



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**EL PROBLEMA DE RECONSTRUCCIÓN DE UN  
OPERADOR DE JACOBI NO AUTO-ADJUNTO A  
PARTIR DE LOS ESPECTROS DE SUS  
EXTENSIONES AUTO-ADJUNTAS**

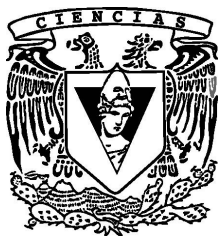
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**IVÁN ALCALÁ PAZ**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA  
2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

La vida de un estudiante es sencilla en muchos aspectos, arriesgamos poco y tenemos poder sobre aquello que nos ofrece su servicio, prosperamos con las críticas y en ocasiones nos arriesgamos; pero, el mundo suele ser cruel con el nuevo talento, las nuevas creaciones. Lo nuevo necesita amigos. En mi vida he fracasado, como he triunfado; pero déjeme decirles algo, tengo una vida muy plena y feliz y les ofrezco la clase del triunfo de mi vida.

Es por eso que agradezco a las personas con las que he contado a lo largo de mi carrera como estudiante.

A mis padres Juana Blanca Paz y Juan Saúl Alcalá en especial por su apoyo moral, aliento y paciencia infatigables a lo largo de todos mis proyectos. A mis parientes y amigos, que fueron personas muy allegadas, Giovanni, Saúl Isaac, Aracely, Guadalupe, Arturo, Marina, Mine, Chicharo, David, Hector, Alejandro, Virginia, Paco, Ana Karen, Erick, Luis, Miguel, Diego, Concha, Enrique, Adrián, Rubí, Chono, Esteban, Julio Cesar, Achero, todos los indios, entre muchas personas a las cuales no les terminaría de agradecer.

“ Los hombres son como los números: sólo adquieren el valor de la posición que ocupan.”

Napoleón Bonaparte



# Índice general

Introducción	1
<b>Capítulo 1.</b>	
<b>Algunos conceptos de funciones de variable compleja</b>	<b>9</b>
1.1. Conceptos de analiticidad . . . . .	9
1.2. Clasificación de funciones enteras . . . . .	11
<b>Capítulo 2.</b>	
<b>Espacios de Hilbert</b>	<b>21</b>
2.1. Geometría del espacio de Hilbert . . . . .	21
2.2. Sistemas ortonormales y bases ortonormales . . . . .	24
2.3. Algunos teoremas fundamentales . . . . .	29
<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Operadores (en espacios de Hilbert)</b>	<b>33</b>
3.1. Nociones básicas . . . . .	33
3.2. Espectro de operadores . . . . .	44
3.3. Operadores simétricos . . . . .	49
3.4. Descomposición espectral para operadores auto-adjuntos . . . . .	55
3.5. Operadores isométricos . . . . .	57
3.6. Transformada de Cayley . . . . .	60
3.7. Extensiones de von Neumann . . . . .	64
<b>Capítulo 4.</b>	
<b>Representación matricial de operadores</b>	<b>71</b>
4.1. El problema de representación matricial de un operador . . . . .	71
4.2. Representación matricial de operadores acotados . . . . .	72
4.3. Representación matricial de operadores simétricos . . . . .	80
<b>Capítulo 5.</b>	
<b>Operadores de Jacobi</b>	<b>85</b>
5.1. El operador de Jacobi y sus características . . . . .	85
5.2. Caracterización de extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi	104

5.3. Representación canónica de un operador de Jacobi . . . . .	108
<b>Capítulo 6.</b>	
<b>Reconstrucción de la matriz de Jacobi</b>	<b>115</b>
6.1. Reconstrucción . . . . .	115
6.2. Reconstrucción única de una matriz de Jacobi no auto-adjunta . . . . .	122
<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>

# Introducción

En matemáticas la mayoría de los problemas se pueden clasificar en dos tipos: los problemas directos e inversos.

Los problemas directos son aquellos en los cuales se conoce una ecuación y alguna información complementaria y se procede a resolver directamente la ecuación. Mientras que en un problema inverso se parte de las soluciones de una ecuación y la finalidad es recobrar la ecuación, de modo que las soluciones que se dieron originalmente correspondan, efectivamente, a la ecuación encontrada.

En este trabajo se consideran ciertos problemas inversos de la *Teoría espectral de operadores*. Un problema directo en este ámbito es: dado un operador encontrar su espectro. Mientras que un problema inverso es: dado el espectro y posiblemente alguna información adicional se intenta reconstruir al operador.

El problema que trataremos en este trabajo es un problema inverso de un operador de *Jacobi*. Problemas inversos clásicos en la *Teoría espectral de operadores* son: el problema de dos espectros para operadores de *Sturm-Liouville* y *Jacobi*. En ambos casos, el objetivo es reconstruir la ecuación (diferencial, para el primero y en diferencias, para el segundo) con sus parámetros a partir de dos espectros que corresponden a dos condiciones de frontera diferentes.

Ahora, veamos la relación entre los operadores de Jacobi y operadores Sturm-Liouville. Comencemos definiendo al operador de Jacobi.

Sea  $J_0$  el operador definido en  $D_0$  que son las combinaciones lineales (finitas) de una base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  fija en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que

$$\begin{aligned}(J_0 f)_1 &:= q_1 f_1 + b_1 f_2 \\ (J_0 f)_n &:= b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{aligned}\tag{1}$$

con  $f \in D_0$ ,  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ . El operador  $J_0$  es simétrico y por lo tanto, cerrable. La cerradura  $\bar{J}_0 = J$  del operador  $J_0$ , se denomina operador de Jacobi. Note que se ha definido al operador de Jacobi  $J$ , de tal forma que, la matriz tridiagonal



semi-infinita

$$\begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (2)$$

sea la representación matricial (véase Cap.4, Sec. 2) con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  del operador  $J$ . Una explicación más detallada del operador  $J$  la encontramos en el Capítulo 5, Sección 1. Es bien sabido que  $J$  tiene índices de deficiencia  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$  (véase Cap. 5, Sec. 1), es decir, el operador es auto-adjunto en el primer caso o bien simétrico no auto-adjunto en el segundo.

El operador  $J$  en el caso auto-adjunto está estrechamente relacionado con los operadores de Sturm-Liouville. Efectivamente, éste es el análogo discreto de éstos. Consideremos los operadores

$$\begin{aligned} (\partial_d f)_n &:= f_{n+1} - f_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ (\partial_i f)_n &:= f_{n-1} - f_n, \quad n > 1 \\ (\partial_i f)_1 &:= -f_1, \end{aligned}$$

y la sucesión  $Q = \{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n = b_{n-1} + q_n + b_n$ ,  $b_0 = 0$ , donde  $b_n$  y  $q_n$  son elementos de la sucesiones dadas en (1). Así, para  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} -\partial_i(b_n \partial_d f)_n + Q_n f_n &= -\partial_i(b_n(f_{n+1} - f_n)) + Q_n f_n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &= -\{b_{n-1} f_n - b_{n-1} f_{n-1} - (b_n f_{n+1} - b_n f_n)\} + Q_n f_n \\ &= b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se satisface que

$$\begin{aligned} -\partial_i(b_1 \partial_d f)_1 + Q_1 f_1 &= -\partial_i(b_1(f_2 - f_1)) + Q_1 f_1 \\ &= -\{-b_1 f_2 - b_1 f_1\} + (q_1 + b_1) f_1 \\ &= q_1 f_1 + b_1 f_2. \end{aligned}$$

Concluyendo que podemos escribir

$$J = -\partial_i(b \partial_d) + Q,$$

siempre que el dominio del operador del lado izquierdo de esta ecuación coincida con el dominio del operador del lado derecho; Esto sucede, siempre y cuando,  $J$  sea acotado o si  $J = J^*$  y del lado izquierdo tomamos el dominio maximal (véase Capítulo 4). Así mismo, el operador Sturm-Liouville  $\mathcal{L}$  se puede definir como el operador auto-adjunto en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{G})$ , donde  $\mathcal{G}$  es un intervalo de  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ , determinado por la relación

$$\mathcal{L} := -\frac{d}{dx} \left( b \frac{d}{dx} \right) + Q, \quad (3)$$

en la cual la función  $Q$  y el dominio de  $\mathcal{L}$  se escogen de forma tal que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ .

El operador en la ecuación (3) es de suma importancia en los modelos de física clásica y cuántica; Lo anterior conlleva a mencionar los resultados obtenidos de la reconstrucción de un operador a partir de sus características espectrales (Sturm-Liouville) en el semi-eje  $[0, \infty)$  y en un intervalo finito.

Dentro del desarrollo de la teoría de los problemas inversos, se encuentra el resultado obtenido en 1929 por V. A. Ambartsumyan, quien se dedicó al análisis de los operadores generados por (3), con la función  $b$  idénticamente uno y  $Q$  una función real y continua. En particular, trabajó con el caso  $\mathcal{G} = [0, \pi]$  y estableció las siguientes condiciones en el dominio del operador:

$$f'(0) = f'(\pi) = 0.$$

Ambartsumyan concluyó que la función  $Q$  era idénticamente cero si  $\lambda_n = n^2$  ( $\lambda_n$  auto-valor del operador  $\mathcal{L}$ ).

En 1945, G. Borg notó la importancia del resultado de Ambartsumyan y mostró en [6] que un espectro no determina a un operador Sturm-Liouville, sino a partir de dos espectros; Por lo que, el resultado de Ambartsumyan era una excepción del caso general. Borg consideró la familia de operadores Sturm-Liouville  $\mathcal{L}_h$  ( $h \in \mathbb{R}$ ) con  $\mathcal{G} = [0, \pi]$ , donde para un  $H \in \mathbb{R}$  fijo y estableció las siguientes condiciones de frontera:

$$f'(0) - hf(0) = 0, \quad f'(\pi) + Hf(\pi) = 0.$$

Así mismo, Borg tomó a  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  como los auto-valores de los operadores  $\mathcal{L}_{h_1}$  y  $\mathcal{L}_{h_2}$ , respectivamente y obtuvo que  $\{\lambda_k\}_k$  y  $\{\mu_k\}_k$  determinan unívocamente a la función  $Q$  y a los números reales  $H$ ,  $h_1$  y  $h_2$ .

Durante 1950-1952, Borg, Marchenko y Krein, hicieron uso de la función espectral  $\rho_\tau(t)$  (véase Cap. 5, Sec.3, Ec (5.47)) para resolver el problema inverso de dos espectros para operadores Sturm-Liouville en el semi-eje  $[0, \infty)$ . Durante esa época, Marchenko obtuvo las fórmulas asintóticas de la función espectral  $\rho_\tau(t)$  para operadores Sturm-Liouville. Desarrolló nuevos métodos para el estudio de fórmulas asintóticas de la función espectral y la convergencia de las expansiones en términos de auto-funciones. También, Marchenko dio a conocer en [21] la demostración del *Teorema de Unicidad* conocido hoy en día como el *Teorema de Unicidad Borg-Marchenko*. Dos años más tarde, publicó [22], en el que desarrolla extensamente la teoría espectral de operadores de Schrödinger de una dimensión, y repite la demostración del *Teorema de Unicidad*. Ese año, también, Borg publicó en [7] la demostración del *Teorema de Unicidad* ya antes publicada por Marchenko.

El cual consiste en tomar dos operadores Sturm-Liouville con  $b \equiv 1$  bajo condiciones de frontera constantes, tal que, si la  $m$ -función de Weyl (véase Cap.6, Sec.2 Ec. (6.27)) coinciden, o lo que es equivalente, si las funciones espectrales coinciden, entonces los potenciales (o sea las funciones  $Q_1, Q_2$ ) deben coincidir.

Por su cuenta Krein publicó los artículos [14, 15], en los cuales, menciona un método efectivo para la recobrar un operador Sturm-Liouville a partir de sus dos espectros.

Posteriormente, en 1951, Gelfand y Levitan publicaron [11] en el que proporcionan un método para la reconstrucción del operador Sturm-Liouville a partir de su función espectral.

Después Levitan y Gasymov dieron a conocer [20] en el cual proporcionaron solución al problema inverso de dos espectros para operadores Sturm-Liouville en un caso general, haciendo uso de la función espectral y utilizando nuevos descubrimientos que no se conocían en aquella época.

A partir de las soluciones que se encontraron del problema inverso para operadores Sturm-Liouville, comienza el estudio del mismo problema; pero, para matrices de Jacobi.<sup>1</sup>

Los problemas inversos de dos espectros para matrices de Jacobi que estamos describiendo consisten en: tomar extensiones auto-adjuntas diferentes  $J(\tau_1)$  y  $J(\tau_2)$  de  $J$ . Estas extensiones están dadas por la restricción de  $J^*$  a los conjuntos  $D_{\tau_1}$  y  $D_{\tau_2}$  (véase Cap.5, Sec.2, Def 5.2.3), respectivamente. En general  $D_\tau$  tiene contenido al dominio de  $J$  y está contenido en el dominio de  $J^*$ , para toda  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Además, para cada  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$   $J^* \upharpoonright_{D_\tau}$  es una extensión y para  $\tau$ 's diferentes se tienen extensiones diferentes.

Posteriormente, procedemos a recobrar la función espectral a partir de los espectros  $\sigma(J(\tau_1))$  y  $\sigma(J(\tau_2))$  de dos extensiones auto-adjuntas distintas  $J(\tau_1)$  y  $J(\tau_2)$  respectivamente y se reconstruye la matriz Jacobi.

El problema tratado en [26] es parecido al que se trata en este trabajo. La diferencia está en el tipo de condiciones a la frontera que se dan. En el trabajo [26] las condiciones a la frontera para el operador están en el origen; mientras que, aquí se estudian condiciones en el infinito. Supongamos primero que  $J = J^*$ . Las ecuaciones en diferencias que definen a  $(\tilde{J}f)_n$  pueden escribirse como:

$$(Jf)_n := b_{n-1}f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (b_0 = 1), \quad (4)$$

con la condición

$$f_0 = 0. \quad (5)$$

la cual es conocida como condición de Dirichlet. Esta condición puede ser considerada como una condición a la frontera para la expresión (5.5). Note que  $f_0$  no es elemento de la sucesión  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ , pero podemos usarlo para introducir condiciones a la frontera para (5.5). Dicha condición es completamente análoga a las condiciones de Dirichlet en el origen para un operador de Sturm-Liouville en el semi-eje real. El operador  $J$  es la cerradura del operador que actúa sobre elementos de  $\mathcal{H}$  como (5.5) con la condición de Dirichlet (5).

En [26] se trata a una familia de operadores dada por condiciones parametrizados en el origen análogas a las que se da para los operadores de Sturm-Liouville. Considerando

---

<sup>1</sup>La historia aquí expuesta de los operadores de Sturm-Liouville fue basada en la introducción de [20].

el operador  $J(\alpha)$  definido por la expresión en diferencias (5.5) con la condición en el origen

$$f_1 \cos \alpha + f_0 \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in [0, \pi). \quad (6)$$

Entonces, si  $\alpha \in (0, \pi)$ ,

$$J(\alpha) = J - \cot \alpha \langle \cdot, u_1 \rangle u_1.$$

Ahora, introducimos la familia de operadores estudiada en el presente trabajo. Tomemos  $J^*$  el operador adjunto de  $J$  y tomando en cuenta la ecuación  $(J^* - \zeta I)f = 0$  con  $J \neq J^*$ , se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} q_1 f_1 + b_1 f_2 &= \zeta f_1 \\ b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1} &= \zeta f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Note que es fácil dar solución al sistema anterior siempre que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ , es decir,  $f \in \mathcal{H}$ . Por ejemplo, haciendo  $f_1 = 1$  se tiene  $f_2 = b_1^{-1}(\zeta - q_1)$ . Y con  $n = 2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} f_3 &= b_2^{-1}((\zeta - q_2)f_2 - b_1) \\ &= b_2^{-1}(b_1^{-1}(\zeta - q_2)(\zeta - q_1) - b_1) \\ &= b_2^{-1}(b_1^{-1}(\zeta^2 - \zeta(q_1 + q_2) + (q_1 q_2 - b_1))). \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

$f_n$  es un polinomio con respecto a  $\zeta$  de grado  $n - 1$ . Usaremos la notación  $f_n =: P_{n-1}(\zeta)$  y llamaré a los polinomios  $P_n(\zeta)$  polinomios de primer genero asociados a la matriz (2). Ahora, los polinomios de segundo genero  $Q_n(\zeta)$  asociados a la matriz (2) se definen como solución del sistema (siempre que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ ) sin tomar en cuenta la primer ecuación del sistema recurrente, bajo el supuesto de  $f_1 = 0$  y  $f_2 = b_1^{-1}$ . Nótese que  $f_n$  es un polinomio de grado  $n - 2$  con respecto a  $\zeta$ . Usaremos la notación  $f_n =: Q_{n-1}(\zeta)$ .

Consideremos la sucesión  $\{\tilde{v}_n(\beta)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$  con

$$\tilde{v}_n(\beta) := Q_{n-1}(0) \cos \beta + P_{n-1}(0) \sin \beta, \quad \beta \in [0, \pi) \quad (7)$$

y haciendo  $f_n = \tilde{v}_n(\beta)$  en (1),  $\{\tilde{v}_n(\beta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es solución para (1).

Ahora, se define el conjunto  $D_\beta$  como sigue:

$$D_\beta := \{f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : \tilde{J}f \in \ell_2(\mathbb{N}), \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\tilde{v}_k(\beta), f) = 0^2\}. \quad (8)$$

Compare  $D_\beta$  con  $D_\tau$  (véase Cap.5, Sec.2, Def 5.2.3) y note que coincide con (8) haciendo  $\tau = \cot \beta$ . Note que cuando  $\beta \in [0, \pi)$ , entonces  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Por lo que se verá en el Capítulo 5 el análogo a (8) es el dominio de definición de toda extensión

<sup>2</sup>Sea  $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$  definimos el Wronskiano como  $W_n(f, g) = b_n(f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n)$  con  $b_n$  definido en (2).

auto-adjunta dada por la restricción del adjunto de  $J$ ,  $J^*$ , a los conjuntos  $D_\beta$ , es decir,  $J^* \upharpoonright_{D_\beta} =: J(\beta)$  para alguna  $\beta$  y para diferentes  $\beta$ 's define diferentes extensiones  $J(\beta)$ . La condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\tilde{v}_k(\beta), f) = 0, \quad f \in \text{dom}(J^*) \quad (9)$$

puede interpretarse como una condición de frontera al infinito y es con la que trabajaré en el Capítulo 5. La condición (9) determina las extensiones auto-adjuntas de  $J$ .

A lo largo de este trabajo de investigación, se encontrará, todo lo que se requiere del mismo, con excepción de los Teoremas *I*, *II*, *III*, *IV* y *V* cuyas demostraciones no se dan en este trabajo, pero se dan referencias de donde encontrar los resultados y las demostraciones.

El Capítulo 1, trata un poco de la teoría de funciones de variable compleja. La Sección 1 se exponen conceptos básicos de analiticidad de funciones, orden de los ceros de una función, singularidades, polos, convergencia de series y productos de series. En la Sección 2 vemos clasificación de funciones enteras por su orden de crecimiento, el tipo de la función (minimal, normal y maximal), también estudiamos los productos canónicos y sus exponentes de convergencia, y por ultimo exponemos como descomponer una función entera como productos canónicos.

En el Capítulo 2 está contenida la teoría básica de espacios de Hilbert, comenzando por como se compone un espacio de Hilbert, como se induce una norma en el a partir del producto interior definido sobre el espacio lineal sobre esta espacio de Hilbert y un algo del álgebra básica que encierra la teoría de espacio de Hilbert. En la Sección 1 se define que es un producto interior sobre un espacio lineal sobre  $\mathbb{C}$ , la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la norma inducida por el producto interior, subespacios de un espacio de Hilbert y suma ortogonal de espacios. En la Sección 2 exponemos sistemas ortonormales, Teorema de Pitágoras, la desigualdad de Bessel, separabilidad del espacio de Hilbert, bases ortonormales, dimensión del espacio de Hilbert. En la Sección 3 vemos conceptos como el Teorema de Proyección, la definición de complemento ortogonal, diferencia ortogonal de espacios de Hilbert, el Teorema de representación de F. Riesz, completos débil, compactes débil de la bola unitaria.

El Capítulo 3 que es el más extenso en este trabajo, contiene conceptos muy generales de la teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert, por mencionar algunos de estos conceptos son: operador invertible, operador acotado, operador de proyección, operador compacto, el conjunto de puntos de tipo regular, el espectro de un operador, la resolvente, operador simétrico, transformada de Cayley, extensiones de von Neumann y descomposición espectral para operadores auto-adjuntos. En la Sección 1 tratamos la definición de extensión de un operador, suma de operadores, operador inverso, operador acotado, operador compacto, operador de proyección, gráfica de un operador, operador cerrado, operador adjunto, operador cerrable, entre otros teoremas generales de teoría de operadores en espacios de Hilbert por mencionar algunos que el operador adjunto es cerrado, la descomposición de el espacio de Hilbert como la suma

ortogonal de el la cerradura del rango y el núcleo del operador adjunto. Mientras que en la Sección 2 vemos conceptos de espectros de operadores como es; el conjunto de puntos de tipo resolvente, puntos de tipo regular, espectro, núcleo espectral, espectro continuo, espectro puntual, operador resolvente, uno de los teoremas fundamentales de esta sección nos habla de como esta compuesto el espectro de un operador compacto. En la Sección 3 vemos relacionados con operadores simétricos e isométricos como es que un operador sea auto-adjunto, índices de deficiencia, espacios que reducen, mientras que de operadores isométricos vemos conceptos como los índices de deficiencia interior y exterior, operador unitario por mencionar algunos conceptos. En la Sección 4 y 5 tratamos todos los conceptos que implican el estudio de la transformada de Cayley y extensiones de von Neumann respectivamente. Por ultimo en la Sección 6 vemos la descomposición espectral de operadores auto-adjuntos.

En el Capítulo 4, nos enfrentamos con un problema que es: como asociar de manera única un operador una matriz y viceversa. Dicho problema se resuelve solo para operadores acotados y operadores simétricos no acotados . En la Sección 4.1 vemos como poner en relación unívoca los operadores acotados con las matrices y también vemos un caso en particular de representar un operador compacto, mejor dicho, como es la matriz que representa a un operador compacto (véase Teorema 4.2.6). Mientras que en la Sección 4.2 vemos como relacionar unívocamente matrices con operadores simétricos no acotados.

El Capítulo 5 tiene plasmada la teoría básica de matrices de Jacobi. En la Sección 5.1 contiene la definición de una matriz de Jacobi (véase Definición 5.1.1), la forma en que actúa en un sobre elementos en espacio de Hilbert, vemos características de la matriz de Jacobi como que es un operador simétrico cerrado, que solo tiene “índices de deficiencia” (véase Definición 3.3.11)  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$  (véase Teorema 5.1.8). En esta misma Sección se define un operador auxiliar que es el Wronskiano (véase Definición 5.1.10). En la Sección 5.1 construimos extensiones auto-adjuntas a partir del Wronskiano y vemos como se comportan dichas extensiones y sus resolventes y también vemos algunos teoremas que son de extensiones auto-adjuntas en general (las que no requieren del  $D_\tau$ , véase ecuación (5.38)).

El Capítulo 6 contiene los resultados principales de la investigación expuesta en este trabajo. Para empezar, en la Sección 1 introducimos la matriz de Nevalinna asociada a la matriz de Jacobi, también exponemos la teoría que nos permite ver como es su orden de crecimiento y de las funciones enteras que componen la matriz de Nevalinna, otra función importante que introducimos en esta sección es la función  $\mathfrak{R}_\tau$  (véase ecuación (6.24)) que compone el espectro de cada extensión auto-adjunta para cada  $\tau$ . En Sección 2 encontramos dos resultados principales de este trabajo que son el Teorema 6.2.1 que nos dice que los espectros de las extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi no se entrelazan y el Teorema 6.2.2 que nos da un algoritmo para reconstruir un operador de Jacobi a partir de los espectros de dos de sus extensiones auto-adjuntas.

Los resultados que sobresalen en este trabajo son: La prueba del Teorema 1.2.18,

ya que difiere y es más simple que la encontrada en [18, Sec. 3, Prop. 3]. Otro punto es que se da un análisis detallado de la representación matricial de operadores acotados y simétricos no acotados basándonos en [3]. Cabe hacer mención de que en este trabajo se trató de obtener los resultados prescindiendo del teorema espectral. Salvo por el Teorema *IV* (véase Cap. 3, Sec. 3) pudimos llevar a cabo esta tarea. Uno de los puntos más importantes es que se da la construcción detallada de los dominios de definición de las extensiones auto-adjuntas de un operador no auto-adjunto de Jacobi (véase Cap. 5, Sec. 2) comparece con [27, Cap. 2, Sec. 6]. El último punto a resaltar del trabajo es la demostración de que las funciones que conforman la matriz de Nevalinna asociada a la matriz de Jacobi no crecen más rápido que una función entera de tipo minimal y orden uno. Se tomó como base [25, Sec. 4] y es una demostración alterna a [2, Cap. 2, Sec. 5].

# Capítulo 1

## Algunos conceptos de funciones de variable compleja

En este capítulo se van a recordar algunos conceptos básicos de teoría de funciones de variable compleja. Pondré especial interés en la clasificación de funciones enteras con base en la “velocidad” de crecimiento. Se definirá el concepto de orden de crecimiento de la función y una refinación de este: “el tipo”. También, se verá como representar una función entera dependiendo de su orden de crecimiento.

### 1.1. Conceptos de analiticidad

En esta sección se enunciarán algunos conceptos básicos que se pueden encontrar en libros de texto sobre funciones analíticas o teoría de funciones de variable compleja. Nos basamos fundamentalmente en [1] y [13].

**Definición 1.1.1.** Una función  $f$  compleja es analítica en una región en  $\mathbb{C}$  si es diferenciable respecto al argumento complejo en cada punto de esa región.

**Definición 1.1.2.** Un número complejo  $z_0$  es cero de una función analítica  $f$  si

$$f(z_0) = 0.$$

**Definición 1.1.3.** Una función analítica  $f$  tiene un cero de orden  $k$  en  $z_0$  si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0,$$

mientras que  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ .

**Definición 1.1.4.** Se dice que  $\zeta_0$  es una singularidad aislada de  $f$  si  $f$  es analítica en  $A = \{z : 0 < |z - \zeta_0| < R\}$ , es decir,  $f$  es analítica en  $A \setminus \{\zeta_0\}$ .



**Definición 1.1.5.** Un punto singular aislado  $\zeta_0$  de una función  $f$  es un polo de  $f$  sii

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} f(\zeta) = \infty.$$

**Teorema 1.1.6.** El punto  $\zeta_0$  es un polo de una función analítica  $f$  en  $U$  sii es cero de la función

$$\frac{1}{f(z)}, \quad z \in U \setminus \zeta_0.$$

**Definición 1.1.7.** Una función entera es aquella función que es analítica en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

*Comentario 1.1.8.* Suponiendo que:

1. cada miembro de la sucesión de funciones complejas

$$\{U_n(\zeta)\}_{n=1}^{\infty}$$

es analítica en un compacto  $D \subset \mathbb{C}$ ,

2. la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(\zeta)$$

es uniformemente convergente en cada región  $D'$  en el interior de  $D$ .

Entonces la función

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\zeta)$$

es analítica dentro de  $D$  y sus derivadas pueden ser calculadas término a término. Además, si las funciones  $U_n(\zeta)$  son enteras, entonces  $f(\zeta)$  es entera. Este resultado se puede consultar en [28, Sec. 2.8].

**Definición 1.1.9.** Sea  $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones analíticas y  $F_m(z) = \prod_{n=1}^m f_n(z)$ . Si  $\{F_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$  converge uniformemente en  $D \subset \mathbb{C}$  a  $F(z) \neq 0$ , entonces se dice que  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  es uniformemente convergente en  $D$  y

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad (1.1)$$

(véase [28, Sec. 1.44]).

**Definición 1.1.10.** El producto infinito  $\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + f_n(z)\}$  es uniforme y absolutamente convergente si  $\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + |f_n(z)|\}$  es uniformemente convergente.

