



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
(INGENIERÍA CIVIL) – (GEOTECNIA)

MODELACIÓN MEDIANTE ECUACIONES
DIFERENCIALES Y REOLOGÍA FRACCIONARIAS DEL FENÓMENO DE *CREEP*
EN SUELOS DE ARCILLA RECONSTITUIDA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ARMANDO RAFAEL HERMOSILLO ARTEAGA

TUTOR PRINCIPAL
DR. MIGUEL P., ROMO, ORGANISTA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
COMITÉ TUTOR
DR. DANIEL, RESENDIZ, NÚÑEZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
DR. EFRAÍN, OVANDO, SHELLEY, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
DR. JORGE, CARRERA, BOLAÑOS, POSGRADO DE INGENIERÍA, UNAM
DR. GUSTAVO I., TOLSON, JONES, POSGRADO C. DE LA TIERRA, UNAM

MÉXICO, D. F. (JUNIO) 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente: **Dr. Resendiz Núñez Daniel**

Secretario: **Dr. Ovando Shelley Efraín**

vocal: **Dr. Romo Organista Miguel Pedro**

1^{er} suplente: **Dr. Carrera Bolaños Jorge**

2^{do} suplente: **Dr. Tolson Jones Gustavo Izard**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

- Posgrado de la facultad de Ingeniería, UNAM
- Instituto de Ingeniería, UNAM

Tutor de tesis:

Miguel P. Romo Organista

FIRMA

*A mis padres y
hermanos que
durante todo este
tiempo me han
brindado su
confianza*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco:

Al Dr. Miguel P. Romo por su invaluable asesoría en la dirección de este trabajo de tesis.

A los doctores Jorge Carrera Bolaños, Daniel Resendiz Núñez, Efraín Ovando Shelley y Gustavo Tolson Jones por sus valiosos comentarios y correcciones en la revisión de este trabajo.

Al M. en I. Roberto Magaña por compartir su experiencia y conocimientos durante mi estancia en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Al Ing. Enrique Gómez Rosas, actual coordinador de la sección de Instrumentación del Instituto de Ingeniería, por su colaboración en las modificaciones en la instrumentación y realización de software de adquisición de datos.

El Dr. Osvaldo Flores Castrejón por todo el apoyo brindado durante mi estancia en el laboratorio de Geotecnia.

A los laboratoristas Germán Aguilar Ramírez, Javier Hernández Lemus y Jaime Carrizosa Elizondo, por su loable ayuda en la realización de los ensayos en laboratorio.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por darme la oportunidad de formarme como futuro investigador.

Al CONACYT por concederme una beca durante la realización de mis estudios de posgrado.

A toda mi familia por brindarme su apoyo incondicional durante mis estudios de doctorado.

RESUMEN

En este trabajo se presentan conceptos básicos acerca del cálculo fraccional y la reología fraccionaria utilizados en el estudio del comportamiento visco-elástico de materiales y la aplicación de dicha metodología en la modelación del fenómeno de creep. También se presenta la solución de una ecuación diferencial fraccionaria que modela dicho fenómeno. Las curvas obtenidas de ensayos, sobre arcillas sintéticas, se reproducen adecuadamente utilizando la solución de la ecuación diferencial fraccionaria que modela el fenómeno de creep. Por último se presentan comentarios y conclusiones acerca del beneficio al emplear ecuaciones diferenciales fraccionarias en la simulación de fenómenos y problemas que se presentan en ingeniería.

ABSTRACT

In this paper, basic concepts about fractional calculus and fractional rheology used in the study of viscoelastic behavior of materials and the application of this methodology in modeling the creep phenomenon are presented; also the solution of a differential equation fractional modeling this phenomenon is commented. The curves obtained by testing synthetic clays were adequately reproduced using the solution of fractional differential equation that models the phenomenon of creep. Finally, conclusions and comments about the benefit to use fractional differential equations in the simulation of phenomena and problems that arise in engineering are presented.

PLANTEAMIENTO, OBJETIVOS Y ALCANCES

En este trabajo se realiza una investigación teórico-experimental acerca del empleo de ecuaciones diferenciales fraccionarias en la modelación del fenómeno de *creep* en suelos, con los siguientes objetivos:

- Mostrar la ventaja de utilizar ecuaciones diferenciales fraccionarias sobre las ecuaciones clásicas para simular el comportamiento de suelos arcillosos sometidos a una carga sostenida durante tiempos largos (fenómeno de *creep*)
- Utilizar la reología fraccionaria como medio de planteamiento de la ecuación diferencial fraccionaria que mejor simula el fenómeno de *creep* en suelos arcillosos.

Los alcances del trabajo son:

- Plantear arreglos reológicos fraccionarios para simular el fenómeno de *creep* en suelos.
- Ensayar muestras cilíndricas de suelo sometidas a cargas constantes correspondientes a diferentes porcentajes del esfuerzo máximo de resistencia de cada material sin llegar a la falla. Para ello se utilizan cámaras triaxiales instrumentadas con sensores de carga, desplazamiento y presión.

Se utilizan tres materiales sedimentados de los que se extraen muestras de arcilla sintética, constituidos por una mezcla de caolín y bentonita.

- Determinar los valores de las constantes viscoelásticas y exponentes fraccionarios del arreglo reológico fraccionario que mejor ajusten a cada una de las curvas registradas en las pruebas de *creep*.
- El envejecimiento del suelo queda fuera de los alcances de esta tesis; su estudio e inclusión de este fenómeno en la ecuación diferencial que modela el fenómeno de *creep* puede trabajarse en futuras investigaciones.

La aportación principal del trabajo consiste en la metodología necesaria para utilizar el gran potencial de las ecuaciones diferenciales fraccionarias para la simulación del fenómeno de *creep*; este trabajo puede tener proyección en lo referente a la modelación de diversos problemas de ingeniería, tales como la consolidación de suelos y su comportamiento bajo sismos y vibraciones.

CONTENIDO

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
PLANTEAMIENTO, OBJETIVOS Y ALCANCES	iii
CONTENIDO	iv
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes de reología aplicada	1
1.2 Reología clásica	1
1.3 Reología fraccionaria	2
2. ANTECEDENTES DE CÁLCULO FRACCIONARIO Y ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS	4
2.1 Presentación de conceptos elementales de Derivada fraccionaria basados en la integral de Riemann-Liouville	5
2.1.1 Derivada fraccionaria de la función exponencial	5
2.1.2 Derivada fraccionaria de las funciones seno y coseno	6
2.1.3 Derivada fraccionaria de la función x^a	6
2.1.4 Integral de Riemann-Liouville	9
2.2 La transformada de Laplace	10
2.3 Función Mittag-Leffler	12
2.4 Ecuaciones diferenciales fraccionarias	13
3. FUNDAMENTOS DE VISCOELASTICIDAD	15
3.1 Matemáticas preliminares	16
3.1.1 Funciones de la clase Heaviside H^N	16
3.1.2 Convolución de Riemann	17
3.1.3 Convolución de Riemann-Stieltjes	18
3.2 Leyes hereditarias lineales esfuerzo-deformación	19
3.2.1 Historias admisibles de esfuerzo y deformación	19
3.2.2 Ley esfuerzo-deformación lineal hereditaria	20
3.2.3 Representación de leyes hereditarias lineales	20
3.2.4 Leyes hereditarias lineales isotrópicas	21
3.2.5 Representación de leyes hereditarias lineales isotrópicas	21
3.2.6 Relación entre las funciones de relajación y <i>creep</i> asociadas	23
3.3 Relaciones esfuerzo-deformación de la forma ecuación diferencial	25
3.3.1 Pares de operadores diferenciales de orden N , del tipo de relajación o <i>creep</i>	26
3.3.2 Transformada de Laplace de una ley de operador diferencial	27
3.4 Reología clásica	29
3.4.1 Arreglo de Hooke y de Newton	31
3.4.2 Arreglo de Kelvin-Voigt y Maxwell	32
3.4.3 Los arreglos de Zener y Anti-Zener	32
3.4.4 Arreglo de Burgers	34
3.5 Reología fraccionaria	35

3.5.1	Arreglo reológicos fraccionarios de orden superior	37
3.5.2	Ecuación constitutiva del arreglo FVMS	38
3.5.3	Análisis paramétrico del modelo FVMS	40
3.5.3.1	Análisis paramétrico del término J_1	40
3.5.3.2	Análisis paramétrico del término J_0	41
3.5.3.3	Análisis paramétrico del término J_2	41
4.	ANTECEDENTES DEL FENÓMENO DE <i>CREEP</i> EN SUELOS	46
4.1	Generalidades acerca del comportamiento de <i>creep</i> en suelos	48
4.2	Interacción Deformación – Estructura dependiente del tiempo	53
4.2.1	Proceso de reacomodo de partículas dependiente del tiempo	54
4.3	Modelos fenomenológicos	54
4.3.1	Comportamiento esfuerzo – deformación	55
4.3.2	Comportamiento deformación- tiempo	55
4.4	Deformación en el suelo como un proceso de velocidad	58
5.	ENSAYES DE LABORATORIO Y AJUSTE DE CURVAS UTILIZANDO EL ARREGLO VISCO-ELÁSTICO FRACCIONARIO	61
5.1	Mezclas de arcilla utilizadas en los ensayos	61
5.1.1	Antecedentes de Sedimentación de suelos	62
5.1.2	Reconstitución, sedimentación y consolidación de arcillas sintéticas	63
5.1.3	Extracción de muestras	66
5.2	Ensayes de resistencia	68
5.3	Ensayes de <i>creep</i>	69
5.3.1	Labrado, saturación y consolidación de las muestras	69
5.3.2	Ensayes de <i>creep</i>	70
5.4	Ajustes de las curvas experimentales de <i>creep</i> con los modelos reológicos clásico y fraccionario	70
5.4.1	Arreglo reológico de Burgers	71
5.4.2	Arreglo reológico de Burgers fraccionario	74
5.5	Comentarios acerca de los ajustes realizados con los modelos reológicos clásico y fraccionario	
6.	CONCLUSIONES	85
7.	REFERENCIAS	87
	APENDICE	90
A.1	Simbología de funciones y variables	90
A.2	Espacio métrico	90
A.3	Fracción continua	91
A.4	Planteamiento y solución de la ecuación diferencial fraccionaria FVMS	92
A.4.1	Arreglo de Kelvin fraccionario	92
A.4.2	Arreglo de Maxwell fraccionario	95
A.4.3	Arreglo de Burgers fraccionario (FVMS)	97



1 INTRODUCCIÓN

1.1 *Antecedentes de reología aplicada*

En las últimas décadas, las ecuaciones constitutivas para materiales viscoelásticos que involucran derivadas fraccionarias han cobrado un creciente interés. El uso de arreglos constitutivos fraccionarios es motivado en gran parte por el hecho de que se requieren menos parámetros para representar el comportamiento viscoelástico de materiales que los requeridos cuando se usan los arreglos tradicionales de orden entero. Los arreglos fraccionarios permiten tanto variar de una manera más amplia los parámetros reológicos, como ser manipulados usando las transformadas de Fourier y Laplace.

Hasta el momento, es amplia la actividad experimental (a nivel internacional) para determinar el comportamiento reológico clásico de los suelos. También se está trabajando en la determinación experimental de propiedades reológicas fraccionarias en materiales vinculados con la industria del alimento, agricultura (Neaman y Singer., 2004), textiles, e incluso en propiedades de tejidos biológicos (Jäger y Lackner, 2008) que se emplean en bioingeniería, por ejemplo de arterias y huesos humanos (Robert et al., 2006).

A continuación se presenta un breve resumen de algunos trabajos que se han realizado en este tema, referente a la reología clásica y fraccionaria.

1.2 *Reología clásica*

En el área de interés vemos que se llevan a cabo estudios de características de resistencia de mezclas de suelos y asfaltos, bajo ciertas condiciones de esfuerzos (Abdel-hady y Herrin, 2007). Aplicando esfuerzos constantes se observa la evolución de las deformaciones en el tiempo, por ejemplo pruebas de *creep*. En (Sheldon, 2008) se presentan estudios de materiales viscoelásticos que poseen mezclas de propiedades viscosas y elásticas. Como es usual, esto se caracteriza mediante conjuntos de resortes y amortiguadores.

En lo referente a actividades experimentales, se tiene una amplia gama de investigaciones, como el estudio de propiedades reológicas de suelos húmedos bajo esfuerzos constantes y oscilatorios (Teamrat y Dani, 2001). Se ha estudiado el efecto de cambios en la estructura del suelo por la actividad y procesos agrícolas. También se han

investigado las propiedades reológicas de suelos, al ensayar especímenes en pruebas de torsión con régimen cinemático, (Meschyan y Taslagyan, 2005). Aigner et al., 2009 realizaron estudios multi-escala para predicción del comportamiento de mezclas de concreto y asfalto. Se incluyen estudios del efecto de temperatura en las propiedades viscoelásticas. En (Ariaratnam et al., 2003) se presenta una evaluación de propiedades reológicas de flujos de retorno en perforaciones horizontales direccionales, muy útil en fracturamiento hidráulico.

1.3 *Reología fraccionaria*

En este tema, se tienen trabajos sobre visco-elasticidad en arterias mediante experimentos de relajación (Craiem y Armentano, 2007). Para el ajuste de las curvas experimentales se emplean pruebas uniaxiales, y modelos de ecuaciones diferenciales fraccionarias. También se han realizado estudios de visco-elasticidad en huesos, utilizando modelos reológicos fraccionarios (Liu y Xu, 2008). Así mismo, se tienen estudios con cálculo fraccionario donde se modelan ecuaciones constitutivas ligadas a teorías moleculares para describir el comportamiento macroscópico de medios visco-elásticos (Bagley, 1986).

En (Schmidt y Gaul, 2001) se presenta una implementación para análisis, utilizando el método del elemento finito, de relaciones constitutivas que involucran ecuaciones diferenciales fraccionarias. Se tiene que, con este tipo de ecuaciones, el número de parámetros necesarios para ajustar curvas experimentales es menor que con ecuaciones diferenciales con derivadas de orden entero. También se han hecho estudios de materiales con micro-estructura desordenada basados en geometría fractal y cálculo fraccionario (Carpinteri et al., 2004). Se analiza también el efecto del tamaño de partículas en el comportamiento estructural de muestras de materiales heterogéneos y su relación con el número de parámetros necesarios para el ajuste a curvas experimentales; todo esto es muy útil en estudios de fracturamiento. En (Koh y Kelly, 1990) se presenta una aplicación de derivadas fraccionarias para análisis de modelos con aislamiento de base; esto para analizar problemas de aislamiento de vibraciones.

En este trabajo de tesis se presentan las teorías involucradas en el estudio del fenómeno de *creep* en suelos mediante la teoría de viscoelasticidad y reología

fraccionaria; por tanto, en el capítulo 2 se presenta la teoría correspondiente al cálculo fraccionario. En el capítulo 3 se presenta brevemente la teoría de la viscoelasticidad y reología fraccionaria. En el capítulo 4 se presenta un breve resumen del estudio del fenómeno del *creep* en suelos, y finalmente, en el capítulo 5 se presentan los análisis experimentales y numéricos de los resultados obtenidos de pruebas de *creep* en laboratorio al realizar los ajustes de las curvas experimentales con el modelo reológico; las conclusiones correspondientes se presentan en el capítulo 6.

2 ANTECEDENTES DE CÁLCULO FRACCIONARIO Y ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos de cálculo fraccionario, como la derivada fraccionaria y las ecuaciones diferenciales fraccionarias, herramientas muy útiles en la modelación de fenómenos naturales.

El concepto de cálculo fraccionario no es nuevo; ha existido por más de tres siglos. Es una generalización de la diferenciación y la integración ordinarias (enteras) a órdenes no-enteros (reales e incluso, complejos). El nacimiento del cálculo fraccionario se data en 1695. En ese año, L'Hôpital planteó en una carta a Leibniz (Arafet et al., 2008) la cuestión de cómo se debería entender la expresión, introducida por el propio Leibniz:

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

si n fuese una fracción. Leibniz trabajó en el tema y las consideró “derivadas de orden general”, además de introducir la notación $D^{1/2}f(x)$ para denotar la derivada de orden $1/2$. Desde entonces destacados matemáticos, como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent y Weyl, han contribuido al desarrollo del cálculo fraccionario. Muchos encontraron, utilizando su propia notación metodológica, las definiciones que se ajustan al concepto de integral o derivada de orden no entero. Las definiciones más conocidas en el mundo del cálculo fraccionario son las de Riemann-Liouville y Grunwald-Letnikov (Arafet et al., 2008).

Hoy en día existe una vasta literatura sobre el tema llamado Cálculo Fraccionario (*CF*), Cálculo Fraccional o Cálculo Generalizado. En distintas áreas de la ciencia se han escrito diversos artículos mostrando las más variadas aplicaciones (Denath, 2003). Entre las aplicaciones más comunes del *CF* se encuentran: reología, biología cuántica, electroquímica, teoría de la dispersión, difusión, teoría del transporte, probabilidad y estadística, teoría del potencial, elasticidad, viscosidad y teoría de control automático; dos aplicaciones más recientes son en matemáticas financieras y en la teoría de fractales. Por ejemplo, se ha demostrado que los arreglos de orden fraccionario son más apropiados que los de orden entero para describir las propiedades de algunos materiales como los polímeros.

Actualmente existen paquetes desarrollados para el cálculo fraccionario y para el control automático fraccionario (como un ejemplo, la aplicación gratuita Ninteger para Matlab, disponible en internet). A continuación se dará la definición formal de derivada fraccionaria, pero antes se presentan algunos casos simples que ayudan a comprender lo que es una derivada fraccionaria.

2.1 Presentación de conceptos elementales de Derivada fraccionaria basados en la integral de Riemann-Liouville

En matemáticas e ingeniería estamos familiarizados con la idea de la derivada, cuya notación usual es, por ejemplo:

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx}, \text{ o } D^2 f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (2.1)$$

Pero ¿qué significaría la media derivada de una función?:

$$D^{1/2} f(x) = \frac{d^{1/2} f(x)}{dx^{1/2}} \quad (2.2)$$

Para comprender esta idea, aquí se presentan algunos ejemplos de derivadas fraccionarias y su interpretación.

2.1.1 Derivada fraccionaria de la función exponencial

Se comienza por examinar las derivadas de la función exponencial por su simplicidad (Arafet et al., 2008). Se sabe que:

$D^1 e^{ax} = ae^{ax}$, $D^2 e^{ax} = a^2 e^{ax}$, ..., $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, donde n es un entero. Reemplazando n por α se tiene:

$$D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax} \quad (2.3)$$

en donde α puede ser entero, real o complejo. Es interesante hacer notar que si α es un número real positivo se trataría de una derivada y si fuese negativo se trataría de una integral.

2.1.2 Derivada fraccionaria de las funciones seno y coseno

Se tiene que:

$$D^0 \text{sen}(x) = \text{sen}(x), D^1 \text{sen}(x) = \cos(x), D^2 \text{sen}(x) = -\text{sen}(x) \quad (2.4)$$

Se observa, que cada vez que se deriva la función seno, resulta una función $\text{sen}(x)$ desplazada $\pi/2$. De manera que, derivando $\text{sen}(x)$ n veces, la función se desplaza $n * \pi/2$, es decir:

$$D^n \text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), D^n \cos(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (2.5)$$

Reemplazando el entero positivo n por un número arbitrario α , se obtiene la expresión de la derivada general de las funciones seno y coseno:

$$D^\alpha \text{sen}(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right), D^\alpha \cos(x) = \cos\left(x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (2.6)$$

2.1.3 Derivada fraccionaria de la función x^a

Trabajando ahora con las derivadas de las potencias de x , se tiene que, para p entero:

$$D^0 x^p = x^p, D^1 x^p = px^{p-1}, D^2 x^p = p(p-1)x^{p-2}, \dots, \quad (2.7)$$

$$D^n x^p = p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)x^{p-n},$$

Multiplicando numerador y denominador de (2.7) por $(p-n)!$ se obtiene:

$$D^n x^p = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)(p-n)(p-n-1)\dots 1}{(p-n)(p-n-1)\dots 1} x^{p-n}, \quad (2.8)$$

$$D^n x^p = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$$

que es la expresión general de $D^n x^p$. Para reemplazar el entero positivo n por un número arbitrario α , se usa la función gamma. Esta función fue introducida por Euler en el siglo XVIII para generalizar la función factorial $z!$ para valores no enteros de z . Su definición es:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.9)$$

y tiene la propiedad de que $\Gamma(z+1) = z!$, para $z \in \mathbb{N}$.

Entonces, (2.8) puede arreglarse de la siguiente forma:

$$D^n x^p = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)} \quad (2.10)$$

y hacer esto tiene sentido si n no es entero, de manera que sustituyendo n por α se tiene:

$$D^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha} \quad (2.11)$$

para cualquier α .

Como un ejemplo, se presenta el cálculo de la media derivada de la función:

$$f(x) = x^1$$

Utilizando la ecuación (2.11), y evaluando para $\alpha = 1/2$ y $p = 1$ se tiene:

$$D^{1/2} x^1 = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$$

Si ahora, repetimos el mismo procedimiento con la función resultante, se tiene que para $\alpha = 1/2$ y $p = 1/2$:

$$D^{1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)} x^{1/2-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} x^0$$

$$D^{1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

lo cual resultaría si deriváramos $f(x) = x^1$ una vez en la forma en que normalmente sabemos. En la figura 2.1 puede observarse la evolución de la derivada fraccionaria de la función $f(x) = x^1$ para valores de α entre 0 y 1.

De forma similar, en la figura 2.2 se presenta la gráfica de la evolución de la derivada fraccionaria aplicada a la función $f(x) = \text{sen}(x)$ para distintos valores de α . Puede observarse como gradualmente se desfasa la función $\text{sen}(x)$ (derivada 0) hasta transformarse en $\text{cos}(x)$ que es precisamente la primer derivada de $\text{sen}(x)$. La barra de color en dicha figura indica el valor de la función derivada, para un tiempo t y un exponente fraccionario α .

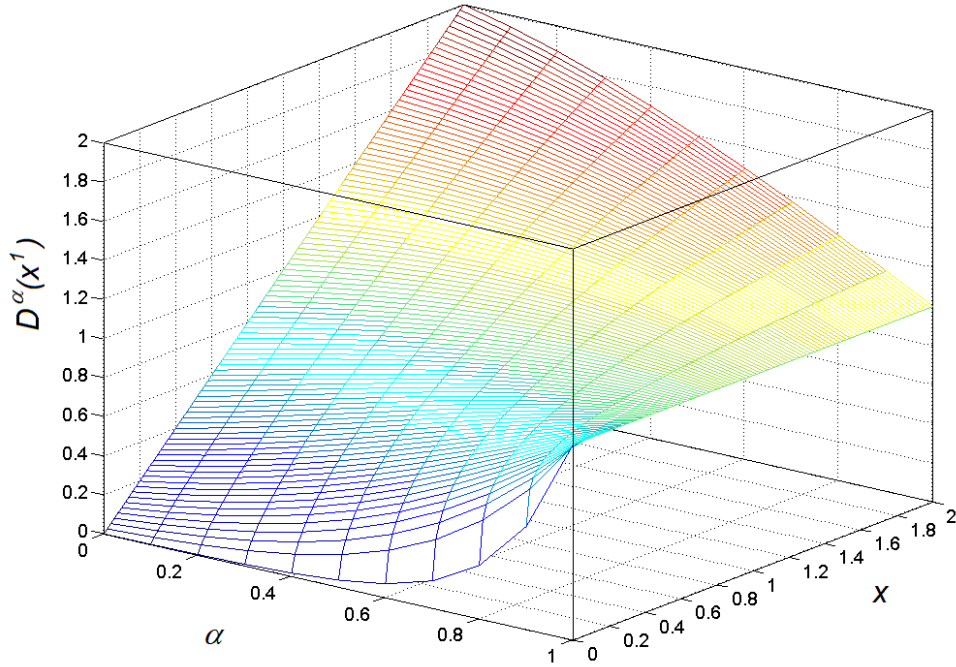


Figura 2.1 . Gráfica de la derivada fraccionaria de $f(x) = x^1$ para diferentes valores de α

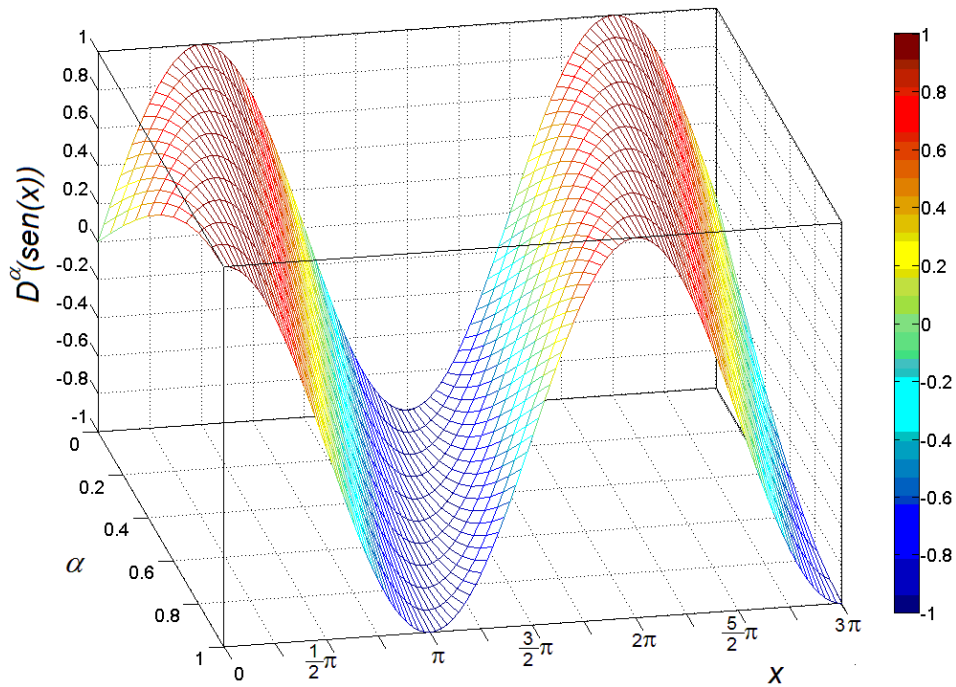


Figura 2.2 . Gráfica de la derivada de $f(x) = \text{sen}(x)$ para diferentes exponentes fraccionarios α

Con la ecuación (2.11) puede extenderse la idea de la derivada fraccionaria de un gran número de funciones. Sin embargo, aún no se ha presentado una definición formal de la derivada fraccionaria, pues los casos antes mencionados son casos particulares y sólo son

aplicables para ciertos valores de α . Por ello, desde 1695 a la fecha, de forma similar, personas como Leibnitz, Riemann, Liouville, Grunwald, Letnikov, etc. comenzaron a incursionar en el campo del cálculo fraccionario, llegando a definir de manera más general expresiones para calcular la derivada fraccionaria (Weisstein, 2007).

2.1.4 Integral de Riemann-Liouville

Recordando algunas notaciones de cálculo elemental, la n -ésima derivada de una función f está definida recursivamente por:

$$D_x^0 f(x) \equiv f(x), \quad D_x^n f(x) \equiv D_x [D_x^{n-1} f(x)] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

Análogamente, la n -ésima integral de f está definida por

$$D_x^{-n} f(x) \equiv f(x), \quad D_x^{-n} f(x) \equiv \int_0^x D_t^{-(n-1)} f(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

Puede probarse que la segunda integral en (2.13) (la cual es en esencia una integral múltiple) se puede reducir a una integral sencilla y está dada por:

$$D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

donde $(n-1)! \equiv (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

El propósito es generalizar (2.12) y (2.14) sustituyendo n por un número real positivo α . Para ello se hace uso de la ya conocida función gamma de Euler. Para cualquier $\alpha > 0$, la integral fraccionaria de orden α de una función f (continua) se define como:

$$D_x^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es llamada Integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Nótese que cuando $\alpha = n$, la definición anterior se reduce a la fórmula usual dada en (2.14). Por ejemplo, sea $f(x) = 1$ y $\alpha = 1/2$. Entonces:

$$\begin{aligned} D_x^{-1/2}(1) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{-1/2}(1) dt, \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^x u^{-1/2}(1) du \quad (\text{con } t=x-u) \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}} x^{1/2} \end{aligned}$$

Remarcando se tiene que $D_x^{-0}(1) = 1$ (lo cual significa que no se le está transformando a la función) mientras que $D_x^{-1}(1) = x$ (lo cual es sólo una anti-derivada de 1).

La derivada fraccionaria puede ser definida en términos de la integral fraccionaria. Sea m el menor entero positivo mayor o igual que un número positivo α (por ejemplo, $m = 1$ cuando $\alpha = 1/2$). Entonces D_x^m es sólo la m -ésima derivada usual y $m - \alpha \geq 0$. Para cualquier $\alpha > 0$, la derivada fraccionaria de orden α de una función f (continua) se define como:

$$D_x^\alpha f(x) \equiv D_x^m \left[D_x^{-(m-\alpha)} f(x) \right] \quad (2.16)$$

Nótese que $D_x^{-(m-\alpha)}$ es la integral fraccionaria de orden $m - \alpha$.

Continuando con el ejemplo anterior, donde $f(x) = 1$, la derivada fraccionaria de orden $1/2$ de f es

$$D_x^{1/2} f(x) = D_x^1 \left[D_x^{-(1/2)}(1) \right] = D_x \left(\frac{2}{\pi^{1/2}} x^{1/2} \right) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{1}{x^{1/2}}$$

Este resultado es absolutamente inesperado dado que la derivada usual de una constante es 0, lo cual ilustra una de las muchas diferencias entre los operadores de derivación clásicos y fraccionarios.

2.2 La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una función de transformación comúnmente usada en la solución de ecuaciones diferenciales complicadas. Con ella, es posible, en muchos casos, evitar trabajar directamente con ecuaciones de orden diferencial trasladando el problema a un dominio en donde la solución se presenta algebraicamente. La definición formal de la transformada de Laplace está dada por:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \hat{f}(s) \quad (2.17)$$

donde $[0 < t < \infty)$ y $\hat{f}(s)$ es una función en la variable s cuyo dominio consta de todos los valores de s para los cuales la integral (2.17) existe, es decir, la transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe si (2.17) es una integral convergente. El requerimiento para que

sucedan esto es que $f(t)$ no crezca a una velocidad mayor que la velocidad a la cual el término exponencial e^{-st} decrece.

También es muy usual utilizar la convolución de funciones, dada por (2.18).

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) * g(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

La convolución de dos funciones en el dominio del tiempo puede resultar complicada de resolver, sin embargo, en el dominio de Laplace (s), la convolución se transforma en una simple multiplicación de funciones como se muestra en (2.19):

$$L\{f(t) * g(t)\} = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \quad (2.19)$$

Otra propiedad muy importante de la transformada de Laplace es su aplicación a la derivada de orden entero n de una función $f(t)$, la cual está dada por:

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \hat{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (2.20)$$

De forma análoga, la transformada de Laplace aplicada a derivadas fraccionarias está dada por:

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{\alpha-1-k} f(t)}{dt^{\alpha-1-k}} \right]_{t=0} \quad (2.21)$$

para todo α (exponente fraccionario de la diferencial), donde n es un entero tal que $(n-1) < \alpha < n$. Si se consideran las condiciones iniciales igualadas a cero (Hartley et al., 1995), la fórmula anterior se reduce a la expresión:

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\} \quad (2.22)$$

De manera que la derivada generalizada puede ahora expresarse como:

$$D^\alpha f(t) = L^{-1}\left[s^\alpha L\{f(t)\}\right] \quad (2.23)$$

La cual resulta muy interesante, pues es otra forma de expresar la derivada fraccionaria de una función $f(t)$.

