UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una caracterización de los QI-Módulos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ADRIANA LEÓN MONTES

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Ríos Montes
2013

Agradecimientos

Hay momentos en la vida en el que vemos camino recorrido, y notamos que nunca estamos solos; siempre estamos rodeados de personas; personas que nos acompañan en nuestro viaje sin fin; personas con las reímos, gozamos, sufrimos y lloramos; nos enseñan y aprendemos; nos comparten sus conocimientos, sus experiencias, creencias y valores; pero ¿cuándo nos detemos y les agradecemos por ser parte de nosotros?.

Yo he alcanzando uno de estos puntos, y les dedico este espacio a todas las pesonas que han caminado junto a mí. Gracias a mis padres y hermano que han estado conmigo desde el principio. A mis amigos, que hemos aprendido juntos. A todos mis maestros, y en especial a mi asesor Pepe, por su apoyo y pasencia en la realización de este proyecto; y claro a la UNAM, y la Facultad de Ciencias que ha sido mi segundo hogar en los ultimos años.

Gracias a todos, sin ustedes yo no estaría escribiendo esto y no sería la persona que soy ahora.

Se puede conocer el mundo sin salir por la puerta.
Sin mirar por la ventana se puede conocer el Camino del Cielo.
Cuándo más lejos se va, menos se aprende.
Por eso el Sabio, para conocerlo todo,
no necesita viajar.
Nombra las cosas sin mirarlas.
No actúa y sin ambargo, se realiza.

Tao Te King

Índice general

Introducción.

Al estudiar un objeto matemático en ocasiones nos interesa clasificarlo mediante las propiedades que satisface. Tal es el caso del Teorema de clasificación de anillos semisimples dimensionalmente finitos sobre un campo F, desmostrado por *Joseph Henry Maclagan Wedderbun* (1908). Es un teorema de gran importancia, podemos decir que la Teoría de Anillos comenzó gracias a este resultado.

En este proyecto de tesis, el objetivo será caracterizar los $QI-Modulos$ en la categoría $\sigma[M]$, objetos matemáticos dentro de la Teoría de Anillos. Este trabajo tiene como base el artículo *John Dauns* y *Yiquiang Zhou* publicado en *Module and Comodules* Trends in Mathematics 2008, pp 173-183.

Un módulo M es un QI-*Modulo* o también llamado módulo QI si todo módulo casi inyectivo en $\sigma[M]$[1] es *M-inyectivo* . Es importante señalar que el estudio de los módulos QI no es exclusivo de la categoría $\sigma[M]$, es decir, tenemos módulos QI en las categorías $GenM$ y $\pi[M]$; sin embargo no se estudiará en ninguna de estas categorías.

En la definición de un QI-*Modulo* se observa que depende fuertemente de dos conceptos: los módulos casi inyectivos y la categoría $\sigma[M]$; por lo que al estudiar un módulo QI es necesario conocerlos. Así que en el primer capítulo de dicho trabajo desarrolla algunas propiedades básicas e importantes de estos dos conceptos, además de una breve introducción de retículas; ya que los $QI-Modulos$ serán caracterizados en término de propiedades de algunas retículas de módulos en $\sigma[M]$. Hay que destacar que un módulo inyectivo es casi inyectivo; sin embargo el recíproco no necesariamente es cierto, de esto último es lo interesante de estudiar los QI-*Modulo* , pues en la categoría $\sigma[M]$, si M es un modulo QI, entonces los módulos casi inyectivos son inyectivos.

Como se mencionó anteriormente los $QI-Modulos$ se caracterizarán con

[1]La subcategoría $\sigma[M]$ es estudiada sistemáticamente por Wisbauer en *Foundations of Module and Ring Theory.*

algunas retículas de módulos; de ahí que las Clases de Módulos son de importancia para caracterizarlos. En el segundo capítulo de esta tesis se estudia a grandes rasgos las Clases de torsión, las Clases Naturales, las clases M-naturales, entre otras. Asímismo se introduce la definición de la dimensión de Gabriel ($Gdim(M)$) y algunos resultados que serán necesarios.

Con la intención de obtener el primer teorema de clasificación para los módulos QI, el tercer capítulo se dedica a estudiar la Clase de los QI–$Modulos$. Primeramente se presentarán tres tipos de anillos (semiartinianos, DIP y locales) tales que la clase de los módulos QI sobre estos anillos coincide con la clase de módulos semisimples.

El capítulo con que este trabajo de tesis concluye es sin duda uno de los más importantes, ya que todo lo que se desarrolla en los capítulos anteriores son las bases para llegar al resultado principal, que al dar ciertas condiciones se concluye que un módulo QI es semisimple. Para poder llegar hasta este resultado a lo largo del capítulo se desarrolla a detalle los módulos casi inyectivos dentro de la categoría $\sigma[M]$.

En síntesis para la caracterización de los $QI-Modulos$, es necesario contestar la pregunta: ¿qué son los módulos casi inyectivos?, por lo que todo el trabajo de tesis se dedica a poder resolverla; desde un punto de vista reticular y desde lo más básico.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Módulos Casi Inyectivos

Definición 1 *Sean $M, N \in$ Mod-R diremos que M es $N-$inyectivo si para todo submódulo K de N y todo morfismo $f : K \longrightarrow M$, f se puede extender a un morfismo $g : N \longrightarrow M$.*

Definición 2 *Sea $M \in$ Mod-R , M es casi inyectivo si M es M-inyectivo* [1]

Ejemplos:

1. Cualquier módulo M_R simple es casi inyectivo. Sea $M \in$ *Mod-R* simple, entonces $\{0\}$ y M son los únicos submódulos de M, es claro que cualquier morfismo de un submódulo de M en M se puede extender a un endomorfismo de M; por lo tanto M es casi inyectivo.

2. Todo módulo inyectivo es casi inyectivo; sin embargo el recíproco no siempre es cierto, por ejemplo, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es simple pero no inyectivo en la categoría de *Mod-$\mathbb{Z}$* .

3. Si M_R contiene una copia del módulo R_R, entonces M es casi inyectivo si y sólo si M es inyectivo.

   $\Leftarrow\sqsupset$Todo módulo M inyectivo es casi inyectivo.

   $\Rightarrow\sqsupset$ Sea I un ideal derecho de M y $f \in Hom(I, M)$. Consideremos el siguiente diagrama:

[1]La definición de módulo casi inyectivo fue dada por primera vez por R.E. Johnson y Wong en 1961.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[r] & M \arrow[dll, "\hat{f}"] \\
& M & &
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $\hat{f}$ tal que extiende a f. Por lo tanto la resticción de $\hat{f}$ a R es una extención de f y por el Criterio de Baer M es inyectivo.

4. Todo módulo M_R semisimple es casi inyectivo.
   Sean M semisimple, $N \leq M$ y $f \in Hom_R(N, M)$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "f\circ h"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

   Como M es semisimple, existe $h : M \longrightarrow N$ tal que $i \circ h = 1_N$.

5. Si R es un Dominio de Ideales Principales, entonces cualquier módulo cíclico M no isomorfo a R es casi inyectivo.

   Escribimos a $M = R/A$, donde A es un ideal no cero de R y consideramos $L = B/A$ cualquier submódulo de M con $A \leq B$. Como R es Dominio de Ideales Principales entonces $B = bR$ y $A = bcR$ ($c \neq 0$).

   $$\text{Sea } f \in Hom_R(L, M) \text{ tal que } f(\overline{b}) = \overline{x} \text{ donde } \overline{b} = b + A \text{ y } \overline{x} = x + A$$

   como $0 = f(\overline{b}c)$ entonces $xc \in bcR$, es decir, $x = br$ para algún $r \in R$ no cero, por lo tanto existe un endomorfismo de M definido por la multiplicación por r haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

   Por lo tanto M es casi inyectivo.

Siempre que tenemos un objeto matemático, nos preguntamos de manera natural ¿cuál es el concepto dual al original?, en nuestro caso el dual de un módulo casi inyectivo es un módulo casi proyectivo. A continuación sólo daremos su definición ya que no es nuestro objeto de estudio principal.

Definición 3 *Un módulo P_R es casi proyectivo si para cualquier módulo cociente Q de P, todo $g \in Hom_R(P,Q)$ se puede levantar a un endomorfismo de P.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed] \\ P \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

Proposición 1 *1. Un sumando directo de un módulo casi inyectivo es casi inyectivo.*

2. La suma directa de módulos casi inyectivos no necesariamente es casi inyectivo.

Demostración.

1. Sea N un módulo casi inyectivo, tal que se descompone de la siguiente manera

$$N = M \oplus M' \text{ y sea } f \in Hom_R(L,M) \ ,$$

donde L es cualquier submódulo de M. Observe que el morfismo f tambien está en $Hom_R(L,N)$, de aquí tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & N = M \oplus M' \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & N \arrow[d, "\pi"'] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

como N es casi inyectivo existe un endomorfismo g de N tal que extiende a f, tomamos la proyección sobre M, el morfismo $\pi \circ g_{|M}$ extiende a f; por lo tanto M es casi inyectivo.

2. Sean $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}, M' = \mathbb{Z}_n$ M y M' son Mod-$\mathbb{Z}$ casi inyectivos. Veremos que $N = M \bigoplus M'$ no es casi inyectivo. Sea $L = \ \mathbb{Z} \bigoplus \{0\}$ submódulo de N y

$$f \in Hom_R(L,N), \text{ tal que } f(z,0) = (0,\overline{z})$$

está dada por la proyección natural de $\mathbb{Z}$ *a* $\mathbb{Z}_n$. Como $\mathbb{Q}$ es divisible y $\mathbb{Z}_n$ finito, entonces $Hom_R(\mathbb{Q},\mathbb{Z}_n) = 0$, por lo tanto f no se puede extender a un endomorfismo de N.

■

El siguiente teorema nos da una relación interesante entre los módulos casi inyectivos y su cápsula inyectiva.

Teorema 1 *Un módulo M_R es casi inyectivo si y sólo si M es totalmente invariante en $E(M)$.*

Demostración.
Supongamos que M es totalmente invariante en $E(M)$, $f \in Hom_R(L, M)$ donde L es submódulo de M, considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E(M) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M \subseteq E(M) & \end{tikzcd}$$

Como $E(M)$ es inyectivo, existe g que extiende a f.Además M es totalmente invariante entonces $g(M) \subseteq M$, es decir, $g_{|_M} \in End_R(M)$
Supongamos ahora que M_R es casi inyectivo, si

$$f \in End_R(E(M)) \text{ y } L = \{m \in M \mid f(m) \in M\}$$

Es claro que L es un *R-submódulo* de M; tomemos $f_{|_L} = g_{|_L}$ donde g es el morfismo inducido por la casi inyectividad de M. Podemos suponer que $g \in End(E(M))$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E(M) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ M \subseteq E(M) & \end{tikzcd}$$

Afirmación: $(g - f)M = 0$.

Supongamos $(g - f)M \neq 0$ entonces $(g - f)M \cap M \neq 0$; es decir,

$$\begin{aligned} (g - f)m &= m' \\ g(m) - m' &= f(m) \in M \end{aligned}$$

entonces $m \in L$, como $f_{|_L} = g_{|_L}$ entonces $m' \neq 0$, que es una contradicción. Por último tenemos que $f(M) = g(M) \subseteq M$; es decir, M es totalmente invariante.

■

Observe que $S = End_R(E(M))$ opera por la izquierda de $E(M)$, entonces a la cápsula inyectiva se puede ver como un (S,R)-bimódulo, por lo tanto M es casi inyectivo si y sólo si M es $(S-R)$-subbimódulo de $E(M)$.

Como consecuencia de lo anterior se sigue el corolario siguiente.

Corolario 1 *Si M_R es un módulo casi inyectivo, entonces existe una función suprayectiva α tal que*

$$\alpha : End_R(E(M)) \longrightarrow End_R(M)$$

definida por la restricción de los endomorfismos.

Definición 4 *Una cápsula casi inyectiva de M_R es un módulo Q casi inyectivo tal que*

1. *$M \subseteq_{ess} Q$.*

2. *Q no contiene submódulos propios casi inyectivos que contengan a M.*

Corolario 2 *Todo M_R tiene cápsula casi inyectiva.*

Demostración. Sean S=End(E(M)) y

$$\mathcal{F} = \{Q' \in \textit{Mod-}R \mid Q' \text{ es (S-R)-submódulo de } E(M) \text{ y } M \subseteq Q'\}$$

Sea $Q = \cap\{Q' \mid Q' \in \mathcal{F}\}$, Q es el mínimo de la familia $\mathcal{F}$, como $E(M) = E(Q)$ y Q es totalmente invariante en $E(Q)$ entonces Q es casi inyectivo y por lo tanto Q es una cápsula casi inyectiva para M

■

A la cápsula Q casi inyectiva de M se denotará $E_q(M)$. Es natural preguntarse si $E_q(M)$ es la única cápsula casi inyectiva de M salvo isomorfismos. Para ver la unicidad de la cápsula casi inyectiva de un módulo M necesitaremos de los conceptos de submódulos cerrados y pseudocomplementos.

Definición 5 *Sea $C \subseteq M$ un submódulo, C es esencialmente cerrado en M si C no tiene extensiones esenciales propias dentro de M. Para simplificar nos referiremos a C como submódulo cerrado de M.*

Definición 6 *Un módulo es CS si cualquier submódulo cerrado de M_R es un sumando directo M_R.*

Ejemplos:

1. Cualquier módulo uniforme es CS.

2. Todo módulo semisimple es CS.

El siguiente Teorema es importante para demostrar que una cápsula casi inyectiva de un módulo M es única. Se le conoce como la"propiedad de corte"[2] en la cápsula inyectiva de un módulo casi inyectivo.

Proposición 2 *Sea $M \in Mod - R$ casi inyectivo, si*

$$E(M) = \bigoplus_{i\in I} X_i, \text{ entonces } M = \bigoplus_{i\in I} X_i' \text{ donde } X_i' = M \cap X_i$$

Demostración. Si $m = \sum_{i\in I} x_i \in M$ una suma finita con $x_i \in X_i$ y π_i la proyección i-esima de $E(M)$ a X_i. Como M es casi inyectivo entonces es totalmente invariante en $E(M)$, así

$$\pi_i(m) \in M \cap X_i = X_i' \text{ por lo tanto } M = \bigoplus_{i\in I} X_i'$$

∎

Proposición 3 *Sea M_R un módulo casi inyectivo entonces M_R es CS.*

Demostración. Si $N \leq M$ es un submódulo cerrado de M, tomamos un pseudocomplemento T para N entonces $N \bigoplus T \leq_{ess} M$ y

$$E(M) = E(N) \oplus E(T)$$

aplicando la proposicion anterior se sigue que $M = (M \cap E(N)) \oplus (M \cap E(T))$ como N es un submódulo cerrado y $N \leq_{ess} M \cap E(N)$ entonces

$$N = M \cap E(N) \text{ por lo tanto } M = N \oplus (M \cap E(T))$$

∎

Por otro lado no todo módulo CS es casi inyectivo; tal es el caso de $R = \mathbb{Z}$ es claro que es CS pero no es casi inyectivo.

[2] Esta propiedad fue probada por Goel y Jain.

Corolario 3 *Sea Q un módulo casi inyectivo tal que $M \subseteq Q$ entonces Q contiene una copia de $E_q(M)$.*

Demostración. Sean Q un módulo casi inyectivo que contiene a M y N una cerradura esencial de M en Q. Como Q es casi inyectivo entonces Q es CS por la Proposición 3, por lo tanto N es un sumando directo de Q. Por la Proposición 1 se tiene que N es casi inyectivo,entonces N es totalmente invariante en $E(M)$ además sabemos que $M \leq_{ess} N$. Así $E(N) = E(M)$. Por lo tanto $E_q(M) \subseteq N$ ya que $E_q(M)$ es el menor submódulo de $E(M)$ totalmente invariante que contiene a M

■

Definición 7 *Sea $M \in$ Mod-R, diremos que M es fuertemente primo si M está contenido en cada submódulo totalmente invariante de $E(M)$.*

Proposición 4 *Sea $M \in$ Mod-R uniforme, entonces M es fuertemente primo si y sólo si M está contenido en cada submódulo casi inyectivo no cero de $E(M)$.*

Demostración. $\Rightarrow$⊐Si M es fuertemente primo se sigue de inmediato la prueba.

$\Leftarrow$⊐Supongamos que K es un submódulo totalmente invariante no cero de $E(M)$. Queremos que $M \subseteq N$. Como M es uniforme entonces $E(M)$ es uniforme, por lo tanto $K \leq_{ess} E(M)$ entonces $E(K) = E(M)$, es decir, K es casi inyectivo, por hipotesis M está contenido en cualquier módulo casi inyectivo. Así $M \subseteq K$, por lo tanto M es fuertemente primo.