Note que si  $\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + f_n(z)\}$  es uniforme y absolutamente convergente, entonces converge uniformemente

**Teorema 1.1.11.** *Sea  $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones analíticas en  $B \subset \mathbb{C}$  y  $K$  un compacto cualquiera de  $\mathbb{C}$ . El producto infinito  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{1 + f_n(z)\}$  converge absoluta y uniformemente en  $K \cap B$  sii  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)$  converge absoluta y uniformemente en  $K \cap B$ . (véase [1, Cap. 5, Sec. 2, T. 6]).*

*Demostración.* Notemos que, para toda  $z \in B$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)| < \prod_{n \in \mathbb{N}} \{1 + |f_n(z)|\} < e^{\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)|}. \quad (1.2)$$

La primera desigualdad en (1.2) es obvia. La segunda, se obtiene de escribir

$$e^{|f_k(z)|} = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \frac{|f_k(z)|^n}{n!}$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De esta forma, la convergencia uniforme de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(z) + 1\}$  y  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)|$  son equivalentes. □

## 1.2. Clasificación de funciones enteras

En esta sección se dará un estudio de algunas clases de funciones enteras. Comenzando con la definición de una función auxiliar para medir el orden de crecimiento de una función entera. Para esta sección podemos consultar [19, Cap. 1, Sec. 1,3,10] y [23, Cap. 9, Sec. 1].

**Definición 1.2.1.** Sea  $f$  una función entera, definamos

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

**Definición 1.2.2.** Sea  $f$  una función entera, definamos

$$K_f := \{k > 0 : \exists r(f, k) > 0 : r > r(f, k) \Rightarrow M_f(r) < e^{r^k}\}.$$

**Definición 1.2.3.** Si  $K_f \neq \emptyset$ , entonces  $f$  es de orden finito.

*Comentario 1.2.4.* Observemos que cuando  $K_f \neq \emptyset$ , entonces  $K_f$  está acotado por abajo. Además, notemos que si  $k \in K_f$  entonces para toda  $k' \geq k$ ,  $k' \in K_f$ .

Por lo tanto, todas las funciones de orden finito son susceptibles de la siguiente refinación en su clasificación.

**Definición 1.2.5.** Si  $f$  es una función entera de orden finito, entonces su orden  $\rho$  se define como

$$\rho := \inf K_f.$$

**Teorema 1.2.6.** Sea  $f$  una función entera de orden finito. Entonces

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}. \quad (1.3)$$

*Demostración.* De la definición de ínfimo y del Comentario 1.2.4 se sigue que, para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\tilde{r}$  tal que

$$M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}} \iff r \geq \tilde{r}, \quad (1.4)$$

de donde obtenemos

$$\ln M_f(r) < r^{\rho+\epsilon} \quad \forall r \geq \tilde{r}$$

y aplicando  $\ln$  nuevamente, nos queda

$$\ln \ln M_f(r) < (\rho + \epsilon) \ln r \quad \forall r \geq \tilde{r}.$$

Dado que  $r$  es un número positivo, podemos dividir la desigualdad anterior por  $\ln r$  sin alterarla

$$\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} < \rho + \epsilon \quad \forall r \geq \tilde{r}. \quad (1.5)$$

Por otro lado, de la definición de  $\rho$ , se sigue que  $\rho - \epsilon \notin K_f$ . Por lo que para toda  $R \in \mathbb{R}_+$ , existe  $r \geq R$  tal que  $M_f(r) > e^{r^{\rho-\epsilon}}$ . Análogo a lo hecho para (1.4) existe  $r$  arbitrariamente grande tal que

$$\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} > \rho - \epsilon. \quad (1.6)$$

Ahora, definamos

$$g(r) := \sup_{s \geq r} \frac{\ln \ln M_f(s)}{\ln s}.$$

De (1.5) y (1.6) se sigue  $\rho - \epsilon < g(r) \leq \rho + \epsilon$  para  $r \geq \tilde{r}$ . Por la definición de límite superior

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Así, tomando el límite de  $g(r)$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\rho - \epsilon \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \leq \rho + \epsilon.$$

Debido a que  $\epsilon$  es arbitrariamente pequeña, se obtiene (1.3).  $\square$

Ahora, definamos a las clases de funciones enteras que tienen un orden dado.

**Definición 1.2.7.** Sea  $f$  una función de orden finito, definamos

$$A_f := \{A > 0 : \exists r(f, A) > 0 : M_f(r) < e^{Ar^\rho} \Leftrightarrow r > r(f, k)\}$$

donde  $\rho$  es el orden de  $f$ .

**Definición 1.2.8.** Si  $A_f = \emptyset$ , entonces decimos que la función entera  $f$  tiene tipo maximal.

Si  $A_f \neq \emptyset$ , entonces  $A_f$  está siempre semi-acotado inferiormente y decimos que el tipo de la función entera  $f$  es

$$\sigma := \inf A_f.$$

Para este caso, el tipo de  $f$  es minimal si  $\sigma = 0$  y es normal si  $0 < \sigma < \infty$ . Cuando el tipo es maximal decimos que  $\sigma = \infty$ .

**Teorema 1.2.9.** Sea  $f$  una función entera de orden  $\rho$ . Entonces

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

*Demostración.* Note que si  $a \in A_f$  entonces para toda  $a' \geq a$ ,  $a' \in A_f$ . Así, de la definición de  $\sigma$  se sigue que para toda  $\epsilon > 0$  existe  $\tilde{r}$  tal que

$$M_f(r) < e^{(\sigma+\epsilon)r^\rho} \Leftrightarrow r > \tilde{r}$$

Tomando el logaritmo y el hecho de que  $r$  es un número positivo, concluimos de la desigualdad anterior que para toda  $\epsilon > 0$

$$\frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} < \sigma + \epsilon \quad \forall r > \tilde{r}.$$

Por otra parte, de la definición de  $\rho$  se sigue que  $\rho - \epsilon \notin A_f$ . Por lo que para toda  $R \in \mathbb{R}_+$  existe  $r \geq R$  tal que  $M_f(r) < e^{(\sigma-\epsilon)r^\rho}$ . Repitiendo lo hecho anteriormente, se obtiene que existe  $r$  arbitrariamente grande tal que

$$\frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} > \sigma - \epsilon.$$

Cuya demostración, a partir de este momento, es análoga a la del Teorema 1.2.6.  $\square$

**Definición 1.2.10.** Sea  $G(u; p)$  la función dada por

$$G(u; p) := (1 - u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}}, \quad G(u; 0) := 1 - u,$$

donde  $u \in \mathbb{C}$ ,  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Definición 1.2.11.** Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  una sucesión de números complejos, ninguno cero, con el punto en el infinito como único punto límite. Defínase con base en la sucesión anterior una nueva sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números naturales tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \quad (1.7)$$

converge uniformemente en cada dominio acotado.

Esto es siempre posible, ya que para  $|z| \leq R$  ( $R > 0$ ) la desigualdad

$$\left| \frac{z}{a_n} \right| < q,$$

con cierto  $q < 1$  se satisface para valores muy grandes de  $n$ . Concluyendo que podemos tomar  $p_n = n$ .

**Lema 1.2.12.** Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  una sucesión de números complejos, ninguno cero, con el punto en el infinito como único punto límite. Suponga que en dicha sucesión los puntos se han dispuesto en orden creciente de módulos (si varios puntos  $a_n$  tienen el mismo módulo, entonces los tomamos en cualquier orden). El producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; p_n\right), \quad (1.8)$$

converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$  que no contengan a los puntos  $a_n$ . Donde  $p_n$  es como en la Definición 1.2.11.

*Demostración.* Veamos que el producto en (1.8) es uniformemente convergente en cada conjunto acotado y cerrado que no contiene los puntos  $a_n$ . En efecto, vamos a estimar  $|\ln G(u; p)|$  para  $|u| \leq q$ , con  $q < 1$  y  $|\arg(1 - u)| \leq \pi$ . Expandiendo en serie obtenemos que

$$\ln G(u; p) = -\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \dots,$$

bajo las condiciones indicadas se sigue que

$$\begin{aligned} |\ln G(u; p)| &= \left| \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2} + \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{u^{p+1}}{p+1} \right| + \left| \frac{u^{p+2}}{p+2} \right| + \dots \\ &< |u^{p+1}| + |u^{p+2}| + \dots \\ &= \frac{|u|^{p+1}}{1 - |u|} \\ &\leq \frac{1}{1 - q} |u|^{p+1}. \end{aligned}$$

De esta desigualdad para  $|z| \leq R$  y  $n > n(q, R)$ , obtenemos que

$$\left| \ln G \left( \frac{z}{a_n}; p_n \right) \right| < \frac{1}{1-q} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1}$$

y de la convergencia uniforme de la serie (1.7) en el círculo  $|z| \leq R$ , se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln G \left( \frac{z}{a_n}; p_n \right)$$

converge uniformemente en cada conjunto acotado y cerrado que no contiene los puntos  $a_n$ . Utilizando el Teorema 1.1.11, obtenemos la convergencia del producto (1.8).  $\square$

En el siguiente teorema utilizaremos  $\omega$  cuyo valor depende de cada función entera. Si  $f$  tiene un número finito  $N \in \mathbb{N}$  de raíces no nulas, entonces  $\omega = N$ . De lo contrario  $\omega = \infty$ .

**Teorema 1.2.13.** (*Weierstrass*) *Para una función entera  $f$  existe una sucesión  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  tal que  $f$  puede ser representada en la forma*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G \left( \frac{z}{a_n}; p_n \right), \quad (1.9)$$

donde  $a_n$  son las raíces no nulas de  $f$  repetidas respecto a su multiplicidad,  $g(z)$  es una función entera y  $m$  es el orden de los ceros en el origen.

*Demostración.* Los ceros no nulos  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \omega \leq \infty$ ) de la función  $f(z)$  no tiene punto límite finito. Formemos el producto

$$\prod_{n=1}^{\omega} G \left( \frac{z}{a_n}; p_n \right),$$

donde  $p_n = 0$  si  $\omega$  es finito y si  $\omega = \infty$ , entonces se escoge la sucesión  $p_n$  suficientemente grande. Defínase la función

$$\varphi(z) := \frac{f(z)}{z^m \prod_{n=1}^{\omega} G \left( \frac{z}{a_n}; p_n \right)}, \quad (1.10)$$

en la cual  $\varphi(z)$  es el cociente de funciones enteras cuyos ceros coinciden, entonces  $\varphi(z)$  es entera y sin ceros. Por lo tanto la función

$$\varphi(z) = e^{g(z)}, \quad (1.11)$$

(véase [23, Cap. 9, Sec. 43, T. 7]) donde  $g(z)$  es una función entera. Sustituyendo (1.10) en (1.11) y despejando debidamente  $f(z)$  se obtiene (1.9).  $\square$

**Teorema 1.2.14.** *Una función entera que no es constante y que no crece más rápido que cualquier función entera de tipo minimal de orden uno, tiene ceros. (Que una función entera  $f$  no crece más rápido que una función entera  $g$  significa que  $M_f(r) \leq M_g(r)$  para  $r$  suficientemente grande.)*

*Demostración.* Sea  $f(z)$  una función entera que no es constante y que no crece más rápido que una función entera de tipo minimal de orden uno. Debido a el Teorema 1.2.13, se expresa  $f(z)$  como en la ecuación (1.9). Suponga que  $f(z)$  no tiene ceros, entonces  $f(z)$  queda en la forma

$$f(z) = e^{g(z)},$$

(véase [23, Cap. 9, Sec. 43, T. 7]) donde  $g(z)$  es una función entera. Definamos  $\tilde{f}(z) = e^{g_0 + g_1 z}$ , donde  $g_0 = g(0)$  y

$$g_1 = \begin{cases} g'(0) & \text{si } g'(0) \neq 0 \\ f(0) & \text{si } g'(0) = 0. \end{cases}$$

Para cualquier función entera  $g(z)$  que no es constante

$$M_{\tilde{f}}(r) \leq M_f(r),$$

para  $r$  suficientemente grande. Pero claramente  $\tilde{f}$  es una función de tipo normal y orden uno.  $\square$

**Definición 1.2.15.** Sea  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión como en el Lema 1.2.12 y enumerada como en el Lema 1.2.12.

$$C_a := \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| \leq r} \frac{1}{|a_n|^\gamma} < \infty \right\}.$$

El exponente de convergencia de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  esta dado por

$$\varrho_a := \inf C_a.$$

Suponga que  $C_a \neq \emptyset$  y sea

$$p_a := \min \left\{ p \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \infty \right\}.$$

**Lema 1.2.16.** *Suponga que  $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es tal que  $C_a \neq \emptyset$ . Entonces la representación (1.9) se puede escribir, en este caso, con  $p_n = p$ . Ya que el producto en (1.9) es uniformemente convergente en compactos de  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Veamos que el producto en (1.8) es uniformemente convergente estimando  $|\ln G(u; p)|$ , para  $|u| \leq q$ , con  $q < 1$  y  $|\arg(1 - u)| \leq \pi$ . Expandiendo en serie obtenemos que

$$\ln G(u; p) = -\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \dots,$$

bajo las condiciones indicadas se sigue que

$$\begin{aligned} |\ln G(u; p)| &= \left| \frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2} + \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{u^{p+1}}{p+1} \right| + \left| \frac{u^{p+2}}{p+2} \right| + \dots \\ &< |u^{p+1}| + |u^{p+2}| + \dots \\ &= \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|} \\ &\leq \frac{1}{1-q} |u|^{p+1}. \end{aligned}$$

Si  $z$  está en un compacto, entonces para  $n$  suficientemente grande existe  $q < 1$  tal que  $\left| \frac{z}{a_n} \right| < q$ . Tomemos la suma sobre la desigualdad anterior para  $u_k$  sustituyendo  $u_k = \frac{z}{a_k}$ . De la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\ln G(u_k; p)| &< \frac{1}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^{p+1} \\ &= \frac{|z|^{p+1}}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} < \infty. \end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln G\left(\frac{z}{a_k}; p\right)$  y usando el Teorema 1.1.11, se sigue la convergencia uniforme de  $\prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right)$   $\square$

**Teorema 1.2.17.** Sean  $\varrho_a$  y  $p_a$  como en la Definición 1.2.15. Entonces

$$p_a \leq \varrho_a \leq p_a + 1. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Supongamos que  $p_a > \varrho_a$ . De la Definición 1.2.15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p_a}} < \infty,$$

pero esto implica que  $p_a = p_a - 1$  lo cual sería una contradicción.

Ahora, supongamos que  $p_a + 1 < \varrho_a$ . Por definición  $p_a + 1$  satisface

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p_a+1}} < \infty,$$



entonces se encontró un elemento más pequeño que  $\varrho_a$  que satisface la convergencia de la serie anterior, pero esto contradice la Definición 1.2.15.  $\square$

La afirmación que sigue en el Teorema 1.2.18 es conocida y usada sin dar su demostración (véase por ejemplo [16, T.1]). La demostración que se proporciona muestra que no es un hecho trivial y que se requieren dos resultados de teoría de funciones que se enuncian más adelante sin demostración. Estos resultados se pueden consultar en: [19, Cap. 1, Sec. 10, T. 13] el Teorema I y el Teorema II en [19, Cap. 1, Sec. 10, T. 15].

**Teorema I.** (Hadamard) Sea  $f$  función entera de orden finito  $\rho$  y sean  $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  los ceros no nulos de  $f$  ordenados como en el Lema 1.2.12. Entonces  $C_a \neq \emptyset$  y  $f$  puede ser representada en la forma

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n}; p\right) \quad (1.13)$$

donde  $a_n$  son los ceros no nulos de  $f$ ,  $p_a \leq \rho$  (Definición 1.2.15),  $P(z)$  es un polinomio cuyo grado  $q$  que no excede  $\rho$  y  $m$  es la multiplicidad de los ceros de  $f$  en el origen.

**Teorema II.** (Lindelöf) Sea  $f$  una función entera de orden finito  $\rho > 0$  y  $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  los ceros no nulos de  $f$  ordenados como en el Lema 1.2.12. Y sean

$$\Delta_f := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{\nu \in \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} : |\nu| < r\})}{r^\rho}$$

$$\delta_f := \limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \alpha + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-\rho} \right|,$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de  $z^\rho$  en  $P(z)$  de (1.13).

1. Si en (1.13)  $p_a = \rho \geq 1$ , entonces para  $\max(\Delta_f, \delta_f) = 0$  la función  $f$  es de tipo minimal, para  $0 < \max(\Delta_f, \delta_f) < \infty$  es de tipo normal y para  $\max(\Delta_f, \delta_f) = \infty$  es de tipo maximal.
2. Si en (1.13)  $p_a < \rho$ , entonces el tipo es igual al coeficiente de  $z^\rho$  en  $P(z)$  de (1.13).

**Teorema 1.2.18.** Sea  $f$  una función entera con un número infinito de ceros y que no crece más rápido que cualquier función entera de tipo minimal de orden uno. Supongamos que los elementos de la sucesión  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son las raíces no nulas de  $f$  repetidas respecto a su multiplicidad, y  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  es el orden de los ceros de  $f$  en el origen. Entonces existe un número complejo  $C$  tal que

$$f(z) = Cz^m \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), \quad (1.14)$$

donde el límite converge uniformemente en conjuntos compactos de  $\mathbb{C}$  que no contienen puntos  $a_n$ .

*Demostración.* Primero note que como  $\rho \leq 1$  y tomando en cuenta el Teorema I, se sigue que  $p_a = 0$  ó  $p_a = 1$ , por lo que, la expansión de  $f$  en un producto canónico tiene la forma

$$f(z) = z^m e^{cz+d} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; 0\right), \quad c, d \in \mathbb{C} \quad (1.15)$$

o

$$f(z) = z^m e^{cz+d} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; 1\right), \quad (1.16)$$

Supongamos que tiene lugar (1.16). Entonces  $p_a = 1 = \rho$  y como  $f$  no crece más rápido que una función de tipo minimal de orden uno del Teorema II, se tiene que  $\delta_f = 0$ , por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| \leq r} a_n^{-1} = -c. \quad (1.17)$$

Donde  $c$  aparece en (1.16). Esto implica la convergencia uniforme de la serie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| \leq r} \frac{z}{a_n}$$

en compactos de  $\mathbb{C}$  y a su vez que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

es uniformemente convergente en cualquier compacto de  $\mathbb{C}$ . De esta forma, usando (1.17) tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; 1\right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} G\left(\frac{z}{a_n}; 1\right) \\ &= e^{-cz} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \end{aligned}$$

Concluyendo que la ecuación (1.16) puede ser escrita como (1.14). Ahora, suponga que tiene lugar (1.15). Entonces tenemos que  $0 = p_a < \rho$  o  $0 = p_a = \rho$ . Si  $0 = p_a = \rho$ , del

Teorema I se sigue que  $q = 0$ , por lo que tenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}; 0\right) \\ &= Cz^m \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} G\left(\frac{z}{a_n}; 0\right) \\ &= Cz^m \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{|a_n| \leq r} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \end{aligned}$$

Si  $0 = p_a < \rho$ , entonces  $q = 0$  o  $q = 1$  en el Teorema I. Si  $q = 0$ , regresamos al resultado anterior. Finalmente, puesto que  $p_a < \rho$ , del Teorema II tenemos que  $q$  es siempre igual a cero, ya que  $q$  no excede  $\rho$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Espacios de Hilbert

En este capítulo trataré los conceptos básicos de espacios de Hilbert y sus propiedades. Además, algunos resultados fundamentales en la teoría de espacios de Hilbert como: Teorema de Pitágoras, Teorema de Proyección, entre otros. Para el desarrollo de este capítulo nos basamos en los libros [3] y [5].

### 2.1. Geometría del espacio de Hilbert

En esta sección veremos lo necesario para definir un espacio de Hilbert.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathcal{L}$  un espacio lineal sobre  $\mathbb{C}$ . Defínase una función de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  a  $\mathbb{C}$  que cumple:

1. Para todo  $f, g \in \mathcal{L}$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

2. Para  $h \in \mathcal{L}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle,$$

3. Para todo  $f \neq 0$ ,

$$\langle f, f \rangle > 0.$$

A esta función se le llama producto interior.

**Definición 2.1.2.** Un espacio lineal  $\mathcal{L}$  dotado con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un espacio pre-Hilbert.

**Teorema 2.1.3.** Para cualesquiera  $f, g \in \mathcal{L}$  se cumple que

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \tag{2.1}$$

*Demostración.* Sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $f, g \in (\mathcal{L}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\alpha f - \beta g\|^2 = \langle \alpha f - \beta g, \alpha f - \beta g \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle f, f \rangle - \bar{\alpha}\beta \langle f, g \rangle - \bar{\beta}\alpha \langle g, f \rangle + |\beta|^2 \langle g, g \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ahora, se escoge  $\alpha = \langle f, g \rangle$  y  $\beta = \langle f, f \rangle$ , entonces la ecuación (2.2) queda de la forma:

$$\begin{aligned} &|\langle f, g \rangle|^2 \langle f, f \rangle - \overline{\langle f, g \rangle} \langle f, f \rangle \langle f, g \rangle \\ &\quad - \langle f, f \rangle \langle f, g \rangle \langle g, f \rangle + \langle f, f \rangle^2 \langle g, g \rangle \end{aligned}$$

Agrupando y reduciendo términos semejantes

$$0 \leq \langle f, f \rangle^2 \langle g, g \rangle - \langle f, f \rangle |\langle f, g \rangle|^2$$

□

**Corolario 2.1.4.** *Para todo  $f$  y  $g$  en  $\mathcal{L}$  se cumple que*

$$\langle f + g, f + g \rangle^{1/2} \leq \langle f, f \rangle^{1/2} + \langle g, g \rangle^{1/2}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \langle f + g, f + g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &\leq \langle f, f \rangle + 2 |\langle f, g \rangle| + \langle g, g \rangle \\ &\leq \langle f, f \rangle + 2 \langle f, f \rangle^{1/2} \langle g, g \rangle^{1/2} + \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle \end{aligned}$$

□

**Definición 2.1.5.** En el espacio lineal  $\mathcal{L}$  se puede definir una norma a partir de producto interior como sigue:

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$$

La definición de norma es correcta; ya que, se satisfacen los axiomas de la norma. Tenemos que la norma dada en la Definición 2.1.5, tomando en consideración la Definición 2.1.1, cumple la propiedad de positividad estricta y de homogeneidad. Además, como consecuencia del Corolario 2.1.4, se cumple la desigualdad del triángulo, por lo cual, se puede decir que la norma dada a partir de un producto interior está bien definida y cumple las propiedades de norma.

**Definición 2.1.6.** Un espacio es completo sii toda sucesión de Cauchy (fundamental) es convergente en él.

**Definición 2.1.7.** Si un espacio pre-Hilbert es completo con respecto a la norma inducida por el producto interior, entonces decimos que es un Hilbert. Denotaremos genéricamente por  $\mathcal{H}$  a los espacios de Hilbert.

**Definición 2.1.8.** Sea  $F \subset \mathcal{H}$ ,  $F$  es subespacio de  $\mathcal{H}$  sii  $F$  es un espacio lineal y un conjunto cerrado en  $\mathcal{H}$ .

**Definición 2.1.9.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$ . Diremos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $f \in \mathcal{H}$ , si

$$\langle f_n, g \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle,$$

para toda  $g \in \mathcal{H}$ .

*Comentario 2.1.10.* Notemos que un subespacio de un espacio de Hilbert es en sí un espacio de Hilbert.

**Definición 2.1.11.** Considere el conjunto  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  dado por

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} := \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in \mathcal{H}\}$$

Definiendo en él las operaciones de suma de los elementos  $\hat{f} = (f_1, f_2)$  y  $\hat{g} = (g_1, g_2)$  en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , y la multiplicación por escalares como sigue  $\alpha \hat{f} + \beta \hat{g} := (\alpha f_1 + \beta g_1, \alpha f_2 + \beta g_2)$ , se verifica que  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  es un espacio lineal. Se define un producto interior en este espacio de la siguiente forma: para toda  $\hat{f} = (f_1, f_2), \hat{g} = (g_1, g_2) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ,

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} := \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}}$$

**Teorema 2.1.12.**  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert

*Demostración.* Sea  $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  una sucesión fundamental entonces para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} < \epsilon$  si  $N \leq n, m$ . Así, si  $\hat{f}_k = (f_{1k}, f_{2k})$ , entonces

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &> \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}^2 \\ &= \|f_{1n} - f_{1m}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f_{2n} - f_{2m}\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

esto dice que por separado  $\{f_{1k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  y  $\{f_{2k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  son fundamentales, por lo cual existen  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$  tales que  $f_{1k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_1$  y  $f_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_2$ . Claramente,  $(f_1, f_2) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  es el límite de la sucesión  $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ .  $\square$

## 2.2. Sistemas ortonormales y bases ortonormales

En este apartado consideré sistemas ortogonales y ortonormales en un espacio  $\mathcal{H}$ . El concepto de base ortonormal nos permite saber la dimensión del espacio y dar isomorfismos entre espacios, entre otras cosas. **Notación.** En esta sección, por medio de  $I$ , se denotará el subconjunto de los naturales dado por

$$I := \{m \in \mathbb{N} : m \leq N\} \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

**Definición 2.2.1.** Dos elementos  $x, y \in \mathcal{H}$  son ortogonales sii  $\langle x, y \rangle = 0$ . En notación  $x \perp y$ . Usaremos también la notación  $x \perp F$  ( $F \subset \mathcal{H}$ ) cuando  $\langle x, f \rangle = 0$  para toda  $f \in F$ .

**Definición 2.2.2.** (Sistema ortonormal) Sea  $\{a_k\}_{k \in I}$  una sucesión de elementos en  $\mathcal{H}$ . Decimos que  $\{a_k\}_{k \in I}$  es un sistema ortonormal (s.o.n) si  $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{i,j}$ , donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker.

Note que los elementos de un sistema ortonormal son ortogonales por parejas y tienen norma igual a 1

**Teorema 2.2.3.** (Pitágoras) Sea  $\{f_k\}_{k=1}^n, n \in \mathbb{N}$ , tal que para toda  $i, j \leq n, i \neq j$ ,  $f_i \perp f_j$ , entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|f_k\|^2. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Para  $n = 2$  tenemos

$$\|f_1 + f_2\|^2 = \langle f_1 + f_2, f_1 + f_2 \rangle = \|f_1\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f_1, f_2 \rangle + \|f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2. \quad (2.4)$$

De aquí podemos extender la igualdad (2.4), en general para  $n \in \mathbb{N}$  por inducción hasta obtener (2.3).  $\square$

**Definición 2.2.4.** Sea  $\{u_k\}_{k \in I}$  un s.o.n. Si para toda  $h \in \mathcal{H}$  se cumple  $\|h\|^2 = \sum_{k \in I} |\langle u_k, h \rangle|^2$ , entonces  $\{u_k\}_{k \in I}$  es cerrado.

**Teorema 2.2.5.** Fijemos  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathcal{H}$ ,  $\{u_k\}_{k \in I}$  s.o.n. y sea  $\alpha_k := \langle h, u_k \rangle$ . Entonces

$$\left\| h - \sum_{k=1}^N \beta_k u_k \right\| \geq \left\| h - \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \right\| \quad (2.5)$$

para toda  $\{\beta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$  la igualdad tiene lugar cuando  $\alpha_k = \beta_k$  para toda  $k = 1, \dots, N$ . Además,

$$\left\| h - \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \right\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 \quad (2.6)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \left\| h - \sum_{k=1}^N \beta_k u_k \right\|^2 &= \left\langle h - \sum_{k=1}^N \beta_k u_k, h - \sum_{k=1}^N \beta_k u_k \right\rangle \\ &= \|h\|^2 + \sum_{k=1}^N |\beta_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \beta_k \overline{\alpha_k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$= \|h\|^2 - \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^N |\beta_k - \alpha_k|^2 \quad (2.8)$$

Para pasar de (2.7) a (2.8) se utilizó que  $|\beta_k - \alpha_k|^2 = |\beta_k|^2 + |\alpha_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \beta_k \overline{\alpha_k}$ . Suponiendo que  $\beta_k = \alpha_k$  para toda  $k$ , se obtiene inmediatamente de (2.8) que tiene lugar (2.6). Asimismo de (2.8) y (2.6), se obtiene la desigualdad (2.5).  $\square$

**Corolario 2.2.6.** (*Desigualdad de Bessel*) Sea  $\{u_k\}_{k \in I}$  s.o.n y  $h \in \mathcal{H}$ , entonces, para cualquier  $N \in I$ , se cumple  $\sum_{k=1}^N |\langle h, u_k \rangle|^2 \leq \|h\|^2$ . En particular, si  $I = \mathbb{N}$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, u_k \rangle|^2$  converge y la desigualdad se conserva en este caso.