2.3 Función Mittag-Leffler

La solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias comúnmente es expresada en términos de la función Mittag-Leffler (MLF, por sus siglas en inglés) o sus derivadas (Diethelm et al., 2005), que es una generalización de la función exponencial e^z . La función MLF está definida por la serie de potencias:

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(b+ak)} \quad (2.24)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$

y cuya derivada es:

$$E'_{a,b}(z) = \frac{dE_{a,b}(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)z^k}{\Gamma(b+a[1+k])} \quad (2.25)$$

La función MLF juega el mismo papel en las ecuaciones diferenciales fraccionarias al papel que juega la función exponencial en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para el caso particular, cuando los parámetros a y b son iguales a 1, la función MLF se reduce a la definición de la función exponencial:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = e^z \quad (2.26)$$

En la figura 2.3 se presenta una superficie generada con la función Mittag-Leffler para distintos valores de a manteniendo $b=1.0$. Pueden observarse las formas variadas que toma la función tan solo variando uno de los dos parámetros, lo que da mayores posibilidades en modelación de fenómenos y versatilidad en la solución de ecuaciones diferenciales, a diferencia que la función exponencial.

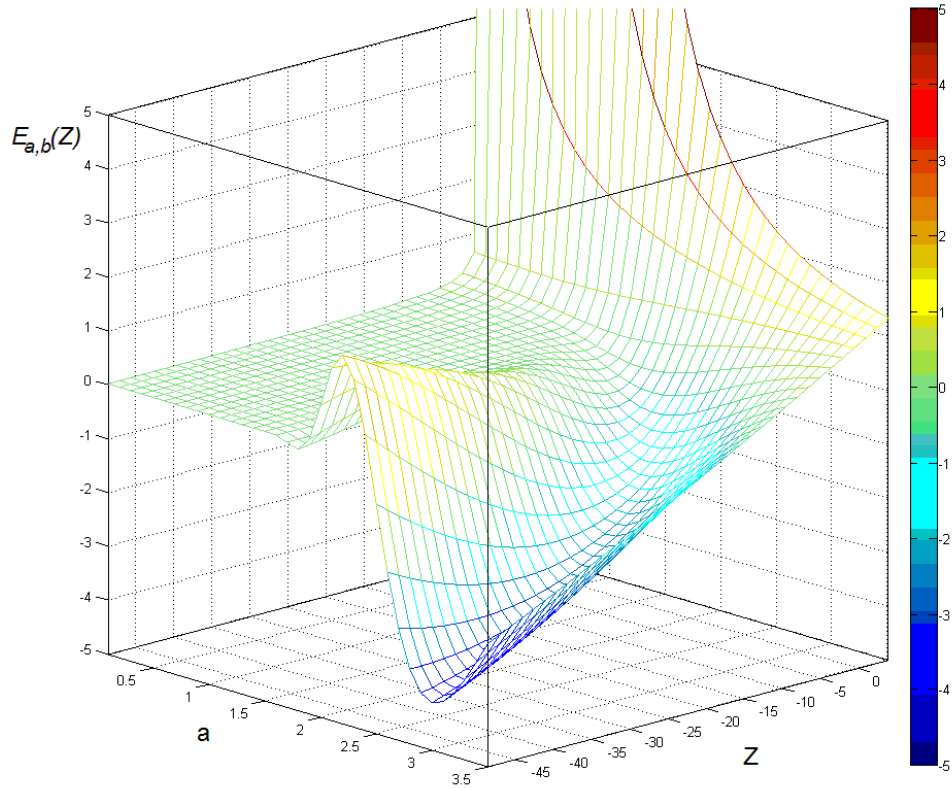


Figura 2.3. Gráfica de la función Mittag-Leffler para distintos valores de a , con $b = 1$. La escala de color indica el valor que toma la función para distintos valores de a y Z

2.4 Ecuaciones diferenciales fraccionarias

En estas ecuaciones, como su nombre lo indica, el orden de las derivadas es fraccionario, y por tanto aparecen en ellas términos con derivadas fraccionarias.

A manera de ejemplo, en lo que sigue se presenta una ecuación de este tipo y sus soluciones para diferentes casos:

$$[D^{2\alpha} + aD^\alpha + bD^0]y(t) = 0 \tag{2.27}$$

donde α es el orden de la derivada (D) fraccionaria, y sus soluciones son:

$$y(t) = \begin{cases} e_a(t) - e_b(t) & \text{para } a \neq b \\ t \cdot e^{at}, \sum_{k=-(q-1)}^{q-1} a^k (q - |k|) D^{1-(k+1)\alpha} (t \cdot e^{at}) & \text{para } a = b \neq 0 \\ \frac{t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} & \text{para } a = b = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

Donde:

$$q = 1/\alpha \quad (2.29)$$

$$e_b(t) = \sum_{k=0}^{q-1} b^{q-k-1} E_t(-k\alpha, b^q) \quad (2.30)$$

e^{at} es la función exponencial, $E_t(\nu, a)$ es la función E_t y $\Gamma(z)$ es la función gamma.

La función E_t surge de la integral de e^{at} y se define como:

$$E_t(\nu, a) = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)} \int_0^t x^{\nu-1} e^{-ax} dx = \frac{a^{-\nu} e^{at} \gamma(\nu, at)}{\Gamma(\nu)} \quad (2.31)$$

en donde $\gamma(a, z)$ es la función gamma incompleta definida por:

$$\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt$$

Las funciones especiales $\Gamma(z)$, $\gamma(a, z)$, $E_{\alpha, \beta}(z)$ y E_t resultan muy útiles en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, haciendo uso de la transformada de Laplace, tal como se verá más adelante en el capítulo de reología fraccionaria.

El lector interesado puede consultar la referencia (Podlubny, 1994) en donde se trata detalladamente la aplicación de la transformada de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

3 FUNDAMENTOS DE VISCOELASTICIDAD

El comportamiento de muchos materiales bajo cargas aplicadas puede ser aproximado mediante relaciones entre la carga o esfuerzo y la deformación resultante. En el caso de materiales elásticos su relación, definida como la ley de Hooke, establece que la deformación es instantánea y proporcional al esfuerzo aplicado. En el caso de materiales viscosos, la relación establece que el esfuerzo es proporcional a la tasa de deformación y el desplazamiento depende de la historia de cargas.

La viscoelasticidad es una propiedad que exhiben algunos materiales que presentan ambos comportamientos, tanto viscoso como elástico y en donde su relación $\varepsilon - \sigma$ es dependiente del tiempo. Tales materiales se distinguen por mostrar las siguientes características:

- Disipación de energía, conocida como histéresis
- Relajación de esfuerzos, en donde para una deformación constante, los esfuerzos dentro de un cuerpo decrecen con el tiempo
- *Creep*, en donde manteniendo un esfuerzo constante, las deformaciones en un cuerpo se incrementan con el tiempo. De alguna manera, el *creep* es un comportamiento inverso al de relajación de esfuerzos.

De acuerdo con la teoría de viscoelasticidad, un cuerpo viscoelástico puede considerarse como un sistema lineal con los esfuerzos (o deformaciones) como una función de excitación (de entrada) y las deformaciones (o esfuerzos) como una función de respuesta (salida). En este sentido, se sabe que las funciones de respuesta a una excitación expresadas por la función escalón de Heaviside $h(t)$ juegan un importante papel desde un punto de vista matemático y físico. Suele denotarse por $J(t)$ a la respuesta de deformación debida a un escalón unitario de esfuerzo de acuerdo a un ensayo de *creep*, y $G(t)$ a la respuesta de esfuerzo debida a un escalón unitario de deformación de acuerdo a un ensayo de relajación. Las funciones $J(t)$ y $G(t)$ son a menudo referidas como la deformación por fluencia (*creep compliance*) y módulo de relajación respectivamente, o simplemente funciones materiales de un cuerpo viscoelástico (Mainardi y Spada, 2011).

Los valores límite del dominio de las funciones materiales para $t \rightarrow 0^+$ y $t \rightarrow \infty^+$ se relacionan con el comportamiento instantáneo (g : glass) y de equilibrio (e) de un cuerpo viscoelástico, de acuerdo a (Mainardi et al, 2011). Por tanto es usual denotar $J_g := J(0^+)$ a la deformación instantánea y $J_e := J(+\infty)$ a la deformación de equilibrio, y de forma análoga $G_g := G(0^+)$ al módulo instantáneo y $G_e := G(+\infty)$ al módulo de equilibrio. Ambas funciones materiales son no-negativas. Además, para $0 < t < +\infty$, $J(t)$ es una función no decreciente y $G(t)$ es una función decreciente.

A continuación se presentan brevemente algunos aspectos de la teoría de la viscoelasticidad y los fundamentos matemáticos correspondientes. En este capítulo se presenta la notación matemática utilizada por (Gurtin y Sternberg, 1962) en su trabajo “On the Linear Theory of Viscoelasticity”.

3.1 Matemáticas preliminares

Se entiende “ f ” como una función en los reales. Se escribe “ $f \in C^N$ sobre (a,b) ”, N denota siempre un entero no negativo, si la función f está definida, es continua, y es N veces continuamente diferenciable sobre el intervalo (a,b) . Se dice entonces $f \in C^N$ sobre (a,b) si ésta es definida y continua sobre (a,b) y si tanto f como sus derivadas hasta N sobre (a,b) coinciden con funciones continuas sobre (a,b) . Se usa la siguiente notación para las derivadas de f y para los valores de f y sus derivadas cuando el argumento es 0:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, f^{(0)} = f, f^{(n)} = f^{(n)}(0) \quad (3.1)$$

La función de salto unitario (o escalón) Heaviside se denota por h y está definida por:

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \text{ para todo } t \text{ en } (-\infty, a), \\ h(t) &= 1 \text{ para todo } t \text{ en } [a, \infty) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se tomará $a = 0$ por conveniencia.

3.1.1 Funciones de la clase Heaviside H^N

La siguiente generalización de la función Heaviside resulta de mucha utilidad:

Definición 1 Una función $f \in H^N$, si f está definida sobre $(-\infty, \infty)$ y,

- a) $f = 0$ sobre $(-\infty, 0)$,
- b) f es en C^N sobre $[0, \infty)$,

Por otra parte, si $f \in H^N$, se escribe

$$f^{\circ(n)} = f^{(n)}(0+) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (3.3)$$

De acuerdo a lo anterior, cuando $f \in H^N$, las funciones $f^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) pueden tener discontinuidades con salto finito en el origen, y $f^{\circ(n)}$ permanece para los límites correspondientes hacia la derecha.

A continuación se presentan algunos conceptos preliminares sobre convoluciones. Primero, se presentan las propiedades de las convoluciones de Riemann y subsecuentemente se establecen ciertas propiedades adaptadas sobre las convoluciones de Stieltjes.

3.1.2 Convolución de Riemann

Definición 2 Sean φ y ψ funciones definidas sobre el intervalo $[0, \infty)$ y sea la integral de Riemann

$$\vartheta(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau)\psi(\tau)d\tau \quad (3.4)$$

la cual existe para todo t en $[0, \infty)$. Entonces la función ϑ , así definida en $[0, \infty)$, es la convolución de Riemann de φ y ψ . También se escribe:

$$\vartheta = \varphi * \psi \quad (3.5)$$

para denotar esta función.

Propiedades de la convolución de Riemann

La convolución de Riemann entre funciones es válida y existe si cumple con el siguiente teorema:

Teorema 1 Sean φ , ψ y ω en C^0 sobre $[0, \infty)$. Entonces:

- a) $\varphi * \psi \in C^0$ sobre $[0, \infty)$;

- b) $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ (conmutatividad)
- c) $\varphi * (\psi * \omega) = (\varphi * \psi) * \omega = \varphi * \psi * \omega$ (asociatividad)
- d) $\varphi * (\psi + \omega) = (\varphi * \psi) + (\varphi * \omega)$ (distributividad);
- e) $\varphi * \psi \equiv 0$ implica que $\varphi \equiv 0$ o $\psi \equiv 0$

3.1.3 Convolución de Riemann-Stieltjes

Definición 3 Sean φ y ψ funciones definidas en los intervalos $[0, \infty)$ y $(-\infty, \infty)$ respectivamente, y sea la integral Riemann-Stieltjes

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) d\psi(\tau) \quad (3.6)$$

la cual existe para todo t en $(-\infty, \infty)$. Entonces la función ϑ , así definida en $(-\infty, \infty)$, es la convolución de Stieltjes de φ y ψ . También se escribe:

$$\vartheta = \varphi * d\psi \quad (3.7)$$

para denotar esta función.

Propiedades de la convolución de Stieltjes

Teorema 2 Sea φ en H^0 . Sean ψ y $\omega \in H^1$. Entonces:

- a) $\varphi * d\psi \in H^0$ y $\psi * d\omega \in H^1$
- b) $\varphi * d\psi = \psi * d\varphi$ (conmutatividad)
- c) $\varphi * d(\psi * \omega) = (\varphi * d\psi) * d\omega = \varphi * d\psi * d\omega$ (asociatividad)
- d) $\varphi * d(\psi + \omega) = \varphi * d\psi + \varphi * d\omega$ (distributividad)
- e) $\varphi * d\psi \equiv 0$ implica que $\varphi \equiv 0$ o $\psi \equiv 0$
- f) $\varphi * dh = 0$
- g) $\varphi * d\psi = \overset{o}{\psi} \varphi + \varphi \psi^{(1)}$ sobre $[0, \infty)$

Las comprobaciones de los **teoremas 1 y 2**, así como la existencia de la inversa de Stieltjes, pueden consultarse en la referencia (Gurtin y Sternberg, 1962).

3.2 Leyes hereditarias lineales esfuerzo-deformación

En lo que sigue se adopta la siguiente notación concerniente a funciones tensoriales valuadas de posición y/o tiempo. Para ello, se utilizan letras en *negrilla* para designar funciones cuyos valores son vectores o tensores de alto orden. Así, si la función \mathbf{v} está definida en $(a,b) \times R$, su valor $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ en la posición x y el tiempo t es un tensor conocido para cada (x,t) en $(a,b) \times R$. Además, si los valores de \mathbf{v} son tensores de orden $N \geq 1$, se escribe $v_{i,j,\dots,k}$ para las componentes de \mathbf{v} en el marco coordenado X .

Las leyes hereditarias esfuerzo-deformación aquí presentadas son del tipo de relajación. Estas leyes pertenecen al tipo de clase general de relaciones constitutivas caracterizadas por la suposición de que la historia de esfuerzos en cada punto material del medio está completamente determinada por la historia de deformaciones en el mismo sitio. Siendo así, sean $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, con componentes $\sigma_{i,j}$ y $\varepsilon_{i,j}$ funciones definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, cuyos valores $\boldsymbol{\sigma}(t)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ son el tensor de esfuerzos en el tiempo t y el tensor de deformaciones infinitesimales en el tiempo t respectivamente. Las funciones $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, las cuales mapean el intervalo $(-\infty, \infty)$ en tensores simétricos de segundo orden, son referidas como la historia de esfuerzos y la historia de deformaciones respectivamente. La clase de relación constitutiva bajo consideración puede ser descrita por la ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{L} es una transformación la cual asocia con cada historia de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ una historia de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$. Con miras hacia la teoría lineal de viscoelasticidad, la ley de asociación (3.8) se sujeta a ciertas restricciones. Para este propósito, como resulta ser físicamente natural, la atención se limita inicialmente a historias de deformaciones continuas y se asume (sin pérdida de la generalidad) que el medio está en su estado indeformado para todo t en $(-\infty, 0)$.

3.2.1 Historias admisibles de esfuerzo y deformación

Definición 4 Una historia de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ es admisible si $\boldsymbol{\varepsilon}$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ en $(-\infty, 0)$. La definición análoga aplica una historia de esfuerzos admisible.

3.2.2 Ley esfuerzo-deformación lineal hereditaria

Definición 5 Una transformación L que asocia a cada historia de deformaciones admisible ε una historia de esfuerzos $\sigma = L\varepsilon$ es una ley hereditaria si ésta tiene las siguientes propiedades. Sean ε' y ε'' historias de deformación admisibles arbitrarias y suponga que $\sigma' = L\varepsilon'$ y $\sigma'' = L\varepsilon''$. Entonces:

a) Para cada par de números reales λ', λ''

$$L[\lambda'\varepsilon' + \lambda''\varepsilon''] = \lambda'L\varepsilon' + \lambda''L\varepsilon'' \text{ (linealidad)}$$

b) Para cada λ fijo, la relación $\varepsilon''(t) = \varepsilon'(t - \lambda)$ para todo t en $(-\infty, \infty)$ implica que $\sigma''(t) = \sigma'(t - \lambda)$ para todo t en $(-\infty, \infty)$ (*invariancia a la traslación*)

c) Para cada t fijo, $\varepsilon' = \varepsilon''$ en $(-\infty, t]$ implica $\sigma' = \sigma''$ en $(-\infty, t]$ (*no retroactividad*)

d) Para cada t fijo y cada $\alpha > 0$ existe un $\delta_t(\alpha) > 0$ tal que $|\varepsilon'(\tau)| < \delta_t(\alpha)$ para todo τ en $(-\infty, t]$ implica que $|\sigma'(t)| < \alpha$ (*continuidad*)

De acuerdo al postulado c), el cual también es referido como “*principio de causalidad*”, si dos historias de deformación coinciden hasta un tiempo t , lo mismo sucede con las historias de esfuerzos asociadas. Así, los esfuerzos en cada instante de tiempo t dependen solamente de las deformaciones en el tiempo t y de todos los tiempos previos; es decir $\sigma(t)$ es un funcional de $\varepsilon(t)$ ($-\infty < \tau \leq t$).

3.2.3 Representación de leyes hereditarias lineales

A continuación se presentan las condiciones que debe cumplir una función tensorial para que represente una ley hereditaria lineal.

Teorema 3 Existe una función tensorial G definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, correspondiente a cada ley hereditaria lineal L , con las siguientes propiedades:

a) $G(t)$ es un tensor de cuarto-orden con $G_{i,j,k,l}(t) = G_{j,i,k,l}(t) = G_{i,j,l,k}(t)$ para cada t en $(-\infty, \infty)$

b) $G = 0$ en $(-\infty, 0)$

c) G es de variación acotada en cada sub-intervalo cerrado de $(-\infty, \infty)$

d) G es continua a la derecha de $(-\infty, \infty)$, es decir, $G(t) = G(t+)$

e) Para cada par de historias (admisibles) (σ, ε) asociados a través de L , se tiene

$$\sigma_{i,j} = \varepsilon_{k,l} * dG_{i,j,k,l},$$

la cual es equivalente a:

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{k,l}(t-\tau) dG_{i,j,k,l}(\tau).$$

Las propiedades (a), (b), (c), (d) y (e) caracterizan únicamente a \mathbf{G} , la cual es llamada función tensorial de relajación correspondiente a \mathbf{L} .

En ingeniería es usual trabajar con ciertos elementos del tensor de esfuerzos o deformaciones, por ejemplo, los esfuerzos principales o los esfuerzos cortantes, por lo que resulta útil definir leyes hereditarias particulares. A continuación se presentan algunos teoremas que permiten definir leyes hereditarias isotrópicas.

3.2.4 Leyes hereditarias lineales isotrópicas

Teorema 4 Una ley hereditaria lineal es isotrópica si y sólo si su correspondiente función de relajación tensorial tiene valores que son tensores isotrópicos.

3.2.5 Representación de leyes hereditarias lineales isotrópicas

Teorema 5 Existen funciones reales G_α ($\alpha=1,2$) definidas en $(-\infty, \infty)$ correspondientes a cada ley hereditaria lineal isotrópica \mathbf{L} con las propiedades:

- G_α ($\alpha=1,2$) es nula en $(-\infty, 0)$ y es de variación acotada (característica de funciones suaves, sin cambios bruscos), así como continua hacia la derecha, en cada subintervalo cerrado de $(-\infty, \infty)$;
- Para cada par de historias admisibles $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ asociadas a través de \mathbf{L} , se definen:

$$S_{ij} = e_{ij} * dG_1, \quad \sigma_{kk} = \varepsilon_{kk} * dG_2 \quad (3.9)$$

donde S_{ij} y e_{ij} son las componentes de los esfuerzos y deformaciones desviadores definidos por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (3.10)$$

Cabe mencionar que las propiedades (a) y (b) únicamente caracterizan a G_α ($\alpha=1, 2$), la cual es llamada función de relajación (escalar) correspondiente a \mathbf{L} . Dicho

de otra forma, cada par de funciones reales G_α ($\alpha=1, 2$) definidas en $(-\infty, \infty)$ y teniendo la propiedad (a) generan, en el sentido de (3.9) y (3.10) una ley hereditaria lineal isotrópica. Las relaciones (3.9) son conocidas como la **ley integral de relajación** de la teoría lineal de sólidos viscoelásticos isotrópicos y las funciones de generación G_1, G_2 son usualmente referidas como las **funciones de relajación en cortante y compresión isotrópica**, respectivamente.

Por otra parte, las relaciones constitutivas de la forma:

$$\varepsilon = L' \sigma \quad (3.11)$$

en donde L' es una transformación la cual asocia a cada historia de esfuerzos σ una historia de deformaciones ε , llamada ley esfuerzo-deformación del **tipo de creep**. Por tanto, el cambio de papeles de los esfuerzos e historias de deformaciones en cada uno de los teoremas sobre leyes hereditarias lineales del tipo de relajación da lugar a una serie de teoremas concernientes a leyes hereditarias lineales del tipo de *creep*. En particular, el **Teorema 5** proporciona de esta manera la representación

$$e_{ij} = S_{ij} * dJ_1, \quad \varepsilon_{kk} = \sigma_{kk} * dJ_2 \quad (3.12)$$

de la **ley integral de creep** de la teoría clásica de viscoelasticidad, siendo J_1 y J_2 las **funciones de creep en cortante y compresión isotrópica**, respectivamente.

A continuación se presentan algunas propiedades adicionales de las leyes integrales de relajación (3.9) y *creep* (3.12). Ya que ambas relaciones, para un marco de coordenadas fijo y valores de i y j elegidos, tienen una idéntica estructura, es suficiente considerar solamente la ley integral de relajación escalar

$$\sigma = \varepsilon * dG \text{ sobre } (-\infty, \infty) \quad (3.13)$$

y la ley integral escalar de *creep*

$$\varepsilon = \sigma * dJ \text{ sobre } (-\infty, \infty) \quad (3.14)$$

En este contexto, se aplican los términos de historias de esfuerzo y deformación a funciones escalares σ, ε ; se llama a G (abreviadamente) **función de relajación** y a J **función de creep**. Además, a las funciones G y J se les exige al menos que $\in H^1$.

En lo que sigue se presenta el teorema que asegura que existe una inversa (única) para la relación (3.13), en donde se incluyen las condiciones suficientes para que (3.13) admita una inversa de la forma (3.14). Para ello se necesita la siguiente definición de la transformada de Laplace:

Definición 6 (Transformada de Laplace). Sea la función $f \in C^0$ sobre el intervalo $[0, \infty)$ y sea $f(t) = O[\exp(s_0 t)]$ cuando $t \rightarrow \infty$ para algún número real $s_0 > 0$. Entonces la función \tilde{f} está definida por:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt, \text{ para todo } s \text{ tal que } \operatorname{Re}(s) > s_0 \quad (3.15)$$

Donde \tilde{f} denota la transformada de Laplace de f .

3.2.6 Relación entre las funciones de relajación y creep asociadas

A continuación se presenta la relación que existe entre las funciones asociadas de relajación y de creep. Para ello se presenta el siguiente teorema:

Teorema 6 (Inversión de la ley de relajación, relación entre las funciones de relajación y creep). Sea $G \in H^2$ con $\overset{\circ}{G} \neq 0$. Entonces G tiene una inversa de Stieltjes G^{-1} . Además, estableciendo $J = G^{-1}$, se tiene:

- a) Para cada $\sigma \in H^0$ existe un (único) $\varepsilon \in H^0$ tal que $\sigma = \varepsilon * dG$, por tanto la transformación (3.13) mapea el espacio en sí mismo,
- b) $\varepsilon \in H^0$ y $\sigma = \varepsilon * dG$ implica que $\varepsilon = \sigma * dJ$;
- c) J satisface la ecuación

$$J * dG = h \quad (3.16)$$

así que para todo t en $[0, \infty)$:

$$\overset{\circ}{G} J(t) + \int_0^t \overset{\circ}{G}^{(1)}(t-\tau) J(\tau) d\tau = 1;$$

- d) Si $G(t)$ y $J(t)$ son $O[\exp(s_0 t)]$ cuando $t \rightarrow \infty$ para algún $s_0 > 0$,

$$\tilde{G}(s) \tilde{J}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.17)$$

para toda s tal que $\operatorname{Re}(s) > s_0$

A $G^{-1} = J$ se le conoce como la *función de creep asociada con la función de relajación* G .

En el siguiente teorema se presenta una forma alternativa de la ley integral de relajación.

Teorema 7 Sea $G \in H^1$, sea $\varepsilon \in H^0$, y sea σ definida por (3.13). Entonces:

$$\sigma(t) = \overset{\circ}{G} \varepsilon(t) + \int_0^t \varepsilon(t-\tau) \frac{dG(\tau)}{d\tau} d\tau, \text{ para todo } t \text{ en } [0, \infty); \quad (3.18)$$

a) Si $\varepsilon \in H^1$, en particular, $\varepsilon \in H^1$,

$$\sigma(t) = \overset{\circ}{\varepsilon} G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \text{ para todo } t \text{ en } [0, \infty); \quad (3.19)$$

b) $\varepsilon = h$ implica que $\sigma = G$;

c) Si $\varepsilon(t)$ y $G(t)$ son $O[\exp(s_0 t)]$ cuando $t \rightarrow \infty$ para alguna constante s_0 ,

$$\tilde{\sigma}(s) = s \tilde{G}(s) \tilde{\varepsilon}(s) \quad (3.20)$$

Para toda s tal que $\text{Re}(s) > s_0$

Resumiendo, se tiene que la respuesta general viscoelástica lineal para una dimensión espacial se define matemáticamente como una en la cual existe una función $G(t)$ tal que la ecuación constitutiva que relaciona esfuerzos con deformaciones está dada por

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \text{ en donde } \sigma(t) \text{ denota los esfuerzos (normales) como una función}$$

del tiempo, $\varepsilon(t)$ denota la deformación como función del tiempo y $G(t)$, llamada función de relajación, es causal y no depende de las coordenadas espaciales. El principio físico de causalidad impuesto en la función de relajación $G(t)$ implica que la función es cero para tiempos negativos, por tanto la relación constitutiva puede reescribirse usando la integral

$$\text{Riemann-Stieltjes como } \sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \text{ y ésta en términos de convolución como}$$

$\sigma = G * d\varepsilon$. El comportamiento de materiales lineales es aquel en el cual la superposición lineal de esfuerzos lleva a una correspondiente superposición lineal de deformaciones y viceversa. El término de función de relajación usado para la función $G(t)$ deriva de observaciones físicas de la respuesta de los esfuerzos de un sistema lineal ante una deformación constante aplicada.

Bajo las hipótesis de historias causales, pueden tenerse las siguientes relaciones:

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) = \sigma(0^+)J(t) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d}{dt} \sigma(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

y

$$\sigma(t) = \int_{0^-}^t G(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \varepsilon(0^+)G(t) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d}{dt} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

Como ambas relaciones son del tipo de convolución, las ecuaciones (3.21) y (3.22) pueden tratarse convenientemente por la técnica de la transformada de Laplace, por tanto, aparecen las relaciones en el dominio de Laplace:

$$\varepsilon(s) = s\tilde{J}(s)\sigma(s), \quad \sigma(s) = s\tilde{G}(s)\varepsilon(s),$$

de las cuales se deriva la relación de reciprocidad: $s\tilde{J}(s) = \frac{1}{s\tilde{G}(s)}$

3.3 Relaciones esfuerzo-deformación de la forma ecuación diferencial

En esta sección se presenta un estudio de lo que tradicionalmente se refiere a “*ley de operador diferencial*” de la teoría clásica de viscoelasticidad, por ejemplo, aquellas relaciones lineales esfuerzo-deformación en la forma de ecuación diferencial. Las relaciones constitutivas de este tipo surgen de la ley integral de relajación (3.9) o de la ley integral de *creep* (3.12) si las funciones de relajación G_α ($\alpha=1, 2$) o las funciones de *creep* J_α ($\alpha=1, 2$) exhiben ciertas degeneraciones las cuales son característica de un espectro de relajación o retardación finita. La mayor importancia de la ley de operador diferencial se deriva del hecho de que ésta admite una interpretación en términos de arreglos de elementos resortes y amortiguadores. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que tales arreglos, a pesar de su considerable valor heurístico, son de limitada utilidad para describir sólidos viscoelásticos reales.

En lo que sigue se presenta el caso de leyes escalares (unidimensionales). Por tanto, resulta conveniente presentar la siguiente notación. Se usa D para designar al *operador derivada respecto al tiempo* definido por:

$$D^k f = f^{(k)} \quad (3.23)$$

donde f es una función del tiempo (o de posición y tiempo). Adicionalmente, se emplean los símbolos $P(D)$, $Q(D)$ exclusivamente para denotar los operadores diferenciales lineales

$$P(D) = \sum_{k=0}^N p_k D^k, \quad Q(D) = \sum_{k=0}^N q_k D^k \quad (3.24)$$

donde p_k y q_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) son constantes reales. Acordemente, los polinomios P y Q tienen un grado no mayor a N . A continuación se presenta un teorema concerniente a la reducción de la ley integral de relajación a una ley de operador diferencial.

Teorema 8 (condiciones suficientes para la reducibilidad de una ley integral de relajación a una ley de operador diferencial). Sean $\sigma, \varepsilon \in H^N$ ($N \geq 1$) y están relacionadas a través de una ley integral de relajación (3.13), la G correspondiente tiene las siguientes propiedades: $G \in H^N$ y existen constantes reales q_0 y p_r ($r = 0, 1, 2, \dots, N$), con $p_N \neq 0$, tal que

$$P(D)G = q_0 \text{ sobre el intervalo } (0, \infty) \quad (3.25)$$

Entonces:

a) σ, ε satisfacen la ecuación diferencial

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \text{ sobre } (0, \infty) \quad (3.26)$$

donde

$$q_r = \sum_{n=r}^N p_n \overset{\circ}{G}^{(n-r)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.27)$$

b) σ, ε cumplen con las condiciones iniciales

$$\sum_{r=k}^N p_r \overset{\circ}{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \overset{\circ}{\varepsilon}^{(r-k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.28)$$

El Teorema 8 asegura las condiciones suficientes para que una ley integral de relajación pueda reducirse a una ley de operador diferencial de orden N , del tipo de relajación. La demostración del Teorema 8 no se presenta aquí, sin embargo puede consultarse en (Gurtin y Sternberg, 1962).

3.3.1 Pares de operadores diferenciales de orden N , del tipo de relajación o creep

Definición 7 Si en (3.24) cada $p_N \neq 0$ o $q_N \neq 0$, entonces el par de operadores diferenciales lineales $[P(D), Q(D)]$ se dice ser de orden N . Si en particular, $p_N \neq 0$ {

$q_N \neq 0$ }, se dice que $[P(D), Q(D)]$ es de orden N y del tipo de relajación $\{creep\}$. Así que $P(D), Q(D)$ es de orden N si al menos uno de los dos polinomios P y Q es de grado N . Notar que los dos tipos de pares de operadores diferenciales (y leyes de operador diferencial) no son mutuamente exclusivos.

La siguiente definición resulta muy útil y establece la relación entre una ley de operador diferencial y una ley integral:

Definición 8 Sea $[P(D), Q(D)]$ un par de operadores diferenciales de orden $N \geq 1$ y sea $G \in H^N$.

