de la opción financiera, lo cual conlleva a tener cálculos de mayor precisión para formar las estrategias de cobertura de riesgos.

Mediante las estrategias de cobertura de riesgos conformadas por las primas de las opciones financieras simuladas por el método Monte Carlo se comprobó la hipótesis, ya que en el corto plazo la tendencia del mercado es a la baja (Bear).

Se ha observado que cuando el inversionista tiene una expectativa a la alza (Bull) al realizar sus inversiones a 45,60 y 90 días, el sector de alimentos y bebidas es el que predomina respecto a los otros sectores. Asimismo cuando el inversionista tiene una expectativa a la baja (Bear) a plazos de 45,60 y 90 días, el sector construcción es el que predomina.

También se observó una relación directa entre el plazo y la estrategia Bear, es decir, al aumentar el plazo, el número de estrategias Bear también aumenta, lo anterior implica una relación inversa entre el plazo y la estrategia Bull, es decir, al aumentar el plazo, el número de estrategias Bull disminuye.

Se mostró que el inversionista al decidir invertir directamente en el mercado (IPC) a plazos de 45,60 y 90 días la estrategia a utilizar es Bear, donde el inversionista obtiene mayores ganancias a mayor plazo.

Al observar las inversiones a 45 días, en términos de ganancia para el inversionista, ASURB es quien otorga la mayor y ALFAA la menor. A 60 días ASURB la mayor y CEMEXCPO la menor, y a 90 días ELEKTRA la mayor y URBI la menor. Todas Las ganancias anteriormente descritas se obtuvieron utilizando la estrategia Bear.

Por último es importante decir que aunque la probabilidad de obtener ganancias al realizar una inversión sea muy alta; esto no garantiza que ocurrirá el evento, simplemente nos da un panorama con una probabilidad casi segura de que el evento ocurra, lo anterior porque los eventos de probabilidad cero llegan a ocurrir y pueden ser de alto impacto. Por lo anterior es más recomendable que el inversionista tome decisiones de inversión para prevenir pérdidas que para obtener ganancias extraordinarias.

Se espera que este trabajo sirva como apoyo para futuras investigaciones, al poder analizar estrategias de inversión, donde la toma de decisión del inversionista sea con base a la expectativa de volatilidad del activo subyacente, mediante las estrategias straddle y strangle.

Apéndices

A.1 Portafolio de mínima varianza global de Markowitz

$$\min \frac{1}{2} \sigma_p^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

s.a:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i = g_1(\bullet), \quad n = 2$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 = g_2(\bullet), \quad w_i \geq 0$$

Solución:

Sabemos que $n=2$ desarrollando la función objetivo $\frac{1}{2} \sigma_p^2$, se tiene que:

$$\frac{1}{2} \sigma_p^2 = \frac{1}{2} [w_1 w_1 \sigma_{11} + w_2 w_1 \sigma_{21} + w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_2 \sigma_{22}] = U(\bullet)$$

$$\Rightarrow U(\bullet) = \frac{1}{2} [w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U(\bullet)}{\partial w_1} = \frac{1}{2} [2w_1 \sigma_1^2 + 2w_2 \sigma_{12}] = w_1 \sigma_1^2 + w_2 \sigma_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U(\bullet)}{\partial w_2} = \frac{1}{2} [2w_2 \sigma_2^2 + 2w_1 \sigma_{12}] = w_2 \sigma_2^2 + w_1 \sigma_{12}$$

Por otro lado la restricción al problema de optimización es:

$$g_1(\bullet) = w_1 r_1 + w_2 r_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1(\bullet)}{\partial w_1} = r_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1(\bullet)}{\partial w_2} = r_2$$

$$g_2(\bullet) = w_1 + w_2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_2(\bullet)}{\partial w_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_2(\bullet)}{\partial w_2} = 1$$

Por lo que el lagrangiano queda expresado de la siguiente manera:

$$(w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12}, w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{12}) = \lambda_1(r_1, r_2) + \lambda_2(1,1)$$

donde:

λ_1 : Multiplicador de Lagrange asociado a la restricción 1.

λ_2 : Multiplicador de Lagrange asociado a la restricción 2.

