



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupos fuchsianos finitamente generados y puntos de aproximación

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
RAYBEL ANDRÉS GARCÍA ANCONA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS

MÉXICO, D. F., JUNIO DE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

1. Preliminares	1
2. Grupos finitamente generados	11
2.1. Teorema de Poincaré	11
2.2. Grupos finitamente generados	21
3. Puntos de aproximación	43

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y hermanos por todo el apoyo, paciencia y confianza que me han brindado para ir en búsqueda de las metas que me puse. Gracias por depositar su fe en mí, por estar a mi lado y por todo el cariño que me han brindado, simplemente no habría podido llegar hasta este punto sin ustedes.

Agradezco al doctor Antonio Lascurain Orive, por sus enseñanzas, por su apoyo y confianza que me ha brindado y por su importante guía a lo largo de este tiempo.

Agradezco al profesor Luis Alberto Briseño Aguirre, por brindarme la oportunidad de iniciar mi desarrollo en el área de la enseñanza y por la confianza que ha depositado en mí.

Finalmente, agradezco a toda la gente que he conocido y con quien he compartido muchos momentos, circunstancias, ideas, pensamientos y sentimientos. No podría mencionar a todos sin pensar que quizás me olvidé de alguien, espero y sé que no se molestarán si no encuentran explícitamente su nombre aquí. A todas esas personas, agradezco haberme permitido compartir un fragmento de su vida y de la mía.

Introducción

La geometría hiperbólica en su relación con la teoría de los grupos fuchsianos y kleinianos ha sido desarrollada intensamente en las últimas décadas. Su importancia radica en su relación con muchas ramas de la matemática y algunas de la física. En particular, los trabajos de Thurston y Jørgensen la relacionan con la topología de las variedades de dimensión 3, al mostrar que casi todas éstas tienen estructura hiperbólica (cf. [4]). Es copiosa la investigación que se ha desarrollado en esta área en los años recientes (cf. [8] y [7]). Uno de los resultados claves en el desarrollo de la geometría hiperbólica tridimensional es el teorema de finitud de Ahlfors que describe el cociente del dominio de discontinuidad de un grupo kleiniano finitamente generado en la esfera de Riemann, estableciendo que tiene un número finito de componentes (cf. [8]).

En esta tesis se trabaja en el caso bidimensional fuchsiano, uno de los resultados principales es una versión bidimensional del teorema de finitud de Ahlfors. Cabe señalar que el caso fuchsiano es de gran importancia tanto en el estudio de las variedades de dimensión 3, como en otras áreas, como por ejemplo la teoría de los números, véase por ejemplo [7]. Varios de los resultados que se prueban en esta tesis, han sido probados también en dimensiones mayores, con ciertas restricciones (véase [11]). En la primera parte de esta tesis se presenta a grandes rasgos la prueba del teorema de Poincaré. Este teorema permite mostrar un ejemplo donde se verifica que existen regiones fundamentales que en su frontera contienen una geodésica con un número infinito de lados, véase el ejemplo posterior al Teorema 2.1.1. Uno de los teoremas centrales de la tesis establece que un grupo fuchsiano no elemental es finitamente generado si y sólo si todo polígono fundamental convexo tiene una cantidad finita de lados (Teorema 2.2.9). Se muestra también que estas condiciones son equivalentes a que el área de cualquier región fundamental intersecada con la región de Nielsen es finita. La prueba de este hecho

es sofisticada y larga, además requiere de varios resultados correspondientes a condiciones de existencia y áreas de los polígonos hiperbólicos, asimismo hechos sobre polígonos fundamentales convexos como los ángulos de los ciclos de vértices y propiedades de los polígonos de Dirichlet. Finalmente, se usan también los teoremas de convergencia dominada y monótona de teoría de la medida. La estrategia de la prueba utiliza propiedades de la región de Nielsen. En la segunda parte de la tesis se determina que tan rápido en términos euclidianos converge una sucesión de puntos a un punto límite. Esto motiva la definición de punto de aproximación, que es el punto en donde el grado de convergencia es más rápido. Se demuestra que los puntos fijos parabólicos no son de aproximación. Se prueba que un punto de aproximación no pertenece a la frontera de un polígono fundamental convexo (Teorema 3.0.13). El segundo teorema central de la tesis establece que un grupo G es finitamente generado si y sólo si el conjunto límite se bifurca, es decir, que todo punto límite es punto fijo parabólico o punto de aproximación (Teorema 3.0.14). En la prueba de este teorema, se demuestra que si el conjunto límite se bifurca, entonces todo polígono fundamental convexo tiene un número finito de lados. En consecuencia, estos hechos permiten concluir la prueba del Teorema 2.2.9, ya que se muestra que si existe un polígono fundamental convexo con un número finito de lados, entonces G es finitamente generado y, por tanto, el conjunto límite se bifurca lo cual implica que todo polígono fundamental convexo tiene un número finito de lados. Finalmente, se presenta un ejemplo de un grupo cuyo polígono fundamental tiene un número infinito de lados y en consecuencia, no es finitamente generado, y también se exhibe un punto límite de dicho polígono que no es fijo parabólico ni tampoco es de aproximación

CAPÍTULO 1

Preliminares

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados con los que se estará trabajando. Daremos una breve descripción de la proyección estereográfica, las transformaciones de Möbius complejas, su clasificación, así como algunos resultados de métrica hiperbólica. No probaremos estos resultados, la mayoría de estas demostraciones se pueden consultar en [2] y algunas otras en [5]. Se mencionan algunas propiedades de los grupos fuchsianos y se definen los dominios fundamentales.

Primero encajamos el plano complejo \mathbb{C} , en \mathbb{R}^3 en forma natural asignando a $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, el punto $(x, y, 0)$.

Definición 1 *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido denotado por $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Éste puede ser asociado biyectivamente con la esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

llamada de Riemann. Para esto se proyecta el polo norte de \mathbb{S}^2 a cualquier otro punto (x_1, x_2, x_3) en dicha esfera y se asocia al punto donde la recta interseca al plano complejo obteniéndose la función

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

La función inversa esta dada por:

$$z \longmapsto \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Asociando el polo norte con ∞ se obtiene una biyección de \mathbb{S}^2 en $\widehat{\mathbb{C}}$ llamada proyección estereográfica (cf. [5]). Esta biyección permite establecer la continuidad en funciones definidas en $\widehat{\mathbb{C}}$, para esto se define la métrica cordal.

Definición 2 Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente forma:

$$d_{\mathbb{C}}(z, z') = \begin{cases} \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}} & \text{si } z, z' \in \mathbb{C}, \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } z' = \infty. \end{cases}$$

Definición 3 Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tales que $ad - bc \neq 0$, se define una transformación en $\widehat{\mathbb{C}}$ como sigue:

a) Si $c \neq 0$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } z \neq 0, z \neq \frac{-d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

b) Si $c = 0$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{d} & \text{si } z \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Estas transformaciones llamadas de Möbius son continuas con la métrica cordal y pueden definirse por matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

Este grupo de matrices se denota por $SL(2, \mathbb{C})$. El centro de este grupo está conformado por las matrices $\pm Id$. Al cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su

centro se le conoce como su proyectivización y se denota por $PSL(2, \mathbb{C})$, el cual es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. Podemos clasificar a las transformaciones de Möbius considerando sus puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 4 *Una transformación de Möbius T es parabólica, si fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Cualquier transformación parabólica es conjugada a una traslación.

Definición 5 *Sea una transformación de Möbius T , que es conjugada a $z \mapsto kz$, $k \neq 0, 1$. Se dice que T , es:*

- a) *elíptica, si $|k| = 1$,*
- b) *hiperbólica, si $k \in \mathbb{R}^+$,*
- c) *loxodrómica, si $|k| \neq 1$ y $k \in \mathbb{R}^+$.*

Otra forma de clasificar las transformaciones de Möbius es mediante su traza.

Definición 6 *Sea T una transformación de Möbius dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

definimos el cuadrado de la traza como:

$$\chi^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc}.$$

Teorema 1.0.1 *Sea una transformación de Möbius T , $T \neq Id$, χ^2 el cuadrado de su traza. Entonces*

- a) *T es parabólica $\iff \chi^2 = 4$,*
- b) *T es elíptica $\iff 0 \leq \chi^2 < 4$,*
- c) *T es hiperbólica $\iff 4 < \chi^2 < \infty$,*
- d) *T es loxodrómica $\iff \chi^2 \notin \mathbb{R}^+$.*

El subgrupo de las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ con entradas reales se le denota por $SL(2, \mathbb{R})$. El cociente de $SL(2, \mathbb{R})$ sobre su centro se denota por $PSL(2, \mathbb{R})$. Un modelo del plano hiperbólico es el semiplano complejo superior denotado por $\mathbb{H}^2 = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$. Resulta que las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{H}^2 son precisamente aquellas definidas por $PSL(2, \mathbb{R})$ (cf. [5] p. 32).

Otro modelo del plano hiperbólico es el disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

llamado de Beltrami-Poincaré. Resulta que las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan el disco unitario Δ son de la forma

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Al subgrupo de transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan Δ se les denotará por $M(\Delta)$. Para definir las métricas que se utilizarán en estos dos modelos se introduce el concepto de densidad.

Definición 7 Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua

$$\nu : A \mapsto \mathbb{R}^+.$$

Dada una densidad en una región A y ξ una curva de clase \mathcal{C}^1 en A se define la ν -longitud de ξ como

$$\lambda_\nu(\xi) = \int_a^b \nu(\xi(t)) |\xi'(t)| dt, \quad \text{donde } \xi : [a, b] \mapsto A.$$

Esta definición se extiende a curvas de clase \mathcal{C}^1 por tramos. La distancia definida anteriormente permite medir la distancia entre puntos.

Definición 8 Sea ν una densidad en una región A y z_1, z_2 puntos en A ; definimos la distancia $\rho_\nu(z_1, z_2)$ como

$$\rho_\nu(z_1, z_2) = \inf \lambda_\nu(\xi),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas ξ de clase \mathcal{C}^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Se puede probar que esta distancia define una métrica cf. [5]. La métrica hiperbólica en \mathbb{H}^2 está definida por la densidad

$$\nu(z) = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}.$$

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como un grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica. A las curvas que minimizan la distancia en \mathbb{H}^2 se les llama geodésicas y son los círculos o rectas que son ortogonales al eje real.

Por otro lado, la métrica hiperbólica en Δ está definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}.$$

Se puede verificar que la transformación de Cayley

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

es una isometría entre \mathbb{H}^2 y Δ (cf. [5], pp. 33-34). De esta forma, denotaremos al plano hiperbólico (\mathbb{H}^2 o Δ) por \mathbb{P} .

Definición 9 Sea Γ un subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$. Se dice que Γ es discreto si no existe una sucesión de matrices $A_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$ distintas tales que $A_n \rightarrow B \in SL(2, \mathbb{C})$. Se dice que un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto, si está determinado por un subgrupo discreto en $SL(2, \mathbb{C})$.

Por otra parte, se dice que $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite con respecto a un subgrupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, si existen $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $T_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $T_n(z) \rightarrow w$ cuando $n \rightarrow \infty$, denotaremos al conjunto de puntos límite respecto a Γ por $\Lambda(\Gamma)$, mientras que

$$\mathbb{O}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$$

denotará el llamado conjunto ordinario con respecto a Γ . Un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ se dice que es discontinuo si $\mathbb{O}(\Gamma) \neq \emptyset$.

Un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ se le llama fuchsiano si es discreto y preserva un “disco” (disco o semiplano). Un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ se llama kleiniano. Para el caso de $PSL(2, \mathbb{R})$, un subgrupo Γ es discreto, si y sólo si Γ es discontinuo. Esto no se cumple en $PSL(2, \mathbb{C})$ (cf. [5] pp. 102-104). El grupo de Picard es discreto y no es discontinuo en $\widehat{\mathbb{C}}$

Decimos que Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ actúa discontinuamente en una región $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$, si para todo compacto $K \subset A$ se cumple que

$$g(K) \cap K \neq \emptyset$$

sólo para un número finito de elementos $g \in \Gamma$.

Dado un grupo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ actuando en una región A de $\widehat{\mathbb{C}}$, es importante considerar conjuntos que contengan un representante de cada órbita, a dichos conjuntos se les conoce como *conjuntos fundamentales*, es decir, un conjunto fundamental R satisface que

- a) Si $z_1, z_2 \in R$ no existe $T \in \Gamma$, tal que $T(z_1) = z_2$;
- b) Para todo $z \in A$ existe $T \in \Gamma$, tal que $T(z) \in R$.

Un hecho que hay que destacar es que estos conjuntos no pueden ser abiertos (cf. [5] pp. 131-133), es por esto que damos una definición en la cual se trabaje siempre con abiertos o cerrados.

Definición 10 Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$, se dice que una región R es un dominio fundamental en \mathbb{H}^2 para G , si se cumple que

- 1.- ∂R tiene medida cero,
- 2.- cualesquiera dos puntos $w_1, w_2 \in R$ no son G -equivalentes,
- 3.- dado $z \in \mathbb{H}^2$, existe $w \in \widetilde{R}$ y $T \in G$, tal que $T(w) = z$, donde \widetilde{R} denota la cerradura de R en \mathbb{H}^2 .

Por otra parte, si consideramos una región $R \in \mathbb{P}$, se define su área hiperbólica como la integral de Lebesgue

$$\int_R \frac{d\mu}{(Imz)^2}.$$

Un hecho importante es que el área hiperbólica de regiones en \mathbb{P} es invariante bajo transformaciones de $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir, para una región R y $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene que

$$\int_R \frac{d\mu}{(Imz)^2} = \int_{T(R)} \frac{d\mu}{(Imz)^2}.$$

Ahora, sea G un grupo fuchsiano actuando en el plano hiperbólico \mathbb{P} y w un punto no fijo para cualquier transformación g de G ($g \neq Id$). Para cada g en G , definamos los siguientes conjuntos

$$L_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) = \rho(z, g(w))\}, \quad (1.1)$$

$$H_g(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(z, g(w))\}, \quad (1.2)$$

Notemos que $L_g(w)$ es una geodésica que resulta ser el *h-bisector* perpendicular del segmento $[w, g(w)]$ (véase [5] p. 136), además $\mathbb{P} - L_g$ consiste en dos semiplanos hiperbólicos, uno de ellos contiene a w y es justamente $H_g(w)$ (véase la Figura 1.1).

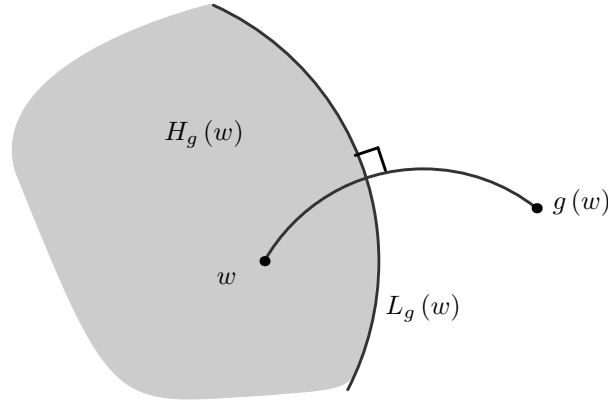


Figura 1.1: *h*-bisector de $[w, g(w)]$

Obsérvese que $H_g(w)$ consiste de aquellos puntos que están más cerca de w que de $g(w)$.

Definición 11 *El polígono de Dirichlet $D_G(w)$ para G con centro en w se define como*

$$D_G(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g(w), \quad g \in G.$$

La notación abreviada para $D_G(w)$ es $D(w)$. A este polígono también se le conoce como de Poincaré o normal para G .

Notemos que $D(w)$ es el conjunto de puntos en \mathbb{P} que están más cerca de w que de $g(w)$ para toda $g \in G$, $g \neq Id$, es decir,

$$D(w) = \{z \in \mathbb{P} \mid \rho(z, w) < \rho(z, g(w)), g \in G, g \neq Id\}.$$

Nótese que $w \in D(w)$, por lo cual $D(w)$ es no vacío, además es h -convexo, ya que para toda $g \in G$, $g \neq Id$, $H_g(w)$ es h -convexo, esto es claro si $H_g(w)$ coincide con el primer cuadrante (en \mathbb{H}^2), y el caso general se sigue ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodésicas.

Un dominio fundamental R para un grupo G se dice que es localmente finito si y sólo si, para cualquier compacto $K \subset \mathbb{P}$ se tiene que

$$K \cap g(\tilde{R}) \neq \emptyset$$

para un número finito de elementos $g \in G$. En el siguiente capítulo trataremos con polígonos hiperbólicos fundamentales convexos.

Definición 12 Sea \mathbb{P} el plano hiperbólico (\mathbb{H}^2 o Δ). Un subconjunto R de \mathbb{P} es un polígono convexo si es la intersección a lo sumo numerable de semiplanos.

Definición 13 Sean R un polígono convexo y G un grupo fuchsiano. Un lado de R es un segmento de geodésica de la forma $\tilde{R} \cap g(\tilde{R})$ de longitud positiva. Un vértice de R es un punto de la forma $\tilde{R} \cap g(\tilde{R}) \cap h(\tilde{R})$, donde $g \neq h$ y ambas transformaciones son distintas de la identidad.

Definición 14 Sea R un polígono fundamental convexo para un grupo fuchsiano G . Se dice que $g \in G$, es un apareamiento, si $g(\tilde{R}) \cap \tilde{R} \neq \emptyset$ y $g(s) = s'$, donde s y s' son lados de R .

Se puede verificar que el polígono de Dirichlet es un polígono fundamental convexo. Una prueba de este hecho aparece en [2], pp. 227-228 y con más detalle en [13], pp. 12-14.

Para el siguiente resultado, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 15 Sea P un polígono fundamental convexo. Un ciclo C en \tilde{P} es la intersección de una G -órbita con \tilde{P} . Un ciclo necesariamente es un conjunto finito $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ y la longitud de C (denotada por $|C|$) es n .