*Demostración.* La demostración es directa del Teorema anterior.  $\square$

**Teorema 2.2.7.** Sea  $\{u_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{H}$  un sistema ortonormal, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.

$$\overline{\operatorname{span}\{u_k\}} = \mathcal{H} \quad (2.9)$$

2. Para toda  $h$  en  $\mathcal{H}$

$$\|h\|^2 = \sum_{k \in I} |\langle h, u_k \rangle|^2 \quad (2.10)$$

3. Para toda  $h$  en  $\mathcal{H}$

$$h = \sum_{k \in I} \langle h, u_k \rangle u_k \quad (2.11)$$

*Demostración.* Demostraremos el caso cuando  $I$  es infinito. El caso  $I$  finito es aún más simple. 1)  $\Rightarrow$  2). Suponga  $h \in \overline{\operatorname{span}\{u_k\}}$ , entonces para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| h - \sum_{k=1}^N \beta_k u_k \right\| < \epsilon$$



con  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ . Por el Teorema 2.2.5 se tiene que ( $\alpha$  definida como en ese mismo Teorema)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| h - \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \right\| \leq \left\| h - \sum_{k \in I} \beta_k u_k \right\| < \epsilon \\ 0 &\leq \left\| h - \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k \right\| < \epsilon \\ 0 &\leq \|h\|^2 - \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 < \epsilon \end{aligned}$$

2)  $\Rightarrow$  3). De (2.6) se sigue que

$$0 = \|h\|^2 - \sum_{k \in I} |\alpha_k|^2 = \left\| h - \sum_{k \in I} \alpha_k u_k \right\|^2 \quad (2.12)$$

3)  $\Rightarrow$  1). Esta afirmación es directa ya que estamos expresando un elemento de  $\mathcal{H}$  como un límite de una combinación lineal del s.o.n.  $\square$

**Definición 2.2.8.** Un sistema ortonormal (s.o.n)  $\{u_k\}_{k \in I}$  es una base ortonormal (b.o.n) sii  $\{u_k\}_{k \in I}$  satisface alguna afirmación del Teorema 2.2.7.

**Lema 2.2.9.** Si en  $\mathcal{H}$  existe  $\{u_k\}_{k \in I}$  una b.o.n, entonces  $\mathcal{H}$  es separable.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{N}$  el conjunto de las combinaciones lineales de la forma

$$\sum_{k=1}^s \gamma_k u_k \quad (s \in \mathbb{N}),$$

donde para toda  $k$ ,  $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$  y  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}$ . Claramente  $\mathcal{N}$  es numerable. Ahora, como  $\{u_k\}_{k \in I}$  es una b.o.n, para toda  $h \in \mathcal{H}$  y para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que,

$$\left\| h - \sum_{k=1}^N \langle h, u_k \rangle u_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.13)$$

Como cualquier número complejo es aproximable con números de la forma,  $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$  y  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}$ , entonces escogamos  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) tales que

$$\left\| \sum_{k=1}^N \{\langle h, u_k \rangle - \gamma_k\} u_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Así, si

$$f := \sum_{k=1}^N \gamma_k u_k \in \mathcal{N},$$

las ecuaciones (2.13) y (2.14) implican

$$\|h - f\| < \epsilon.$$

Esto significa que  $\mathcal{H}$  es separable.  $\square$

**Lema 2.2.10.** *Sea  $\{u_k\}_{k \in I}$  un s.o.n, entonces  $\{u_k\}_{k \in I}$  es linealmente independiente.*

*Demostración.* Sea  $\tilde{I}$  cualquier subconjunto finito de  $I$ . Sea  $\{\alpha_k\}_{k \in \tilde{I}}$ , una colección de números complejos tal que

$$\sum_{k \in \tilde{I}} \alpha_k u_k = 0.$$

Ya que  $\{u_k\}_{k \in I}$  es un s.o.n se tiene,

$$0 = \left\| \sum_{k \in \tilde{I}} \alpha_k u_k \right\|^2 = \sum_{k \in \tilde{I}} |\alpha_k|^2,$$

entonces  $\alpha_k = 0$ , para toda  $k \in \tilde{I}$ .  $\square$

**Lema 2.2.11.** *Si  $\mathcal{H}$  es separable, entonces existe una b.o.n en  $\mathcal{H}$*

*Demostración.* Como  $\mathcal{H}$  es separable, entonces existe  $M \subset \mathcal{H}$  tal que  $\text{card}(M) = \text{card}(\mathbb{N})$ ,  $\overline{M} = \mathcal{H}$ . Ahora, sea  $Q \subset M$  el conjunto que se obtiene de eliminar de  $M$  aquellos elementos que se expresan como combinación lineal del resto de los elementos de  $M$ ; de manera que, se cumple que  $\overline{\text{span } Q} = \mathcal{H}$  y que  $Q$  es linealmente independiente. Claramente  $Q$  es numerable así que podemos considerar que  $Q$  es una sucesión finita o infinita, es decir,

$$Q = \{f_k\}_{k \in I}.$$

El siguiente paso es aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la sucesión  $Q$ . Tomemos  $f_1 \in Q$  y definamos

$$\hat{f}_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

donde es claro que  $\|\hat{f}_1\| = 1$ . Ahora, tome  $f_2 \in Q$  y defina

$$\bar{f}_2 := f_2 - \langle f_2, \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_1$$

normalizando y renombrando  $\bar{f}_2$ , se obtiene

$$\hat{f}_2 = \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|}.$$

Fácilmente, se tiene que

$$\langle \hat{f}_2, \hat{f}_1 \rangle = \langle f_2, \hat{f}_1 \rangle - \langle f_2, \hat{f}_1 \rangle = 0.$$

El proceso continúa tomando  $f_3 \in Q$  y definiendo

$$\bar{f}_3 = f_3 - \langle f_3, \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_1 - \langle f_3, \hat{f}_2 \rangle \hat{f}_2$$

después de normalizar como se hizo anteriormente, se obtiene  $\hat{f}_3$ . Claramente,

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}_3, \hat{f}_1 \rangle &= \langle f_3, \hat{f}_1 \rangle - \langle f_3, \hat{f}_1 \rangle = 0 \\ \langle \hat{f}_3, \hat{f}_2 \rangle &= \langle f_3, \hat{f}_2 \rangle - \langle f_3, \hat{f}_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Una vez que se tienen construidos  $\{\hat{f}_k\}_{k=1}^{s-1}$  podemos definir

$$\bar{f}_s = f_s - \sum_{n=1}^{s-1} \langle f_s, \hat{f}_n \rangle \hat{f}_n,$$

normalizando se obtiene,  $\hat{f}_s$ . Como se hizo antes se verifica que,  $\hat{f}_s \perp \hat{f}_i$  para todo  $i \leq s-1$ . Además observamos que, para todo  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\text{span}\{\hat{f}_k\}_{k=1}^s = \text{span}\{f_k\}_{k=1}^s$ . Ya que para toda  $j \leq s$ ,  $\hat{f}_j$  está en  $\text{span}\{f_k\}_{k=1}^j$ . De esta forma construimos una sucesión finita o infinita  $\{\hat{f}_k\}_{k \in I}$ , cuyos elementos son ortogonales por parejas y están normalizados. Además,  $\text{span}\{\hat{f}_k\}_{k \in I} = \mathcal{H}$ . Por lo que  $\{\hat{f}_k\}_{k \in I}$  es una b.o.n.  $\square$

**Definición 2.2.12.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable y  $\mathcal{L}$  el espacio lineal Subyacente a  $\mathcal{H}$ . Si  $\dim \mathcal{L} < \infty$ , entonces  $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{L}$ . Si La dimensión de  $\mathcal{L}$  no es finita, entonces  $\dim \mathcal{H} = \infty$ .

**Teorema 2.2.13.** Toda b.o.n en un espacio de Hilbert separable tiene la misma cardinalidad y esa cardinalidad es igual a  $\dim \mathcal{H}$  cuando  $\dim \mathcal{H} < \infty$  e igual a la cardinalidad de  $\mathbb{N}$  cuando  $\dim \mathcal{H} = \infty$ .

*Demostración.* Suponga que  $\dim \mathcal{H} = m < \infty$ , entonces el máximo número de elementos un sistema linealmente independiente es  $m$ . Sea  $\{u_k\}_{k \in I}$  una b.o.n arbitraria en  $\mathcal{H}$ . Como los elementos de  $\{u_k\}_{k \in I}$  son linealmente independientes (por el Lema 2.2.10),  $\text{card}\{u_k\}_{k \in I} \leq m$ . Suponga que  $\text{card}\{u_k\}_{k \in I} < m$ , entonces  $\dim \text{span}\{u_k\} < \dim \mathcal{H}$  lo que nos dice que  $\text{span}\{u_k\} = \text{span}\{u_k\} \neq \mathcal{H}$  y por lo tanto  $\{u_k\}_{k \in I}$  no es b.o.n. De esta forma  $\text{card}\{u_k\}_{k \in I} = m$ . Ahora suponga que  $\dim \mathcal{H} = \infty$ . Como  $\mathcal{H}$  es separable por el Lema 2.2.11, existe una b.o.n  $\{u_k\}_{k \in I}$  en  $\mathcal{H}$  tal que  $\text{card}\{u_k\}_{k \in I}$  es finita o infinita numerable. Si es finita, entonces  $\dim \text{span}\{u_k\} < \infty$  y  $\{u_k\}_{k \in I}$  no puede ser base. Por lo tanto  $\{u_k\}_{k \in I}$  es infinita numerable.  $\square$

**Definición 2.2.14.** Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  espacios de Hilbert. Sea  $V : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  una función lineal y sobreyectiva, tal que para toda  $f \in \mathcal{H}_1$ ,  $\|f\|_1 = \|Vf\|_2$ ; entonces  $\mathcal{H}_1$  es isométricamente isomorfo con  $\mathcal{H}_2$ .

*Comentario 2.2.15.* Recordemos que cualquier función lineal  $V : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  no necesariamente sobreyectiva es isometría, si para cualquier  $f \in \mathcal{H}_1$  sucede

$$\|f\|_{\mathcal{H}_1} = \|Vf\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (2.15)$$

**Teorema 2.2.16.** *Los espacios de Hilbert separables  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son isométricamente isomorfos sii  $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$*

*Demostración.* Efectivamente, si son isométricamente isomorfos la función  $V$  manda elementos de una base ortonormal de  $\mathcal{H}_1$  en elementos de una base ortonormal de  $\mathcal{H}_2$  y su cardinalidad coincide. Por el Teorema 2.2.13 las dimensiones de los espacios coinciden. Recíprocamente, suponga que  $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$  y sean  $\{u_k\}_{k \in I}$  y  $\{v_k\}_{k \in I}$  bases de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente. Tomemos  $V : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  como sigue  $Vu_k := v_k$  y extendámosla por linealidad al  $\text{span}\{u_k\}_{k \in I}$ . Se comprueba fácilmente que  $\|Vf\|_2 = \|f\|_1$  para toda  $f \in \text{span}\{u_k\}_{k \in I}$ . Ahora extendamos  $V$  por continuidad a todo  $\mathcal{H}_1$ . Se verifica directamente que  $V$  es una función lineal, sobreyectiva e isométrica de  $\mathcal{H}_1$  a  $\mathcal{H}_2$  y por la Definición 2.2.14 los espacios son isométricamente isomorfos.  $\square$

## 2.3. Algunos teoremas fundamentales

Esta sección contiene conceptos ligados a como podremos descomponer elementos del espacio con base en un subespacio y como representar funcionales lineales.

**Teorema 2.3.1.** *(Teorema de proyección) Sea  $F$  un subespacio separable de  $\mathcal{H}$ , entonces se puede expresar toda  $h \in \mathcal{H}$  de manera única como:*

$$h = f + g \quad (f \in F \text{ y } g \perp F). \quad (2.16)$$

*Demostración.* Como  $F$  es subespacio, existe en el  $\{u_k\}_{k \in I}$  una b.o.n. Sea  $f \in F$ . Por el Teorema 2.2.7, se expresa como  $f := \sum_{k \in I} \langle f, u_k \rangle u_k$  y definimos  $g := h - f$

$$\left\langle h - \sum_{k \in I} \langle u_k, h \rangle u_k, u_j \right\rangle = \langle h, u_j \rangle - \langle h, u_j \rangle = 0, \quad (2.17)$$

con base en lo anterior afirmamos que  $g \perp F$ . Solo falta ver que esta expresión es única. Ahora, suponga que existen  $f_1, g_1$  tales que  $h = f_1 + g_1 = f + g$ . Claramente,  $0 = \|f_1 - f\|^2 + \|g_1 - g\|^2$  por lo que  $f_1 = f$  y  $g_1 = g$ , implicando que la representación es única.  $\square$

**Definición 2.3.2.** Sea  $\mathcal{G}$  un subconjunto de  $\mathcal{H}$ . Al conjunto

$$\mathcal{G}^\perp := \{f \in \mathcal{H} : f \perp \mathcal{G}\} \quad (2.18)$$

se le llama complemento ortogonal de  $\mathcal{G}$ .

**Lema 2.3.3.**  $\mathcal{G}^\perp$  es un subespacio.

*Demostración.* Sean  $h_1, h_2 \in \mathcal{G}^\perp$ ,  $f \in \mathcal{G}$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces

$$\langle \alpha h_1 + \beta h_2, f \rangle = \alpha \langle h_1, f \rangle + \beta \langle h_2, f \rangle = 0.$$

Por lo tanto  $\mathcal{G}^\perp$  es lineal. Ahora, sea  $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{G}^\perp$  convergente a  $h \in \mathcal{H}$ . Al aplicar el producto interior con  $f \in \mathcal{G}$ , se obtiene la sucesión  $\{\langle h_k, f \rangle\}_{k=1}^\infty$ , que es estacionaria y por continuidad del producto interior

$$0 = \langle h_k, f \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle h, f \rangle = 0,$$

lo que implica  $h \in \mathcal{G}^\perp$ . □

**Definición 2.3.4.** Sea  $F$  un subespacio de un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$ . El complemento ortogonal de  $F$  se denotara en este caso por  $\mathcal{H} \ominus F$ .

**Teorema 2.3.5.** (*Teorema de representación de F.Riesz*) Todo funcional lineal continuo  $\Phi$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  puede ser expresado de la forma:

$$\Phi(h) = \langle h, f \rangle, \quad (2.19)$$

donde  $f \in \mathcal{H}$  y es unívocamente determinado por el funcional  $\Phi$ .

*Demostración.* Denotaré por  $G$  al conjunto de las  $g \in \mathcal{H}$ , para las cuales  $\Phi(g) = 0$ . Por linealidad del operador  $\Phi$ , el conjunto  $G$  es lineal. Aun más,  $G$  es cerrado, entonces  $G$  es subespacio. En efecto, si  $g_n \in \mathcal{H}$  con  $n \geq 1$  y  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$ , entonces por continuidad de  $\Phi$

$$\Phi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(g_n),$$

por lo que  $\Phi(g) = 0$  y  $g \in \mathcal{H}$ , concluyendo que  $\Phi$  es cero en todas partes.

El teorema de Riesz es probado tomando  $f = 0$ . Ahora, supongamos  $G \neq \mathcal{H}$ . Entonces existe un elemento distinto de cero  $f_0 \in \mathcal{H} \ominus G$ . Consideremos un elemento de la forma

$$\Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h = 0, \quad (2.20)$$

con  $h$  recorriendo  $\mathcal{H}$ . El elemento descrito en (2.20) pertenece a  $G$  ya que

$$\Phi[\Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h] = \Phi(h)\Phi(f_0) - \Phi(f_0)\Phi(h) = 0.$$

Donde  $f_0 \in \mathcal{H} \ominus G$ ,

$$\langle \Phi(h)f_0 - \Phi(f_0)h, f_0 \rangle = 0$$

y

$$\Phi(h) = \left\langle h, \frac{\overline{\Phi(f_0)}}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0 \right\rangle.$$

Hacemos

$$f = \frac{\overline{\Phi(f_0)}}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0,$$

sustituyendo se obtiene la ecuación (2.19). Ahora, se proba que  $f$  es único. Suponga que existe  $f'$  tal que

$$\langle h, f \rangle = \langle h, f' \rangle,$$

con  $h \in \mathcal{H}$  y  $f \neq f'$ . Es imposible, ya que sustituyendo por  $h = f - f'$ , tendríamos

$$\|f - f'\|^2 = 0.$$

Contradiendo que  $f \neq f'$ . □

**Lema 2.3.6.** *Sea  $M \subset \mathcal{H}$  tal que  $\overline{M} = \mathcal{H}$  si  $f \perp M$ , entonces  $f = 0$*

*Demostración.* Antes de comenzar la prueba, observemos que si  $f \perp M$ , entonces  $f \perp \overline{M}$ . En efecto, sea  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$  tal que  $g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g \in \overline{M}$ . Claramente  $\langle f, g_k \rangle = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y la sucesión  $\{\langle f, g_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  es estacionaria y, por ende, convergente. Por otro lado, ya que el producto interior es continuo, tenemos

$$0 = \langle f, g_k \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle f, g \rangle = 0.$$

Por hipótesis  $\overline{M} = \mathcal{H}$ , osea que,  $f$  es ortogonal a todo  $\mathcal{H}$ , en particular es ortogonal a si mismo, es decir,  $\langle f, f \rangle = 0$ , lo que implica  $f = 0$ . □

**Teorema III.** *La sucesión de normas de una sucesión débilmente convergente es acotada.*

*Demostración.* La demostración de este resultado sigue de teoremas generales de la teoría en espacios de Banach, y tomando en cuenta la separabilidad del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Además, hay que tomar  $\mathcal{H}$  igual a su espacio dual  $\mathcal{H}^*$ . □

**Lema 2.3.7.** *Todo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es débilmente completo.*

*Demostración.* Sea  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy en el sentido de convergencia débil en  $\mathcal{H}$ , es decir, para cada  $h \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \langle f_n - f_m, h \rangle = 0.$$

Esto como consecuencia de que la sucesión de números  $\{\langle f_k, h \rangle\}_{k=1}^\infty$  converge para toda  $h \in \mathcal{H}$ . Ahora, del Teorema III, se sigue que para toda  $k \in \mathbb{N}$   $\|f_k\| \leq M$ . De esta manera, el límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, h \rangle$  define un funcional lineal  $\Phi(h)$  y continuó por la existencia del límite de la sucesión débilmente convergente, donde  $\Phi(h)$  tiene una norma menor o igual que  $M$ . De acuerdo al Teorema 2.3.5,  $\Phi(h) = \langle f, h \rangle$ , donde  $f$  es un elemento único en  $\mathcal{H}$ . Dicho elemento es el límite de la sucesión débilmente convergente  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ .  $\square$

**Teorema 2.3.8.** *La bola unitaria en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es débilmente compacta.*

*Demostración.* Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de la bola unitaria, es decir,  $\|f_k\| \leq 1$  para toda  $k \in \mathbb{N}$  y  $G = \text{span}\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Definamos  $F$  como  $F := \mathcal{H} \ominus G$ . Consideremos la siguiente sucesión  $\{\langle f_1, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$ , dicha sucesión es acotada. En efecto, por el Teorema 2.1.3 para toda  $k \in \mathbb{N}$ , se sigue que

$$|\langle f_1, f_k \rangle| \leq \|f_1\| \|f_k\| \leq 1.$$

Ya que  $\{\langle f_1, f_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada de números complejos, y por tanto es un precompacto, entonces existe una subsucesión  $\{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  para la cual el  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_1, f_{1k} \rangle$  existe. Similarmente, por el acotamiento de la sucesión  $\{\langle f_2, f_{1k} \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$  se tiene que  $\{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  contiene una subsucesión  $\{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  para la cual  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_2, f_{2k} \rangle$  existe. Repitiendo este argumento, se obtiene una sucesión infinita de sucesiones de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & = & \{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & = & \{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & = & \{f_{3k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

en el que cada renglón es una subsucesión del anterior. Entonces es claro que la sucesión de la diagonal  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ; Tiene la propiedad de que para cada  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_r, f_{kk} \rangle$  existe. Por lo tanto, se sigue que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, f_{kk} \rangle$  existe para cada  $f$  combinación lineal de elementos de  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Por lo tanto el límite anterior existe para cada  $f \in G$ . Ahora, si  $f \in F$ , entonces  $\langle f, f_{kk} \rangle = 0$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , es decir, la sucesión  $\{\langle f, f_{kk} \rangle\}_{k \in \mathbb{N}}$  es estacionaria. Tenemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, f_{kk} \rangle$  existe para toda  $f \in F$ . Dado que  $\mathcal{H} = F \oplus G$ , el resultado obtenido implica la existencia del  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle h, f_{kk} \rangle$  para toda  $h \in \mathcal{H}$ . Por lo cual la sucesión,  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en el sentido de convergencia débil; Aunque debido a la completitud débil del espacio (véase Lema 2.3.7), la sucesión  $\{f_{kk}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a un elemento que nombraremos  $f_0$  en la bola unitaria. En efecto,

$$1 \geq \|f_{kk}\| \geq \left| \left\langle f_{kk}, \frac{f_0}{\|f_0\|} \right\rangle \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|f_0\|.$$

$\square$

# Capítulo 3

## Operadores (en espacios de Hilbert)

En este capítulo se estudiará a fondo la idea de un operador y sus propiedades. Se dará un análisis detallado de los conceptos de operador adjunto, invertibilidad de un operador, gráfica de un operador, operador simétrico, isométrico, espectro de un operador, transformada de Cayley y extensiones von Neumann, todo esto desarrollado en espacios de Hilbert. En todos los casos consideraremos operadores lineales aunque en ocasiones no se mencione explícitamente. Para este capítulo nos basamos en los resultados de los libros [3], [5] y [29].

### 3.1. Nociones básicas

**Definición 3.1.1.** (Operador lineal) Decimos que  $T$  es un operador en  $\mathcal{H}$  si es una función definida en un subconjunto de  $\mathcal{H}$ , llamado el dominio de  $T$ , que denotaremos por  $\text{dom}(T)$ . Además, diremos que  $T$  es lineal si para toda  $x, y \in \text{dom}(T)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$T(\alpha f + \beta g) := \alpha T f + \beta T g.$$

El rango del operador  $T$ , denotado  $\text{ran}(T)$ , se define como:

$$\text{ran}(T) := T \text{dom}(T) = \{f \in \text{dom}(T) : T f = y\}$$

El núcleo de  $T$  está dado por el conjunto  $\{f \in \text{dom}(T) : T f = 0\}$ , es decir,

$$\ker(T) := \{f \in \text{dom}(T) : T f = 0\}$$

**Definición 3.1.2.** (Extensión de un operador) Sean  $T, \tilde{T}$  operadores lineales definidos en  $\mathcal{H}$  tales que

1.

$$\text{dom}(T) \subset \text{dom}(\tilde{T})$$



2. y para toda  $f \in \text{dom}(T)$

$$\tilde{T}f = Tf.$$

Así, decimos que  $\tilde{T}$  es extensión de  $T$  ( $\tilde{T} \supset T$ ) o bien que  $T$  es restricción de  $\tilde{T}$  ( $T \subset \tilde{T}$ ).

Para hacer más rápida la lectura, aclaro que todos los operadores que van a estar contenidos en este trabajo serán lineales.

**Definición 3.1.3.** (Suma de operadores lineales) Sean  $T$  y  $G$  dos operadores lineales con dominios  $\text{dom}(T)$  y  $\text{dom}(G)$  respectivamente en el mismo espacio  $\mathcal{H}$ . La suma de  $T$  y  $G$  esta dada por la relación

$$(T + G)f := Tf + Gf$$

con  $f \in \text{dom}(T) \cap \text{dom}(G)$ .

**Definición 3.1.4.** (Operador inverso) Denotaremos por  $T^{-1}$  al operador definido en  $\text{ran}(T)$  tal que  $T^{-1}(Tx) = x$  para toda  $x \in \text{dom}(T)$ .

Si  $T$  es un operador lineal, entonces  $T^{-1}$  también lo es, además  $\text{dom}(T^{-1}) = \text{ran}(T)$  y  $\text{dom}(T) = \text{ran}(T^{-1})$ . Nótese que de la definición del operador inverso inmediatamente se sigue que para toda  $y \in \text{ran}(T)$ ,  $T(T^{-1}y) = y$ .

**Teorema 3.1.5.** Sea  $T_1 \subset T_2$  y suponga que existe  $T_1^{-1}$ ,  $T_2^{-1}$ . Entonces  $T_1^{-1} \subset T_2^{-1}$ .

*Demostración.* Ya que  $T_1 \subset T_2$ , se tiene que  $\text{dom}(T_1) \subset \text{dom}(T_2)$  y para toda  $f \in \text{dom}(T_1)$ ,  $T_1f = T_2f$ , lo que implica que  $\text{ran}(T_1) \subset \text{ran}(T_2)$ , es decir,  $\text{dom}(T_1^{-1}) \subset \text{dom}(T_2^{-1})$ . Ahora, sea  $f \in \text{dom}(T_1^{-1})$  y  $g = T_1^{-1}f$ , entonces  $f = T_1g = T_2g$ , de donde aplicamos  $T_2^{-1}$  y obtenemos  $T_2^{-1}f = g$ , igualando ecuaciones resulta que  $T_1^{-1}f = T_2^{-1}f$ .  $\square$

**Teorema 3.1.6.** Un operador  $T$  es invertible sii  $\ker(T) = \{0\}$ .

*Demostración.* La demostración es directa de la definición 3.1.4.  $\square$

*Comentario 3.1.7.* Si  $T$  es invertible, entonces

$$\dim \text{dom}(T) = \dim \text{ran}(T).$$

**Definición 3.1.8.** (Operador acotado) Un operador  $T$  es acotado si existe  $C > 0$  tal que para todo  $x \in \text{dom}(T)$

$$\|Tx\| \leq C \|x\|.$$

**Definición 3.1.9.**  $B(\mathcal{H})$  es el conjunto de todos los operadores acotados que actúan en todo el espacio  $\mathcal{H}$ , es decir, para  $T \in B(\mathcal{H})$  se cumple la Definición 3.1.8 y además  $\text{dom}(T) = \mathcal{H}$ .

**Definición 3.1.10.** Un operador  $T \in B(\mathcal{H})$  se dice que es compacto si para cada conjunto lineal acotado  $F$  de  $\mathcal{H}$ , el conjunto  $\overline{\{Tf : f \in F\}}$  es compacto.

**Definición 3.1.11.** Vamos a denotar al conjunto de todos los operadores compactos en  $\mathcal{H}$  por  $S_\infty(\mathcal{H})$ .

Claramente,  $S_\infty(\mathcal{H})$  es lineal y  $S_\infty(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ .

**Teorema 3.1.12.** Sea  $T \in B(\mathcal{H})$ . Si  $T$  es de rango finito, es decir,

$$\dim \text{ran}(T) < \infty. \quad (3.1)$$

Entonces  $T$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $T$  tal que (3.1) se satisface. Tomemos una sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  acotada en  $\mathcal{H}$ . Entonces como  $T$  es un operador acotado,  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada y como sucede (3.1), entonces el conjunto  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está en un espacio de dimensión finita. Y esto quiere decir que dicho conjunto es relativamente compacto.  $\square$

**Definición 3.1.13.** (Operador de proyección) Del Teorema 2.3.1 (Teorema de proyección) y de la ecuación (2.16), se sigue que para cualquier subespacio  $F$  de un espacio  $\mathcal{H}$ , podemos definir el operador de proyección

$$P_F h := f,$$

con  $f$  y  $h$  como en la ecuación (2.16). El operador  $P_F$  es denominado proyector ortogonal con  $\text{dom}(P_F) = \mathcal{H}$  y  $\text{ran}(P_F) = F$ .