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones dado por el lagrangiano y las restricciones del problema:

$$w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{12} = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 \quad (1)$$

$$w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{12} = \lambda_1 r_2 + \lambda_2 \quad (2)$$

$$w_1 r_1 + w_2 r_2 = \bar{r}_p \quad (3)$$

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (4)$$

De la ecuación (3) tenemos que:

$$w_2 = \frac{\bar{r}_p - w_1 r_1}{r_2} \quad (5)$$

De la ecuación (4) tenemos que:

$$w_1 = 1 - w_2 \quad (6)$$

Al sustituir (5) en (6):

$$w_1 = 1 - \frac{\bar{r}_p - w_1 r_1}{r_2} = \frac{r_2 - (\bar{r}_p - w_1 r_1)}{r_2} \quad (7)$$

De la ecuación (7):

$$w_1 = 1 - \frac{\bar{r}_p - w_1 r_1}{r_2} = \frac{r_2 - (\bar{r}_p - w_1 r_1)}{r_2}$$

$$\Rightarrow w_1 r_2 = r_2 - (\bar{r}_p - w_1 r_1)$$

$$\Rightarrow w_1 r_2 - w_1 r_1 = r_2 - \bar{r}_p$$

$$\Rightarrow w_1 (r_2 - r_1) = r_2 - \bar{r}_p$$

$$\Rightarrow w_1^* = \frac{r_2 - \bar{r}_p}{r_2 - r_1} \quad (8)$$

Al sustituir (8) en (5):

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{\bar{r}_p - \frac{r_2 - \bar{r}_p}{r_2 - r_1} r_1}{r_2} = \frac{\bar{r}_p(r_2 - r_1) - r_1(r_2 - \bar{r}_p)}{r_2(r_2 - r_1)} \\
 &\Rightarrow \frac{\bar{r}_p r_2 - \bar{r}_p r_1 - r_1 r_2 + \bar{r}_p r_1}{r_2(r_2 - r_1)} = \frac{\bar{r}_p r_2 - r_1 r_2}{r_2(r_2 - r_1)} = \frac{r_2(\bar{r}_p - r_1)}{r_2(r_2 - r_1)} \\
 &\Rightarrow w_2^* = \frac{\bar{r}_p - r_1}{r_2 - r_1} \\
 W^* &= \left(\frac{r_2 - \bar{r}_p}{r_2 - r_1}, \frac{\bar{r}_p - r_1}{r_2 - r_1} \right) \\
 &\therefore \sigma_p^2(W^*)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto w^* representa las ponderaciones óptimas de inversión y $\sigma_p^2(W^*)$ el nivel de riesgo óptimo, es decir, es el portafolio de mínima varianza global, al partir del cual se construyen los portafolios eficientes.

A.2 Correlación.

Dadas N observaciones X_1, X_2, \dots, X_N , de una serie de tiempo discreta se puede hacer $(N-1)$ pares de observaciones, dadas como: $(X_1, X_2), \dots, (X_{N-1}, X_N)$. Tomando a la primera observación en cada par como una variable y a la segunda como una segunda variable, el coeficiente de correlación entre X_t y X_{t+1} está dado por:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X}_{(1)})(X_{t+1} - \bar{X}_{(2)})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X}_{(1)})^2 \sum_{t=1}^{N-1} (X_{t+1} - \bar{X}_{(2)})^2}}$$

donde:

$$\bar{X}_{(1)} = \sum_{t=1}^{N-1} \frac{X_t}{N-1}$$

$$\bar{X}_{(2)} = \sum_{t=2}^N \frac{X_t}{N-1}$$

$\bar{X}_{(1)}$: Es la media de las primeras $(N-1)$ observaciones.

$\bar{X}_{(2)}$: Es la media de las últimas $(N-1)$ observaciones.

Para N grande, r_1 está dada aproximadamente por:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\frac{N-1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2}$$

donde:

$$\bar{X} = \sum_{t=1}^N \frac{X_t}{N}$$

\bar{X} :Media general.

Como $N \approx N - 1$ para N grande se tiene que:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2}$$

De forma análoga se calcula la correlación entre observaciones a distancia de tamaño k , es decir, la correlación con k rezagos:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2}$$

En la práctica el coeficiente de correlación se calcula a través de las series de coeficientes de covarianza $\{c_k\}$, que se definen con la siguiente fórmula de covarianza:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$$

luego se calcula:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \forall k = 1, 2, \dots, m, \quad m \leq N$$

A.3 Función de Autocorrelación.

Propiedades:

Sea $X(t)$ el proceso estocástico con media μ , varianza σ^2 , f.acv $\gamma(\tau)$ y f.ac. $\rho(\tau)$, luego entonces:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}, \rho(0) = 1$$

La función de autocorrelación cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad 1: La f.ac es una función simétrica con respecto al retraso, es decir:

$$\rho(\tau) = \rho(-\tau)$$

Demostración:

Como $\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}$ y $X(\tau)$ es estacionaria, entonces:

$$\gamma(\tau) = \text{Cov}[X(t), X(t+\tau)] = \text{Cov}[X(t+\tau), X(t)] = \gamma(-\tau) \Rightarrow \rho(\tau) = \rho(-\tau) \quad \text{QED}$$

Propiedad 2: $|\rho(\tau)| \leq 1$

Demostración:

Observando que:

$$\text{Var}[\lambda_1 X(t) + \lambda_2 X(t+\tau)] \geq 0$$

Para cualesquiera constantes λ_1 y λ_2 , esta varianza es igual a:

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 \text{Var}[X(t)] + \lambda_2^2 \text{Var}[X(t+\tau)] + 2\lambda_1\lambda_2 \text{Cov}[X(t), X(t+\tau)] \\ & = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sigma^2 + 2\lambda_1\lambda_2\gamma(\tau) \end{aligned}$$

$$\text{Si } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \gamma(\tau) \geq -\sigma^2 \Rightarrow \rho(\tau) \geq -1$$

$$\text{Y cuando } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow \gamma(\tau) \leq \sigma^2 \Rightarrow \rho(\tau) \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq \rho(\tau \leq 1) \quad \text{QED}$$

Propiedad 3: No unicidad. A una f.acv. particular le corresponde solamente un posible proceso estacionario normal, el cual está determinado por su media, varianza, f.ac. Pero es posible encontrar algunos procesos no normales con las mismas funciones de autocorrelación, esto ocasiona dificultades al interpretar a una muestra de funciones de autocorrelación. Jenkins y Watts (1968) dieron el ejemplo de 2 procesos estocásticos distintos que tenían la misma f.ac.

Bibliografía

Baz, J. and Chacko G. (2004). Financial derivatives: pricing, applications, and mathematics, Cambridge University Press.

Black, F. (1975). "Fact and Fantasy in the Use of Options", Financial Anal. Journal., Vol. 31, pp.36-41 and 61-72.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of political economy, Vol. 81, num 3. pp.637-659.

Bodie, Zvi, Kane, Alex, Marcus, Alan J. (2007). Investments, 7^a ed., Boston, McGraw-Hill.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, Vol. 31, pp. 307-327.

Brooks, C. (2002). Introductory Econometrics for Finance. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Cox, J., and Rubinstein, M. (1985). Options markets. New Jersey, Prentice Hall.

Das, S. (1998). Risk Management and Financial Derivatives: A Guide to the Mathematics, EUA, McGraw-Hill.

De Lara, A. (2011). Medición y control de riesgos financieros. 3^a ed. México. Limusa.

De Lara, A. (2005). Productos financieros derivados: valuación y cobertura de riesgos. México. Limusa.

Duan, J. (1995). "The GARCH Options Pricing Model", Mathematical Finance, Vol. 5, pp. 13-32.

Dubofsky, D. (1992). Options and Financial Futures: Valuations and Uses, EUA, McGraw-Hill.

Elton, E., and Gruber, M. (1991). Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons.

Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations". Econometrica, Vol. 50, pp. 987-1008.

Fabozzi, F. (1993). Bond markets, analysis and strategies. EUA. Prentice Hall.

Fabozzi, F. (1998). Investment management. EUA. Prentice Hall.

Fama, E.F. (1965), "The Behavior of Stock Market Prices", Journal of Business, 38, 34-105.

Figlewski, S., Silber W., Subrahmanyam, M. (1990). Financial Options: From Theory to Practice, EUA, Donnelley and Sons Company.

Gujarati, D. (2010). Econometría. 5ª ed. EUA. McGrawHill.

Hentschel, L. (1995). "All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models", Journal of Financial Economics, 39, 71-104.

Heston, S., and S. Nandi (2000). "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model", Review of Financial Studies, Vol. 13, pp. 585-626.

Hull, J. (2009). Options, Futures and other Derivative. 7ª ed. EUA. Prentice Hall.

Hull, J. and A. White (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility, Journal of Finance, 42, 281-300.

Kreyszig, E. (2006). Advanced engineering mathematics. 9th ed. New Jersey John Wiley & Sons.

Lamothe F. (1993). Opciones Financieras: Un enfoque fundamental, Madrid, McGraw-Hill.

Markowitz H. (1970). Portfolio Selection: efficient diversification of investments. Jhon Wiley & Sons.

Martellini, L., Priaulet P., and Priaulet S. (2003). Fixed income securities: valuation, risk management and portfolio strategies. Wiley.

McLeish Don L. (2005). Monte Carlo simulation and finance. Wiley

Neftci, S. (2002). An introduction to the mathematics of financial derivatives. Academic Press.

Neftci, S. (2008). Principles of financial engineering. Academic Press.

Nelson, D. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new Approach", Econometrica, Vol. 59, 347-370.

Ortiz, A. (2010). "Valuación de opciones europeas sobre el IPC con un modelo GARCH para la volatilidad". Avances recientes en valuación de activos y administración de riesgos, 217-234.

Venegas, F. (2008). Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, 2ª ed., México. Thomson.