Definición 16 Sea C un ciclo en un polígono fundamental convexo y θ_j el ángulo en el punto z_j . Definimos la suma de los ángulos del ciclo C como

$$\theta(C) = \theta_1 + \dots + \theta_n$$

Teorema 1.0.2 *Sea G un grupo fuchsiano y sea $D(w)$ el polígono de Dirichlet con centro en w . Entonces, para casi todas las elecciones de w se tiene lo siguiente:*

- a) *Todo vértice impropio que es punto ordinario está en un ciclo de longitud 2.*
- b) *Todo vértice propio está en un ciclo de longitud 1 y es un punto fijo parabólico.*

Una prueba de este resultado aparece en [2], pp. 234 y para más detalle en [13]. Las transformaciones de Möbius que no fijan ∞ , actúan euclidianamente en un único círculo llamado isométrico, es decir, la distancia euclidiana entre cualesquiera par de puntos de ese círculo es la misma que la de sus imágenes.

Definición 17 *Sea*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad c \neq 0,$$

una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, se define el círculo isométrico de T , denotado por $I(T)$, como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |T'(z)| = 1\}.$$

Equivalentemente, este conjunto consiste en aquellos puntos donde el factor de conformalidad es 1.

El siguiente resultado exhibe cómo el círculo isométrico describe la acción geométrica de una transformación de Möbius, cuya prueba aparece en [5], pp. 159-160.

Teorema 1.0.3 *Sea T una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que no fija a ∞ . Entonces*

1. $T(I(T)) = I(T^{-1})$;
2. $T(\text{int } I(T)) = \text{ext } (I(T^{-1}))$;
3. $T(\text{ext } I(T)) = \text{int } (I(T^{-1}))$

CAPÍTULO 2

Grupos finitamente generados

2.1. Teorema de Poincaré

Dado G un grupo discreto actuando en el plano hiperbólico \mathbb{P} (\mathbb{H}^2 o Δ), se puede construir un polígono fundamental convexo R . El teorema de Poincaré es el recíproco de este proceso, esto es, si existe R un polígono en \mathbb{P} , y que admite transformaciones de Möbius que aparean los lados de R y bajo ciertas condiciones, si G es el grupo generado por dichos apareamientos, G es discreto y R es un dominio fundamental de G .

Presentamos una idea intuitiva de la demostración de este Teorema, cuyos detalles pueden verificarse en el libro de Alan Beardon [2].

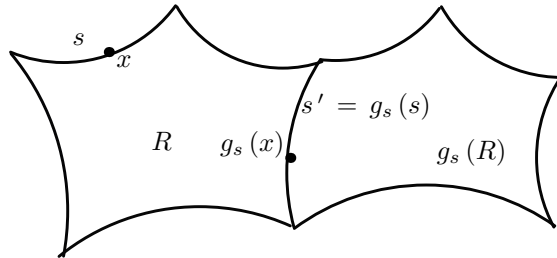


Figura 2.1: Identificación de (Id, s') con (g_s, s)

Sea R un polígono convexo en \mathbb{P} y suponemos que para todo s lado de R existe un único lado s' de R y un único apareamiento g_s , tal que $g_s(s) = s'$, además el apareamiento asociado a s' es g_s^{-1} . Sea G el grupo generado por los apareamientos. Consideraremos el conjunto $G \times \tilde{R}$ como una colección de copias ajenas de \tilde{R} numerada por G , esto es

$$(g_i, \tilde{R}) = \{(g_i, x) \mid x \in \tilde{R}\},$$

donde $g_i \in G$. Luego, unimos estas copias de \tilde{R} en $G \times \tilde{R}$, para lo cual, definimos una relación de equivalencia, partiendo de la idea de que si se tiene que $g_s(s) = s'$, entonces (Id, s') debe identificarse con (g_s, s) (véase la Figura 2.1).

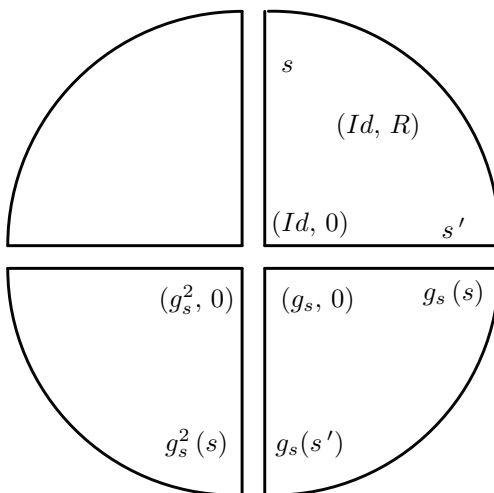


Figura 2.2: Relación entre $(Id, 0)$ y $(g_s^2, 0)$

Definición 18 $(g, x) \sim (h, y)$ si

- i) $g = h$ y $x = y$ ó
- ii) $x \in s$, $y = g_s(x)$ y $g = hg_s$.

Nótese que esta relación es reflexiva y simétrica, pero no es transitiva. Por ejemplo, consideremos $g_s(z) = -iz$ en Δ y S el sector superior derecho de Δ . Sea

$$s = \{z \in \Delta \mid Im z \geq 0, Re z = 0\}$$

y $s' = [0, 1]$. Obsérvese que g_s fija el 0 y $g_s(s) = s'$. Se tiene que $(Id, 0) = (Id, g_s(0)) \sim (g_s, 0)$. Además, $(g_s, 0) = (g_s, g_s(0)) \sim (g_s^2, 0)$. Sin embargo $(Id, 0)$ no se relaciona con $(g_s^2, 0)$ (Véase Figura 2.2). Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 19 $(g, x) * (h, y)$ si existe (g_i, x_i) , donde

$$x_i \in \tilde{R}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

tal que

$$(g, x) = (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y).$$

Las clases de equivalencia definidas por $*$ se denotan por $\langle g, x \rangle$ y el conjunto de clases por \mathbb{P}^* . Por otra parte, cada $f \in G$ induce una función $f^* : \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}^*$, definida por $f^* \langle g, x \rangle = \langle fg, x \rangle$, que resulta ser una biyección; al grupo de estas biyecciones se le denota por G^* . Denotamos por

$$\langle \tilde{R} \rangle = \{ \langle I, x \rangle \mid x \in \tilde{R} \}.$$

Nótese que esta acción de G^* en $\langle \tilde{R} \rangle$ tesela \mathbb{P}^* , es decir

$$\bigcup_{g^*} g^* \langle \tilde{R} \rangle = \mathbb{P}^*$$

y si $g^* \neq h^*$

$$g^* \langle \tilde{R} \rangle \cap h^* \langle \tilde{R} \rangle = \emptyset.$$

Definimos la función $\alpha : \mathbb{P}^* \rightarrow \mathbb{P}$, tal que $\alpha \langle g, x \rangle = g(x)$. También definimos las siguientes transformaciones

$$\beta : G \times \tilde{R} \rightarrow \mathbb{P}^*, \quad \beta(g, x) = \langle g, x \rangle$$

y

$$\gamma : G \times \tilde{R} \rightarrow \mathbb{P}, \quad \gamma(g, x) = g(x).$$

Obsérvese que $\gamma = \alpha \beta$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times \tilde{R} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}^* \\ & \searrow \gamma & \swarrow \alpha \\ & & \mathbb{P} \end{array}$$

Ahora, nótese que si α es suprayectiva, entonces

$$\bigcup_{g \in G} g(\tilde{R}) = \mathbb{P},$$

y que si α es inyectiva, se tiene que para toda $g, h \in G$ tal que $g \neq h$, $g(R) \cap h(R) = \emptyset$. Obsérvese que demostrar que α es biyectiva es el objetivo central de la prueba, ya que esto implica que \tilde{R} es un polígono fundamental para G y por lo tanto, el conjunto ordinario es no vacío, es decir, el grupo es discreto. (cf. [5] p. 102).

Ahora, si definimos en G la topología discreta, en $G \times \tilde{R}$ la topología producto y en \mathbb{P}^* la topología cociente, entonces β y γ son continuas y, por tanto, α también lo es.

Lo siguiente es establecer una condición referente a los polígonos alrededor de los vértices tal que las imágenes de R alrededor de un vértice no se traslapen. Para expresar dicha condición en forma concreta, suponemos que

$$\langle Id, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\},$$

por lo que alguna $(g_i, x_i) = (Id, x)$ y se puede suponer

$$g_1(x_1) = g_2(x_2) = \dots = g_n(x_n) = Id(x) = x.$$

Si definimos

$$N_j^\epsilon = \{y \in \tilde{R} \mid d(y, x_j) < \epsilon\},$$

como las g_j son isometrías, se tiene que $g_j(N_j^\epsilon) \subset B(x, \epsilon)$. Entonces, para toda ϵ suficientemente pequeña se quiere que el conjunto de las $g_j(N_j^\epsilon)$ te-sele $B(x, \epsilon)$, esto es, que las $g_j(N_j^\epsilon)$ no se traslapen en sus interiores y que $\bigcup g_i(N_i^\epsilon)$ cubra $B(x, \epsilon)$. Esto sugiere la siguiente hipótesis.

I. Cada $x \in \tilde{R}$ tiene una clase de equivalencia finita

$$\langle Id, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$$

y para toda ϵ suficientemente pequeña,

$$\bigcup_{i=1}^n g_i(N_i^\epsilon) = B(x, \epsilon).$$

Además, para cada $w \in B(x, \epsilon)$, el conjunto de puntos de $\bigcup (g_i, N_i^\epsilon)$ que son transformados por γ en w es una clase de equivalencia.

Ahora, si denotamos por

$$W_x^\epsilon = \bigcup_j (g_j, N_j^\epsilon) \quad y \quad V_x^\epsilon = \beta(W_x^\epsilon),$$

se tiene que la condición **I** implica que $\gamma(W_x^\epsilon) = B(x, \epsilon)$ y también que W_x^ϵ es una unión de clases de equivalencia. También, se puede verificar que \mathbb{P}^* es Hausdorff y conexo, y que toda $x^* \in \mathbb{P}^*$ tiene una vecindad abierta de la forma $f^*(V_x^\epsilon)$ tal que la restricción de α a $f^*(V_x^\epsilon)$ es un homeomorfismo local de $f^*(V_x^\epsilon)$ sobre un conjunto abierto.

Por otra parte, podemos reescribir la condición **I** de una forma más simple. Si $x \in R$, elegimos ϵ tal que el disco abierto D con centro en x y radio ϵ esté contenido en R . Para cada $y \in D$, la clase de equivalencia $\langle Id, y \rangle$ contiene sólo a (Id, y) y la condición **I** se cumple. Si x está en el interior de un lado S , entonces x está en un único lado de R y se sigue que $\langle Id, x \rangle$ contiene precisamente a (Id, x) y $(g_s^{-1}, g_s(x))$. Escribimos

$$(Id, x) = (g_1, x_1) \quad y \quad (g_s^{-1}, g_s(x)) = (g_2, x_2).$$

Sea ϵ tal que $B(x, \epsilon) \cap \partial \tilde{R} \subset S$ y sean

$$N_1^\epsilon = \{y \in \tilde{R} \mid d(y, x_1) < \epsilon\},$$

$$N_2^\epsilon = \{y \in \tilde{R} \mid d(y, x_2) < \epsilon\}$$

y

$$W_x^\epsilon = (g_1, N_1^\epsilon) \cup (g_2, N_2^\epsilon),$$

entonces

$$B(x, \epsilon) = g_1(N_1^\epsilon) \cup g_2(N_2^\epsilon) \tag{2.1}$$

por lo que, nuevamente, se cumple la condición **I** (véase la Figura 2.3). Así, la condición **I** se puede reescribir (considerando solo los vértices) de la siguiente forma.

I'. Para cada vértice x de R , existen vértices $x_0 (= x), x_1, \dots, x_n$ de R y elementos $f_0 (= Id), f_1, \dots, f_n$ de G tal que los conjuntos $f_i(N_i^\epsilon)$ no se traslapan en sus interiores y $\bigcup f_i(N_i^\epsilon) = B(x, \epsilon)$, donde f_{j+1} es de la forma $f_j g_s$ para toda $j \in \{1, \dots, n\}$ y g_s un apareamiento.

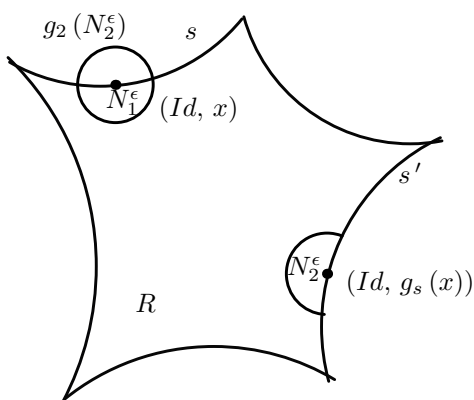


Figura 2.3: $B(x, \epsilon) = g_1(N_1^\epsilon) \cup g_2(N_2^\epsilon)$

Por último suponemos la siguiente hipótesis.

II. Existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $x \in \tilde{R}$, existe una rama monovaluada de α^{-1} en $B(x, \epsilon)$.

Esta condición nos permite establecer que α es una proyección cubriente: sea $z_1 \in \mathbb{P}$ y consideramos la curva $\psi : I \rightarrow \mathbb{P}$ que une $z \in \tilde{R}$ con z_1 . Sea $B(z, \frac{\epsilon}{2})$, donde ϵ satisface I' y II, y $r_1 \in \partial B(z, \frac{\epsilon}{2}) \cap \psi(I)$ es el primer punto de ψ que sale de $B(z, \frac{\epsilon}{2})$ en dirección de z_1 . De esta forma, como $\alpha^{-1}(B(z, \frac{\epsilon}{2}))$ tiene una rama monovaluada, existe un abierto M_0 en \mathbb{P}^* tal que

$$\alpha(M_0) = B\left(z, \frac{\epsilon}{2}\right),$$

lo que implica que el segmento de ψ que une z con r_1 se puede levantar a una curva en \mathbb{P}^* que une $\langle Id, z \rangle$ con $\langle g_1, r_1 \rangle$. Ahora, tomamos $t_1 \in \tilde{R}$ tal que $g_1(t_1) = r_1$, para alguna g_1 . Se tiene que $\alpha^{-1}(B(t_1, \frac{\epsilon}{2}))$

tiene una rama monovaluada por lo que existe un abierto M_1 en \mathbb{P}^* tal que $\alpha(M_1) = B(t_1, \frac{\epsilon}{2})$, pero dado que \mathbb{P}^* tiene la topología cociente se sigue que existe un abierto $U_1 \subset G \times \tilde{R}$, tal que $\beta(U_1) = M_1$ y de esta forma se tiene que

$$\alpha(g_1^*(M_1)) = B\left(g_1(t_1), \frac{\epsilon}{2}\right),$$

lo que implica que $\alpha^{-1}(B(g_1(t_1), \frac{\epsilon}{2}))$ tiene una rama monovaluada en \mathbb{P}^* . Repitiendo este proceso, como la distancia de z a z_1 es finita, entonces ψ se puede levantar a una curva $\bar{\psi}$ en \mathbb{P}^* tal que $\alpha(\bar{\psi}) = \bar{\psi}$, en particular, existe $\langle g_n, t_n \rangle$ en \mathbb{P}^* tal que

$$\alpha(\langle g_n, t_n \rangle) = g_n(t_n) = z_1,$$

por lo que α es una proyección cubriente (véase Figura 2.4).

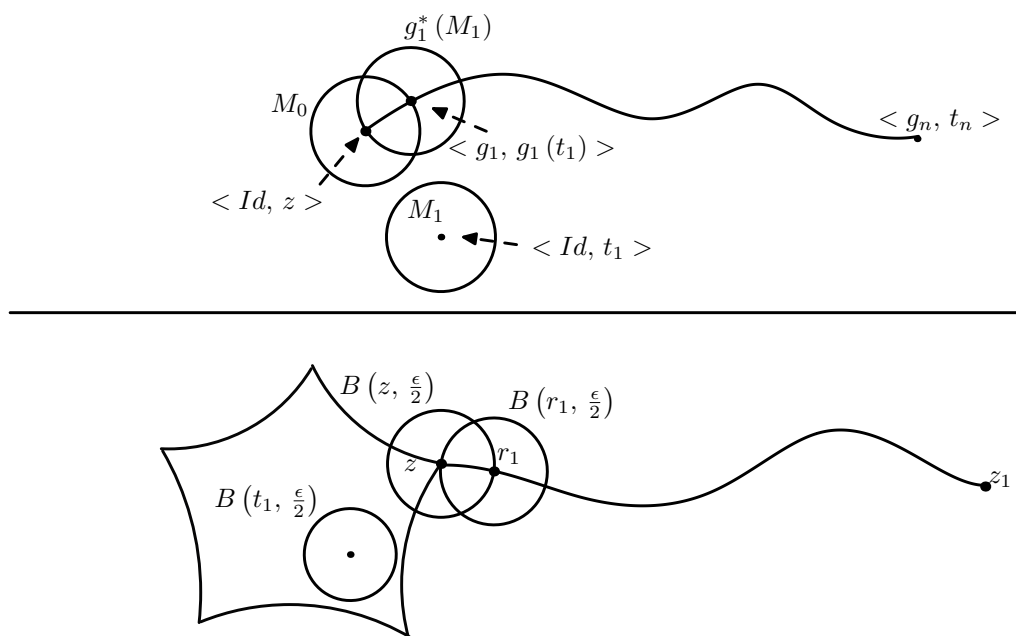


Figura 2.4: α es proyección cubriente

Además, α es inyectiva, ya que, si $x_1, x_2 \in \mathbb{P}^*$ tal que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ en \mathbb{P} y consideramos una curva ϕ que une x_1 con x_2 , entonces $\alpha(\phi)$ es una curva cerrada en $\alpha(x_1)$. Como \mathbb{P} es simplemente conexo entonces la curva $\alpha(\phi)$ es homotópica a un punto y, por el Teorema de Monodromía, se tiene

que el levantamiento de $\alpha(\phi)$ basado en x_1 es homotópico al levantamiento de la curva constante $\alpha(x_1)$ basada en x_1 , por lo que se tiene que α es inyectiva y como consecuencia, α es un homeomorfismo. Así, queda probado el teorema de Poincaré.