- a) Se dice que $[P(D), Q(D)]$ pertenece a una función de relajación G si $\sigma, \varepsilon \in H^N$ junto con

$$\sigma = \varepsilon * dG \text{ sobre } (-\infty, \infty) \quad (3.29)$$

Implica

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \text{ sobre } (0, \infty) \quad (3.30)$$

y

$$\sum_{r=k}^N p_r \overset{o}{\sigma}^{(r-k)} = \sum_{r=k}^N q_r \overset{o}{\varepsilon}^{(r-k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.31)$$

- b) Entonces se dice que la función de relajación G pertenece a $[P(D), Q(D)]$ si $\sigma, \varepsilon \in H^N$ junto con (3.30), (3.31) implican (3.29)

3.3.2 Transformada de Laplace de una ley de operador diferencial

A continuación se presenta un teorema concerniente a la conexión entre las transformadas de Laplace de una historia de esfuerzos y deformaciones las cuales se relacionan a través de una ley de operador diferencial, para lo cual se hace referencia a la Definición 6. Por tanto, recordando, la transformada de Laplace aplicada a un operador diferencial está definida por:

$$L\{D^n f\} = s^n \tilde{f} - \sum_{r=1}^k s^{k-r} f^{(r-1)}(0) \quad (3.32)$$

Teorema 9 Sea $[P(D), Q(D)]$ un par de operadores diferenciales de orden N . Sean $\sigma, \varepsilon \in H^N$ que cumplen con la ecuación diferencial (3.26) y si $N \geq 1$, las condiciones iniciales (3.28). Además, sean $\sigma(t)$ y $\varepsilon(t)$ ambos $O[\exp(s_0 t)]$ cuando $t \rightarrow \infty$ para alguna constante real s_0 . Entonces,

$$P(s)\tilde{\sigma}(s) = Q(s)\tilde{\varepsilon}(s) \quad (3.33)$$

para todo s tal que $\text{Re}(s) > s_0$

La importancia del Teorema 9 se deriva del hecho de que éste justifica la aplicación formal de la transformada de Laplace a una ley de operador diferencial; formal en el sentido de que se ignora la presencia de discontinuidades con salto en σ, ε y sus derivadas en el tiempo. La validez de la aplicación formal de la transformada es una consecuencia de las condiciones iniciales (3.31).

El siguiente teorema tiene como objetivo mostrar la relación que existe entre la transformada de Laplace de la función de relajación que pertenece a un par de operadores diferenciales y los operadores involucrados:

Teorema 10 Sean $[P(D), Q(D)]$ de orden N ($N \geq 1$) y sea $G \in H^N$. Además, sean $[P(D), Q(D)]$ pertenecientes a la función de relajación G . Entonces existe un número s_0 tal que

$$\tilde{G}(s) = \frac{Q(s)}{sP(s)} \quad (3.34)$$

para todo s tal que $\text{Re}(s) > s_0$

En el caso de la función de *creep* J , se tiene su caso inverso:

$$\mathcal{J}(s) = \frac{P(s)}{sQ(s)} \quad (3.35)$$

Por citar un ejemplo, supóngase que se tiene la ecuación diferencial:

$$p_0\sigma + p_1\sigma' + p_2\sigma'' = q_0\varepsilon + q_1\varepsilon' + q_2\varepsilon'' \quad (3.36)$$

El problema es determinar la función J aplicando la transformada de Laplace. De la ecuación diferencial (3.36) se ve que los operadores diferenciales $P(D)$ y $Q(D)$ son:

$$P(D) = p_0 + p_1 D^1 + p_2 D^2, \quad Q(D) = q_0 + q_1 D^1 + q_2 D^2,$$

a los que, aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$\hat{P}(s) = p_0 + s p_1 + s^2 p_2, \quad \hat{Q}(s) = q_0 + s q_1 + s^2 q_2$$

por tanto, usando (3.35) se tiene:

$$\mathcal{J}(s) = \frac{p_0 + s p_1 + s^2 p_2}{s(q_0 + s q_1 + s^2 q_2)} \quad (3.37)$$

$J(t)$ se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a (3.37), realizando las operaciones algebraicas necesarias en el dominio de Laplace.

En lo que sigue, se presentan algunos arreglos mecánicos simples, en donde mediante arreglos de resortes y amortiguadores se determina la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento para cada arreglo, y en la cual, aplicando la transformada de Laplace pueden determinarse las funciones de relajación y de *creep*.

3.4 Reología clásica

La reología es una parte de la mecánica del medio continuo que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación en los materiales que son capaces de fluir. Una de las metas más importantes en reología es encontrar ecuaciones constitutivas para modelar el comportamiento de los materiales. La reología puede dividirse en dos ramas:

- la Macroreología, que estudia a los cuerpos, los cuales se consideran homogéneos, sin entender su estructura y sin hacer esfuerzos para la prospección, y
- la Microreología, que procura explicar, en términos reológicos, el comportamiento de los cuerpos, pero teniendo en cuenta su composición estructural. Es decir, partiendo de primeros principios.

Por tanto, puede decirse que la Macroreología establece las relaciones entre las fuerzas que le son aplicadas a un cuerpo y las deformaciones que son producidas en él como una consecuencia, y las respectivas leyes que establecen la evolución con el tiempo.

Un arreglo reológico se entenderá como un sistema con un comportamiento semejante al del material en estudio, usualmente integrado por elementos mecánicos muy

simples (resortes, amortiguadores, etc.). Por ejemplo, Terzagui explicó mediante un arreglo reológico el estado de esfuerzos para cualquier tiempo t en suelos saturados de agua, bajo la premisa de que en un suelo cien por ciento saturado de agua y sin drenaje, el esfuerzo octahédrico aplicado es tomado totalmente por el agua; una vez permitido el drenaje, el agua deja de tomar dicho esfuerzo y éste es tomado conforme pasa el tiempo por el esqueleto sólido (proceso de consolidación).

Para entender el comportamiento viscoelástico lineal, resulta de mucha ayuda considerar el comportamiento de arreglos mecánicos análogos más simples. Estos se construyen a partir de resortes lineales y amortiguadores dispuestos en arreglos (en serie o paralelo) o simplemente solos. Puede notarse que cuando dos elementos se combinan en serie (o paralelo), su deformación (o módulo de relajación) son aditivos. De ahí que pueden establecerse las siguientes reglas de combinación: las deformaciones de fluencia se suman en serie, mientras que los módulos de relajación se suman en paralelo.

A continuación se presentan algunos arreglos mecánicos simples y sus relaciones esfuerzo-deformación que gobiernan su comportamiento a lo largo del tiempo.

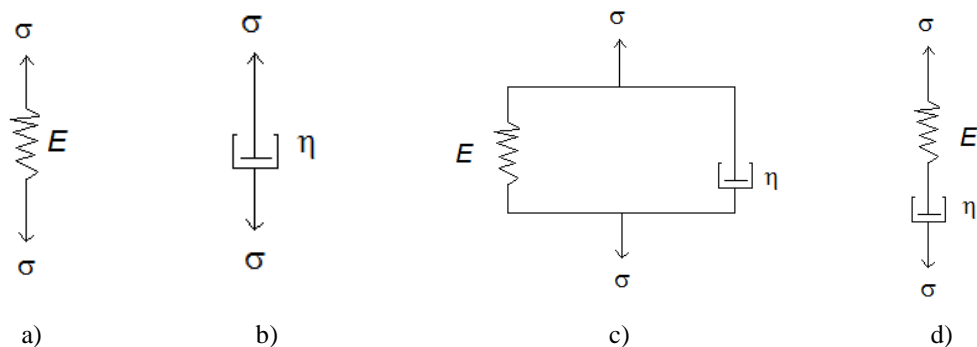


Figura 3.1 Arreglos mecánicos simples. a) resorte de Hooke, b) amortiguador de Newton, c) resorte y amortiguador en paralelo, Voigt y d) resorte y amortiguador en serie, Maxwell.

De acuerdo a Caputo y Mainardi (Caputo y Mainardi, 1971), mencionada en (Mainardi y Spada, 2011), los cuerpos viscoelásticos se pueden clasificar conforme a sus respuestas instantáneas (g: glass) y de equilibrio (e) en cuatro tipos, como se presenta en la Tabla 3.1.

Tipo	J_g	J_e	G_g	G_e
I	>0	$< \infty$	$< \infty$	>0
II	>0	$= \infty$	$< \infty$	$=0$
III	$=0$	$< \infty$	$= \infty$	>0
IV	$=0$	$= \infty$	$= \infty$	$=0$

Tabla 3.1 Clasificación de los cuerpos viscoelásticos

3.4.1 Arreglo de Hooke y de Newton

El resorte (Figura 3.1 (a)) es un elemento elástico y para éste la fuerza es proporcional al desplazamiento. Éste representa un cuerpo elástico perfecto que obedece la ley de Hooke (sólido ideal). Este arreglo suele llamarse modelo de Hooke. Si se denota por E el módulo elástico se tiene:

$$\text{Modelo de Hooke: } \sigma(t) = E\varepsilon(t), \text{ y } \begin{cases} J(t) = 1/E \\ G(t) = E \end{cases}$$

En este caso no se tiene *creep* ni relajación, así que la deformación de fluencia y el módulo de relajación son funciones constantes: $J(t) \equiv J_g \equiv J_e = 1/E$; $G(t) \equiv G_g \equiv G_e = E$

El amortiguador (Figura 3.1 (b)) es un elemento viscoso (o disipativo); el esfuerzo es proporcional a la velocidad de deformación; este representa un cuerpo viscoso perfecto que obedece a la ley de Newton (fluido perfecto). Por tanto este arreglo es llamado como modelo de Newton. Si se denota por η el coeficiente de viscosidad, se tiene:

$$\text{Modelo de Newton: } \sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\text{y } \begin{cases} J(t) = t/\eta \\ G(t) = \eta\delta(t) \end{cases}$$

En este caso se tiene un *creep* lineal $J(t) = J_+ t$ y una relajación instantánea $G(t) = G_- \delta(t)$ con $G_- = 1/J_+ = \eta$. Los arreglos de Hooke y Newton representan los casos límite de los cuerpos viscoelásticos del tipo sólido y líquido, respectivamente.

3.4.2 Arreglos de Kelvin-Voigt y Maxwell

El arreglo constituido por un resorte en paralelo con un amortiguador se conoce como modelo de Kelvin-Voigt (Figura 3.1 (c)). Para este arreglo se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.38)$$

Cuyas funciones solución son:

$$J(t) = J_1 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right], \quad J_1 = \frac{1}{E}, \quad \tau_e = \eta_1 / E$$

$$G(t) = G_e + G_- \delta(t), \quad G_e = E, \quad G_- = \eta_1$$

donde τ_e se conoce como el tiempo de retardo.

El arreglo constituido por un resorte en serie con un amortiguador se conoce como modelo de Maxwell (Figura 3.1 (d)). Se tiene la siguiente ecuación:

$$\sigma(t) = a_1 \frac{d\sigma}{dt} + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.39)$$

y cuyas funciones solución son:

$$J(t) = J_g + J_+ t, \quad J_g = \frac{a_1}{\eta_1}, \quad J_+ = \frac{1}{\eta_1}$$

$$G(t) = G_1 e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}, \quad G_1 = \frac{\eta_1}{a_1}, \quad \tau_\sigma = a_1,$$

donde τ_σ es conocido como el tiempo de relajación.

Los arreglos Voigt y Maxwell son por tanto los cuerpos viscoelásticos más simples del tipo III y II respectivamente. El modelo Voigt exhibe una deformación de *creep* exponencial (reversible) pero no una relajación de esfuerzos. Se considera como un elemento de retardación. El modelo de Maxwell exhibe una relajación de esfuerzos exponencial (reversible) y una deformación de *creep* irreversible. Se considera como un elemento de relajación.

3.4.3 Los arreglos de Zener y Anti-Zener

Con base en una regla de combinación se pueden construir los arreglos más simples del tipo I y IV que requieren tres parámetros.

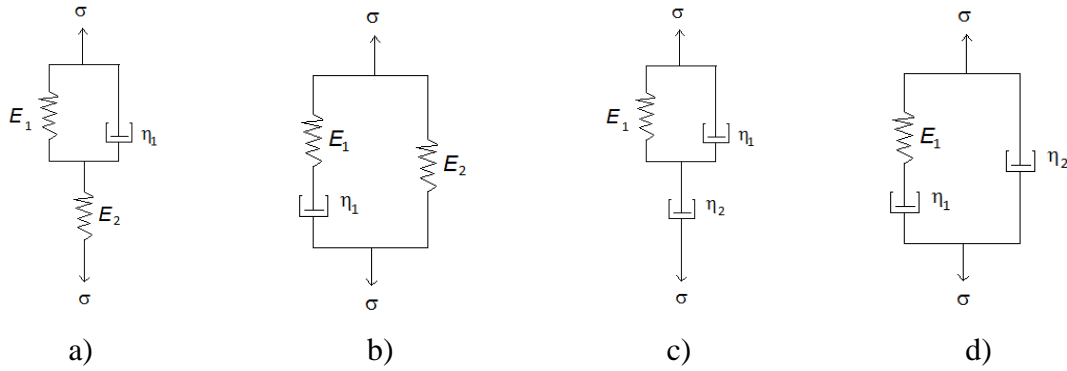


Figura 3.2 Representaciones mecánicas del arreglo de Zener: a) y b), y del arreglo anti-Zener: c) y d), donde: a) un resorte en serie con Voigt, b) un resorte en paralelo con Maxwell, c) un amortiguador en serie con Voigt, d) un amortiguador en paralelo con Maxwell.

El cuerpo viscoelástico más simple del tipo I se obtiene adicionando un resorte en serie a un arreglo de Voigt o en paralelo a un arreglo de Maxwell (Figura 3.2 (a,b)). Así, de acuerdo a la regla de combinación se agrega una constante positiva al arreglo de Voigt para la deformación por fluencia y al arreglo de Maxwell para el módulo de relajación, de manera que se obtiene $J_g > 0$ y $G_e > 0$. Tal como dicho arreglo fue presentado por Zener bajo la denominación de Sólido Estándar Lineal (SLS por sus siglas en inglés) se tiene:

$$\text{Modelo de Zener: } \left[1 + a_1 \frac{d}{dt} \right] \sigma(t) = \left[E + \eta_1 \frac{d}{dt} \right] \varepsilon(t)$$

$$\text{y } J(t) = J_g + J_1 [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}], \quad J_g = \frac{a_1}{\eta_1}, \quad J_1 = \frac{1}{E} - \frac{a_1}{\eta_1}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta_1}{E}$$

$$G(t) = G_e + G_1 e^{-t/\tau_\sigma}, \quad G_e = E, \quad G_1 = \frac{\eta_1}{a_1} - E, \quad \tau_\sigma = a_1$$

Debe cumplirse la condición de que $0 < E < \eta_1 / a_1$ con el fin de que J_1 y G_1 sean positivas y por tanto $0 < J_g < J_e < \infty$ y $0 < G_e < G_g < \infty$. Como una consecuencia, puede notarse que para el modelo S. L. S. el tiempo de retardo debe ser más grande que el tiempo relajación, esto es $0 < \tau_\sigma < \tau_\varepsilon < \infty$.

Ahora, el cuerpo viscoelástico del tipo IV más simple requiere de tres parámetros; esto se obtiene agregando un amortiguador a los arreglos de Voigt en serie, y Maxwell en paralelo (Figura 3.2 (c,d)). De acuerdo a la regla de combinación, se agrega un término lineal al arreglo de Voigt para deformación por fluencia y un término impulso Delta al

arreglo de Maxwell para el módulo de relajación así que se obtiene $J_g = \infty$ y $G_g = \infty$.

Puede referirse a este arreglo como anti-Zener. Se tiene:

$$\text{Modelo de anti-Zener: } \left[1 + a_1 \frac{d}{dt} \right] \sigma(t) = \left[\eta_1 \frac{d}{dt} + \eta_2 \frac{d^2}{dt^2} \right] \varepsilon(t)$$

$$\text{y } J(t) = J_+ t + J_1 [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}], \quad J_+ = \frac{1}{\eta_1}, \quad J_1 = \frac{a_1}{\eta_1} - \frac{\eta_2}{\eta_1^2}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$G(t) = G_- \delta(t) + G_1 e^{-t/\tau_\sigma}, \quad G_- = \frac{\eta_2}{a_1}, \quad G_1 = \frac{\eta_1}{a_1} - \frac{\eta_2}{a_1^2}, \quad \tau_\sigma = a_1$$

Debe cumplirse la condición $0 < \eta_2 / \eta_1 < a_1$ con el fin de que J_1 y G_1 sean positivas. Como una consecuencia, se nota que para este arreglo, el tiempo de relajación debe ser más grande que el tiempo de retardo, esto es $0 < \tau_\varepsilon < \tau_\sigma < \infty$, al contrario del arreglo de Zener.

3.4.4 Arreglo de Burgers

En la literatura de la reología, es costumbre considerar el modelo de Burgers el cual se obtiene de agregar un resorte o un amortiguador a las representaciones de los arreglos anti-Zener o Zener, respectivamente. Asumiendo la representación de *creep*, el resorte o el amortiguador es agregado en serie, así que el arreglo de Burgers resulta de una combinación en serie de los elementos de Maxwell y Voigt. Por otro lado, asumiendo una representación de relajación, el amortiguador o resorte es agregado en paralelo, así que el arreglo de Burgers resulta de dos elementos de Maxwell dispuestos en paralelo. Ver la Figura 3.3.

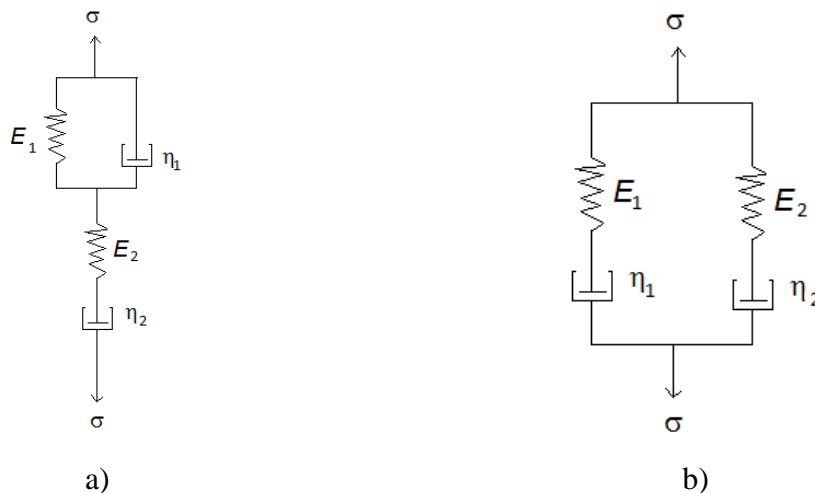


Figura 3.3 Arreglo de Burgers. a) representación de *creep*, y b) representación de relajación

De acuerdo a la clasificación general, el arreglo de Burgers está constituido por cuatro elementos del tipo II, y definido por cuatro parámetros.

Se tiene:

$$\text{Modelo de Burgers: } \left[1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} \right] \sigma(t) = \left[\eta_1 \frac{d}{dt} + \eta_2 \frac{d^2}{dt^2} \right] \varepsilon(t)$$

$$\text{y, } J(t) = J_g + J_+ t + J_1 [1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}], \quad J_g = \frac{1}{a_2}, \quad J_+ = \frac{1}{\eta_2}, \quad J_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{a_1}{\eta_1}$$

Pueden construirse arreglos más complejos de varios elementos (resortes y amortiguadores), pero la solución de la ecuación diferencial resultante puede llegar a complicarse, por lo que en este sentido, las ecuaciones diferenciales fraccionarias aplicadas a la reología fraccionaria ofrecen una alternativa de modelación, ya que se requieren menos parámetros, y por tanto menos elementos (resortes y amortiguadores fraccionarios) para simular un problema de viscoelasticidad. A continuación se expone la teoría de la reología fraccionaria.

3.5 Reología fraccionaria

Los arreglos reológicos, tales como los arreglos clásicos de Kelvin-Voigt y Maxwell (Figura 3.4) pueden modificarse para ser tratados como modelos reológicos fraccionarios; se le llama al arreglo fraccionario de Kelvin-Voigt FVM (en inglés: fractional Voigt model) y al de Maxwell FMM (en inglés: fractional Maxwell model). Estos arreglos dan mayor versatilidad en la simulación del comportamiento de materiales complejos, tales como los suelos, debido a que resultan ser más eficientes ya que requieren de menos parámetros que un modelo clásico equivalente para simular un material viscoelástico. Recordando, la representación mecánica de los arreglos Kelvin-Voigt y Maxwell es:

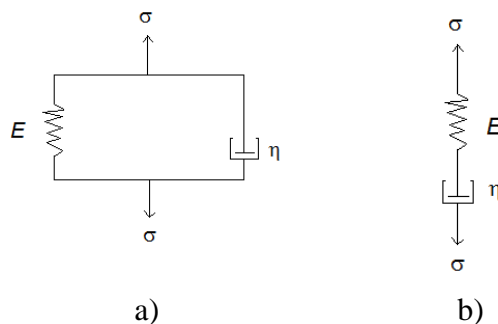


Figura 3.4 Arreglos reológicos de: a) Kelvin-Voigt y b) Maxwell

La ecuación diferencial del arreglo Kelvin-Voigt (clásica) expresada con la derivada entera es:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.40)$$

Ahora, escribiendo la misma ecuación pero con derivada fraccionaria (Meral et al., 2010) resulta:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial^\alpha \varepsilon}{\partial t^\alpha} \quad (3.41)$$

donde α es el exponente fraccionario arbitrario.

En las ecuaciones (3.40) y (3.41) se observa la generalización de un arreglo clásico a uno fraccionario. Las constantes E y η (módulos de rigidez y viscosidad respectivamente), que representan las propiedades viscoelásticas del material, aparecen en ambas ecuaciones, lo que cambia es el orden de la derivada en el término de velocidad de deformación $\partial^\alpha \varepsilon / \partial t^\alpha$ en donde α es un número real que representa el orden de la derivada, que en el caso de la ecuación clásica vale 1. Estrictamente hablando, cuando $\alpha < 1$ no puede hablarse de una velocidad de deformación, por lo que su sentido físico desaparece. Sin embargo, como se verá a continuación, lo que implica una derivada fraccionaria de la deformación es una transición entre un sólido perfecto (resorte, para un valor de derivada fraccionaria igual a cero) y un elemento de Newton (amortiguador, para un valor de derivada fraccionaria igual a uno), lo cual implica que tiene ambos comportamientos. Por tanto, un elemento amortiguador fraccionario es una generalización de un elemento viscoso a uno viscoelástico fraccionario.

De acuerdo a H. Schiessel y A. Blumen (Schiessel y Blumen, 1993), un elemento amortiguador fraccionario puede entenderse como un arreglo finito (en realidad es infinito pero puede acotarse) de resortes y amortiguadores como el presentado en la Figura 3.5. De forma similar, pueden generalizarse los arreglos como los de Kelvin y Maxwell. En la Figura 3.6 se presenta el esquema generalizado de Maxwell.

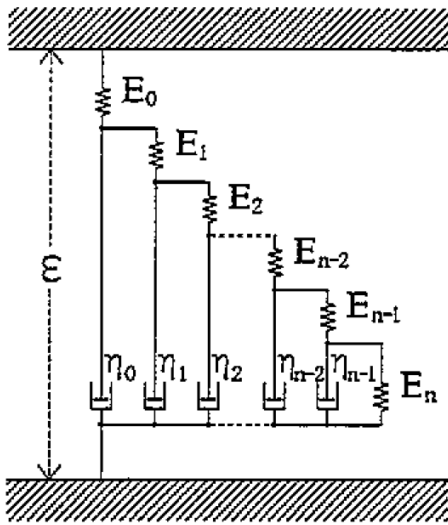


Figura 3.5 Diagrama de un arreglo mecánico finito usado para simular un elemento amortiguador generalizado

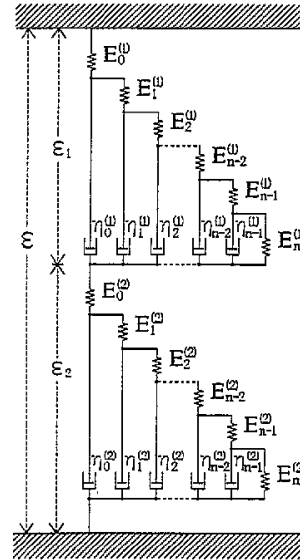


Figura 3.6 Diagrama de un arreglo mecánico finito usado para simular un modelo de Maxwell generalizado

Más adelante se presenta la ecuación diferencial fraccionaria correspondiente al arreglo reológico fraccionario de Burgers, el cual requiere de cuatro constantes viscoelásticas y tres exponentes fraccionarios. Se le llama de orden superior (Liu et al., 2006) ya que el orden de la derivada fraccionaria mayor es $\beta + \gamma$, el cual puede alcanzar un valor máximo de 2 si se considera que las derivadas fraccionarias pueden tomar valores entre 0 y 1.

3.5.1 Arreglos reológicos fraccionarios de orden superior

Si se construyen arreglos en serie y en paralelo a partir de los modelos FVM y FMM se obtienen arreglos reológicos fraccionarios de orden superior, tal como los arreglos de Zener y Burgers, los cuales nos permiten una simulación más compleja del comportamiento viscoelástico de los materiales (Liu y Xu, 2006). En la Figura 3.7 se presenta el esquema de los arreglos Kelvin-Voigt y Maxwell en serie (FVMS, en inglés: fractional Voigt-Maxwell in series), arreglo que sirvió de punto de partida para realizar los análisis en este trabajo.

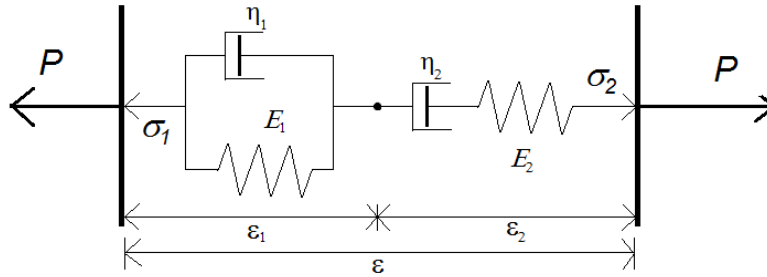


Figura 3.7 Arreglo en serie (FVMS)

3.5.2 Ecuación constitutiva del modelo FVMS

En el modelo FVMS se tienen los arreglos FVM y FMM conectados en serie y por tanto se tienen dos ecuaciones simultáneas como se muestra a continuación (Liu y Xu, 2006):

en el cuerpo de Kelvin-Voigt, la ecuación diferencial es:

$$\sigma_1(t) = \eta_1 \cdot {}_0 D_t^\gamma \varepsilon_1(t) + E_1 \varepsilon_1(t) \quad (3.42)$$

y en el cuerpo de Maxwell, la ecuación es:

$$\sigma_2(t) + \frac{\eta_2}{E_2} \cdot {}_0 D_t^\alpha \sigma_2(t) = \eta_2 \cdot {}_0 D_t^\beta \varepsilon_2(t) \quad (3.43)$$

en donde

- t : tiempo
- $\sigma_i(t)$ es el esfuerzo aplicado como función del tiempo
- ${}_0 D_t^\alpha$ es la derivada fraccionaria con exponente α
- E_i y η_i son los módulos de rigidez y viscosidad, respectivamente
- α , β y γ son los exponentes fraccionarios
- $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ son las funciones de deformación para los cuerpos de Kelvin y Maxwell respectivamente

Por otro lado, se tiene que las deformaciones en todo el cuerpo son:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad (3.44)$$

y en este arreglo $\sigma(t) = \sigma_1(t) = \sigma_2(t)$.

Sustituyendo (3.42) y (3.43) en (3.44), y haciendo los arreglos algebraicos necesarios, se tiene:

$$E_2 \cdot {}_0D_t^{\beta+\gamma} \varepsilon(t) + E_2 c_1 \cdot {}_0D_t^\beta \varepsilon(t) =$$

$${}_0D_t^{\alpha+\gamma} \sigma(t) + c_1 \cdot {}_0D_t^\alpha \sigma(t) + c_2 \cdot {}_0D_t^\gamma \sigma(t) + \frac{E_2}{\eta_1} \cdot {}_0D_t^\beta \sigma(t) + c_1 c_2 \sigma(t) \quad (3.45)$$

donde,

$$c_1 = E_1 / \eta_1, \quad c_2 = E_2 / \eta_2$$

La solución de la ecuación diferencial del arreglo FVMS para el fenómeno de *creep* puede obtenerse aplicando la transformada de Laplace:

$$E_2 s^{\beta+\gamma} \hat{\varepsilon}(s) + E_2 c_1 s^\beta \hat{\varepsilon}(s) =$$

$$s^{\alpha+\gamma} \hat{\sigma}(s) + c_1 s^\alpha \hat{\sigma}(s) + c_2 s^\gamma \hat{\sigma}(s) + \frac{E_2}{\eta_1} s^\beta \hat{\sigma}(s) + c_1 c_2 \hat{\sigma}(s) \quad (3.46)$$

Es decir,

$$\left(E_2 s^{\beta+\gamma} + E_2 c_1 s^\beta \right) \hat{\varepsilon}(s) = \left(s^{\alpha+\gamma} + c_1 s^\alpha + c_2 s^\gamma + \frac{E_2}{\eta_1} s^\beta + c_1 c_2 \right) \hat{\sigma}(s) \quad (3.47)$$

Donde s es el parámetro de transformación, $\hat{f}(s) = L\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ es la función imagen de $f(t)$.

De (3.47) se obtiene:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{E_2} \hat{\sigma}(s) + \frac{s^{-\beta}}{\eta_2} \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{\eta_1 (s^\gamma + c_1)} \hat{\sigma}(s) \quad (3.48)$$

Asumiendo que $\sigma(t) = \sigma_0 H^0$ (una función del tipo escalón), puede obtenerse:

$$\hat{J}(s) = \frac{\hat{\varepsilon}(s)}{\sigma_0} = \frac{s^{\alpha-\beta-1}}{E_2} + \frac{s^{-\beta-1}}{\eta_2} + \frac{s^{-1}}{\eta_1 (s^\gamma + c_1)} \quad (3.49)$$

La transformada inversa de Laplace término a término de la ecuación (3.49) resulta:

$$J(t) = \frac{1}{E_2} \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{1}{\eta_2} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\eta_1} t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma) \quad (3.50)$$

donde $E(a, b)$ es la función Mittag-Leffler, una generalización de la función exponencial, y $\Gamma(x)$ es la función gamma.

Cuando α , β y γ son igual a 1, la ecuación (3.50) se reduce a la solución de la ecuación diferencial clásica (3.51), con derivadas enteras:

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}} \right) \quad (3.51)$$

3.5.3 Análisis paramétrico del modelo FVMS

En esta sección se presenta un análisis paramétrico de la ecuación (3.50), con el objeto de observar la sensibilidad de dicha ecuación ante la variación de los exponentes fraccionarios y las constantes viscoelásticas. Para facilitar la observación de la variación de los parámetros fraccionarios la función $J(t)$ se analizará separando cada uno de sus tres términos, de tal forma que:

$$J(t) = J_0(t) + J_1(t) + J_2(t)$$

Por lo que el efecto total de $J(t)$ será la suma algebraica de los tres términos.

3.5.3.1 Análisis paramétrico del término J_1

En primer lugar, se presenta el análisis paramétrico del segundo término de la ecuación (3.50), $J_1(t) = 1/\eta_2 \cdot t^\beta / \Gamma(\beta + 1)$. En la Figura 3.8 se presenta la gráfica tridimensional de $J_1(t)$ variando t y β . A manera de ejemplo, el valor de η_2 se fijó en 100. Puede apreciarse la variación de la función $J_1(t)$ al variar tanto el tiempo t como el exponente fraccionario β . Cuando $\beta=0$, $J_1(t)$ se comporta como una función constante con valor $1/\eta_2 = 0.01$. Al variar el exponente fraccionario entre cero⁺ y uno⁻, la función $J_1(t)$ se comporta como una parábola dependiente del parámetro β y la función Γ . Cuando $\beta=1$, $J_1(t)$ se comporta como una recta con pendiente igual a 0.01.