Notemos que  $P_F \in B(\mathcal{H})$ . En efecto, de la Definición 3.1.13, tenemos que el  $\text{dom}(P_F) = \mathcal{H}$ . Sea  $F$  subespacio de  $\mathcal{H}$  y  $h \in \mathcal{H}$ , del Teorema 2.3.1 tenemos que  $h = f + g$  con  $f \in F$  y  $g \perp F$ , por lo que

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \|f + g\|^2 \\ &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2 \text{Re} \langle f, g \rangle, \end{aligned}$$

ya que  $f \perp g$ , tenemos

$$\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2,$$

sustituyendo  $f$  por  $P_F h$ , nos queda

$$\|h\|^2 = \|P_F h\|^2 + \|g\|^2,$$

implica

$$\|P_F h\| \leq \|h\|.$$

Cumpléndose la Definición 3.1.8 con  $C = 1$ , por lo tanto  $P_F \in B(\mathcal{H})$ .

**Lema 3.1.14.** Sea  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subespacios ortogonales entre sí en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $f \in \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ , y  $P_j$  el proyector en  $F_j$ . Entonces

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k f \quad (3.2)$$

*Demostración.* Sea  $f \in \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ , entonces  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f_k$  con  $f_k \in F_k$ . Si  $P_j$  es el proyector en  $F_j$ , se sigue que  $P_j f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k P_j f_k = \alpha_j f_j$ . Por lo tanto (3.2) tiene lugar.  $\square$

**Teorema 3.1.15.** Sea  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subespacios ortogonales entre sí en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $P$  el proyector en  $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ , y  $P_k$  el proyector en  $F_k$ . Entonces para toda  $f \in \mathcal{H}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n P_k \right) f = P f$$

*Demostración.* Sea  $f \in \mathcal{H}$ . Utilizando el Teorema 2.3.1 expresamos  $f = f_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j f_j$  con  $f_k \in F_k$  y  $f_0 \in \mathcal{H} \ominus \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left\| P f - \sum_{k=1}^n P_k f \right\|^2 &= \left\| P f - \sum_{k=1}^n P_k \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j f_j \right) \right\|^2 \\ &= \left\| P \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j f_j \right) - \sum_{k=1}^n P_k \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j f_j \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j f_j - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k f_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |\alpha|^2 \|f_k\|^2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad en la ecuación anterior es válida por el Teorema 2.2.3 y para  $n$  suficientemente grande  $\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha|^2 \|f_k\|^2 < \epsilon$ .  $\square$

**Lema 3.1.16.** Sean  $F$  y  $G$  subespacios separables de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si la  $\dim(G) > \dim(F)$ , entonces existe  $g \in G$ ,  $g \neq 0$ , tal que  $g \perp F$ .

*Demostración.* Suponga  $\dim(G) > \dim(F)$ . Sea  $h \in \mathcal{H}$  y tomemos un operador de proyección como en la Definición 3.1.13, tal que  $P_F : \mathcal{H} \rightarrow F$ . Sea  $\tilde{P}_F = P_F \upharpoonright_G$ . Suponga  $\ker(\tilde{P}_F) \neq \{0\}$ , entonces existe  $g \in \ker(\tilde{P}_F)$ ,  $g \neq 0$ , tal que  $\tilde{P}_F g = 0$ . Por el Teorema 2.3.1 escribimos  $g = \tilde{P}_F g + f' = f'$  con  $\tilde{P}_F g \in F$  y  $f' \perp F$ , por lo que  $g \perp F$ . Ahora, si suponemos que  $\ker(\tilde{P}_F) = \{0\}$ , implica que  $\tilde{P}_F^{-1}$  existe. Pero por el Comentario 3.1.7, tenemos que  $\dim(G) = \dim(F)$ . Esto contradice la hipótesis  $\dim(G) > \dim(F)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.17.** Sea  $T$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ .  $T$  tiene inverso acotado sii existe  $C > 0$  tal que

$$\|Tx\| \geq C \|x\|. \quad (3.3)$$

*Demostración.* Suponga que (3.3) es válido, entonces  $\ker(T) = \{0\}$ . Por lo tanto  $T^{-1}$  existe. Sustituyendo  $Tx = y$  en (3.3), obtenemos que para toda  $y \in \text{dom}(T^{-1}) = \text{ran}(T)$ ,

$$\|y\| \geq C \|T^{-1}y\|.$$

Por lo tanto  $\|T^{-1}x\| \leq C^{-1} \|y\|$ . Recíprocamente, suponga que existe  $T^{-1}$  y es acotado. Entonces existe una constante  $C'$  tal que  $\|T^{-1}y\| \leq C' \|y\|$ . Si hacemos  $x = T^{-1}y$  obtenemos (3.3) con  $C = \frac{1}{C'}$ .  $\square$

El Teorema 3.1.17 nos da la existencia de inversos acotados, cuyo uso e importancia será tratado posteriormente en el texto.

**Definición 3.1.18.** (Gráfica de un operador) Al operador  $T$  en  $\mathcal{H}$  le podemos asociar el conjunto  $\{(x, Tx) : x \in \text{dom}(T)\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  que llamaremos gráfica de  $T$  y denotaremos por  $G(T)$ . Así,  $G(T) := \{(x, Tx) : x \in \text{dom}(T)\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ .

**Definición 3.1.19.** (Operador cerrado)  $T$  es cerrado sii  $\overline{G(T)} = G(T)$

**Teorema 3.1.20.**  $T$  es cerrado sii del hecho de que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{dom}(T)$  sea tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  se sigue que  $x \in \text{dom}(T)$  y  $y = Tx$ .

*Demostración.* Suponga  $\overline{G(T)} = G(T)$ , sea  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{dom}(T)$ , tal que

$$\begin{aligned} x_k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \\ Tx_k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \end{aligned}$$

Así, construimos la sucesión  $\{(x_k, Tx_k)\}_{k=1}^{\infty}$ , esta sucesión esta en  $G(T)$ , ya que así definimos a la gráfica que claramente es convergente en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , es decir,

$$(x_k, Tx_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x, y) \in G(T),$$

ya que  $G(T) = \overline{G(T)}$ , entonces  $x \in \text{dom}(T)$  y  $y = Tx$ . Recíprocamente, suponga que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \text{dom}(T)$  es tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$  se sigue que  $x \in \text{dom}(T)$  y  $y = Tx$ , análogamente como se hizo en la parte anterior de la demostración formamos pares ordenados creando así un nueva sucesión, que en efecto esta en  $G(T)$ , es decir,  $\{(x_k, Tx_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset G(T)$ , se comprueba fácilmente que esta sucesión es convergente en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , por hipótesis  $x \in \text{dom}(T)$  y  $y = Tx$  lo que implica que  $(x, y) \in G(T)$ , lo cual nos dice que  $G(T)$  es cerrada.  $\square$

**Teorema 3.1.21.** Un operador continuo  $T$  es cerrado sii  $\text{dom}(T)$  es cerrado en  $\mathcal{H}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\text{dom}(T)$  es cerrado en  $\mathcal{H}$ . Tomemos una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de elementos en  $\text{dom}(T)$  tal que existe  $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \\ Tx_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y. \end{aligned}$$

Claramente, ya que  $\text{dom}(T)$  es cerrado  $x \in \text{dom}(T)$ . Además,  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$  por que  $T$  es continuo, entonces  $y = Tx$ . Por lo tanto,  $T$  es cerrado por el Teorema 3.1.20. Recíprocamente. Suponga que  $\text{dom}(T)$  no es cerrado. Entonces existe  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{dom}(T)$  convergente en  $\mathcal{H}$  tal que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \notin \text{dom}(T).$$

Como  $T$  es continuo, implica  $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$  es convergente en  $\mathcal{H}$ . O sea que tenemos una sucesión para la cual

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in \mathcal{H} \\ Tx_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

como  $x \notin \text{dom}(T)$ , implica  $T$  no puede ser cerrado.  $\square$

**Definición 3.1.22.** Sea  $U$  y  $W$  operadores con dominio definido en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Que tienen la acción:

$$\begin{aligned} U(f_1, f_2) &:= (f_2, f_1) \\ W(f_1, f_2) &:= (-f_2, f_1). \end{aligned}$$

De la Definición 3.1.22 se sigue que

$$U^2 = -W^2 = I \tag{3.4}$$

$$UW = -WU. \tag{3.5}$$

Para un conjunto  $A \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , se cumple

$$[WA]^{\perp} = WA^{\perp} \tag{3.6}$$

$$[UA]^{\perp} = UA^{\perp}. \tag{3.7}$$

**Teorema 3.1.23.** Si  $T$  tiene inverso, entonces  $T$  y  $T^{-1}$  son cerrados simultáneamente.

*Demostración.* Tenemos que si  $T$  es un operador en  $\mathcal{H}$  y existe  $T^{-1}$ , entonces  $G(T^{-1}) = UG(T)$  con  $U$  el operador de la Definición 3.1.22. De esta forma, se observa que, de las propiedades de  $U$ , se sigue que  $T$  y  $T^{-1}$  son cerrados simultáneamente.  $\square$

**Teorema 3.1.24.** Sea  $T$  un operador cerrado y  $S \in B(\mathcal{H})$ . Entonces  $T + S$  es cerrado.

*Demostración.* Comenzaremos probando que existe una  $\tilde{C} > 0$  tal que para toda  $f \in \text{dom}(T)$ ,

$$\|(f, Tf)\| \leq \tilde{C} \|(f, (T + S)f)\|. \tag{3.8}$$

En efecto,

$$\|(f, Tf)\|^2 = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \leq (\|f\| + \|Tf\|)^2. \tag{3.9}$$

Por otra lado, debido a que  $\|Sf\| \leq C\|f\|$ , se verifica

$$\|Tf\| = \|(T + S - S)f\| \leq \|(T + S)f\| + C\|f\|. \quad (3.10)$$

Por lo que: de (3.9) y (3.10), tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|^2 + \|Tf\|^2 &\leq (1 + C)^2(\|f\| + \|Tf\|) \\ &\leq (1 + C)^2(\|f\| + \|Tf\|)^2 + (1 + C)^2(\|f\| - \|Tf\|)^2 \\ &= 2(1 + C)^2(\|f\|^2 + \|Tf\|^2). \end{aligned}$$

Ahora, tomemos la sucesión

$$\{(f_k, (T + S)f_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset G(T + S) \quad (3.11)$$

convergente en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . De la igualdad (3.8), concluyendo que existe  $(f, g)$  en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  tal que

$$(f_k, Tf_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (f, g).$$

Como  $G(T) = \overline{G(T)}$ , entonces  $f \in \text{dom}(T)$  y  $g = Tf$ . De la continuidad de  $S$  tenemos, además, que

$$(T + S)f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (T + S)f.$$

De esta manera, el límite de la sucesión (3.11) está en  $G(T + S)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.25.** *Si  $T$  es cerrado, entonces  $\ker(T)$  es subespacio.*

*Demostración.* Tomemos una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ker(T)$  convergente en  $\mathcal{H}$ , es decir, existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

Claramente  $Tx_n = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $0 = Tx_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Por el Teorema 3.1.20  $x \in \text{dom}(T)$  y  $0 = Tx$ , lo que implica  $x \in \ker(T)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.26.** *Sean  $T_0, T_1, T$  operadores lineales tales que  $T_0 \subset T \subset T_1$ . De donde  $T_0$  y  $T_1$  son cerrados y*

$$\dim \left[ \frac{\text{dom}(T_1)}{\text{dom}(T_0)} \right] < \infty. \quad (3.12)$$

*Entonces  $T$  es cerrado.*

*Demostración.* Ya que  $T_0 \subset T_1$  y ambos son cerrados, se sigue que  $G(T_0)$  es un subespacio de  $G(T_1)$ . Tomando en cuenta (3.12), se tiene que la  $\dim \mathcal{H} \ominus \text{ran}(T_0)$  es finita. Así mismo, del hecho de que  $G(T_0) \subset G(T)$ , se sigue que  $G(T)$  es cerrada. Cumpliéndose la Definición 3.1.19.  $\square$

**Definición 3.1.27.** Diremos que  $T$  es cerrable si tiene una extensión cerrada.

**Definición 3.1.28.** El operador  $S$  se dice que es la cerradura de  $T$  si es la mínima extensión cerrada de  $T$ , o bien  $S = \overline{T}$ .

En este caso, se verificar que

$$\overline{G(T)} = G(\overline{T}) \quad (3.13)$$

En efecto, sea  $T$  un operador en  $\mathcal{H}$  y  $\overline{T}$  su cerradura,  $G(T)$ ,  $G(\overline{T})$  respectivamente las gráficas de los operadores. Ya que  $\overline{T}$  es un operador cerrado; entonces,  $G(\overline{T}) = \overline{G(\overline{T})}$ . Usando el hecho de que  $\overline{T}$  es el mínimo operador cerrado que contiene a  $T$ , se sigue que la gráfica de  $G(\overline{T})$  es el mínimo subconjunto lineal que contiene a  $G(T)$ . Por lo que  $\overline{G(T)} = \overline{G(\overline{T})}$ , obteniendo (3.13).

**Definición 3.1.29.** (Operador adjunto) Sea  $T$  un operador lineal densamente definido en  $\mathcal{H}$ . El adjunto de  $T$ , denotado por  $T^*$ , tiene dominio dado por todos los  $g \in \mathcal{H}$  tales que existe  $h \in \mathcal{H}$  que satisfice  $\langle Tf, g \rangle = \langle f, h \rangle$ . Entonces  $T^*g := h$ .

La Definición 3.1.29 es correcta en el sentido de que define un operador. Como el adjunto está determinado por las  $g \in \mathcal{H}$  tales que existe  $h \in \mathcal{H}$  que satisfice  $\langle Tf, g \rangle = \langle f, h \rangle$ . Si hubiera una  $g \in \mathcal{H}$  que le correspondan  $h, h' \in \mathcal{H}$ , del hecho que  $T$  un operador densamente definido en  $\mathcal{H}$  y por el Lema 2.3.6 tendríamos que  $h = h'$  por lo que a cada  $g \in \mathcal{H}$  le corresponde una sola  $h \in \mathcal{H}$ . Observe que  $T^*$  es un operador lineal. En efecto, sea  $g_1, g_2 \in \text{dom}(T^*)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\langle Tf, \alpha g_1 \rangle = \overline{\alpha} \langle Tf, g_1 \rangle = \langle f, \alpha T^* g_1 \rangle \quad (3.14)$$

$$\langle Tf, \alpha g_2 \rangle = \overline{\beta} \langle Tf, g_2 \rangle = \langle f, \beta T^* g_2 \rangle. \quad (3.15)$$

Sumando (3.14) con (3.15), tenemos que

$$\langle Tf, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle = \langle Tf, \alpha g_1 \rangle + \langle Tf, \beta g_2 \rangle = \langle f, \alpha T^* g_1 \rangle + \langle f, \beta T^* g_2 \rangle.$$

Por lo tanto  $T^*$  es lineal, ya que  $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \text{dom}(T^*)$  y

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2.$$

**Teorema 3.1.30.** Sea  $T$  un operador densamente definido en  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$[WG(T)]^\perp = G(T^*). \quad (3.16)$$

*Demostración.* Sea  $f \in \text{dom}(\mathcal{H})$ , entonces  $(f, Tf) \in G(T)$ . Así

$$(-Tf, f) = W(f, Tf).$$

Buscamos los elementos  $\hat{g} = (g_1, g_1) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  tales que

$$\langle \hat{g}, (-Tf, f) \rangle = -\langle g_1, Tf \rangle + \langle g_2, f \rangle = 0,$$

pero por la Definición 3.1.29, se tiene que

$$(g_1, g_2) = (g_1, T^*g_2) \in G(T^*).$$

Esto último, demuestra que  $[WG(T)]^\perp \subset G(T^*)$ . La prueba en el sentido contrario se obtiene al verificar que  $(g_2, T^*g_2)$  es ortogonal a  $(-Tf, f)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.31.** *El operador  $T^*$  es cerrado.*

*Demostración.* El Teorema 3.1.30, presenta que la gráfica del operador adjunto es el complemento ortogonal de un conjunto en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ . Del Lema 2.3.3, se sigue que  $G(T^*)$  es un conjunto cerrado en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ , por lo que el operador adjunto es cerrado como consecuencia de la Definición 3.1.18.  $\square$

**Teorema 3.1.32.** *Si  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces  $T^* \in B(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Suponga que  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces por la desigualdad del Teorema 2.1.3, se tiene que para todo  $f, g \in \mathcal{H}$

$$|\langle Tf, g \rangle| \leq \|Tf\| \|g\| \leq C \|f\| \|g\|. \quad (3.17)$$

Fijamos arbitrariamente  $g \in \mathcal{H}$ , entonces  $\langle Tf, g \rangle$  es un funcional lineal que por (3.17) es acotado. Por el Teorema 2.3.5 existe  $h \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, h \rangle.$$

De esto se sigue, de acuerdo a la Definición 3.1.29, que  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = h$ . Implica que  $\text{dom}(T^*) = \mathcal{H}$ . Ahora, verificamos que  $T^*$  es acotado. Si  $h = T^*g = 0$ , entonces siempre hay una cota superior para  $\|T^*g\|$ . Suponga  $h \neq 0$ , entonces

$$\|h\|^2 = \langle T^*g, h \rangle = \langle g, Th \rangle \leq \|g\| \|Th\|$$

por lo tanto

$$\|h\| = \|T^*h\| \leq C \|g\|.$$

Concluyendo que  $T^* \in B(\mathcal{H})$ .  $\square$

**Teorema 3.1.33.** *Un operador  $T$  es compacto si y solo si  $T$  transforma una sucesión débilmente convergente en una sucesión convergente.*

*Demostración.* Suponga que  $T$  es compacto. Sea  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión débilmente convergente a  $f_0$ . Por el Teorema III, sabemos que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\| < \infty$ . Y por la continuidad  $T$ , tenemos que  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $Tf_0$ . En efecto, para toda  $f \in \mathcal{H}$ ,  $\langle Tf_k, f \rangle = \langle f_k, T^*f \rangle$ , para toda  $k \in \mathbb{N}$  y por hipótesis  $\langle f_k, T^*f \rangle$  converge a  $\langle f_0, T^*f \rangle = \langle Tf_0, f \rangle$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $f_0 = 0$ . Si la sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  no converge a cero, entonces  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \|Tf_k\| = a > 0$ . La sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacta debido a que  $T$  es compacto. De esta forma, existe una



subsucesión  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que la sucesión  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente a un elemento  $h$ . Puesto que la sucesión  $\{Tf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a cero, se ve que  $h = 0$ , esto contradice que  $\|Tf_k\| \geq a > 0$ .

Para probar la afirmación inversa, basta demostrar que del hecho de que  $T$  transforma una sucesión débilmente convergente en una convergente, se sigue que la imagen de la bola unitaria bajo el operador  $T$  sea relativamente compacta. Para esto, es suficiente verificar que para cualquier sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $\|f_k\| \leq 1$ , existe una subsucesión  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  para la que  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  sea convergente. Sin embargo por el Teorema 2.3.8 se sabe que cualquier bola unitaria en un espacio de Hilbert es débilmente compacta, así, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente  $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  en dicha bola unitaria. Y por hipótesis la sucesión  $\{Tf_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge, lo que prueba que  $T$  es compacto.  $\square$

**Teorema 3.1.34.** *Si  $T$  es cerrable, entonces*

$$(\overline{T})^* = T^*. \quad (3.18)$$

*Demostración.* Comparando (3.13) y (3.16) vemos que las gráficas de  $(\overline{T})^*$  y  $T^*$  coinciden, por tanto (3.18) se satisface.  $\square$

**Teorema 3.1.35.** *Sea  $T$  un operador densamente definido en  $\mathcal{H}$  y  $S \in B(\mathcal{H})$ , entonces*

$$(T + S)^* = T^* + S^*.$$

*Demostración.* Suponga  $g \in \text{dom}(T^*)$ , entonces para un elemento  $f \in \text{dom}(T)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \langle (T + S)f, g \rangle &= \langle Tf + Sf, g \rangle = \langle Tf, g \rangle + \langle Sf, g \rangle \\ &= \langle f, T^*g \rangle + \langle f, S^*g \rangle = \langle f, T^*g + S^*g \rangle. \end{aligned}$$

por lo tanto  $g \in \text{dom}((T + S)^*)$ . Además,  $(T + S)^*g = (T^* + S^*)g$  para toda  $g \in \text{dom}(T^*) = \text{dom}(T^* + S^*)$ . Concluyendo que  $T^* + S^* \subset (T + S)^*$ . Para probar la otra contención, consideremos  $g \in \text{dom}((T + S)^*)$ , entonces para  $f \in \text{dom}(T + S)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \langle (T + S - S)f, g \rangle = \langle (T + S)f, g \rangle - \langle Sf, g \rangle \\ &= \langle f, (T + S)^*g \rangle - \langle f, S^*g \rangle = \langle f, [(T + S)^* - S^*]g \rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entonces  $g \in \text{dom}(T^*)$ , lo cual implica

$$\text{dom}((T + S)^*) \subset \text{dom}(T^*) = \text{dom}(T^* + S^*).$$

Observe que de (3.19) obtenemos que

$$(T^* + S^*)g = (T + S)^*g.$$

Esta relación se cumple siempre que  $g \in \text{dom}((T + S)^*)$ . Por lo que  $(T + S)^* \subset T^* + S^*$ .  $\square$

**Teorema 3.1.36.** *Los subespacios  $\overline{\text{ran}(T)}$  y  $\ker(T^*)$  son ortogonales en  $\mathcal{H}$  y*

$$\mathcal{H} = \overline{\text{ran}(T)} \oplus \ker(T^*).$$

*Demostración.* Sea  $g \in \ker(T^*)$ , entonces para toda  $f \in \text{dom}(T)$

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle = 0,$$

lo cual implica  $g \perp \text{ran}(T)$  y  $\ker(T^*) \subset \text{ran}(T)^\perp$ . Ahora, sea  $g \in \text{ran}(T)^\perp$ , entonces  $0 = \langle Tf, g \rangle$  para toda  $f \in \text{dom}(T)$ , lo cual implica  $g \in \text{dom}(T^*)$  y  $T^*g = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.1.37.** *Sea  $T$  un operador con  $\overline{\text{dom}(T)} = \overline{\text{ran}(T)} = \mathcal{H}$  tal que  $T^{-1}$  existe. Entonces existe el inverso de  $T^*$  y el adjunto de  $T^{-1}$ , además  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .*

*Demostración.* Que el adjunto exista, se debe a que  $\text{dom}(T) = \mathcal{H}$ . Por el Teorema 3.1.36, tenemos que  $\ker(T^*) = \{0\}$ , entonces existe  $(T^*)^{-1}$  y

$$\begin{aligned} G((T^*)^{-1}) &= U[WG(T)]^\perp \\ &= [UWG(T)]^\perp \\ &= [-WUG(T)]^\perp \\ &= [WUG(T)]^\perp \\ &= [WG(T^{-1})]^\perp. \end{aligned}$$

Usando las propiedades (3.5) y (3.7) de los operadores  $U$  y  $W$ ; Y ya que  $T^{-1}$  está densamente definido, entonces por el Teorema 3.1.30  $[WG(T^{-1})]^\perp = G((T^{-1})^*)$ , concluyendo

$$G((T^*)^{-1}) = G((T^{-1})^*).$$

$\square$

**Teorema 3.1.38.** *Sea  $\overline{\text{dom}(T)} = \mathcal{H}$ . El  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$  sii  $T$  es cerrable. En este caso  $T^{**}$  existe y*

$$T^{**} = \overline{T} \tag{3.20}$$

*Demostración.* Consideremos la gráfica de  $T^*$  y recordemos la propiedad (3.4) para el operador  $W$ . Utilizando el Teorema 3.1.30 tenemos que

$$WG(T^*) = W[WG(T)]^\perp = [W^2G(T)]^\perp = [-G(T)]^\perp = [G(T)]^\perp. \tag{3.21}$$

De donde utilizamos la propiedad (3.6). De (3.21), se sigue  $[WG(T^*)]^\perp = \overline{G(T)}$ . El conjunto  $\overline{G(T)}$  es la gráfica sii  $T$  es cerrable. Cuando  $T$  es cerrable tenemos (3.13), lo que implica

$$[WG(T^*)]^\perp = G(\overline{T}). \tag{3.22}$$

Por otro lado, tenemos que el lado izquierdo de la ecuación (3.22) es gráfica de un operador sii  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$ . Usando este hecho, esta igualdad es equivalente a la hipótesis de  $T$  cerrable. Si el  $\overline{\text{dom}(T^*)} = \mathcal{H}$ , el operador  $T^{**}$  existe. La igualdad (3.20) se obtiene de (3.22) aplicando nuevamente el Teorema 3.1.30 al operador  $T^*$ .  $\square$

## 3.2. Espectro de operadores

**Definición 3.2.1.** El conjunto de los puntos de tipo regular del operador lineal  $T$ , simbolizado por  $\hat{\rho}(T)$ , se define como:

$$\hat{\rho}(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \exists C > 0 : \|(T - \zeta I)f\| \geq C \|f\|, \forall f \in \text{dom}(T)\}. \quad (3.23)$$

**Teorema 3.2.2.** Sea  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ .  $T$  es cerrado sii

$$\text{ran}(T - \zeta I) = \overline{\text{ran}(T - \zeta I)} \quad (3.24)$$

*Demostración.* Ya que  $T$  es cerrado e  $I \in B(\mathcal{H})$ , del Teorema 3.1.24 se sigue que  $T - \zeta I$  es cerrado. Del hecho de que  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$  y del Teorema 3.1.17, tenemos que  $(T - \zeta I)^{-1}$  existe y es acotado. Ya que  $T - \zeta I$  es cerrado, entonces  $(T - \zeta I)^{-1}$  es cerrado como consecuencia del Teorema 3.1.23. Además, tomando en cuenta que  $(T - \zeta I)^{-1}$  es cerrado y el Teorema 3.1.21, concluimos que  $\text{dom}((T - \zeta I)^{-1})$  es cerrado pero  $\text{dom}((T - \zeta I)^{-1}) = \text{ran}(T - \zeta I)$ , implica que  $\text{ran}(T - \zeta I)$  es cerrado. Recíprocamente, sea  $\text{ran}(T - \zeta I)$  cerrado, ya que  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$  y por el Teorema 3.1.17 existe  $(T - \zeta I)^{-1}$  y es acotado. Sabemos que  $\text{dom}((T - \zeta I)^{-1}) = \text{ran}(T - \zeta I)$ , del Teorema 3.1.21 se sigue que  $(T - \zeta I)^{-1}$  es cerrado y por el Teorema 3.1.23  $T - \zeta I$  es cerrado. Ya que  $T - \zeta I$  es cerrado y  $-\zeta I \in B(\mathcal{H})$ , obtenemos que  $T - \zeta I + (-\zeta I)$  es cerrado esto como consecuencia del Teorema 3.1.24, Por lo tanto  $T$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 3.2.3.** Sea  $T$  un operador cerrado definido en  $\mathcal{H}$ . Si  $\zeta_0 \in \hat{\rho}(T)$ , entonces hay una vecindad de  $\zeta_0$ ,  $V(\zeta_0)$ , contenida en  $\hat{\rho}(T)$ . Además, para toda  $\zeta \in V(\zeta_0)$  la  $\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$  es constante.