Teorema 2.1.1 (De Poincaré). *Para un polígono R con apareamiento de lados Φ que satisface I' y II, G es discreto y R es un polígono fundamental para G .*

Recordamos que un lado s de un polígono fundamental convexo es un segmento de la forma $\tilde{R} \cap g(\tilde{R})$, donde \tilde{R} denota la cerradura hiperbólica de R , a excepción del caso en que dicho conjunto sea considerado como dos lados cuando g es una transformación elíptica de orden dos (cf. [2], pp. 229-230).

Definición 20 *Sea R un polígono fundamental convexo. Un borde de R es un segmento máximo de geodésica en ∂R .*

Debemos distinguir entre lados y bordes de un polígono, ya que puede suceder que un borde contenga una infinidad de lados como se muestra en el siguiente ejemplo.

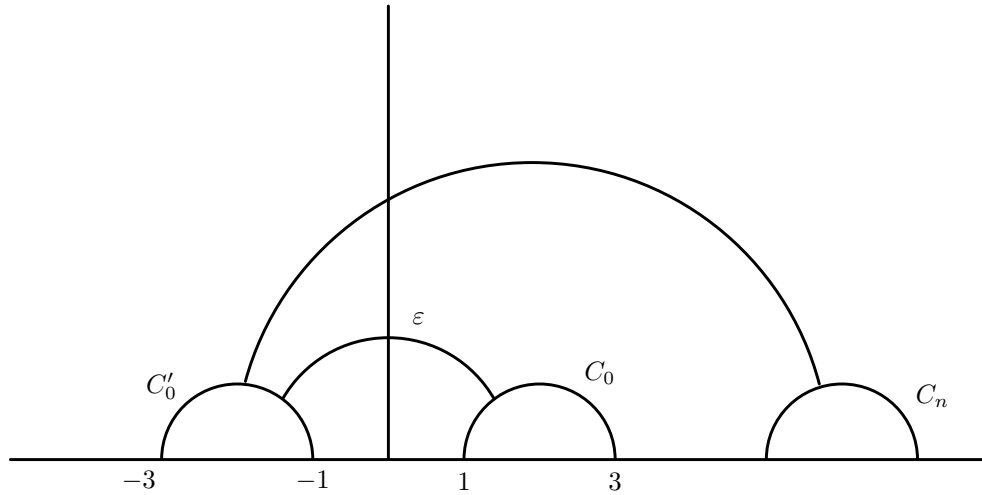


Figura 2.5: cota inferior δ .

Sean C_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, geodésicas contenidas en \mathbb{H}^2 con puntos finales $1 + 4n$ y $3 + 4n$. Consideremos también las geodésicas C'_n , obtenidas al

reflejar las geodésicas C_n con respecto al eje imaginario. Nótese que las transformaciones hiperbólicas en $PSL(2, \mathbb{R})$ dadas por

$$g_n = \begin{pmatrix} -(4n+2) & (4n+2)^2 - 1 \\ 1 & -(4n+2) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

transforman C_n en C'_n , esto se debe a la geometría de los círculos isométricos, más aún $\overline{g_n}(\text{ext}(C_n)) = \text{int}(C'_n)$. Tomemos G , el grupo generado por las transformaciones $\overline{g_n}$.

Veremos que la región exterior a las geodésicas C_n y C'_n , es un dominio fundamental para G , para lo cual, se verificarán las hipótesis del teorema de Poincaré. Nótese que no hay vértices ordinarios, por lo que no es necesario verificar el axioma I'. Basta con ver que se satisface la condición II. Para ver esto, obsérvese que existe una cota inferior entre la distancia de cualesquier par de geodésicas de la familia $\{\{C_n\} \cup \{C'_n\}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. De hecho, la menor distancia se alcanza de C_0 a C'_0 (Véase la Figura 2.5).

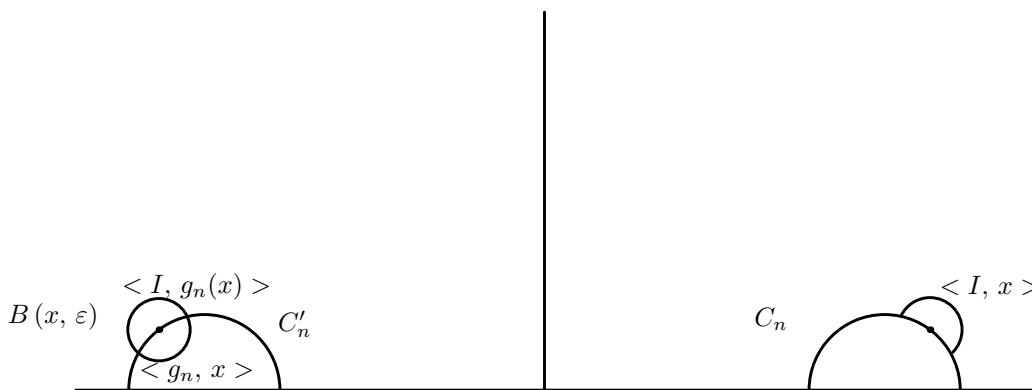


Figura 2.6: Clases $\langle I, g_n(x) \rangle = \langle g_n, x \rangle$

Ahora, sea $x \in \partial R$, digamos $x \in C_n$, y sea ε la distancia de C_0 a C'_0 . Se afirma que $B(x, \varepsilon)$ interseca únicamente a R y a $g_n^{-1}(R)$, ya que si $B(x, \varepsilon)$ intersecara a otra imagen de R bajo alguna transformación g_k , eso implicaría que interseca a una de las imágenes de una geodésica C_l bajo g_k ; pero las transformaciones g_n son isometrías por lo que se tendría que la distancia de C_n a C_l sería menor a ε , lo cual sería una contradicción, por la elección de ε . Nótese que $B(x, \varepsilon) \cap \partial R$ es un segmento de C_n , tal que cada punto está representado por las clases $\langle I, g_n(x) \rangle = \langle g_n, x \rangle$,

y donde $B(x, \varepsilon) = g_1(N_1^\varepsilon) \cup g_2(N_2^\varepsilon)$, tomando la notación de la igualdad (2.1). Obsérvese que $\alpha^{-1}|_{B(x, \varepsilon)}$, $x \in C_n$ (o en cualquier lado) es un homeomorfismo local, por lo que se tiene que existe una rama monovaluada de α^{-1} .

Por otro lado, si $x \in R$, tomando la misma ε se tienen dos casos:

Caso 1. $B(x, \varepsilon) \cap \partial R = \emptyset$. En este caso, es evidente que α^{-1} es monovaluada.

Caso 2. $B(x, \varepsilon) \cap \partial R \neq \emptyset$. Nuevamente, $B(x, \varepsilon)$ interseca únicamente a R y a $g_n^{-1}(R)$, por lo que se sigue que α^{-1} tiene una rama monovaluada.

Así, podemos tomar ε en la condición **II** y por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Poincaré, de donde se obtiene que el exterior de las geodésicas C_n y C_n' es un dominio fundamental para G .

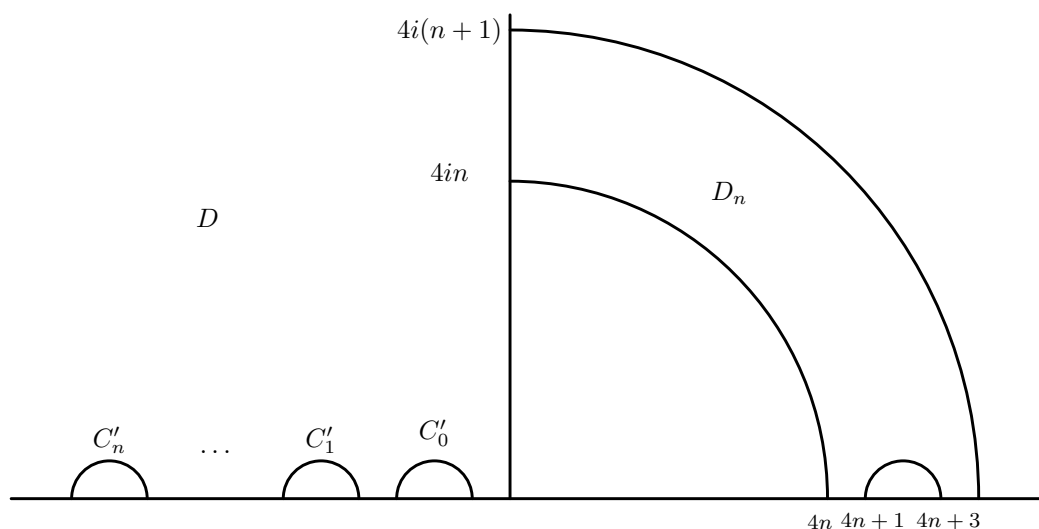


Figura 2.7: Región D_n .

Ahora, consideremos D la región en el segundo cuadrante exterior a las geodésicas C'_n y sea

$$D_n = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, 4n < |z| < 4(n+1), |z - (4n+2)| \geq 1\}$$

(véase la Figura 2.7).

Nótese que, bajo la transformación \bar{g}_n , la región D_n se convierte en la región mostrada en la Figura 2.8.

Resulta que

$$P' = D \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g_n(D_n \cup C_n) \right).$$

es un dominio fundamental: evidentemente, $\partial P'$ tiene medida bidimensional de Lebesgue cero. Además, dado $w \in \mathbb{H}^2$, existe $z \in \tilde{R}$ y $g \in G$ tal que $g(z) = w$. Si $z \in D$, se tiene que $z \in P'$, de otra manera, $z \in \tilde{D}_n$ y z es equivalente a $g_n(z) \in \tilde{P}'$. Ahora, para ver que no hay puntos G -equivalentes basta con observar que la región $D \subset R$; por otro lado, en el interior de los conjuntos $g_n(D_n)$ tampoco hay puntos G -equivalentes, ya que D_n forma parte de una región fundamental. Finalmente, no existen puntos G -equivalentes a los puntos de las geodésicas C_n' , ya que los únicos posibles son los que se encuentran sobre las geodésicas C_n las cuales han sido excluidas de la región, por lo que se sigue que P' es un dominio fundamental. También, se tiene que P' es localmente finito (cf. [2], pp. 213-214), por lo que se concluye que es un polígono fundamental convexo para G .

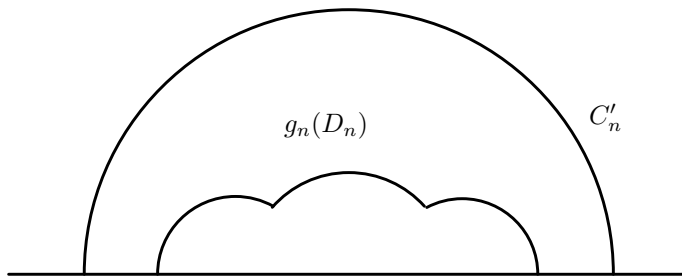


Figura 2.8:

Además, obsérvese que las geodésicas C_n se suprimieron como lados y se han creado tres lados nuevos. Además, en el eje imaginario se tiene una infinidad de lados de la forma $[4in, 4i(n+1)]$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, un borde tiene una infinidad de lados.

2.2. Grupos finitamente generados

Un polígono fundamental convexo R puede tener vértices en el círculo (o la recta) al infinito en \mathbb{P} . Denotemos por F a la frontera euclidiana de R en $\partial \mathbb{P}$. Se tiene que F puede tener una cantidad numerable de componentes

conexas con longitud euclidiana positiva, esto último se logra asociando a cada componente de longitud positiva un racional. A dichas componentes las llamaremos lados libres de R y son intervalos cerrados de longitud positiva en $\partial\mathbb{P}$.

Definición 21 *Un punto $v \in F$ es un vértice propio de R si v es un punto final de dos lados de R , v es un vértice impropio de R si es punto final de un lado y de un lado libre de R . En ambos casos se dice que v es un vértice al infinito de R .*

Se puede probar que las transformaciones de Möbius que no fijan ∞ , actúan euclidianamente en un único círculo llamado isométrico, es decir, la distancia euclidiana entre cualesquiera dos puntos de ese círculo es la misma que la de sus imágenes (cf. [5], p. 158), recordamos la siguiente definición.

Definición 22 *Sea*

$$\bar{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad c \neq 0,$$

una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, se define el círculo isométrico de \bar{T} , denotado por $I(\bar{T})$, como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{T}'(z)| = 1\}$$

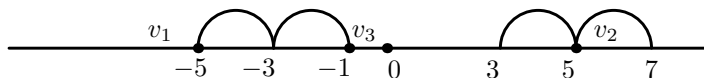


Figura 2.9: v_2 es equivalente a v_1 y v_3 .

Por otra parte, hacemos la observación de que se puede tener el caso en que un vértice propio sea equivalente a un vértice impropio. Tomemos las transformaciones hiperbólicas dadas por

$$g_1(z) = \frac{4z + 15}{z + 4} \quad g_2(z) = \frac{6z + 11}{z + 2}$$

y el grupo $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ generado por estas transformaciones. Se puede probar que la región exterior a los círculos isométricos de g_1 y g_2 es un dominio fundamental (cf. [6], pp. 115-116), por lo que G es fuchsiano. Obsérvese

que $g_1(-5) = 5$ y $g_2^{-1}(5) = -1$, por lo que se tiene el ciclo conformado por los vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$. Nótese que v_1 y v_3 son vértices impropios, así un vértice propio puede ser equivalente a un vértice impropio (véase la Figura 2.9).

Probaremos que un grupo fuchsiano no elemental es finitamente generado si y sólo si todo polígono fundamental convexo de G tiene una cantidad finita de lados. Para probar este resultado, se prueba el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Sea R un polígono fundamental convexo con un número finito de lados, entonces los extremos de lados libres son puntos ordinarios.*

DEMOSTRACIÓN. Sea v_1 un vértice impropio y $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ su ciclo. El ciclo no es parabólico ya que contiene vértices impropios (cf. [2] p. 221). Denotamos por g_{s_i} los apareamientos tales que $g_{s_i}(s_i') = s_i$ y $g_{s_i}(v_i) = v_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$, donde v_i es un vértice de s_i' , ($i < k$) y s_i, s_i' son lados de R (véase la Figura 2.10).

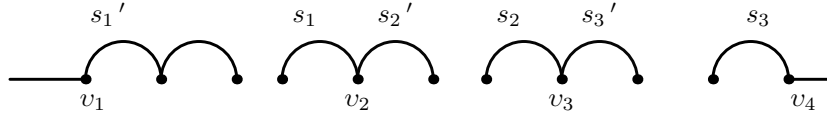


Figura 2.10: Caso $k = 4$ del Lema 2.2.1

Consideramos primero el caso $k = 1$, como en v_2 se intersecan s_1 y s_2' y s_1 se aparea con s_1' , se sigue que en v_1 se intersecan $g_{s_1}^{-1}(s_1) = s_1'$ y $g_{s_1}^{-1}(s_2')$ de tal forma que R y $g_{s_1}^{-1}(R)$ colindan a lo largo de s_1' . Nótese también que $g_{s_2}^{-1}(s_2) = s_2'$ y $g_{s_2}^{-1}(s_3')$ se intersecan en v_2 . De esta forma, s_2' es un lado común entre R y $g_{s_2}^{-1}(R)$, por lo que al considerar $g_{s_1}^{-1}$ se sigue que v_1 también es un punto que pertenece a $g_{s_1}^{-1}g_{s_2}^{-1}(s_3')$ y así $g_{s_1}^{-1}g_{s_2}^{-1}(R)$ colinda con $g_{s_1}^{-1}(R)$ a lo largo de $g_{s_1}^{-1}(s_2')$ (véase la Figura 2.11).

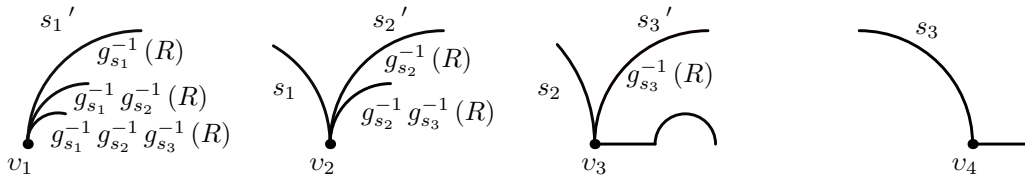


Figura 2.11: Prueba del Lema 2.2.1 para el caso $k = 4$

Procediendo de esta manera, como s_3' se aparea con un lado s_3 y v_3 es equivalente a un punto v_4 que es vértice impropio, se sigue que el polígono $g_{s_1}^{-1} g_{s_2}^{-1} g_{s_3}^{-1} (R)$ tiene a v_1 como vértice impropio, por lo que se sigue el resultado, ya que el conjunto límite es perfecto y no tiene puntos aislados (cf. [2], pp. 96-97).