Interpretación física. Cuando $\beta=0$, el elemento fraccionario se comporta como un sólido perfecto (elemento de Hooke), mientras que cuando $\beta=1$ el elemento fraccionario se comporta como un fluido (elemento de Newton). Para valores intermedios, $0 < \beta < 1$, se tiene una transición suave, en donde participan combinados en un arreglo jerárquico elementos amortiguadores y resortes como el mostrado en la Figura 3.5. En dicho arreglo, dependiendo del valor de las constantes viscoelásticas, resultará el valor de β para un

elemento amortiguador fraccionario equivalente. Por tanto, cuando $\beta \rightarrow 1$ se incrementa la participación de los elementos viscosos (amortiguadores).

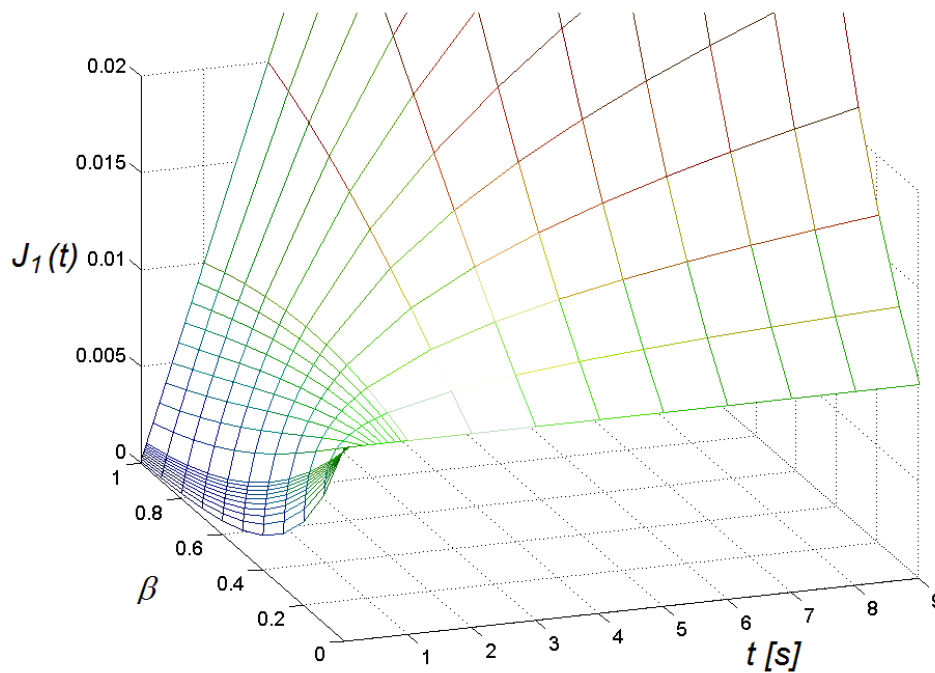


Figura 3.8 Análisis paramétrico del término $\frac{1}{\eta_2} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$. $\eta_2 = 100$

3.5.3.2 Análisis paramétrico del término J_0

El primer término de la ecuación (3.9), $J_0(t) = 1/E_2 \cdot t^{\beta-\alpha} / \Gamma(\beta - \alpha + 1)$, presenta el mismo comportamiento que el del caso anterior, para $J_1(t)$, con la diferencia de que ahora éste se ve afectado por el exponente fraccionario α . Para cumplir con las condiciones de estabilidad (Schiessel y Blumen, 1993), debe de cumplirse que $\beta \geq \alpha$. Por otro lado, si se fijan los valores de α y β para que se cumpla la igualdad $\beta = \alpha$ resulta de gran utilidad para simular la deformación instantánea en los materiales, ya que su contribución a la función $J(t)$ en este caso es de una función escalón con valor $1/E_2$. El efecto de las constantes fraccionarias η_2 y E_2 en el primer y segundo términos de la ecuación (3.50) es de escala.

3.5.3.3 Análisis paramétrico del término J_2

A continuación se muestra el análisis paramétrico del tercer término de la función $J(t)$, $J_2(t) = 1/\eta_1 \cdot t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma)$, donde $c_1 = E_1 / \eta_1$. A manera de ejemplo, los valores de E_1 y

η_1 se fijan en 100, dando $c_1 = 1$. En la Figura 3.9 se presenta la variación de la función $J_2(t)$ al variar los parámetros t y γ . Observando la gráfica de dicha figura puede apreciarse que cuando $\gamma=0$, la función toma la forma de una constante con valor igual a $J_2(t) = 0.005$. Cuando $\gamma = 1.0$, $J_2(t)$ toma la forma de una parábola asintótica, en este caso a un valor de 0.01. Para valores intermedios, $0 < \gamma < 1$, la función $J_2(t)$ toma la forma de parábolas asintóticas a constantes con valores intermedios a los presentados para $\gamma = 0.0$ y $\gamma = 1.0$.

Como puede observarse en este término, aparece la función Mittag-Leffler (vista en el capítulo 2) y como casos particulares de dicha función se tienen las siguientes funciones:

$$\text{Cuando } \gamma = 1.0, \quad E(1,2,Z) = \frac{\exp(Z) - 1}{Z} \quad (3.52)$$

$$\text{Cuando } \gamma = 0.0, \quad E(0,1,Z) = \frac{1}{1 - Z} \quad (3.53)$$

Interpretación física. Puede interpretarse físicamente como la deformación dada en el elemento amortiguador fraccionario está restringida por el elemento elástico (resorte); en este caso la deformación en el arreglo no es inmediata, si no que existe un tiempo de retardo, en donde después de cierto tiempo la deformación máxima se alcanza. Cuando $\gamma = 1.0$, se tiene el arreglo clásico de Kelvin y la deformación máxima la rige el elemento elástico. En este caso, la función $J_2(t)$ tiende a una asíntota con un valor constante de 0.01. Cuando $\gamma = 0.0$ el arreglo se transforma en un arreglo de dos elementos elásticos en paralelo, por lo que la deformación es inmediata y no existe un tiempo de retardo. La función $J_2(t)$ adquiere un valor máximo instantáneo, en este caso de 0.005 debido a la contribución de los dos elementos elásticos, la cual se mantiene constante en el tiempo.

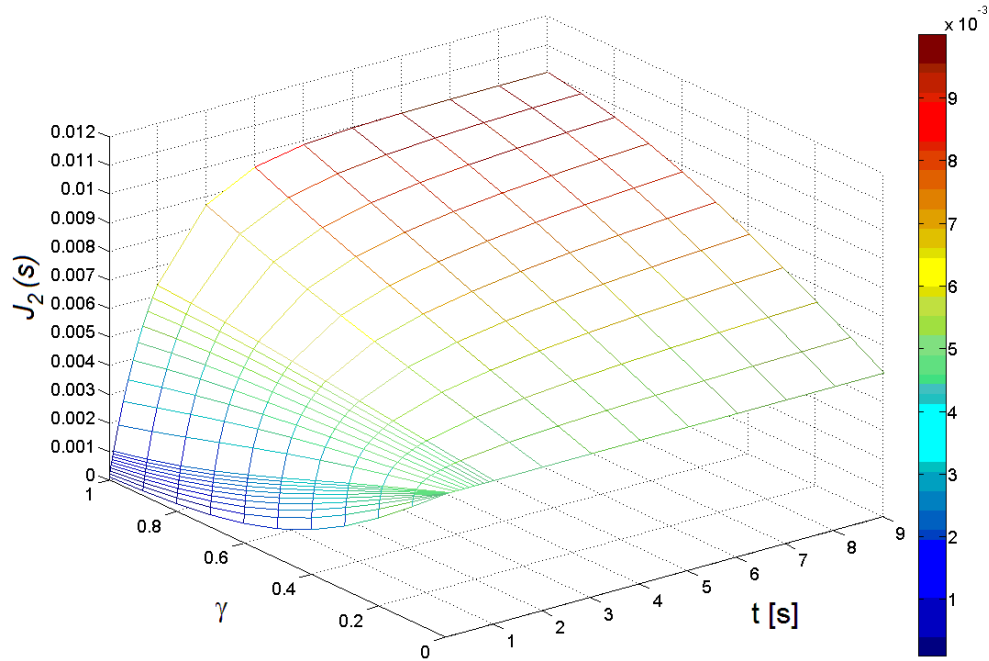


Figura 3.9 Análisis paramétrico del término $1/\eta_1 * t^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-c_1 t^\gamma)$, variando γ , $c_1 = 1$.

Finalmente, se presenta el efecto de la relación $c_1 = E_1/\eta_1$ en la respuesta de la función $J_2(t)$. En las figuras 3.10-3.12 se presentan las gráficas de $J_2(t)$ variando la relación E_1/η_1 para $\gamma = 1.0$, $\gamma = 0.5$ y $\gamma = 0.1$.

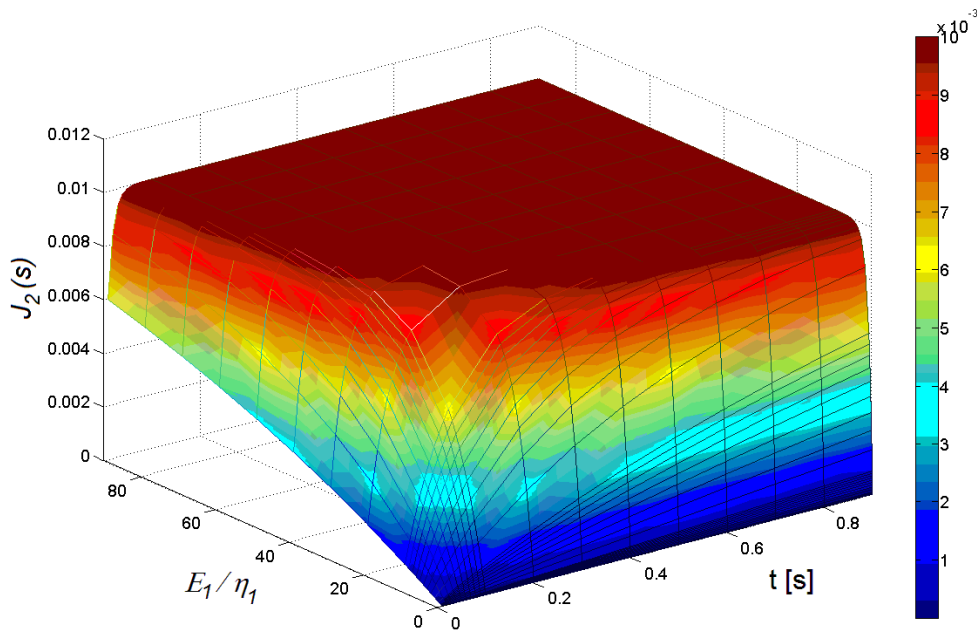


Figura 3.10 Análisis paramétrico del término $1/\eta_1 * t^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-c_1 t^\gamma)$, variando $c_1 = E_1/\eta_1$, $\gamma = 1.0$.

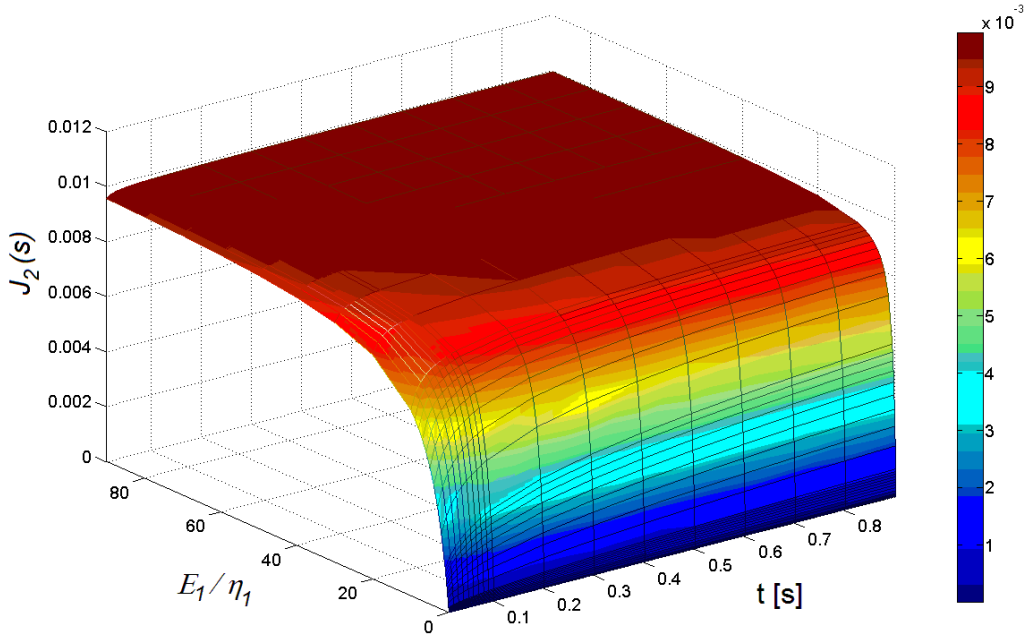


Figura 3.11 Análisis paramétrico del término $1/\eta_1 * t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma)$, variando $c_1 = E_1/\eta_1$, $\gamma = 0.5$.

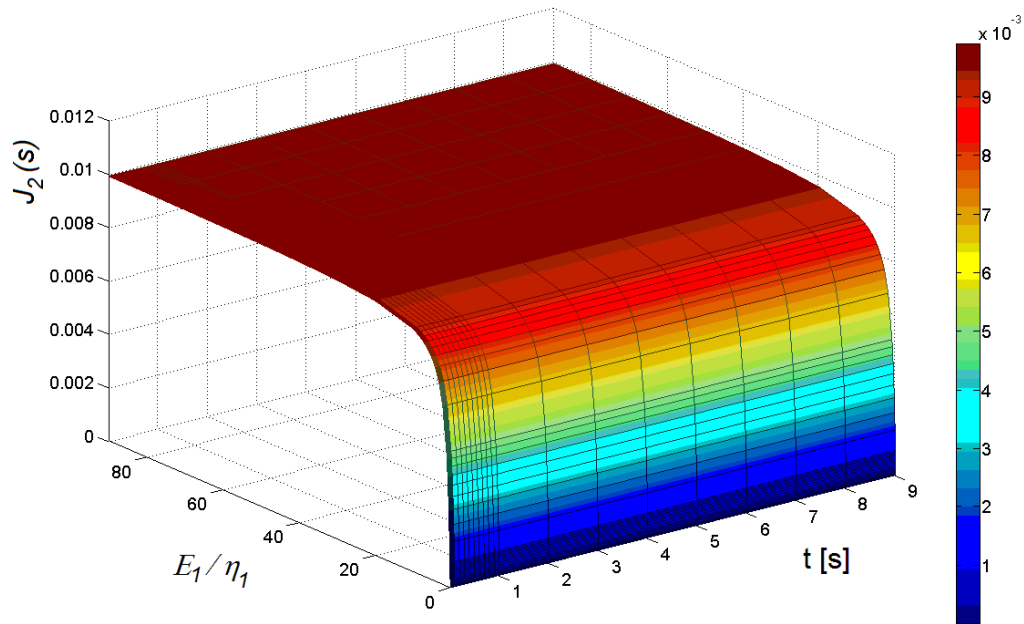


Figura 3.12 Análisis paramétrico del término $1/\eta_1 * t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma)$, variando $c_1 = \mu_1/\eta_1$, $\gamma = 0.1$.

Puede observarse que la variación con el tiempo es parabólica con asíntota en $J_2(t) = 0.01$; de hecho, la gráfica tridimensional muestra un plano que se forma al variar tanto el tiempo como E_1/η_1 . También se observa, de las tres gráficas, que dependiendo el

valor de γ , $J_2(t)$ tiene un inicio distinto (para $t=0$) para cada valor de la relación $c_1 = E_1/\eta_1$

Las constantes viscoelásticas fraccionarias tienen un mayor efecto en el tercer término de la ecuación (3.50) debido a que aparece la relación $c_1 = E_1/\eta_1$ dentro de la función Mittag-Leffler.

La suma algebraica de las funciones $J_0(t)$, $J_1(t)$ y $J_2(t)$ de la ecuación (3.50) dará el efecto total sobre la función $J(t)$.

Con el análisis paramétrico antes presentado se tiene una mejor comprensión del comportamiento que exhibe $J(t)$ al variar principalmente los exponentes fraccionarios, ya que dependiendo del valor que tomen éstos, $J(t)$ puede evolucionar en el tiempo de formas muy variadas.

4 ANTECEDENTES DEL FENÓMENO DE *CREEP* EN SUELOS

El fenómeno de *creep* en suelos resulta de gran interés para los ingenieros civiles, ya que éste se presenta durante el proceso de construcción y el tiempo de vida de edificaciones en donde los asentamientos durante largos periodos, debidos al flujo de materiales, pueden causar severos daños en las construcciones.

Los suelos arcillosos son materiales extremadamente complejos; en ellos, las partículas de arcilla influyen en la física, mecánica y fisicoquímica de dichos materiales. Los suelos arcillosos exhiben las propiedades reológicas de *creep* y *relajación*, en donde el *creep* es el más fácilmente observable. Debido a la naturaleza compleja de estos materiales existen varios aspectos que influyen en su comportamiento ante el *creep*, tales como:

- composición (contenido de partículas de arcilla)
- historia de esfuerzos
- cambios de temperatura
- ambiente bioquímico, entre muchos otros.

Aunque el fenómeno de *creep* se conoce desde hace mucho tiempo, debido a la observación de deformaciones en construcciones antiguas y taludes naturales, las investigaciones sobre este fenómeno comenzaron a partir de la mitad del siglo *XIX* debido a la creciente actividad en la construcción de edificios.

En nuestros días, podemos encontrar muchos ejemplos del fenómeno de *creep*. Un clásico ejemplo de este fenómeno es el asentamiento diferencial que ha sufrido la Torre de Pisa, en Italia. Su construcción comenzó en el año 1173 y se terminó en 1360. Durante el periodo de construcción y después, por muchos años más, los asentamientos en dicha estructura se hicieron presentes. En la Figura 4.1 se presenta un esquema de la torre y los asentamientos que ha sufrido desde su construcción.

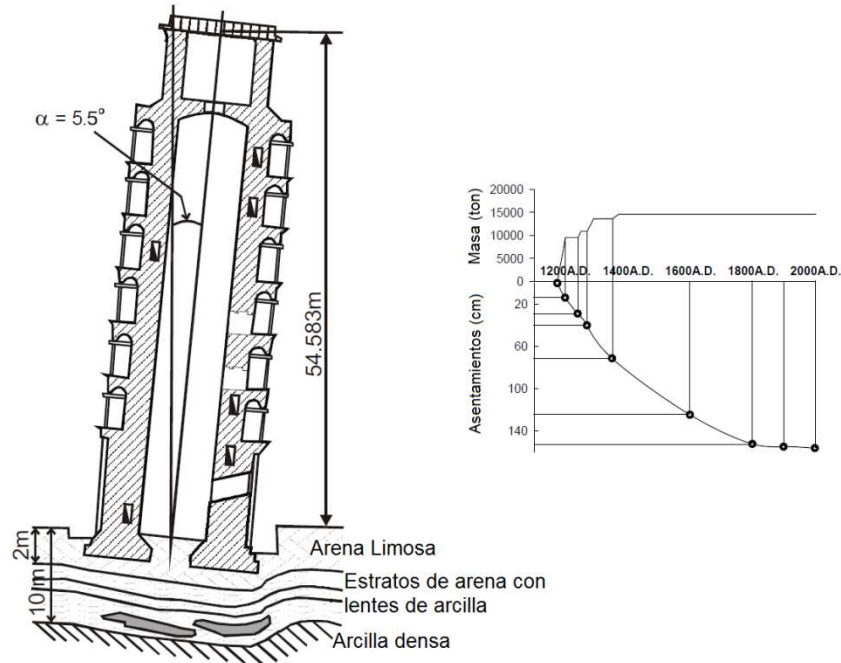


Figura 4.1 Asentamientos debidos al fenómeno de *creep*, torre de Pisa, Italia (modificada de (Havel, 2004))

El comportamiento de *creep* en suelos arcillosos bajo compresión triaxial de especímenes ha sido estudiado por muchos investigadores con el afán de entender dicho fenómeno y poder caracterizarlo.

El primer tema destacado del fenómeno de *creep* apareció en “Bases and foundations” de V. Karlovich en 1869 (se menciona en la tesis de František Havel, *Creep in Soft Soils*, 2004).

En 1966 Alan W. Bishop presentó relaciones $t - \varepsilon$ en pruebas de *creep* drenadas en compresión triaxial, en arcillas de Londres.

Los investigadores Murayama y Shibata (1958, 1961) presentaron un estudio detallado de deformación prolongada de arcilla bajo ensayos triaxiales. También se reportaron contribuciones a la caracterización del *creep* en los artículos de Christensen and Wu (1964), Vyalov and Meschyan (1969), Borja (1992).

Una de las principales contribuciones al estudio del comportamiento del *creep* desviador de suelos bajo condiciones no drenadas fue hecha por Singh and Mitchell en su publicación “General stress-strain function for soil” en 1968; en su trabajo, ellos introdujeron una nueva ley de deformación en un sistema coordenado $\log t - \log \dot{\varepsilon}$ (ver Figura 4.4). De acuerdo con estos investigadores, la gráfica del logaritmo de la velocidad

de deformación como una función del logaritmo del tiempo es lineal en ausencia de ruptura.

Casagrande y Wilson (1951) reportaron estudios de *creep* bajo carga sostenida y su efecto en la resistencia al cortante, realizados en arcillas de la ciudad de México. Las pruebas se realizaron bajo condiciones de compresión no confinada; la resistencia al cortante de la arcilla de la ciudad de México se redujo cerca de un 80% de su valor normal en 30 días.

En el libro “Fundamentals of soil behaviour” de James K. Mitchell (Mitchell, 2005) se encuentra un capítulo referente al estudio de los efectos del tiempo en la resistencia y deformación en suelos. En la Figura 4.2 se presentan curvas de *creep* correspondientes a diferentes materiales y condiciones de carga, así como una representación típica del comportamiento de los suelos ante el fenómeno de *creep* (Figura 4.3), dependiendo los esfuerzos aplicados.

Puede decirse que a partir del siglo pasado el fenómeno de *creep* en suelos arcillosos es considerado uno de los principales problemas de la mecánica de suelos.

4.1 Generalidades acerca del comportamiento de *creep* en suelos

En general, el comportamiento de los suelos arcillosos ante la acción de cargas sostenidas durante un tiempo puede tener tres fases (Mitchell, 2005): 1ª) la primaria, en la cual al inicio se tiene una tasa de deformación alta, 2ª) secundaria, en donde la tasa de deformación disminuye y se mantiene más o menos constante durante un periodo de tiempo y 3ª) la etapa terciaria, en donde la tasa de deformación aumenta y el material se aproxima a la falla. En la Figura 4.2 se presentan algunas curvas de *creep*, registradas para diferentes tipos de suelos (Martínez y Díaz-Rodríguez, 2009, modificada de (Mitchell, 2005)). En las figuras 4.2-4.4 se muestra el comportamiento típico de las arcillas durante una prueba de *creep*.

De acuerdo a los esfuerzos actuantes, el comportamiento de *creep* puede dividirse en:

- volumétrico: causado por un esfuerzo volumétrico constante¹. Normalmente se presenta después de la fase primaria en la consolidación, lo que se conoce como consolidación secundaria.

¹ Se entiende por esfuerzo volumétrico al incremento de la fuerza que actúa por unidad de área.

- desviador: causado por un esfuerzo desviador constante. Aquí pueden o no presentarse las tres fases, dependiendo del nivel del esfuerzo desviador.

Por tanto, uno de los principales problemas en el caso de comportamiento de *creep* desviador es determinar los niveles de esfuerzo para los cuales se presentan las fases secundaria y terciaria.

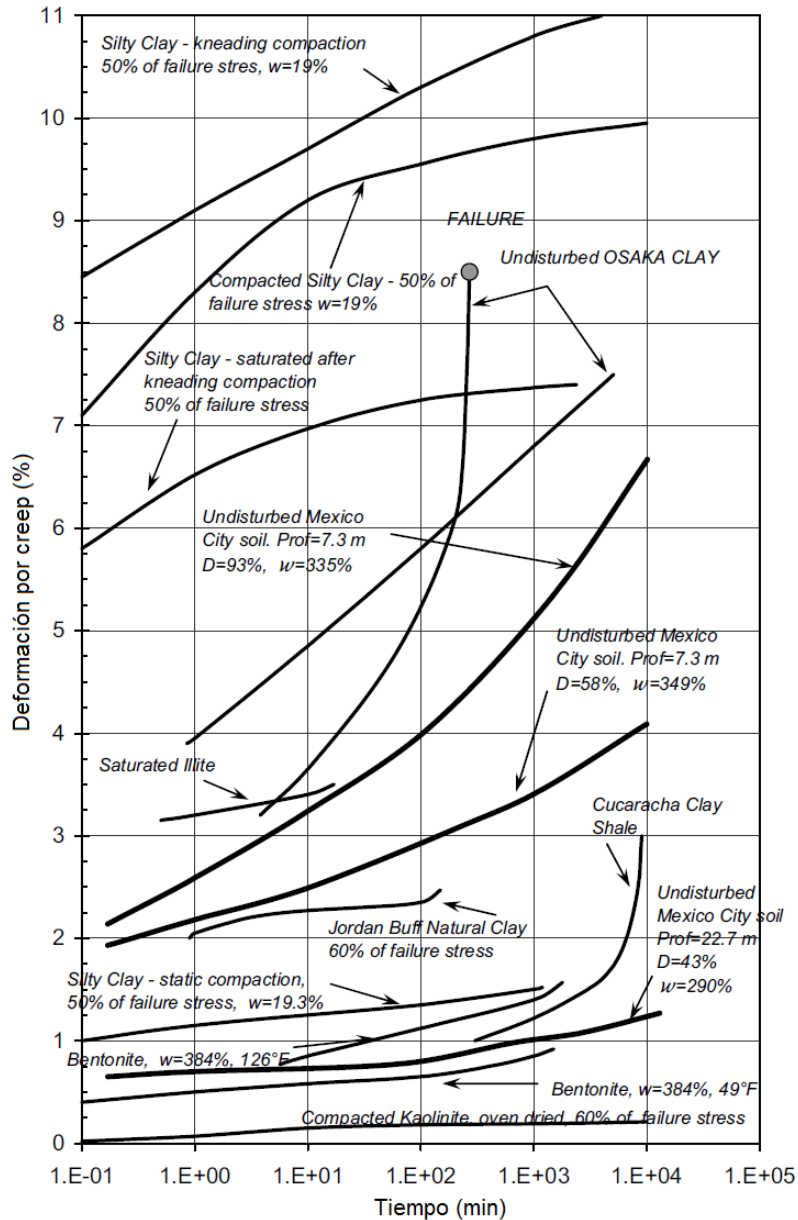


Figura 4.2 Curvas de *creep*, exhibidas para diferentes suelos (modificada de Martínez y Díaz-Rodríguez, 2009)

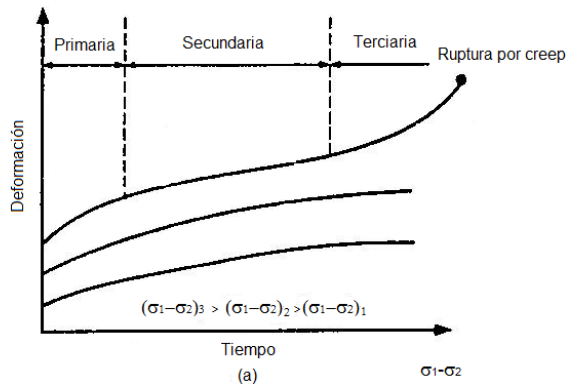


Figura 4.3 Fases de *creep* (modificada de (Mitchell, 2005))

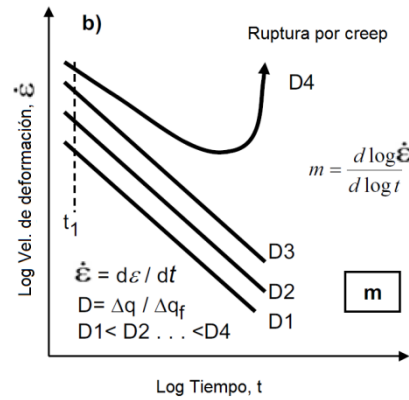


Figura 4.4 Gráficas $\log t - \log \dot{\epsilon}$ (Modificada de (Martínez y Díaz-Rodríguez, 2009)).

A continuación se presentan algunas características generales observadas en el fenómeno de *creep* y relajación de esfuerzos en suelos.

- Como se mencionó previamente, los suelos exhiben tanto *creep* como relajación de esfuerzos. Por otro lado, la relajación de esfuerzos es el decremento de esfuerzos en el tiempo manteniéndose una deformación constante. La relación entre la deformación por *creep* y el logaritmo del tiempo puede ser lineal, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
- La magnitud de los efectos (del *creep* o *relajación*) pueden incrementarse debido al incremento de plasticidad, actividad y contenido de agua del suelo. Por ello, muchas arcillas activas usualmente exhiben respuestas muy grandes dependientes del tiempo (por ejemplo: esmectita > illita > kaolinita). Esto se debe a que para las partículas más pequeñas, mayor es la superficie específica y mayor es el agua adsorbida. Los suelos normalmente consolidados² exhiben mayor efecto del *creep* que los suelos sobreconsolidados³, sin embargo, la forma básica del comportamiento es la misma para todos los suelos, ya sean inalterados, remodelados, húmedos, secos, etc.
- Un incremento en el nivel de esfuerzo desviador implica un incremento en la tasa de deformación de *creep*. Cuando un suelo falla bajo carga sostenida, se le conoce como falla por *creep*.

² Suelo que está sometido a una carga que es la máxima que éste ha soportado en toda su historia.

³ Suelo cuya carga actual es menor a la máxima que éste ha soportado en toda su historia.

- La respuesta de *creep* usualmente se divide en tres etapas: al sostenerse la aplicación de una carga, hay un periodo de *creep* transitorio durante el cual la tasa de deformación decrece con el tiempo, seguida por deformación de *creep* con tasa constante durante un periodo. Para materiales susceptibles a la falla por *creep*, la tasa de deformación se acelera produciendo la falla.
- En la Figura 4.5 se presenta un ejemplo de velocidad de *creep* como una función de los esfuerzos en ensayos de *creep* no drenado sobre muestras de ilita remoldeada. Para bajos niveles de esfuerzo, la velocidad de *creep* es muy pequeña y de poca importancia. Para esfuerzos desviadores muy cercanos a la resistencia del material, las velocidades de deformación se tornan muy altas y dan una señal de que se está aproximando a la falla.
- Para muchos suelos, existe una relación característica entre la tasa de deformación y el tiempo, como la presentada en la Figura 4.6, correspondiente a una serie de pruebas de *creep* drenadas en compresión triaxial sobre una arcilla de Londres (Bishop, 1966), y en la Figura 4.7 para pruebas de *creep* no drenadas bajo compresión triaxial sobre arcillas de Osaka (Murayama and Shibata, 1958). Para cualquier nivel de esfuerzos, expresado como un porcentaje del esfuerzo de resistencia, el logaritmo de la tasa de deformación decrece linealmente con el incremento del logaritmo del tiempo. La pendiente de estas relaciones tiene un valor que oscila entre -0.8 y -1 para pruebas no drenadas. La falla, para esfuerzos mayores se presenta en estas relaciones cuando la pendiente cambia de signo (Figura 4.7)
- La presión de poro puede incrementarse, decrecer o mantenerse constante durante el *creep*; esto depende de las condiciones bajo las cuales se encuentre el material, como cambios volumétricos en la estructura del suelo, condiciones de drenaje, etc. En general, las arcillas blandas saturadas bajo condiciones no drenadas son muy susceptibles a la pérdida de resistencia durante el *creep*, debido a la reducción de los esfuerzos efectivos causada por el incremento de la presión de poro con el tiempo. Al respecto se han realizado varios estudios respecto a este fenómeno, como los presentados en el artículo de Holzer, 1972, en donde se realizaron varios análisis de

la variación de la presión de poro durante pruebas con carga sostenida (*creep*) para condiciones no drenadas.