■

1.2. La subcategoria $\sigma[M]$

Definición 8 *Sea $M \in$ Mod-R . Diremos que un módulo N es subgenerado por M o M es un subgenerador para N si N es isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado .*

Definición 9 *Sea $M \in$ Mod-R*

$$\sigma[M] = \{ N \in \textit{Mod-R} \mid N \textit{ es subgenerado por } M\}.$$

Es la subcategoría plena de Mod-R subgenerada por M.

Ejemplos:

1. Sea p un número primo, entonces $\sigma[\mathbb{Z}p^{\infty}] = \sigma[\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}]$ es la subcategoría de módulos p-torsión en *Mod*-$\mathbb{Z}$

   Demostración. Sabemos que $\mathbb{Z}_{p^k} \leq \mathbb{Z}p^{\infty}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ Cada módulo cíclico de p-torsión es de la forma $\mathbb{Z}_{p^k}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^k}$ es un generador de los módulos de p-torsión; por lo tanto $\sigma[\mathbb{Z}p^{\infty}] = \sigma[\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_p^n]$

   ■

2. Si $M \in Mod{-}R$ es finitamente generado como un módulo sobre $S = End(M_R)$ entonces $\sigma[M] = R/ann(M)_R - Mod$
   Demostración.

   Sea $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$un conjunto de generadores de $_SM$, considere el siguiente morfismo φ

   $$\varphi : R \longrightarrow (m_1, m_2, \ldots, m_k)R \subset M^k$$

   donde $\varphi(r) = (m_1, m_2, \ldots, m_k)r$, observe que

   $$\begin{aligned} Nuc\varphi &= \{x \in R | \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in R | (m_1, m_{2,} \ldots, m_k)x = 0\} \\ &= \{x \in R | x \in ann(m_i), \text{ para toda } i = 1, \ldots k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) \end{aligned}$$

   Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) \subseteq \bigcap ann(M)$. Sean $a \in \bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i)$ y $m \in {_SM}$ por hipótesis m se puede escribir como $m = f_1(m_1) + f_2(m) + \ldots f_k(m_k)$ entonces

   $$\begin{aligned} ma &= f_1(m_1)a + f_2(m_2)a + \ldots f_k(m_k)a \\ &= f_1(m_1a) + f_2(m_2a) + \ldots f_k(m_ka) = 0 \end{aligned}$$

   Por lo tanto a anula a m y por lo tanto $a \in ann(M)$, tenemos entonces que $R/ann(M_R)$ es isomorfo a un submódulo de M^k y por lo tanto $Mod{-}R/ann(M) \subseteq \sigma[M]$. Por otro lado, tenemos que $M \in Mod - R/ann(M)$ de aqui que $\sigma[M] = Mod - R/ann(M)$

■

3. Si R es conmutativo, y M_R un módulo finitamente generado, entonces $\sigma[M] = R/ann(M)_R - Mod$

Demostración.

El razonamiento es similar al ejemplo anterior. Sean $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ generadores de M_R y consideremos un morfismo φ tal que:

$$\varphi : R \longrightarrow (m_1, m_2 \cdots, m_k)R \subseteq M^k$$

con $\varphi(r) = m_1 \cdots m_k r$ Como antes se tiene que

$$\begin{aligned} Nuc\varphi &= \{x \in R | (m_1, m_{2,}, \ldots, m_k)x = 0\} \\ &= \{x \in R | x \in ann(m_i), \text{ para toda } i = 1, \ldots k\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) \end{aligned}$$

Es suficiente demostrar que $\bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) \subseteq \bigcap ann(M)$. Sea $a \in \bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i)$. Notamos que cualquier $m \in M_R$ se puede escribir como $m = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots m_k r_k$ entonces para $a \in ann(m_i)$ se tiene que :

$$\begin{aligned} ma &= (m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots m_k r_k)a \\ &= m_1 r_1 a + m_2 r_2 a + \cdots m_k r_k a \\ &= m_1 a r_1 + m_2 a r_2 + \cdots + m_k a r_k \quad \text{(Por ser } R \text{ un anillo conmutativo).} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a \in ann(M)$, y así $a \in \bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) \subset ann(M)$ y como la otra contención siempre se cumple se tiene la igualdad; es decir; $\bigcap_{i=1}^{k} ann(m_i) = \bigcap ann(M)$. De aqui que $R/ann(M_R)$ es isomorfo a un submódulo de M^k. Por lo tanto $Mod - R/ann(M_k) \subseteq \sigma[M]$. Como $M \in Mod - R/ann(M)$ se concluye que $\sigma[M] = Mod - R/ann(M)$.

■

Definición 10 *Dados $M, N \in Mod - R$ $(\sigma[M])$ definimos la traza de M en N como*

$$Tr(M, N) := \sum \{Imf | f \in Hom_R(M, N)\}$$

Lema 1 *Sean $M, N \in$ Mod-R, entonces $Tr(M,N)$es el mayor submódulo de N generado por M.*

Demostración. Tenemos que $Tr(M,N)$ es *M-generado* . Sea $K \subseteq M$ *M-generado* , entonces existe un epimorfismo h, $h : M^{(X)} \longrightarrow K$ para un conjunto X.

Puesto que todo morfismo de M en K puede ser considerado como un morfismo de M en N, tenemos entonces que:

$$K = \sum\{Im(h) \mid h : M \longrightarrow K\} \subseteq Tr(M,N)$$

■

La siguiente proposición nos mostrará como es la cápsula inyectiva de un módulo en $\sigma[M]$

A la cápsula inyectiva para algún módulo N en $\sigma[M]$ se denotará como; $E_M(N)$.

Proposición 5 *Sea $N \in \sigma[M], E_M(N), E(N)$ las cápsulas inyectivas de N en $\sigma[M]$ y $Mod-R$ respectivamente, entonces $E_M(N) \cong Tr(M, E(N))$*

Demostración. Es claro que $N \subseteq Tr(M,E(N)) \subseteq E(N)$. Como $E(N)$ es *M-inyectivo* entonces $Tr(M,E(N))$ también lo es. Sea $f \in Hom_R(M,E(N))$ por tanto $Imf \subseteq Tr(M,E(N))$. Si $x \in Tr(M,E(N))$ entonces existe $r \in R$ tal que $xr \in N$ distinto de cero, se sigue que $N \leq_{ess} Tr(M,E(N))$. Por lo tanto, $Tr(M,E(N))$ es la capsula inyectiva de N en $\sigma[M]$ y por unicidad de la cápsula inyectiva de un módulo se tiene que $E_M(N) \cong Tr(M,E(N)))$

■

1.2.1. Propiedades de $\sigma[M]$

1. La suma directa de una familia de módulos en $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$.
2. Los conjuntos $M_f = \{U \subset M^{(\mathbb{N})} \mid U$ es finitamente generado$\}$ y $M_z = \{mR \mid m \in M^{(\mathbb{N})}\}$ son conjuntos generadores de $\sigma[M]$
3. Los módulos $U_f := \oplus\{U \mid U \in M_e\}$ y $U_z := \oplus\{Z \mid Z \in M_z\}$ son generadores de $\sigma[M]$
4. Para una familia $\{N_\lambda\}_\Omega$ de módulos en $\sigma[M]$, el producto en $\sigma[M]$ existe y queda descrito como $\overline{\Pi}_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda := Tr(U_f, \Pi N_\lambda)$

Demostración.

1. Sea $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ una familia de módulos en $\sigma[M]$ y $N_\lambda \subset M_\lambda$, M_λ , *M-generado* , entonces $\bigoplus N_\lambda \subseteq M_\lambda$ con $\bigoplus M_\lambda$ *M-generado* . Por lo tanto $\bigoplus N_\lambda$ pertenece a $\sigma[M]$,

2. Sea $N \in \sigma[M]$, es suficiente demostrar que cada módulo cíclico $nR \subset N$, $n \in N$ es generado por M_z . Por definición de $\sigma[M]$, existe un módulo $\widetilde{N}$ *M-generado* con $N \subset \widetilde{N}$
Sea $\varphi : M^{(\omega)} \longrightarrow \widetilde{N}$ un epimorfismo y $m \in M^{(\mathbb{N})}$ con $\varphi(m) = n \in N$ entonces $m \in M^{(\mathbb{N})}$, es decir, $mR \in M_z$. Restringimos φ a mR, entonces $\varphi_{|mR} : mR \longrightarrow nR$ es un epimorfismo.

3. Por (2) sabemos que M_e y M_z son generadores en $\sigma[M]$, por lo tanto la suma directa de cada uno es generador en $\sigma[M]$

4. Sea $\{f_\lambda : X \longrightarrow N_\lambda\}$ una familia de morfismos en $\sigma[M]$. Por la propiedad del producto en *Mod-R* , tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \prod N_\lambda \arrow[r, "\eta_\lambda"] & N_\lambda \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Como X esta en $\sigma[M]$ entonces $f(X) \in \sigma[M]$, es decir,

$$f(X) \subseteq Tr(M_f, \prod N_\lambda) = Tr(U_f, \prod N_\lambda)$$

La última igualdad se tiene del hecho de que M_f y U_f son generadores de $\sigma[M]$.Por lo tanto $Tr(U_f, \prod N_\lambda)$ es el producto de $\{N_\lambda\}$ en $\sigma[M]$

■

La proposición anterior nos muestra que existe un producto en la subcateria $\sigma[M]$. Es de importancia señalar que este no necesariamente coincide con el producto que existe en *Mod-R* , ejemplo: Sean $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{Z} | p$ es primo $\}$ y $M = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$ entonces $\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$, por lo tanto $\overline{\Pi}_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ Sabemos que la suma de grupos de torsión y cocientes de grupos de torsión son de torsión, entonces $\overline{\Pi}_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ es un gupo de torsión (como grupo abeliano), por lo tanto $\overline{\Pi}_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in \sigma[M]$ no puede ser isomorfo a $\Pi_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}_p \in$ *Mod-R* que no es de torsión.

Lema 2 *Si $Y \in Mod - R$ y X_i son submódulos de Y con $i \in I$, $X_i \in \sigma[M]$ entonces $\sum_{i\in I} X_i \in \sigma[M]$.*

Demostración. Como $X_i \in \sigma[M]$, entonces $\bigoplus X_i \in \sigma[M]$ Sea g el epimorfismo inducido por la propiedad universal de la suma directa.

$$g : \bigoplus_{i \in I} X_i \longrightarrow \sum_{i \in I} X_i \leq Y$$

entonces $\sum_{i \in I} X_i \cong \bigoplus_{i \in I} X_i / Nuc(g) \in \sigma[M]$

$\blacksquare$

Proposición 6 *Sea $M \in$ Mod-R, si $Y \leq X \in \sigma[M]$ y $N \in \sigma[M]$, entonces:*

1. *Si Y es M-inyectivo , entonces Y es un sumando directo de X*
2. *$E_M(X) = E_M(Y) \oplus E_M(Z)$ para alguna $Z \leq X$.*
3. *Si $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$ entonces $E_M(N) = E_M(N_1) \oplus \ldots \oplus E_M(N_m)$*
4. *N es M-inyectivo , si solo si $N = E_M(N)$.*
5. *Si N M-inyectivo , entonces N es casi inyectivo.*

Demostración.

1. Si Y es *M-inyectivo* entonces Y es $\sigma[M] - inyectivo$ [referencia Classes of Modules, Dauns] y por tanto Y es $X - inyectivo$ entonces Y es un sumando directo de X.

2. Como $Y \leq X \in \sigma[M]$ entonces $E_M(Y) \subseteq E_M(X) \in \sigma[M]$, $E_M(Y)$ es *M-inyectivo* , para algún $V \in \sigma[M], E_M(X) = E_M(Y) \oplus V$.
Si $Z = X \cap V$ entonces $Z \leq V$ y $E_M(Z) = E_M(V)$ así

$$\begin{aligned} E_M(X) &= E_M(Y) \oplus V \\ &\leq E_M(Y) \oplus E_M(V) \\ &= E_M(Y) \oplus E_M(Z) \\ &\leq E_M(X) \end{aligned}$$

Por lo tanto $E_M(X) = E_M(Y) \oplus E_M(Z)$ para alguna Z.

3. Es suficiente demostrar para $m = 2$
Sea $p_i : E_M(N_1 \oplus N_2) \longrightarrow E(N_i)$ la proyección.

Nótese que si $i \neq j$, entonces $p_i(E_M(N_j)) = 0$, además

$$E_M(N_1) \oplus E_M(N_2) \subseteq E_M(N_1 \oplus N_2) = E_M(N)$$

Como $E_M(N_1) \oplus E_M(N_2)$ es *M-inyectivo* y es esencial en $E_M(N)$. Por lo tanto $E_M(N) \oplus E_M(N_2) = E_M(N)$

4. Sabemos $E_M(N)$ es *M-inyectivo* , supongamos N es *M-inyectivo* , $N \subseteq E_M(N)$ y $N \subseteq_{ess} E_M(N)$. Por (1) N es un sumando directo de $E_M(N)$, por lo tanto $N = E_M(N)$.

5. Si N es *M-inyectivo* , entonces N es $\sigma[M] -$ *inyectivo* por tanto N es $N -$ *inyectivo* y por tanto casi inyectivo.

■

Proposición 7 *Sean $N, M \in$ Mod-R , entonces son equivalentes:*

1. *N es M-inyectivo .*
2. *$E_M(N) \cap N$ es M-inyectivo .*
3. *$E_M(N) \subseteq N$.*

Demostración.

1. 1) $\Rightarrow$ 2)
   Sea f un homomorfismo, $f : K \to T = E_M(N) \cap N$ con $K \leq M$. Como N es *M-inyectivo* , existe g tal que extiende a f

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ T \subseteq N & \end{tikzcd}$$

   Existe $g : M \to N$ pues N es *M-inyectivo* . Además $g(M) \subseteq E_M(N)$ entonces $g(M) \subseteq T$. por lo tanto $T = E_M(N) \cap N$ es *M-inyectivo*

2. 2) $\Rightarrow$ 3)
   Suponemos que $E_M(N) \cap N$ es *M-inyectivo* , entonces se tienen las siguientes contenciones:

$$T = E_M(N) \cap N \subseteq_{ess} E_M(N) \subseteq E(N)$$

   Vamos a demostrar que $E_M(T) = E_M(N)$. Por otro lado

$$E_M(N) \subseteq E(T) \subseteq E(N) \text{ y por tanto } E_M(N) \subseteq E_M(T)$$

   Sea $f \in Hom(M, E_M(N))$ como $f(M) \subseteq E_M(N) \subseteq E(T)$, entonces $E_M(N) \subseteq E_M(T)$ Por lo tanto $E_M(N) = E_M(T)$, aplicando (4) de la Proposición 6 se concluye que $E_M(T) = T$, ya que T es *M-inyectivo* y además $E_M(N) \subseteq N$

3. 3) $\Rightarrow$ 1)
   Sean $K \subseteq M$, f un homomorfismo entre K y N. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ N \subseteq E(N) & \end{tikzcd}$$

   Existe g morfismo tal que extiente f, además tenemos que $g(M) \subseteq E_M(N) \subseteq N$ por lo tanto N es M-*inyectivo* .

■

1.3. Retículas

Sea L un conjunto, $\leq$ denotara un orden parcial en L. Si $x, y \in L$. Denotaremos $x \vee y = sup\{x, y\}$ y $x \wedge y = inf\{x, y\}$. Si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq L$ el supremo e ínfimo de A se denotará por:

$$\bigvee_{x \in A} x = \bigvee A$$
$$\bigwedge_{x \in A} x = \bigwedge A$$

En caso de que estos existan.

Definición 11 *Una retícula L es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada x ,y* $\in L$ *existen* $x \vee y$ *,* $x \wedge y$ *en L.Diremos que L es una retícula completa si para cualquier subconjunto S de L, se tiene que* $sup(S) \in L$ *e* $inf(S) \in L$*, en el caso de L al supremo e infimo de L se denotará 1 y 0 respectivamente.*

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}, |)$ es una retícula donde, $a \wedge b = (a, b)$ es el máximo común divisor y $a \vee b = [a, b]$ el mínimo común múltiplo; con $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Sea X un conjunto, entonces la pareja $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es una retícula .

3. Si M es un módulo, entonces los submódulos de M forman una retícula completa.

En cualquier retícula $(L, \leq)$ las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas y conmutativas; además se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x \wedge b) \vee a &\leq (x \vee a) \wedge (b \vee a) \\ (x \wedge a) \vee (b \wedge a) &\leq (x \wedge b) \wedge a \end{aligned}$$

para toda $a, b, x \in L, a \leq b$

Si se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (x \wedge b) \vee a &= (x \vee a) \wedge (b \vee a) \\ (x \wedge a) \vee (b \wedge a) &= (x \wedge b) \wedge a \end{aligned}$$

diremos que la retícula es distributiva

Definición 12 *L es una retícula modular si* $(x \wedge b) \vee a = (x \vee a) \wedge b$ *para toda* $a, b, x \in L$ *con* $a \leq b$

Definición 13 *Una retícula L, tal que $1, 0 \in L$ es complementada si para cada $x \in L$ existe $x^c \in L$ con $x \vee x^c = 1$ y $x \wedge x^c = 0$*

Ejemplos:

1. Sea $M \in$ *Mod-R*, la retícula de submódulos de M es complementada si y sólo si M es semisimple.

Proposición 8 *Todo elemento en una retícula distributiva tiene a lo más un complemento*

Demostración. Supongamos que L es distributiva con 0 y 1. Sea $a \in L$ tal que existen dos complementos $b, c \in L$ entonces:

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

así $c \leq b$, y por simetría se tiene que $b \leq c$ y por tanto $b = c$.