Para el caso general, procedemos de la misma forma que en el caso anterior y dado que se tiene un polígono con un número finito de lados, se obtiene que v_1 es un vértice en donde concurren k lados y un lado libre, por lo que se sigue que los extremos de un lado libre son puntos ordinarios. \square

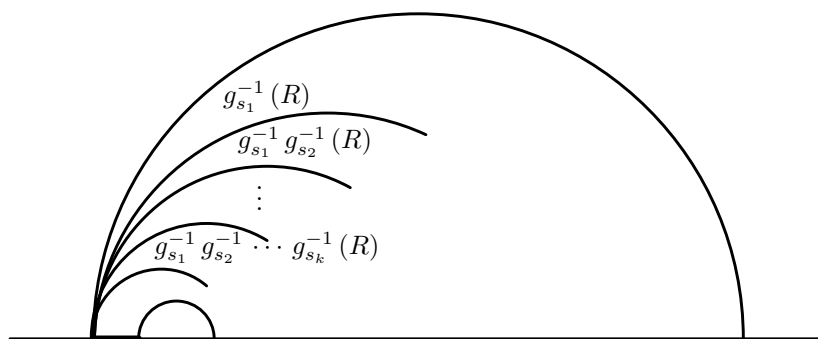


Figura 2.12: Caso general del Lema 2.2.1

Sea G un grupo fuchsiano actuando en el disco Δ ; decimos que G es del primer tipo si $\Lambda = \partial\Delta$ y del segundo tipo si Λ es un subconjunto propio de $\partial\Delta$. Si G es del primer tipo, la órbita de todo punto se acumula en cualquier punto de $\partial\Delta$ (cf. [2] p. 202) y por tanto, cualquier conjunto convexo, no vacío y G -invariante es necesariamente el plano hiperbólico. Un ejemplo de grupo fuchsiano del primer tipo es el grupo modular (cf. [5], p. 95)

Si G es del segundo tipo, entonces $\partial\Delta$ es la unión ajena del conjunto límite Λ de G y la unión numerable de arcos abiertos mutuamente ajenos, σ_j . Sea L_j la geodésica con los mismos puntos finales que σ_j y H_j el semiplano acotado por L_j y separado de σ_j por la geodésica L_j . Obsérvese que la colección $\{\sigma_j\}$ es G -invariante, por lo que la colección H_j también lo es y así,

$$N = \bigcap_j H_j$$

es un subconjunto convexo, G -invariante de Δ . Esto se sigue, ya que el conjunto límite es G -invariante (cf. [5], pp. 90-91), por lo que el conjunto ordinario también lo es, lo que implica que una geodésica σ_j bajo una transformación $g \in G$ va a una geodésica σ_l , y por la construcción de N se tiene la invariancia. Si G es no elemental, entonces Λ es infinito y por tanto N es no vacío; además, en este caso, hay una infinidad de arcos σ_j , por lo que la longitud euclidiana de σ_j , cuando $j \rightarrow \infty$, tiende a cero. Esto implica que cada disco abierto de la forma

$$D(0, r) = \{z \mid |z| < r\}, \quad r < 1$$

interseca a los semiplanos H_j , salvo un número finito, esto es, N es un subconjunto abierto de Δ . Nótese que la región de Nielsen es como se describe en la Figura 2.13. Así tenemos la siguiente definición.

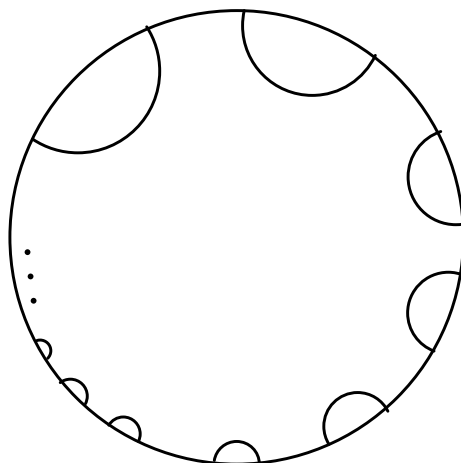


Figura 2.13: Semblanza de una región de Nielsen

Definición 23 Sea G un grupo no elemental fuchsiano actuando en Δ . Se define la región de Nielsen N de G de la siguiente forma: si G es del primer tipo, tomamos $N = \Delta$. Si G es del segundo tipo, entonces

$$N = \bigcap_j H_j.$$

Presentamos un ejemplo de grupo del segundo tipo. Sea G el grupo generado por $f(z) = z + 6$ y $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Resulta que G es discreto y que una región fundamental para G está dada por $P = D_1 \cap D_2 \cap \mathbb{H}^2$, donde

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < 3\}$$

y

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| > 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| > 1\}$$

(cf. [2], pp. 103-104). Nótese que los círculos isométricos de g y g^{-1} están dados por

$$I_g = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$$

y

$$I_{g^{-1}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 1\},$$

respectivamente. En consecuencia, se puede probar, en virtud de la geometría de los círculos isométricos, que los segmentos $(2, 3)$ y $(-3, -2)$ consisten en puntos ordinarios y G es del segundo tipo (véase la Figura 2.14).

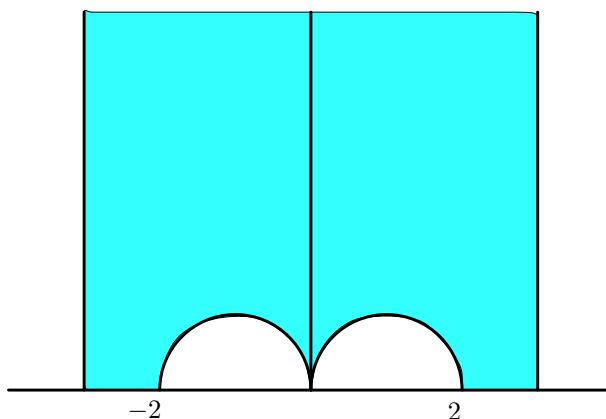


Figura 2.14: Región fundamental del grupo G

Ahora, si R es un polígono fundamental convexo con un número finito de lados, entonces todo lado libre cerrado λ_i , ($i = 1, \dots, m$), de R está en el interior de un intervalo de discontinuidad σ_i que determina un semiplano H_i que contiene a N ; esto se sigue ya que, por el Lema 2.2.1, los extremos de lados libres son necesariamente puntos ordinarios.

Para el teorema principal de esta sección usaremos los siguientes resultados. No los demostraremos, sin embargo sus pruebas se pueden consultar en [1], pp. 31-32 y [2], pp. 153-154 y 205-206, respectivamente.

Teorema 2.2.2 (**Teorema de Convergencia Monótona**). Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, es una sucesión monótona creciente de funciones Lebesgue integrables tales que convergen a una función f , entonces f es Lebesgue integrable y

$$\int f d\lambda = \lim \int f_n d\lambda.$$

Teorema 2.2.3 Sean F_1 y F_2 conjuntos fundamentales medibles para G . Entonces $h - \text{area}(F_1) = h - \text{area}(F_2)$.

Teorema 2.2.4 Si R es cualquier polígono con ángulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$, entonces

$$h - \text{área}(R) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)$$

El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para que un polígono sea convexo (véase [2], pp. 154-155).

Teorema 2.2.5 Sea R un polígono con ángulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$. Entonces R es convexo si y sólo si $0 \leq \theta_j \leq \pi$.

Obsérvese que como consecuencia del Teorema 2.2.4, una condición necesaria y suficiente para que un polígono con ángulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$, exista es

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

La prueba de los siguientes teoremas se pueden consultar en [2] p. 222 y p. 229.

Teorema 2.2.6 Para todo grupo fuchsiano G , todo polígono fundamental convexo R y todo ciclo C ,

$$\theta(C) = \frac{2\pi}{\text{ord}(C)}$$

Teorema 2.2.7 Sea $\{z_1, \dots, z_n\}$ cualquier ciclo sobre la frontera de un polígono de Dirichlet $D(w)$. entonces

$$\rho(z_1, w) = \rho(z_2, w) = \dots = \rho(z_n, w).$$

Ahora presentamos el siguiente lema.

Lema 2.2.8 *Sea D un polígono fundamental convexo, entonces D contiene a lo más un ciclo de vértices de orden dos de longitud uno en cada segmento máximo de geodésica de su frontera.*

DEMOSTRACIÓN. Sea v un vértice elíptico de orden dos de D en un ciclo de longitud uno. Si g es la transformación elíptica que fija v , entonces v está en un segmento de geodésica de longitud positiva de la forma $\tilde{D} \cap g(\tilde{D})$, ya que al ser el ciclo de longitud uno, v no es un vértice, en el sentido de que $v = g(\tilde{D}) \cap f(\tilde{D}) \cap \tilde{D}$, donde $g \neq f$ y $gf \neq Id$, ya que el ángulo de v en \tilde{D} es π . Nótese también que si m es la geodésica que contiene a $\tilde{D} \cap g(\tilde{D})$ y $v_1 \in m$ es tal que

$$[v, v_1] \subset \tilde{D}, \quad (2.2)$$

entonces $[g(v_1), v] \subset \tilde{D}$. De otra manera, existe un vértice

$$v' = g(\tilde{D}) \cap \tilde{D} \cap f(\tilde{D}),$$

tal que $v' \in [g(v_1), v]$ y esto implicaría que

$$g(v') = \tilde{D} \cap g(\tilde{D}) \cap gf(\tilde{D})$$

es un vértice en $[v, v_1]$ lo cual contradice (2.2).

Ahora supongamos que en un segmento máximo de geodésica s de D existen dos vértices elípticos de orden dos, cada uno en un ciclo de longitud uno. Los denotaremos por z_1 y z_2 y a las transformaciones que los dejan fijos por g_1 y g_2 , respectivamente. Sean m la geodésica que pasa por z_1 y z_2 y L el semiplano generado por m que interseca a D . Para alguna $\varepsilon > 0$, $D(z_1, \varepsilon) \cap L \subset \tilde{D}$. Ahora, sea $z_1' \in m \cap D(z_1, \varepsilon)$ como se muestra en la Figura 2.15, por convexidad se sigue que el segmento de geodésica $[z_2, z_1']$ está contenido en \tilde{D} , y por tanto (por la observación previa) se sigue también que $[g_2(z_1'), z_2] \subset \tilde{D}$ (véase la Figura 2.15).

También, nótese que $g_2(z_1) = g_2 g_1(z_1)$, y entonces

$$g_1(D(z_1, \varepsilon) \cap D) \subset L'$$

y por lo tanto

$$g_2 g_1(D(z_1, \varepsilon) \cap D) \subset L.$$

De donde se concluye que, por un lado, $D(g_2(z_1), \varepsilon) \cap L \subset D$ y por el otro, $D(g_2 g_1(z_1), \varepsilon) \cap L \subset g_2 g_1(D)$, lo que implicaría que $D \cap g_2 g_1(D) \neq \emptyset$ generando así una contradicción, ya que $g_2 g_1$ es una transformación hiperbólica a lo largo de m . De esta forma se obtiene el resultado. \square

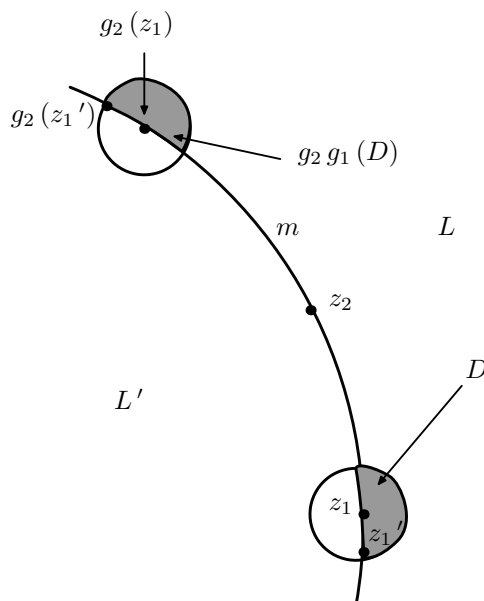


Figura 2.15: Demostración del Lema 2.2.8

Enunciamos ahora el resultado principal de este capítulo.

Teorema 2.2.9 *Sea G un grupo fuchsiano, no elemental con región de Nielsen N , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- a) G es finitamente generado,
- b) para cualquier polígono fundamental convexo D de G ,

$$h - \text{área}(D \cap N) < +\infty,$$

- c) existe un polígono fundamental convexo de G con una cantidad finita de lados,
- d) todo polígono fundamental convexo de G tiene un número finito de lados.

Para hacer más accesible el entendimiento de este sofisticado teorema, recordamos el ejemplo del grupo G que es generado por las transformaciones $f(z) = z + 6$ y $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Como los segmentos $(2, 3)$ y $(-3, -2)$ contienen puntos ordinarios y la región de Nielsen para un grupo del segundo tipo esta generada por geodésicas cuyos puntos finales se encuentran en los extremos de arcos abiertos que contienen puntos ordinarios, se tiene que $D \cap N$ es (aproximadamente) la región mostrada en la Figura 2.16. En otras palabras, intersectar con la región de Nielsen hace finitas las áreas.

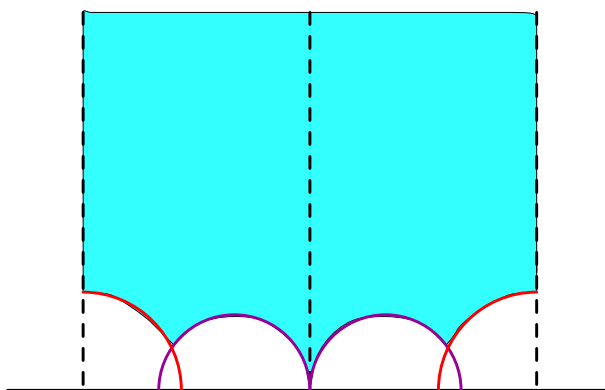


Figura 2.16: Intersección de un polígono fundamental y una región de Nielsen para un grupo G del segundo tipo

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.9. Evidentemente d) implica c). Se probará que c) implica b). Sea R como en c), entonces R tiene un número finito de lados y también

$$R_1 = R \cap \bigcap_{i=1}^m H_i$$

es un polígono con un número finito de lados sin lados libres, y por consiguiente de h-área finita. Esto se sigue, ya que si un polígono se interseca con un semiplano se obtiene el vacío u otro polígono. En nuestro caso, la intersección no puede ser vacía, ya que, si esto sucediera se tendría que $\tilde{R} \subset H_j^c$, para alguna j y $R \cap N = \emptyset$. Sin embargo, R es una región fundamental y N es G -invariante, por lo que si $w \in N$, w tendría que ser G -equivalente a un punto $w_1 \in \tilde{R}$, lo cual es una contradicción ($w \sim w_1$ implica que $w_1 \in N$).

Ahora, $R \cap N \subset R_1$, por lo que b) se satisface para esta elección. En general, mostramos que esto se cumple para cualquier otro polígono funda-

mental convexo D (que a priori puede tener una infinidad de lados). Esencialmente, esto se sigue de que la región de Nielsen es G -invariante. Para probar formalmente este hecho escribimos

$$\begin{aligned} h - \text{área}(R \cap N) &= h - \text{área} \left(\left(\bigcup_j g_j(\tilde{D}) \right) \cap (R \cap N) \right) \\ &= h - \text{área} \left(\bigcup_j (g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N) \right). \end{aligned}$$

Numerando por g_j , $j \in \mathbb{N}$, los elementos del grupo, sean

$$M_n = \bigcup_{j=1}^n (g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N)$$

y

$$f_n(z) = \left(\frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 \mathbb{I}_{M_n}(z), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde \mathbb{I}_{M_n} es la función característica

Nótese que $\{f_n\}$ converge a la función $f(z)\mathbb{I}_{R \cap N}(z)$, donde

$$f(z) = \left(\frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2.$$

Además las funciones f_n son integrables, por lo que podemos aplicar el Teorema 2.2.2 y se tiene que

$$h - \text{área} \left(\bigcup_j (g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ h - \text{área} \left(\bigcup_{j=1}^n (g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N) \right) \right\}.$$

Ahora, como los conjuntos $g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N$ se intersecan en un conjunto con medida de Lebesgue cero, se sigue que

$$h - \text{área} \left(\bigcup_{j=1}^n (g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N) \right) = \sum_{j=1}^n h - \text{área}(g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N),$$

además por el teorema de cambio de variable y la invariabilidad de N

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n h - \text{área}(g_j(\tilde{D}) \cap R \cap N) &= \sum_{j=1}^n h - \text{área}(g_j^{-1}(R) \cap \tilde{D} \cap N) \\
&= h - \text{área} \left(\bigcup_{j=1}^n (g_j^{-1}(R) \cap \tilde{D} \cap N) \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando límites y aplicando el Teorema 2.2.2, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} h - \text{área} \left(\bigcup_{j=1}^n (g_j^{-1}(R) \cap \tilde{D} \cap N) \right) &= h - \text{área} \left(\bigcup_j (g_j^{-1}(R) \cap \tilde{D} \cap N) \right) \\
&= h - \text{área} \left(\left(\bigcup_j g_j^{-1}(R) \right) \cap (\tilde{D} \cap N) \right) \\
&= h - \text{área}(N \cap \tilde{D}),
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $h - \text{área}(R \cap N) = h - \text{área}(N \cap \tilde{D})$ y por tanto c) implica b).

Ahora veamos que b) implica a). Consideremos $Q = R \cap N$, como N es G -invariante, entonces $N \cap \partial R \neq \emptyset$, en particular $Q \neq \emptyset$. Por la invariancia de N , \tilde{Q} contiene todos o ninguno de los puntos de un ciclo ordinario en ∂R .

Por otro lado, sean C_1, C_2, \dots, C_t ciclos de vértices ordinarios de \tilde{R} que intersecan a N , es decir en \tilde{Q} (quizá como un subconjunto propio de los vértices ordinarios) y también puntos al infinito w_1, w_2, \dots, w_n de \tilde{Q} . Nótese que si un vértice de un ciclo en \tilde{R} aparece, entonces aparecen todos, dada la invariabilidad de N .

Sea Q_0 el polígono con vértices

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_t \cup \{w_1, \dots, w_n\}.$$

Obsérvese que Q_0 es la celda convexa generada por un número finito de puntos en la frontera de un conjunto convexo ($R \cap N$). Se sigue entonces por convexidad que $Q_0 \subset Q$, por lo que la suma de los ángulos interiores de Q_0 en sus vértices no es mayor que dicha suma en Q . Hacemos la observación de que en los puntos w_j los ángulos son cero. Luego, si el ciclo C_j tiene

longitud l_j y orden q_j , se tiene por el Teorema 2.2.4

$$h - \text{área}(Q) \geq h - \text{área}(Q_0) \geq \pi(n + l_1 + \dots + l_t - 2) - \left(\sum_{k=1}^t \theta_k \right),$$

donde θ_k es la suma de los ángulos del ciclo C_k . Luego, por el Teorema 2.2.6 se sigue

$$\sum_{k=1}^t \theta_k = 2\pi \left(\frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_t} \right) \quad (2.3)$$

Es conveniente suponer que un vértice elíptico de orden dos en un ciclo de un sólo elemento no es un vértice. Con esta convención se cumple que

$$l_j - \frac{2}{q_j} \geq \frac{1}{3}. \quad (2.4)$$

Esto se sigue ya que si C_j es accidental, entonces $l_j \geq 3$ y $q_j = 1$ (cf. [2], p. 222). Por otra parte, si el ciclo es elíptico se cumple que $l_j q_j \geq 3$, es decir $\frac{2}{3} l_j \geq \frac{2}{q_j}$, lo cual implica (2.4).