- La deformación debida a esfuerzos sostenidos comúnmente produce un incremento en la rigidez bajo la acción de subsecuentes incrementos de esfuerzo, como se presenta en la Figura 4.8. Esto refleja el reajuste estructural dependiente del tiempo conocido como “envejecimiento”, que sigue los cambios en el estado de esfuerzos.

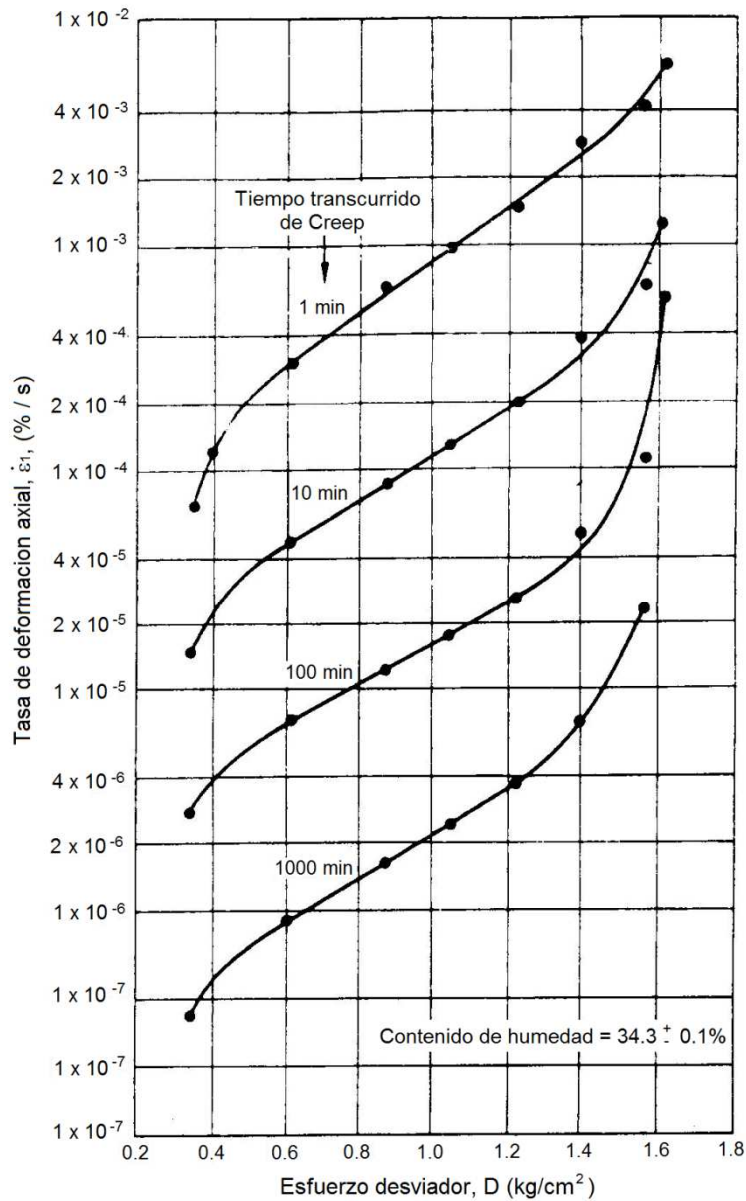


Figura 4.5 Variación de la velocidad de deformación de *creep* con el esfuerzo desviador *creep* no drenado de ilitas remoldeadas. (modificada de (Mitchell, 2005))

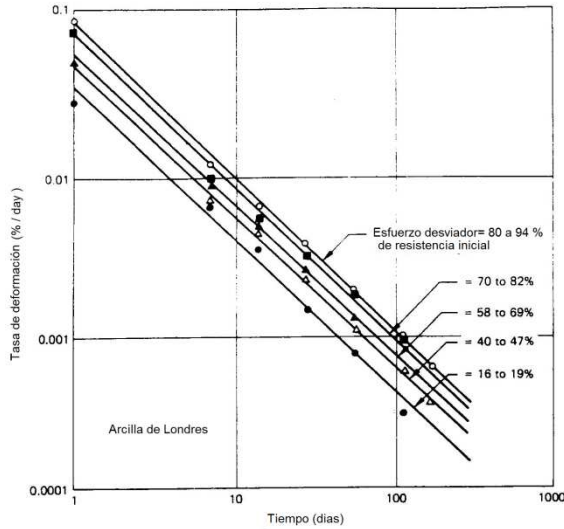


Figura 4.6 Relación entre la tasa de deformación y el tiempo durante el *creep* drenado en una arcilla de Londres (modificada de (Mitchell, 2005))

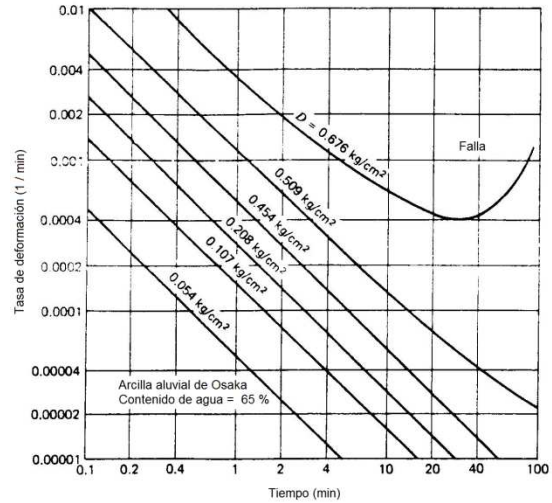


Figura 4.7 Relación entre la tasa de deformación y el tiempo durante el *creep* no drenado en una arcilla de Osaka (modificada de (Mitchell, 2005))

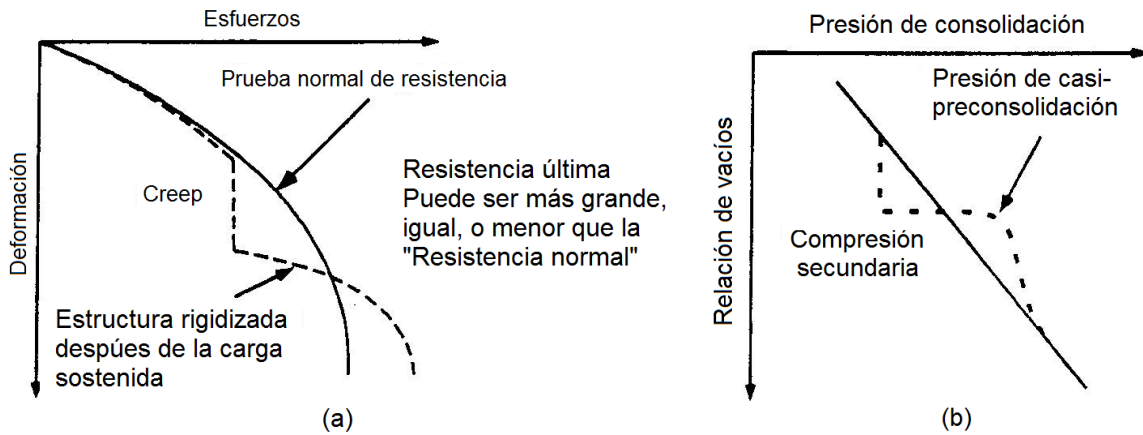


Figura 4.8 Efecto de carga sostenida en (a) comportamiento esfuerzo- deformación y resistencia, y (b) comportamiento en compresión unidimensional

4.2 Interacción Deformación – Estructura dependiente del tiempo

En realidad, curvas tan suaves como las presentadas previamente para deformaciones y velocidad de deformación como funciones del tiempo pueden no siempre ser así. Pueden ocurrir saltos en la reorganización de la estructura, reflejando una característica estocástica de la deformación, tal como puede observarse en la Figura 4.9 para el *creep* de una arcilla inalterada, diatomácea, lacustre y sobreconsolidada. En 1992, Ter-Stepanian (Mitchell,

2005) sugirió que hay cuatro niveles de deformación: (1) a nivel molecular, la cual consiste del desplazamiento de unidades de flujo sobrepasando barreras de energía, (2) desplazamiento mutuo de partículas como resultado de fallas de contacto, pero sin reacomodo, (3) nivel estructural de deformaciones en el suelo involucrando el reacomodo mutuo de partículas, y (4) deformación a nivel de agregado.

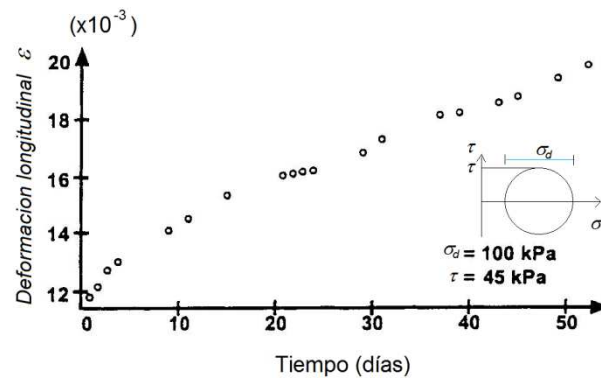


Figura 4.9 Desarrollo de *creep* sin uniformidad (modificada de Mitchell, 2005)

4.2.1 Proceso de reacomodo de partículas dependiente del tiempo

El *creep* puede llevar a un reacomodo de partículas para una configuración más estable. Las fuerzas de contacto entre partículas tienen componentes, tanto normales como tangenciales, aun si el esfuerzo aplicado macroscópicamente es isotrópico. Si, durante el proceso de *creep* hay un incremento en la proporción de un esfuerzo desviador aplicado el cual es llevado a cabo por las fuerzas relativas normales entre partículas a fuerzas tangenciales entre partículas, entonces la velocidad de *creep* decrecerá. Aquí, la velocidad a la cual el nivel 3 de deformación ocurre no necesita ser uniforme debido a la naturaleza particular de los suelos; esto reflejará una serie de reajustes estructurales tales como partículas encimándose sobre y alrededor unas de otras, dando lugar a una secuencia irregular de datos de puntos obtenidos en una prueba de *creep* como los mostrados en la Figura 4.9.

4.3 Modelos fenomenológicos

La observación de curvas experimentales de *creep* obtenidas a partir de pruebas realizadas sobre muestras bajo condiciones de *creep* o relajación ha llevado a muchas teorías, las cuales pueden ser descritas como modelos empíricos. Generalmente, esos modelos están basados en el estudio del comportamiento del suelo sometido a diversas condiciones

esfuerzo-deformación en el tiempo (curvas de esfuerzo contra deformación “instantánea”, deformación contra tiempo y esfuerzo contra tiempo. Este comportamiento puede ser descrito finalmente por una ecuación de estado ($\varepsilon(t) = f(\sigma(t), t)$ o $\sigma(t) = f(\varepsilon(t), t)$), la cual puede ser puramente empírica, física o una combinación de ambas. En un principio, los modelos fenomenológicos más simples fueron aquellos con los cuales se intentaba explicar el comportamiento ante *creep* de materiales (suelos). Estos modelos eran puramente empíricos, intentando caracterizar las curvas esfuerzo-deformación o deformación-tiempo mediante regresión. Obviamente, la aplicación de esos modelos era posible solo bajo ciertas condiciones. Los modelos modernos basados en el comportamiento fenomenológico de suelos usan cantidades físicas o intentan darle un sentido físico a los parámetros usados, lo cual los hace más generales, aplicables a muchos más casos.

4.3.1 *Comportamiento esfuerzo – deformación - tiempo*

Las historias esfuerzo-deformación juegan un papel muy importante en el comportamiento de *creep*, ya que éste está ampliamente relacionado con el estado de esfuerzo-deformación y las condiciones de frontera en el medio. Por ejemplo, en un caso de consolidación unidimensional, se tendrá *creep* volumétrico, en donde la consolidación secundaria (*creep*) se presenta una vez que se haya disipado completamente la presión de poro en el suelo; aquí sólo se presentará la fase primaria de *creep* (ver Figura 4.3), sin llegar a presentarse las fases secundaria y terciaria. Por tanto es necesario comprender y evaluar el estado de esfuerzo-deformación para entender el correspondiente comportamiento de *creep*.

4.3.2 *Comportamiento deformación- tiempo*

De acuerdo a los esfuerzos actuantes es posible dividir el comportamiento de *creep* en volumétrico y desviador (o cortante). Aquí, el *creep* volumétrico es causado por un esfuerzo volumétrico constante, mientras que el *creep* desviador es causado por esfuerzo desviador constante. Otra forma de dividir el comportamiento de *creep* se muestra en la Figura 4.3 antes vista, el cual se basa en el comportamiento de la deformación en el tiempo. De acuerdo a la forma de la curva de deformación en el tiempo, el *creep* puede dividirse en las fases primaria, secundaria y terciaria. La fase primaria comúnmente es llamada transitoria o de desvanecimiento, la cual puede ser definida como aquella en donde la tasa de deformación decrece continuamente con el tiempo. La fase secundaria se denota por una

deformación a tasa constante (flujo de material). Para el caso de la fase terciaria o fase acelerada, la tasa de deformación está creciendo continuamente, lo cual acabará en la falla por *creep*. Generalmente, el *creep* volumétrico consistirá sólo de la fase primaria de la deformación por *creep* debido a que éste tiende a estabilizarse. El *creep* desviador puede o no consistir de las tres fases, dependiendo de la movilización por cortante. Si el esfuerzo desviador es bajo, entonces sólo ocurrirá la fase primaria, pero después de exceder cierto nivel de esfuerzos se presentará la fase secundaria, la cual podría caer en la fase terciaria y por tanto, se presentará la falla.

De acuerdo a la teoría clásica de la consolidación de suelos saturados, ésta se divide en dos fases, la primaria y la secundaria, en donde la fase primaria trata de la disipación del exceso de presión de poro con el tiempo, después de aplicarse un incremento de carga, mientras que la fase secundaria está asociada principalmente al reacomodo de las partículas minerales del suelo y agregados, deformación denominada usualmente como flujo plástico (*creep*).

Basándose en la teoría clásica de la consolidación unidimensional, la fase primaria puede expresarse con la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

En donde u representa el exceso de presión de poro, t es el tiempo, z la distancia a una superficie de drenaje, y c_v es el coeficiente de consolidación, el cual está dado por:

$$C_v = \frac{k_h(1+e)}{a_v \gamma_w} \quad (4.2)$$

Donde k_h es el coeficiente de permeabilidad, $a_v = -de/d\sigma'_v$ es el coeficiente de compresibilidad, y γ_w peso específico del agua.

La fase primaria también puede expresarse en términos de la deformación:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} C \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (4.3)$$

En donde z es la profundidad y C es el coeficiente de difusividad de deformación (Janbu, 1965).

Los modelos más simples de la fase de consolidación secundaria (*creep* volumétrico) que generalmente corresponden a la fase primaria de *creep* (de acuerdo al comportamiento de la

deformación-tiempo de *creep*) están basados en la aproximación de curvas de deformación en el tiempo. En este caso, dicha aproximación puede ser mediante funciones exponenciales o logarítmicas como las siguientes:

$$\varepsilon_s(t) = C_0[1 - \exp(-\Delta_0 \cdot t^{\chi_0})] \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_s(t) = L \cdot (\lambda_0 \cdot t + 1) \quad (4.5)$$

En donde C_0 , Δ_0 , χ_0 , L y λ_0 son parámetros determinados experimentalmente. La ecuación (4.4) fue propuesta por F. Kohlrausch en 1863 (Havel, 2004) para la descripción del *creep* en fibra de cristal reforzado. Después esta fue usada ampliamente en la teoría de *creep* en concreto y suelos arcillosos. La ecuación logarítmica (4.5) fue sugerida por K. Buisman (Havel, 2004).

Para la evaluación de la consolidación secundaria en suelos, es común utilizar el coeficiente de compresión secundaria C_α , el cual puede definirse a partir de la variación de la relación de vacíos e^4 con el tiempo t para un incremento de carga dado, ver Figura 4.10.

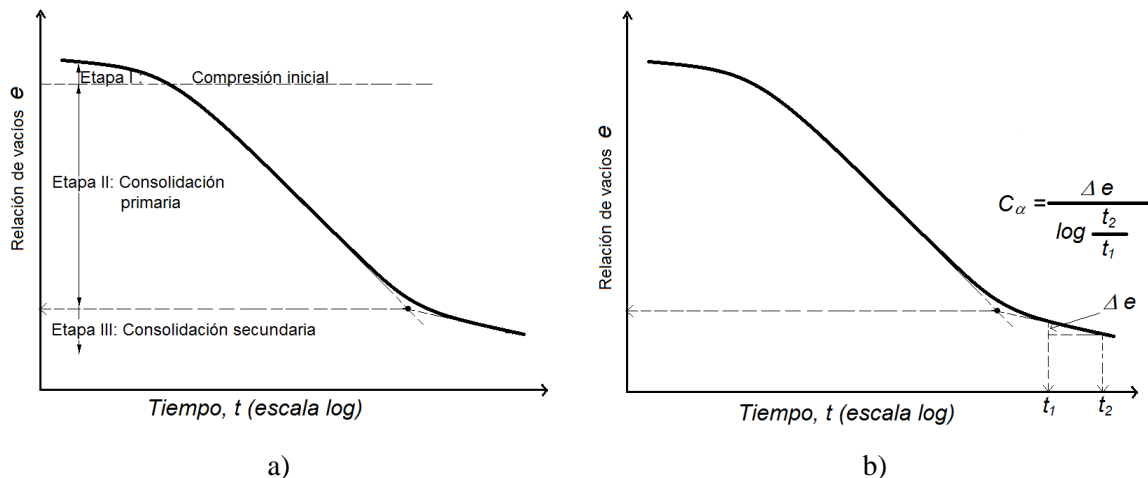


Figura 4.10 Variación de e con el $\log(t)$ bajo un incremento de carga. Definición del coeficiente de consolidación secundaria.

$$C_\alpha = \frac{\Delta e}{\log t_2 - \log t_1} = \frac{\Delta e}{\log \left(\frac{t_2}{t_1} \right)} \quad (4.6)$$

⁴ La relación de vacíos se define como el cociente entre el volumen de vacíos V_v y el volumen de sólidos V_s . $e = V_v/V_s$.

donde Δe es el cambio de relación de vacíos, t_1 y t_2 el tiempo. La magnitud de la deformación secundaria puede calcularse como:

$$S_s = C_\alpha' \cdot H \cdot \log\left(\frac{t_1}{t_2}\right) \quad (4.7)$$

donde

$$C_\alpha' = \frac{C_\alpha}{1 + e_p} \quad (4.8)$$

e_p es la relación de vacíos al final de la consolidación primaria y H es el espesor de la capa de arcilla.

El asentamiento por consolidación secundaria es más importante que por consolidación primaria en suelos orgánicos y en suelos inorgánicos altamente compresibles. En arcillas inorgánicas preconsolidadas, el índice de compresión secundaria es muy pequeño y tiene una menor importancia práctica (Braja, 2001). La tasa de compresión secundaria respecto a la primaria para un espesor dado del estrato de suelo es dependiente de la razón del incremento del esfuerzo ($\Delta\sigma'$) respecto al esfuerzo efectivo inicial σ'_0 . Para tasas pequeñas $\Delta\sigma'/\sigma'_0$ la tasa de compresión secundaria respecto a la primaria es mayor.

4.4 Deformación en el suelo como un proceso de velocidad

La deformación y falla a cortante en un suelo involucran un reacomodo de partículas dependiente del tiempo. Por tanto, tales procesos son susceptibles de estudiar como procesos de velocidad a través de la aplicación de la teoría de la tasa de reacción absoluta (en inglés: Absolute reaction rates) (Glasstone et al., 1941, mencionada en el libro de Mitchell, 2005). Esta teoría involucra ambos puntos de vista: la naturaleza fundamental de la resistencia del suelo y las formas funcionales de las influencias de varios factores en el comportamiento del suelo. Los detalles del desarrollo de esta teoría, la cual está basada en mecánica estadística, pueden encontrarse en los trabajos de Eyring (1936), Glasstone et al. (1941), así como en la literatura de la fisicoquímica. La adaptación de esta teoría al estudio del comportamiento de suelos puede encontrarse en Abdel-Handy y Herrin (1966), Andersland y Douglas (1970), Christensen y Wu (1964), Mitchell (1964), Mitchell et al.

(1968), Murayama and Shibata (1958, 1961), Noble and Demirel (1969) y Feda (1989, 1992), entre otros.

La idea básica de la teoría del proceso de velocidad es que los átomos, moléculas y/o partículas llamadas “unidades de flujo”, están restringidas de movimiento entre sí por barreras de energía las cuales separan posiciones de equilibrio distinguiéndose por una energía potencial mínima, como las mostradas en el esquema de la Figura 4.11 .

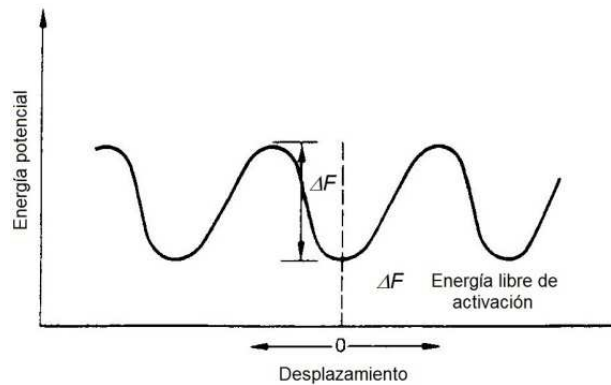


Figura 4.11. Barreras de energía y barreras de activación

El desplazamiento de unidades de flujo a nuevas posiciones requiere de la adquisición de una energía de activación ΔF de magnitud suficiente para vencer la barrera. La energía potencial de una unidad de flujo puede ser la misma tras el proceso de activación, o más grande o más baja que aquella que tenía inicialmente. Como una analogía de este proceso, en la Figura 4.12 se muestra la rotación de tres bloques. En cada caso se debe cruzar una barrera de energía.

Entonces el *creep* es explicado como un proceso activado mecánicamente el cual depende del nivel de esfuerzos. Generalmente, la concepción basada en partículas se aplica con más frecuencia a materiales granulares que a suelos arcillosos.

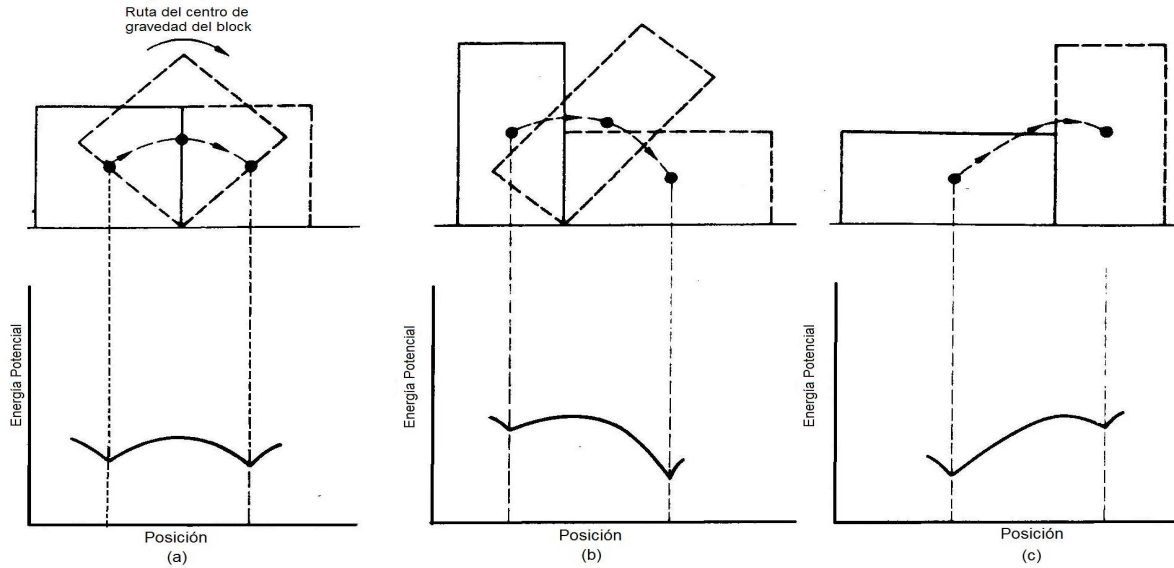


Figura 4.12. Ejemplos del proceso de activación: a) estado estable, b) incremento de estabilidad, y c) decremento de estabilidad

El método del elemento distinto (distinct element method), también conocido como método del elemento discreto fue desarrollado como una aproximación basada en partículas. La experimentación numérica de conjuntos granulares en dos dimensiones fue realizada por Cundall y Strack (1982) (mencionados en (Havel, 2004)). Basados en su experiencia, ellos desarrollaron un método del elemento distinto el cual fue posteriormente extendido a 3D. Ellos mostraron, entre otras cosas, la naturaleza discontinua de las deformaciones internas de dichos conjuntos. Hoy en día los métodos del elemento distinto son usados y modificados por muchos investigadores.

5 ENSAYES DE LABORATORIO Y AJUSTE DE CURVAS UTILIZANDO EL MODELO VISCO-ELÁSTICO FRACCIONARIO

El principal propósito de esta tesis es mostrar la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias al modelado del comportamiento de suelos incluyendo el *creep*. Para ello se diseñó una serie de pruebas sobre especímenes de mezclas de bentonita y caolín formados en el laboratorio que se ensayaron en cámaras triaxiales equipadas con sensores de presión y desplazamiento, conectados a una computadora que registra todos los eventos durante los ensayos. El software de adquisición de datos de las cámaras triaxiales de alambres, originalmente diseñado para ensayos de resistencia, fue complementado para poder realizar los ensayos de *creep* (Hermosillo et al., 2010). Los ensayos de *creep* realizados son del tipo de *creep* generado por un esfuerzo desviador.

5.1 Mezclas de arcilla utilizadas en los ensayos

Para la constitución de suelos se utilizaron dos minerales de arcilla: bentonita sódica y caolín. Se ensayaron varias mezclas hasta obtener ciertos valores de los índices de plasticidad (IP^5). A continuación se presenta una tabla de las mezclas y los índices de plasticidad correspondientes determinadas en laboratorio.

Material (mezclas de arcillas)	Límite líquido LL (%)	Límite plástico LP (%)	Índice de plasticidad IP (%)
Bentonita (100%)	309.8	40.6	269.3
Bentonita (70 %) + Caolín (30%)	221.5	29.13	192.4
Bentonita (50 %) + Caolín (50%)	152.0	25.15	126.9
Bentonita (30 %) + Caolín (70%)	92.0	24.6	67.4
Caolín (100%)	34.2	26.15	8.05

Tabla 5.1 Mezclas de caolín y bentonita

En la **Tabla 5.1** puede observarse el espectro de valores del índice de plasticidad determinados para dichas mezclas. Durante la determinación de estos índices se observó que el manejo de las muestras con porcentaje de bentonita mayor al 50 % se vuelve complicado (mezcla adherente opegajosa). Por ello, se decidió usar mezclas con menos de 50% de bentonita. De estos dos materiales se propusieron distintas mezclas para lograr muestras con de índices de plasticidad fáciles de manipular. A continuación se presenta una tabla con los índices de plasticidad aproximados de varios especímenes ensayados.

⁵ El índice de plasticidad (IP) es el rango de humedades en el que el suelo tiene un comportamiento plástico. Por definición, es la diferencia entre el Límite líquido (LL) y el Límite plástico (LP): $IP=LL-LP$.

Material (porcentaje de arcillas)	Nombre de la mezcla	Índice de plasticidad IP (%)
Bentonita (10 %) + Caolín (90%)	M ₁	25.0
Bentonita (20 %) + Caolín (80%)	M ₂	48.5
Bentonita (30 %) + Caolín (70%)	M ₃	68.0

Tabla 5.2 Mezclas de caolín y bentonita utilizadas para la sedimentación de arcillas sintéticas

5.1.1 Sedimentación de suelos

Burland (1990) trata el tema de sedimentación y compresibilidad de suelos arcillosos naturales y reconstituidos. En dicho artículo se presentan relaciones y gráficas de las propiedades intrínsecas de suelos reconstituidos (relación de vacíos, compresibilidad, etc.) y sus límites de Atterberg. Las arcillas fueron reconstituidas, con contenidos de agua (w) entre el valor del límite líquido (w_L) y $1.5 w_L$, fueron consolidadas habiendo extraído previamente el aire.

En la referencia (Win, 2008) se presenta un resumen de estudios previos de sedimentación y consolidación de suelos. El proceso de sedimentación y consolidación del suelo presenta tres zonas fundamentales: 1) zona de clarificación, 2) zona crítica y 3) zona de compactación (ver Figura 5.1). En dicha referencia se presentan las ecuaciones de continuidad que modelan las fases sólida y fluida durante el proceso de sedimentación y consolidación, así como las ecuaciones de equilibrio y la ecuación de movimiento para el fluido (ley de Darcy). El procedimiento clásico que se sigue en laboratorio para reconstituir suelos ha sido descrito por (Nava, 2007) e (Ibarra, 2002).

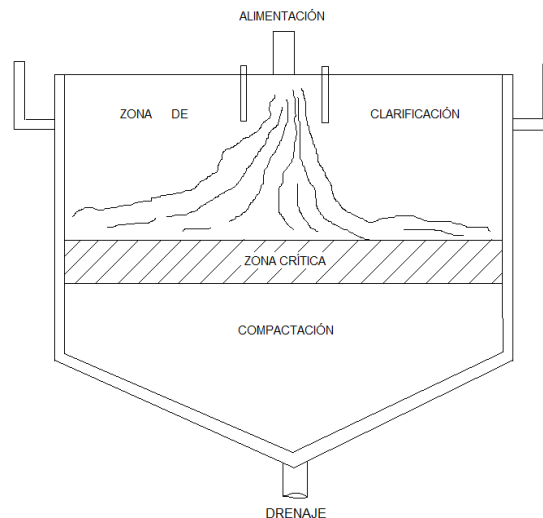


Figura 5.1 Zona de sedimentación en continuo engrosamiento (modificada de (Burland, 1990))

5.1.2 Reconstitución, sedimentación y consolidación de arcillas sintéticas

Para la sedimentación y consolidación de las mezclas de arcilla se hicieron modificaciones al equipo de sedimentación y consolidación de suelos del Laboratorio de Geotecnia, el cual originalmente constaba de un tubo y base de lucita. La masa de suelo era sometida a incrementos de carga mediante un vástago y pesas, como el esquema mostrado en la Figura 5.2. El concepto fue modificado para que en vez de consolidar el suelo mediante incrementos de carga, la consolidación se realizara mediante un gradiente hidráulico.

Para aplicar un gradiente hidráulico, fue necesario sellar los tubos con una tapa de acrílico y pernos, como se muestra en la Figura 5.3. La presión en el agua se generó con una cámara de presión neumática. El motivo de consolidar mediante un gradiente hidráulico fue para evitar utilizar pesas, las cuales pueden generar fuerzas de fricción con los tubos de lucita si se ladean, y lograr una mejor distribución de la presión aplicada. El gradiente hidráulico se generó al presurizar los tubos de consolidación y abriendo una válvula en el inferior que disipó dicha presión. Se acondicionaron cinco tubos como el mostrado en la Figura 5.4 con los cuales se consolidaron simultáneamente las mezclas.