*Demostración.* Sea  $\zeta_0 \in \hat{\rho}(T)$ , entonces existe  $C > 0$  tal que  $\|(T - \zeta_0 I)f\| \geq C \|f\|$ . Fijamos la constante  $C$  y escribimos  $T - \zeta I = (T - \zeta_0 I) + (\zeta_0 - \zeta)I$  con  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \|(T - \zeta I)f\| &= \|(T - \zeta_0 I)f + (\zeta_0 - \zeta)If\| \\ &\geq \|(T - \zeta_0 I)f\| - \|(\zeta_0 - \zeta)f\| \\ &\geq C \|f\| - |\zeta_0 - \zeta| \|f\| \\ &= (C - |\zeta_0 - \zeta|) \|f\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|\zeta_0 - \zeta| < C$  garantiza  $\zeta \in \hat{\rho}(T)$ . Ahora, probaremos que  $\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_0 I)) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$ , para toda  $\zeta$  tal que  $|\zeta_0 - \zeta| < C$ . Suponga  $\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_0 I)) < \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$ . Por el Lema 3.1.16 existe  $h \in \mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I)$  tal que  $h \perp \mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_0 I)$ . Entonces  $h \in \text{ran}(T - \zeta_0 I)$ , por lo cual existe  $f \in \text{dom}(T - \zeta_0 I)$ ,  $f \neq 0$ , tal que  $h = (T - \zeta_0 I)f$ . Sin embargo,

$h \in \mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I)$ , se obtiene que  $h \perp \text{ran}(T - \zeta I)$ . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, (T - \zeta I)f \rangle = \langle (T - \zeta_0 I)f, (T - \zeta I)f \rangle \\ &= \langle (T - \zeta_0 I)f, (T - \zeta_0 I)f + (\zeta_0 - \zeta)f \rangle \\ &= \langle (T - \zeta_0 I)f, (T - \zeta_0 I)f \rangle + \langle (T - \zeta_0 I)f, (\zeta_0 - \zeta)If \rangle \\ &= \|(T - \zeta_0 I)f\|^2 + \langle (T - \zeta_0 I)f, (\zeta_0 - \zeta)If \rangle. \end{aligned}$$

Despejando el primer término del lado derecho de la última igualdad de la ecuación anterior y tomando el valor absoluto, nos queda

$$\begin{aligned} \|(T - \zeta_0 I)f\|^2 &= |\langle (T - \zeta_0 I)f, (\zeta - \zeta_0)If \rangle| \\ &\leq \|(T - \zeta_0 I)f\| \|(\zeta - \zeta_0)f\| \\ &< \|(T - \zeta_0 I)f\| C \|f\|, \end{aligned}$$

de estas desigualdades, se sigue

$$\|(T - \zeta_0 I)f\| < C \|f\|.$$

Pero se sabía que  $\|(T - \zeta_0 I)f\| \geq C \|f\|$ , entonces

$$\|(T - \zeta_0 I)f\| < \|(T - \zeta_0 I)f\|,$$

llegando a una contradicción. Análogamente se obtiene una contradicción si se supone que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_0 I)) > \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I)).$$

Por lo tanto,

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_0 I)) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I)).$$

□

**Corolario 3.2.4.** *Sea  $T$  un operador cerrado. Entonces  $\hat{\rho}(T)$  es un conjunto abierto. Sabemos que en el plano complejo cualquier conjunto abierto es la unión de componentes conexas abiertas. Para cualquier componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ , se cumple que*

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$$

*es constante cuando  $\zeta$  recorre esa componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ .*

*Demostración.* Del Teorema 3.2.3,  $\hat{\rho}(T)$  es un conjunto abierto. De este modo, sea  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{A}$ , donde  $\mathbb{A}$  es una componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ , entonces existen  $V_1$  y  $V_2$  vecindades de  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  respectivamente tales que ambas vecindades están contenidas en  $\hat{\rho}(T)$  y  $\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$  es constante para toda  $\zeta$  en  $V_1$  y  $V_2$ , esto como consecuencia del Teorema 3.2.3. Ya que  $\mathbb{A}$  es una componente conexa en el plano complejo, también es arco-conexa, es decir, para cualquier dos puntos en  $\mathbb{A}$  existe una

curva que los une, la cual, esta contenida en  $\mathbb{A}$ . Así, tomemos un punto  $\zeta_3 \in \partial V_1$  sobre la curva  $\mathbb{X}$  que une  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ . Del Teorema 3.2.3 existe una vecindad  $V_3$  de  $\zeta_3$  contenida en  $\hat{\rho}(T)$  tal que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_1 I)) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta_3 I)) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$$

para toda  $\zeta$  en  $V_3$ . Claramente, este procedimiento nos permite cubrir todos los puntos de  $\mathbb{X}$ , ya que el conjunto  $\mathbb{X}$  es compacto. Como tomamos una componente arbitraria  $\mathbb{A}$ , concluimos que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$$

es constante para toda  $\zeta$  en cada componente conexa de  $\hat{\rho}(T)$ .  $\square$

En las siguientes Definiciones 3.2.5– 3.2.11 suponemos que  $T$  es cerrado.

**Definición 3.2.5.** El conjunto resolvente de  $T$  lo vamos a definir como:

$$\rho(T) := \{\zeta \in \hat{\rho}(T) : \text{ran}(T - \zeta I) = \mathcal{H}\}. \quad (3.25)$$

**Definición 3.2.6.** Definiremos el espectro  $\sigma(T)$  de  $T$  por

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T). \quad (3.26)$$

**Definición 3.2.7.** El núcleo espectral de  $T$  se define por

$$\hat{\sigma}(T) := \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T). \quad (3.27)$$

En la teoría espectral de operadores se pueden tener los siguientes casos extremos:

$$a) \hat{\sigma}(T) = \mathbb{C}; \quad b) \sigma(T) = \mathbb{C}, \quad c) \hat{\sigma}(T) = \emptyset; \quad d) \sigma(T) = \emptyset.$$

Por el Teorema 3.2.3 los conjuntos  $\sigma(T)$ ,  $\hat{\sigma}(T)$  son cerrados (ya que  $\rho(T)$ ,  $\hat{\rho}(T)$  son abiertos). Además, es claro que  $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma(T)$ .

**Definición 3.2.8.** El conjunto  $\sigma_c(T)$  denominado el espectro continuo de  $T$ , lo definiremos por

$$\sigma_c(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \text{ran}(T - \zeta I) \neq \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}\}. \quad (3.28)$$

**Definición 3.2.9.** El espectro puntual de  $T$  es el conjunto denotado por  $\sigma_p(T)$  y definido como

$$\sigma_p(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \ker(T - \zeta I) \neq \{0\}\}. \quad (3.29)$$

Observe que  $\sigma_c(T) \subset \hat{\sigma}(T)$ . A los elementos de  $\sigma_p(T)$  se les llaman auto-valores y  $\sigma_p(T) \subset \hat{\sigma}(T)$ .

**Definición 3.2.10.** El conjunto  $\sigma_p^\infty(T)$  se define como el conjunto de auto-valores de un operador  $T$  de multiplicidad infinita, es decir,

$$\sigma_p^\infty(T) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \dim \ker(T - \zeta I) = \infty\}.$$

**Definición 3.2.11.** Sea  $\zeta \in \rho(T)$ . El operador resolvente de  $T$  en  $\zeta$  es

$$R_\zeta(T) := (T - \zeta I)^{-1}. \quad (3.30)$$

En el cual podemos observar que  $R_\zeta(T) \in B(\mathcal{H})$  para todo  $\zeta \in \rho(T)$ . Además, fácilmente se deducen las siguientes igualdades, para  $\zeta, \zeta_0 \in \rho(T)$

$$R_\zeta(T)(T - \zeta I)R_{\zeta_0}(T) = R_{\zeta_0}(T) \quad (3.31)$$

$$R_\zeta(T)(T - \zeta_0 I)R_{\zeta_0}(T) = R_\zeta(T), \quad (3.32)$$

cuya diferencia resulta en la identidad conocida por identidad de la resolvente de Hilbert

$$R_\zeta(T) - R_{\zeta_0}(T) = (\zeta - \zeta_0)R_\zeta(T)R_{\zeta_0}(T).$$

Los siguientes resultados auxiliares van encaminados a estudiar el comportamiento del espectro de la clase de los operadores compactos, dichos resultados nos serán útiles en capítulos posteriores.

**Teorema 3.2.12.** Sea  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ ,  $\zeta \neq 0$ , entonces  $\text{ran}(T - \zeta I)$  es cerrado.

*Demostración.* Sea  $g \in \overline{\text{ran}(T - \zeta I)}$ , entonces existe  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{ran}(T - \zeta I)$  tal que  $g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g$ . Para toda  $k \in \mathbb{N}$   $g_k = (T - \zeta I)f_k$ , donde  $f_k \in \mathcal{H}$ . Ahora, por el Teorema 2.3.1, para toda  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $f_k = h_k + d_k$ , donde  $h_k \in \ker(T - \zeta I)^\perp$  y  $d_k \in \ker(T - \zeta I)$ . Entonces  $g_k = (T - \zeta I)h_k$ . Probemos que la sucesión  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada. En efecto, suponga lo contrario y defina  $q_k := \frac{h_k}{\|h_k\|}$ , entonces

$$(T - \zeta I)q_k = \frac{g_k}{\|h_k\|} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ahora, como  $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces existe  $\{q_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{Tq_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, entonces la sucesión  $\{q_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es también convergente, ya que

$$q_{k_n} = \zeta^{-1} \left( Tq_{k_n} - \frac{g_{k_n}}{\|h_{k_n}\|} \right).$$

Denotemos el límite de  $\{q_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  por  $q$ . Dado que  $\ker(T - \zeta I)^\perp$  es un subespacio, se tiene que  $q \in \ker(T - \zeta I)^\perp$ , pero por otra parte

$$(T - \zeta I)q = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \zeta I)q_{k_n} = 0,$$

o sea que  $q \in \ker(T - \zeta I)$ , lo cual es una contradicción. Así, hemos demostrado que la sucesión  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es acotada. Por lo tanto, existe  $\{h_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\{Th_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente, pero por el mismo razonamiento anterior  $\{h_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente digamos a  $f$ . Por lo tanto tenemos que

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \zeta I)h_{k_n} = (T - \zeta I)f \in \text{ran}(T - \zeta I),$$

lo que implica que  $\text{ran}(T - \zeta I)$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 3.2.13.** *Sea  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ . Suponga que  $\zeta \neq 0$ ,  $\ker(T - \zeta I) = \{0\}$  y  $\text{ran}(T - \zeta I) \neq \mathcal{H}$ . Entonces  $\text{ran}(T - \zeta I)^{k+1}$  es un subespacio propio de  $\text{ran}(T - \zeta I)^k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Del Teorema 3.2.12, se sigue que  $\text{ran}(T - \zeta I)$  es cerrado. Como  $\ker(T - \zeta I) = \{0\}$ , existe  $(T - \zeta I)^{-1}$  que genera una correspondencia biunívoca entre  $\text{ran}(T - \zeta I)^2$  y  $\text{ran}(T - \zeta I)$ . De esto se sigue de manera inmediata que  $\text{ran}(T - \zeta I)^2$  es también cerrado. Así, por inducción tenemos que  $\text{ran}(T - \zeta I)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , es cerrado. Verifiquemos que  $\text{ran}(T - \zeta I)^{k+1} \subset \text{ran}(T - \zeta I)^k$  y  $\text{ran}(T - \zeta I)^{k+1} \neq \text{ran}(T - \zeta I)^k$ . Suponga que existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{ran}(T - \zeta I)^{k_0} \subset \text{ran}(T - \zeta I)^{k_0+1},$$

entonces

$$\mathcal{H} = (T - \zeta I)^{-k_0} \text{ran}(T - \zeta I)^{k_0} \subset (T - \zeta I)^{-k_0} \text{ran}(T - \zeta I)^{k_0+1} = \text{ran}(T - \zeta I).$$

lo que contradice la hipótesis del teorema.  $\square$

**Teorema 3.2.14.** *Sea  $T$  un operador en  $\mathcal{H}$ . Si los auto-valores  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , entonces*

$$\ker(T - \lambda_k I) \cap \ker(T - \lambda_j I) = \{0\}.$$

*Demostración.* Supongamos  $\lambda_k \neq \lambda_j$  y que  $\ker(T - \lambda_k I) \cap \ker(T - \lambda_j I) \neq \{0\}$ , entonces existe  $f_0 \neq 0$ ,  $f_0 \in \ker(T - \lambda_k I) \cap \ker(T - \lambda_j I)$  y por definición de núcleo (véase Definición 3.1.1), tenemos que

$$(T - \lambda_k I)f_0 = (T - \lambda_j I)f_0 = 0$$

de lo que se deduce que  $\lambda_k f_0 = \lambda_j f_0$ . Así,  $\lambda_k = \lambda_j$ , contradiciendo las hipótesis.  $\square$

**Teorema 3.2.15.** *Sea  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ , entonces  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  consiste solamente en auto-valores aislados de multiplicidad finita.*

*Demostración.* Sea  $\zeta \in \sigma(T)$ ,  $\zeta \neq 0$ . Suponga que  $\zeta$  no es un auto-valor. Entonces  $\zeta$  y  $T$  son tales que satisfacen la condición del Teorema 3.2.13. En efecto, que  $\zeta$  no sea un auto-valor quiere decir que  $\ker(T - \zeta I) = \{0\}$ , mientras que si  $\zeta \in \sigma(T)$ , entonces  $\text{ran}(T - \zeta I) \neq \mathcal{H}$ . Así, por el Teorema 3.2.13 podemos construir la sucesión ortonormal  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$f_k \in \text{ran}(T - \zeta I)^{k-1} \ominus \text{ran}(T - \zeta I)^k,$$

entonces por los Teoremas 3.1.33,  $Tf_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . Por el otro lado, tenemos que

$$Tf_k = \zeta f_k + (T - \zeta I)f_k.$$

Así,  $f_k \perp \text{ran}(T - \zeta I)^k$  y  $(T - \zeta I)f_k \in \text{ran}(T - \zeta I)^k$ . Por lo tanto, usando el hecho de que  $f_k \perp (T - \zeta I)f_k$  y el Teorema 2.2.3, tenemos que

$$\|Tf_k\|^2 = |\zeta|^2 \|f_k\|^2 + \|(T - \zeta I)f_k\|^2 \geq |\zeta|^2 \|f_k\|^2 = |\zeta|^2 > 0. \quad (3.33)$$

Lo que nos indica una contradicción. Así,  $\zeta$  debe ser un auto-valor. Ahora, probemos que la multiplicidad de cada auto-valor  $\zeta \neq 0$  es finita. Si hacemos que  $\dim \ker(T - \zeta I) = \infty$ , entonces podría existir una sucesión ortonormal  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\ker(T - \zeta I)$ . Ya que  $T$  es compacto, entonces  $Tf_k \rightarrow 0$ , contradiciendo la igualdad  $\|Tf_k\| = |\zeta| \|f_k\| = |\zeta|$ .

Resta probar que los auto-valores pueden acumularse solamente en el cero. Suponga que no es así y que  $\{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \sigma(T)$  tal que  $\zeta_k \rightarrow \zeta \neq 0$  con  $\zeta_k \neq \zeta_j$  para toda  $k \neq j$ . Considérese la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\|f_k\| = 1$ , tal que

$$(T - \zeta_k I)f_k = 0 \quad (3.34)$$

Del Teorema 3.2.14, concluimos inmediatamente que la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es linealmente independiente. Sea

$$g_n \in \text{span}\{f_k\}_{k=1}^n \ominus \text{span}\{f_k\}_{k=1}^{n-1}$$

tal que  $\|g_n\| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Repitiendo el argumento anterior vemos que  $Tg_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y además

$$Tg_n = \zeta_n g_n + (T - \zeta_n I)g_n. \quad (3.35)$$

Ahora, haciendo  $g_k = \sum_{j=1}^k a_{kj} f_j$  y tomando en cuenta (3.34), tenemos que

$$(T - \zeta_k I)g_k = \sum_{j=1}^k a_{kj} (T - \zeta_k I)f_j = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} ((\zeta_j - \zeta_k)I)f_j \in \text{span}\{f_j\}_{j=1}^{k-1}.$$

Por lo tanto,  $g_k \perp (T - \zeta_k I)g_k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Así, a partir de (3.35), podemos usar el mismo razonamiento que en (3.33), obteniendo que  $\|Tg_k\| \geq |\zeta_k| \rightarrow |\zeta|$ , lo que contradice el hecho de que  $Tg_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .  $\square$

### 3.3. Operadores simétricos

**Definición 3.3.1.** (Operador Simétrico) Un operador  $A$  densamente definido en  $\mathcal{H}$  es simétrico sii

$$A \subset A^*.$$

**Teorema 3.3.2.**  $A$  es simétrico sii  $A$  es densamente definido y para toda  $f, g \in \text{dom}(A)$

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle. \quad (3.36)$$



*Demostración.* Sea  $A$  un operador simétrico, es decir,  $A \subset A^*$ . Suponga que para todo  $f, g \in \text{dom}(A) \subset \text{dom}(A^*)$ , entonces

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle = \langle f, Ag \rangle. \quad (3.37)$$

Recíprocamente. Sea  $g \in \text{dom}(A)$ , entonces de (3.37) se sigue que  $g \in \text{dom}(A^*)$  y que

$$A^*g = Ag,$$

por lo tanto  $A \subset A^*$ . □

Para demostrar el Teorema 3.3.4 es necesario demostrar primero el siguiente lema:

**Lema 3.3.3.** *Sea  $T$  un operador lineal en  $\mathcal{H}$ . Entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$4 \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \quad (3.38)$$

$$+ i \langle T(x+iy), x+iy \rangle - i \langle T(x-iy), x-iy \rangle \quad (3.39)$$

$y$

$$4 \langle x, Ty \rangle = \langle x+y, T(x+y) \rangle - \langle x-y, T(x-y) \rangle \quad (3.40)$$

$$+ i \langle x+iy, T(x+iy) \rangle - i \langle x-iy, T(x-iy) \rangle, \quad (3.41)$$

para toda  $x, y \in \text{dom}(T)$ .

*Demostración.* Sea  $x, y \in \text{dom}(T)$ .

$$\begin{aligned} &= \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \\ &+ i \langle T(x+iy), x+iy \rangle - i \langle T(x-iy), x-iy \rangle \\ &= \langle Tx, x+y \rangle + \langle Ty, x+y \rangle - \langle Tx, x-y \rangle + \langle Ty, x-y \rangle \\ &+ i \langle Tx, x+iy \rangle + i \langle iTy, x+iy \rangle - i \langle Tx, x-iy \rangle + i \langle iTy, x-iy \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle + \langle Ty, y \rangle - \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle \\ &+ \langle Ty, x \rangle - \langle Ty, y \rangle + i \langle Tx, x \rangle + i \langle Tx, iy \rangle + i \langle iTy, x \rangle + i \langle iTy, iy \rangle \\ &- i \langle Tx, x \rangle + i \langle Tx, iy \rangle + i \langle iTy, x \rangle - i \langle iTy, iy \rangle, \end{aligned}$$

cancelamos términos semejantes, obteniendo:

$$\begin{aligned} &2 \langle Tx, y \rangle + 2 \langle Ty, x \rangle + 2i \langle Tx, iy \rangle + 2i \langle iTy, x \rangle \\ &= 2 \langle Tx, y \rangle + 2 \langle Ty, x \rangle + 2 \langle Tx, y \rangle - 2 \langle Ty, x \rangle \\ &= 4 \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

La demostración de la segunda ecuación es análoga a ésta. □

**Teorema 3.3.4.** *A es simétrico sii A es densamente definido y para toda  $f \in \text{dom}(A)$ ,*

$$\langle Af, f \rangle \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

*Demostración.* Suponga que A es simétrico. Sea  $f \in \text{dom}(A)$ , se tiene que

$$\langle Af, f \rangle = \langle f, Af \rangle = \overline{\langle Af, f \rangle},$$

lo cual implica (3.42). Ahora, suponga que  $\overline{\text{dom}(A)} = \mathcal{H}$  y que se cumple (3.42) para toda  $f \in \text{dom}(A)$ . Sea  $x, y \in \text{dom}(A)$ , sustituimos A por T en la ecuaciones (3.38) y (3.40), obteniendo

$$\begin{aligned} 4 \langle Ax, y \rangle &= \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle \\ &\quad + i \langle A(x+iy), x+iy \rangle - i \langle A(x-iy), x-iy \rangle \\ 4 \langle x, Ay \rangle &= \langle x+y, A(x+y) \rangle - \langle x-y, A(x-y) \rangle \\ &\quad + i \langle x+iy, A(x+iy) \rangle - i \langle x-iy, A(x-iy) \rangle, \end{aligned}$$

es claro, que la parte derecha de las ecuaciones anteriores satisface (3.42) sustituyendo  $f$  por su apropiada pareja  $x, y$  en cada ecuación. De esta manera, A satisface (3.42) el lado derecho de las ecuaciones anteriores es igual por lo que su diferencia es igual a cero, entonces se tiene que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle,$$

esto implica que A satisface (3.36), concluyendo que A es simétrico.  $\square$

Además, ya que el operador adjunto  $A^*$  es cerrado, entonces, el operador simétrico A siempre es cerrable.

**Teorema 3.3.5.** *Sean  $A_1, A_2$  operadores simétricos tales que  $A_1 \subset A_2$ . Entonces*

$$A_2^* \subset A_1^*.$$

*Demostración.* Sea  $g \in \text{dom}(A_2^*)$  y  $f \in \text{dom}(A_1)$ , entonces

$$\langle A_1 f, g \rangle = \langle A_2 f, g \rangle = \langle f, A_2^* g \rangle,$$

concluyendo que  $g \in \text{dom}(A_1^*)$  y  $A_1^* g = A_2^* g$ . Por lo tanto  $A_2^* \subset A_1^*$ .  $\square$

**Definición 3.3.6.** Un operador A densamente definido en  $\mathcal{H}$  se dice auto-adjunto si coincide con su adjunto, o bien,  $A = A^*$ .

Del Teorema 3.1.31 se sigue que un operador auto-adjunto es cerrado.

Las siguientes dos definiciones introducen conceptos espectrales para operadores auto-adjuntos que se utilizarán más adelante.

**Definición 3.3.7.** El espectro esencial de un operador auto-adjunto  $A$  es el conjunto denotado por  $\sigma_e(A)$  y definido como:

$$\sigma_e(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A).$$

**Definición 3.3.8.** El espectro discreto  $\sigma_d(A)$  de un operador auto-adjunto  $A$  se define como:

$$\sigma_d(A) := \sigma(A) \setminus \sigma_e(A).$$

**Teorema 3.3.9.** Sea  $A$  un operador simétrico. Entonces el semi-plano superior  $\text{Im } \zeta > 0$  y el semi-plano inferior  $\text{Im } \zeta < 0$  están contenidos en  $\hat{\rho}(A)$ .

*Demostración.* Pongamos  $\zeta = \alpha + i\beta$ , entonces

$$\|(A - \zeta I)f\|^2 = \|(A - \alpha)f\|^2 + |\beta| \|f\|^2 + 2 \text{Re} \langle (A - \alpha)f, i\beta f \rangle, \quad (3.43)$$

el último término de la igualdad (3.43) se hace cero ya que  $\langle (A - \zeta I)f, f \rangle \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto la ecuación (3.43) queda,

$$\|(A - \zeta I)f\|^2 = \|(A - \alpha)f\|^2 + |\beta| \|f\|^2$$

De la ecuación resultante de (3.43), se sigue que

$$\|(A - \zeta I)f\| \geq |\text{Im } \zeta| \|f\|.$$

La demostración queda completa al tomar en cuenta la Definición 3.2.1.  $\square$

**Corolario 3.3.10.** Sea  $A$  un operador simétrico. Entonces para todo  $\zeta$ ,  $\text{Im } \zeta \neq 0$ ,

$$\|(A - \zeta I)^{-1}\| \leq |\text{Im } \zeta|^{-1}. \quad (3.44)$$

*Demostración.* Sea  $\text{Im } \zeta \neq 0$ . Ya que  $\text{Im } \zeta \neq 0$ , entonces  $\zeta \in \rho(A)$ , esto como consecuencia del Teorema 3.3.9 y tomando en cuenta su demostración, se sigue que

$$\|(A - \zeta I)f\| \geq |\text{Im } \zeta| \|f\|.$$

Ahora, por el Teorema 3.1.17,  $(A - \zeta I)^{-1}$  existe y está acotado. Tomando  $g = (A - \zeta I)f$  y  $f \in \text{dom}((A - \zeta I)^{-1})$ , tenemos que

$$\|(A - \zeta I)^{-1}g\| = \|f\| \leq |\text{Im } \zeta|^{-1} \|(A - \zeta I)f\| = |\text{Im } \zeta|^{-1} \|g\|.$$

Cumpléndose (3.44).  $\square$

**Definición 3.3.11.** Sea  $A$  un operador simétrico y cerrado. Por el Teorema 3.2.3, los valores  $\dim \ker(A^* - \bar{\zeta}I)$  en  $\{\text{Im } \zeta > 0\}$  y en  $\{\text{Im } \zeta < 0\}$  son constantes y se denotan por  $n_+ = n_+(A)$  y  $n_- = n_-(A)$ , respectivamente. Estas constantes son denominadas “índices de deficiencia” del operador  $A$ . Así,

$$\dim \ker(A^* - \bar{\zeta}I) = \dim(H \ominus \text{ran}(A - \zeta I)) = \begin{cases} n_-(A) & \text{si } \text{Im } \zeta < 0 \\ n_+(A) & \text{si } \text{Im } \zeta > 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

**Teorema 3.3.12.** *Si  $A = A^*$ , entonces  $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$  y así  $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Por definición  $\rho(A) \subset \hat{\rho}(A)$ . Resta probar que  $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ . Para ello, suponga que  $\text{Im } \zeta \neq 0$  y  $A = A^*$ , entonces

$$\ker(A^* - \zeta I) = \ker(A - \zeta I) = \{0\}. \quad (3.46)$$

Por el Teorema 3.1.36, se tiene que  $\text{ran}(A - \bar{\zeta}I) = \mathcal{H}$ , lo que prueba  $\bar{\zeta} \in \rho(A)$ . Por lo tanto  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$ . Pero por el Teorema 3.3.9,  $\hat{\rho}(A) \setminus \mathbb{R} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . O sea que  $\hat{\rho}(A) \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$ . Ahora, si  $\zeta \in \hat{\rho}(A) \cap \mathbb{R}$ , entonces (3.46) sigue siendo válido y  $\text{ran}(A - \zeta I) = \mathcal{H}$ . Así,  $\zeta \in \rho(A)$ . De esta forma  $\hat{\rho}(A) \subset \rho(A)$ . Como  $\hat{\sigma}(A) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(A)$  y  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ , entonces  $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .  $\square$

**Teorema 3.3.13.** *Sea  $A$  un operador simétrico cerrado. Entonces  $A$  es auto-adjunto ssi*

$$n_-(A) = n_+(A) = 0.$$

*Demostración.* Si  $A = A^*$ , entonces por el Teorema 3.3.12 inmediatamente obtenemos  $n_-(A) = n_+(A) = 0$ . Recíprocamente, suponga que  $n_-(A) = n_+(A) = 0$ , entonces por (3.45), se sigue  $\ker(A^* - \zeta I) = 0$  para toda  $\zeta \in \text{Im } > 0 \cup \text{Im } < 0$ . Así, por el Teorema 3.1.36 resulta

$$\text{ran}(A - \bar{\zeta}I) = \mathcal{H}, \quad (3.47)$$

para toda  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . De la ecuación (3.47) y del hecho de que  $A$  es simétrico vamos a probar que  $A = A^*$ . En efecto, sea  $g \in \text{dom}(A^*)$  y  $h = (A^* - \bar{\zeta}I)g$  con  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Existe  $g_0 \in \text{dom}(A)$  tal que  $h = (A - \bar{\zeta}I)g_0$  para  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Ahora, para cualquier  $f \in \text{dom}(A)$

$$\langle (A - \zeta I)f, g \rangle = \langle f, (A^* - \bar{\zeta}I)g \rangle = \langle f, (A - \bar{\zeta}I)g_0 \rangle = \langle (A - \zeta I)f, g_0 \rangle.$$

La ecuación anterior implica  $\langle (A - \zeta I)f, g - g_0 \rangle = 0$ . Por lo tanto, cuando  $f$  recorre todo el  $\text{dom}(A)$ ,  $(A - \zeta I)f$  recorre todo  $\mathcal{H}$ . Por el Lema 2.3.6, se sigue que  $g = g_0$ . Así,  $g \in \text{dom}(A)$  y  $A^* \subset A$ . Como  $A$  es simétrico,  $A \subset A^*$ , implica que  $A = A^*$ .  $\square$

El siguiente Teorema es consecuencia del Teorema espectral; Se demuestra fácilmente con base en él. Lo enunciaremos aquí sin demostración.