Ahora, por (2.3) se tiene que

$$\begin{aligned} h - \text{área}(Q_0) &\geq \pi \left(n + \sum_{j=1}^t l_j - 2 \right) - 2\pi \left(\sum_{j=1}^t \frac{1}{q_j} \right) \\ &= \pi(n - 2) + \pi \sum_{j=1}^t \left(l_j - \frac{2}{q_j} \right), \end{aligned}$$

por lo que se sigue de (2.4) que

$$\pi(n - 2) + \pi \sum_{j=1}^t \left(l_j - \frac{2}{q_j} \right) \geq \frac{\pi}{3}(3n - 6 + t),$$

de esta forma se obtiene

$$3n + t \leq 6 + \frac{3}{\pi} h - \text{área}(Q). \quad (2.5)$$

Obsérvese que si un lado l de R contiene un lado s de Q_0 , entonces se sigue de la convexidad de Q_0 que s es el único lado de Q_0 contenido en l .

Finalmente, como

$$h - \text{área}(Q) = h - \text{área}(R \cap N) < \infty,$$

se sigue que sólo un número finito de lados de R intersecan a \tilde{Q} , ya que de lo contrario, si una cantidad infinita de lados de R intersecara a \tilde{Q} , entonces se podrían encontrar un número suficientemente grande de ciclos y vértices al infinito que generan un polígono Q_0 y por tanto se obtendría una contradicción a la desigualdad (2.5).

Por el Lema 2.2.8 se sigue que en cualquier convención, es decir, tomando o no los puntos elípticos de orden dos en ciclos de longitud uno como vértices, sólo un número finito de lados de R intersecan a \tilde{Q} , ya que los lados a lo más se duplican.

Ahora, sean g_s los apareamientos de R cuyos lados intersecan a \tilde{Q} (o \tilde{N}). Afirmamos que las transformaciones g_s generan a G . Para ver esto, sea $g \in G$, entonces por la convexidad y la invariancia de N , dado $z \in Q$ y $y \in g(Q)$, el segmento σ que une z con y está en N ; se puede suponer que σ no interseca ningún vértice de R o de sus imágenes, ya que se puede modificar σ tomando pequeños discos de tal forma que no interseque un vértice. Así, σ interseca a $R, g_1(R), \dots, g_n(R)$, donde $g_i \in G, i = 1, \dots, n$, tal que $g_n(R) = g(R)$. Finalmente, como $g_{j+1}(\tilde{R}) \cap g_j(\tilde{R}) \cap N$ es un segmento de geodésica, por la invariancia de N se tiene que

$$\tilde{R} \cap g_{j+1}^{-1} g_j(\tilde{R}) \cap N$$

también es un segmento de geodésica que está contenido en un lado de R que interseca a N y por tanto $g_{j+1}^{-1} g_j = g_s$, por lo que se sigue que

$$g_n = g_1 g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} g_3 \dots g_{n-1}^{-1} g_n = g_{s_1} \dots g_{s_n}$$

de donde se obtiene que b) implica a).

Ahora probamos que a) implica c). Supongamos que G es un grupo finitamente generado que actúa en el modelo del disco de Beltrami-Poincaré, Δ , y por conjugación podemos suponer que 0 no es punto fijo. Sea D el polígono de Dirichlet con centro en 0 . Obsérvese que los apareamientos de D generan a G , como éste es finitamente generado, este conjunto finito de generadores se pueden expresar como palabras finitas en los apareamientos de D , ya que estos apareamientos generan a G . Como las “letras” involucradas son un número finito, se tiene que un número finito de apareamientos generan a G , que denotamos por g_1, \dots, g_t .

Sea $r \in (0, 1)$ tal que $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ contiene segmentos de longitud positiva de todos los lados de D que son apareados por g_1, \dots, g_t , y sea $K = \tilde{D} \cap D_r$. Escribiendo

$$G(K) = \bigcup_{g \in G} g(K),$$

se afirma que $G(K)$ es conexo. Para ver esto, nótese que $K \cup g_j(K)$ es conexo, $j \in \{1, \dots, r\}$; esto se sigue ya que g_j aparea un lado de D con otro lado de D que también pertenece a $g_j(D)$. Más aún, como puntos equivalentes equidistan del 0 (Teorema 2.2.7), si z es un punto en D_r que está en un lado de D , su punto equivalente en otro lado de D también está en D_r . Esto es, $g_j(K)$ y K tienen puntos en común, por lo que se tiene que $K \cup g_j(K)$ es conexo. Ahora, como

$$g_{j_1}^{-1}(g_{j_1}(K) \cup g_{j_1}g_{j_2}(K)) = K \cup g_{j_2}(K),$$

donde $g_{j_1}, g_{j_2} \in \{g_1, \dots, g_t\}$, se sigue que $g_{j_1}g_{j_2}(K)$ y $g_{j_1}(K)$ tienen puntos en común. Procediendo inductivamente se sigue que

$$K \cup g_{j_1}(K) \cup \dots \cup (g_{j_1} \dots g_{j_m})(K)$$

es conexo, y en consecuencia $G(K)$ es conexo.

Ahora, dado que D es localmente finito, $\overline{D(0, r)}$ interseca un número finito de lados y vértices, por lo que se puede tomar $r \in (0, 1)$ de tal forma que $\{z \mid |z| = r\}$ no interseque ningún vértice de D y tal que no sea tangente a ningún lado de D . Por consiguiente, se sigue que $\tilde{D} \cap \partial D_r = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n$, donde σ_j son arcos disjuntos en ∂D_r que excepto por sus extremos, están en D . Como los extremos de las σ_j están en el interior de algún lado, se aparean con puntos que se encuentran en el interior de otros lados. Como estos puntos equidistan de 0 (por el Teorema 2.2.7), es decir, todos ellos están en el círculo $\{z \mid |z| = r\}$, se sigue que son extremos de alguna σ_i . De esta forma se concluye que cada punto terminal de cada σ_j es el punto terminal de alguna $g(\sigma_i)$ para una única $g \in \{g_1, \dots, g_t\}$ y una única σ_i .

Por otra parte, verificamos que cada punto terminal de cada $h(\sigma_j)$ es el punto terminal de alguna $h'(\sigma_i)$ para una única h' y una única σ_i , donde h y h' son palabras en $\{g_1, \dots, g_t\}$. Para probar esto, supongamos que existe $x \in \sigma_j$ tal que $h(x)$ es un extremo de $h(\sigma_j)$ y también es extremo de $h'(\sigma_i)$ y $h''(\sigma_k)$, donde $h, h', h'' \in G$. Entonces, para $y \in \sigma_i$ y $z \in \sigma_k$, se tiene que

$$h(x) = h'(y) = h''(z),$$

donde x, y, z son puntos interiores de lados de D que están en $\{z \mid |z| = r\}$. Bajo estas hipótesis se sigue que

$$x = h^{-1} h'(y) = h^{-1} h''(z),$$

por lo que x se aparea con y, z y por lo tanto $y = z$ y $h' = h''$; como el apareamiento es único, se obtiene que $\sigma_j = \sigma_k$.

Nótese que como hay un número finito de arcos σ_j , al iterar el proceso de buscar puntos finales e iniciales de imágenes de los arcos σ_j *relacionados*, se obtiene una curva simple que denotamos por Γ_j . Nótese que como existen un número finito de σ_j , al dar seguimiento mediante los apareamientos de puntos extremos de las σ_j , después de un número finito de pasos, se regresa al arco de inicio. El siguiente ejemplo ilustra la situación para el caso de tres arcos.

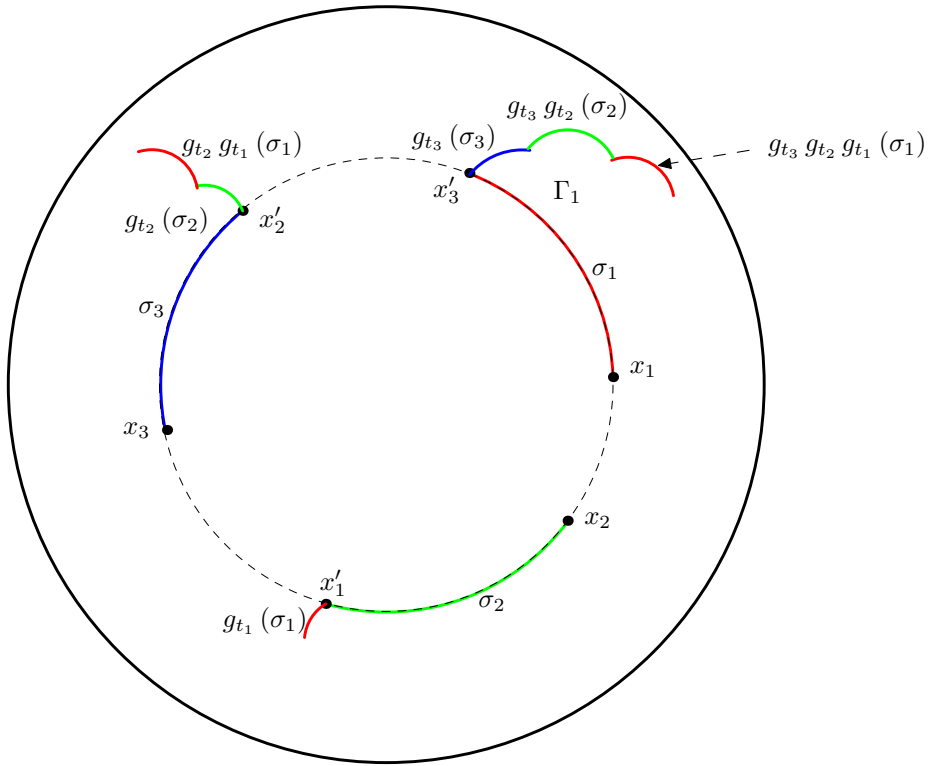


Figura 2.17: Ejemplo de tres arcos *relacionados*

Sean σ_1, σ_2 y σ_3 los arcos obtenidos de intersectar \tilde{D} y ∂D_r que están *relacionados*, esto es, que existen $g_{t_1}, g_{t_2}, g_{t_3}$ generadores tal que, si x_1 es

un extremo de σ_1 , $g_{t_1}(x_1) = x'_1 \in \sigma_2$. Si x_2 es el otro extremo de σ_2 , $g_{t_2}(x_2) = x'_2 \in \sigma_3$. Finalmente, $g_{t_3}(x_3) = x'_3 \in \sigma_1$, donde x_3 denota el otro extremo de σ_3 . Obsérvese que al considerar $\sigma_1, g_{t_3}(\sigma_3), g_{t_3}g_{t_2}(\sigma_2)$ y $g_{t_3}g_{t_2}g_{t_1}(\sigma_1)$ se obtiene una curva simple conexa (véase la Figura 2.17).

Por construcción, la curva Γ_j (que es un arco simple o una curva simple cerrada) es invariante bajo una transformación $h_j = g_{t_n} \cdots g_{t_1}$, donde g_{t_1} aparea un extremo de σ_{j_1} con otro de σ_{j_2} , $j_1 \neq j_2$, g_{t_2} aparea un extremo de σ_{j_2} con otro de σ_{j_3} , donde j_1, j_2, j_3 son distintos dos a dos y así sucesivamente hasta llegar a que g_{t_n} aparea un extremo de σ_{j_n} con el otro extremo de σ_{j_1} . La invariabilidad de Γ_j bajo h_j se sigue de la unicidad de los extremos de las imágenes de las σ_k . En el ejemplo de la Figura 2.17, $h_1 = g_{t_3}g_{t_2}g_{t_1}$. Tenemos los siguientes tres casos.

Caso 1. h_j elíptica. En este caso Γ_j es una curva simple cerrada, ya que h_j es de orden finito, esto es, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $h_j^l = Id$, por la condición de unicidad en la gráfica, el arco debe regresar a sí mismo en forma de lazo, ya que $h_j^l(x_j) = x_j$, donde x_j es un extremo de σ_j .

Caso 2. h_j parabólica. Se sigue de la geometría de las transformaciones parabólicas que para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $h_j^n(z) \rightarrow \alpha$, donde α es el punto fijo de h_j . Luego, Γ_j es una curva simple cerrada en $\overline{\Delta}$, es decir, son “arcos” que se cierran en el punto fijo de h_j , al iterar h_j^n y h_j^{-n} .

Caso 3. h_j hiperbólica. Si α y β son los puntos fijos de h_j , donde α es el punto atractor, se sigue que Γ_j es una curva simple que “termina” en los puntos fijos de h_j .

Como ningún punto de K es equivalente a ningún punto de σ_j (los puntos de Γ_j son G -equivalentes a los puntos de σ_j y otros arcos σ_i en ∂D_r) se tiene que $G(K)$ no interseca a Γ_j . Esto se sigue, ya que si existiera un punto $z \in h_j(\sigma_i) \cap g(K)$, para alguna i , y alguna $g \in G$, de tal manera que $g(w) = z = h_j(y)$, $w \in K$, $y \in \sigma_i$, entonces $w = g^{-1}h_j(y)$, lo cual es una contradicción.

Ahora, sea D_j la unión de σ_j y la componente que genera σ_j en D que no contiene al origen (véase la Figura 2.18).

Obsérvese que Γ_j separa D_j y $G(K)$ en Δ . Se afirma que $\overline{D_j} \cap \partial \Delta$ es conexo (posiblemente vacío), donde $\overline{D_j}$ denota la cerradura euclidiana de D_j . Para probar esta afirmación, consideremos dos puntos u, v distintos en

este conjunto (si $\overline{D_j} \cap \partial \Delta$ es un punto, no hay nada que probar).

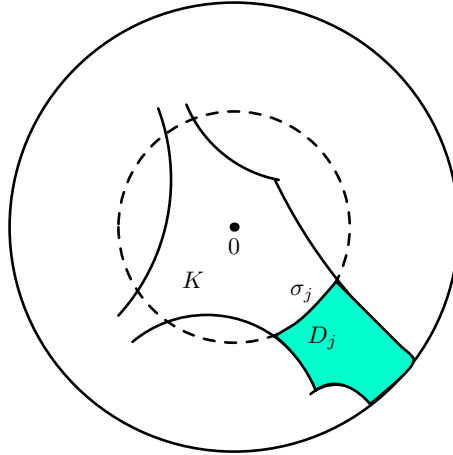


Figura 2.18: Región D_j .

Construimos una curva que consiste en unir radialmente a u con ru (en σ_j), seguida del segmento en σ_j que une ru y rv , y finalmente, el segmento radial que une v y rv (véase la Figura 2.19). Esta curva que denotaremos por τ_j está contenida en D y no interseca $G(K)$.

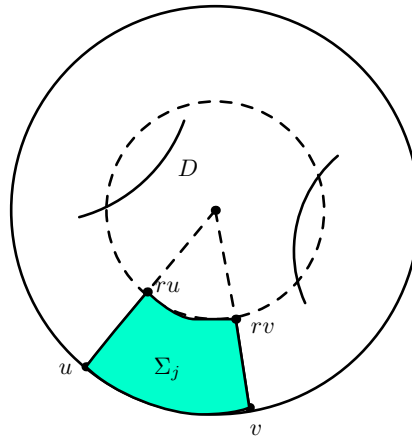


Figura 2.19: Curva τ_j .

Como $\tau_j \subset D$, si $h \in G$, $h \neq Id$, entonces $h(D)$ no interseca a τ_j . Por lo que $h(D)$ está en la misma componente que $G(K)$, al tener puntos

en común. Por consiguiente, la región Σ_j descrita en la Figura 2.19, no interseca a $h(D)$, por lo que se sigue que $\Sigma_j \subset D$, y por lo tanto $\overline{\Sigma_j} \subset \overline{D}$ y $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ es conexa.

Finalmente, tenemos los siguientes casos.

Caso 1. h_j elíptica. En este caso, Γ_j es una curva simple cerrada en Δ , entonces una componente en $\Delta - \Gamma_j$ tiene cerradura compacta en Δ . Se tienen dos posibilidades.

i) La componente compacta no contiene a D_j . En esta situación, la componente contiene a $G(K)$ y, como $G(K)$ contiene partes de cada imagen de D bajo cada elemento del grupo, y ya que estos polígonos son localmente finitos, se sigue que este compacto interseca un número finito de imágenes, el grupo es finito y evidentemente su polígono de Dirichlet tiene un número finito de lados que es lo que se quiere probar.

ii) La componente compacta contiene a D_j . De nuevo por finitud local, sólo un número finito de lados de D interseca a $\widetilde{D_j}$, y por consiguiente \widetilde{D} tiene un número finito de lados (al ser K compacto).

Caso 2. h_j hiperbólica. En este caso una componente de $\Delta - \Gamma_j$ contiene a $G(K)$ y por lo tanto la órbita del origen, ya que $0 \in K$. Ahora, como el grupo es no elemental, $G(0)$, la órbita de 0 , se acumula en cualquier punto límite definido por G (cf. [2], p. 98). Por consiguiente, el conjunto límite está en la cerradura de la componente que contiene a $G(K)$. Por otro lado, la otra componente de $\Delta - \Gamma_j$ contiene a D_j y entonces no hay puntos límite en el arco abierto de $\partial\Delta$ que rodea esta componente.