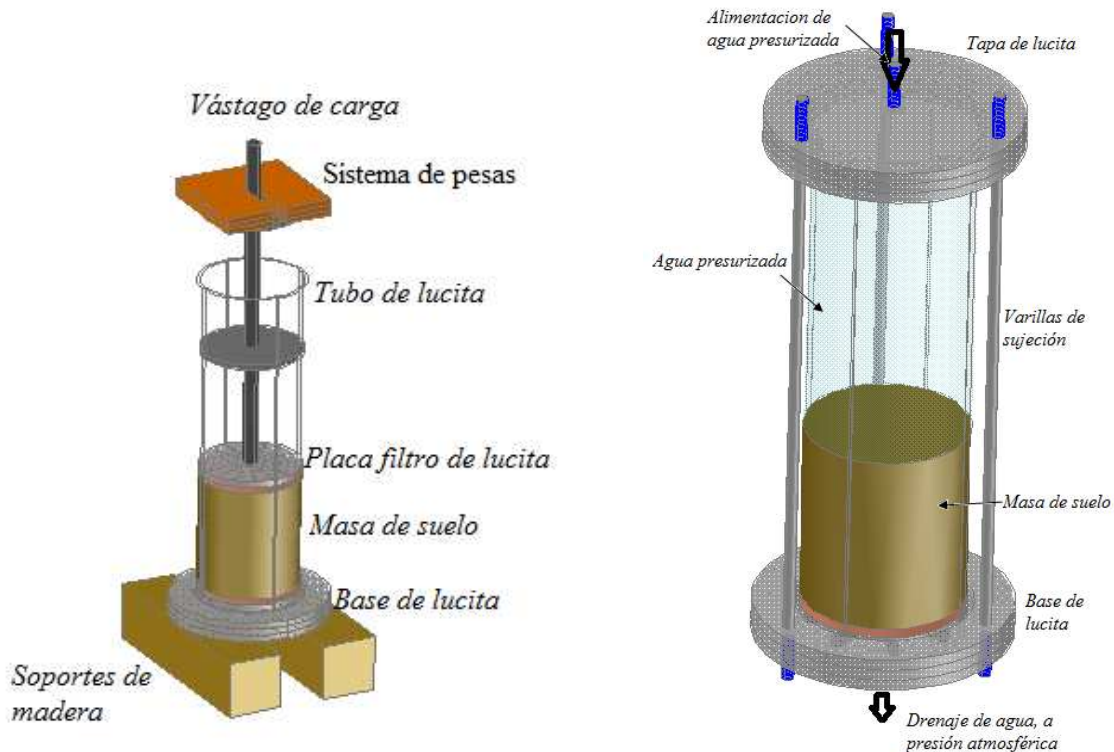


Figura 5.2 Sistema de sedimentación y consolidación con pesas

Figura 5.3 Modificación del equipo para consolidar por gradiente hidráulico.



Figura 5.4 Fotografía del modelo real modificado en el taller de Mecánica del Instituto de Ingeniería

Las mezclas se vertieron en cada uno de los consolidómetros, mezclando con agua y calentando previamente el material para acelerar el proceso de extracción del aire contenido en la mezcla, utilizando un garrafón de vidrio; todo ello para evitar en lo posible la formación de cavidades en el material en la etapa de sedimentación.



Figura 5.5 Preparación de la mezcla de bentonita y caolín



Figura 5.6 Vertido en garrafón y extracción de aire de la mezcla con agua caliente



Figura 5.7 Vaciado de la mezcla en el consolidómetro

Una vez vaciada la mezcla en los equipos de sedimentación se dejó reposar y sedimentar el material por gravedad. Después de algunos días de sedimentación, cuando ya

fue apreciable la frontera entre la masa de suelo y el agua se selló el sistema con la tapa de lucita, para posteriormente aplicar presión de agua a cada uno de ellos.

Para el funcionamiento de los equipos de sedimentación se realizaron las conexiones necesarias entre las cámaras de presión y los consolidómetros; la presión se aplicó a cada una de las cámaras mediante reguladores de presión. En la Figura 5.8 se presenta el arreglo de cinco consolidómetros; a la derecha de la imagen puede observarse una de las cámaras neumáticas con las que se aplicó la presión de agua a cada tubo.

Con cada una de las mezclas se llevó un registro del asentamiento de la masa de suelo durante varios meses. La presión del agua se fue incrementando con regularidad hasta alcanzar una presión cercana a 1 kgf/cm^2 , aplicada en la superficie del material. Con ello se logró la generación de un gradiente hidráulico con el cual las arcillas se consolidaron desde la base a la superficie, pues fue en la base en donde se tuvieron los mayores esfuerzos efectivos, siendo éstos nulos en la superficie del material.



Figura 5.8 Sistema de consolidómetros, cámaras y reguladores de presión

5.1.3 Extracción de muestras

Una vez que se observó que la consolidación del material había cesado se procedió a extraer un estrato de material por cada mezcla. Para ello, dejó de aplicarse presión de agua en la superficie, dejándose disipar el exceso de presión de poro contenida en la muestra. Posteriormente se retiraron los pernos y las tapas superior e inferior de los tubos; hecho esto, se invirtió la posición de los tubos de consolidación para ejercer una presión mediante un émbolo de madera por la parte inferior (correspondiente a la parte superior del estrato de arcilla), como se aprecia en la Figura 5.9 (a).



b)



c)

a)

Figura 5.9 Extracción de estrato de arcilla sintética

Teniendo ya un estrato de aproximadamente 15 cm de espesor se realizó un corte horizontal con una cuerda de acero (ver Figura 5.9 (b y c)). El estrato de arcilla se dividió en tres secciones para su almacenamiento (ver Figura 5.10). Las tres secciones se envolvieron en manta de cielo y se cubrieron con cera para impedir la pérdida de humedad (ver Figura 5.11).



Figura 5.10 Trazo sobre estrato de arcilla para su seccionamiento



Figura 5.11 Preparación de un estrato de arcilla para su almacenamiento

El equipo utilizado para realizar las pruebas tanto de resistencia como de *creep* no drenado fueron las tres cámaras triaxiales de alambres del laboratorio de Geotecnia, del Instituto de Ingeniería. En la Figura 5.12 se presenta un esquema del sistema de alambres por el cual se transmiten las cargas a la muestra de suelo (Santoyo y Reséndiz, 1971). En la Figura 5.13 se presenta la fotografía de una de las tres cámaras triaxiales, con una muestra de arcilla montada. Antes de comenzar con la serie de pruebas se calibraron todos los sensores para garantizar un registro óptimo.

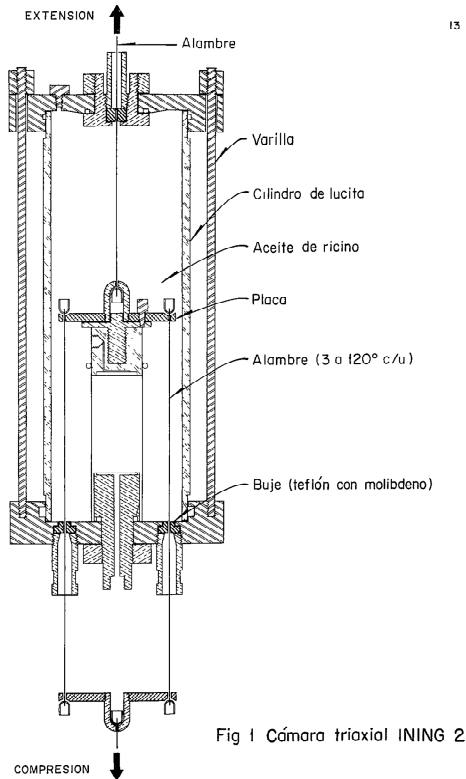


Figura 5.12 Esquema de cámara triaxial de alambres



Figura 5.13 Cámara triaxial de alambres

5.2 Ensayes de resistencia

Previo a los ensayos de *creep* se realizaron ensayos de resistencia del tipo CU (consolidadas no drenadas) para determinar la carga máxima de resistencia (P) correspondiente a cada espécimen. Durante la etapa de consolidación se determinó que el esfuerzo de preconsolidación promedio para todos los materiales fue entre 0.3 y 0.4 kgf/cm^2 , por lo que los ensayos de *creep* se realizaron a un esfuerzo efectivo de 1 kgf/cm^2 para garantizar que el *creep* se desarrollara sobre el tramo virgen de la curva de compresibilidad.

También se observó que la permeabilidad en el sentido radial y vertical de las muestras cilíndricas no era la misma, esto debido al proceso de sedimentación y consolidación de las mezclas de arcilla; durante este proceso, es muy probable que, por el tipo de microestructura, las partículas de los minerales se hayan orientado de tal manera que se presentó una estructura del tipo *dispersa*. El efecto de la frontera también se hizo presente, ya que se observó que existieron asimetrías en el flujo y filtración de agua,

provocando que las fuerzas de filtración originadas no fueran simétricas en el sentido vertical e incluso radial.

5.3 Ensayes de creep

Se realizó una serie de ensayos de *creep* sobre distintas mezclas de bentonita-caolín sedimentadas con el fin de observar el comportamiento de dichos materiales ante la acción de una carga sostenida durante cierto tiempo y sin drenaje. En este trabajo cada mezcla se identifica como: M_1 a la mezcla 10 % de bentonita con 90 % de caolín, M_2 a la mezcla 20 % de bentonita con 80 % de caolín, y M_3 a la mezcla 30 % de bentonita con 70 % de caolín.

5.3.1 Labrado, saturación y consolidación de las muestras

En esta serie de pruebas se utilizaron muestras de las mezclas M_1 , M_2 y M_3 . Las muestras corresponden a una profundidad de entre 20 y 30 cm. De estas muestras se labraron varias probetas cilíndricas de 3.5 cm de diámetro por 8.50 cm de alto aproximadamente, ver Figura 5.15; todas las probetas se saturaron, verificando el valor de la B de Skempton⁶, que en general, fue superior al 96 %; todos los materiales se consolidaron a un esfuerzo efectivo de 1.0 kgf/cm^2 .



Figura 5.14 Labrado de muestras cilíndricas

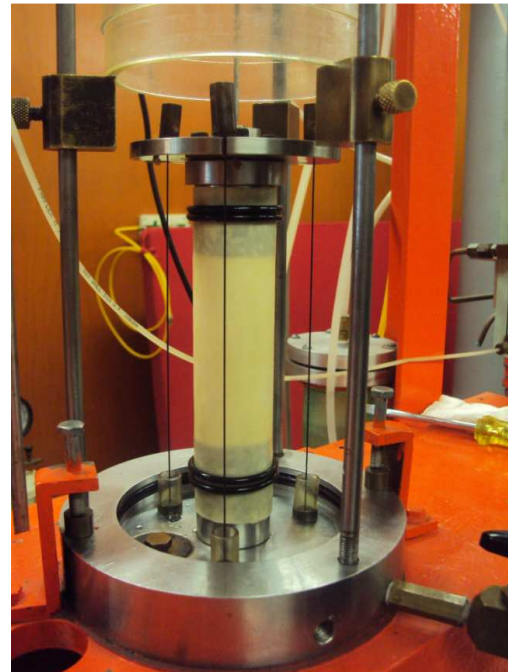


Figura 5.15 Muestra montada y protegida en membrana de látex

⁶ Parametro utilizado en mecánica de suelos para determinar que tan saturado está un suelo.

De los tres materiales se determinaron en laboratorio los índices de plasticidad siguientes:

Material	LL(%)	LP (%)	IP (%)	Gs
M ₁	48.3	30.4	17.9	2.6
M ₂	62.5	30.7	31.8	2.6
M ₃	82.5	31.1	51.4	2.65

Tabla 5.3 Propiedades índice de tres mezclas de arcilla

5.3.2 Ensayes de creep

Una vez consolidadas las muestras y habiendo obtenido previamente la carga de resistencia, se realizaron 6 ensayos de *creep* del material M₁, 5 ensayos del M₂ y 3 del M₃, aplicando diferentes porcentajes de la carga de resistencia (*P*), correspondiente a cada material. A continuación se presenta una tabla en donde se resumen las características de cada una de las muestras y la carga a la que fueron sometidas. El esfuerzo desviador σ_d se calculó dividiendo la carga (*P*) entre el área transversal de la probeta.

Material	Muestra	Altura H (cm)	Diametro D (cm)	Peso de la muestra Wm (gr)	Contenido de humedad ω_0 (%) (inicial)	Contenido de humedad ω_f (%) (final)	B Skempton (%)	Carga P (kgf)	Esfuerzo desviador σ_d (kg/cm ²)
M ₁	1	8.5	3.533	134.8	49.91	44.79	96	2.0	0.204
M ₁	2	8.5	3.520	135.2	49.88	44.91	96	3.0	0.308
M ₁	3	8.5	3.533	135.0	50.15	44.85	98	4.0	0.408
M ₁	4	8.5	3.513	135.1	48.87	45.89	96	5.0	0.506
M ₁	5	8.5	3.523	136.2	47.93	44.58	98	7.0	0.718
M ₁	6	8.5	3.523	135.4	47.97	45.05	98	9.0	0.923
M ₂	1	8.5	3.510	132.4	60.99	51.99	99	3.0	0.310
M ₂	2	8.5	3.523	124.5	62.08	52.01	99	4.0	0.410
M ₂	3	8.5	3.513	132.8	62.55	51.63	98	5.0	0.516
M ₂	4	8.5	3.513	124.0	62.25	51.59	98	6.0	0.619
M ₂	5	8.5	3.510	132.4	60.45	53.92	96	7.0	0.723
M ₃	1	8.5	3.513	123.1	82.75	62.78	97	3.23	0.391
M ₃	2	8.5	3.506	123.0	83.72	63.40	99	4.48	0.547
M ₃	3	8.5	3.513	123.5	83.75	63.54	99	5.65	0.704

Tabla 5.4 Resumen de características correspondientes a cada muestra y esfuerzo desviador aplicado σ_d

5.4 Ajustes de las curvas experimentales de creep con los modelos reológicos clásico y fraccionario

En esta sección se presentan los ajustes de cada una de las curvas obtenidas en laboratorio para los tres materiales M₁, M₂ y M₃. Primero, se muestran los ajustes de las curvas, obtenidas de los ensayos de *creep* con el material M₁, utilizando el arreglo clásico de Burgers, uno de los arreglos más comunes de la reología clásica; dicho arreglo se compone

de dos arreglos básicos conectados en serie: un arreglo de Kelvin y un arreglo de Maxwell. Como se verá posteriormente, dichos arreglos son insuficientes para la simulación del fenómeno de *creep* en arcillas, pues las curvas de *creep* no pueden reproducirse adecuadamente para toda la historia de tiempo. Más adelante se muestran los ajustes de las curvas experimentales obtenidas de los materiales M_1 , M_2 y M_3 usando el modelo reológico fraccionario así como los parámetros fraccionarios obtenidos a partir de dichos ajustes. Finalmente, se hacen comentarios acerca de las ventajas de usar arreglos reológicos fraccionarios sobre los clásicos.

5.4.1 Arreglo reológico de Burgers

Recordando, el modelo reológico de Burgers resulta ser un caso particular del modelo reológico fraccionario (FVMS) cuando los exponentes fraccionarios α , β y γ tienen valor igual a uno, por tanto la ecuación (5.5) se reduce a la solución clásica de la ecuación diferencial con derivadas enteras:

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1} t} \right) \quad (5.1)$$

Realizando los ajustes de las curvas experimentales, con el modelo clásico de Burgers, se presenta el problema de que este arreglo no puede reproducir satisfactoriamente el fenómeno de *creep* para largos tiempos, esto debido a que los elementos que conforman dicho arreglo reológico no son suficientes. Si se observa la ecuación (5.1) puede verse que existe una reacción instantánea dada por las componentes $1/E_2$ y $1/E_1$, más una respuesta lineal con el tiempo t/E_2 más una respuesta con un tiempo de retardo E_1/η_1 dada por la componente $1/E_1 e^{-(E_1/\eta_1)t}$.

En las figuras 5.16 y 5.17 se presentan los ajustes correspondientes a las curvas de *creep* obtenidas de las pruebas realizadas en el material M_1 (las líneas continuas son las funciones ajustadas). Puede apreciarse que el arreglo reológico, en general, reproduce bien el comportamiento del material hasta tiempos menores a 2000 minutos. Por tanto, para simular el comportamiento del material para tiempos largos, este arreglo no resulta de mucha utilidad.

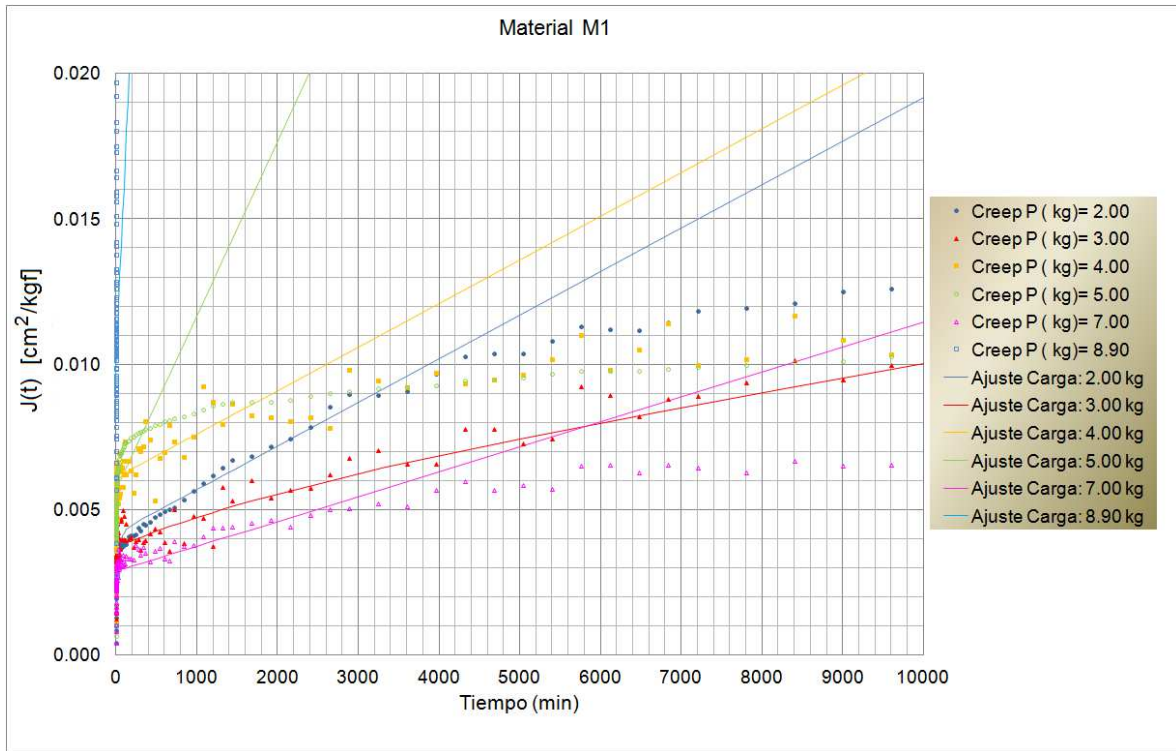


Figura 5.16 Ajustes de las curvas experimentales de *creep* mediante el arreglo reológico clásico de Burgers. Cálculo de $J(t)$.

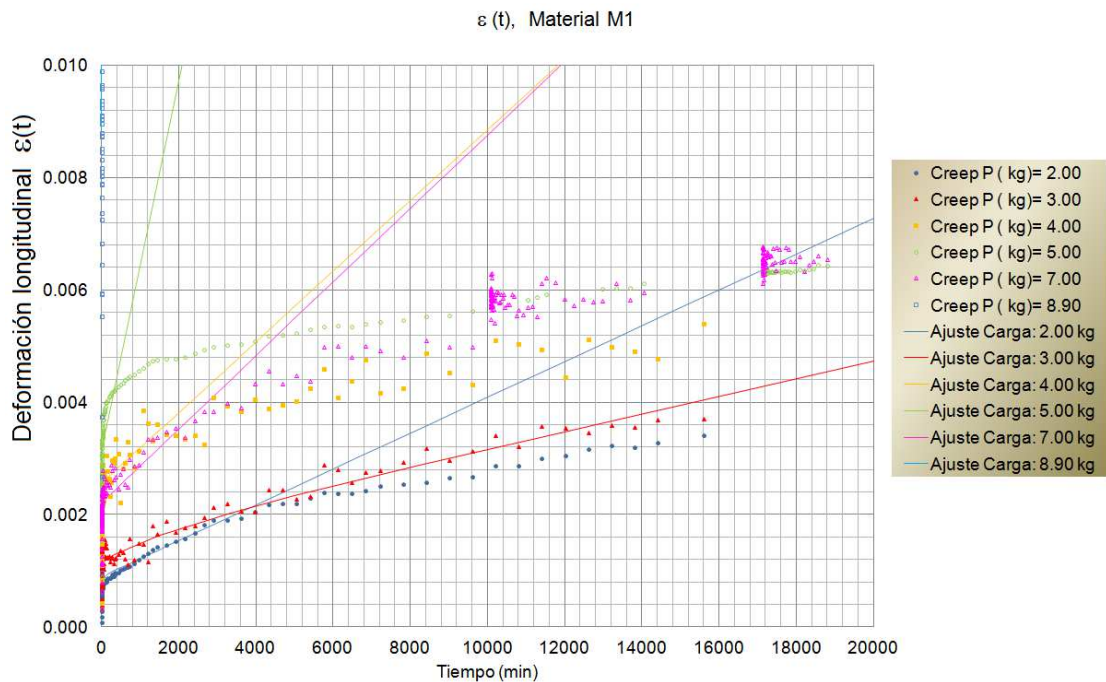


Figura 5.17 Ajustes de las curvas experimentales de *creep* mediante el arreglo reológico clásico de Burgers. Cálculo de la deformación longitudinal $\varepsilon(t)$.

Pueden proponerse arreglos generalizados, en donde un número finito de cuerpos como los de Maxwell y Kelvin se conectan en serie, por ejemplo los mostrados en las figuras 5.18 y 5.19.

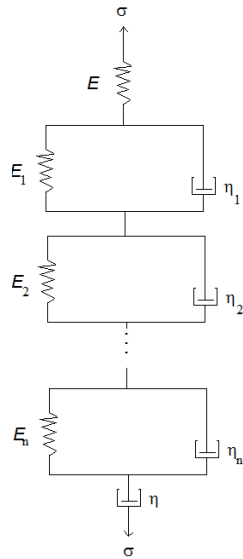


Figura 5.18 Arreglo generalizado de Kelvin

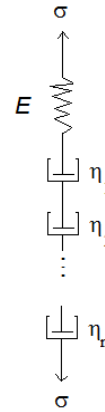


Figura 5.19 Arreglo generalizado de Maxwell

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes a los arreglos generalizados mencionados anteriormente son:

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_k} (1 + e^{-\frac{E_k}{\eta_k} t}), \text{ cuerpo de Kelvin generalizado} \quad (5.2)$$

$$J(t) = \frac{1}{E} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\eta_k} t, \text{ cuerpo de Maxwell generalizado} \quad (5.3)$$

Los resultados al utilizar la ecuación (5.2) son los mismos que los presentados en la Figura 5.16, ya que la participación de cada cuerpo de Kelvin se suma linealmente al arreglo total. El arreglo de la Figura 5.19 puede reducirse finalmente a un arreglo de Maxwell, ya que el trabajo de cada amortiguador resulta en uno sólo, con una constante igual a la suma de todas las constantes $1/\eta_k$.

Por tanto, se concluye que es necesario formar arreglos de elementos viscoelásticos más complejos, cuyas ecuaciones diferenciales resultarían muy difíciles de resolver. He

aquí una de las principales ventaja de utilizar ecuaciones diferenciales fraccionarias, ya que su planteamiento y resolución son de cierta facilidad y reproducen con mucha aproximación los comportamientos observados en las pruebas de laboratorio.

5.4.2 Arreglo reológico de Burgers fraccionario

En este apartado se presentan los ajustes que se hicieron utilizando el modelo generalizado de Burgers, el cual consta de un cuerpo de Kelvin-Boigt y uno de Maxwell colocados en serie (FVMS). Recordando lo presentado en el capítulo 2, el modelo reológico fraccionario correspondiente es :

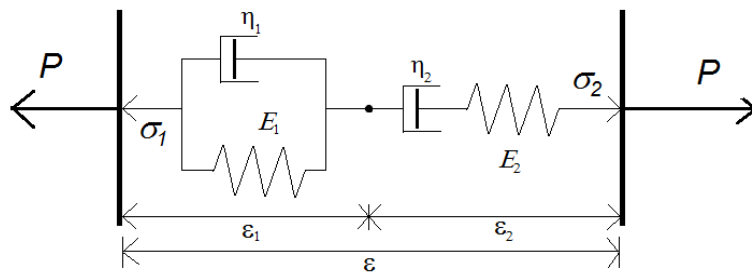


Figura 5.20 Modelo reológico fraccionario (FVMS)

cuya ecuación diferencial es:

$$E_2 \cdot {}_0D_t^{\beta+\gamma} \varepsilon(t) + E_2 c_1 \cdot {}_0D_t^{\beta} \varepsilon(t) =$$

$${}_0D_t^{\alpha+\gamma} \sigma(t) + c_1 \cdot {}_0D_t^{\alpha} \sigma(t) + c_2 \cdot {}_0D_t^{\gamma} \sigma(t) + \frac{E_2}{\eta_1} \cdot {}_0D_t^{\beta} \sigma(t) + c_1 c_2 \sigma(t) \quad (5.4)$$

y la función solución de la ecuación diferencial fraccionaria de *creep* es:

$$J(t) = \frac{1}{E_2} \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{1}{\eta_2} \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\eta_1} t^{\gamma} E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^{\gamma}) \quad (5.5)$$

en donde

t : tiempo

$\sigma(t)$: es el esfuerzo aplicado como función del tiempo, en este caso constante

E_i y η_i : son los módulos de rigidez y viscosidad, respectivamente.

α , β y γ son los exponentes fraccionarios (Hermosillo et al, 2010).

$E_{a,b}(Z)$ es la función Mittag-Leffler, una generalización de la función exponencial, y

$\Gamma(x)$ es la función gamma, y $J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0(t)$.

Con la ecuación (5.5) se realizaron los ajustes a cada una de las curvas obtenidas de las pruebas de *creep*. Para el ajuste de curvas se utilizó una herramienta numérica en Matlab llamada CFTOOL la cual está diseñada para realizar ajustes de series de datos con funciones definidas por el usuario, determinando los valores de las constantes de la función que mejor ajustan a dicha serie (minimiza una función de distancia entre la serie de datos y la función definida por el usuario). Este procedimiento está relacionado con el concepto de métrica (ver Apéndice A2).

En las tablas 5.5 y 5.6 se presenta un resumen de los parámetros obtenidos para las mezclas M₁, M₂ y M₃.

Ensayes de <i>creep</i> , Mezcla M ₁ : Caolín 90 %- Bentonita 10%						
Carga (kgf)	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	9.0
α	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
β	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
γ	0.4961	0.562	0.31	0.159	0.4226	0.4567
E_1 [kgf / cm ²]	0	0	0	0	0	24.52
E_2 [kgf / cm ²]	367	278.9	201.3	317.6	387	128.2
η_1 [kgf · s / cm ²]	77870	302400	11000	1150	65280	805.6
η_2 [kgf · s / cm ²]	1E+12	1E+12	1E+12	1E+12	9E+12	8E+12

Tabla 5.5 Tabla de parámetros fraccionarios obtenidos con el ajuste de curvas, material M1

Notar que los valores de α y β de la tabla 5.5 tienen un valor igual a 1. Esto se debe a que se hizo cumplir la relación $\alpha = \beta$ para tener una respuesta inmediata al aplicar la carga, y el valor $\beta = \alpha = 1$ correspondió al mejor de los ajustes calculado por el programa CFTOOL.

También se observa que γ es el único exponente fraccionario el cual cambia conforme la magnitud de la carga sostenida. Esto mismo se observa en las tablas 5.6 y 5.7. Esto significa que en el modelo propuesto (ver ec. 5.2) trabajan un elemento elástico (con $\beta - \alpha = 0$), un elemento viscoso (con $\beta = 1$) y uno fraccionario (γ). Además, se ve que para cargas pequeñas y hasta un cierto nivel, el valor de la constante (E_1) tiene un valor igual a cero; esto implica que el tercer miembro de la ecuación 5.2 ($1/\eta_1 \cdot t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-E_1/\eta_1 t^\gamma)$) que corresponde al arreglo de Kelvin fraccionario trabaja sólo como un amortiguador fraccionario ($1/\eta_1 \cdot t^\gamma$) ya que la función Mittag-Leffler ($E_{\gamma, \gamma+1}(z)$) toma un valor igual a 1.

Ensayes de <i>creep</i> , Mezcla M ₂ : Caolín 80 %- Bentonita 20%						
Carga (kgf)	3kg	4 kg	5 kg	6 kg	7 kg	8 kg
α	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
β	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
γ	0.49	0.17	0.25	0.22	0.30	0.34
E_1 [kgf / cm ²]	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	42.59
E_2 [kgf / cm ²]	261.30	330.10	205.00	420.00	370.00	261.90
η_1 [kgf · s / cm ²]	84500.00	1105.10	3100.00	3700.00	9500.00	418.40
η_2 [kgf · s / cm ²]	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12

Tabla 5.6 Tabla de parámetros fraccionarios obtenidos con el ajuste de curvas, material M₂

Ensayes de <i>creep</i> , Mezcla 3 (M ₃): Caolín 70 %-Bentonita 30%			
Carga (kgf)	3.25	4.5	5.6
α	1.00	1.00	0.90
β	1.00	1.00	0.90
γ	0.21	0.22	0.26
E_1 [kgf / cm ²]	0.00	0.00	20.24
E_2 [kgf / cm ²]	270.60	254.20	196.80
η_1 [kgf · s / cm ²]	2050.00	1800.00	469.20
η_2 [kgf · s / cm ²]	1.00E+12	1.00E+12	1.00E+12

Tabla 5.7 Tabla de parámetros fraccionarios obtenidos con el ajuste de curvas, material M₃

En las tablas anteriores puede notarse que para el amortiguador fraccionario del cuerpo de Maxwell se tienen valores de la constante η_2 muy grandes respecto a los demás lo cual indica que este elemento no influye en el comportamiento visco-elástico del modelo por tener una viscosidad que tiende al infinito. Como se mencionó anteriormente los valores de α y β son iguales a 1, lo cual implica que el primer término en la ecuación (5.5) tiene un valor constante $1/E_2$ que corresponde a la respuesta elástica instantánea de la probeta al aplicar una carga instantánea. Para cargas cercanas a la de resistencia se tiene una deformación instantánea mayor y la constante E_1 adquiere un valor pequeño que influye en el comportamiento a largo plazo en la curva tiempo-deformación y en este caso el arreglo ya trabaja como un Kelvin fraccionario.

En la Figura 5.21 se presentan las curvas deformación-tiempo registradas durante los ensayos de *creep* para el material M₁, correspondientes a diferentes magnitudes de carga.

En general se observa que la deformación aumenta conforme la magnitud de la carga aumenta. Cada una de las curvas se ajustó utilizando el modelo fraccionario ya descrito. Las curvas ajustadas se presentan en la Figura 5.22.