■

Definición 14 *Una retícula L es de Boole, si L es complementada y distibutiva.*

Si L es una retícula de Boole, entonces cada elemento $a \in L$ tiene un único complemento $a^c \in L$

Proposición 9 *Sea L una retícula, entonces son equivalentes:*

1. *L es una retícula de Boole.*

2. *Cada $a \in L$ tiene un único complemento a^c, y $a \wedge b = 0$ si y sólo si $b \leq a^c$*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea $a \in L$,entonces a tiene un único complemento a^c en L. Si $b \leq a^c$ entonces $a \wedge b \leq a \wedge a^c = 0$. Además si $b \in L$ es tal que $a \wedge b = 0$, entonces

$$\begin{aligned} b = &\ b \wedge 1 \\ = &\ b \wedge (a \vee a^c) \\ = &\ (b \vee a) \wedge (b \vee a^c) = (b \vee a) \wedge a^c \\ = &\ (b \wedge a^c) \vee (a \wedge a^c) = b \wedge a^c \end{aligned}$$

Por lo tanto $b \leq a^c$

2) $\Rightarrow$ 1) Sean $a, b \in L$ entonces un elemento $x \in L$ satisface $a \wedge x \leq b$ si y sólo si $a \wedge x \wedge b^c = 0$. Entonces existe un elemento máximo con la propiedad $a \wedge x \leq b$ a saber $x = (a^c \vee b) = (a \wedge b^c)^c$, se denotará $b : a$.

Sean $a, b, c \in L$ y $d = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, como $a \wedge c \leq d$ y $b \wedge c \leq d$ entonces $a \leq d : c$ y $b \leq d : c$, lo cual implica que $a \vee b \leq d : c$, es decir;

$$c \wedge (a \vee b) \leq c \wedge (d : c) \leq d = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Notese que la desigualdad opuesta siempre se cumple, por lo tanto L es distributiva.

■

Proposición 10 *Sea L una retícula de Boole completa, entonces*

$$(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge c = \bigwedge_{i \in I}(a_i \vee c)$$
$$(\bigwedge_{i \in I} a_i) \vee c = \bigvee_{i \in I}(a_i \wedge c)$$

Demostración. Observe que la siguiente desigualdad siempre se cumple $(\bigwedge_{i \in I}(a_i \vee c) \leq (\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge c$; por lo que sólo es suficiente demostrar la otra desigualdad.

Sea $\{a_i \wedge c \mid i \in I\}$ un conjunto y u una cota superior, tal que $a_i \wedge c \leq u$, de aqui que

$$a_i = a_i \wedge (c \vee c^c) = (a_i \wedge c) \vee (a_i \wedge c^c) \leq u \vee (a_i \wedge c^c), \text{ lo cual implica que}$$
$$(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge c \leq u \vee (a_i \wedge c^c) \wedge c = (u \wedge c) \vee (c \wedge (a_i \wedge c^c)) = u \wedge c \leq u$$

Por lo tanto $(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge c \leq \bigwedge_{i \in I}(a_i \vee c)$. Además por dualidad se concluye que $(\bigwedge_{i \in I} a_i) \vee c = \bigvee_{i \in I}(a_i \wedge c)$

■

Capítulo 2

Clases de Módulos

2.1. Clases de Pretorsión Hereditaria.

Definición 15 *Sea $\mathcal{T}$ una subclase de Mod-R , decimos que $\mathcal{T}$ es una Clase de Pretorsión Hereditaria si: es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas. A la colección de clases de Pretorsión Hereditaria se denotará R-ptors*

Para un módulo M definimos como $M-ptors = \{\mathcal{K} \cap \sigma[M] \mid \mathcal{K} \in R\text{-}ptors\}$ A la colección de todas las clases de pretorsión hereditaria contenidas en $\sigma[M]$.

Proposición 11 *Sea $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de R-ptors. Entonces $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i \in R\text{-}ptors$.*

Demostración.

(i) Sean $M \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ con cada $\mathcal{T}_i \in R\text{-}ptors$, y $N \leq M$ entonces $M \in \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $N \in \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$.

(ii) Sea $M \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i \in R\text{-}ptors$. Entonces $M \in \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$. Por lo cual $M/N \in \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$. Así $M/N \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

(iii) Sea $\{M_i\}_{i \in I'}$ una familia de módulos en $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$, entonces para toda $i \in I, M_i \in \mathcal{T}$ así $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{T}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \cap_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

Por lo anterior tenemos que $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i \in R\text{-}ptors$. Además cualquier $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ para toda $i \in I$ por definición satisface, que $\mathcal{T} \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

■

Definición 16 *Para cualquier clase de módulos $\mathcal{F}$. Tomamos un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismos de módulos cíclicos en $\mathcal{F}$. $\{X_i \mid i \in I\}$. Definimos a $M_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i \in I} X_i$*

Lema 3 *1. $\sigma[M_{\mathcal{F}}]$ es la menor clase de pretorsión hereditaria que contiene a $\mathcal{F}$*

2. $\mathcal{F}$ es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si $\mathcal{F} = \sigma[M_{\mathcal{F}}]$

Demostración.

1. Sean $\mathcal{F}$ una clase de módulos y $\{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}\}$ las clases de pretorsión hereditaria que contengan a $\mathcal{F}$. Sea $M \in \mathcal{F}$. Entonces para todo $m \in M$ no cero, $mR \in \{X_i \mid i \in I\}$ y

   $$mR \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i \text{ Además } M = \sum_{m \in M} mR \text{ y por tanto}$$

   tenemos el siguiente epimorfismo $g : \bigoplus_{m \in M} mR \longrightarrow \sum_{m \in M} mR$ De esto se sigue que $M \in \sigma[M_{\mathcal{F}}]$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{F}}]$,
   y así $\cap \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subset \sigma[M_{\mathcal{F}}]$

   Veamos que $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \subseteq \cap \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Notamos que $X_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ (para toda $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}, i \in I$), entonces $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \cap \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto $M_{\mathcal{F}} \in \cap \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ por ser una clase de pretorsión hereditaria. Lo cual concluye que $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \subseteq \cap \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$

2. $\Rightarrow\!\sqsupset$ Por (1) sabemos que $\mathcal{F} \subset \sigma[M_{\mathcal{F}}]$. Además $\sigma[M_{\mathcal{F}}]$ es la menor clase de pretorsión que contiene a $\mathcal{F}$. Por lo tanto tenemos la otra contención. Entonces $\mathcal{F} = \sigma[M_{\mathcal{F}}]$

   $\Leftarrow\!\sqsupset$ se sigue de (1)

■

El lema anterior nos mostró que toda clase $\mathcal{T} \in$ *R-ptors* es de la forma $\sigma[M]$ para alguna $M \in$ *Mod-R*

Proposición 12 *R-ptors es una gran retícula con la relación de inclusión.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de *R-ptors*. Observe que $\vee_{i \in I} \mathcal{T}_i$ es precisamente $\sigma[\cup_{i \in I} \mathcal{T}_i]$; esto por el lema anterior. Además por la proposición (1) sabemos que $\cap_{i \in I} \mathcal{T}_i \in$ *R-ptors* Por lo tanto *R-ptors* es una gran retícula.

■

2.2. Clases Naturales

Definición 17 *Sea $\mathcal{K}$ una cláse de módulos no vacía, $\mathcal{K}$es una clase natural si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas.*
A la colección de todas las clases naturales se denota por $\mathcal{N}(R)$

Observación: Una clase Natural en general no es una clase de pretorsión hereditaria. Por ejemplo la subclase de *Mod*-$\mathbb{Z}$ consistente de los módulos libres de torsión. Ésta es una clase natural pero no es una clase de pretorsión hereditaria, ya que no es cerrada bajo cocientes.

Definición 18 *Para una clase de módulos no vacía $\mathcal{F}$ definimos:*

1.

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}) &:= \{N \in \textit{Mod-}R \mid \forall\ 0 \neq X \subset N, X \not\hookrightarrow Y \textit{para cualquier}\ Y \in \mathcal{F}\} \\ d(\mathcal{F}) &:= \{N \in \textit{Mod-}R \mid \forall\ 0 \neq X \subset N, \exists 0 \neq A \subset X\ \textit{tal que}\ A \hookrightarrow Y\ \textit{para algún}\ Y \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

2. *Si $\mathcal{F} = \{N\}$ para algún $N \in$ Mod-R. Entonces*

$$c(N) = c(\{N\})\ \ y\ d(N) = d(\{N\})$$

Oberve que las operaciones $d(\mathcal{F})$ y $c(\mathcal{F})$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{F}$, son complementarias. Los siguientes ejemplos nos muestran con más claridad esta observación.

Ejemplos:

1. Si $\mathcal{F} = \varnothing$. entonces

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}) &:= \textit{Mod-}R \\ d(\mathcal{F}) &:= \{0\} \end{aligned}$$

2. Sea $\mathcal{F}$ la clase de los módulos singulares, en *Mod*-$\mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}) &:= \{N \in \textit{Mod-}R \mid \text{ N es no singular }\} \\ d(\mathcal{F}) &:= \{N \in \textit{Mod-}R \mid \text{ N es de torsion }\} \end{aligned}$$

Lema 4 *(Argumento de la Proyección) Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos derechos y $x \in E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ distinto de cero. Entonces existen $r \in R$ no cero y $x_\alpha \in M_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$ tales que $xrR \cong x_\alpha R$ con $r_R(xr) = r_R(x_\alpha)$.*

Demostración. Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos derechos y

$$\eta_\alpha : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha \text{ la proyeccion y } x \in E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$$

Sea $sop(x)$ el soporte de x. Como $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \leq_{ess} E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ existe $t \in R$ tal que $xt \neq 0$ y $xt \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$. Como el $sop(xt)$ es finito la prueba será por inducción.

Supongamos $|sop(xt)| = 1$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\eta_\alpha(xt) \neq 0$, si $\eta(xt) = x_\alpha$, implica que $xtR \cong x_\alpha R$ y $r_R(xt) = t_R(x_\alpha)$.

Supongamos que $|sop(xt)| < n$, entonces existen $r \in R$ no cero y $x_\alpha \in M_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$ tales que $xtrR \cong x_\alpha tR$ con $r_R(xt) = r_R(x_\alpha t)$

Demostraremos cuando $|sop(xt)| = n$. Supongamos que existe $\alpha \in |sop(xt)|$ tal que $r_R(xt) = r_R(\eta_\alpha(xt)$. Sea $x_\alpha = \eta_\alpha(xt)$,por lo tanto $r_R(xt) = (x_\alpha)R$. Ahora suponemos que para toda $\alpha \in sop(xt)$ cumple que $r_R(xt) \neq r_R(\eta_\alpha(tx))$. Entonces existe $u \in r_R(\eta_{\alpha_0}(tx)) - r_R(tx)$, para algún $\alpha_o \in sop(xt)$ y así $\eta_{\alpha_0}(xtu) = 0$ y $xtu \neq 0$, por lo que $|sop(tx)| < n$ ahora por hipótesis de inducción existe $\alpha \in \Lambda$ y $x_\alpha \in M_\alpha$ distinto de cero tal que $xtuR \cong x_\alpha R$ con $r_R(xtu) = r_R(x_\alpha)$

■

Proposición 13 *$c(\mathcal{F})$ y $d(\mathcal{F})$ son clases naturales.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $c(\mathcal{F})$ es una clase natural; ya que $c(\mathcal{F})$ y $d(\mathcal{F})$ son operaciones complementarias.
Sea $M \in c(\mathcal{F})$ veamos que $E(M) \in c(\mathcal{F})$. Tomamos $K \leq E(M)$. Suponemos lo contrario, entonces que existe $V \leq K$ tal que $V \longrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$. Por el argumento de la proyección sabemos que existe $V' \in M$ tal que $V' \cong V$. Entonces $V' \longrightarrow A$, esto es una contradicción; ya que $M \in c(\mathcal{F})$. Por lo tanto $E(M) \in C(\mathcal{F})$

Nos tomamos una familia de módulos en $c(\mathcal{F})$. $\{M_i\}_{i\in I}$ Supongamos que $\bigoplus_{i\in I}\{M_i\} \notin c(\mathcal{F})$, entonces existe $V = \bigoplus\{V_i\} \leq \bigoplus_{i\in I}\{M_i\}$ tal que $V \longrightarrow A$ para algún $A \in c(\mathcal{F})$ Nuevamente por el argumento de la proyección existe $V_i' \leq M_i(i \in I)$ tal que $V_i' \cong V_i$ Así si tomamos la proyección $i - esima$ de V tenemos que $V_i \longrightarrow A$. Esto es una contradicción por lo tanto $\bigoplus\{M_i\} \in c(\mathcal{F})$
Es claro que $c(\mathcal{F})$ es cerrado bajo submódulos y por último concluimos que $c(\mathcal{F}) \in \mathcal{N}(R)$

■

Definición 19 *Si $\mathcal{F}$ es un conjunto o una clase no vacía de módulos. Para cualquier módulo M, definimos.*

$$H_{\mathcal{F}}(M) := \{N \leq M | M/N \in \mathcal{F}\} \qquad y$$

$$H_{\mathcal{F}}(R) := \{I \leq R | R/I \in \mathcal{F}\}$$

2.3. Clases M-*naturales*

Definición 20 *Una clase de módulos $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ es llamada una clase M-natural si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas $M-$inyectivas La colección de clases M-naturales se denotará $\mathcal{N}(R, M)$*

Ejemplos:

1. $\sigma[M]$.

2. Las clases libres de torsión hereditarias en $\sigma[M]$.

3. Las clases de torsion hereditarias estables.

El siguiente lema nos muestra que las clases M-*naturales* son cerradas bajo extensiones esenciales en $\sigma[M]$.

Lema 5 *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural y $X \leq_{ess} N \in \sigma[M]$. Si $X \in \mathcal{K}$, entonces $N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. Sea $X \leq_{ess} N$ en $\sigma[M]$, entonces $E(X) = E(N)$ por lo tanto $E_M(X) = E_M(N)$. Como $X \in \mathcal{K}$ *y* $\mathcal{K}$ es una clase M-*natural* , entonces $E_M(X) \in \mathcal{K}$. Además $N \in \sigma[M]$, de esto se sigue que $N \subseteq E_M(N) = E_M(X) \in \mathcal{K}$; asi $N \in \mathcal{K}$.

■

Lema 6 *Sea $\mathcal{F}$ una subclase de $\sigma[M]$. Entonces*

1. *$d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es la menor clase M-natural que contiene a $\mathcal{F}$.*

2. *$\mathcal{F}$ es una clase M-natural si y solo si $\mathcal{F} = d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$*

Demostración.

1. $d(\mathcal{F})$ es una clase *M-natural* ; por lo tanto $d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es una clase *M-natural* . Veamos que $d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es la menor clase *M-natural* que contiene a $\mathcal{F}$. Supongamos que existe $\mathcal{L}$ una clase *M-natural* que contiene a $\mathcal{F}$. Sea $N \in d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$, entonces N contiene como submódulo esencial a una suma directa $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$ donde cada $N_\alpha \in \mathcal{F}$. Por ser $\mathcal{L}$ una clase *M-natural*, entonces $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha \in \mathcal{L}$. Además por el Lema 5 se concluye que $N \in \mathcal{L}$. Entonces $d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M] \subseteq \mathcal{L}$.

2. Se sigue de (1)

■

Corolario 4 *Una clase de módulos $\mathcal{F}$si*

$$\mathcal{F} = d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$$

entonces $\mathcal{F}$ es una clase M-natural si y sólo

Demostración. Suponemos que $\mathcal{F} = d(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$. De ahí se sigue que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo submódulos, sumas directas y capsulas M-inyectivas.Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una clase *M-natural*

■

Corolario 5 *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural y $X \subseteq N \in \sigma[M]$ entonces.*

1. *Si N no está en $\mathcal{K}$ entonces existe $Y \leq N$ con $Y \in c(\mathcal{K})$*

2. *Si $X \in \mathcal{K}$ y $N/X \in \mathcal{K}$ entonces $N \in \mathcal{K}$*

Demostración.