**Teorema IV.** *Sea  $A$  auto-adjunto, entonces  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .*

**Definición 3.3.14.** Sea  $F$  un subespacio de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $P$  la proyección ortogonal en  $F$ . Decimos que  $F$  reduce al operador  $A$  si  $PA \subset AP$ .

Note que de la definición anterior tenemos que  $F$  reduce a el operador  $A$  ssi  $F^\perp$  reduce al operador  $A$ . Además,

$$\text{dom}(A) = \text{dom}(A \upharpoonright_F) \oplus \text{dom}(A \upharpoonright_{F^\perp}). \quad (3.48)$$

En este caso, decimos que  $A = A \upharpoonright_F \oplus A \upharpoonright_{F^\perp}$ .

**Teorema 3.3.15.** *Sea  $A$  auto-adjunto y  $F$  un subespacio que reduce a  $A$ . Entonces  $A \upharpoonright_F$  y  $A \upharpoonright_{F^\perp}$  son auto-adjuntos en  $F$  y  $F^\perp$ , respectivamente. Además, tenemos que  $\sigma(A) = \sigma(A \upharpoonright_F) \cup \sigma(A \upharpoonright_{F^\perp})$ .*

*Demostración.* Primero note que  $\text{dom}(A \upharpoonright_F)$  es denso en  $F$ , entonces  $F \ominus \overline{\text{dom}(A \upharpoonright_F)} = \text{dom}(A)^\perp \cap F = \{0\}$ , esto de la igualdad (3.48). Como una restricción  $A \upharpoonright_F$  es restricción de  $A$ , sigue que  $A \upharpoonright_F$  simétrico en  $F$  y análogamente  $A \upharpoonright_{F^\perp}$  es simétrico en  $F^\perp$ . Sólo falta probar que  $\text{dom}((A \upharpoonright_F)^*) \subset \text{dom}(A \upharpoonright_F)$ . Sea  $g \in \text{dom}((A \upharpoonright_F)^*)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle (A \upharpoonright_F)^* g, f \rangle &= \langle (A \upharpoonright_F)^* g, f_1 \rangle = \langle g, (A \upharpoonright_F)^* f_1 \rangle \\ &= \langle g, (A \upharpoonright_F)^* f_1 + (A \upharpoonright_{F^\perp})^* f_2 \rangle = \langle g, Af \rangle, \end{aligned}$$

para toda  $f = f_1 + f_2 \in \text{dom}(A) = \text{dom}(A \upharpoonright_F) \oplus \text{dom}(A \upharpoonright_{F^\perp})$ , es decir,  $g \in F \cap \text{dom}(A^*) = F \cap \text{dom}(A) = \text{dom}(A \upharpoonright_F)$ . La demostración de la auto-adjuntos de  $A \upharpoonright_{F^\perp}$  es análoga. Ahora, tenemos que

$$\|(A - \zeta I)f\|^2 = \|(A \upharpoonright_F - \zeta I)f_1\|^2 + \|(A \upharpoonright_{F^\perp} - \zeta I)f_2\|^2,$$

para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$  y para  $f = f_1 + f_2 \in \text{dom}(A) = \text{dom}(A \upharpoonright_F) \oplus \text{dom}(A \upharpoonright_{F^\perp})$ . Por lo que se sigue del Teorema 3.3.12 que  $\zeta \in \rho(A)$  sii  $\zeta \in \rho(A \upharpoonright_F) \cap \rho(A \upharpoonright_{F^\perp})$ , es decir que,  $\sigma(A) = \sigma(A \upharpoonright_F) \cup \sigma(A \upharpoonright_{F^\perp})$ .  $\square$

**Teorema 3.3.16.** *Sea  $A$  un operador auto-adjunto y  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subespacios ortogonales entres sí en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $F_k$  reduce a  $A$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , entonces*

$$\overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$$

reduce a  $A$ .

*Demostración.* Ya que  $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$  es subespacio. Podemos considerar  $P$  el proyector sobre el subespacio  $\overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} F_k}$ , entonces para  $f \in \text{dom}(A)$

$$\begin{aligned} APf &= AP \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k f = A \sum_{k \in \mathbb{N}} P P_k f = A \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k f \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} A P_k f = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k A f = P A f, \end{aligned}$$

de donde por hipótesis  $P_i A f \subset A P_i f$ , para toda  $i \in \mathbb{N}$ , concluyendo que  $P A f \subset A P f$ .  $\square$

**Teorema 3.3.17.** *Sea  $A$  simétrico y  $\lambda \in \sigma_p(A)$ . Entonces  $\ker(A - \lambda I)$  reduce al operador  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in \text{dom}(A)$  y  $P$  el proyector a  $\ker(A - \lambda I)$ . Claramente  $APf \in \ker(A - \lambda I)$ , lo cual implica que  $PAPf = APf$ . Por otra parte, tomemos  $g \in \text{dom}(A)$ ,  $g \perp \ker(A - \lambda I)$ , y  $h \in \ker(A - \lambda I)$ , entonces

$$\langle Ag, h \rangle = \langle g, Ah \rangle = \lambda \langle g, h \rangle = 0,$$

esto nos dice que  $Ag \perp h$ . Por lo que para  $f \in \text{dom}(A)$ , tenemos que  $(I - P)f \perp \ker(A - \lambda I)$ , por lo tanto  $PA(I - P)f = 0$ . Concluyendo que  $PAf = PAPf$  y por lo visto anteriormente, obtenemos que  $PAf = APf$ .  $\square$

### 3.4. Descomposición espectral para operadores auto-adjuntos

En esta sección obtendremos la descomposición espectral para operadores auto-adjuntos con espectro puramente puntual sin utilizar el Teorema Espectral. Basaremos la demostración de esta afirmación en resultados generales de operadores auto-adjuntos y en teoría de funciones complejas.

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $A = A^*$  con  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$  numerable y cada auto-valor de multiplicidad uno, es decir,  $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Entonces*

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ker(A - \lambda_k I)}.$$

*Demostración.* Comencemos definiendo  $H_1 := \overline{\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ker(A - \lambda_k I)}$ .  $H_1$  es un subespacio de  $\mathcal{H}$  y por el Teorema 3.3.16,  $H_1$  reduce al operador  $A$ . Supongamos que  $H_1 \neq \mathcal{H}$ . Ahora, por el Teorema 3.3.15  $A \upharpoonright_{H_1}$  y  $A \upharpoonright_{\mathcal{H} \ominus H_1}$  son auto-adjuntos y  $\sigma(A \upharpoonright_{H_1}) \cup \sigma(A \upharpoonright_{\mathcal{H} \ominus H_1}) = \sigma(A)$ . De donde sabíamos que  $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  y claramente si  $f \in \ker(A - \lambda_k I)$ , tenemos que  $A \upharpoonright_{H_1} f = Af = \lambda_k f$ , así  $(A \upharpoonright_{H_1} - \lambda_k I)f = 0$ , por lo que  $\lambda_k \in \sigma_p(A \upharpoonright_{H_1}) \subset \sigma(A \upharpoonright_{H_1})$ , teniendo como resultado que  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \sigma(A \upharpoonright_{H_1})$ , por lo tanto  $\sigma(A \upharpoonright_{\mathcal{H} \ominus H_1}) = \emptyset$ , de donde esto último contradice el Teorema IV. Concluyendo que  $H_1 = \mathcal{H}$ .  $\square$

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $A = A^*$  con  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$  y numerable. Entonces*

a)  $f \in \text{dom}(A)$  sii

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f, \tag{3.49}$$

converge.

b)

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f.$$

Donde  $P_k$  es el proyector en  $\ker(A - \lambda_k I)$ .

*Demostración.* Suponga  $A = A^*$  con  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$  y numerable, es decir,  $\sigma(A) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Sea  $P_k$  el proyector en  $\ker(A - \lambda_k I)$  y  $f \in \text{dom}(A)$ . Por el Teorema 3.4.1, tenemos que

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ker(A - \lambda_k I)},$$

de modo que por el Lema 3.1.14, se sigue que  $f = \sum_{k=1}^{\infty} P_k f$ , por lo que

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} AP_k f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f,$$

por lo que la serie (3.49) es convergente.

Ahora, supongamos que la serie (3.49) es convergente. Si  $g \in \text{dom}(A)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle Ag, f \rangle &= \left\langle Ag, \sum_{k=1}^{\infty} P_k f \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ag, P_k f \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, AP_k f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g, \lambda_k P_k f \rangle = \left\langle g, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f \right\rangle, \end{aligned}$$

concluyendo que  $f \in \text{dom}(A)$  y  $Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f$ .  $\square$

*Comentario 3.4.3.* Note que para un operador  $A$  que satisface las hipótesis de los Teoremas 3.4.1–3.4.2, tenemos que para toda  $f \in \mathcal{H}$ ,  $AP_k f \in \ker(A - \lambda_k I)$  y  $AP_k f = \lambda_k P_k f$ . Así,

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f$$

y ya que  $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \ker(A - \lambda_k I)$ , se sigue que  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = I$ . Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} A^2 f &= A \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k AP_k f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 P_k f \\ (A + \zeta I) f &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f + \zeta \sum_{k=1}^{\infty} P_k f = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \zeta) P_k f, \\ A^{-1} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k f. \end{aligned}$$

Veamos que la última igualdad es cierta.

$$\begin{aligned} AA^{-1}f &= A \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k f \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} AP_k f \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k f = f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A^{-1} P_k f = A^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k f \right) = A^{-1} Af \end{aligned}$$

### 3.5. Operadores isométricos

**Definición 3.5.1.** (Operador isométrico) Sean  $D$  y  $R$  subespacios de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Sea  $V$  un operador lineal, donde  $\text{dom}(V) = D$  y  $\text{ran}(V) = R$ ,  $V$  es isométrico si

$$\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$$

para  $x, y \in \text{dom}(V)$ .

*Comentario 3.5.2.* Nótese que  $V$  es acotado y por el Teorema 3.1.21 es cerrado.

*Comentario 3.5.3.* Veamos que si el operador  $V$  tiene dominio tal que  $\dim(\text{dom}(V)) < \infty$ , entonces  $\dim(\text{ran}(V)) < \infty$  y  $\dim(\text{dom}(V)) = \dim(\text{ran}(V))$ . La demostración es análoga a la del Teorema 2.2.16.

**Teorema 3.5.4.** *El núcleo espectral de un operador isométrico se encuentra contenido en el círculo unitario, en notación,  $\hat{\sigma}(V) \subset \mathbb{T}$ .*

*Demostración.* Sea  $V$  un operador simétrico y  $f \in \text{dom}(V)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|(V - \zeta I)f\| &= \|Vf - \zeta f\| \geq \left| \|Vf\| - \|\zeta f\| \right| \\ &= \left| \|Vf\| - |\zeta| \|f\| \right| = \left| \|f\| - |\zeta| \|f\| \right| \\ &= |1 - |\zeta|| \|f\|, \end{aligned}$$

si  $|\zeta| \neq 1$ , implica  $\zeta \in \hat{\rho}(V)$ , por lo tanto  $\hat{\sigma}(V) \subset \mathbb{T}$ . □

*Comentario 3.5.5.* Del Teorema 3.5.4 se sigue que si  $|\zeta| \neq 1$ , entonces  $\zeta \in \hat{\rho}(V)$ . Así del Corolario 3.2.4 la  $\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(T - \zeta I))$  es constante cuando  $|\zeta| > 1$  y de igual manera cuando  $|\zeta| < 1$ .

**Definición 3.5.6.** Sea  $V$  un operador isométrico. Definimos los “índices de deficiencia” interior y exterior de  $V$ , denotados por  $n_i = n_i(V)$  y  $n_e = n_e(V)$ , respectivamente. Dados por las igualdades:

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I)) := \begin{cases} n_e(V) & \text{si } |\zeta| > 1 \\ n_i(V) & \text{si } |\zeta| < 1. \end{cases} \quad (3.50)$$



*Comentario 3.5.7.* Por el Teorema 3.2.3  $n_e$  y  $n_i$  son constantes, en el interior y exterior, respectivamente, del círculo unitario.

**Teorema 3.5.8.** *Sea  $V$  un operador isométrico. Entonces*

$$n_i(V) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V)) \quad n_e(V) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) \quad (3.51)$$

*Demostración.* La primer igualdad de la ecuación (3.51) es obvia tomando  $\zeta = 0$  en la Definición 3.5.6. Sea  $I_{\text{dom}(V)}$  la identidad restringida al subespacio  $\text{dom}(V)$ . Así,

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})). \quad (3.52)$$

Del hecho de que  $V$  es isométrico, se sigue que

$$\|\zeta f\| = |\zeta| \|f\| = |\zeta| \|Vf\|, \quad (3.53)$$

para toda  $f \in \text{dom}(V)$  y  $|\zeta| > 1$ . Reacomodando (3.53), tenemos

$$\|Vf\| = |\zeta|^{-1} \|\zeta f\|.$$

Si  $|\zeta| > 1$  la ecuación (3.53) queda

$$\|Vf\| < \|\zeta f\|. \quad (3.54)$$

Del Teorema 3.2.2  $\text{ran}(V - \zeta I)$  es cerrado cuando  $|\zeta| > 1$ . Además, para toda  $f \in \text{dom}(V)$ ,  $(V - \zeta I)f = (V - \zeta I_{\text{dom}(V)})f$ , entonces  $\text{ran}(V - \zeta I) = \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$ . Ahora, suponga que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})) < \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})) \quad \text{con} \quad |\zeta| > 1.$$

Por el Lema 3.1.16 existe  $h \in \mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$ ,  $h \neq 0$ , tal que  $h \perp \mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})$ , o sea que  $h \in \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})$ , por lo que existe  $f \in \text{dom}(I_{\text{dom}(V)})$  tal que  $h = (\zeta I_{\text{dom}(V)})f$ . Pero del hecho de que  $h \in \mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$  tenemos que  $h \perp \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$ . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, (V - \zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle = \langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, (V - \zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle \\ &= \langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, Vf \rangle - \langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, (\zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Despejando el lado derecho de la ultima igualdad en la ecuación anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, Vf \rangle &= \langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, (\zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle \\ &= \|(\zeta I_{\text{dom}(V)})f\|^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

ya que  $\langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, Vf \rangle = |\langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, Vf \rangle|$  podemos utilizar el Teorema 2.1.3 sobre la ecuación (3.56), obteniendo

$$\begin{aligned} \|(\zeta I_{\text{dom}(V)})f\|^2 &= |\langle (\zeta I_{\text{dom}(V)})f, Vf \rangle| \\ &\leq \|(\zeta I_{\text{dom}(V)})f\| \|Vf\|. \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación anterior obtenemos

$$\|\zeta f\|^2 \leq \|\zeta f\| \|Vf\|,$$

lo cual contradice la ecuación (3.54). Suponga que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})) > \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})) \quad \text{con} \quad |\zeta| > 1.$$

Por el Lema 3.1.16 existe  $h \in \mathcal{H} \ominus \text{ran}(\zeta I_{\text{dom}(V)})$ ,  $h \neq 0$ , tal que  $h \perp \mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$ , entonces  $h \in \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})$ , por lo que existe  $f \in \text{dom}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)}) = \text{dom}(V)$  tal que  $h = (V - \zeta I_{\text{dom}(V)})f$ . Así, ya que  $h \perp \text{dom}(V)$ , tenemos

$$0 = \langle h, (\zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle = \langle (V - \zeta I_{\text{dom}(V)})f, (\zeta I_{\text{dom}(V)})f \rangle.$$

Esta igualdad coincide con (3.55) y sabemos que lleva a una contradicción. Concluimos que

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})) = \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})).$$

Retomando la ecuación (3.52) y tomando en cuenta lo dicho anteriormente, concluimos que

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(I_{\text{dom}(V)})) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I_{\text{dom}(V)})) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \zeta I)) = n_e(V), \end{aligned}$$

la última igualdad de la ecuación anterior es directa de la Definición (3.51).  $\square$

**Definición 3.5.9.** Un operador  $V$  es unitario sii es isométrico y

$$\text{dom}(V) = \text{ran}(V) = \mathcal{H}.$$

**Corolario 3.5.10.** Sea  $V$  un operador isométrico.  $V$  es unitario sii

$$n_i(V) = n_e(V) = 0$$

*Demostración.* La demostración es directa tomando en cuenta el Teorema 3.5.8 y la Definición 3.5.9.  $\square$

**Teorema 3.5.11.** Para un operador unitario  $V$  tenemos  $\hat{\sigma}(V) = \sigma(V)$ . Por lo que el espectro es un conjunto cerrado en el círculo unitario complejo.

*Demostración.* Sabemos por definición que  $\hat{\sigma}(V) \subset \sigma(V)$ . Basta probar que  $\sigma(V) \subset \hat{\sigma}(V)$ . Sea  $V$  unitario, entonces por Corolario 3.5.10 tenemos  $n_i = n_e = 0$ . Esto implica que  $\hat{\rho}(V) \setminus \mathbb{T} = \rho(V) \setminus \mathbb{T}$  (véanse las Definiciones 3.2.5 y 3.5.6). Falta entonces demostrar que el conjunto de puntos de tipo regular coincide con el conjunto resolvente en  $\mathbb{T}$ . Suponga  $\zeta_0 \in \mathbb{T}$  y  $\zeta_0 \notin \hat{\sigma}(V)$ , es decir,  $\zeta_0 \in \hat{\rho}(V)$ . Por el Teorema 3.2.3 existe una vecindad de  $\zeta_0$  contenida totalmente en  $\hat{\rho}(V)$ , donde  $\dim \ker(V^* - \bar{\zeta}_0 I)$  es constante. Pero esta vecindad interseca  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$  y como  $n_i = n_e = 0$ , entonces  $\dim \ker(V^* - \bar{\zeta}_0 I) = 0$ . Esto significa que  $\zeta_0 \in \rho(V)$ , lo cual implica  $\zeta_0 \notin \sigma(V)$ .  $\square$

### 3.6. Transformada de Cayley

**Definición 3.6.1.** Sea  $A$  un operador simétrico cerrado. La transformada de Cayley  $V$  de  $A$  está definida por la igualdad

$$V := (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1}, \quad (3.57)$$

con  $\lambda \notin \mathbb{R}$ .

*Comentario 3.6.2.* Del Teorema 3.3.9 se sigue que  $\bar{\lambda} \in \hat{\rho}(V)$ , lo que significa que  $(A - \bar{\lambda} I)^{-1}$  es acotado y  $V$  está definido correctamente.

**Teorema 3.6.3.** Sea  $V$  como en la Definición 3.6.1, entonces  $V$  es un operador isométrico.

*Demostración.* Sea  $f \in \text{dom}(A)$  defínanse los vectores

$$h := (A - \bar{\lambda} I)f \quad Vh := (A - \lambda I)f. \quad (3.58)$$

Puesto que  $A - \bar{\lambda} I$  es invertible con  $\text{Im } \lambda \neq 0$ , entonces (3.58) define la acción del operador  $V$ . En efecto, suponga que a  $h$  le corresponden los vectores  $Vh$  y  $\widetilde{V}h$  tales que  $Vh \neq \widetilde{V}h$ , ya que  $A - \bar{\lambda} I$  es invertible, entonces escribimos  $(A - \bar{\lambda} I)^{-1}h = f$ , e insertamos esta expresión en la segunda igualdad de (3.58). Así,

$$\begin{aligned} Vh &= (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1}h \\ \widetilde{V}h &= (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1}h. \end{aligned}$$

Tomando la diferencia entre las igualdades de arriba, tenemos que

$$Vh - \widetilde{V}h = 0,$$

lo que implica que  $Vh = \widetilde{V}h$ . Por lo tanto, a cada  $h = (A - \bar{\lambda} I)f$  le corresponde de un sólo vector  $Vh$ . Osea que  $V$  es un operador y de (3.58) se verifica fácilmente que es lineal.

Sea  $\lambda = \alpha + i\beta$  y  $h \in \text{dom}(V)$ , entonces

$$\begin{aligned}\|Vh\|^2 &= \|(A - \lambda I)f\|^2 = \|(A - \alpha)f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2 \\ \|h\|^2 &= \|(A - \bar{\lambda}I)f\|^2 = \|(A - \alpha)f\|^2 + \beta^2 \|f\|^2,\end{aligned}$$

lo que implica que  $\|Vh\| = \|h\|$ . Para terminar la demostración probaremos que  $\text{dom}(V)$  es cerrado.

Como  $A$  es simétrico y cerrado y el operador  $\lambda I \in B(\mathcal{H})$ , entonces por el Teorema 3.1.24  $A - \bar{\lambda}I$  es cerrado. Además,  $\bar{\lambda} \in \hat{\rho}(A)$  implica que existe  $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$  y es acotado. Así, del Teorema 3.1.23, tenemos que  $(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$  es cerrado y acotado. Por lo cual, por el Teorema 3.1.21, el  $\text{ran}(A - \lambda I)$  es cerrado. De la primera igualdad en la ecuación (3.58), se sigue que  $\text{dom}(V) = \text{ran}(A - \bar{\lambda}I)$ , entonces  $\text{dom}(V)$  es cerrado.  $\square$

**Teorema 3.6.4.** *Sea  $V$  como en la Definición 3.6.1. Entonces*

$$\overline{\text{ran}(V - I)} = \mathcal{H}. \quad (3.59)$$

*Demostración.* Tomemos la diferencia entre las ecuaciones (3.58) como sigue:

$$\begin{aligned}Vh - h &= (A - \lambda I)f - (A - \bar{\lambda}I)f \\ &= Af - \lambda f - Af + \bar{\lambda}f \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda)f.\end{aligned}$$

Ahora, multipliquemos la segunda igualdad por  $\bar{\lambda}$  y la primera por  $\lambda$  en la ecuación (3.58) y tomamos su diferencia obteniendo:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}Vh - \lambda h &= \bar{\lambda}(A - \lambda I)f - \lambda(A - \bar{\lambda}I)f \\ &= \bar{\lambda}Af - \bar{\lambda}\lambda f - \lambda Af + \lambda\bar{\lambda}f \\ &= (\bar{\lambda} - \lambda)Af.\end{aligned}$$

Reacomodando la ecuaciones anteriores obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(\bar{\lambda} - \lambda)f = (V - I)h \quad (\bar{\lambda} - \lambda)Af = (\bar{\lambda}V - \lambda I)h, \quad (3.60)$$

entonces de la primera ecuación en (3.60) obtenemos inmediatamente que  $\text{ran}(V - I) = \text{dom}(A)$ . Y como el  $\overline{\text{dom}(A)} = \mathcal{H}$ , se tiene que el  $\overline{\text{ran}(V - I)} = \mathcal{H}$ .  $\square$

**Lema 3.6.5.** *Sea  $V$  un operador isométrico. Si el  $\overline{\text{ran}(V - I)} = \mathcal{H}$ , entonces  $1 \notin \sigma_p(V)$ .*

*Demostración.*  $1 \notin \sigma_p(V)$  si  $\ker(V - I) = \{0\}$ . Sea  $f \in \text{dom}(V) = \text{dom}(V - I)$  y  $g \in \ker(V - I)$ , por lo que  $Vg = g$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle (V - I)f, g \rangle &= \langle Vf, g \rangle - \langle f, g \rangle = \langle Vf, Vg \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= \langle f, g \rangle - \langle f, g \rangle = 0,\end{aligned}$$

lo cual implica  $\langle (V - I)f, g \rangle = 0$ . Así, cuando  $f$  recorre todo  $\text{dom}(V)$ , entonces  $(V - I)f$  recorre todo el  $\text{ran}(V - I)$  y ya que el rango es denso, por el Lema 2.3.6,  $g = 0$ . Por lo tanto  $\ker(V - I) = \{0\}$ .  $\square$

**Teorema 3.6.6.** *Sea  $V$  como en la Definición 3.6.1. Entonces  $A$  puede ser recuperado de forma única a partir de su transformada de Cayley  $V$ .*

*Demostración.* Ya que  $V$  es transformada de Cayley, del Teorema 3.6.4 obtenemos que  $V$  satisface (3.59). Por el Lema 3.6.5, se sigue que  $(V - I)^{-1}$  existe, por lo que podemos despejar  $A$  de la ecuación (3.57) obteniendo:

$$A = (\bar{\lambda}V - \lambda I)(V - I)^{-1}. \quad (3.61)$$

Por como esta escrita la ecuación (3.61) el operador  $A$  es único.  $\square$

**Teorema 3.6.7.** *La transformación de Cayley  $V = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$  pone en correspondencia uno a uno al conjunto de operadores simétricos cerrados y los operadores isométricos que satisfacen (3.59).*

*Demostración.* Claramente de (3.57) tenemos que  $A$  determina unívocamente a  $V$ . Además de los Teoremas 3.6.3 y 3.6.4 se sigue que  $V$  es isométrico y satisface (3.59). Por otra parte, si  $V$  es isométrico y satisface (3.59), entonces por el Lema 3.6.5 existe  $(V - I)^{-1}$  y podemos definir  $A$  por medio de (3.61). El operador  $A$  es denso porque  $\text{dom}(A) = \text{ran}(V - I)$  y es cerrado ya que  $\text{ran}(A - \bar{\lambda}I) = \text{dom}(V)$  y  $\text{dom}(V)$  es cerrado esto como consecuencia del Teorema 3.2.2 y del hecho de que  $\text{dom}(V)$  es subespacio. Ahora, sea  $f \in \text{dom}(A)$  y  $\lambda = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$ , tomamos  $f$  y  $Af$  como en las ecuaciones (3.60), el producto interior

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\lambda} - \lambda)Af, \bar{\lambda} - \lambda \rangle f \rangle &= 2i\beta(-2i\beta) \langle Af, f \rangle \\ &= 4\beta^2 \langle Af, f \rangle = \langle (V - I)h, (\bar{\lambda}V - \lambda I)h \rangle = \langle Vh - h, \bar{\lambda}Vh - \lambda h \rangle \\ &= \langle Vh, \bar{\lambda}Vh \rangle - \langle Vh, \lambda h \rangle - \langle h, \lambda Vh \rangle + \langle h, \lambda h \rangle \\ &= \bar{\lambda} \|Vh\|^2 + \lambda \|h\|^2 - \bar{\lambda} \langle Vh, h \rangle - \lambda \langle h, Vh \rangle, \end{aligned}$$

usando el hecho de que  $V$  es isométrico y propiedades del producto interior la ultima igualdad en la ecuación anterior, resulta en:

$$\begin{aligned} &(\bar{\lambda} + \lambda) \|h\|^2 - (\langle Vh, \lambda h \rangle + \overline{\langle Vh, \lambda h \rangle}) \\ &= 2\alpha \|h\|^2 - 2 \text{Re} \langle Vh, \lambda h \rangle, \end{aligned}$$

esto implica que  $\langle Af, f \rangle \in \mathbb{R}$ , entonces  $A$  es simétrico como consecuencia del Teorema 3.3.4. Por lo que a cada  $V$  isométrico que satisface (3.59) le corresponde un operador simétrico cerrado dado por (3.61).  $\square$

**Teorema 3.6.8.** *Sea  $V$  la transformada de Cayley de  $A$ . Entonces*

$$\begin{aligned} n_-(A) &= n_i(V) \\ n_+(A) &= n_e(V). \end{aligned}$$

*Demostración.* Ya que  $V$  es transformada de Cayley de  $A$  de las ecuaciones (3.58), se sigue que

$$\text{dom}(V) = \text{ran}(A - \bar{\lambda}I) \quad \text{ran}(V) = \text{ran}(A - \lambda I),$$

entonces tomando en cuenta las ecuaciones anteriores el Teorema 3.5.8 y las Definiciones 3.3.11 y 3.5.6 se tiene que

$$\begin{aligned} n_-(A) &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(A - \lambda I)) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \lambda I)) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V)) = n_i(V) \end{aligned}$$

tomando  $\lambda < 0$ , entonces  $\bar{\lambda} > 0$  obteniendo

$$\begin{aligned} n_+(A) &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(A - \bar{\lambda}I)) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V - \bar{\lambda}I)) \\ &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) = n_e(V). \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.6.9.** *Un operador simétrico cerrado  $A$  es auto-adjunto sii su transformada de Cayley es un operador unitario.*

*Demostración.* Sea  $A$  un operador auto-adjunto y  $V$  su operador isométrico asociado mediante la transformada de Cayley. Por el Teorema 3.3.13, tenemos que

$$n_-(A) = n_+(A) = 0.$$

Y por el Teorema 3.6.8, tendríamos que

$$\begin{aligned} 0 &= n_-(A) = n_i(V) \\ 0 &= n_+(A) = n_e(V), \end{aligned}$$

entonces por el Corolario 3.5.10  $V$  es unitario. Recíprocamente, sea  $V$  un operador unitario y  $A$  el operador simétrico del cual  $V$  es transformada de Cayley. Ya que  $V$  es unitario del Corolario 3.5.10, tenemos que

$$n_i(V) = n_e(V) = 0.$$

Así, del Teorema 3.6.8, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= n_i(V) = n_-(A) \\ 0 &= n_e(V) = n_+(A), \end{aligned}$$

entonces de las ecuaciones anteriores y por Teorema 3.3.13, concluimos que  $A$  es auto-adjunto. □

### 3.7. Extensiones de von Neumann

Sabemos que un operador simétrico cerrado  $A$  es restricción de su adjunto, es decir,  $A \subset A^*$ . Ahora suponga que existe un operador simétrico cerrado  $\tilde{A}$  que es extensión de  $A$ . Ya que  $A \subset \tilde{A}$ , entonces del Teorema 3.3.5 se sigue que  $\tilde{A}^* \subset A^*$ . Así, para cualquier extensión simétrica  $\tilde{A}$  de  $A$  se obtiene la siguiente cadena:

$$A \subset \tilde{A} \subset \tilde{A}^* \subset A^*.$$

**Teorema 3.7.1.** *Sea  $A$  un operador simétrico y  $\bar{A}$  la cerradura de  $A$ . Entonces  $\bar{A}$  es una extensión simétrica de  $A$ .*

*Demostración.* Ya que  $A$  es un operador simétrico tenemos que  $A \subset A^*$  y del hecho de que  $\bar{A}$  es la cerradura de  $A$  tenemos que  $A \subset \bar{A}$ . En términos de sus gráficas tenemos que  $G(A) \subset G(A^*)$ ,  $G(A) \subset G(\bar{A}) = \overline{G(A)}$ . Por lo tanto, ya que,  $\overline{G(A)}$  es el mínimo subespacio cerrado en  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  que contiene a  $G(A)$ , entonces  $G(\bar{A}) \subset G(A^*) = \overline{G(A^*)}$  esta última igualdad es consecuencia de la ecuación (3.18). Por lo tanto  $\bar{A} \subset A^*$ , concluyendo que  $\bar{A}$  es simétrico.  $\square$

**Definición 3.7.2.** Sea  $\{\mathcal{L}_k\}_{k=1}^N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) un sucesión de conjuntos lineales en un espacio lineal,  $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}_j = \{0\}$  ( $k \neq j$ ), entonces  $\text{span}\{\mathcal{L}_k\}_{k=1}^N$  se denotara por

$$\mathcal{L}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{L}_N$$

y se llamara suma directa de los conjuntos lineales  $\mathcal{L}_k$   $k = 1, \dots, N$ .