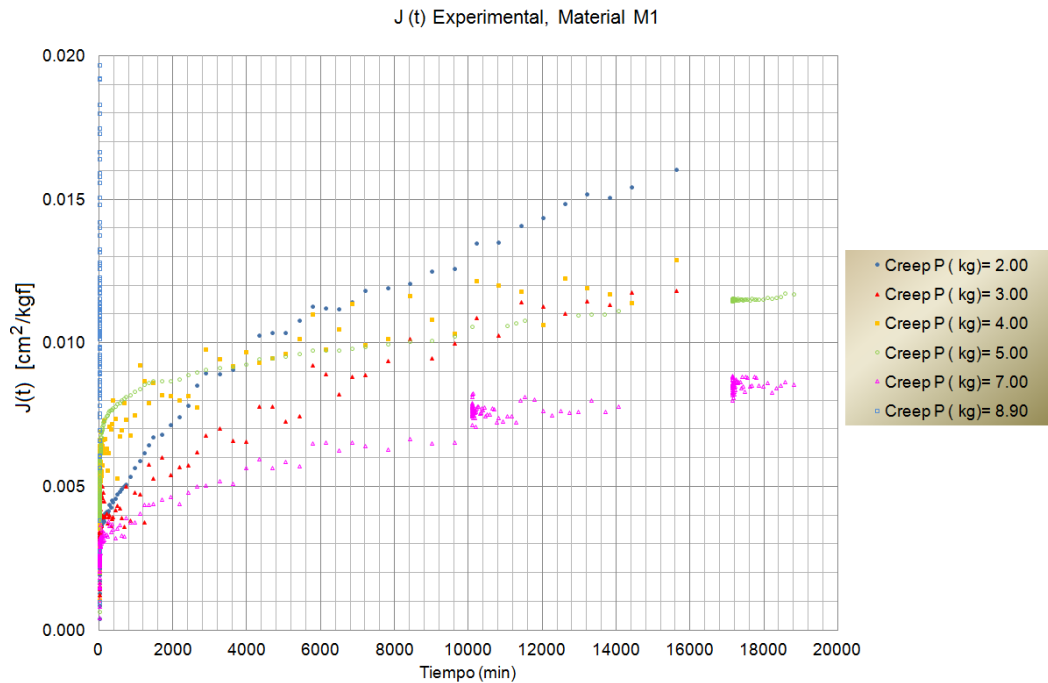


Figura 5.21 Curvas experimentales, ensayos de *creep*. Material M₁

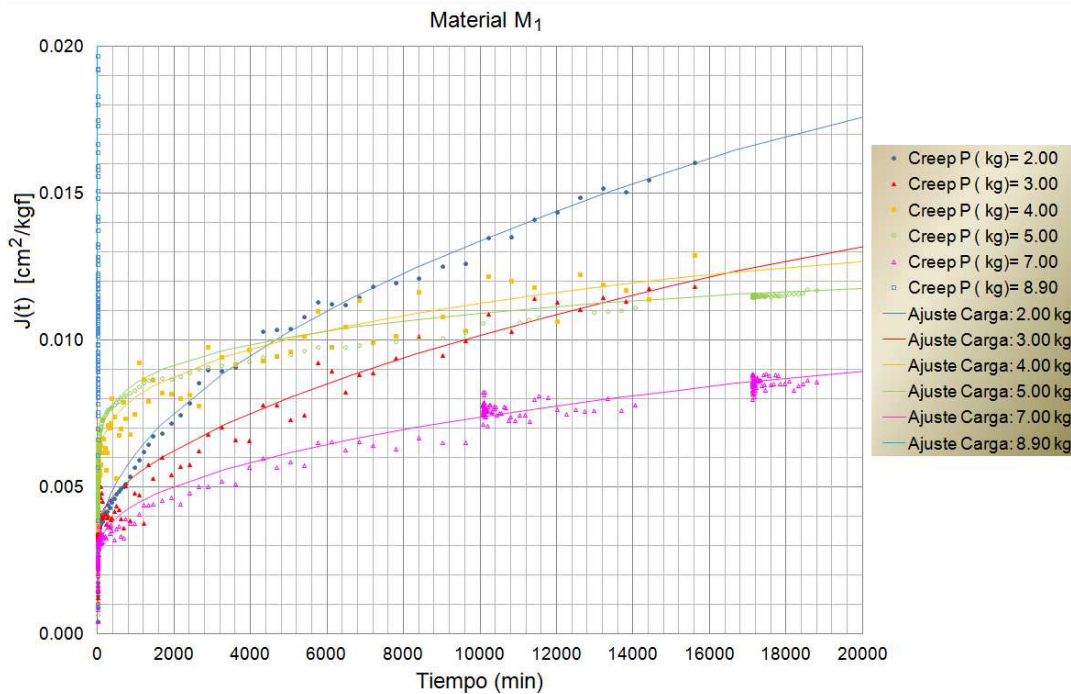


Figura 5.22 Curvas ajustadas, ensayos de *creep*. Material M₁

Habiendo obtenido los parámetros fraccionarios de cada una de las curvas, pudo calcularse la velocidad de deformación para cada uno de los ensayos y en la Figura 5.23 puede verse la representación gráfica de la evolución de las velocidades de deformación con el tiempo.

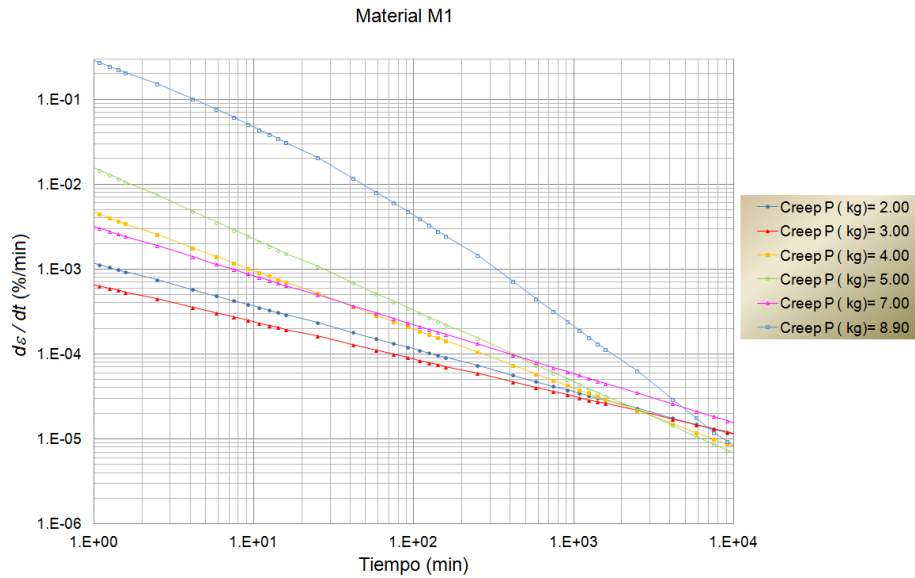


Figura 5.23 Curvas tiempo-velocidad de deformación. Material M₁

En las figuras 5.24-5.26 se presentan las gráficas, equivalentes a las ya mostradas, para los ensayos realizados sobre el material M₂.

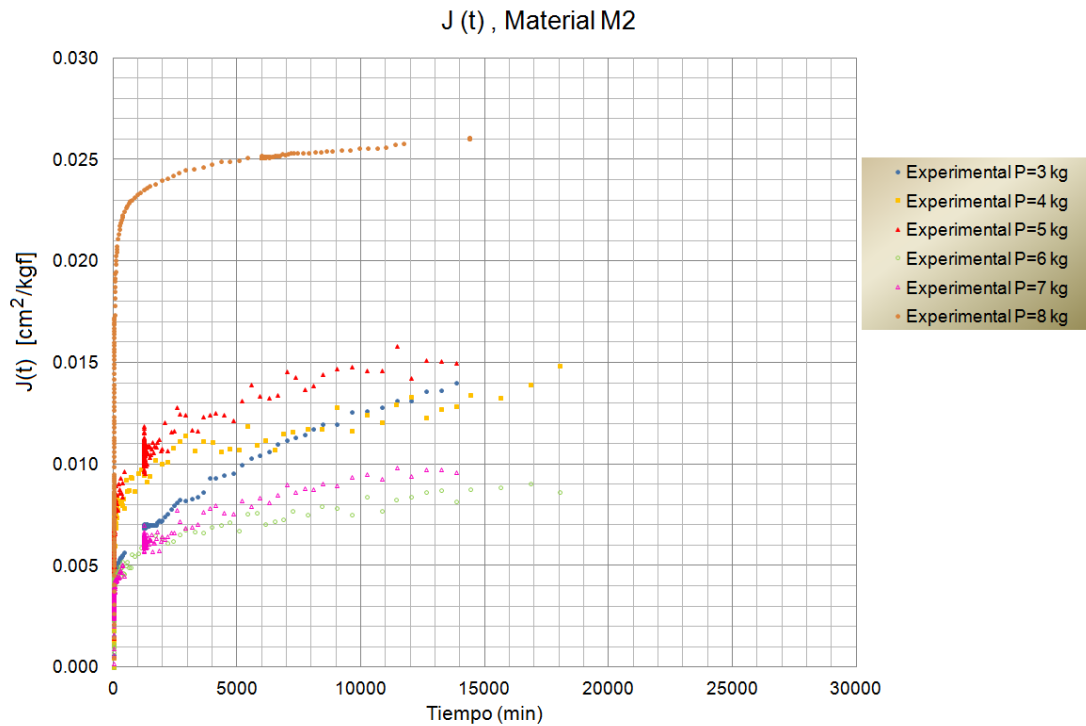


Figura 5.24 Curvas experimentales, ensayos de *creep*. Material M₂

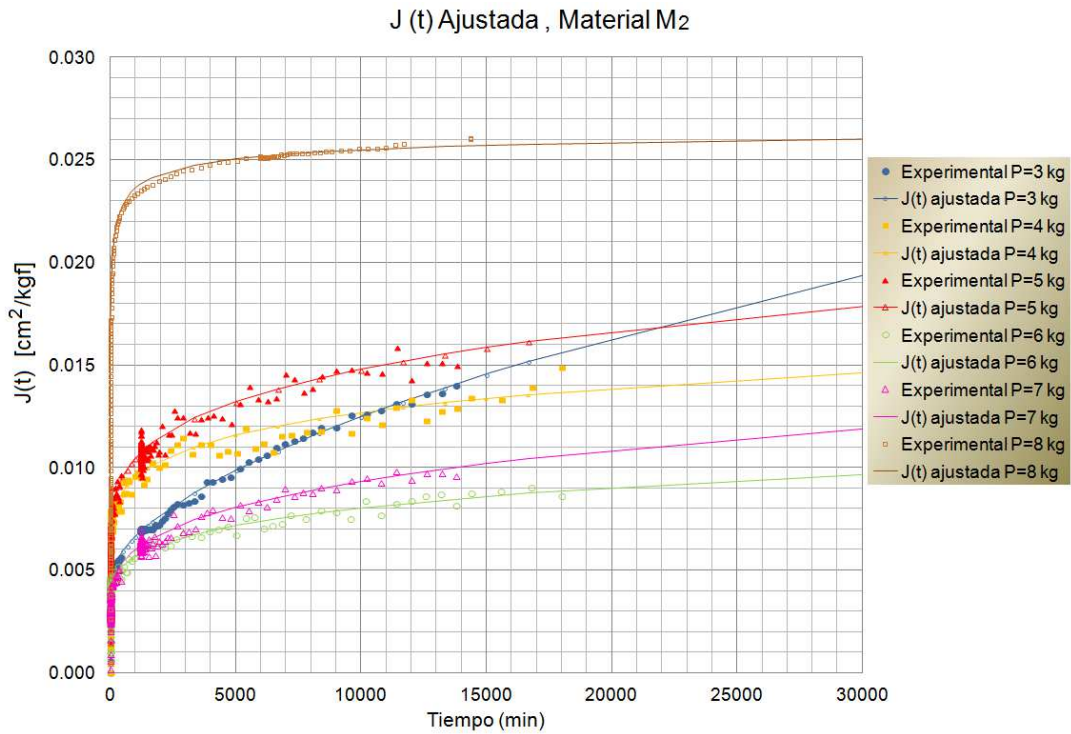


Figura 5.25 Curvas ajustadas, ensayos de *creep*. Material M₂

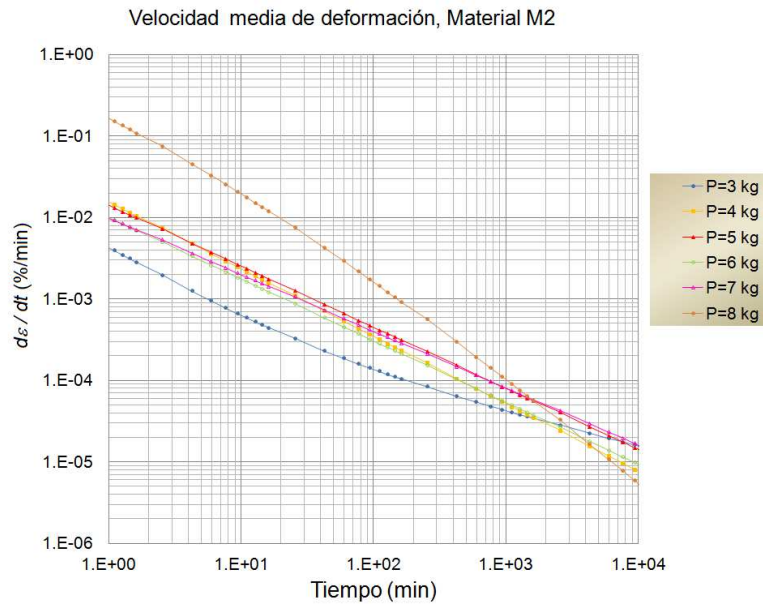


Figura 5.26 Curvas tiempo-velocidad de deformación. Material M₂

En las figuras 5.27 y 5.28 se presentan las curvas de deformación-tiempo registradas y ajustadas respectivamente para el material M₃. En la Figura 5.29 se presentan las curvas de velocidad de deformación contra el tiempo correspondientes a cada uno de los ensayos realizados para dicho material.

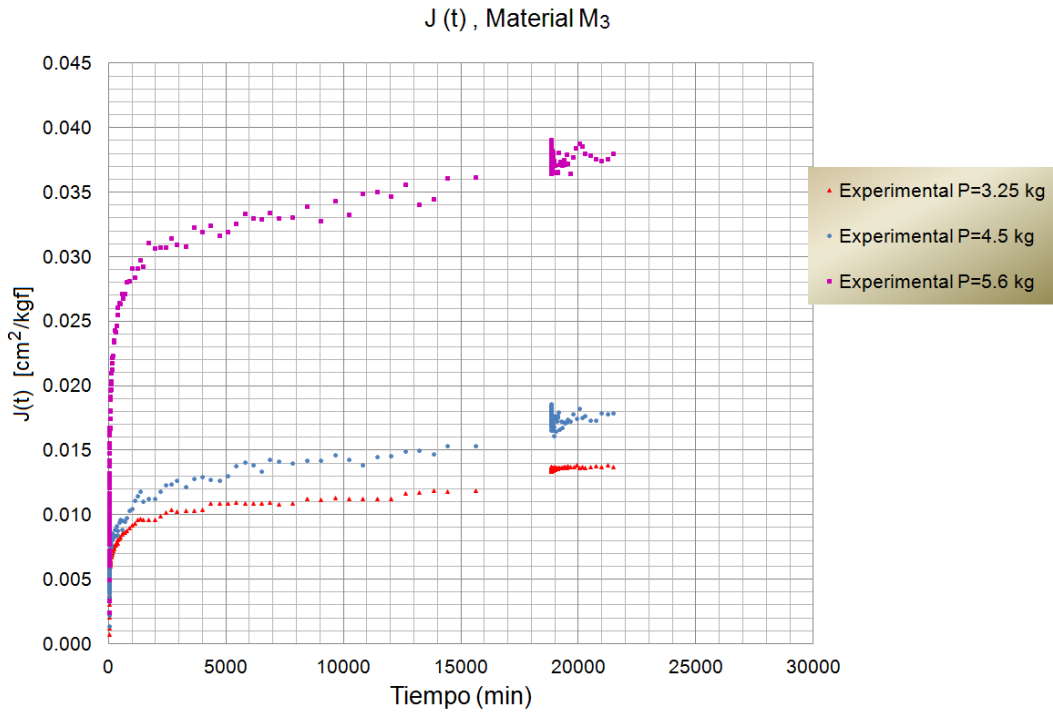


Figura 5.27 Curvas registradas en los ensayos de laboratorio
 $J(t)$ ajustadas, Material M₃

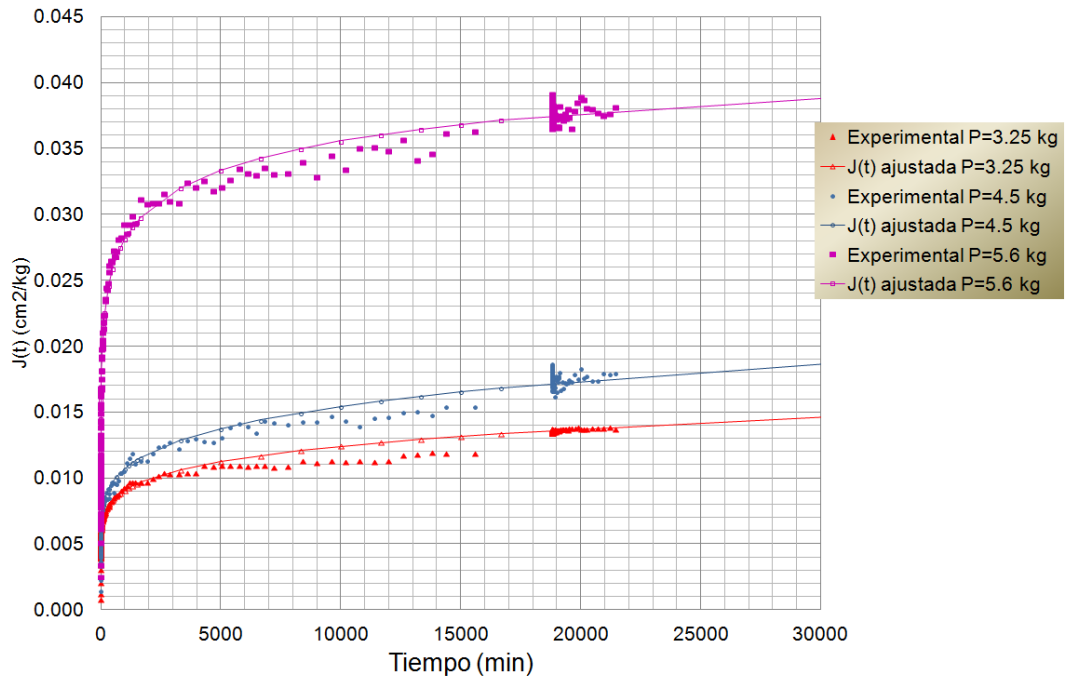


Figura 5.28 Curvas ajustadas con el modelo reológico fraccionario

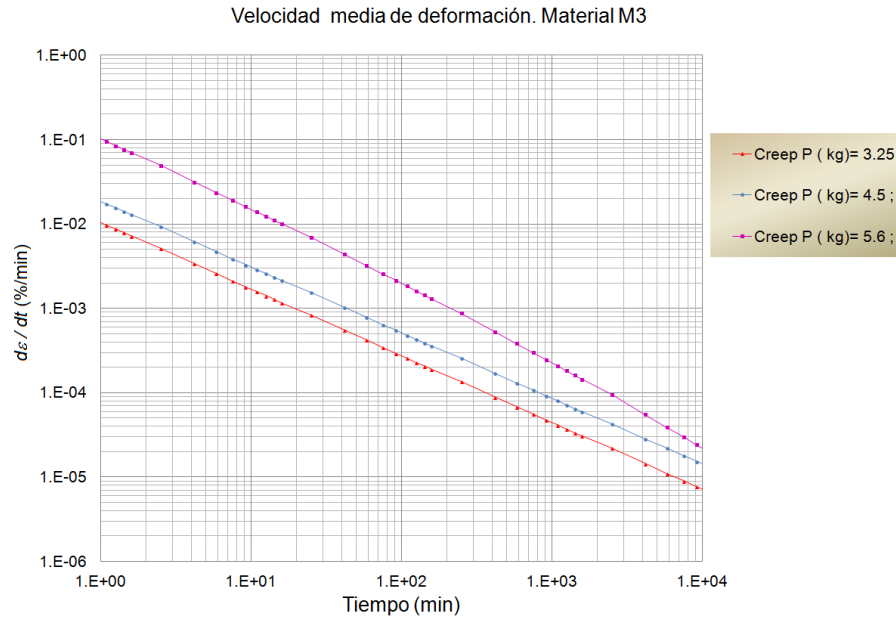


Figura 5.29 Curvas tiempo-velocidad de deformación

En general, de los ensayos de *creep* presentados puede comentarse lo siguiente:

- Al aplicar una carga instantánea, hay una respuesta casi inmediata del material a deformarse con una velocidad de deformación que decrece rápidamente con el tiempo hasta estabilizarse. Por tanto, puede considerarse que existe una respuesta “instantánea” inicial más una respuesta viscoelástica que se desarrolla con el tiempo.
- Se observa que las curvas entran en segunda fase entre 0.01 y 0.05 minutos; se vislumbra al final de los registros que las curvas podrían estar entrando en tercera fase, lo que significa que se hubiese llegado a la falla si se hubiese sostenido la carga durante un tiempo más largo.
- De las gráficas velocidad de deformación-tiempo presentadas, correspondientes a cada material, se observa una pendiente constante y negativa, como se presenta en la literatura técnica (ver capítulo 4).
- Debe tenerse en cuenta que al modelar el fenómeno de *creep* con ecuaciones diferenciales fraccionarias se está utilizando implícitamente un arreglo jerárquico de varios elementos (elásticos y viscosos) en cada elemento fraccionario (Schiessel et al., 1995).

- De los parámetros viscoelásticos fraccionarios obtenidos mediante los ajustes, puede concluirse que el modelo reológico fraccionario (FVMS) es idóneo para estudiar y modelar el comportamiento de los suelos arcillosos sometidos a una carga sostenida la cual origina que se presente el fenómeno de *creep*.
- Por lo observado en los ajustes, en general, puede decirse que para modelar el comportamiento de los suelos analizados mediante reología fraccionaria, bastaría un arreglo en serie de tres elementos: un elemento elástico (resorte), más un elemento viscoso (amortiguador) más un elemento viscoso fraccionario (amortiguador fraccionario). Esto para cargas menores al 70% de la carga de resistencia, porque para cargas mayores se requiere de un cuerpo de Kelvin fraccionario.

5.5 Comentarios acerca de los ajustes realizados con los modelos reológicos clásico y fraccionario

Recordando lo presentado en el capítulo 3, para poder realizar los ajustes de las curvas hasta ahora presentados, mediante reología clásica, haría falta un arreglo jerárquico en escalera de elementos elásticos y viscosos (ver figuras 3.5 y 3.6). Ello implica tener un arreglo fractal como el mostrado en la figura 5.30, en donde se ha agregado un elemento viscoso (amortiguador) en la parte superior.

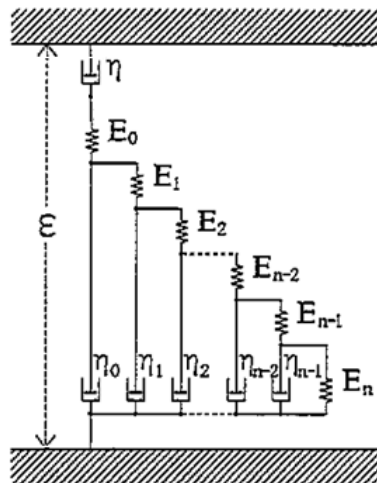


Figura 5.30 Arreglo fractal de elementos para simular el fenómeno de *creep*.
Figura modificada de (Schiessel et al., 1993)

El plantear una ecuación diferencial que corresponda a este arreglo y resolverla resulta un tanto cuanto complicado. En el artículo (Schiessel y Blumen, 1993) se presenta la

transformada de Laplace de la ecuación diferencial que modela a un arreglo que simula un amortiguador fraccionario, en donde la parte derecha de la ecuación se presenta como una fracción continua (ver apéndice A.3):

$$E_0 \frac{\mathcal{E}(s)}{\mathcal{O}(s)} = 1 + \frac{E_0/\eta_0}{s + \frac{E_1/\eta_0}{s + \frac{E_1/\eta_1}{s + \frac{E_2/\eta_1}{\ddots s + \frac{E_{n-1}/\eta_{n-1}}{s + \frac{E_n/\eta_{n-1}}{s}}}}}$$

cuya representación compacta es:

$$E_0 \frac{\mathcal{E}(s)}{\mathcal{O}(s)} = 1 + \frac{s^{-1} \frac{E_0}{\eta_0}}{1 +} \frac{s^{-1} \frac{E_1}{\eta_0}}{1 +} \frac{s^{-1} \frac{E_1}{\eta_1}}{1 +} \frac{s^{-1} \frac{E_2}{\eta_1}}{1 +} \dots \frac{s^{-1} \frac{E_{n-1}}{\eta_{n-1}}}{1 +} \frac{s^{-1} \frac{E_n}{\eta_{n-1}}}{1} \quad (5.6)$$

Antitransformar la ecuación (5.6) resulta de cierta complejidad, sin embargo, en el artículo (Schiessel y Blumen, 1993) se prueba que cuando n tiende a un número suficientemente grande, la ecuación (5.6) se aproxima satisfactoriamente con la ecuación (5.7), la cual corresponde precisamente a la transformada de Laplace de la ecuación diferencial fraccionaria que modela un amortiguador fraccionario:

$$\mathcal{O}(s) = \eta_0^\gamma E_0^{1-\gamma} s^\gamma \mathcal{E}(s) \quad (5.7)$$

La participación de cada uno de los elementos puede estimarse por medio de los valores que toman las constantes viscoelásticas a través de las ecuaciones (5.8) y (5.9). En las figuras 5.31-5.34 se aprecia la participación de los primeros 30 elementos reológicos (tanto para resortes como para amortiguadores), considerando, sólo como un ejemplo, que $E_0=1$ y $\eta_0=1$.

$$E_k = \frac{E_0}{2} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} k^{1-2\gamma} \quad (5.8)$$

$$\eta_k = 2\eta_0 \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} k^{1-2\gamma} \quad (5.9)$$

Resulta interesante notar que para un exponente fraccionario γ menor a 0.5, la participación de los elementos reológicos crece parabólicamente, mientras que para un exponente fraccionario mayor a 0.5, existe un decaimiento exponencial. Para un exponente fraccionario igual a 0.5 la participación de cada uno de los elementos sería constante, puesto que el término $k^{1-2\gamma}$ en las ecuaciones (5.8) y (5.9) adquiere el valor de la unidad.

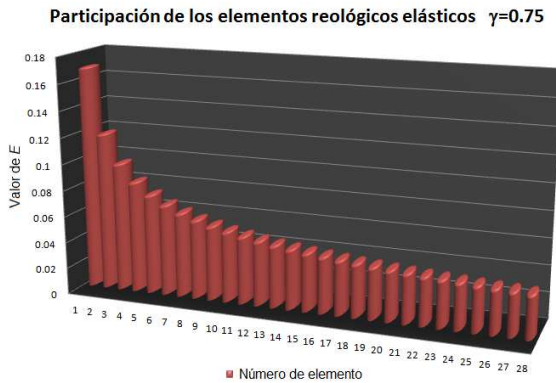


Figura 5.31 Participación de los elementos elásticos (E_i) para un exponente fraccionario $\gamma=0.75$

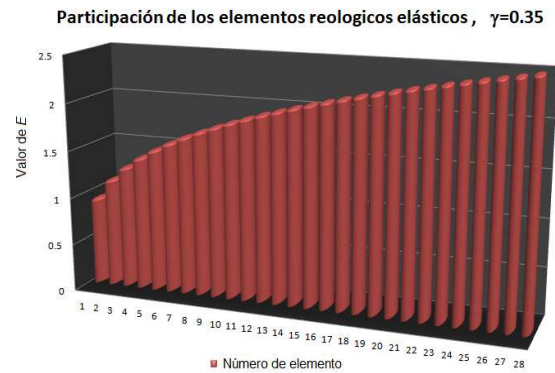


Figura 5.32 Participación de los elementos elásticos (E_i) para un exponente fraccionario $\gamma=0.35$

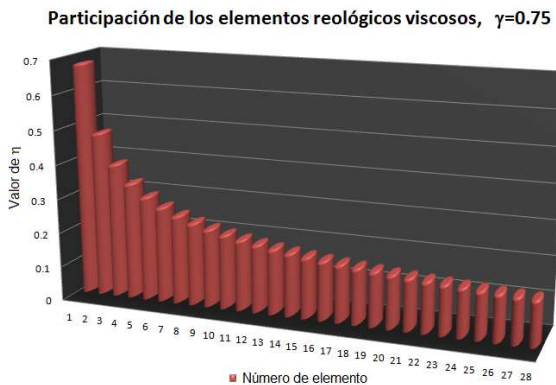


Figura 5.33 Participación de los elementos viscosos (η_i) para un exponente fraccionario $\gamma=0.75$

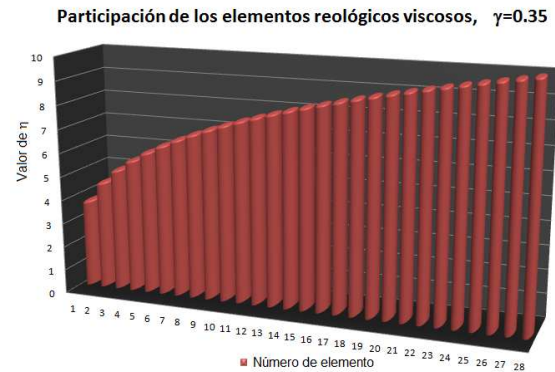


Figura 5.34 Participación de los elementos viscosos (η_i) para un exponente fraccionario $\gamma=0.35$

Lo anterior confirma el hecho de que los arreglos reológicos clásicos no son suficientes para reproducir el comportamiento de materiales tan complejos como los suelos y se requiere de arreglos tan elaborados como el fractal comentado anteriormente. Por ello, la reología fraccionaria resulta de mucha utilidad pues mediante arreglos fraccionarios poco elaborados pueden plantearse ecuaciones diferenciales fraccionarias que modelan adecuadamente materiales como los suelos.

6 CONCLUSIONES

- El arreglo reológico fraccionario (FVMS) utilizado para simular el fenómeno de *creep* en suelos arcillosos sedimentados artificialmente resultó ser eficiente con respecto a los parámetros considerados bajo la premisa de que la ecuación de *creep* correspondiente (ec. 3.50) reproduce con bastante aproximación las curvas obtenidas experimentalmente.
- Las constantes y los exponentes fraccionarios, determinados mediante los ajustes de las curvas de *creep* obtenidas experimentalmente, dependen de la carga aplicada. Para cargas muy grandes (cercanas a la carga de falla), la constante viscoelástica fraccionaria E_1 , correspondiente al elemento resorte en el arreglo de Kelvin fraccionario, toma un valor diferente de cero. Esto indica que para diferentes niveles de carga, pueden empezar a trabajar elementos del arreglo fraccionario que para otros niveles de carga no presentaban actividad.
- Por lo observado en los ajustes, en general, puede decirse que para modelar el comportamiento de los suelos analizados mediante reología fraccionaria, bastaría un arreglo en serie de tres elementos: un elemento elástico (resorte, para el caso particular de $\alpha = \beta$) con el cual se tiene una respuesta inmediata a la deformación, más un elemento viscoso (amortiguador, $\beta = 1$) el cual tiene un efecto de retardo en el tiempo, más un elemento viscoso fraccionario (amortiguador fraccionario, $0 < \gamma \leq 1$), el cual tiene una evolución en el tiempo más compleja que el amortiguador clásico; esta conclusión se debe a que, en los ajustes presentados, puede observarse que en el cuerpo de Kelvin fraccionario, al ser la constante E_1 igual a cero, implica que este cuerpo trabaja como un amortiguador fraccionario, esto para cargas menores al 70% de la carga de resistencia, porque para cargas mayores se comporta como un cuerpo de Kelvin fraccionario.
- Debe tenerse en cuenta que al modelar el fenómeno de *creep* con ecuaciones diferenciales fraccionarias se está utilizando implícitamente un arreglo fractal de varios elementos (elásticos y viscosos) en cada elemento fraccionario (Schuessel et al., 1995). Esto presenta una gran ventaja sobre los modelos reológicos clásicos ya que plantear una ecuación diferencial de un arreglo clásico equivalente a uno

fraccionario se torna muy complicado. Por tanto, una gran ventaja de los arreglos reológicos fraccionarios sobre los clásicos es que las ecuaciones diferenciales que los representan resultan ser más simples y requieren de menos parámetros.