Ahora, al considerar los bisectores de los segmentos $[0, h_j(0)]$ y $[0, h_j^{-1}(0)]$, y como $D_j \subset D$, se sigue que los bisectores separan a D_j de los puntos fijos de h_j . Para probar esta última afirmación, usando la función de Cayley y una traslación hiperbólica, podemos suponer que G es conjugado bajo una función $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ a un grupo gGg^{-1} que actúa en \mathbb{H}^2 de tal manera que el biselector entre $g(0)$ y $gh_j(0)$ sea el biselector perpendicular euclidiano a $g(\alpha)$ y $g(\beta)$, donde α, β son los puntos fijos de h_j (que se pueden suponer finitos). Véase la Figura 2.20; es claro entonces que $g(\beta) \notin g(\overline{D})$ y $\beta \notin \overline{D}$.

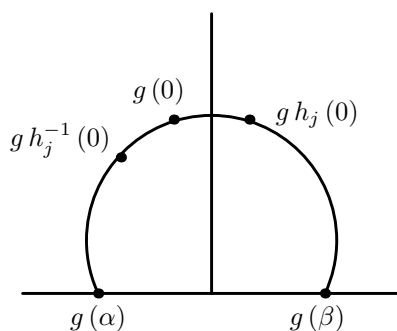


Figura 2.20: El bisector de $g(0)$ con $gh_j(0)$ separa al polígono de Dirichlet del punto $g(\beta)$

Analogamente, se muestra que $\alpha \notin \bar{D}$. Por lo que se sigue que los extremos de $\bar{D}_j \cap \partial\Delta$ son puntos ordinarios, de donde se obtiene que \bar{D} está contenido en el conjunto de puntos ordinarios (véase la Figura 2.21).

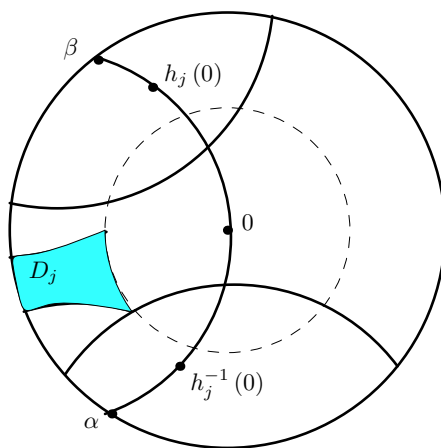


Figura 2.21: Los bisectores de 0 con $h^{-1}(0)$ y $h(0)$ separan al polígono de Dirichlet de los puntos fijos de la transformación hiperbólica

Ahora, ya que $\text{Diam}_E(g_n(D)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ (véase [2], p. 219), se afirma que \tilde{D}_j interseca un número finito de imágenes de \tilde{D} y por lo tanto de lados de D . Para probar esta afirmación, supongamos que una cantidad infinita de imágenes de \tilde{D} interseca \bar{D}_j , entonces se podría tomar una sucesión de puntos en cada $g_j(D)$, digamos $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, de tal forma que existe un punto de acumulación x^* de los conjuntos $g_j(\bar{D}) \cap \bar{D}_j$ tal que

$x_j \rightarrow x^*$. Como $Diam_E(g_n(\tilde{D})) \rightarrow 0$, al tomar una vecindad de radio 2ε alrededor de x^* , se tiene que las imágenes de D bajo las transformaciones g_j que intersecan la bola de radio ε están totalmente contenidas en la bola de radio 2ε , salvo un número finito de ellas, de donde se puede suponer que la sucesión de puntos en las $g_j(D)$ se encuentran en la misma órbita. Finalmente, esto implica que x^* es un punto límite, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, se sigue que \tilde{D}_j interseca un número finito de imágenes de \tilde{D} y por lo tanto se tiene que D tiene un número finito de lados.

Caso 3. h_j parabólica. En este caso $\overline{D}_j \cap \partial\Delta$ consiste de un solo punto que es exactamente el punto fijo de h_j . Como en el caso anterior, la órbita de 0 está en la componente donde se encuentra $G(K)$ y se tienen dos casos: puede suceder que \overline{D}_j no interseca a $\partial\Delta$, y en esta situación \tilde{D}_j interseca solamente un número finito de lados de D . En otro caso, sabemos que dos lados de D se intersecan en el punto fijo de una transformación parabólica y este es un vértice propio (cf. [2], p. 224). Bajo estas hipótesis, se obtiene que \overline{D}_j interseca a $\partial\Delta$ en el punto fijo de h_j , por lo que al *cortar* esta *cúspide* a D_j (véase la Figura 2.22), se obtiene un subconjunto compacto de D_j que interseca un número finito de lados de D , y por consiguiente D tiene un número finito de lados, con lo que se concluye que **a)** implica **c)**.

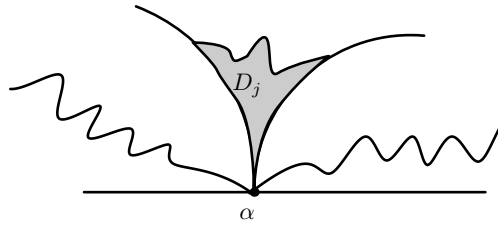


Figura 2.22: *Cúspide* del caso parabólico

Nótese que este argumento muestra que todo polígono de Dirichlet tiene un número finito de lados, ya que si $D_G(w)$ es un polígono de Dirichlet para G , donde w no es un punto fijo para G y $h \in M(\Delta)$ tal que se cumple que $h(w) = 0$, entonces trabajamos con $D_{hGh^{-1}}(h(w))$. Si $D_{hGh^{-1}}(h(w))$ tiene un número finito de lados, entonces $D_G(w)$ también.

Falta probar en el Teorema 2.2.9 que **c)** implica **d)**. La prueba de este hecho aparece en el siguiente capítulo. \square

CAPÍTULO 3

Puntos de aproximación

Consideremos un grupo fuchsiano G actuando en Δ y sea η un punto límite de G , esto es, un punto tal que existen $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, distintos de tal forma que $g_n(0) \rightarrow \eta$, cuando $n \rightarrow \infty$. Nótese que si G es no elemental, se sigue que $\Lambda(0) = \Lambda$ (cf. [2], pp. 98-99). Si G es elemental, entonces G es cíclico o G contiene un subgrupo cíclico de índice 2 (caso hiperbólico) y es claro que $\Lambda(z) = \Lambda$ para toda $z \in \Delta$ (cf. [5], capítulo 3), puesto que en estos casos los puntos límite son atractores.

Se determinará que tan rápido en términos euclidianos, converge $g_n(0)$ a η . Obsérvese que $|\eta - g_n(0)| \geq 1 - |g_n(0)|$, donde la igualdad se alcanza por ejemplo, cuando g_n es la n -ésima iteración de algún elemento hiperbólico g , cuyo eje es el diámetro euclidiano $[-\eta, \eta]$ en Δ .

Ahora, el grado de convergencia más rápido (salvo por un factor constante) ocurre cuando la sucesión $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de la sucesión $1 - |g_n(0)|$, cuando $n \rightarrow \infty$; es decir, cumple que

$$\frac{|\eta - g_n(0)|}{1 - |g_n(0)|} \leq m,$$

para n suficientemente grande, donde m es una constante positiva. En caso contrario, si la sucesión $|\eta - g_n(0)|$ no es \mathcal{O} de la sucesión $1 - |g_n(0)|$, se podría tomar una subsucesión n_k tal que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{|\eta - g_{n_k}(0)|}{1 - |g_{n_k}(0)|} = \infty,$$

esto es, que la sucesión $\{|\eta - g_n(0)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge rápidamente (es decir, $|\eta - g_n(0)| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, más lentamente que $1 - |g_n(0)|$).

Por otro lado, se afirma que $(1 - |g_n(0)|) \cosh \rho(0, g_n(0)) \rightarrow 1$, cuando $n \rightarrow \infty$. Para probar esto, usamos la fórmula

$$\cosh^2 \frac{\rho(z, w)}{2} = \frac{1 - z\bar{w}}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$$

(cf. [2], p. 132). Obteniéndose

$$\begin{aligned} (1 - |g_n(0)|) \cosh \rho(0, g_n(0)) &= \frac{(1 - |g_n(0)|^2) \cosh \rho(0, g_n(0))}{1 + |g_n(0)|} \\ &= \frac{2 \cosh^2 \left(\frac{\rho(0, g_n(0))}{2} \right) - 1}{\left(\cosh^2 \left(\frac{\rho(0, g_n(0))}{2} \right) \right) (1 + |g_n(0)|)} \rightarrow 1, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, ya que $\cosh 2\rho = 2 \cosh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) - 1$.

Además, se cumple la siguiente identidad

$$||g_n||^2 = 2 \cosh \rho(0, g_n(0)) \quad (3.1)$$

(cf. [2], p. 138).

De esta forma se obtiene que las sucesiones $||g_n||^2$, $2 \cosh \rho(0, g_n(0))$ y $\frac{2}{1 - |g_n(0)|}$ son asintóticas entre sí, cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora, se afirma que la razón de convergencia más rápida se puede describir en términos hiperbólicos, esto es, si la sucesión $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de la sucesión $\frac{1}{\cosh \rho(0, g_n(0))}$. Esto se sigue ya que

$$(|\eta - g_n(0)|) \cosh \rho(0, g_n(0)) = \left(\frac{|\eta - g_n(0)|}{1 - |g_n(0)|} \right) (1 - |g_n(0)|) (\cosh \rho(0, g_n(0)))$$

está acotada, bajo las hipótesis de que $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $1 - |g_n(0)|$, cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, si $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $\frac{1}{\cosh \rho(0, g_n(0))}$, se obtiene que

$$\frac{|\eta - g_n(0)|}{1 - |g_n(0)|} = \frac{(|\eta - g_n(0)|) (\cosh \rho(0, g_n(0)))}{(\cosh \rho(0, g_n(0)))(1 - |g_n(0)|)}$$

es una sucesión acotada.

Finalmente, usando (3.1), se obtiene el mayor grado de convergencia en términos de matrices, esto es, cuando la sucesión $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $||g_n||^{-2}$, cuando $n \rightarrow \infty$.

A continuación, probamos el siguiente lema que será utilizado en la demostración del Teorema 2.2.9.

Lema 3.0.10 Sean G un grupo fuchsiano actuando en Δ , η un punto límite de G y g_1, g_2, \dots elementos distintos de G . Si L y L' son semirrayos geodésicos que terminan en η , de tal forma que para cada punto $w \in \Delta$, $\rho(g_n(w), L)$ es una sucesión acotada, entonces $\rho(g_n(w), L')$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Antes de probar el lema, hacemos las siguientes observaciones.

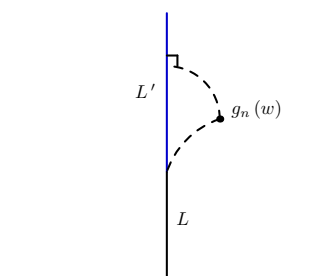


Figura 3.1: Observación i) del Lema 3.0.10

i) Nótese que si

$$\rho(g_n(w), L) < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\rho(g_n(w), L') < \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde L' es un semirrayo geodésico que se obtiene de extender L (véase la Figura 3.1).

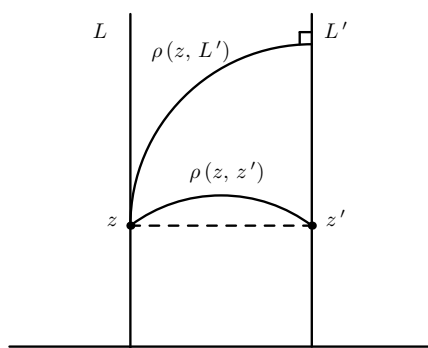


Figura 3.2: Observación ii) del Lema 3.0.10, si $n = \infty$.

ii) Si L y L' son geodésicas tangentes en un punto η , se tiene que para cada punto $z \in L$, $\rho(z, z') > \rho(z, L')$, donde z' es el punto equivalente horocíclico a z que se encuentra en L' , es decir que si se traza el horociclo basado en η que corta a L en z , este horociclo corta a L' en z' (véase la Figura 3.2). Además, nótese que si desplazamos z a lo largo de L hacia η , $\rho(z, z') \rightarrow 0$ y por consiguiente, $\rho(z, L') \rightarrow 0$.

Probamos ahora el lema. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer en virtud de la afirmación **i)**, que L y L' tienen la misma longitud hiperbólica. Obsérvese que para $g_n(w)$ fija, existe un punto $z \in L$, tal que $\rho(g_n(w), L) = \rho(g_n(w), z)$. Denotamos por z' al proyectado horocíclico de z en L' . Además, existe un punto $u' \in L'$, tal que $\rho(z, L') = \rho(z, u')$ (véase la Figura 3.3).

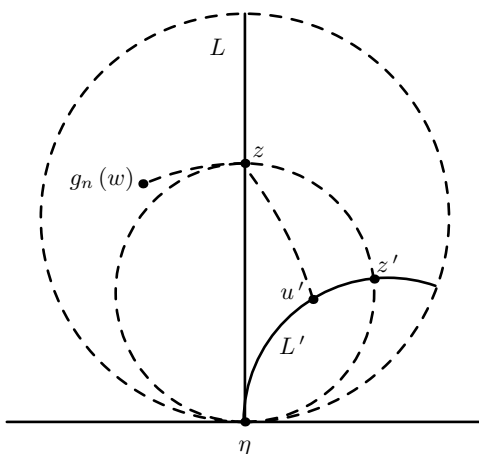


Figura 3.3: Región horocíclica usada en la demostración del lema 3.0.10

Luego

$$\rho(z, L') = \inf \{ \rho(z, u) \mid u \in L' \} < \rho(z, z') \leq M,$$

donde M es la longitud horocíclica de L y L' , es decir, la distancia hiperbólica de los extremos finitos de L y L' . Finalmente

$$\begin{aligned} \rho(g_n(w), L') &= \inf \{ \rho(g_n(w), u) \mid u \in L' \} \leq \rho(g_n(w), z') \\ &\leq \rho(g_n(w), z) + \rho(z, z') < m + M, \end{aligned}$$

donde m es la cota de la sucesión $\rho(g_n(w), L)$, $n \in \mathbb{N}$, por lo que se sigue el resultado, ya que este argumento se cumple para toda $g_n(w)$. \square

A continuación enunciamos un resultado, cuya prueba se puede consultar en [9], pp. 16-18.

Teorema 3.0.11 *Si L es el diámetro $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$ y $z \in \Delta$, entonces*

$$\sinh(\rho(z, L)) = \frac{2|\operatorname{Im}(e^{-i\theta}z)|}{1 - |z|^2}$$

El siguiente resultado proporciona tres interpretaciones del grado de la rapidez de convergencia a los puntos límite, lo que permite entender mejor cuando son éstos puntos de aproximación.

Teorema 3.0.12 *Bajo las hipótesis del lema 3.0.10, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- a) *Para cada $w \in \Delta$, $|\eta - g_n(w)|$ es \mathcal{O} de la sucesión $\|g_n\|^{-2}$.*
- b) *Para cada $w \in \Delta$ y cada semirrayo geodésico L que termina en η , $\rho(g_n(w), L)$ es una sucesión acotada.*
- c) *Para cada semirrayo geodésico L que termina en η , existe un subconjunto compacto de Δ , K , tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,*

$$(g_n)^{-1}(L) \cap K \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, obsérvese que $\rho(g(w), L) \leq m$ si y sólo si $g^{-1}(L)$ interseca al disco $D(w, m)$. Esto se sigue ya que

$$g^{-1}(L) \cap D(w, m) \neq \emptyset$$

si y sólo si

$$L \cap g(D(w, m)) \neq \emptyset,$$

donde $g(D(w, m)) = \{z \mid \rho(z, g(w)) \leq m\}$.

Ahora, verificamos que b) implica c). Por hipótesis, $\rho(g_n(w), L) \leq m_w$ para cada $w \in \Delta$. Tomando w fija, por la observación anterior, tomando $K = \overline{D(w, m_w)}$, se sigue c). Para probar que c) implica b), por hipótesis,

dada $w \in \Delta$ se puede considerar un subconjunto compacto K tal que $g_n^{-1}(K) \cap L \neq \emptyset$. Tomando m tal que $K \subset D(w, m)$, se sigue de la observación que $\rho(g_n(w), L) \leq m$, ya que $g_n^{-1}(D(w, m)) \cap L \neq \emptyset$. Por lo tanto $\rho(g_n(w), L)$ está acotada, con lo que se obtiene b) y por consiguiente b) es equivalente a c). Más aún, obsérvese que b) es independiente de w (para L fija), es decir, que si la afirmación es válida para alguna w , es válida para toda w . Esto se sigue, ya que si b) se cumple para alguna w fija, se cumple c) y si c) se cumple, b) se cumple para toda w . También, en virtud del Lema 3.0.10 se sigue que la afirmación b) del Teorema 3.0.12 es independiente de la elección de L .

En el resto de la prueba, denotaremos por L' al diámetro $(-\eta, \eta)$ y L al segmento $[0, \eta]$. Nótese que si z está cerca de η , entonces se tiene que $\rho(z, L) = \rho(z, L')$.

A continuación probaremos que a) implica b). Suponemos que

$$|\eta - g_n(0)| |g_n|^2 \leq m,$$

donde $m > 0$. Por las observaciones previas al Lema 3.0.10, $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $|g_n|^{-2}$ si y solamente si $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $1 - |g_n(0)|$. Obsérvese que esto implica que $g_n(0) \rightarrow \eta$, cuando $n \rightarrow \infty$, ya que de lo contrario, como $|g_n(0)| \rightarrow 1$, se podría tomar una subsucesión de la sucesión $\frac{|\eta - g_n(0)|}{1 - |g_n(0)|}$, tal que dicha subsucesión no estuviera acotada, lo cual contradice el hecho de que $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $1 - |g_n(0)|$. De esta forma, para n suficientemente grande, se tiene que $\rho(g_n(0), L) = \rho(g_n(0), L')$. Por el Teorema 3.0.11, si $z \in \Delta$, se tiene que

$$\operatorname{senh} \rho(z, L') = \frac{2 |\operatorname{Im}(e^{-i\theta} z)|}{1 - |e^{-i\theta} z|} = \frac{2 |\operatorname{Im}(\bar{\eta} z)|}{1 - |z|^2}, \quad (3.2)$$

donde $\eta = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Además, obsérvese que para todo $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} w \leq |w - 1|$ y que si $|z| < 1$, entonces

$$\frac{1}{1 - |z|^2} < \frac{1}{1 - |z|}.$$

Luego, de (3.2) se obtiene que

$$\operatorname{senh} \rho(z, L') \leq \frac{2 |\bar{\eta} z - 1|}{1 - |z|^2} \leq \frac{2 |z - \eta|}{1 - |z|}.$$

Tomando $z = g_n(0)$ y para n suficientemente grande, se obtiene que $\rho(g_n(0), L)$ es una sucesión acotada, como b) es independiente de la elección de w , se sigue que a) implica b).