1. Como $N \in \sigma[M]$ y N no esta en $\mathcal{K}$, donde $\mathcal{K} = d(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$ entonces $N \notin d(\mathcal{K})$.
   Por lo tanto existe $Y \leq N$ distinto de cero y $Y \in c(\mathcal{K})$

2. Suponemos que $N \notin \mathcal{K}$. Entonces existe $Y \leq N$ distinto de cero con $Y \in c(\mathcal{K})$ Como $X \in c(\mathcal{K})$ entonces $X \cap Y = 0$. De esto se sigue que

   $Y \hookrightarrow N/X \in \mathcal{K}$ mostrando que $Y \in \mathcal{K}$

   Que es una contradicción, por lo tanto $N \in \mathcal{K}$.

■

Definición 21 *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural . Un módulo N es llamado $\mathcal{K}$-cocrítico si $N \in \mathcal{K}$ y $N/P \notin \mathcal{K}$ para cualquier $P \subset N$ distinto de cero.*

Lema 7 *Sea N un módulo $\mathcal{K}$-cocrítico , entonces:*

1. *N es uniforme*
2. *Cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ para un submódulo X de N y $Y \in \mathcal{K}$ es un monomorfismo.*
3. *Cada submódulo no cero de N es $\mathcal{K}$-cocrítico*
4. *Cada morfismo $f : X \longrightarrow E(Y)$ no cero con $X \leq N$ y $Y \in \mathcal{K}$ es un monomorfismo.*

Demostración.

1. Sea X un submódulo no cero de N. Entonces existe $A \leq N$ máximo con la propiedad $X \cap A = 0$, así A es un submódulo cerrado de N, entonces $X \hookrightarrow_{ess} N/A$. Como $N \in \mathcal{K}$ implica que $X \in \mathcal{K}$, entonces $N/A \in \mathcal{K}$. De esto último se sigue que $A = 0$ ya que N es un módulo $\mathcal{K}$-*cocrítico* . Entonces X es esencial en N. Por lo tanto N es uniforme.

2. Sean $X \leq N, Y \in \mathcal{K}$ y un morfismo no cero $f : X \to Y$. Entonces $X/Nuc(f) \in \mathcal{K}$.
   elegimos Z submódulo de N tal que $Z/Nuc(f)$ es máximo con la propiedad

   $$(X/Nuc(f)) \cap (Z/Nuc(f)) = \overline{0}$$

   Por lo tanto $X/Nuc(f) \hookrightarrow N/Z$ como submódulo esencial. Como $\mathcal{K}$ es una clase *M-natural* tenemos que $N/Nuc(f) \in \mathcal{K}$, además sabemos que N es $\mathcal{K}$-*cocrítico* , entonces $Nuc(f) = 0$. Por lo tanto f es un monomorfismo.

3. Sea $X \leq N$, entonces $X \in \mathcal{K}$. Supongamos que X no es $\mathcal{K}$-*cocrítico* , entonces para algún $V \leq X$, se sigue que $X/V \in \mathcal{K}$. Si C/V es complemento deX/V en N/V.

   Entonces $N/V \hookrightarrow_{ess} N/C$

   Por el Lema 2 tenemos que $N/C \in \mathcal{K}$ lo cual contradice el hecho que N es $\mathcal{K}$-*cocrítico* . Por lo tanto X es $\mathcal{K}$-*cocrítico* .

4. Sea $f : X \to E(Y)$ para algún $X \leq N$ con $Y \in \mathcal{K}$. Definimos $0 \neq W = f^{-1}[Y \cap f(X)] \leq X$.

   Entonces $Nuc(f) \leq W$ y $f|_W : W \to Y$

   Supongamos que $Nuc(f) \neq 0$. Así $W/Nuc(f) \cong f(W) \leq Y$; esto muestra que $W/Nuc(f) \in \mathcal{K}$ y esto es una contradicción ya que por (3) sabemos que W es $\mathcal{K}$-*cocrítico* . Por lo tanto $Nuc(f) = 0$; es decir f es un monomorfismo.

■

Definición 22 *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural . Diremos que $\mathcal{K}$ satiface (*), si para cualquier submódulo cíclico X de M y para cada cadena ascendente $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq$ tal que cada $X_i \in H_{\mathcal{K}}(X)$. Entonces $\cup_i X_i \in H_{\mathcal{K}}(X)$*

Ejemplos:

1. $\sigma[M]$ es una clase *M-natural* con (*)

2. Si $\mathcal{K}$ es una clase *M-natural* tal que $H_{\mathcal{K}}(X)$ tiene ACC para cualquier módulo cíclico$X$ de M, entonces $\mathcal{K}$ satisface la condicion (*)

A lo largo de este trabajo no hemos mencionado nuestro principal objeto de estudio: los $QI{-}Modulos$. A continuación los definiremos y se demostrará parte de un teorema que será de importancia en capitulos posteriores.

Definición 23 *Un Módulo M es llamado QI-Modulo si cada módulo casi inyectivo en $\sigma[M]$ es M-inyectivo .*

Teorema 2 *Sea $\mathcal{K}$ un clase M-natural con (*). Entonces cada módulo en $\mathcal{K}$ es QI-Modulo si y sólo si cada módulo cíclico uniforme en $\mathcal{K}$ es fuertemente primo; y si $H_{\mathcal{K}}(X)$ tiene la condición ACC para cualquier submódulo cíclico (o finitamente generdo) X de M.*

Demostración. $\Rightarrow\sqsupset$ Sea $xR \in \mathcal{K}$, un módulo cíclico uniforme, entonces $E_M(xR)$ es un módulo casi- inyectivo uniforme. Sea $N \leq E_M(xR)$ distinto de cero. Como todo módulo en $\mathcal{K}$ es *QI-Modulo* , se sigue que N es *M-inyectivo* lo cual implica que $N = E_M(xR)$. Por otro lado tenemos que $E_M(xR)$ no contiene submódulos propios casi-inyectivos. Por lo tanto xR es fuertemente primo. Y así queda demostrado la primera parte.

Sea $N \in \mathcal{K}$ casi inyectivo. Queremos ver que N es *M-inyectivo* . Como $\mathcal{K}$ es una clase *M-natural* , es equivalente que todo módulo casi inyectivo en $\mathcal{K}$es una suma directa de módulos uniformes[1]. Dicho esto supongamos que $N = \bigoplus N_i$ donde cada N_i es un módulo casi inyectivo uniforme. Entonces $E_M(N) \in \mathcal{K}$ es uniforme y además es un módulo casi inyectivo. Observe que cda submódulo de $E_M(N)$ es uniforme entonces es fuertemente primo, lo cual implica que $E_M(N)$ no tiene submódulos propios. Por lo tanto $N = E_M(N)$ es *M-inyectivo* .

La demostración del regreso de éste teorema se hará después.

■

2.4. Clases Pre-Naturales

Definición 24 *Decimos que una clase de módulos no vacía $\mathcal{K}$ es una clase pre-natural si es cerrada bajo: submódulos, sumas directas y para toda $N \in \mathcal{K}$ $tr(\mathcal{K}, E(N)) \in \mathcal{K}$.*

A la colección de todas las clases pre-naturales se le denotará por $\mathcal{N}^p(R)$.

Proposición 14 *Para cada módulo M y cualquier clase M-natural $\mathcal{K}$, es una clase pre-natural.*

Demostración. Si $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ es una clase *M-natural* , entonces para cualquier $N \in \mathcal{K}$,

$$tr(\mathcal{K}, E(N)) \leq tr(\sigma[M], E(N)) \in \mathcal{K}$$

Como $\mathcal{K}$ es cerrado bajo submódulos, $tr(\mathcal{K}, E(N)) \in \mathcal{K}$. Por lo tanto $\mathcal{K}$ es una clase pre-natural.

■

Lema 8 *Si $\mathcal{F}$ es una clase de módulo, tal que es intersección de una clase natural y una clase de pretorsión hereditaria. Entonces $\mathcal{F}$ es una clase pre-natural.*

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$, donde $\mathcal{K}$ es una clase natural y $\mathcal{L}$ una clase de pretorsión hereditaria. Entonces $\mathcal{L} = \sigma[M]$ para algún módulo M. Así $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \sigma[M]$. Por lo tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \sigma[M]$ una clase *M-natural* y por tanto una clase prenatural.

[1] Esta equivalencia se encuentra en el artículo DIRECT SUMS OF M-INJECTIVE MODULES AND MODULES CLASES. de ZHOU

■

Teorema 3 *La correspondencia $\mathcal{K} \to H_{\mathcal{F}}(R)$ de $\mathcal{N}^p(R)$ a $\mathcal{P}(L(R))$, el conjunto potencia de $L(R)$, es uno a uno. Ademas*

$$\mathcal{N}^p(R) = \bigcup\{\mathcal{N}(R, M) \mid M \in \textit{Mod-R}\} \text{ es un conjunto.}$$

Demostración. Sean $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{N}^p(R)$ tal que $H_{\mathcal{K}}(R) = H_{\mathcal{L}}(R)$. Veremos que $\mathcal{K} = \mathcal{L}$. Es suficiente demostrar que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$, ya que la otra contención es análoga. Supongamos que $\mathcal{L} \nsubseteq \mathcal{K}$. Entonces existe $N \in \mathcal{K}$ tal que $N \notin \mathcal{L}$. Así para cualquier $x \in N, xR \in \mathcal{K}$. Lo cual implica que $ann(x) \in H_{\mathcal{K}}(R)$; por tanto $xR \in \mathcal{L}$ para cualquier $x \in M$. Por la proposición anterior existe $M \in$ *Mod-R* tal que $\mathcal{L} \in \sigma[M]$ y $\mathcal{L}$ es una clase *M-natural* . De esto se sigue que $N \in \sigma[M]$. Como $N \notin \mathcal{L}$, entonces existe $Y \leq N$ no cero tal que cada submódulo de Y no está en $\mathcal{L}$ y $Y \in c(\mathcal{L})$, pero $yR \in \mathcal{L}$ para toda $y \in Y$. Lo cual es una contradicción, entonces $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ analogamente se tiene que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$. Por lo tanto $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ y así la correspondencia $\mathcal{N}^p(R)$ a $\mathcal{P}(L(R))$ es uno a uno.

■

Ejemplos de Clases Pre-Naturales:

1. *Mod-R*
2. Las clases *M-naturales* son clases pre-naturales.
3. Los elementos de *R-ptors*.
4. $\sigma[M]$ es una clase pre-natural.

Proposición 15 *R-ptors es una subretícula completa de $\mathcal{N}^p(R)$.*

Demostración. Por la proposición (2) sabemos que *R-ptors* es una retícula. Además el supremo de elementos en *R-ptors* es de la forma $\sigma[M]$ para alguna $M \in$ *Mod-R*. Pero $\sigma[M] \in \mathcal{N}^p(R)$. Por lo tanto *R-ptors* es una subretícula completa de $\mathcal{N}^p$.

■

Proposición 16 $\mathcal{N}(R,M)$ *es una subretícula de* $\mathcal{N}_r^p(R)$*, para cualquier* $M \in$ *Mod-R*

Demostración
Sean K_1, $K_2 \in \mathcal{N}(R,M)$ es claro que $K_1 \wedge K_2 \in \mathcal{N}(R,M)$
Queremos ver que $K_1 \vee K_2 \in \mathcal{N}(R,M)$
Como $K_1 \vee K_2$ es una clase pre-natural sólo falta ver que es cerrado bajo cápsulas M-inyectivas.
Sean $N \in K_1 \vee K_2$ un módulo y un conjunto máximo de submódulos independientes de N en K_1. $\{X_t\}_{i \in I}$.
Definimos $X = \bigoplus X_t$ entonces $X \in K_1$. Sea $P \leq N$ máximo con respecto a $X \cap P = 0$ entonces $X \bigoplus P \leq_{ess} P$.
Siguiendo el mismo razonamiento tomamos $\{Y_s | s \in J\}$ un conjunto máximo de subconjuntos independientes de P en K_2 y definimos a $Y = \bigoplus Y_s$ entonces $Y \in K_2$.
Si $Y \cap Q = 0$ para algún $Q \subseteq P$ no cero entonces existe P' distinto a cero, tal que $P' \leq Q$ y $P' \in K_1$ o $P' \in K_2$. Lo cual es imposible por la elección de X y Y, entonces $Y \leq_{ess} P$ por lo que

$$Y \bigoplus X \leq_{ess} N \text{ así } E(N) = E(X) \oplus E(Y)$$

y

$$\begin{aligned} E_M(N) &= \sum \{f(M) | f \in Hom(M, E(N))\} \\ &\leq \sum \{f_1(M_1) | f_1 \in Hom(M, E(X)\} + \sum \{f_2(M) | f_2 \in HOM(M, E(Y))\} \\ &= E_M(X) \oplus E_M(Y) \end{aligned}$$

entonces $E_M(X) \in K_1$ y $E_M(Y) \in K_2$ ya que K_1, K_2 son cerradas bajo cápsulas M-inyectivas,entonces

$$E_M(N) = E_M(X) \oplus E_M(Y) \in K_1 \vee K_2$$

Por lo tanto $N(R,M)$es una subretícula de $\mathcal{N}^p$

■

Corolario 6 $\mathcal{N}(R)$ *es una subretícula de* $\mathcal{N}^p(R)$

Demostración. Se sigue de lo anterior

■

2.5. Más retículas y dimensión de Gabriel.

Definición 25 *Definiremos la dimensión de Gabriel para un módulo M recursivamente, y la denotaremos $Gdim(M)$.*

$Gdim(M) = 0$ *si y sólo si* $M = 0$.
Sea α un ordinal no límite y suponemos que $Gdim(M)$ está definida para toda $\beta \leq \alpha$
Diremos que X es un modulo $\alpha - simple$ si para todo $Y \subseteq X$, $GdimY \nleq \alpha$, $GdimX \nleq \alpha$ y $Gdim(X/Y) < \alpha$.
M tiene $Gdim = \alpha$ si $Gdim \nleq \alpha$ y cada $N \subseteq M$, M/N contiene un módulo $\beta - simple$ con $\beta < \alpha$.

Resultados.

1. Para $N \subseteq M$ se sigue que $Gdim(M) = sup\{Gdim(M/N), Gdim(N)\}$

2. Sea $\mathcal{U}$ la clase de todos los módulos con dimensión de Gabriel entonces $\mathcal{U} \subseteq M$-$ptors$[2]

Definición 26 *Sea σ : Mod-R $\longrightarrow$ Mod-R un funtor. Diremos que σ es un prerradical si:*

1. *Para todo modulo M se tiene que $\sigma(M) \subseteq M$*

2. *Para todo morfismo $f : M \longrightarrow N$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \sigma(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma(f)"] & \sigma(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $\sigma(f) = f_{|\sigma(M)}$.

Nosotros denotaremos a μ como el prerradical exacto izquierdo correspondiente a la clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{U}$.

Note que $\sigma[M] \cap \mathcal{U}$ es una clase de pretorsión hereditaria, entonces denotaremos a μ_M al prerradical correspondiente a la clase $\sigma[M] \cap \mathcal{U}$.

[2]Recuerde la definiciónn 15 del Capítulo 2.

Proposición 17 *Sea N un submódulo $\beta - simple$ de M, entonces existe un submódulo X $\beta - simple$ de M máximo con respecto a $N \subseteq X$*

Demostración. Tomamos una cadena de submódulos de M, $\{X_i\}$ donde cada X_i es $\beta - simple$ y $N \subseteq X_i$. Denotamos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Veamos que X es $\beta - simple$ por (1) $Gdim(M)$ $X = \beta$. Es suficiente demostrar que $0 \neq Y \subseteq X$ $Gdim(X/Y) < \beta$. Como Y es distinta de cero podemos contruir la siguiente familia

$$\mathcal{K} = \{i \in I \mid Y \cap X_i \neq 0\} \text{ observe que } \mathcal{K} \neq \varnothing$$

$$\begin{aligned} X/Y &= \bigcup X_i/Y \\ &= \bigcup_{i \in I} (X_i + Y)/Y \\ &= \bigcup_{i \in K} (X_i + Y)/Y \end{aligned}$$

$$con \quad \{(X_i + Y)/Y \mid i \in \mathcal{K}\} \quad \text{una cadena de submódulos de } X/Y$$

Para cada $i \in \mathcal{K}$ como X_i es $\beta - simple$,

$$Gdim((X_i + Y)/Y) = Gdim(X_i/(Y \bigcap X_i)) \leq \beta - 1$$

Por lo tanto $Gdim(X/Y) \leq \beta$

■

Notacion *R-tors* es la clase de todas las teorias de torsión hereditaria definidas en *Mod-R* .

Proposición 18 *Sea R un anillo tal que R-ptors= R-tors, entonces*

1. *Sea M un módulo $\beta - simple$, entonces $\mu(E(M))$ es $\beta - simple$*
2. *Sea M es un módulo semisimple, entonces $M = \mu(E(M))$*

Demostración.