- El empleo de modelos reológicos fraccionarios permite la simulación total de curvas de *creep* en el tiempo; esto significa una gran ventaja sobre los modelos clásicos como el de Kelvin, Maxwell o Burgers, ya que éstos pueden utilizarse para simular sólo intervalos de tiempo, y no toda la historia de deformaciones presentada durante el desarrollo del fenómeno, como puede observarse en las figuras 5.16 y 5.17.
- La investigación realizada en este trabajo permite concluir que este tipo de modelos es adecuado para estudiar y modelar el comportamiento de los suelos arcillosos sometidos a una carga sostenida, por ejemplo cuando ésta origina que se presente el fenómeno de *creep*.
- Debe de darse mayor énfasis al empleo de la reología fraccionaria y de las ecuaciones diferenciales fraccionarias en la solución de problemas y fenómenos que se presentan en ingeniería civil, ya que el comportamiento de muchos materiales que se emplean o están presentes en obras civiles, tales como los suelos, pueden tratarse más adecuadamente usando estas herramientas matemáticas.

REFERENCIAS

- Abdel-Hady, M. and Herrin, M (1966). "Characteristics of soil asphalt as a rate process". Journal of the Highway division, A.S.C.E., Vol. 92, No. HW1, pp. 49-69
- Abdel-Hady, M. and Herrin, M (2007). "Rheological properties of compacted soil-asphalt mixtures". Transportation research board business office.
- Aigner E., Lackner R., and Pichler C. (2009). "Multiscale Prediction of Viscoelastic Properties of Asphalt Concrete" J. Mat. in Civ. Engrg. Volume 21, Issue 12, pp. 771-780 (December 2009).
- Andersland, O.B., Douglas A.G., 1970. Soil deformation rates and activation energies, Geotechnique, Vol. 20, Issue 01, pp. 1-16
- Arafet P., Dominguez H. y Chang F. (2008). "Una introducción al cálculo fraccionario". Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Oriente.
- Ariaratnam, S.T., R.M. Stauber, J. Bell, and F. Canon (2003). "Evaluation of Rheologic Properties of Fluid Returns from Horizontal Directional Drilling", in Proceedings of the NASTT/ISTT International No-Dig 2003 Show. Las Vegas, Nevada: ISTT.
- Bagley R. L. (1986) "On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior" J. Rheol. Volume 30, Issue 1, pp. 133-155 (February 1986).
- Bishop, A. W. (1966) . "The strength of soils as engineering materials, Géotechnique, Vol 16, No. 2, pp. 89-130. Murayama, S. and Shibata, T. (1958). "On the rheological characteristics of clays, Part I". Bulletin No. 26, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto, Japan.
- Borja R. (1992) "Generalized creep and stress relaxation model for clays". Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 118, No. 11, pp. 1765-1786.
- Braja M. Das (2001) "Fundamentos de ingeniería geotécnica". Editorial Thomson. México
- Burland, J. B. (1990). "On the compressibility and shear strength natural clays". Géotechnique 40, No. 3, 329-378.
- Carpinteri A., Chiaia B., and Cornetti P. (2004). "A disordered microstructure material model based on fractal geometry and fractional calculus". ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Volume 84, Issue 2, pages 128–135, February 2004.
- Casagrande, A. and Wilson, S. D. (1951) "Effect of rate of loading on strength of clays and shales at constant water content". Géotechnique, Vol 2, No. 3 pp. 251-263
- Caputo, M., and Mainardi, F. (1971). Riv. Nuovo Cimento (Ser. II) 1, 161 (1971b)
- Christensen R. W. and Wu, T. H. (1964). "Analysis of clay deformation as a rate process", Journal of the Soils Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 90, No. 6, pp. 125-157.
- Craiem D. and Armentano R. (2007). A fractional derivative model to describe arterial viscoelasticity. Biorheology 44 (2007) 251–263 251. IOS Press
- Cundall, P.A., Strack, O.D.L. (1983). "Modeling of microscopic mechanisms in granular material" In: Jenkins J.T. and Satake M. (Eds.), Mechanics of granular materials-new models and constitutive relations. Elsevier, pp. 137-149
- Denath L. (2003). "Recent applications of fractional calculus to science and engineering", Hindae Publishing Corp.
- Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. and Luchko (2005) "Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods". Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 194 (2005) 743-773
- Eyring, H. (1936) "Viscosity, plasticity and diffusion as examples of absolute reaction rates", Journal of Chemical Physics, Vol. 4 No. 4, pp. 283-291.
- Fedá, J., 1989. "Interpretation of creep of soil by rate process theory", Geotechnique, Vol. 39, No. 4, pp. 667-677
- Fedá, J. 1992. "Creep of soils and related phenomena". Development in geotechnical engineering 68, Amsterdam, Elsevier, Printed in Czechoslovakia, 422 p.
- Glasstone, S. Laidler, K. and Eyring, H. (1941). "The theory of rate processes, McGraw-Hill, New York.
- Gurtin M. E. & Sternberg Eli, 1962. "On the Linear Theory of Viscoelasticity". Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 11
- Hartley T T, Lorenzo CF, Qammer HK, (1995). Chaos in a fractional order Chua's system. IEEE Trans CAS-I 1995;42:485-90.

- Havel František, (2004). “Creep in soft soils”. Thesis submitted to the Faculty of Engineering, Science and Technology, Norwegian University of Science and Technology. The Faculty of Engineering Science and Technology. Doktorsavhandling, monografi (Övrigt vetenskapligt).
- Department of Civil and Transport Engineering
- Hermosillo A., Magaña R., Flores O. y Romo MP., 2010. “Determinación experimental de la reología fraccional en suelos”. *Memorias de la XXV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica, Acapulco Gro. 2010.*
- Holzer, T. L., Hoeg, K. and Arulanandan, K. (1972). Excess Pore Pressures During Undrained Clay Creep. *Canadian Geotechnical Journal*, Volume 10 Number 1, February 1973
- Ibarra R., Enrique (2002). “Reconstitución de un suelo arcilloso marino en un odómetro para ensayos con modelos de pilotes”. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Jäger A. and Lackner R. (2008). “Finer-Scale Extraction of Viscoelastic Properties from Nanoindentation Characterised by Viscoelastic–Plastic Response”. *Strain*. Volume 45, Issue 1, pages 45–54, February 2009
- Janbu, N., (1965). Consolidation of clay layers based on non-linear stress strain, *Proc. 5. ICSMFE, Montreal 2*, pp. 83-87
- Koh C. and Kelly J. (1990). “Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models”. *earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 19, 229-241 (1990)
- Liu J. and Xu M. (2006) “Higher-order fractional constitutive equations of viscoelastic materials involving three different parameters and their relaxation and creep functions”. *Mech Time-Depend Mater* (2006) 10:263–279. DOI 10.1007/s11043-007-9022-9
- Liu, J. and Xu, M. (2008). “Study on the Viscoelasticity of Cancellous Bone Based on Higher-order Fractional Models. *Bioinformatics and Biomedical Engineering, 2008. ICBBE 2008. The 2nd International Conference on Volume , Issue , 16-18 May 2008 Page(s):1733 – 1736*
- Loverro Adam (2004). “Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer”. Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame. Notre Dame, IN 46556, U.S.A
- Magaña R., Hermosillo A., y Pérez M. (2008a), “Fractional numerical methods in geotechnics”. *Memorias del “8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)” 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), Junio 30 – Julio 5, 2008, Venecia, Italia.*
- Magaña R., Hermosillo A. y Pérez M. (2008b) “Reología fraccional en geotecnia”. *Memorias XXIV Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Aguascalientes, Ags.*
- Mainardi, Francesco and Spada, Giorgio. (2011) “Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology”. *Eur. Phys. J. Special Topics* 193, 133-160 (2011).
- Martínez-Vasquez J. J. y Díaz-Rodríguez J.A., 2009. “Creep behaviour of an undisturbed lightly overconsolidated clay”. *Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering - The Academia & Practice of Geotechnical Engineering, 2009.*
- Meschyan S. R. and Taslagyan K. A. (2005). “Devices for Determination of the Rheologic Properties of Soils by the Torsioning of Specimens in a Kinematic Regime”. *Soil Mechanics and Foundation Engineering. Springer New York.* 0038-0741 (Print) 1573-9279 (Online). Volume 42, Number 3 / mayo de 2005
- Mesri, G. (1973), "Coefficient of Secondary Compression" *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 99, No. SM1, pp. 123-137.
- Mitchell, J.K., (1964). Shear resistance of soil as a rate process, *Journal of the soil mechanics and foundation division, A.S.C.E.*, Vol. 90, No. SM1, pp. 29-61
- Mitchell, J.K. (2005). *Fundamentals of soil behavior*. Third edition. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Mitchell, J. K., Campanella R. G., and Singh A. (1968) “Soil creep as a rate process”. *ASCE Journal SMFD*, V.94, N.1, 1968
- Murayama, S. and Shibata, T. (1958). “On the rheological characteristics of clays”. Part I, *Bulletin No. 26, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto, Japan*
- Murayama, S. and Shibata, T. (1961). “Rheological properties of clays”. *Proceedings of the Fifth International Conference on Soils Mechanics and Foundations Engineering, Vol. 1, pp. 269-273.*

- Nava T., Oliver (2007). “Influencia de las diatomeas en la resistencia al corte del caolín”. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, UNAM. pp 19-28.
- Neaman A., and Singer A. (2004). “The effects of palygorskite on chemical and physico-chemical properties of soils: a review” *Geoderma*, Volume 123, Issues 3-4, December 2004, Pages 297-303.
- Papers on Soils, 1959 Meetings: Presented at the Sixty-second Annual Meeting, Atlantic City, N.J., June 22-23, 1959 and Third Pacific Area National Meeting, San Francisco, Calif., Oct. 16, 1959, American Society for Testing Materials
- Noble, C. A. and Demirel, T. (1969). “Effect of temperature on the strength of cohesive soil”. Highway Research Board Special Report 103, pp. 204-219
- Podlubny I. (1994) “The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order”. UEF-02-94, Institute of Experimental Physics. Slovak Academy of Sciences, Kosice
- Robert B., Sinkus R., Larrat B., Tanter M. and Fink M. (2006). “A New Rheological Model Based on Fractional Derivatives for Biological Tissues”. Ultrasonics Symposium, 2006. IEEE
- Santoyo E. and Reséndiz D. (1971). “A precision triaxial cell”. *Journal of materials*, Vol. 6, No. 4. Philadelphia, USA
- Schiessel H. and Blumen A. (1993). “Hierarchical analogues to fractional relaxation equations”. *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1993) 5057-5069.
- Schiessel H., Metzler R., Blumen A. and Nonnenmacher T. F. (1995). “Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions”. *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995) 6567-6584. UK
- Schmidt, A. and Gaul L. (2001) “FE Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relations involving fractional time derivatives. In: *Constitutive Models for Rubber II*”. A.A.Balkema Publishers, Tokyo, 2001, S. 79–89.
- Sheldon Imaoka (2008) “Analyzing Viscoelastic Materials”. *ANSYS Advantage*, Volume II, Issue 4, 2008
- Singht, A. and Mitchell, J. K. (1968). “General stress – strain – time functions for soils”. *Journal of the Soils Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 94 No. SM 1, pp. 21-46.
- Soczkiewicz E. (2002). “Application on fractional calculus in the theory of viscoelasticity. *Molecular and Quantum Acoustics* , vol 23
- Teamrat A. Ghezzehei and Dani Or (2001) “Rheological Properties of Wet Soils and Clays under Steady and Oscillatory Stresses” Dep. of Plants, Soils and Biometeorology, Utah State Univ., Logan, UT 84322
- Vyalov, S.S. and Meschyan, S.R. 1969. Creep and long-term strength of soils subjected to variable load. *Proceedings 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico, Vol. I: 423-431.
- Weisstein, Eric (2007), “Fractional Calculus”, From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FractionalCalculus.html>
- Win Bo, Myint (2008). “Compressibility of Ultra-Soft Soil”. World Scientific, Singapore

APENDICE

A1. Simbología de funciones y variables

$D^n f(t)$: Derivada n-esima de la función $f(t)$

$D_x^\alpha f(x)$ o ${}_0 D_x^\alpha f(x)$: Derivada fraccionaria (con exponente fraccionario α) respecto a x de la función $f(x)$

$L\{f(t)\}$: Transformada de Laplace

$E_{a,b}(z)$: Función Mittag-Leffler

a, b : Constantes arbitrarias

\mathbb{R} : Conjunto de los números reales

\mathbb{C} : Conjunto de los números complejos

α, β, γ : Exponentes fraccionarios de la derivada

$\Gamma(z)$: Función gamma

E_i, η_i : Módulos de elasticidad y viscosidad

$\varepsilon(t)$: Función de deformación en el tiempo

$J(t)$: Función de *creep*

A2. Espacio métrico

Un espacio métrico es un conjunto M (a cuyos elementos se les denomina *puntos*) con una función distancia asociada (también llamada una **métrica**) $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (donde \mathbb{R} es el conjunto de los números reales). Decir d es una distancia sobre M es decir que para todo x, y, z en M , esta función debe satisfacer las siguientes condiciones o propiedades de una distancia:

1. $d(x, y) \geq 0$ (positividad)
2. $d(x, x) = 0$ (reflexividad)
3. Si $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (identidad)
4. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
5. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

A la función d así definida, se le da el nombre de métrica, o función distancia en M . A funciones como d , se les da el nombre de funciones de conjunto, porque en efecto,

asocian con cada conjunto de su dominio, un número real. El par (M, d) se conoce en análisis matemático, como un *Espacio Métrico*.

Un espacio métrico sencillo y cercano a nosotros es, el espacio euclídeo, constituido por \mathbb{R}^n y la métrica euclídea usual:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

donde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

A3. Fracción continua

En matemáticas, una fracción continua es una expresión de la forma:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

donde a_0 es un entero y todos los demás números a_n son enteros positivos. Si se permite que los numeradores o los denominadores parciales tomen valores arbitrarios, que podrían ser funciones en algún contexto, la expresión resultante es una fracción continua generalizada. Cuando fuera necesario distinguir la forma típica de arriba de una generalizada aquella se denominará fracción continua regular o simple.

Notación

Se puede expresar una fracción continua como

$$x = a_0; a_1, a_2, a_3$$

o, en la notación de Pringsheim,

$$x = a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \frac{1}{|a_3|}$$

o esta otra notación similar a la anterior

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Se pueden definir las fracciones continuas infinitas como un límite:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Este límite existe para cualquier elección de enteros positivos $a_1, a_2, a_3 \dots$

A4. Planteamiento y solución de la ecuación diferencial fraccionaria FVMS

En primera instancia se presenta la obtención de las ecuaciones diferenciales a partir de los arreglos de Kelvin y Maxwell para posteriormente presentar la ecuación diferencial correspondiente al arreglo de Burgers fraccionario (FVMS). Cabe mencionar que el planteamiento de las ecuaciones aquí presentadas corresponde al tipo de funciones en compresión isotrópica (ver capítulo 3) por lo que sólo se toma en cuenta la componente σ_{kk} del tensor de esfuerzos y la componente ε_{kk} del tensor de deformaciones. De aquí en adelante solo se llamarán simplemente σ y ε respectivamente.

El planteamiento de las ecuaciones diferenciales se hace bajo la premisa de que las deformaciones y esfuerzos cumplen con las relaciones de la teoría de elasticidad:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) \quad (\text{A.4.1})$$

$$\sigma(t) = \eta \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{A.4.2})$$

en donde :

$\sigma(t)$: Función de esfuerzos generados en el tiempo

$\varepsilon(t)$, $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$: Funciones de deformación y velocidad de deformación en el tiempo

E , η : Constantes de elasticidad y viscosidad respectivamente.

A.4.1 Arreglo de Kelvin fraccionario

El arreglo de Kelvin – Voigth se presenta en la siguiente figura:

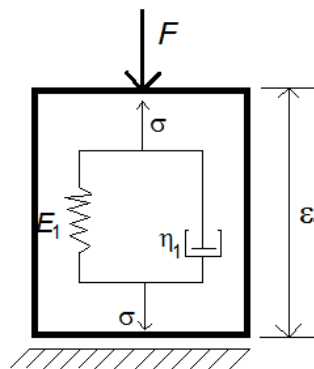


Figura A1 Cuerpo de Kelvin-Voight

Este arreglo trabaja bajo las siguientes premisas:

- Los elementos resorte y amortiguador trabajan en paralelo, por tanto la suma de los esfuerzos tomados en cada uno es igual al esfuerzo total generado en el cuerpo.
- Las deformaciones son iguales en ambos elementos

Por tanto, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_{R_1}(t) = \varepsilon_{A_1}(t) \quad (\text{A.4.3})$$

$$\sigma_1(t) = \sigma_{R_1}(t) + \sigma_{A_1}(t) \quad (\text{A.4.4})$$

En donde

$\varepsilon_{R_1}(t)$, $\varepsilon_{A_1}(t)$: deformaciones en los elementos resorte y amortiguador respectivamente

$\sigma_{R_1}(t)$, $\sigma_{A_1}(t)$: esfuerzos en los elementos resorte y amortiguador respectivamente

A partir de las ecuaciones (A.4.1-A.4.4) se plantea:

$$\sigma_{R_1}(t) = E_1 \varepsilon_{R_1}(t) = E_1 \varepsilon_1(t)$$

$$\sigma_{A_1}(t) = \eta_1 \frac{d\varepsilon_{A_1}(t)}{dt} = \eta_1 \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt}$$

Por lo que:

$$\sigma_1(t) = E_1 \varepsilon_1(t) + \eta_1 \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} \quad (\text{A.4.5})$$

Si se trata la ecuación (A.4.5) como una ecuación diferencial fraccionaria y se usa un exponente fraccionario arbitrario, por ejemplo γ se obtiene:

$$\sigma_1(t) = E_1 \varepsilon_1(t) + \eta_1 \frac{d^\gamma \varepsilon_1(t)}{dt^\gamma}, \text{ y reacomodando sus términos se tiene:}$$

$$\eta_1 \frac{d^\gamma \varepsilon_1(t)}{dt^\gamma} + E_1 \varepsilon_1(t) = \sigma_1(t) \quad (\text{A.4.6})$$

Para resolver esta ecuación diferencial puede hacerse uso de la transformada de Laplace:

$$\eta_1 s^\gamma \varepsilon_1(s) + E_1 \varepsilon_1(s) = \sigma_1(s) \quad (\text{A.4.7})$$

Factorizando los términos de la ecuación (A.4.7) se tiene:

$$(\eta_1 s^\gamma + E_1) \varepsilon_1(s) = \sigma_1(s)$$

Para obtener la ecuación de *creep* se despeja el término de deformación, por lo que queda:

$\varepsilon_1(s) = \frac{\sigma_1(s)}{(\eta_1 s^\gamma + E_1)}$, asumiendo que $\sigma_1(t) = \sigma_0 H^0$, en donde H^0 es una función escalón, y

por tanto $\sigma_1(s) = \sigma_0 \frac{1}{s} = \sigma_0 s^{-1}$ se tiene:

$\varepsilon_1(s) = \frac{\sigma_0 s^{-1}}{(\eta_1 s^\gamma + E_1)}$, y reacomodando términos:

$$\frac{\varepsilon_1(s)}{\sigma_0} = \hat{j}_1(s) = \frac{s^{-1}}{\eta_1 (s^\gamma + c_1)} \quad (\text{A.4.8})$$

En donde $c_1 = \frac{E_1}{\eta_1}$

Para obtener la ecuación de *creep* basta anti-transformar la ecuación (A.4.8). Para ello se recurre a la definición de la transformada de Laplace de la derivada de la función Mittag-Leffler (Podlubny, 1994):

$$\int_0^\infty e^{-st} \left[t^{Ak+B-1} E_{A,B}^{(k)}(\pm zt^A) \right] dt = \frac{k! s^{A-B}}{(s^A \mp z)^{k+1}} \quad (\text{A.4.9})$$

donde:

- $E_{a,b}^{(k)}(z) = \frac{d^k E_{a,b}(z)}{dz^k}$,
- k es el orden de la derivada y
- s es el parámetro de transformación

Comparando el término del lado derecho de la ecuación (A.4.9) con el término del lado derecho de la ecuación (A.4.8) se determina que:

$$k = 0$$

$$A - B = -1$$

$$A = \gamma, \text{ y por tanto } B = \gamma + 1$$

$$z = +c_1$$

Por lo que la transformada de Laplace de la función buscada queda:

$L\{J(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[t^{\gamma \cdot 0 + (\gamma + 1) - 1} E_{\gamma, \gamma + 1}^{(0)}(-c_1 t^\gamma) \right] dt$, de aquí se deduce que la transformada inversa de Laplace de la ecuación (A.4.8) es:

$$J_1(t) = \frac{1}{\eta_1} t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma) \quad (\text{A.4.10})$$

La ecuación (A.4.10) es la ecuación de *creep* correspondiente al cuerpo de Kelvin fraccionario.

Dos casos especiales para la función Mittag-Leffler.

Cuando $a = b = 1$, la función Mittag-Leffler se reduce a:

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

Cuando $a = 1$, y $b = 2$, la función Mittag-Leffler se reduce a:

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

Tomando en cuenta lo anterior, si $\gamma = 1$ y haciendo las operaciones necesarias se tiene la ecuación clásica de *creep* del cuerpo de Kelvin:

$$J_1(t) = \frac{1}{\eta_1} t^1 E_{1,2}(-c_1 t^1) = \frac{1}{E_1} (1 - e^{-c_1 t})$$

A.4.2 Arreglo de Maxwell fraccionario

El arreglo de Maxwell se presenta en la siguiente figura:

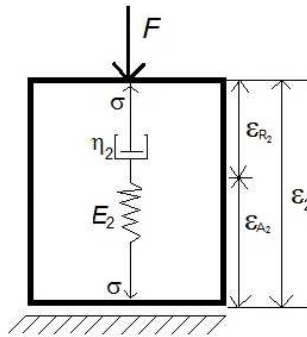


Figura A2 Cuerpo de Maxwell

Este arreglo trabaja bajo las siguientes premisas:

- Los elementos resorte y amortiguador trabajan en serie, por tanto la suma de las deformaciones en cada uno es igual al esfuerzo total generado en el cuerpo.
- El esfuerzo generado en el cuerpo es igual en ambos elementos

Por tanto, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_{R_2}(t) + \varepsilon_{A_2}(t) \quad (\text{A.4.11})$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_{R_2}(t) = \sigma_{A_2}(t) \quad (\text{A.4.12})$$

En donde

$\varepsilon_{R_2}(t)$, $\varepsilon_{A_2}(t)$: deformaciones en los elementos resorte y amortiguador respectivamente

$\sigma_{R_2}(t)$, $\sigma_{A_2}(t)$: esfuerzos en los elementos resorte y amortiguador respectivamente

Derivando la ecuación (A.4.11) se tiene:

$$\frac{d\varepsilon_2(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon_{R_2}(t)}{dt} + \frac{d\varepsilon_{A_2}(t)}{dt} \quad (\text{A.4.13})$$

De (A.4.1) se sabe que:

$\sigma_2(t) = E_2 \varepsilon_{R_2}(t)$, y derivando esta expresión respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d\sigma_2(t)}{dt} = E_2 \frac{d\varepsilon_{R_2}(t)}{dt}, \text{ de donde, despejando la velocidad de deformación queda:}$$

$$\frac{d\varepsilon_{R_2}(t)}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{dt} \quad (\text{A.4.14})$$

Así mismo, de (A.4.2) se plantea:

$$\sigma_2(t) = \eta_2 \frac{d\varepsilon_{A_2}(t)}{dt}, \text{ en donde despejando la velocidad de deformación queda:}$$

$$\frac{d\varepsilon_{A_2}(t)}{dt} = \frac{1}{\eta_2} \sigma_2(t) \quad (\text{A.4.15})$$

Sustituyendo (A.4.13) y (A.4.14) en (A.4.15) se tiene:

$$\frac{d\varepsilon_2(t)}{dt} = \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{dt} + \frac{1}{\eta_2} \sigma_2(t), \text{ y multiplicando esta expresión por } \eta_2 \text{ y reacomodando}$$

términos queda:

$$\sigma_2(t) + \frac{\eta_2}{E_2} \frac{d\sigma_2(t)}{dt} = \eta_2 \frac{d\varepsilon_2(t)}{dt}, \text{ y si se trata esta expresión como una ecuación diferencial}$$

fraccionaria con exponentes fraccionarios arbitrarios, por ejemplo α y β se tiene:

$$\sigma_2(t) + \frac{\eta_2}{E_2} \frac{d^\alpha \sigma_2(t)}{dt^\alpha} = \eta_2 \frac{d^\beta \varepsilon_2(t)}{dt^\beta} \quad (\text{A.4.16})$$

La ecuación (A.4.16) es la ecuación diferencial fraccionaria que gobierna el comportamiento del cuerpo de Maxwell ante acciones o deformaciones.

Haciendo uso de la transformada de Laplace para resolver esta ecuación diferencial se tiene:

$$\sigma_2(s) + \frac{\eta_2}{E_2} s^\alpha \sigma_2(s) = \eta_2 s^\beta \varepsilon_2(s) \quad (\text{A.4.17})$$

Para encontrar la ecuación de *creep* para el cuerpo de Maxwell se despeja el término de deformación:

$$\varepsilon_2(s) = \frac{1}{\eta_2 s^\beta} \sigma_2(s) + \frac{s^\alpha}{E_2 s^\beta} \sigma_2(s)$$

asumiendo que $\sigma_2(s) = \sigma_0 \frac{1}{s} = \sigma_0 s^{-1}$ se tiene:

$$\frac{\varepsilon_2(s)}{\sigma_0} = \hat{j}(s) = \frac{s^{-\beta-1}}{\eta_2} + \frac{s^{\alpha-\beta-1}}{E_2} \quad (\text{A.4.18})$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión anterior se tiene:

$$J(t) = \frac{1}{\eta_2} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{E_2} \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \quad (\text{A.4.19})$$

La ecuación (A.4.19) es la ecuación de *creep* correspondiente al cuerpo de Maxwell.

Si $\beta = \alpha = 1$ la ecuación (A.4.19) se reduce a la ecuación clásica de *creep* del cuerpo de Maxwell:

$$J(t) = \frac{1}{\eta_2} t + \frac{1}{E_2}$$

A.4.3 Cuerpo de Burgers fraccionario (FVMS)

Finalmente, el cuerpo de Burgers fraccionario (FVMS) se compone de los cuerpos de Maxwell y Kelvin conectados en serie y por tanto se tienen dos ecuaciones simultáneas como se muestra a continuación (Liu et al., 2006):

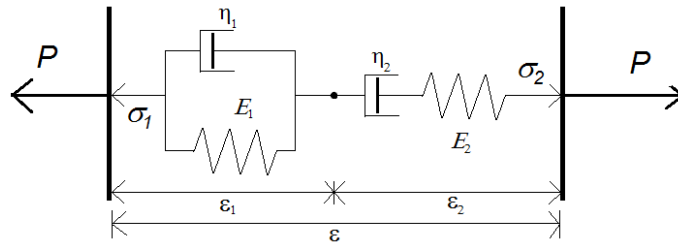


Figura A3 Arreglo de Burgers

en el cuerpo de Kelvin-Voigt, la ecuación diferencial es:

$$\sigma_1(t) = \eta_1 \cdot {}_0 D_t^\gamma \varepsilon_1(t) + E_1 \varepsilon_1(t) \quad (\text{A.4.20})$$

y en el cuerpo de Maxwell, la ecuación es:

$$\sigma_2(t) + \frac{\eta_2}{E_2} \cdot {}_0 D_t^\alpha \sigma_2(t) = \eta_2 \cdot {}_0 D_t^\beta \varepsilon_2(t) \quad (\text{A.4.21})$$

en donde

- t: tiempo
- $\sigma_i(t)$ es el esfuerzo aplicado como función del tiempo
- ${}_0 D_t^\alpha$ es la derivada fraccionaria con exponente α
- E_i y η_i son los módulos de rigidez y viscosidad, respectivamente
- α , β y γ son los exponentes fraccionarios
- $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ son las funciones de deformación para los cuerpos de Kelvin y Maxwell respectivamente

Por otro lado, se tiene que las deformaciones en todo el cuerpo son:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad (\text{A.4.22})$$

Sustituyendo (A.4.20) y (A.4.21) en (A.4.22) y haciendo los arreglos algebraicos necesarios, se tiene:

$$E_2 \cdot {}_0 D_t^{\beta+\gamma} \varepsilon(t) + E_2 c_1 \cdot {}_0 D_t^\beta \varepsilon(t) = {}_0 D_t^{\alpha+\gamma} \sigma(t) + c_1 \cdot {}_0 D_t^\alpha \sigma(t) + c_2 \cdot {}_0 D_t^\gamma \sigma(t) + \frac{E_2}{\eta_1} \cdot {}_0 D_t^\beta \sigma(t) + c_1 c_2 \sigma(t) \quad (\text{A.4.23})$$

donde $c_1 = E_1 / \eta_1$, $c_2 = E_2 / \eta_2$

La solución de la ecuación diferencial del arreglo FVMS para el fenómeno de *creep* puede obtenerse aplicando la transformada de Laplace:

$$E_2 s^{\beta+\gamma} \hat{\epsilon}(s) + E_2 c_1 s^\beta \hat{\epsilon}(s) = s^{\alpha+\gamma} \hat{\sigma}(s) + c_1 s^\alpha \hat{\sigma}(s) + c_2 s^\gamma \hat{\sigma}(s) + \frac{E_2}{\eta_1} s^\beta \hat{\sigma}(s) + c_1 c_2 \hat{\sigma}(s) \quad (\text{A.4.24})$$

Es decir,

$$\left(E_2 s^{\beta+\gamma} + E_2 c_1 s^\beta \right) \hat{\epsilon}(s) = \left(s^{\alpha+\gamma} + c_1 s^\alpha + c_2 s^\gamma + \frac{E_2}{\eta_1} s^\beta + c_1 c_2 \right) \hat{\sigma}(s) \quad (\text{A.4.25})$$

Donde s es el parámetro de transformación, $\hat{f}(s) = L\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ es la función imagen de $f(t)$.

De (A.4.25) se obtiene:

$$\hat{\epsilon}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{E_2} \hat{\sigma}(s) + \frac{s^{-\beta}}{\eta_2} \hat{\sigma}(s) + \frac{1}{\eta_1 (s^\gamma + c_1)} \hat{\sigma}(s) \quad (\text{A.4.26})$$

Asumiendo que $\sigma(t) = \sigma_0 H^0$ (una función del tipo escalón), puede obtenerse:

$$\hat{J}(s) = \frac{\hat{\epsilon}(s)}{\sigma_0} = \frac{s^{\alpha-\beta-1}}{E_2} + \frac{s^{-\beta-1}}{\eta_2} + \frac{s^{-1}}{\eta_1 (s^\gamma + c_1)} \quad (\text{A.4.27})$$

La transformada inversa de Laplace término a término de la ecuación (A.4.27) puede encontrarse usando la misma técnica que se presentó en los casos de Maxwell y Kelvin fraccionarios, ya que esta ecuación resulta de la suma algebraica de las ecuaciones (A.4.8) y (A.4.18):

$$J(t) = \frac{1}{E_2} \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} + \frac{1}{\eta_2} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{\eta_1} t^\gamma E_{\gamma, \gamma+1}(-c_1 t^\gamma) \quad (\text{A.4.28})$$

donde $E_{a,b}(z)$ es la función Mittag-Leffler y $\Gamma(x)$ es la función gamma.

Si los exponentes fraccionarios $\alpha = \beta = \gamma = 1$, la expresión (A.4.28) se reduce a la expresión clásica correspondiente a la ecuación de *creep* para el modelo de Burgers:

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}} \right) \quad (\text{A.4.29})$$