Finalmente, verificamos que b) implica a). Para esto, tenemos dos casos:

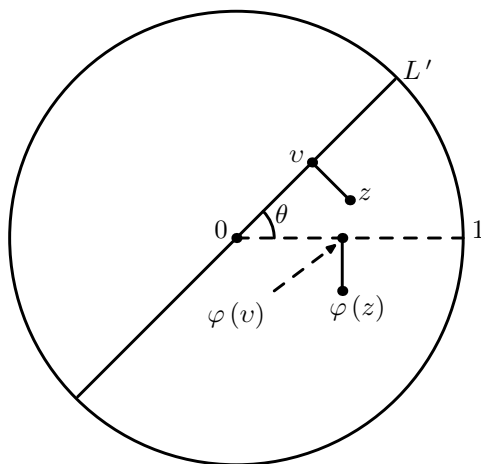


Figura 3.4: Interpretación geométrica de la ecuación $|z - v| = |\operatorname{Im}(\bar{\eta}z)|$, $\varphi(w) = e^{-i\theta}w$

Caso 1: $w = 0$. Sean $z \in \Delta$ un punto que se encuentra más cercano a η que a $-\eta$ y v el pie de la perpendicular euclidiana de z a L' . Nótese que η es el punto en $\partial\Delta$ que se encuentra más cerca (en el sentido euclidiano) de v . Esto se sigue, ya que si existiera un punto $w \in \partial\Delta$ tal que

$$|w - v| < |\eta - v|,$$

entonces

$$|w| \leq |v| + |w - v| < |v| + |\eta - v| = 1,$$

lo cual es una contradicción al hecho de que $w \in \partial\Delta$. De esta forma, se obtiene que

$$\begin{aligned} |z - \eta| &\leq |z - v| + |v - \eta| \leq |z - v| + \left|v - \frac{z}{|z|}\right| \\ &\leq |z - v| + |v - z| + \left|z - \frac{z}{|z|}\right| \\ &= 2|z - v| + \left|\frac{z}{|z|}\right| ||z| - 1|, \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$|z - \eta| \leq 2|z - v| + (1 - |z|). \quad (3.3)$$

Por otro lado, obsérvese que $v = k\eta$ y por el teorema de Pitágoras, $|v|^2 + |v - z|^2 = |z|^2$, por lo que se sigue que $2|v|^2 = 2v \cdot z$; luego, $|k\eta|^2 = k(\eta \cdot z)$, donde (\cdot) denota el producto punto real. Por consiguiente, se obtiene que $v = (\eta \cdot z)\eta$. Escribiendo $\eta = e^{i\theta}$, se obtiene

$$\begin{aligned} |z - v| &= |z - (z \cdot e^{i\theta})e^{i\theta}| = |ze^{-i\theta} - z \cdot e^{i\theta}| \\ &= |y \cos \theta - x \sin \theta| = |\operatorname{Im}(\bar{\eta}z)|. \end{aligned}$$

Geoméricamente, consideramos la rotación $\varphi(w) = e^{-i\theta}w$, donde θ es el argumento de z . Hay que hacer notar que ésta es una transformación de Möbius por lo que manda rectas en rectas y preserva ángulos, más aún, es una isometría, por lo que $|z - v| = |\varphi(z) - \varphi(v)| = |\operatorname{Im}(\varphi(z))|$ (véase la Figura 3.4).

Por la desigualdad (3.3) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{|z - \eta|}{1 - |z|^2} &\leq \frac{2|z - v|}{1 - |z|^2} + \frac{1 - |z|}{1 - |z|^2} = \frac{2|\operatorname{Im}(\bar{\eta}z)|}{1 - |z|^2} + \frac{1}{1 + |z|} \\ &\leq \operatorname{senh} \rho(z, L') + 1. \end{aligned}$$

Tomando $z = g_n(0)$, se sigue el resultado, ya que $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $1 - |g_n(0)|$ si y sólo si $|\eta - g_n(0)|$ es \mathcal{O} de $\|g_n\|^{-2}$. De esta forma se obtiene que b) implica a) para el caso $w = 0$.

Caso 2: $w \in \Delta$, $w \neq 0$. Sea $g \in M(\Delta)$ de la forma

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned} |g(w) - g(0)| &= \left| \frac{aw + \bar{c}}{cw + \bar{a}} - \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \right| = \left| \frac{|a|^2 w + \bar{a}\bar{c} - |c|^2 w - \bar{a}\bar{c}}{\bar{a}cw + \bar{a}^2} \right| \\ &= \frac{|w|}{|a| |cw + \bar{a}|}, \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$|g(w) - g(0)| = \frac{|w|}{|acw + |a|^2|}. \quad (3.4)$$

No es difícil probar que $|a| = \cosh\left(\frac{1}{2}\rho(0, g(0))\right)$ y $|c| = \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(0, g(0))\right)$ (cf. [2], pp. 137-138). Además

$$\cosh\rho(0, g(0)) = 2\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(0, g(0))\right) - 1 = 2|a|^2 - 1.$$

Como $|a|^2 \geq |c|^2$, se sigue que $|a|^2|w| \geq |acw|$, luego por la ecuación (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned} |g(w) - g(0)| &\leq \frac{|w|}{||a|^2 - |acw||} \leq \frac{|w|}{||a|^2 - |a|^2|w||} = \frac{|w|}{|a|^2(1 - |w|)} \\ &= \frac{|w|}{\left(\frac{\cosh\rho(0, g(0)) + 1}{2}\right)(1 - |w|)} \\ &\leq \frac{2}{(\cosh\rho(0, g(0)) + 1)(1 - |w|)}, \end{aligned}$$

y por la ecuación (3.1), se concluye que $|g(w) - g(0)| \leq \frac{4}{(1 - |w|)||g||^2}$.

Finalmente

$$\begin{aligned} |g_n(w) - \eta| ||g_n||^2 &\leq |g_n(w) - g_n(0)| ||g_n||^2 + |g_n(0) - \eta| ||g_n||^2 \\ &\leq \frac{4}{1 - |w|} + m, \end{aligned}$$

donde m es la cota de la sucesión $|g_n(0) - \eta| ||g_n||^2$. Por lo tanto, $|\eta - g_n(w)|$ es \mathcal{O} de $||g_n||^{-2}$, de donde se concluye que b) implica a). \square

El teorema anterior permite definir de manera unívoca los puntos límite que son de aproximación, es decir, donde el grado de convergencia es más rápido.

Definición 24 *Un punto límite η de un grupo fuchsiano G es un punto de aproximación de G si para todo $w \in \Delta$ existe una sucesión de transformaciones $g_n \in G$ distintas tales que la sucesión $|\eta - g_n(w)|$ es \mathcal{O} de la sucesión $||g_n||^{-2}$, cuando $n \rightarrow \infty$.*

Teorema 3.0.13 *Un punto de aproximación de un grupo fuchsiano G no pertenece a la frontera de ningún polígono fundamental convexo para G .*

DEMOSTRACIÓN. Sea η un punto de aproximación y supongamos que el punto $\eta \in \partial P$, donde P es un polígono fundamental convexo para G . Por convexidad, se puede tomar un semirrayo geodésico que termina en η , y está totalmente contenido en P . Por el Teorema 3.0.12, existe un subconjunto compacto de Δ , K , tal que $g_n^{-1}(P) \supset g_n^{-1}(L) \cap K \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción al hecho de que P es localmente finito. \square

Todo punto fijo parabólico de un grupo fuchsiano, está en la frontera de alguna región de Dirichlet. Esto se cumple ya que al tomar cualquier polígono de Dirichlet, el punto fijo parabólico está en alguna de las imágenes del polígono, que también son de Dirichlet (Teorema 2.2.9). En consecuencia, un punto fijo parabólico no puede ser un punto de aproximación.

Ahora, para grupos finitamente generados, tenemos una descripción completa de los puntos límite de G .

Teorema 3.0.14 *Un grupo fuchsiano G es finitamente generado si y sólo si cada punto límite es un punto fijo parabólico de G o un punto de aproximación*

Observación. Si Λ tiene sólo puntos de aproximación o puntos fijo parabólicos, diremos que Λ se bifurca, es decir, el Teorema 3.0.14 se puede reformular como sigue: *Un grupo fuchsiano G es finitamente generado si y sólo si Λ se bifurca.*

Recordamos también que en el Teorema 2.2.9 hemos probado que si G es finitamente generado, entonces existe un polígono fundamental convexo con un número finito de lados para G . Para probar el Teorema 3.0.14, mostraremos que si existe un polígono fundamental convexo P con un número finito de lados, entonces Λ se bifurca. Por otra parte, si Λ se bifurca, probaremos que todo polígono fundamental convexo para G tiene un número finito de lados. En consecuencia, esta demostración concluiría la prueba del Teorema 2.2.9, ya que la existencia de un polígono fundamental convexo con un número finito de lados implicaría que todo polígono fundamental convexo tiene un número finito de lados.

DEMOSTRACIÓN. (DEL TEOREMA 3.0.14) Supongamos que Λ se bifurca y sea P un polígono fundamental convexo para G . Si P tiene un número infinito de lados, entonces estos lados se acumulan en algún punto $\eta \in \partial \Delta$

(esto se verifica, tomando un punto interior en cada lado), además nótese que $\eta \in \overline{P}$. Como los diámetros euclidianos de las imágenes de P tienden a cero, se afirma que $\eta \in \Lambda$. Para probar esta afirmación, sea $D_E(\eta, \frac{\varepsilon}{2})$ un disco euclidiano centrado en η , como este disco interseca un número infinito de lados de P , también interseca un número infinito de imágenes de P bajo las transformaciones g_n , g_n distintas. Luego para n suficientemente grande, $\text{diam}(g_n(P)) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que se sigue que, para n suficientemente grande $g_n(P) \subset D_E(\eta, \varepsilon)$ y por lo tanto $\eta \in \Lambda$ (tomando una órbita de un punto en P).

Por el Teorema anterior, η no es un punto de aproximación, ya que $\eta \in \partial P$. Más aún, η no es un punto fijo parabólico, ya que si lo fuera, dos lados de P se intersecarían en η y η sería un vértice propio (cf. [2], p. 224), lo cual no sucede ya que un número infinito de lados se acumulan en η , lo cual contradice que Λ se bifurca.

Por lo tanto, P tiene un número finito de lados y, en consecuencia, G es finitamente generado.

Ahora, supongamos que G es finitamente generado. De acuerdo a los argumentos del Teorema 2.2.9 en la implicación a) \Rightarrow c), cualquier polígono de Dirichlet para G tienen un número finito de lados. Más aún, se puede tomar el centro del polígono de tal manera que cumpla las condiciones del Teorema 1.0.2, es decir, todo vértice impropio que es punto ordinario está en un ciclo de longitud 2 y todo vértice propio está en un ciclo de longitud 1. Además, si $D_G(w)$ es el polígono de Dirichlet para G con centro en w , se tiene que

$$h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(h(w))$$

(cf. [2], p. 227). Por otro lado, nótese que si η es punto de aproximación de G , entonces $h(\eta)$ es punto de aproximación de hGh^{-1} . Esto se sigue ya que si $h \in M(\Delta)$ y L es un semirrayo geodésico que termina en η , entonces

$$\rho(g_n(w), L) \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \rho(hg_n h^{-1}(z), h(L)) \leq k,$$

de donde se concluye que $h(\eta)$ es punto de aproximación de hGh^{-1} . De igual forma, nótese que si $g \in G$ es parabólica, $hg h^{-1}$ es parabólica y, en consecuencia, si $v \in \mathbb{P}$ es punto fijo parabólico, entonces $h(v)$ también es punto fijo parabólico. Además

$$h(\Lambda_G) = \Lambda_{hGh^{-1}}.$$

En consecuencia, conjugando, se puede suponer que $w = 0$. Denotamos por P al polígono de Dirichlet con centro en 0 .

Por otra parte, si dos lados de P , digamos s y s' , tienen un punto común v en $\partial\Delta$, en virtud del Teorema 1.0.2 b), se sigue que v es un vértice parabólico y el estabilizador de v está generado por $p \in G$, p parabólico, tal que $p(s) = s'$ (el ciclo es de longitud 1).

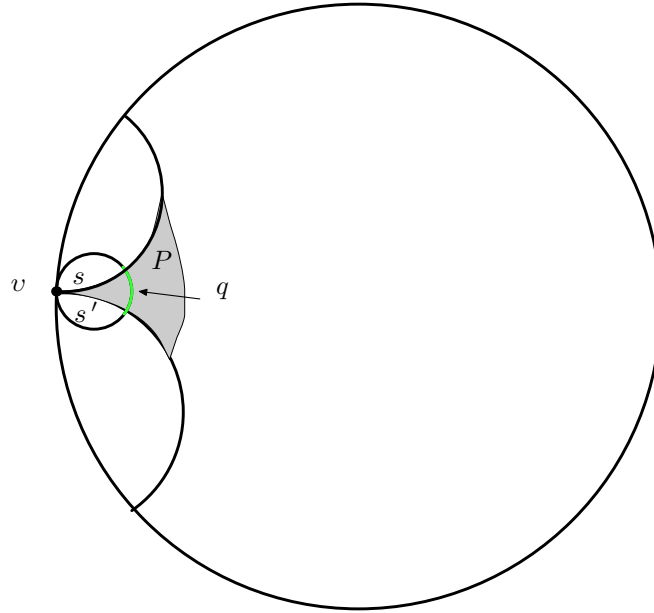


Figura 3.5: Vértice parabólico

Se puede construir una región horocíclica (que corte a P en una cúspide en v) que tiene como frontera un horociclo Q , es decir, un disco que interseca ∂P en exactamente los 2 lados s y s' . Obsérvese que existe un arco compacto q de Q tal que

$$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} p^n(q),$$

y $q \subset \tilde{P}$ (véase la Figura 3.5).

Se puede hacer una construcción similar para los lados libres. Sea σ el intervalo de discontinuidad donde yace un lado libre. Cada punto final de un lado libre es un punto final de alguna imagen de algún lado libre, ya que los ciclos tienen longitud 2 (Teorema 1.0.2 b)). En consecuencia, para alguna

$h \in G$, $h \neq Id$, h transforma una imagen de un lado libre en σ a otra imagen de otro lado libre que se encuentra también en σ . Esto se sigue ya que si se toma un lado libre γ , un extremo de γ se apareará con otro extremo de un lado libre y como se tiene un número finito de lados libres, en algún momento regresaremos al mismo intervalo de discontinuidad donde γ yace, sólo que γ se habrá recorrido (véase la Figura 3.6).

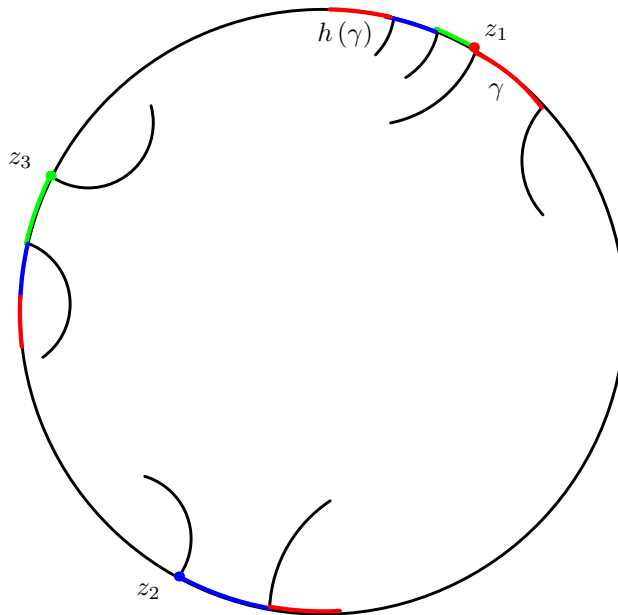


Figura 3.6: Apareamiento de 3 extremos de lados libres

El intervalo de discontinuidad σ en el que un lado libre yace, es la unión numerable de imágenes de un número finito de lados libres de P , puesto que las imágenes no se traslapan (salvo en sus extremos) y se acumulan solamente en los puntos finales de σ . Nótese que al iterar el proceso, como $\text{diam } g_n(P) \rightarrow 0$, hay puntos límite en ambas direcciones. Esto se sigue repitiendo el argumento dado en la demostración del Teorema 2.2.9, esto es, tomamos un punto en el interior de un lado libre fijo que pertenezca al mismo intervalo de discontinuidad y sus imágenes en dicho intervalo. Nótese que al aplicar las iteraciones h^n , $n \in \mathbb{Z}$ a γ y los lados libres asociados con γ se genera σ .