1. Como M es un submódulo $\beta - simple$ de $\mu(E(M))$, entonces existe un módulo $X \beta - simple$ y máximo con la propiedad $M \subseteq X$ (por el Lema anterior). Es suficiente demostrar que $X = \mu(E(M))$. Supongamos lo contrario ($X \neq \mu(E(M))$), entonces existe $N \subseteq \mu(E(M))$ tal que N/X es $\alpha - simple$ para algún $\alpha > 0$. Desde que X es máximo se sigue que $\beta \leq \alpha$.
   Sea $\mathcal{F}$ la clase de módulos $\alpha - simple$ y $\beta - simple$ esto implica que $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \in$ *R-tors*. Entonces $N \in \sigma[M_{\mathcal{F}}]$ por lo tanto $W \leq K \leq M_{\mathcal{F}}^{(I)}$ para algún conjunto de índices I tal que

$$N \cong K/W \leq_{ess} M_{\mathcal{F}}^{(I)}/W$$

Escribimos $M_{\mathcal{F}}^{(I)} = A \bigoplus B$ con $A = \bigoplus_{\gamma \in I} A_\gamma$ con cada A_γ es $\beta - simple$ y $B = \bigoplus_{\gamma \in J} B_\gamma$ donde cada B_γ es $\beta - simple$. Entonces $K \leq_{ess} A \bigoplus B$ y existe un epimorfismo $\eta : K \longrightarrow N$. Sea $H = \eta^{-1}(X)$, entonces

$$N/X \cong K/H \hookrightarrow (A \bigoplus B)/H$$

Como $X \leq_{ess} N$ $(M \leq X \leq N \leq E(M))$, tenemos que $H \leq_{ess} K$, entonces $H \leq A \bigoplus B$ y por tanto $H \cap A_\gamma \neq 0$ para toda $\gamma \in I$ y $H \cap B_\gamma \neq 0$ para cada $\gamma \in J$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha &= Gdim(N/X) \\
&\leq Gdim((A \bigoplus B)/H) \\
&\leq Gdim((A \bigoplus B)/[(\bigoplus_{\gamma \in I} H \cap A_\gamma) \bigoplus (\bigoplus_{\gamma \in J} H \cap B_\gamma)] \\
&= Gdim((\bigoplus_{\gamma \in I} A_\gamma)/[(H \cap A_\gamma) \bigoplus Gdim((\bigoplus_{\gamma \in I} B_\gamma)/(H \cap B_\gamma)] \\
&< \alpha
\end{aligned}$$

para cada A_γ y B_α $\beta - simple$ y $\beta < \alpha$ lo cual es una contradicción. $\mu(E(M)) = X$ es $\beta - simple$.

2. Sea M es semisimple entonces $M \in \mathcal{U}$ y $M \subseteq \mu(E(M))$ Supongamos que $\mu(E(M)) \neq M$, entonces existe $N \subseteq \mu(E(M))$ tal que N/M es $\beta - simple$ pra algún ordinak $\alpha > 0$ Como la clase de todos los módulos semisimples es una clase de pretorsión hereditaria y por hipótesis es cerrada bajo extensiones. Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los módulos $\alpha - simples$ y $1 - simples$.

   Entonces $M_{\mathcal{F}}^{(I)} \in R\text{-}tors$ y así $N \in \sigma[M_{\mathcal{F}}^{(I)}]$. Siguiendo el mismo razonamiento que en (1) se conluye que $\alpha < \alpha$. Es una contradicción. y por tanto $\mu(E(M)) = M$.

■

Para la siguiente proposición se introducirá la definición de un $V - anillo$.

Definición 27 *Sea R un anillo. Diremos que R es un $V - anillo$ derecho si cada módulo derecho simple es un módulo inyectivo.*

Proposición 19 *Sea R un anillo tal que R-ptors= R-tors, entonces*

a) *$\mu(R)$ es un sumando directo de R.*

b) *Si R es un $V-$ anillo, entonces cada ideal bilateral de R es un sumando directo de R.*

Demostración. Sea un ideal $I \leq R$, entonces existe un ideal J máximo tal que $I \cap J = 0$. Sea $\mathcal{T} = \sigma[X]$ donde $X = I \bigoplus [R/(I \bigoplus J)]$. Como $\sigma[X] \in R$-*ptors*, entonces por hipótesis $\sigma[X] \in R$-*tors*, lo cual implica que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo extensiones, entonces $R/J \in \mathcal{T}$. y por tanto existe un módulo $K \in Mod\text{-}R$ y un epimorfismo

$$\varphi : K \longrightarrow R/J \text{ donde } K \subseteq A \oplus B, A = I^n \text{ y } B = (R/(I \oplus J))^n \text{ con } n > 0$$

Sea $L = K \cap B$ y

$$H/J = \sum\{f(L) \mid f \in Hom_R(L, R/J)\} = Tr(L, R/J)$$

Entonces H/J es un ideal de R/J y

$$(H/J)I = (\sum f(L))I = \sum f(LI) = 0 \text{ pues } BI = 0$$

$$\begin{aligned}(H/J)I &\supseteq [(I \cap H + J)/J](I \cap H)\\ &= (I \cap H + J)/J\end{aligned}$$

Como $(I \cap H)^2 = I \cap H$, entonces $I \cap H \subseteq$ y por tanto$I \cap H = I \cap J = 0$. Además por ser J máximo se concluye que $H = J$. Entonces $\varphi(L) \subseteq H/J = 0$; de esto último se sigue que φ induce un epimorfimo:

$$\varphi' : K/L \longrightarrow R/J$$

Sea $\pi : A \oplus (B/L) \longrightarrow A$ la proyección. Como $(K/L) \cap (B/L) = 0$ y $K/L \subseteq A \oplus (B/L)$, tomando la restricción de π a K/L tenemos un monomorfismo. Suponemos que $I \oplus J \neq R$. Sea P un ideal derecho máximo de R tal que $I \oplus J \subseteq P$ y sea un epimorfismo $\theta : R/J \longrightarrow R/P$. Entonces $\theta \circ \varphi \circ \pi^{-1} : \pi(K/L) \longrightarrow R/P$ es un epimorfirmo. Además $\pi(K/L) \subseteq A$, entonces el morfismo $\theta \circ \varphi \circ \pi^{-1}$ se puede extender a un morfismo $\eta : A \longrightarrow E(R/P)$.

a) Supongamos que $1I = \mu(R)$, entonces $\mu(A) = A$ y por tanto $\eta(A) = \eta(\mu(A)) \subseteq (E(R/P)) = R/P$, entonces $\eta(A) = R/P$. Esto es una contradición.

b) Si R es una $V-anillo$, se tiene que $R/P = E(R/P)$ y nuevamente $\eta(A) = R/P$. Como $I^2 = I$, $AI = A$ y por tanto $0 = (R/P)I = \eta(AI) = \eta(A) = R/P$, lo cual es una contradicción.

De ambos casos obtenemos una contradicción, por lo que I es un sumando directo de R es cualquiero caso.

■

Nuestro resultado siguiente contiene varias equivalencias para que M sea un *QI-Modulo* recuerde que el objeto principal de este proyecto es poder dar una caracterización de los $QI-Modulos$, utilizando diversos enfoques.

Teorema 4 *La siguientes afirmaciones son equivalentes para un módulo M:*

1. *M es un QI-Modulo*
2. *M es un módulo localmente neteriano y M-ptors= M-tors*
3. *M tiene dimension de Gabriel y M-ptors= M-tors*
4. *$\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 = E_M(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ para todo $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{N}^p(R, M)$*
5. *M-ptors= M-tors y $E_M(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \in \mathcal{N}^p(R, M)$ para toda $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{N}^p(R, M)$*
6. *Sea $N \in \sigma[M]$ casi inyectivo, M-ptors = M-tors. Si N es $M-singular$, entonces N es $M-inyectivo$*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Suponemos que M es *QI-Modulo* entonces por el Lema 11 M es localmente neteriano, sabemos que *M-ptors* es una clase natural, entonces $\mathcal{K}$ es cerrado bajo extenciones en $\sigma[M]$ y por tanto $M \in$ *M-tors*

2) $\Rightarrow$ 3) Es suficiente demostrar que M tiene dimensión de Gabriel. Sea $x \in M$, entonces $(xR + \mu(M))/\mu(M)$ es neteriano, entonces tiene dimensión de Gabriel y por tanto $xR + \mu(M) \in \mathcal{U}$. Entonces $xR \subseteq \mu(M)$. Por lo tanto $M = \mu(M)$ tiene dimensión de Gabriel.

3) $\Rightarrow$ 4) Por hipótesis M tiene dimensión de Gabriel, entonces $M \in \mathcal{U}$, por tanto $\sigma[M] \subseteq \mathcal{U}$. De esto se sigue que μ_M es el prerradical correspondiente a $\sigma[M]$. Sea $N \in \sigma[M]$ un módulo semisimple. Entonces $E_M(N) \in \sigma[M] \cap \mathcal{U}$. Por lo tanto $E_M(N) = \mu_M(E_M(N))$ y además $\mu_M(E_M(N)) = N$ por la Proposición 18. Entonces $N = E_M(N)$ es *M-inyectivo* . Como todo módulo semisimple en

$\sigma[M]$ es *M-inyectivo* , implica que M es localmente neteriano. De lo contrario si consideremos la siguiente cadena asendente de módulos:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq xR \subseteq M$$

lo cual implica que para cada $i \geq 1$, existen módulos $B_i, C_i \subseteq xR$ tales que $A_i \subseteq B_i \subseteq C_i \subseteq A_{i+1}$ y C_i/B_i es simple. Sea $A = \cup_i A_i$ y $f_i : C_i \to C_i/B_i$ los morfismos inducidos por la proyección para cada $i \geq 1$. Como cada C_i/B_i es simple y por tanto *M-inyectivo* existe un morfismo $g_i : A \longrightarrow C_i/B_i$ tal que se puede extender a cada f_i. Tomamos $S = \bigoplus C_i/B_i$ (Observe que S es simple). Definimos

$$f : A \longrightarrow S \text{ como } \pi_i \circ f(a) = g_i(a)$$

donde cada π_i es la proyección de S en C_i/B_i. Entonces existe un morfismo $g : xR \longrightarrow S$ tal que extiende a f. Ya que S es simple. Por otro lado se tiene que $g(xR)$ es cíclico, así existe $n > 1$ tal que $f(A) \subseteq g(xR) \subseteq \bigoplus_{j<n}(C_j/B_j)$. Sea $a \in C_n$, entonces $0 = \pi_n \circ f(a) = g_n(a) = a + B_n$, entonces $a \in B_n$. Por tanto $C_n = B_n$. Lo cual es una contradicción. De esto se sigue que M es localmente neteriano y por ende un *QI-Modulo* . Ahora es sufienciente demostrar que para cada $\tau \in M\text{-}ptors$ es una clase $M\text{-}natural$. Sea $N \in \tau$, queremos ver que $E_M(N) \in \tau$. Como M es localmente neteriano, entonces $E_M(N) = \bigoplus_t N_t$ donde cada N_t es un módulo uniforme *M-inyectivo* . Sea $X = N \cap E_t$ y $Y = E_t$. Como X tiene dimensión de Gabriel, entonces X contiene un submódulo P $\beta - simple$ para algún ordinal β. Como $Y \in \sigma[M] \cap \mathcal{U}$ entonces $Y = \mu_M(Y) = \mu_M(E_M(P))$ es β-simple. Sea τ un prerradical correspondiente a $\sigma[N]$ y sea $\mathcal{L} = \sigma[\tau(Y) \oplus Y/\tau(Y)]$. Entonces $\mathcal{L}$ es cerrado bajo extenciones en $\sigma[M]$ y así $Y \in \mathcal{L}$. Por lo tanto existe un epimorfismo $\theta : K \longrightarrow Y$ donde $K \subseteq A \oplus B, A \oplus \tau(Y)$ y $B \oplus (Y/\tau(Y))$. Sea $L = K \cap B$, como Y es $\beta - simple$ y $\tau(Y)$ es esencial en Y, entonces $Gdim(Y/\tau(Y)) < \beta$ y por tanto $GdimL < \beta$. Entonces, $Gdim(\theta(L)) < \beta$, pero Y es $\beta - simple$, lo cual implica que $\theta(L) = 0$. Así θ induce un epimorfismo $K/L \longrightarrow Y$. De esto último se tiene que:

$$K/L = K/(K \cap B) \cong (K + B)/B \hookrightarrow A$$

Entonces $K/L \in \sigma[M]$ y como $A \in sigma[X]$. Por lo tanto $Y \in \sigma[X] \subseteq Y$

1) $\Rightarrow$ 4) Suponemos que M es un *QI-Modulo* . Entonces $\mathcal{N}^p(R, M) = \mathcal{N}(R, M)$. Además para $K_1, K_2 \in \mathcal{N}_p(R, M)$ $E_M(K_1, K_2) = K_1 \wedge K_2$ (por el Lema 12). Por lo tanto se cumple (4).

5) $\Rightarrow$ 6) Sea N un módulo $M - singular$ y casi inyectivo. Entonces $N \in \sigma[M]$. Sea $\mathcal{K} = \sigma[M]$, lo cual implica que $\mathcal{K}$ es cerrado bajo extensiones en

$\sigma[M]$ por hipótesis. Entonces $\mathcal{K}$ es una clase de torsión hereditaria en $\sigma[M]$. Sea τ un prerradical exacto izquierdo en $\sigma[M]$ correspondiente a $\mathcal{K}$. Como N es casi inyectivo, $N = E_N(N) = \tau(E_M(N))$. Entonces $\tau(E_M(N)/N) = \tau(E_M(N)/E_M(N)) = \overline{0}$. Sea $\mathcal{L} = d(E_M(N)/N) \cap \sigma[M]$. Por (5), cada $\mathcal{F} \in$ *M-ptors* es cerrado bajo extensiones en $\sigma[M]$, entonces cada $\mathcal{F} \in \mathcal{N}_p(R, M)$ extensioneses cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$, lo cual implica $E_M(N) \in \mathcal{K} = \sigma[N]$. Como N es casi inyectivo, se sigue que N es $E_M(N) - inyectivo$. Por lo tanto $N = E_M(N)$ es *M-inyectivo* .

6) $\Rightarrow$ 1) Sea $N \in \sigma[M]$ casi inyectivo. Sea $\mathcal{T}$ una clase de módulos $M - singulares$. Entonces $\mathcal{T} \in \sigma[M]$, entonces $\mathcal{T}$ es cerrado bajo extensiones en $\sigma[M]$, por que *M-ptors*= *M-tors*. Sea τ un prerradical exacto izquierdo en $\sigma[M]$ correspondiente a $\mathcal{T}$. Entonces $\tau(N/\tau(N)) = \overline{0}$, por lo que $\tau(N)$ es un submódulo cerrado de N. Como N. Como N es casi inyectivo, $N = \tau(N) \oplus P$, para algún módulo P. Entonces $\tau(N)$ es un módulo $M - singular$ y casi inyectivo; por tanto $M - inyectivo$ por (6). Falta ver que N es *M-inyectivo* y para esto es suficiente demostrar que P es *M-inyectivo* .

Observe que P no es un módulo $M - singular$, casi inyectivo. Sea $\mathcal{K} = \sigma[P]$, entonces $E_M(\mathcal{K}, \mathcal{T}) = \mathcal{K} \wedge \mathcal{T} = \mathcal{T} \wedge \mathcal{K} = E_M(\mathcal{T}, \mathcal{K})$ por el Lema 13. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow E_M(P) \longrightarrow E_M(P)/P$$

Tenemos que $E_M(P) \in E_M(\mathcal{K}, \mathcal{T}) = E_M(\mathcal{T}, \mathcal{K})$, entonces existe $X \subseteq E_M(P)$ tal que $X \in \mathcal{T}$ y $E_M(P)/X \in \mathcal{K}$. Como P no es $M - singular$, $P \cap x = 0$ y por tanto $X = 0$, además por ser P esencial en $E_M(P)$. Entonces $E_M(P) \in \mathcal{K} = \sigma[P]$. Como P es casi inyectivo, P es $E_M(P) - inyectivo$. Entonces $P = E_M(P)$ es $M - inyectivo$. Por lo tanto M es un *QI-Modulo* .

Capítulo 3

La clase de los QI-Módulos

Definición 28 *Un Módulo M es llamado QI-Modulo si cada módulo casi inyectivo en $\sigma[M]$ es M-inyectivo .*

Lema 9 *Todo módulo M simple es QI-Modulo .*

Demostración. Sea $M \in$ *Mod-R* simple, entonces es casi inyectivo. por lo tanto en $\sigma[M]$ es *M-inyectivo* y así M es un *QI-Modulo* .