Note que  $\dim(\mathcal{L}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{L}_n) = \dim(\mathcal{L}_1) + \cdots + \dim(\mathcal{L}_n)$ .

**Teorema 3.7.3.** *(Primera formula de von Neumann) Sea  $A$  un operador simétrico cerrado. Entonces el dominio de  $A^*$  esta dado por:*

$$\text{dom}(A^*) = \text{dom}(A) \dot{+} \ker(A^* - \lambda I) \dot{+} \ker(A^* - \bar{\lambda} I), \quad (3.62)$$

con  $\text{Im } \lambda \neq 0$ .

*Demostración.* Claramente la parte derecha de la ecuación (3.62) esta contenida en  $\text{dom}(A^*)$ , esto por la simetría del operador  $A$ . Demostraremos la contención contraria. Sea  $g \in \text{dom}(A^*)$ , por el Teorema 3.1.36 podemos escribimos

$$\mathcal{H} = \text{ran}(A - \lambda I) \oplus \ker(A^* - \bar{\lambda} I), \quad (3.63)$$

entonces

$$\begin{aligned} (A^* - \lambda I)g &= (A - \lambda I)f + (A^* - \lambda I)\bar{u} \\ &= (A - \lambda I)f + (\bar{\lambda} - \lambda)\bar{u} \end{aligned} \quad (3.64)$$

con  $f \in \text{dom}(A)$  y  $\bar{u} \in \ker(A^* - \bar{\lambda}I)$ , la ecuación (3.64) tiene lugar sii

$$(A - \lambda I)(g - f - \bar{u}) = 0$$

donde  $g - f - \bar{u} = u \in \ker(A^* - \lambda I)$ , implica que  $g = f + u + \bar{u}$ . Ahora, veamos que la suma es directa en la ecuación (3.62). Sea  $g = 0$ , es decir,  $f + u + \bar{u} = 0$ . Aplicamos  $A^* - \lambda I$ , obtenemos  $(A - \lambda I)f + (\bar{\lambda} - \lambda)\bar{u} = 0$  y tomando en cuenta la ecuación (3.63), resulta  $\bar{u} = 0$ ,  $(A - \lambda I)f = 0$ . Implicando que  $f = 0$  y entonces  $u = 0$ .  $\square$

*Comentario 3.7.4.* Ya que  $A^*$  es lineal actúa sobre sumas directas (véase Definición 3.7.2), de la ecuación (3.62), se sigue que

$$\begin{aligned} \dim \left[ \frac{\text{dom}(A^*)}{\text{dom}(A)} \right] &= \dim(\ker(A^* - \lambda I) \dot{+} \ker(A^* - \bar{\lambda}I)) \\ &= \dim \ker(A^* - \lambda I) + \dim \ker(A^* - \bar{\lambda}I). \end{aligned}$$

Ahora, tomando en cuenta la ecuación(3.45), se tiene que

$$\dim \left[ \frac{\text{dom}(A^*)}{\text{dom}(A)} \right] = n_-(A) + n_+(A). \quad (3.65)$$

Cabe agregarse que  $n_{\pm}(A)$  es independiente de  $\lambda$ .

**Lema 3.7.5.** *Sea  $V$  la transformada de Cayley de  $A$ . Entonces toda extensión isométrica de  $V$  da lugar a un extensión simétrica de  $A$  por medio de la transformada inversa de Cayley.*

*Demostración.* Sea  $\tilde{V}$  una extensión isométrica de  $V$ . Como  $V$  es transformada de Cayley de  $A$ , entonces  $\overline{\text{ran}(V - I)} = \mathcal{H}$ . Claramente  $\overline{\text{ran}(\tilde{V} - I)} = \mathcal{H}$ , por el Teorema 3.6.7, se sigue que la transformada de Cayley de  $\tilde{V}$  da un operador simétrico cerrado. Así, obtenemos que  $\text{dom}(\tilde{A}) = \text{ran}(\tilde{V} - I)$  y ya sabíamos que  $\text{dom}(A) = \text{ran}(V - I)$ , usando esto y el hecho de que  $V \subset \tilde{V}$  se tiene que  $\text{ran}(V - I) \subset \text{ran}(\tilde{V} - I)$ , entonces  $\text{dom}(A) \subset \text{dom}(\tilde{A})$ . Ahora, sea  $f \in \text{dom}(A)$  y tomamos la transformada inversa de  $\tilde{A}$ ;

$$\tilde{A}f = (\bar{\lambda}\tilde{V} - \lambda I)(\tilde{V} - I)^{-1}f,$$

puesto que  $V \subset \tilde{V}$  y por el Teorema 3.1.5, se sigue que

$$(\bar{\lambda}\tilde{V} - \lambda I)(\tilde{V} - I)^{-1}f = (\bar{\lambda}V - \lambda I)(V - I)^{-1}f = Af.$$

$\square$

*Comentario 3.7.6.* Existe una forma sencilla de construir extensiones isométricas de un operador isométrico dado  $V$ . Efectivamente, ya que  $\text{dom}(V)$  y  $\text{ran}(V)$  son subespacios podemos tomar subespacios  $D_0 \subset (\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V))$  y  $R_0 \subset (\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V))$  tales que



$\dim(D_0) = \dim(R_0) = n_0$  y construimos una isometría  $V_0 : D_0 \rightarrow R_0$ . Ahora, sea  $\tilde{V}$  el operador definido en

$$\text{dom}(\tilde{V}) = \text{dom}(V) \oplus D_0 \quad (3.66)$$

tal que para toda  $f$  en el conjunto dado por (3.66)

$$\tilde{V}f = VP_{\text{dom}(V)}f + V_0P_{D_0}f \quad (3.67)$$

donde  $P_{\text{dom}(V)}, P_{D_0}$  son los operadores de proyección (véase Definición 3.1.13).

**Teorema 3.7.7.** *El operador  $\tilde{V}$  dado en el Comentario 3.7.6 es una extensión de  $V$  y además,*

$$\text{ran}(\tilde{V}) = \text{ran}(V) \oplus R_0. \quad (3.68)$$

*Demostración.* Claramente de la ecuación (3.66), se sigue que el  $\text{dom}(V) \subset \text{dom}(\tilde{V})$ . Sea  $f \in \text{dom}(V)$ , entonces ya que  $f$  es ortogonal a  $D_0$ , se sigue que  $V_0P_{D_0}f = 0$  y ya que  $f \in \text{dom}(V)$ , se obtiene que  $VP_{\text{dom}(V)}f = Vf$ . Por lo tanto de (3.67) se tiene que

$$\tilde{V}f = VP_{\text{dom}(V)}f + 0 = Vf.$$

Ahora, veamos que efectivamente el  $\text{ran}(\tilde{V})$  está dado como en la ecuación (3.68). En efecto,

$$\begin{aligned} \text{ran}(\tilde{V}) &= \tilde{V} \text{dom}(\tilde{V}) = \tilde{V}(\text{dom}(V) \oplus D_0) \\ &= \tilde{V} \text{dom}(V) \dot{+} \tilde{V}D_0 = V \text{dom}(V) \dot{+} V_0D_0 \\ &= \text{ran}(V) \oplus R_0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.7.8.** *Toda extensión isométrica se construye como en el Comentario 3.7.6.*

*Demostración.* Sea  $V$  un operador isométrico dado y  $\hat{V}$  una extensión arbitraria isométrica de  $V$ . Del hecho de que  $V \subset \hat{V}$ , se sigue que los subespacios  $\text{dom}(V)$ ,  $\text{dom}(\hat{V})$  satisfacen que  $\text{dom}(V) \subset \text{dom}(\hat{V})$ . Ahora, sea  $f \in \text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)$  y  $g \in \text{ran}(V)$  o sea que existe  $\tilde{f} \in \text{dom}(V)$  tal que  $V\tilde{f} = g$ , tomando en cuenta que  $\hat{V}$  es un operador isométrico y una extensión isométrica de  $V$ , resulta que

$$\begin{aligned} \langle \hat{V}f, g \rangle &= \langle \hat{V}f, V\tilde{f} \rangle = \langle \hat{V}f, \hat{V}\tilde{f} \rangle \\ &= \langle f, \tilde{f} \rangle = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $g \perp \hat{V}f$ . Así,  $\hat{V}f \in \text{ran}(\hat{V}) \ominus \text{ran}(V)$  y claramente  $\hat{V} \upharpoonright_{\text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)}$  es isometría puesto que  $\|\hat{V}f\| = \|f\|$  para toda  $f$  en  $\text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)$ , por lo que  $\dim(\text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)) = \dim(\text{ran}(\hat{V}) \ominus \text{ran}(V))$ . Así, definimos  $\hat{V} \upharpoonright_{\text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)} =: V_0$

y  $D_0 := \text{dom}(\hat{V}) \ominus \text{dom}(V)$ ,  $R_0 := \text{ran}(\hat{V}) \ominus \text{ran}(V)$ . Ahora, para toda  $w \in \text{dom}(\hat{V})$ , tenemos que

$$\hat{V}w = VP_{\text{dom}(V)}w + V_0P_{D_0}w$$

□

**Corolario 3.7.9.** *Toda extensión simétrica cerrada es la transformada inversa de Cayley de una extensión isométrica dada por el Comentario 3.7.6.*

*Demostración.* Este corolario es consecuencia del Lema 3.7.5 y del Teorema 3.7.8. □

**Teorema 3.7.10.** *(Segunda formula de von Neumann) Sea  $A$  un operador simétrico cerrado y  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Consideremos  $D_0 \subset \ker(A^* - \lambda I)$ ,  $R_0 \subset \ker(A^* - \bar{\lambda}I)$  subespacios tales que  $\dim D_0 = \dim R_0$ . Dado  $V_0$  un operador isométrico de  $D_0$  a  $R_0$ . Entonces la formula*

$$\text{dom}(\tilde{A}) = \text{dom}(A) \dot{+} (V_0 - I)D_0 \quad (3.69)$$

*define el dominio para una extensión simétrica cerrada  $\tilde{A}$  de  $A$  y el dominio de cada una de esas extensiones tiene descomposición de la forma (3.69).*

*Demostración.* Sea  $A$  un operador simétrico cerrado, por medio de la transformada inversa de Cayley le asociamos un operador isométrico  $V$ . Por ser  $V$  transformada de Cayley de  $A$  tenemos que  $\text{dom}(A) = \text{ran}(V - I)$ ,  $\text{dom}(V) = \text{ran}(A - \bar{\lambda}I)$ . Ahora, extendemos  $V$  como en el Comentario 3.7.6 usando  $V_0$ . Así, obtenemos  $\tilde{V}$  y del Teorema 3.1.36 se sigue que

$$\begin{aligned} D_0 \subset \ker(A^* - \lambda I) &= \mathcal{H} \ominus \text{ran}(A - \bar{\lambda}I) = \mathcal{H} \ominus \text{dom}(V) \\ R_0 \subset \ker(A^* - \bar{\lambda}I) &= \mathcal{H} \ominus \text{ran}(A - \lambda I) = \mathcal{H} \ominus \text{ran}(V), \end{aligned}$$

donde  $V_0$  va de  $D_0$  a  $R_0$ . Así, del Corolario 3.7.9 obtenemos una extensión simétrica cerrada  $\tilde{A}$  de  $A$ . Donde el  $\tilde{A}$  tiene dominio dado por

$$\begin{aligned} \text{dom}(\tilde{A}) &= \text{ran}(\tilde{V} - I) = (\tilde{V} - I) \text{dom}(\tilde{V}) = (\tilde{V} - I)[\text{dom}(V) \oplus D_0] \\ &= (\tilde{V} - I) \text{dom}(V) \dot{+} (\tilde{V} - I)D_0 = (V - I) \text{dom}(V) \dot{+} (V_0 - I)D_0 \\ &= \text{dom}(A) \dot{+} (V_0 - I)D_0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.7.11.** *Sea  $V$ ,  $\tilde{V}$  y  $n_0$  como en el Comentario 3.7.6. Entonces*

$$\begin{aligned} n_e(\tilde{V}) &= n_e(V) - n_0 \\ n_i(\tilde{V}) &= n_i(V) - n_0 \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $V$  un operador isométrico y  $\tilde{V}$  como en el Comentario 3.7.6, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \ominus \text{dom}(\tilde{V}) &= \mathcal{H} \ominus (\text{dom}(V) \oplus D_0) \\ &= \{h \in \mathcal{H} : h \perp (\text{dom}(V) \oplus D_0)\} \\ &= \{h \in \mathcal{H} : h \perp \text{dom}(V) \text{ y } x \perp D_0\} \\ &= \{h \in (\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) : x \perp D_0\} \\ &= (\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) \ominus D_0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}n_e(\tilde{V}) &= \dim(\mathcal{H} \ominus \text{dom}(\tilde{V})) \\ &= \dim((\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) \ominus D_0) \\ &= \dim((\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V))) - \dim(D_0) \\ &= n_e(V) - n_0.\end{aligned}$$

La demostración para  $n_i(V)$  es análoga a la anterior.  $\square$

**Corolario 3.7.12.** *Sea  $A$  y  $\tilde{A}$  los operadores simétricos cerrados correspondientes a  $V$  y  $\tilde{V}$  del Comentario 3.7.6. Entonces*

$$n_{\pm}(\tilde{A}) = n_{\pm}(A) - n_0. \quad (3.70)$$

*Demostración.* La demostración es directa tomando en cuenta los Teoremas 3.7.11 y 3.6.8 y el Corolario 3.7.9.  $\square$

*Comentario 3.7.13.* Podemos construir de un modo sencillo extensiones de operadores isométricos que sean operadores unitarios cuando  $n_e(V) = n_i(V)$ . En efecto, sea  $V$  y  $\tilde{V}$  como en el Comentario 3.7.6, pero tomemos  $D_0$  y  $R_0$  como sigue:

$$\begin{aligned}D_0 &= (\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)) \\ R_0 &= (\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V)),\end{aligned}$$

entonces el operador  $\tilde{V}$  tiene dominio dado por

$$\text{dom}(\tilde{V}) = \text{dom}(V) \oplus D_0 = \mathcal{H}.$$

Del Teorema 3.7.7, se sigue que  $\tilde{V}$  es isométrico y además

$$\text{ran}(\tilde{V}) = \text{ran}(V) \oplus R_0 = \mathcal{H}.$$

Lo cual implica que  $\tilde{V}$  es unitario. Para diferentes isometrías de  $\mathcal{H} \ominus \text{dom}(V)$  a  $\mathcal{H} \ominus \text{ran}(V)$  obtenemos diferentes extensiones unitarias.

*Comentario 3.7.14.* Del Comentario 3.7.13 claramente,  $V$  tiene extensiones unitarias sii  $n_e(V) = n_i(V)$ . Por el Corolario 3.7.9 y el Teorema 3.6.8, tenemos que el operador simétrico cerrado  $A$  tiene extensiones auto-adjuntas sii  $n_+(A) = n_-(A)$ .

A los “índices que deficiencia” de un operador simétrico  $n_{\pm}(A)$  los escribiremos por el par ordenado  $(n_+(A), n_-(A))$ .

**Corolario 3.7.15.** *Toda extensión simétrica cerrada de un operador simétrico cerrado con índices de deficiencia  $(1, 1)$  es un operador auto-adjunto.*

*Demostración.* Observe primero que del Comentario 3.7.14 nuestro operador tiene extensiones auto-adjuntas. De la ecuación (3.70), se sigue que

$$n_{\pm}(\tilde{A}) < n_{\pm}(A) = 1,$$

por lo que  $n_{\pm}(\tilde{A}) = 0$  ya que no existen dimensiones fraccionarias para espacios lineales. Por lo que  $\tilde{A}$  es auto-adjunto, esto como consecuencia del Teorema 3.3.13.  $\square$



# Capítulo 4

## Representación matricial de operadores

Lo que se va hacer en este capítulo es dar un algoritmo para que a partir de un operador lineal  $T$  y una base ortonormal fija en el  $\text{dom}(T)$  definir unívocamente una matriz. Los resultados que aquí se exponen se basan en resultados de [3] y [5].

### 4.1. El problema de representación matricial de un operador

Veamos el siguiente algoritmo:

Sea  $T$  un operador lineal cualquiera con  $\text{dom}(T) \subset \mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}$  separable. Supongamos que  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(T)$  es una b.o.n. fija, definamos los números complejos

$$t_{jk} := \langle Tu_k, u_j \rangle; \quad (4.1)$$

los cuales determinan la matriz

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

De esta manera la matriz es única, ya que la base es fija. Pero, es fácil dar ejemplos de operadores distintos a  $T$  a los que el algoritmo anterior les asigna la misma matriz (4.2). En efecto, consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.1.1.** Tomemos  $\tilde{T}$  una extensión de  $T$  como en la Definición 3.1.2. Entonces claramente tenemos

$$\langle \tilde{T}u_k, u_j \rangle = \langle Tu_k, u_j \rangle = t_{jk},$$

lo que nos dice que la misma matriz (4.2) ha sido asociada a dos operadores distintos.

Esto nos hace preguntarnos ¿Bajo que condiciones una matriz define unívocamente un operador? Para poder responder de forma sencilla a esta pregunta, introduciremos un espacio de Hilbert, que en esta sección y más adelante usaremos. Dicho espacio de Hilbert es denotado  $\ell_2(\mathbb{N})$  y consiste en todas las sucesiones de números complejos  $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k|^2 < \infty, \quad (4.3)$$

con el producto interior entre  $\phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$  y  $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  definido como sigue

$$\langle \phi, \psi \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \bar{\psi}_k$$

ésta última serie es convergente como consecuencia del Teorema 2.1.3. El espacio definido, resulta ser completo con respecto a la norma generada por el producto interior. Además, vamos a considerar el subconjunto lineal de  $\ell_2(\mathbb{N})$ , denotado  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$  y que consta de las sucesiones de números complejos que tienen una cantidad finita de elementos no cero.  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$  resulta ser denso en  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

**Definición 4.1.2.** El espacio  $\ell_2(\mathbb{N})$  tiene dimensión infinita, por lo que se puede construir un operador isométrico  $U$  entre cualquier espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$  con  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$  y  $\ell_2(\mathbb{N})$ , esto como consecuencia del Teorema 2.2.16.  $U$  es el operador que actúa sobre una b.o.n.  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$  de acuerdo a

$$Uu_k = \delta_k,$$

con  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$  la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

Lo que queremos hacer es relacionar matrices y operadores de forma tal que esta relación sea biunívoca. Esto lo vamos a poder realizar sólo para ciertos operadores.

## 4.2. Representación matricial de operadores acotados

Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  y  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una b.o.n fija en  $\mathcal{H}$ . Para el operador  $T$  definimos los números  $t_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$  como en la ecuación (4.1). Estos números están definidos unívocamente, ya que la b.o.n.  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es fija. Sea  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k,$$

observe que  $Tf = \sum_{k=1}^{\infty} f_k Tu_k$ , podemos escribir  $Tf$  como sigue

$$\begin{aligned}
 (Tf)_j &= \langle Tf, u_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} f_k Tu_k, u_j \right\rangle \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \langle Tu_k, u_j \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} t_{jk} f_k,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde  $(Tf)_j$  es la descomposición de  $Tf$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , es decir,

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} (Tf)_j u_j.$$

Aplicando el operador isométrico  $U$  (véase Definición 4.1.2) a  $Tf$  y  $f$ , obtenemos

$$UTf = \begin{pmatrix} (Tf)_1 \\ (Tf)_2 \\ (Tf)_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad Uf = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

De forma que (4.4) se convierte en

$$\begin{pmatrix} (Tf)_1 \\ (Tf)_2 \\ (Tf)_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Es decir que

$$Tf = U^{-1} \begin{pmatrix} (Tf)_1 \\ (Tf)_2 \\ (Tf)_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} Uf, \tag{4.6}$$

o sea

$$T = U^{-1} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U.$$



Así, la transformación unitaria de la matriz (4.2) es el operador  $T$ . Entonces podemos asociar a la matriz

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \cdots \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

el operador  $UTU^{-1}$  y viceversa. Aquí no hay otro operador asociado a  $T$ , como en el ejemplo 4.1.1.

**Teorema 4.2.1.**  $T \in B(\mathcal{H})$  sii  $UTU^{-1} \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$

*Demostración.* Usando el hecho de que  $\text{dom}(UTU^{-1}) = U \text{dom}(T)$ , se sigue que  $UTU^{-1}$  está definido en todo  $\ell_2(\mathbb{N})$ . Entonces basta con ver que es acotado. Sea  $\phi \in \text{dom}(UTU^{-1})$  tal que  $Uf = \phi$ . Así, ya que  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces existe  $C > 0$  tal que

$$\|Tf\| \leq C \|f\|,$$

donde se sigue que

$$\|TU^{-1}\phi\| \leq C \|U^{-1}\phi\|,$$

Ya que  $U$  es isométrico, aplicamos  $U$  a la última desigualdad obteniendo

$$\|UTU^{-1}\phi\| \leq C \|\phi\|,$$

cumpliendo la Definición 3.1.8, entonces  $UTU^{-1}$  está en  $B(\ell_2(\mathbb{N}))$ . La afirmación recíproca se obtiene revirtiendo los pasos anteriores.  $\square$

Ahora, ya que  $T \in B(\mathcal{H})$ , entonces  $T^* \in B(\mathcal{H})$  como consecuencia del Teorema 3.1.32. Hacemos lo mismo que hicimos arriba para  $T$  ahora para  $T^*$ , es decir,

$$\begin{aligned} t_{jk}^* &:= \langle T^*u_k, u_j \rangle = \langle u_k, Tu_j \rangle \\ &= \overline{\langle Tu_k, u_j \rangle} = \overline{t_{kj}}, \end{aligned}$$

con  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  fija, donde los números complejos anteriores definen unívocamente la matriz

$$\begin{pmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* & \cdots \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* & \cdots \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & \bar{t}_{21} & \bar{t}_{31} & \cdots \\ \bar{t}_{12} & \bar{t}_{22} & \bar{t}_{32} & \cdots \\ \bar{t}_{13} & \bar{t}_{23} & \bar{t}_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Así, haciendo el procedimiento que hicimos anteriormente, podemos identificar de manera única la matriz (4.7) con el operador  $UT^*U^{-1}$ . Lo que quiere decir que la matriz  $UT^*U^{-1}$  se obtiene de transponer los elementos de  $UTU^{-1}$  y conjugarlos.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $T \in B(\mathcal{H})$ . Entonces*

$$UT^*U^{-1} = (UTU^{-1})^*$$

*Demostración.* Sea  $\phi, \psi \in \ell_2(\mathbb{N})$  tal que  $Ug = \psi$  y  $Uf = \phi$  con  $f, g \in \mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned} \langle UTU^{-1}\phi, \psi \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} &= \langle UTf, Ug \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} \\ &= \langle Tf, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, T^*g \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Uf, UT^*g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, UT^*U^{-1}\psi \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}, \end{aligned}$$

concluyendo que  $UT^*U^{-1} = (UTU^{-1})^*$ . □

**Teorema 4.2.3.** *Si  $T \in B(\mathcal{H})$ . Entonces la matriz definida en (4.2) satisface*

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \phi_k \right) \overline{\psi_j} \right|^2 \leq C \sum_{k \in \mathbb{N}} |\phi_k|^2 \sum_{j \in \mathbb{N}} |\psi_j|^2, \quad (4.8)$$

con cierta  $C > 0$  y para toda  $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ .

*Demostración.* Sea  $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Por el Teorema 4.2.2 tenemos que

$$\langle UTU^{-1}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, UT^*U^{-1}\psi \rangle,$$

es decir, desarrollando la expresión anterior tenemos

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} \phi_k \right) \overline{\psi_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \overline{\psi_k} \right) \phi_j. \quad (4.9)$$

Usando el hecho de que  $T \in B(\mathcal{H})$ , del Teorema 4.2.1 y el Teorema 2.1.3, concluimos que existe  $C > 0$  tal que

$$|\langle UTU^{-1}\phi, \psi \rangle| \leq C^{1/2} \|\phi\| \|\psi\|,$$

donde desarrollando esta última desigualdad obtenemos la ecuación (4.8) debido a la ecuación (4.9). □

**Teorema 4.2.4.** *Suponga que una matriz  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  satisface*

$$\left| \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^q t_{kj} \phi_k \right) \overline{\psi_j} \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^q |\phi_k|^2 \sum_{j=1}^p |\psi_j|^2, \quad (4.10)$$

para cualquier  $p, q \in \mathbb{N}$ , con cierta  $C > 0$  y para toda  $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Entonces existe un operador  $T \in B(\mathcal{H})$  tal que la matriz  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  se identifica con  $UTU^{-1}$ .