Por tanto, por conexidad se tiene que $h(\sigma) = \sigma$, puesto que los intervalos de discontinuidad son permutados por los elementos de G . Se sigue que h

fija $\partial\sigma$ y por consiguiente, h es hiperbólica cuyo eje es la geodésica generada por $\partial\sigma$, que denotamos por L . Nótese que la construcción implica que h genera el estabilizador de L , si existe g , tal que $g(L) = L$, entonces g es hiperbólica y $g(\sigma) = \sigma$, por lo que $g = h^n$, (no puede haber puntos equivalentes en los “intervalos” de los lados libres). Obsérvese que existe un subarco compacto l de L tal que

$$L = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(l).$$

(véase la Figura 3.7)

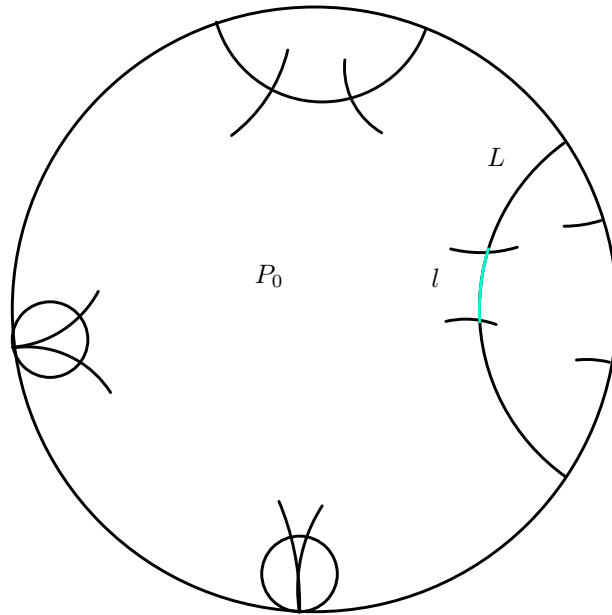


Figura 3.7: Eje L

Ahora hacemos las siguientes observaciones.

- (i). Las geodésicas L y los horociclos Q son finitos y separan los puntos frontera de P en Δ de un compacto $P_0 \subset \tilde{P}$; sea K el compacto formado por P_0 y los arcos q y l .
- (ii). Sea $\eta \in \Lambda$ tal que no es punto fijo parabólico y sea L_0 un semirrayo geodésico que termina en η . El punto inicial de L_0 se puede mandar a un

punto en \tilde{P} y la correspondiente imagen de L_0 no puede estar completamente en las regiones horocíclicas, ni tampoco puede terminar en un lado libre, ya que la imagen de η sería un punto fijo parabólico o un punto ordinario y, en consecuencia, η también lo sería.

De esta forma, se tiene que $L_0 \cap P_0 \neq \emptyset$, o L_0 interseca los ejes L , o L_0 interseca los horocíclicos. En estos dos últimos casos, alguna imagen de L_0 interseca algún arco q o l . Si L_0 interseca al horociclo Q en un punto ξ , al aplicar la transformación p correspondiente, la imagen de ξ se transforma en un punto de q . Por otro lado, si L_0 interseca a un eje L , al aplicar la h correspondiente la imagen de L_0 interseca el arco l (véase la Figura 3.8).

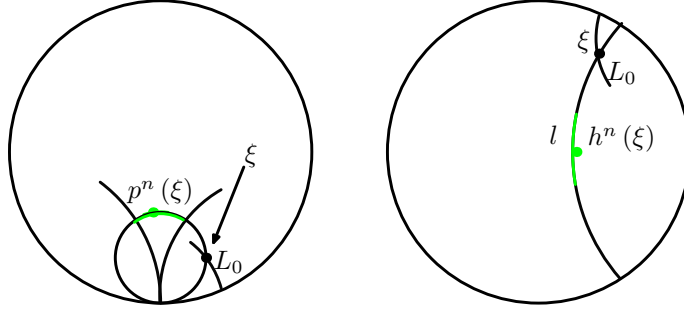


Figura 3.8: L_0 interseca a Q o a L .

En ambos casos, una imagen de L_0 , digamos bajo $g_0 \in G$, interseca K y por tanto, existe $z_0 \in L_0$ tal que $g_0(z_0) \in K$. Ahora, sea L_n el subarco de L_0 que se obtiene de quitar el arco inicial de L_0 de longitud hiperbólica n . Como antes, el rayo L_n contiene algún punto z_n (su extremo finito) tal que $g_n(z_n) \in K$, para alguna $g_n \in G$. Se sigue que $z_n \rightarrow \eta$ y el conjunto $\{g_1, g_2, \dots\}$ es infinito. De lo contrario, si suponemos que el conjunto es finito, digamos $\{g_{i_1}, \dots, g_{i_n}\}$, obsérvese que

$$\bigcup_{j=1}^n \left(g_{i_j}^{-1}(K) \cap L_0 \right) \subset l_0,$$

donde l_0 es un segmento de geodésica que va del extremo finito λ de L_0 al extremo inferior ζ de $\bigcup_{j=1}^n \left(g_{i_j}^{-1}(K) \cap L_0 \right)$ (véase la Figura 3.9).

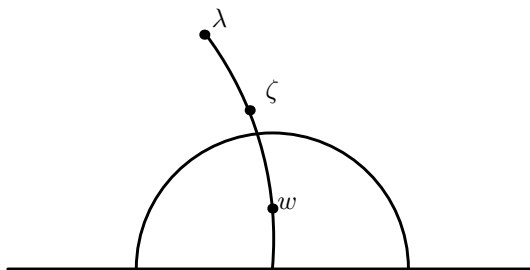


Figura 3.9: $\bigcup_{j=1}^n (g_{i_j}^{-1}(K) \cap L_0) \subset l_0$

Como sólo hay un número finito de transformaciones, se tiene que

$$g_l(L_0 - l_0) \cap K = \emptyset, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, esto es una contradicción, ya que por la construcción, para alguna $M \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\lambda, \zeta) < M$, existe $z_M \in L_0 - l_0$ tal que $g_M(z_M) \in K$. Por tanto, el conjunto $\{g_1, g_2, \dots\}$ es infinito, y por el Teorema 3.0.12, η es un punto de aproximación y se tiene que

$$g_n(L_0) \cap K \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad g_n^{-1}(K) \cap L_0 \neq \emptyset,$$

es decir Λ se bifurca, con lo que se concluye la prueba. \square

De acuerdo al teorema 3.0.13, todo punto fijo parabólico no es un punto de aproximación. Ilustramos esta afirmación en el caso de un grupo actuando sobre \mathbb{H}^2 donde ∞ es un punto fijo. Obsérvese que en este caso no se puede utilizar la Definición 24, ya que la expresión $|\infty - g_n(w)|$ no está definida. Sin embargo, el Teorema 3.0.12 b) permite usar una definición alternativa de punto de aproximación.

Definición 25 Sean G un grupo fuchsiano actuando en \mathbb{H}^2 , η un punto límite de G . Se dice que η es un punto de aproximación, si para cada punto $w \in \mathbb{H}^2$ y cada semirrayo geodésico L que termina en η , existe una sucesión g_1, g_2, \dots de elementos distintos de G , tal que $\rho(g_n(w), L)$ es una sucesión acotada.

En virtud del Lema 3.0.10, podemos suponer sin pérdida de generalidad que L es el semirrayo contenido en el eje imaginario con extremo finito en i y como se mostró en la prueba del Teorema 3.0.14, los puntos de aproximación son invariantes bajo conjugación.

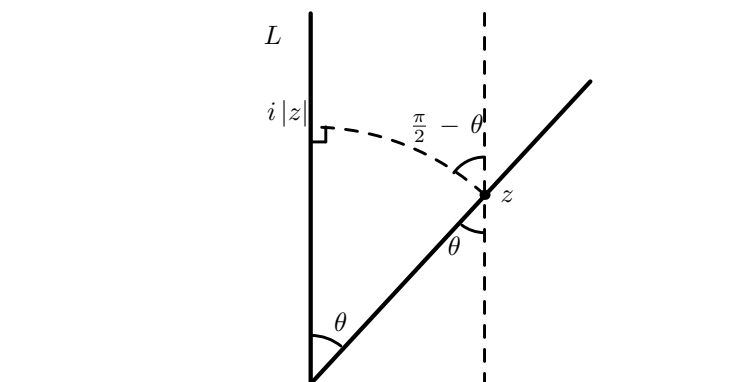


Figura 3.10: $\cosh \rho(z, L) = \frac{1}{\cos \theta}$

Ahora, si L es el eje imaginario positivo en \mathbb{H}^2 , los puntos en L tienen la forma $w = it$, $t > 0$, usando la fórmula para la distancia en \mathbb{H}^2 , es decir

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

donde $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|x + iy - it|^2}{2yt} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\ &= \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y}, \end{aligned}$$

donde la igualdad se alcanza si y sólo si $t = |z|$. Tomando θ como en la Figura 3.10 se tiene entonces que

$$\cosh \rho(z, L) = \frac{1}{\cos \theta} \tag{3.5}$$

Tomamos $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $\operatorname{Im} z \geq 1$ y definimos

$$g_n(z) = g^n(z), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{donde } g(z) = z + 1.$$

Nótese que cada $g_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, define una región hipercíclica de la forma

$$\{w \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(w, L) < k\} \quad k > 0,$$

donde $k = \rho(g_n(z), L)$ (Figura 3.11). Así, conforme $n \rightarrow \infty$, se genera un abanico de regiones hipercíclicas de tal forma que el ángulo θ tiende a $\frac{\pi}{2}$, luego $\frac{1}{\cos \theta} \rightarrow \infty$. Por tanto, en virtud de la igualdad (3.5), se sigue que para $z \in \mathbb{H}^2$, tal que $Im z \geq 1$,

$$\rho(g_n(z), L_1) = \rho(g_n(z), L) > M, \quad M > 0,$$

para n suficientemente grande, donde L_1 denota al semirrayo de geodésica contenido en L con extremo finito en i . Por tanto, ∞ no es un punto de aproximación.

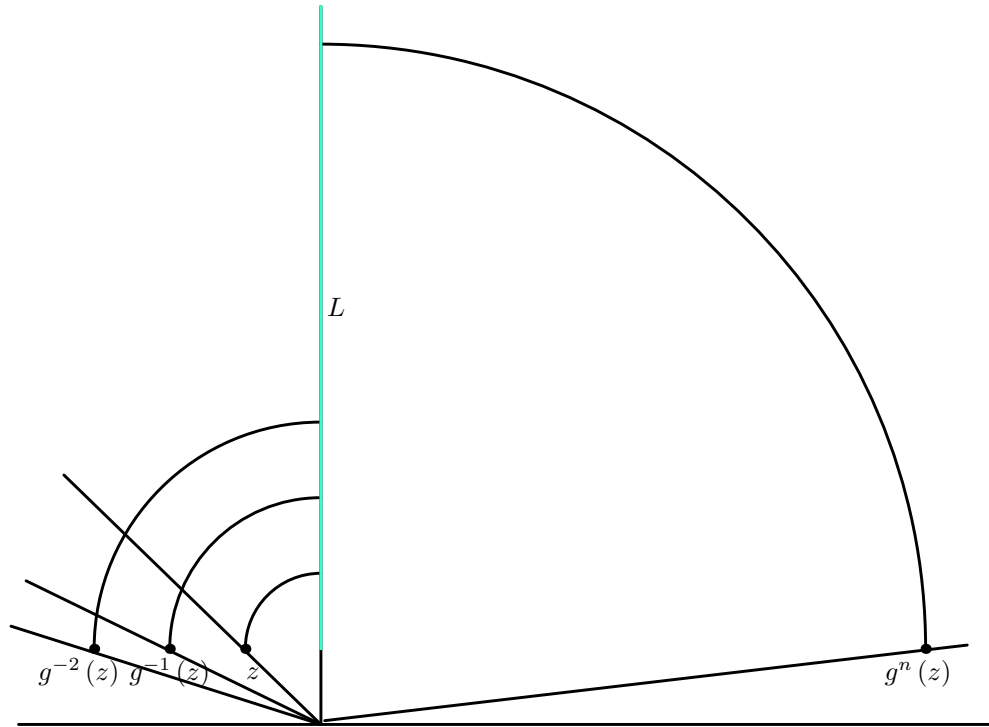


Figura 3.11: ∞ no es un punto de aproximación

Por otro lado, el Teorema 3.0.14 establece que una condición necesaria y suficiente para que un grupo fuchsiano sea finitamente generado es que el conjunto límite del grupo se bifurque. El siguiente ejemplo muestra un grupo cuyo conjunto límite no se bifurca y, en consecuencia, no es finitamente generado.

Consideramos las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 3 & -\frac{8}{2^n} \\ -2^n & 3 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \quad n \geq 2.$$

Se toman los grupos cíclicos hiperbólicos $G_n = \langle g_n \rangle$ para cada $n \geq 2$ (denotamos con el mismo símbolo la transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ y la matriz que la define), se tiene que cada grupo G_i es discontinuo actuando en $\widehat{\mathbb{C}}$. El conjunto ordinario de cada grupo contiene una vecindad de infinito y cada transformación de $G_i - Id$ tiene un círculo isométrico. Se puede verificar que

$$R_i = \text{ext}(D_{g_i}) \cap \text{ext}(D_{g_i^{-1}})$$

es un abierto fundamental para cada G_i , donde D_{g_k} es el círculo isométrico de la transformación g_k (véase [10] p. 51). Además, este abierto fundamental en $\widehat{\mathbb{C}}$, al ser cada grupo G_i fuchsiano, determina al restringirse a \mathbb{H}^2 un abierto fundamental para G_i en \mathbb{H}^2 . De hecho como es conexo, también es una región fundamental. Consideramos solamente la acción en \mathbb{H}^2 (Figura 3.12)

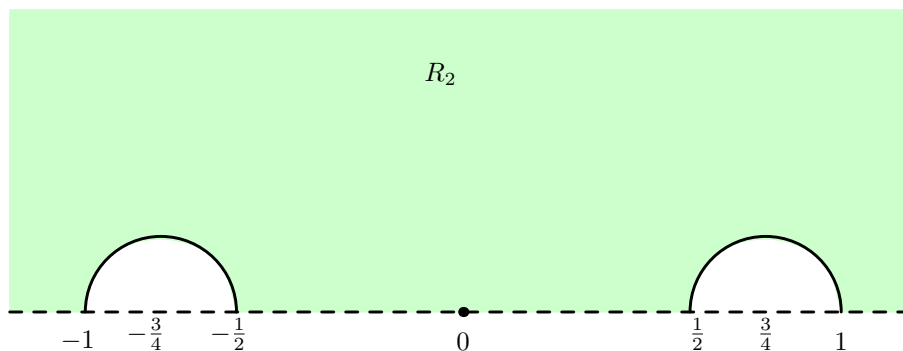


Figura 3.12: Región fundamental R_2 para G_2 .

Ahora, se puede verificar que

$$\text{int} \left(\bigcap_i R_i \right) = R_G$$

es un abierto fundamental para $G = * \prod G_i$ el producto libre de la familia de grupos $\{G_i\}$. De hecho, R_G resulta ser una región fundamental (cf. [6])

y [10] p. 52). Finalmente se concluye que R_G es un polígono fundamental convexo. Por otra parte, los vértices propios forman ciclos parabólicos de longitud 2. Por ejemplo, la geodésica cuyos puntos finales son -1 y $-\frac{1}{2}$ se aparea con la geodésica cuyos puntos finales son $\frac{1}{2}$ y 1 . Así, el punto $-\frac{1}{2}$ se corresponde, bajo la transformación g_1 , con el punto $\frac{1}{2}$, el cual es enviado al punto $-\frac{1}{2}$ mediante la transformación g_2 . Este proceso se repite con los demás vértices propios (véase la Figura 3.13). Además, $w = 0$ no puede ser punto de aproximación ya que pertenece a la frontera del polígono (Teorema 3.0.13) y tampoco es un punto fijo parabólico ya que no determina un ciclo finito (cf. [2] p. 224). Para ver esto, obsérvese que el exterior de un círculo isométrico, va al interior de otro. Luego, al iterar una transformación g_k las imágenes del punto $w = 0$ yacen en el interior de las imágenes del círculo isométrico correspondiente. Nótese que cualquier vecindad de w interseca un número infinito de lados de R_G (véase la Figura 3.13).

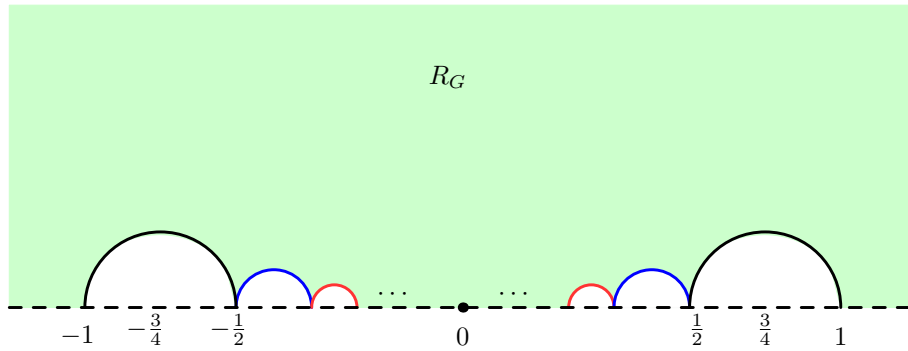


Figura 3.13: Región fundamental R_G para G .

Bibliografía

- [1] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [2] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [3] GREENBERG, M. J., *Algebraic Topology: a First Course*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [4] GROMOV, M., *Hyperbolic Manifolds (according to Thurston and Jørgensen)*, Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80 pp. 40-53, Lectures Notes in Math, 842, Springer, Berlin - New York, 1981.
- [5] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [6] LEHNER, J., *Discrete Groups and Automorphic functions*, Mathematical Surveys and Monographs, Number 8, American Mathematical Society, 1964.
- [7] MACLACHLAN COLIN, REID ALAN, W., *The Arithmetic on Hyperbolic 3- Manifolds*, Springer Verlag, 2003.
- [8] MARDEN, A. *Outer Circles: An Introduction to Hyperbolic 3- Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.
- [9] MARTÍNEZ VEGA, R., *Haces para elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y la función desplazamiento*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
- [10] PÉREZ GUERRERO, J., *Polígonos fundamentales convexos y regiones de Ford en $\widehat{\mathbb{C}}$* , Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

- [11] RATCLIFFE, J., *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer Verlag, 2006.
- [12] ROYDEN, H. L., *Real Analysis*, New York: Macmillan, 1988.
- [13] ZAMORANO ROMERO, I., *Una introducción a los polígonos y poliedros de Dirichlet*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2012.