■

Definición 29 *Sea $M \in$ Mod-R no nulo. Diremos que M es localmente neteriano si cada submódulo finitamente generado de M es neteriano.*

Lema 10 *Si M es un QI-Modulo , entonces M es localmente neteriano.*

Demostración.
Sea M un *QI-Modulo* tal que M no es localmente neteriano. Sea $N \leq M$. Como M no es localmente neteriano, entonces existe $K \leq N$ no finitamente generado. Entonces podemos encontrar un conjunto indices $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que podemos construir la siguiente cadena ascendente

$$Rm_1 \subseteq Rm_1 + Rm_2 \subseteq Rm_1 + Rm_2 + Rm_3 \cdots$$

Sean $N_i = Rm_1 + Rm_2 + Rm_3 + \cdots Rm_i$ y $\overline{N} = \cup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ Note que cada $x \in \overline{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in N_{k+t}$ para toda $t \in \mathbb{N}$
Definimos el siguiente morfismo φ

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \overline{N} & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{N}/N_i \\ x & \mapsto & x + N_i \end{array}$$

Observe que $Im(\varphi) \subset \bigoplus_{i\in \mathbb{N}} \overline{N}/N_i$

Sea $x \in \overline{N}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in N_{k+t}$ para toda $t \in \mathbb{N}$; por tanto

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= ((x+N_i))_i \\
&= (x+N_1, x+N_2, ..., x+N_{k-1}, x+N_k, ...) \\
&= (x+N_1, x+N_2, ..., x+N_{k-1}, 0, 0, ...)
\end{aligned}$$

Como N_i es finitamente generado, entonces para cada N_i existe P_i máximo tal que P_i tal que $N_{i-1} \subseteq P_i \subseteq N_i$ y $S_i = P_i/N_i$ es simple. Entonces tenemos el siguiente morfismo.

$\overline{N}/N_i \to S_i$

De este morfimos obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
N_{i+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{N} \arrow[dl, dashed, "g"] \\
S_i &
\end{tikzcd}$$

El morfismo g existe debido a que cada S_i es simple y por tanto es un QI-*Modulo* . Además se tiene que $N_i = Nuc(\pi)$, entonces existe $f_i : \overline{N}/N_i \to S_i$.
Sean $f_i' = u_i \circ f_i$ donde cada u_i es la inclusión de S_i a $\bigoplus_{i\in \mathbb{N}} S_i$. Tenemos la siguiente familia de morfismos $\{f_i'\} : \overline{N}/N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathbb{N}} S_i$. Así por la propiedad Universal del coproducto existe $\{f_i'\} : \bigoplus_{i\in \mathbb{N}} \overline{N}/N_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in \mathbb{N}} S_i$ tal que $\{f_i'\}((x+N_i)) = \sum f_i'(x+N_i)$.
Considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\overline{N} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\overline{\varphi}"] \\
\oplus \overline{N}/N_i \arrow[r, "\{f_i'\}"'] & \bigoplus S_i
\end{tikzcd}$$

Como f_i es distinto de cero, entonces $f_i' \neq 0$ y por tanto $\{f_i'\} \circ \varphi \neq 0$. Por otro lado sabemos que N es finitamente generado, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Im(\overline{\varphi}) \subset \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$.
Sea $x \in \overline{N}$ tal que $x \notin N_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{f_i'\}(\varphi(x)) \neq 0$, pero $\overline{\varphi}(x) = 0$. Lo cual es una contradicción y se concluye que M es localmente neteriano.

■

Proposición 20 *Sea $\mathcal{K}_q = \{M \in$ Mod-$R \mid M$ es $QI-Modulos\}$ la clase de todos los $QI-Modulos$. Entonces es cerrada bajo submódulos y cocientes.*

Demostración.

1. Sea N submódulo de M entonces $\sigma[N] \subseteq \sigma[M]$ de esto se sigue que para todo $K \in \sigma[N]$ es *QI-Modulo* , por lo tanto N es un *QI-Modulo* por el Teorema 1.

2. Para ver que la colección $\mathcal{K}_q$ es cerrado bajo cocientes es suficiente demostrar que $\sigma[M/N] \subseteq \sigma[M]$ con $N \leq M$. Sea $\mathcal{K} \in \sigma[M/N]$, entonces

   $$\mathcal{K} \hookrightarrow (M/N)^{(I)/V} \text{ con } V \leq (M/N)^{(I)}$$

   entonces $V \cong L^{(I')/N^{(I)}}$, donde $L^{(I')} \leq M^{(I')}$. De esto se sigue que

   $$(M/N)^{(I)}/V = (M/N)^{(I)}/(L^{(I')}/N^{(I)}) \cong M^{(I)}/L^{(I)}$$

   entonces $K \hookrightarrow M^{(I)}/L^{(I)} \in \sigma[M]$. Por lo tanto $\sigma[M/N] \subseteq \sigma[M]$ usando nuevamente el Teorema 1 se conluye que M/N es *QI-Modulo* .

■

La colección $\mathcal{K}_q$ no es cerrada bajo cápsulas inyectivas, subproductos directos y extensiones de módulo.

Ejemplos: Sea R= $\mathbb{Z}$

1. Sea $N = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ en *Mod*-$\mathbb{Z}$ Entonces N es la cápsula inyectiva de $Zoc(N) = \mathbb{Z}_p$. $Zoc(N)$ es *QI-Modulo* , pero $Zoc(N)$ no es sumando directo de N. Por lo tanto N no es *QI-Modulo* .

2. Sea $N = \mathbb{Z}_4$, entonces $Zoc(N) = 2\,\mathbb{Z}_4$ y $N/Zoc(N) \cong \mathbb{Z}_2$. Como el $Zoc(N)$ y $N/Zoc(N)$ son módulos simples, entonces son *QI-Modulos*. Considere la siguiente sucesión exacta.

   $$0 \longrightarrow Zoc(N) \longrightarrow N \longrightarrow N/Zoc(N) \longrightarrow 0$$

   Por otro lado sabemos que el $Zoc(N)$ no es un sumando directo de N. Como consecuencia de lo anterior N no es un *QI-Modulo* .

3. $\mathbb{Z}$ es un producto subdirecto de $\mathbb{Z}-modulos$ simples. Para un número primo p tomamos $\mathbb{Z}-modulos$ y la siguiente familia de morfismos $\{\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p\}$. La cual induce un morfismo entre

   $$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$$

   y por tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "\eta_p"'] & \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \arrow[d] \\ & \mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

Denotamos a la composición de $\eta_p \circ u_p$ como ϕ. Además por el diagrama tenemos que $\eta_p = \pi_p \circ \phi$. Observe que $Nuc\phi = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p = 0$. Por lo tanto ϕ es un monomorfismo.
De lo anterior se concluye que $\mathbb{Z}$ es un producto subdirecto de módulos simples. Note que $\mathbb{Z}$ no es un *QI-Modulo* , pero cada $\mathbb{Z}_p$ son *QI-Modulo* por ser módulos simples.

Definición 30 *Un anillo R es semiartiniano derecho si cada módulo no cero $M \in R$-Mod tiene zoclo no cero.*

Teorema 5 *La clase K_q coincide con la clase de módulos semisimples, en los siguientes casos:*

1. *R es semiartiniano derecho.*

2. *R es un dominio de ideales principales.*

3. *R tiene número finito de ideales derechos máximos, en particular si R es local.*

Demostración.

1. Sea $N \in \mathcal{K}_q$ no cero. Como R es un anillo semiartiniano, $Zoc(N) \leq_{ess} N$. Sabemos que N es *QI-Modulo* , entonces $Zoc(N)$ es N-*inyectivo*, asi $Zoc(N)$ es un sumando directo de N. Por lo tanto M es semisimple.

2. Sea N$\in K_q$ y $T(N)$ la parte de torsión N. Si $T(N) \neq N$ entonces $N/T(N) \neq 0$ y es libre de torsión Sea $x+T(N) \in N/T(N)$ tal que $< x+T(N) >\cong xR$. Por hipótesis $T(N) \in K_q$ y $T(N) \leq N$ entonces $N/T(N)$ es *QI-Modulo* por lo tanto $(xR)_R \cong R_R$ y xR es *QI-Modulo* Sea $a \in R$ un elemento primo, entonces $aR \leq R$ es un ideal máximo. Entonces R/a^2R es casi inyectivo, ya que de lo contrario para cualquier submódulo L/a^2R de R/a^2R y $f \in Hom(L/a^2R, R/a^2R)$ Como R es Dominio de Ideales Principales entonces $L = lR$ con $l \in R$ además $a^2R \subset lR$ y a^2R está generado por a^2 entonces $lR \subset a^2R$.Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L/a^2R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R/a^2R \arrow[dl, dashed, "\phi"'] \\ R/a^2R & \end{tikzcd}$$

$$f(\bar{l}a^2) = f(\bar{l})a^2 = \overline{x}a^2 \in R/a^2R$$

entonces $0 = f(\bar{l}a) = f(\bar{l})f(a) = \overline{x}a$ por lo tanto $xa \in a^2R$ es decir $x = ar$ para alguna $r \in R$ así R/a^2R es casi-inyectivo pero aR/a^2R es simple, entonces

$$aR/a^2R \text{ es } a^2 \text{ R-inyectivo}$$

Por lo tanto $R/a^2R = aR/a^2R \bigoplus aR/a^2R$ entonces $R/a^2R = aR/a^2R$

Esto es una contradicción pues aR es un ideal propio de R y esto es por suponer que N es distinto a su parte de torsión; así $T(N) = N$. Siguiendo el mismo argumento se conluye que R/a^2R no es casi inyectivo. Sea $x \in N$ entonces

$$xR \cong x_1R \bigoplus x_2R \bigoplus \cdots x_kR$$

con $ann_r(x_i) = a_i^m \; m_i > 0, a_i$ un elemento primo de R.
Observe que $xR \cong x_iR/ann(x_i)$, entonces x_iR no puede ser casi inyectivo a menos que $m_i = 1$, entonces x_iR es simple,y así xR es simple. Por lo tanto N es semisimple.

3. Sea $N \in K_q$, supongamos que N es cíclico Como $R/x^{\perp} \cong xR$ entonces $N \cong R/ann(x)$. Sean $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ideales derechos máximos de R. Podemos asumir que para alguna K tal que

$$1 \leqslant k \leqslant m \; x^{\perp} \subset \bigcap_{i=1}^{k} I_i$$

$$\text{entonces } x^{\perp} \nsubseteq I_j \text{ para } i = k+1, \cdots, m \text{ y } ann(x) = I \coloneqq \bigcap_{i=1}^{k} I_i$$

Si $ann(x) \subsetneq I$ se sigue que $I/ann(x)$ es distinto de cero y por tanto $I/ann(x) \subset R/ann(x)$. Como N es *QI-Modulo* entonces N es neteriano, por lo tanto $I/ann(x)$ es neteriano, entonces existe $K/ann(x)$ un submodulo máximo de $I/ann(x)$, así $I/ann(x)$ es un modulo simple de R/K. Nótese que R/K es una imagen de N, entonces R/K es un *QI-Modulo* , pues $\mathcal{K}_q$ es cerrada bajo cocientes.
Por lo tanto

$$I/K \text{ es } R/\text{K-inyectivo, además se concluye que } R/K \cong I/K \bigoplus J/K$$

donde J es un ideal derecho de R, de esto se sigue que $K = I \cap J$, y J un ideal derecho máximo de R. Como $ann(x) \subseteq K \subseteq J$, entonces $J = I_i$ para alguna $1 \leq i \leq k$.

Por lo tanto $K = I \bigcap J = I$.Esto es una contradicción ya que

$$K \nleq I \text{ así } ann(x) = I \text{ con } N \cong R/I = R/(\bigcap_{i}^{k} I_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{k} (R/I_i)$$

con cada R/I_i simple. Por lo tanto N es semisimple.

∎

Corolario 7 *Si R es un anillo local con Radical de Jacobson $J(R)$ entonces un módulo N es QI-Modulo si y sólo si N es una suma directa de copias de $R/J(R)$.*

Demostración. Observe que $R/J(R)$ es simple, entonces $N = \bigoplus R/J(R)$ si y sólo si N es semisimple si y sólo si N es un *QI-Modulo* .

∎

Teorema 6 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M es QI-Modulo .*
2. *Cada módulo en $\sigma[M]$ es QI-Modulo*
3. *Cada M-inyectivo en $\sigma[M]$ es QI-Modulo*
4. *M es un módulo localmente neteriano si cada submódulo uniforme en $\sigma[M]$ es fuertemente primo.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sean $N \in \sigma[M]$ y K un módulo casi-inyectivo en $\sigma[N]$, entonces $K \in \sigma[M]$. Por hipotesis M es un *QI-Modulo* entonces K es X-inyectivo para toda $X \in \sigma[M]$, en particular para N. Por lo tanto K es N-inyectivo.

2) $\Rightarrow$ 3) Todo módulo inyectivo es casi inyectivo

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $N \in \sigma[M]$ un módulo no cero casi-inyectivo, entonces $N \subset E_M(N)$. Como $E_M(N)$ es *M-inyectivo* , entonces $E_M(N)$ es un *QI-Modulo* . Además por la primera contención se tiene que $N \in \sigma[E_M(N)]$, por lo tanto N es $E_M(N)$*–inyectivo*. Asi $N = E_M(N)$; es decir; N es casi-inyectivo en $\sigma[M]$.

1) $\Rightarrow$ 4) Se sigue de que $\sigma[M]$ es una clase *M-natural* que satiface la condición (*) y del teorema (1, cap 2).

∎

3.1. *QI-Modulos* y retículas de clases

En esta sección, discutiremos la relación que hay entre un *QI-Modulo* M y las propiedades de algunas retículas de módulos en $\sigma[M]$.

Teorema 7 *Las siguientes afirmaciones son equivalente para un modulo* M

1. M *es un QI-Modulo*

2. $\mathcal{N}^p(R,P) = \mathcal{N}(R,M)$

3. *R-ptors* $\subseteq \mathcal{N}(R,M)$

4. $\mathcal{N}^p(R,M)$ *es una retícula con complementos únicos.*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{N}^p(R,M)$. Escribiremos $\mathcal{L} = \mathcal{K} \cap \sigma[M]$, donde $\mathcal{K} = d(N) \cap \sigma[N]$. Como $\sigma[N] \cap \sigma[N] \in$ *R-ptors*, entonces existe un módulo P,tal que $\sigma[N] \cap \sigma[M] = \sigma[P]$. Por lo tanto $\mathcal{L} = d(N) \cap \sigma[M]$ es unas clase $P-natural$. Veremos que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo cápsulas $M-inyectivas$. Sea $x \in \mathcal{L}$, entonces $X \subset E_p(X) \subset E_M(X) \subset E(X)$. Como $E_P(X)$ es *P-inyectivo*, entonces es casi inyectivo y por tanto *M-inyectivo* . Así que $E_p(x) = E_M(x)$ pero $E_p(x) \in \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es una clase *P-natural* concluimos $E_M(x) \in \mathcal{L}$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es cerrado bajo cápsulas *M-inyectivas*.

2) $\Rightarrow$ 4) Como $\mathcal{N}^P(R,M)$ es una retícula booleana, es distributiva y por lo tanto sus complementos son únicos.

4) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathcal{K} \in$ *M-ptors* es un clase de pretorsión contenida en $\sigma[M]$. Entonces $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cap \sigma[M]$, donde $\mathcal{L} \in$ *R-ptors*. Nótese que $\mathcal{K} \in \mathcal{N}^P(R,M)$, ya que *M-ptors* es una subretícula de $\mathcal{N}^P(R)$.
Como $\mathcal{N}^P(R,M)$ es una retícula complementada existe $\mathcal{F} \in \mathcal{N}^P(R,M)$ tal que $\mathcal{F} \wedge \mathcal{K} = 0$ y $\mathcal{K} \vee \mathcal{F} = 1$ entonces $\mathcal{K} \subseteq c(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$
Si $\mathcal{J} = c(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ implica $\mathcal{K} \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{F}$ y $\mathcal{K} \cup \mathcal{F} \subset \mathcal{J} \cup \mathcal{F}$. Como $\mathcal{N}^P(R,M)$ es una retícula completa se sigue que:

$$0 = \mathcal{K} \cap \mathcal{F} \leq \mathcal{J} \cap \mathcal{F} \ y \ 1 = \mathcal{K} \cup \mathcal{F} \leq \mathcal{J} \cup \mathcal{F}$$

Así $\mathcal{K} = \mathcal{J}$ y $c(\mathcal{F})$, $\sigma[M]$ son clases *M-natrurales* por lo tanto $\mathcal{K} \in \mathcal{N}(R,M)$

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $N \in \sigma[M]$ casi inyectvo, entonces $\sigma[N] \in \sigma[M]$ por lo tanto $\sigma[N]$ Es una clase de pretorsión hereditaria; así $\sigma[M] \in \mathcal{N}(R,M)$ y por tanto cerrada bajo cápsulas *M-inyectivas* en particular $E_M(N)$ es $N-$*inyectivo*, como N es casi inyectivo entonces es X-*inyectivo*

Definición 31 *Para cualesquiera subclases $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ de $\sigma[M]$, entonces:*

$$E_{\mathcal{K}}(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \{N \in \sigma[M] \mid \text{ existe } X \subseteq N \text{ tal que } X \in \mathcal{K}, N/X \in \mathcal{L}\}$$

Una subclase $\mathcal{K}$ de $\sigma[M]$ diremos que es cerrada bajo extensiones si $\mathcal{K} = E_M(\mathcal{K},\mathcal{K})$

Lema 11 $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ *para toda* $\mathcal{K},\mathcal{L} \in \mathcal{N}(R,M)$

Demostración. Sea $\mathcal{K},\mathcal{L} \in \mathcal{N}(R,M)$. Entonces $\mathcal{K} \vee \mathcal{L} \in \mathcal{N}(R,M)$ por lo tanto $\mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ es cerrada bajo extensiones en $\sigma[M]$ y así $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$. Suponemos que $N \in \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ y sea $X \leq N$ máximo con la propiedad $N \cap Y = 0$.

Entonces $N \hookrightarrow_{ess} X$. Así $N/Y \in \mathcal{L}$

Como X es máximo se sigue que $Y \in c(\mathcal{L}) \cap \sigma[M]$. Definimos a $\mathcal{J} = c(\mathcal{L}) \cap \sigma[M]$. Además por ser $\mathcal{N}$(R,M) una retícula Booleana, entonces:

$$\begin{aligned} Y \in \mathcal{J} \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{L}) &= (\mathcal{J} \wedge \mathcal{K}) \vee (\mathcal{J} \wedge \mathcal{L}) \\ &= (\mathcal{J} \wedge \mathcal{L}) \vee 0 \\ &= (\mathcal{J} \wedge \mathcal{K}) \leq \mathcal{K} \end{aligned}$$

Por lo tanto $N \in E_M(\mathcal{K},\mathcal{L})$

■

Definición 32 *Sea M–tors el conjunto de todas las clases de torsión contenidas en $\sigma[M]$*

$$M\text{–}tors = \{\mathcal{K} \in M\text{-}ptors \mid \mathcal{K} = E_M(\mathcal{K},\mathcal{K})\}$$

Lema 12 *Son equivalentes para un módulo M:*

1. *M-ptors= M–tors*
2. $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ *para toda* $\mathcal{K},\mathcal{L} \in$ *M-ptors*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2)
Sean $\mathcal{K},\mathcal{L} \in$ *M-ptors*, entonces $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K} \vee \mathcal{L} \in$ *M-ptors* además $\mathcal{K} \vee \mathcal{L} \in$ *M–tors*, (por (1)) y por tanto $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) \in$ *M–tors*. Implicando que $\mathcal{K} \vee \mathcal{L} \leq E_M(\mathcal{K},\mathcal{L})$ y por ser $\mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ la mínima clase pre-natural contenida en $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$. Se concluye que $E_M(\mathcal{K},\mathcal{L}) = \mathcal{K} \vee \mathcal{L}$
2) $\Rightarrow$ 1) Sea $\mathcal{K} \in$ *M–tors* , entonces $\mathcal{K} = E_M(\mathcal{K},\mathcal{K})$. Por lo tanto $\mathcal{K} \in$ *M–tors*

■

Capítulo 4

Módulos casi inyectivos en $\sigma[M]$

Teorema 8 *Sean M, $N \in$ Mod-R , entonces:*

1. *N es casi inyectivo si y solo si para todo $x \in N$, $I \leq R$, cualquier morfismo $\phi : xI \longrightarrow xR$ se puede extender a un endomorfismo $xR \longrightarrow xR$.*

2. *N es casi inyectivo si y sólo si para todo ideal I de R tal que para algún $x \in N$, se tiene que $ann(x) \subseteq I$, cualquier morfismo $\phi : I \longrightarrow N$ con $ann(x) \subseteq Nuc(\phi)$. Entonces existe un morfismo $\varphi : R \longrightarrow N$.*

3. *N es M-inyectivo si y solo si para todo $ann(x) \subseteq I \leq R$, con $x \in M$. Entonces cualquier morfismo $\phi : I \longrightarrow N$ donde $ann(x) \subseteq Nuc(\phi)$ es de la forma $\phi(a) = ya$, para toda $a \in I$, para algún $y \in N$.*

Demostración.

1. $\Rightarrow$) Esta implicación es clara.

   $\Leftarrow$) Sean I, N, x y ϕ como en (1) y consideremos el siguiente diagrama;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & xI \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & xR \arrow[dl, "\varphi"'] \\
 & xR &
\end{tikzcd}$$

   Notese que para cada $x \in N$ existe un endomorfismo φ de xR, por lo que nos induce un morfismo $\overline{\varphi} = \sum \varphi$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
xI \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & xR \subset \sum_{x \in N} xR = N \arrow[dl, dashed, "\overline{\varphi}"'] \\
xR \subset \sum_{x \in N} xR = N &
\end{tikzcd}$$

2. $\Rightarrow$) Sea $x \in N$ tal que $ann(x) \subseteq Nuc(\phi)$, entonces el morfismo ϕ induce un morfismo, $\varphi : xI \longrightarrow N$. Entonces se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} xI \arrow[r, hook] \arrow[d] & xR \subseteq R = \sum_{x\in R} xR \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ xR \arrow[d, hook, "u_x"'] & \\ N & \end{tikzcd}$$

Sabemos que existe σ por (1), definimos $\varphi = u_x \circ \sigma$ donde u_x es la inclusión correpondiente a cada x. Por lo tanto el morfismo $\bar{\varphi} : R \longrightarrow N$ es una extensión para ϕ.

$\Leftarrow$) Tomemos $N = \sum_{x\in N} xR$ entonces por hipótesis existe $\varphi : R \longrightarrow N$ tal que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[dl, dashed] \\ N & \end{tikzcd}$$

Sea $R \longrightarrow \sum_{x\in N} xR$ el epimorfismo incluido por la suma entonces existe $\bar{\varphi} : \sum_{x\in N} xR \longrightarrow N$, definido como $\varphi(x_iR) = (\varphi_i x_i R)$ donde $\varphi_i : x_iR \longrightarrow N$ (Observe que $R = \sum_{i\in R} x_iR$) por lo tanto N es casi inyectivo.

3. $\Rightarrow$) Supongamos que N es $M-inyectivo$, $\phi \in Hom(I, N)$. Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[dl, "\varphi"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Sea $y = \varphi(1)$, entonces $\phi(a) = \varphi(a) = \varphi(a)a = ya$ para toda $a \in I$ y algún $y \in N$ Por lo tanto tenemos lo que queriamos.

$\Leftarrow$) Sea $\phi : I \longrightarrow N$ cualquier morfismo tal que existe $\phi(a) = ya$ para toda $a \in I$. Definimos $\varphi : R \longrightarrow N$ como $\varphi(r) = yr$, claramente φ es una extensión de ϕ.

Para módulos M y N, definimos lo siguiente :

1. $\Lambda = End_R(E(N))$
2. $S = End_R(E_M(N))$
3. $\tilde{N} = \Lambda N := \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(N, E(N))\}$

   Con esta notación las siguientes contenciones se cumplen $N \subset \tilde{N} \subset E(N)$.

Nótese que $\tilde{N}$ y $E_M(N)$ son totalmente invariantes en $E(N)$ y por tanto son casi inyectivos.[1]

Demostración.

Primero veremos que $E_M(N)$ es totalmente invariante en $E(N)$. Sea $L \leq E_M(N)$, $f \in Hom_R(L, E_M(N))$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E(N) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ E_M(N) \subseteq E(N) & \end{tikzcd}$$

Como $E_M(N)$ es inyectivo entonces existe un morfimo $g : E(N) \longrightarrow E_M(N)$ lo cual implica la conmutatividad del diagrama. Por lo tanto $E_M(N)$ es totalmente invariante en $E(N)$.

■

Proposición 21 *Para módulo $N \in \sigma[M]$, se cumple lo siguiente:*

1. $\tilde{N} = \Lambda N = SN \subseteq E_M(N)$.
2. *N es totalmente invariante en $E(N)$ si y sólo si N es totalmente invariante en $E_M(N)$.*

Demostración.

1. Como $N \in \sigma[M]$, entonces $E_M(N) = E(N)$ por lo que $\Lambda N = SN$. Además $SN \subset Imf \subseteq E_M(N)$ y es lo que queriamos.
2. Suponemos que N es totalmente invariante en $E(N)$. Sean $K \leq N$, $f \in Hom(K, N)$, consideremos el siguiente diagrama:

[1] Veáse Teorema 1 del Capítulo 1.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E_M(N) \subseteq E(N) \arrow[dl, dashed, "g"'] \\
N &
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis existe un morfismo $g : E(N) \longrightarrow N$, definimos el morfismo $g' = g|_{E_M(N)}$, lo cual implica que N sea totalmente invariante en $E_M(N)$.

Para el recíproco es sufiente mencionar que todo morfismo $f \in Hom(E_M(N), N) \subseteq Hom(E(N), N)$.

■

Lema 13 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es un QI-Modulo*
2. *Para todo submódulo $N \in \sigma[M]$ totalmente invariante de E(N), no existe un submódulo totalmente invariante $P \subseteq E(N)$ con $N \subset P \in \sigma[M]$*
3. *Para todo submódulo $N \in \sigma[M]$ totalmente invariante de $E_M(N)$, no existe un submódulo totalmente invariante $P \subseteq E_M(N)$ con $N \subset P$*

Demostración. Note que si M es un *QI-Modulo* y $N, P \in \sigma[M]$ totalmente invariantes en $E(N)$ entonces $N = E_M(N)$ y $P = E_M(P)$[2].

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que no pasa 2) entonces existe $P \subseteq E(N)$ toltalmente invariante tal que $N \subset P \subseteq E(N)$. Como $N \leq_{ess} P$, se sigue que $E(N) = E(P)$ y por tanto $E(N) = E(P)$. Además por la nota tenemos que $E_M(N) = E_M(P)$, por lo tanto $N = P$. Lo cual es una contradicción.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $N \in \sigma[M]$ un módulo casi inyectivo. Como $N \in \sigma[M]$, entonces $N \subseteq E_M(N)$. Supongamos que $N \neq E_M(N)$, entonces existe $P \in \sigma[M]$ totalmente invariante en $E(N)$ y $N \subset P \subseteq E_M(N)$. Digamos $P = E_M(N)$ y esto contradice la hipótesis de 2). Por lo tanto $N = E_M(N)$. De esto se sigue que M es *QI-Modulo* .

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $N \in \sigma[M]$ totalmente invariante en $E_M(N)$. Supongamos que existe P totalmente invariante en $E_M(N)$ con $N \subset P \subseteq E_M(N)$; digamos $P = E_M(N)$. Como $E_M(N) \subset E(N)$, entonces $N \subset E_M(N) \subseteq E(N)$ lo cual es

[2]Esto se debe a que todo submódulo totalmente invariante en $E(N)$ es casi inyectivo.

una contradicción de (2).

3) $\Rightarrow$ 2) Sea $N \in \sigma[M]$ totalmente invariante en $E(N)$. Como $N \in \sigma[M]$, entonces $N \subseteq E_M(N)$. Por otro lado suponamos que existe $P \in sigma[M]$ totalmente invariante tal que $N \subset P \subseteq E(N)$, a saber $P = E_M(N)$, pero esto es una contradicción de (3). Por lo tanto no existe P.

■

Proposición 22 *Para cualquier módulo $N \in \sigma[M]$. Entonces $\tilde{N} \in \sigma[M]$. Además $Ann(\tilde{N}) = Ann(N)$.*

Demostración. Como $\tilde{N} = \Lambda N = \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(N, E(N))\}$ y además $f(N) \cong N/Nuc(f)$. Por hipótesis $N \in \sigma[M]$ entonces $N/Nuc(f) \in \sigma[M]$, por ser $\sigma[M]$ una clase *M-natural* tenemos que $\tilde{N} \in \sigma[M]$. Veamos que $Ann(\tilde{N}) = Ann(N)$.

$$\begin{aligned} Ann(\tilde{N}) &= \bigcap_{i \in I} ann(b_i) \ \text{(donde } b_i = f_i(a_i), a_i \in N) \\ &= \bigcap_{i \in I} Nuc(f_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto $Ann(\tilde{N}) \subseteq Ann(N)$. Sea $r \in Ann(N)$ entonces $ar = 0$ con $a \in N$, así $f_i(ar) = 0$ para $f_i \in Hom_R(N, E(N))$. Por tanto $ar \in Nuc(f)$, lo cual implica que $ar \in \bigcap_{i \in I} Nuc(f_i) = Ann(\tilde{N})$. Por lo tanto $Ann(\tilde{N}) = Ann(N)$.

■

Definición 33 *Para un anillo R, un prefiltro $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío de ideales derechos que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Si $A \subseteq B \leq R, A \in \mathcal{U}$, entonces $B \in \mathcal{U}$;*
2. *Para toda $A, B \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$;*
3. *Para toda $x \in R, A \in \mathcal{U}$, entonces $x^{-1}A \in \mathcal{U}$ donde $x^{-1}A := ann(a + L)$*

Sean $N \in \sigma[M]$ y $\mathcal{F}$ determinado como

$$\mathcal{F} = \{L \leq R \mid \bigcap_{i \in I}^{n}(x_i) \subseteq L \text{ para algunos n y algún } x_i \in N\}$$

Observe que si $\bigcap_{i \in I}^{n}(x_i) \subseteq L$, entonces $\bigcap_{i \in I}^{n}(ax_i) \subseteq a^{-1}L$ y además $\mathcal{F}$ es un prefiltro.

Demostración. Veamos que para $\mathcal{F}$ cumple las condiciones de la definición de prefiltro.

1. Sea $A \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq A$ con $x_i \in N$ y sea $A \leq B$. entonces $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq A \leq B$, por lo tanto $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq B$.
2. Sean $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq A$ y $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq B$, por lo tanto $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq A \cap B$
3. Sean $x \in R$ y $L \in \mathcal{F}$, por la observación tenemos que $\bigcap_{i\in I}^{n}(ax_i) \subseteq a^{-1}L$. Además $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}^{n}(ax_i)$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I}^{n}(x_i) \subseteq a^{-1}L$

   Así $\mathcal{F}$ es un prefiltro.

■

Por otro lado, sea τ el prerradical exacto izquiero determinado por $\mathcal{F}$, por tanto

$$\tau(E_M(N)) = \{x \in E_M(N) \mid ann(x) \in \mathcal{F}\}$$

Además $\tau(E_M(N)) \leq E_M(N)$.

Por otro lado si $x_1, x_2 \in \tau(E_M(N))$ y $r \in R$, entonces $ann(x_1), ann(x_2) \in E_M(N)$ tales que $ann(x_1), ann(x_2) \in \mathcal{F}$; lo cual implica que $ann(x_1) \cap ann(x_2) \in E_M(N)$ y $ann(x_1) \cap ann(x_2) \in \mathcal{F}$. Además sabemos que $ann(x_1) \cap ann(x_2) \subseteq ann(x_1 - x_2)$, como $\mathcal{F}$ es un filtro entonces $ann(x_1 - x_2) \in \mathcal{F}$.

Ahora tomemos $x \in \tau(E_M(N)$, entonces $ann(x) \in \mathcal{F}$, para algún $x_i \in N$ por definición tenemos $\cap_{i=1}^{n} ann(x_i) \subseteq ann(x)$, entonces $ann(xr) = ann(r)ann(x) := ann((r + ann(x))$ que contienen a $r^{-1} \cap_{i=1}^{n} ann(x_i) = \cap_{i=1}^{n} ann(x_i r)$, donde $x_i r \in N$. lo cual implica que $r^{-1}ann(x) \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $x_1 - x_2, xr \in \tau(E_M(N))$.

■

Proposición 23 *Para $N \in \sigma[M]$ se cumple lo siguiente:*

1. *$\tilde{N} \subset \{x \in E_M(N) \mid ann(y) \subseteq ann(x)$ para algún $y \in N\}$*
2. *$\tilde{N} = \tau(E_M(N))$*
3. *$\mathcal{F}$ es el prefiltro generado por $\{ann(x) \mid x \in N\}$*

Demostración.

1. Como $N \in \sigma[M]$, entonces $E_M(N) = E(N)$; asi cada $x \in \tilde{N}$ es cociente de $yR \in \sigma[M]$, para algún $y \in N$. Por tanto $xR \subseteq Tr(\sigma[M], E(M)) = E_M(N)$ y es lo que estabamos buscando.

2. Por (1) se tiene que $\tilde{N} \subseteq \tau(E_M(N))$, para algún n. Sea $z \in \tau(E_M(N))$ con $\bigcap_{i=1}^{n}(y_i) \subseteq ann(z)$ con $y_i \in N$, aplicando (1) la capsula casi inyectiva de n copias de N es $\tilde{N} \oplus \cdots \oplus \tilde{N}$. Tomemos el elemento de la diagonal en $\tilde{N} \oplus \cdots \oplus \tilde{N}$; es decir; sea $x = (z, \cdots, z) \in E_M(N) \oplus \cdots \oplus E_M(N)$ y $y = (y_1, \cdots, y_n) = \bigcap_{i=1}^{n} ann(y_i)$, lo cual implica que $(z, \cdots z) \in tildeN \oplus \cdots \oplus \tilde{N}$. Por lo tanto $z \in \tilde{N}$. Note que éste argumento lo podemos repetir un número finito, entonces $\tilde{N} = \tau(E_M(N))$.

3. Esta afirmación es de inmedianta, de la definición de $\mathcal{F}$.

Definición 34 *Diremos que R es un $V-anillo$ si cada módulo simple sobre R es inyectivo.*

A continuación se demostrará un Lema que relaciona el concepto de $V-anillo$ y un *QI-Modulo* .

Lema 14 *Sea R no $V-anillo$ y N un QI-Modulo , entonces $ann(x) \neq 0$ para cada $x \in N$*

Demostración.
Supongamos que existe $x \in N$ tal que $ann(x) = 0$, entonces $R_R \cong xR$, $\sigma[N] = Mod\text{-}R$ Sea $P \in \sigma[N]$ un módulo simple no inyectivo, por tanto P es casi inyectivo; además $N-inyectivo$ y $xR-inyectivo$, entonces P es inyectivo, contradiciendo que R no es un $V-anillo$. Por lo tanto $ann(x) \neq 0$ para toda $x \in N$.

■

Daremos una definición que será necesaria para demostrar el siguiente Lema.

Definición 35 *Un ideal primitivo izquierdo (derecho) en R es el ideal bilateral P más grande que está contenido en un ideal izquierdo máximo M de R.*

Observése que todo ideal primitivo izquierdo (derecho) es un ideal primo. [3]

Lema 15 *Sean R no $V-anillo$, dominio entero y tiene un ideal primitivo no cero, N cualquier QI-Modulo sobre R . Entonces $ann(x) \neq 0$ para $x \in N$*

Demostración. Sea L un ideal máximo de R, entonces existe $a \in ann(R/L) \subset L$ distinto de cero. Note que R/L es simple.
Sea $\phi : aR \longrightarrow R/L$ un morfismo definido por $\phi(ar) = r + L$. Si R/L es inyectivo, entonces tenemos el siguiente diagrama:

[3] Veáse Ring Theory K.R. Goodeorl.

$$\begin{tikzcd}
aR \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[dl, "\varphi"] \\
R/L &
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi(1) = b + L$, de aqui se tiene que $ba \in ann(R/L)$. Entonces $L = a + L$ y $L = 1 + L$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R/L es un módulo simple no inyectivo; así por el lema anterior se cumple lo que queriamos.

■

Corolario 8 *Sean R no $V-$anillo, dominio entero y conmutativo, N cualquier QI-Modulo sobre R . Entonces $ann(x) \neq 0$ para $x \in N$*

Demostración. En este caso, R tiene un ideal màximo no cero; por lo que aplicamos el lema anterior y tenemos lo deseado.

■

Proposición 24 *Sea un anillo R tal que para cualquier módulo cíclico uniforme se satiface lo siguiente $yR < xR$, $ann(xR) \subset ann(yR)$ con $x, y \in R$. Entonces cualquier QI módulo N que no contiene submódulos libres es semisimple.*

Demostración. Por el Teorema (5) equivalencia (4), el módulo N contiene una suma directa esencial de submódulos cíclicos uniformes $xR < N$. Si xR no es simple entonces existe $0 \neq yR \subset xR$. Por hipotesis $ann(xR) \subset ann(yR)$ entonces $\widetilde{xR} \in \sigma[xR]$. Como xR es un *QI-Modulo* y $\widetilde{yR} \subseteq \widetilde{xR}$, se sigue que el módulo casi inyectivo $\widetilde{yR}$ es $\widetilde{xR}-$ *inyectivo*. Entonces $\widetilde{yR}$ es un sumando directo de $\widetilde{xR}$, por lo tanto $\widetilde{yR} = \widetilde{xR}$ (por ser xR uniforme) y así $ann(yR) = ann(\widetilde{yR}) = ann(\widetilde{xR})$. Esto contradice nuestra hipótesis, lo cual implica que cada xR es simple, entonces N contiene un submódulo esencial P simple. Como N es un *QI-Modulo* , P es $N-$ *inyectivo*, consecuentemente es un sumando directo de N. Por lo tanto $N = P$ es semisimple.

■

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Un poco de módulos singulares.

En el capitulo 2 se tiene un ejemplo de clases naturales que relaciona los módulos singulares y no singulares en *Mod*-$\mathbb{Z}$. En esta sección desarrollaremos un poco sobre estos objetos y así comprender mejor dicho ejemplo.

Definición 36 *Sean $M \in$ Mod-R y $m \in M$. Diremos que m es un elemento singular de M si $ann(m) \leq_{ess} R$. Al conjunto de los elementos singulares de M se denota $\mathcal{Z}(M)$.*

Definición 37 *Diremos que un módulo M es un módulo singular si $\mathcal{Z}(M) = M$ y M es un módulo no singular si $\mathcal{Z}(M) = 0$.*

Proposición 25 *$\mathcal{Z}(\_)$ es un prerradical.*

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{Z}(M) \leq M$.

i) $0 \in \mathcal{Z}(M)$

ii) Sean $m_1, m_2 \in \mathcal{Z}(M)$ entonces $ann(m_1), ann(m_2) \leq_{ess} R$, entonces $ann(m_1) \cap ann(m_2) \leq_{ess} R$. Por otro lado el $ann(m_1) \cap ann(m_2) \subset ann(m_1 + m_2)$. Entonces $ann(m_1 + m_2) \leq_{ess} R$. Por lo tanto $m_1 + m_2 \in \mathcal{Z}(M)$.

iii) Sean $r \in R$ distinto de cero y $m \in \mathcal{Z}(M)$, entonces $ann(m) \leq_{ess} R$. Queremos ver que $ann(mr) \leq_{ess} R$. Tomemos $s \in R - \{ann(mr)\}$, entonces $(mr)s = m(rs) \neq 0$. Como $ann(m) \leq_{ess} R$, existe $t \in R$ no cero tal que $m(rst) = 0$ y así $st \in ann(mr)$. Por lo tanto $ann(mr) \leq_{ess} R$, entonces $mr \in \mathcal{Z}(M)$.

Falta ver que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo, entonces $f(\mathcal{Z}(M)) \subseteq \mathcal{Z}(N)$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"'] & N \\ \mathcal{Z}(M) \arrow[u, hook] & \mathcal{Z}(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Sea $m \in \mathcal{Z}(M)$, entonces el $ann(m) \leq_{ess} R$. Como $ann(m) \subseteq ann(f(m))$ se tiene que $ann(f(m)) \leq_{ess} R$ y así $f(m) \in \mathcal{Z}(N)$ para toda $m \in \mathcal{Z}(M)$. Por lo tanto $f(\mathcal{Z}(M)) \subseteq \mathcal{Z}(N)$. Se concluye que $\mathcal{Z}(M)$ es un prerradical.

■

Proposición 26 *Un módulo N es no singular si y sólo si $Hom(M,N) = 0$ para todo módulo singular M.*

Demostración.
$\Rightarrow\sqsupset$ Sean $M, N \in$ *Mod*-R, singular y no singular respectivamente y un homomorfismo $f : M \longrightarrow N$. Entonces $f(M) = f(\mathcal{Z}(M)) \leq N = 0$ y por tanto $f = 0$
$\Leftarrow\sqsupset$ Suponemos que $Hom(M,N) = 0$ para todo módulo singular M, en particular para $\mathcal{Z}(N)$. Así el morfismo inclusión $u : \mathcal{Z}(N) \longrightarrow N$ es cero. Por lo tanto $\mathcal{Z}(N) = 0$.

■

Si R es un dominio entero, entonces todos los ideales no cero de R son esenciales. Además para cualquier M_R, $\mathcal{Z}(M) = \{m \in M \mid ann(m) \neq 0\}$ es justo el submódulo de torsión de M .
En particular si M es un módulo singular si y sólo si M es un módulo de torsión.

5.2. Más sobre retículas.

Teorema 9 *La retícula R-ptors es modular.*

Demostración. Sean $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{F} \in$ *R-ptors* con $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ Vamos a demostrar que

$$\mathcal{K} \vee (\mathcal{L} \wedge \mathcal{F}) = \mathcal{L} \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{F})$$

Es suficiente demostrar que $\mathcal{K} \vee (\mathcal{L} \wedge \mathcal{F}) \leq \mathcal{L} \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{F})$. ya que la otra desigualdad siempre se cumple. Sea $mR \in \mathcal{L} \wedge (\mathcal{K} \vee \mathcal{F})$. Escribiremos a $\mathcal{K} = \sigma[X]$ y $\mathcal{F} = \sigma[Y]$. Podemos hacerlo pues $\mathcal{K}, \mathcal{F} \in$ *R-ptors*. Así $\mathcal{K} \vee \mathcal{F} = \sigma[X] \bigoplus \sigma[Y] = \sigma[X \bigoplus Y]$ [1] Entonces $mR \in \mathcal{K} \vee \mathcal{F} = \sigma[X \oplus Y]$ por tanto existe $x_i + y_i \in X \oplus Y (i = 1, \cdots, n)$

[1] La igualdad se cumple por el Corolario 6.1.10 de CLASES OF MODULES de J. DAUNS y Y. ZHOU.

tales que

$$\bigcap_{i\in I}(ann(x_i)\bigcap ann(y_i)) = \bigcap_{i\in I} ann(x_i + y_i) \subset ann(m)$$

Definimos como $A = \cap_{i\in I} ann(x_i)$ y $B = \cap_{i\in I} ann(y_i)$. Así $A \bigcap B \subseteq ann(m)$. Como $\mathcal{K} \in R\text{-}ptors$ se sigue que $R/A \in \mathcal{K}$ y $R/B \in \mathcal{F}$. Además sabemos que $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$, lo cual implica que

$R/(A\bigcap ann(m)) \hookrightarrow R/A \oplus mR \in \mathcal{L}$ y por lo tanto $R/A(A\bigcap ann(m)+B) \in \mathcal{L}\wedge\mathcal{F}$

Entonces $R/[(A\bigcap ann(m)+B)] \hookrightarrow R/A \oplus R/(A\bigcap ann(m)+B) \in \mathcal{K}\vee(\mathcal{L}\wedge\mathcal{F})$

Pero $A\bigcap(A\bigcap ann(m) + B) = (A\bigcap ann(m)) + (A\cap B) \subseteq ann(m)$

Entonces $mR \cong R/ann(m) \in \mathcal{K}\vee(\mathcal{L}\wedge\mathcal{F})$. Por lo tanto $\mathcal{K}\vee(\mathcal{L}\wedge\mathcal{F}) \leq \mathcal{L}\wedge(\mathcal{K}\vee\mathcal{F})$.

■

Definición 38 *Sea $\mathcal{K}$ una clase pre-natural, entonces*

$$R\text{-}ptors(\mathcal{K}, R) = \{K\bigcap \tau \mid \tau \in R\text{-}ptors\}$$

Es importante mencionar que la clase $R\text{-}ptors(\mathcal{K}, R)$ es una retícula completa y además si $\mathcal{K} = Mod\text{-}R$ se tiene que $R\text{-}ptors(\mathcal{K}, R) = R\text{-}ptors$. Acontinuación se dará un resultado breve sobre esta nueva estructura.

Proposición 27 *Sea $\mathcal{K}$ una clase prenatural, entonces se cumple lo siguiente: Si $\mathcal{F}$ es una subclase de $\mathcal{K}$, tal que $\mathcal{F}$, es cerrada bajo submódulos, sumas directas y si para cualquier sucesión exacta izquierda $A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ con $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{K}$, se tiene que $B \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F} \in R\text{-}ptors(\mathcal{K}, R)$.*

Demostración.
Demostraremos que $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$. Claramente $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{F}}] \cap \mathcal{K}$. Sea $X \in d(M_{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{K}$, entonces existe un subconjunto de índices I y un submódulo C de $M_{\mathcal{F}}^{(I)}$ tal que $X \hookrightarrow M_{\mathcal{F}}^{(I)}/C$. Reescribiendo a $X \cong A/\mathcal{F}$ donde A es un submódulo de $M_{\mathcal{F}}^{(I)}$.Como $M_{\mathcal{F}}^{(I)} \in \mathcal{F}$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $A/C \in \mathcal{F}$ y así $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ Por lo tanto $\mathcal{F} \in \tau_r^p(\mathcal{K}, R)$.

■

Lema 16 *Para cualquier* $\mathcal{K}_i \in \mathcal{N}(R), (i = 1, 2)$ *y cualquier clase pre-natural* $\mathcal{L}$*; se sigue que* $(\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) \wedge \mathcal{L} = (\mathcal{K}_1 \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \mathcal{L})$

Demostración. Sean $\mathcal{L} = \sigma[M]$ (clase de pretorsión hereditaria) y $A \in (\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) \wedge \sigma[M]$. Entonces $A \in \sigma[M]$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Dónde $B \in \mathcal{K}_1$ y $C \in \mathcal{K}_2$. Entonces $B \in \mathcal{K}_1 \wedge \sigma[M]$ y $C \in \mathcal{K}_2 \wedge \sigma[M]$, como $\mathcal{N}$(R,M) es una subretícula de $\mathcal{N}^p$(R.M) se sigue que $(\mathcal{K}_1 \wedge \sigma[M]) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \sigma[M])$ es una clase *M-natural* y por tanto $A \in (\mathcal{K}_1 \wedge \sigma[M]) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \sigma[M])$. Por el lema anterior se tiene que para una clase pre-natural $\mathcal{L}$ se puede escribir como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cap \sigma[M]$ para algún módulo M y $\mathcal{L}_0$ es una clase *M-natural* . Entonces:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) \wedge \mathcal{L} &= \{(\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) \wedge \mathcal{L}_0\} \vee \sigma[M] \\
&= \{(\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{L}_0)(\mathcal{K}_2 \wedge \mathcal{L}_0)\} \wedge \sigma[M](porserdistributiva\mathcal{N}(R)) \\
&= (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{L}_0 \wedge \sigma[M]) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \mathcal{L}_0 \wedge \sigma[M]) \\
&= (\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \mathcal{L})
\end{aligned}$$

Por lotanto $(\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2) \wedge \mathcal{L} = (\mathcal{K}_1 \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K}_2 \wedge \mathcal{L})$

■

Notación.

R	Es un anillo asociativo con identidad.
Mod-R	Es la categoría de R-módulos.
$ann(x)$	Es el anulador derecho para $x \in M$
$Ann(X)$	Es el anulador derecho para un subconjunto X de M.
$L(R)$	Es la retícula de ideales derechos de R.
$\sigma[\mathbf{M}]$	Denota a la categoría llena de *Mod-R* subgenerada por M.
$E(M)$	La cápsula inyectiva de M es *Mod-R*
$E_M(N)$	La cápsula $M-inyectiva$ de N en $\sigma[M]$
R-ptors	Es la colección de clases de pretorsión hereditaria.
M-ptors	El conjutno de todas las clases de pretorsion contenidas en $\sigma[M]$.
$\mathcal{N}(R)$	Es colección de todas las clases naturales.
$\mathcal{N}(R,M)$	Denota a la colección de todas las clases M-naturales.
$\mathcal{N}^p(R,M)$	Es colección de todas las clases pre-naturales.
$Gdim(M)$	La dimensión de Gabriel de un módulo M
$\mathcal{U}$	La clase de modulos que tienen dimension de Gabriel.
μ	Es un prerradical exacto izquierdo correspondiente a una clase de pretorsion hereditaria $\mathcal{U}$.
μ_M	Es un prerradical exacto izquierdo correspondiente a una clase de pretorsion hereditaria $\sigma[M] \cap \mathcal{U}$
$\Lambda = End_R(E(N))$	Es el anillo de endomorfismos de la cápsula inyectiva para un módulo N
$\Lambda = End_R(E_M(N))$	Es el anillo de endomorfismos de la capsula M-*inyectivo* para un módulo N

Bibliografía

[1] Dauns, J. and Zhou Y. (2006) *Classes of Modules*, Chapman and Hall.

[2] Dauns, J. (2000) *Sublattices of the Lattice of Pre-natural Classes of Modules*, Journal of Algebra 231; pp 138-162

[3] Dauns, J. and Zhou Y. (2008) *QI-Modules*, Modules and Comodules Trends in Mathematics 2008, pp 173-183.

[4] Lam, T.Y. (1999) *Lectures on Modules and Rings*, GTM, Berlin-Heidelberg-NewYork:Springer Verlag.

[5] Anderson F. and Fuller R. (1991) *Rings and Category of Modules*, GTM, Berlin-Heidelberg-NewYork:Springer Verlag.

[6] Nastasescu C. and Oystaeyen F. (1087) *Dimension of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company.

[7] Stenström, B. (1975) *Rings of Quotients.* GTM, Berlin-Heidelberg-NewYork:Springer Verlag.

[8] Wisbauer R. (1991) *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading.

[9] Zhou Y. (1999) *The lattice of pre-natural classes of modules*, Journal of Pure and Applied Algebra 140, pp 173-183