*Demostración.* Sea  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  una matriz que satisface la desigualdad (4.10) para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{N}$ . Vamos a probar que esta matriz determina a un operador acotado en  $\ell_2(\mathbb{N})$ . Tomemos  $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$  tales que

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_{j-1} = \phi_{j+1} = \cdots = 0, \quad \phi_j \neq 0 \\ \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{m-1} = \psi_{n+1} = \psi_{n+2} \cdots = 0, \quad \psi_m, \dots, \psi_n \neq 0, \end{aligned}$$

sustituyendo estos elementos en la ecuación (4.10), obtenemos

$$\left| \sum_{k=m}^n t_{kj} \overline{\psi_k} \right| \leq C \sqrt{\sum_{k=m}^n |\psi_k|^2}. \quad (4.11)$$

Esto implica la convergencia de la serie, utilizando el criterio de Cauchy de convergencia de series

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \overline{\psi_k} \quad (4.12)$$

para cualquier  $j \in \mathbb{N}$  y para cualquier  $\psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Ahora, tomemos  $m = 1$  en la ecuación (4.11), obteniendo

$$\left| \sum_{k=1}^n t_{kj} \overline{\psi_k} \right| \leq C \sqrt{\sum_{k=1}^n |\psi_k|^2} \leq C \|\psi\|.$$

Ya que esto sucede para toda  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces

$$\left| \sum_{k=1}^n t_{kj} \psi_k \right| \leq C \|\psi\|. \quad (4.13)$$

Así, del hecho de que la serie (4.12) converge, podemos hacer tender  $n \rightarrow \infty$  en la ecuación (4.13), lo que resulta en

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} t_{kj} \psi_k \right| \leq C \|\psi\|.$$

Definimos, para todo  $\psi \in \ell_2(\mathbb{N})$ ,

$$\Phi(\psi) := \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \psi_k \quad (4.14)$$

que claramente es un funcional lineal y acotado, ya que

$$|\Phi(\psi)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \psi_k \right| \leq C \|\psi\|.$$

Por el Teorema 2.3.5 existe  $\eta \in \ell_2(\mathbb{N})$  tal que

$$\Phi(\psi) = \langle \psi, \eta \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \bar{\eta}_k. \quad (4.15)$$

Igualando (4.14) con (4.15), obtenemos que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \bar{\eta}_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{kj} \psi_k,$$

es decir,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (\bar{\eta}_k - t_{kj}) \psi_k = 0.$$

Ya que esta igualdad es válida para toda  $\psi \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces

$$\bar{\eta}_k = t_{kj}.$$

Por lo tanto  $\{t_{kj}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ , lo que implica que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{kj}|^2 < \infty.$$

Definamos la acción del operador  $A_0$ , para la base canónica  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\ell_2(\mathbb{N})$  por medio de la fórmula

$$(A_0 \delta_n)_k := \sum_{j \in \mathbb{N}} t_{kj} \delta_{nj} = t_{kn},$$

para toda  $k \in \mathbb{N}$ . El elemento  $A_0 \delta_n$  está en  $\ell_2(\mathbb{N})$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , ya que  $\{t_{kj}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Ahora, por linealidad, podemos definir la acción  $A_0$  para todos los elementos de  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ , es decir, con un número finito de elementos no cero. En efecto, dado que

$$A_0 \delta_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ t_{3n} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

la acción del operador  $A_0$  sobre  $\phi = \sum_{n=1}^N \phi_n \delta_n$  está dada por

$$A_0 \phi = \sum_{n=1}^N \phi_n A_0 \delta_n = \sum_{n=1}^N \phi_n \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ t_{3n} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$(A_0 \phi)_k = \sum_{n=1}^N \phi_n t_{kn} \quad (4.16)$$

con  $\phi \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$ . Verifiquemos que el operador  $A_0$  está acotado. De la desigualdad (4.10), tenemos

$$|\langle A_0\phi, \psi \rangle| \leq C \|\phi\| \|\psi\|, \quad (4.17)$$

para todo  $\phi, \psi \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$ . Por continuidad del producto interior, (4.17) en realidad se cumple para toda  $\phi \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$  y  $\psi \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Ahora, sea  $\psi = A_0\phi \neq 0$ . Sustituyendo en (4.17), obtenemos

$$\|A_0\phi\|^2 \leq C \|\phi\| \|A_0\phi\|,$$

así,

$$\|A_0\phi\| \leq C \|\phi\|$$

Por lo tanto,  $A_0$ , definido en  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ , es acotado. De este modo, extendiendo el operador  $A_0$  por continuidad a todo  $\ell_2(\mathbb{N})$ , y denotando esa extensión como  $A$ , vemos que  $A$  es acotado y definido en todo  $\ell_2(\mathbb{N})$ . Lo que implica que  $A \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ . De (4.16), la acción del operador  $A$  se puede definir como

$$(A\phi)_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_{kn} \phi_n.$$

Del Teorema 4.2.1, tenemos que  $U^{-1}AU = T$  para algún operador  $T \in B(\mathcal{H})$ , concluyendo que  $A = UTU^{-1}$ .  $\square$

**Corolario 4.2.5.** *Una matriz satisface (4.8) sii es matriz de un operador en  $B(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* La prueba es sencilla, tomando en cuenta el Teorema 4.2.3 y el Teorema 4.2.4 y ajustando sus demostraciones.  $\square$

**Teorema 4.2.6.** *Sea  $\{t_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  la representación matricial  $T \in B(\mathcal{H})$ . Si*

$$\sum_{j,k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 < \infty, \quad (4.18)$$

entonces  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ .

*Demostración.* Suponga que tiene lugar (4.18), entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 < \infty$$

Por lo tanto, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un número entero  $p = p(\epsilon)$  tal que

$$\sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 \leq \epsilon^2.$$

Construyamos el operador  $T_\epsilon$  con la siguiente relación

$$T_\epsilon f = g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_p u_p,$$

donde

$$g_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} f_k \quad (4.19)$$

y  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k u_k$ . Note que la suma en (4.19) es convergente, ya que

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} f_k \right| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} |f_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea

$$Tf = \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j u_j,$$

entonces tenemos que

$$\|Tf - T_\epsilon f\|^2 = \left\| \sum_{j=p+1}^{\infty} g_j u_j \right\|^2$$

y por el Teorema 2.2.3

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=p+1}^{\infty} g_j u_j \right\|^2 &= \sum_{j=p+1}^{\infty} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} t_{jk} f_k \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=p+1}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |t_{jk}|^2 \|f\|^2 \leq \epsilon^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Ahora, verifiquemos que el operador  $T_\epsilon$  es compacto. Para ello, seleccionaremos cualquier conjunto acotado de vectores en  $\mathcal{H}$ . El operador  $T_\epsilon$  va a mapear este conjunto en un conjunto acotado de un subespacio de dimensión finita de  $\mathcal{H}$ , y este conjunto es compacto por el Teorema de Bolzano-Weierstrass. Por lo tanto,  $T_\epsilon$  es compacto.

Demostrando, que si

$$\|Tf - T_\epsilon f\| \leq \epsilon^2 \|f\| \quad (4.20)$$

con  $\epsilon$  arbitrario y  $T_\epsilon$  compacto, entonces  $T$  es compacto. En efecto, escogemos una sucesión de números positivos  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3 > \dots$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ . Ahora, consideremos la sucesión de operadores compactos  $\{T_{\epsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Sea  $M$  un conjunto acotado arbitrario de  $\mathcal{H}$  tales que si  $f \in M$   $\|f\| \leq C$ . Tómese una sucesión arbitraria  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $M$ . Ahora bien, por la compacidad del operador  $T_{\epsilon_1}$ , existe una subsucesión

$$f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots \quad (4.21)$$

la cual es mapeada por el operador  $T_{\epsilon_1}$  en una sucesión convergente. De la sucesión (4.21) seleccionamos una subsucesión

$$f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots$$

la cual también es mapeada en una sucesión convergente por el operador  $T_{\epsilon_2}$ . Continuando este proceso, obtenemos la sucesión infinita de sucesiones de la forma

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & = \{f_{1k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & = \{f_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & = \{f_{3k}\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

en el que cada una es una subsucesión de la anterior. La sucesión de la diagonal

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, \cdots \tag{4.22}$$

es mapeada por el operador  $T_{\epsilon_k}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ , en una sucesión convergente. Probaremos que la sucesión diagonal (4.22) es mapeada, también, en una sucesión convergente por el operador  $T$ . Para ello, es suficiente probar

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|Tf_{nn} - Tf_{mm}\| = 0 \tag{4.23}$$

Note que

$$\begin{aligned} \|Tf_{nn} - Tf_{mm}\| &= \|Tf_{nn} - Tf_{mm} + T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{nn} + T_{\epsilon_k}f_{mm} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\| \\ &\leq \|Tf_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{nn}\| + \|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\| + \|T_{\epsilon_k}f_{mm} - Tf_{mm}\| \\ &\leq 2\epsilon_k C + \|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\|. \end{aligned}$$

Tomando  $k$  suficientemente grande, podemos hacer el termino  $2\epsilon_k C$  tan pequeño como queramos. Después de esto, tomamos  $N$  tan grande de tal forma que  $\|T_{\epsilon_k}f_{nn} - T_{\epsilon_k}f_{mm}\|$  se haga tan pequeño como queramos para  $n, m > N$ . Así, (4.23) se satisface y  $T$  es compacto, es decir  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$ .  $\square$

### 4.3. Representación matricial de operadores simétricos

Se ha resuelto parte de la pregunta para operadores en  $B(\mathcal{H})$ . Ahora, veremos otro caso que es el de operadores simétricos cerrados no acotados. En esta parte del trabajo supondremos siempre que los operadores son simétricos cerrados. Sea  $A$  un operador simétrico (véase Definición 3.3.1) y cerrado (véase Definición 3.1.19). Además, sea  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una b.o.n fija en  $\text{dom}(A)$ . Entonces definimos los números complejos

$$a_{jk} := \langle Au_k, u_j \rangle = \langle u_k, Au_j \rangle = \bar{a}_{kj},$$

lo que nos dice que la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} & \cdots \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} & \cdots \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

es hermitiana. Nótese que bajo las condiciones que pedimos al operador  $A$  en general éste no es acotado. Ahora, consideremos nuevamente al operador isométrico  $U$  como se hizo anteriormente obteniendo el operador  $UAU^{-1}$ .

**Teorema 4.3.1.**  *$A$  es simétrico cerrado sii  $UAU^{-1}$  es simétrico cerrado.*

*Demostración.*  $UAU^{-1}$  está densamente definido. En efecto,  $\text{dom}(UAU^{-1}) = U \text{dom}(A)$ , por lo que  $\text{dom}(UAU^{-1})$  es denso en  $\ell_2(\mathbb{N})$ , ya que  $\text{dom}(A)$  es denso en  $\mathcal{H}$  y  $U$  es isometría entre  $\mathcal{H}$  y  $\ell_2(\mathbb{N})$ . Ahora, veamos que  $UAU^{-1}$  es simétrico. Sea  $\phi, \psi \in \text{dom}(UAU^{-1})$  tal que  $Uf = \phi$  y  $Ug = \psi$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle UAU^{-1}\phi, \psi \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} &= \langle UAU^{-1}\phi, Ug \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} \\ &= \langle Af, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, Ag \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Uf, UAg \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} = \langle \phi, UAU^{-1}\psi \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}, \end{aligned}$$

cumpléndose el Teorema 3.3.2, concluyendo que  $UAU^{-1} \subset (UAU^{-1})^*$ , es decir,  $UAU^{-1}$  es simétrico. Falta ver que  $UAU^{-1} = \overline{UAU^{-1}}$ . Ya que  $A$  es cerrado, entonces  $G(A) = \overline{G(A)}$ , es decir, la gráfica de  $A$  es cerrada y usando el hecho de que  $U$  es isometría, se sigue que  $UAU^{-1}$  es cerrado. La demostración contraria se obtiene repitiendo análogamente la hecha arriba.  $\square$

**Definición 4.3.2.** Consideremos que  $a_{jk}$  son las entradas de la matriz (4.24).

a) Sea  $B_{\text{máx}}$  el operador definido en

$$\text{dom}(B_{\text{máx}}) := \left\{ \phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \phi_k \right|^2 < \infty \right\}$$

y que actúa como sigue:

$$(B_{\text{máx}}\phi)_j := \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \phi_k.$$

b) Definimos  $B_0 := B_{\text{máx}} \upharpoonright_{\ell_{fin}(\mathbb{N})}$ , es decir, el operador  $B_{\text{máx}}$  restringido a  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ .

c) Definimos  $B_{\text{mín}}$  como  $B_{\text{mín}} := B_{\text{máx}}^*$ .

**Teorema 4.3.3.**  $B_0^* = B_{\text{máx}}$ .



*Demostración.* Claramente  $B_0$  está densamente definido. Demostremos primero que  $\text{dom}(B_0^*) \subset \text{dom}(B_{\text{máx}})$ . En efecto, sea  $\phi \in \text{dom}(B_0^*)$ , entonces existe  $\psi \in \ell_2(\mathbb{N})$  tal que  $B_0^*\phi = \psi$ .

$$\begin{aligned} \psi_j &= \langle \psi, \delta_j \rangle = \langle B_0^*\phi, \delta_j \rangle = \overline{\langle \delta_j, B_0^*\phi \rangle} \\ &= \overline{\langle B_0\delta_j, \phi \rangle} = \overline{\left\langle B_0\delta_j, \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k \delta_k \right\rangle} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k \overline{\langle B_0\delta_j, \delta_k \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{jk} \phi_k. \end{aligned}$$

Esto implica que  $\phi \in \text{dom}(B_{\text{máx}})$  y  $B_0^*\phi = B_{\text{máx}}\phi$ , o sea,  $B_0^* \subset B_{\text{máx}}$ . Ahora, probaremos que  $\text{dom}(B_{\text{máx}}) \subset \text{dom}(B_0^*)$ . De las ecuaciones anteriores claramente obtenemos que

$$\langle B_0\delta_j, \phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{\phi}_k \langle B_0\delta_j, \delta_k \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{kj} \bar{\phi}_k.$$

para cualquier  $\phi \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Por otra parte, suponga que  $\phi \in \text{dom}(B_{\text{máx}})$ , entonces

$$\langle B_{\text{máx}}\phi, \delta_j \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k \langle B_{\text{máx}}\delta_k, \delta_j \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{a_{kj}} \phi_k.$$

Así, para todo elemento de la base canónica  $\delta_j$ , tenemos que

$$\langle \delta_j, B_{\text{máx}}\phi \rangle = \overline{\langle B_{\text{máx}}\phi, \delta_j \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{kj} \bar{\phi}_k = \langle B_0\delta_j, \phi \rangle,$$

ya que  $\text{dom}(B_0)$  consiste en todas las combinaciones lineales finitas de los elementos de la base canónica, entonces para cualquier  $\psi \in \text{dom}(B_0)$  se cumple que

$$\langle B_0\psi, \phi \rangle = \langle \psi, B_{\text{máx}}\phi \rangle,$$

por lo que  $\phi \in \text{dom}(B_0^*)$  y  $B_0^*\phi = B_{\text{máx}}\phi$ . □

**Corolario 4.3.4.**  $B_0$  es simétrico.

*Demostración.* Ya que  $B_0$  es por definición restricción de  $B_{\text{máx}}$ , del Teorema 4.3.3 se sigue que  $B_0 \subset B_0^*$ . □

**Corolario 4.3.5.**  $B_{\text{máx}}$  es cerrado.

*Demostración.* Ya que  $B_0^* = B_{\text{máx}}$ , entonces  $B_{\text{máx}}$  es cerrado como consecuencia del Teorema 3.1.31. □

**Corolario 4.3.6.**  $B_{\text{mín}} = \overline{B_0}$ .

*Demostración.* Está afirmación es directa tomando en cuenta el Teorema 3.1.38. □

**Definición 4.3.7.** Cuando suceda que  $UAU^{-1} = B_{\min}$  (y sólo en este caso), diremos que  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $A$  con respecto a la b.o.n  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Teorema 4.3.8.** Si  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $A$  con respecto a la b.o.n  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces  $UAU^{-1}$  es el mínimo operador cerrado en  $\ell_2(\mathbb{N})$  que satisface

$$\langle UAU^{-1}\delta_k, \delta_j \rangle = a_{jk} \quad (4.25)$$

o equivalentemente  $A$  es el mínimo operador cerrado en  $\mathcal{H}$  que satisface

$$\langle Au_k, u_j \rangle = a_{jk}.$$

*Demostración.* De la Definición 4.3.7, se sigue que  $UAU^{-1} = B_{\min}$ . Ahora, demostraremos que este operador es el mínimo operador cerrado que satisface (4.25). Sea  $UAU^{-1}$  el mínimo operador cerrado en  $\ell_2(\mathbb{N})$  que satisface (4.25). Suponga que existe un operador  $T_0$  cerrado y  $T_0 \subset UAU^{-1}$ ,  $T_0 \neq UAU^{-1}$  tal que  $T_0$  satisface (4.25). Como  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es una matriz hermitiana, entonces  $T_0$  es simétrico y  $T_0^*$  también satisface (4.25), por ser una extensión de  $T_0$ . O sea que  $T_0^*$  debe ser restricción de  $B_{\max}$ . Pero, por el Teorema 3.3.5, se sigue que  $B_{\max} \subset T_0^*$ , lo cual es una contradicción  $\square$

*Comentario 4.3.9.* Si  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  es la representación matricial de  $A$  con respecto a la b.o.n  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , entonces  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  define unívocamente al operador  $A$ . En efecto, a partir de  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  se construye  $B_0$  y, entonces

$$A = U^{-1}\overline{B_0}U.$$

Alternativamente, se encuentra  $B_{\min}$  a partir de  $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  y

$$A = U^{-1}B_{\min}U.$$

**Definición 4.3.10.** Una b.o.n  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se dice que es base de una representación matricial de un operador simétrico cerrado  $A$  si:

1. Los elementos de  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  pertenecen al  $\text{dom}(A)$ .
2. Para el operador isométrico  $U$  con respecto a  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  se cumple que

$$A = U^{-1}B_{\min}U.$$

**Teorema 4.3.11.** Sea  $\{s_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$  una matriz hermitiana que satisface

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |s_{jk}|^2 < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.26)$$

Entonces es posible definir un operador simétrico  $S$  en  $\ell_2(\mathbb{N})$  de la siguiente forma; sea  $S_0$  el operador en  $\ell_2(\mathbb{N})$  tal que

$$S_0\delta_j := \sum_{k \in \mathbb{N}} s_{jk}\delta_k \quad (4.27)$$

y se extiende (4.27) por linealidad al conjunto de combinaciones lineales de  $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , es decir,  $\text{dom}(S_0) = \ell_{fin}(\mathbb{N})$ . Ahora, sea  $S = \overline{S_0}$ , se cumple que  $S = B_{\min}$ , además  $A = U^{-1}SU$  es un operador simétrico en  $\mathcal{H}$  y por definición su representación matricial es  $\{s_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.* Observemos que (4.26) implica la convergencia de (4.27) para toda  $j \in \mathbb{N}$ . Posteriormente, note que  $S = \overline{B_0}$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Operadores de Jacobi

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la teoría de matrices de Jacobi. En la Sección 5.1 se enuncia la definición de una matriz de Jacobi semi-infinita y su correspondiente operador asociado (operador de Jacobi), así como algunas de sus propiedades. Aquí se introducen los polinomios de primer y segundo género. El operador de Jacobi  $J$  es siempre simétrico y cerrado. Los índices de deficiencia de un operador de Jacobi tienen sólo dos valores posibles  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ . El caso  $(0, 0)$  corresponde a  $J = J^*$ , ya que  $J$  es cerrado. Cabe hacer mención que se estará trabajando con el caso  $(1, 1)$ . En la sección 5.2 se definirán algunos subconjuntos del dominio del operador de Jacobi, para poder estudiar extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi. Este capítulo se basa en resultados de [2], [25] y [27].

### 5.1. El operador de Jacobi y sus características

**Definición 5.1.1.** Dadas las sucesiones  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$  ( $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ ), definimos la matriz de Jacobi como una matriz tridiagonal semi-infinita de la forma:

$$\begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable y  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una b.o.n en él. Claramente la matriz satisface las condiciones del Teorema 4.3.11. Entonces se construye al operador  $J$  en  $\mathcal{H}$  dado por el Teorema 4.3.11 tal que (5.1) es su representación matricial con respecto a  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Por lo que se vio en la última sección del capítulo anterior  $J$  resulta ser simétrico

y cerrado. Además, para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$\langle Ju_k, u_k \rangle = q_k, \quad \langle Ju_k, u_{k+1} \rangle = \langle Ju_{k+1}, u_k \rangle = b_k \quad (5.2)$$

$$\langle Ju_k, u_j \rangle = 0 \quad |j - k| > 1. \quad (5.3)$$

Tomamos una sucesión de números complejos  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y consideramos las siguientes ecuaciones en recurrencias:

$$q_1 f_1 + b_1 f_2 = \zeta f_1 \quad (5.4)$$

$$b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1} = \zeta f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (5.5)$$

donde  $b_n, q_n$  son los coeficientes de la matriz (5.1). Es fácil generar sucesiones (no necesariamente en  $\ell_2(\mathbb{N})$ ) tales que sus elementos satisfacen el sistema dado por (5.4) y (5.5). Por ejemplo, haciendo  $f_1 = 1$ , se tiene que

$$f_2 = \frac{\zeta - q_1}{b_1}.$$

De (5.5) con  $n = 2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} f_3 &= b_2^{-1}((\zeta - q_2)f_2 - b_1) \\ &= b_2^{-1}(b_1^{-1}(\zeta - q_2)(\zeta - q_1) - b_1) \\ &= b_2^{-1}(b_1^{-1}(\zeta^2 - \zeta(q_1 + q_2) + (q_1 q_2 - b_1))). \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Nótese que  $f_n$  es un polinomio con respecto a  $\zeta$  de grado  $n - 1$ . Usaremos la notación

$$f_n =: P_{n-1}(\zeta) \quad (5.6)$$

y llamaremos a los polinomios  $P_n(\zeta)$  polinomios de primer género asociados a (5.1).

**Teorema 5.1.2.** *Sea  $P_n(\zeta)$  el polinomio de primer género de grado  $n$  asociado a (5.1). El conjunto de ceros de  $P_n(\zeta)$  está contenido en el espectro de la matriz*

$$\begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

con  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Tomemos en cuenta la ecuación (5.5) con  $n \geq 2$  y  $f_n = P_{n-1}(\zeta)$ , obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 P_0(\zeta) + q_2 P_1(\zeta) + b_2 P_2(\zeta) &= \zeta P_1(\zeta) \\ b_2 P_1(\zeta) + q_3 P_2(\zeta) + b_3 P_3(\zeta) &= \zeta P_2(\zeta) \\ &\vdots \\ b_{n-1} P_{n-2}(\zeta) + q_n P_{n-1}(\zeta) + b_n P_n(\zeta) &= \zeta P_{n-1}(\zeta). \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores tomemos  $\zeta = \zeta_0$  con  $\zeta_0$  un cero de  $P_n(\zeta)$  y vemos que en la última expresión, se tiene

$$b_{n-1} P_{n-2}(\zeta_0) + q_n P_{n-1}(\zeta_0) = \zeta_0 P_{n-1}(\zeta_0),$$

ésta última expresión, da como resultado el sistema completo de la ecuación espectral para la matriz (5.7). Por lo cual, se ve que los ceros de los polinomios satisfacen las ecuaciones en recurrencias, ya que los polinomios satisfacen el sistema en recurrencias, concluyendo que los ceros de los polinomios de primer género están contenidos en el espectro de la matriz (5.7).  $\square$

**Corolario 5.1.3.** *Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  los ceros de  $P_n(\zeta)$  son reales.*

*Demostración.* Note primero que  $P_1(\zeta) = (\zeta - q_1)b_1^{-1}$ , claramente tiene por cero a  $q_1$ . Para  $P_n(\zeta)$  con  $n \geq 2$ , se sigue del Teorema 5.1.2 que tiene ceros reales. Ya que el espectro de un operador auto-adjunto es real (véase Teorema 3.3.12).  $\square$

**Lema 5.1.4.** *Sea el número complejo  $\zeta = x + iy$ , dado  $x, y \in \mathbb{R}$ . Para  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$  tal que  $|y| \leq |\tilde{y}|$ , se sigue que*

$$|P_n(x + iy)| \leq |P_n(x + i\tilde{y})|,$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ , con  $P_n(\zeta)$  el polinomio de primer género asociado a la matriz (5.1).

*Demostración.* Descompongamos  $P_n(\zeta)$  en producto de polinomios de grado uno, es decir,

$$P_n(\zeta) = C \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - \lambda_j),$$

con  $C$  una constante y  $\lambda_k$  un cero de  $P_n(\zeta)$ . Ahora, tomemos el valor absoluto en la ecuación anterior, como sigue

$$|P_n(\zeta)| = |C| \prod_{j=1}^{n-1} |\zeta - \lambda_j|.$$

Elevando al cuadrado la ecuación anterior y tomando en cuenta que  $|\zeta - \lambda_i|^2 = |x - \lambda_i|^2 + |y|^2$ , ya que  $\lambda_i$  es real para toda  $i = 1, \dots, n-1$ . Así, como  $|y| \leq |\tilde{y}|$ , obteniendo

$$\begin{aligned} |P_n(\zeta)|^2 &= |C|^2 \prod_{j=1}^{n-1} |\zeta - \lambda_j|^2 = |C|^2 \prod_{j=1}^{n-1} (|(x - \lambda_j)|^2 + |y|^2) \\ &\leq |C|^2 \prod_{j=1}^{n-1} (|(x - \lambda_j)|^2 + |\tilde{y}|^2). \end{aligned}$$

Note que se tomó la multiplicidad de los ceros de  $P_n(\zeta)$  igual a uno, pero la afirmación se cumple para cualquiera que sea la multiplicidad de los ceros de  $P_n(\zeta)$ .  $\square$

**Teorema 5.1.5.** *La multiplicidad de cualquier auto-valor de  $J^*$  es siempre igual a uno.*

*Demostración.* Suponga  $\zeta \in \sigma(J^*)$ . Entonces existe  $f \in \mathcal{H}$  tal que

$$(J^* - \zeta I)f = 0, \quad (5.8)$$

Sea  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n$ , entonces tomando en cuenta la Definición 4.3.2 y la ecuación (5.6), se tiene que  $f_n = P_{n-1}(\zeta)$ . Ahora, supongamos que  $\tilde{f} \in \mathcal{H}$  es también solución de (5.8) para la misma  $\zeta$  en  $\mathbb{C}_+$ . De la forma en que se construyó la sucesión de polinomios de primer género, es fácil concluir que cualquier sucesión que satisfaga (5.4) y (5.5), difiere de la sucesión de polinomios en una constante multiplicativa, es decir,  $\tilde{f} = cf$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Así, la dimensión del espacio de soluciones de (5.8) es uno.  $\square$

Los polinomios de segundo género  $\{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  asociados a la matriz (5.1) se definen como las soluciones del sistema recurrente (5.5) sin usar (5.4), bajo el supuesto de que  $f_1 = 0$  y  $f_2 = b_1^{-1}$ . Nótese que  $f_n$  es un polinomio de grado  $n-2$  con respecto a  $\zeta$ . Utilizaremos la notación

$$Q_{n-1}(\zeta) := f_n. \quad (5.9)$$

De esta forma  $Q_n(\zeta)$  es un polinomio de grado  $n-1$ .

**Lema 5.1.6.** *Dados los polinomios de primero y segundo género asociados a la matriz (5.1), obtenemos la siguiente identidad:*

$$P_{n-1}(\zeta)Q_n(\zeta) - P_n(\zeta)Q_{n-1}(\zeta) = \frac{1}{b_n} \quad (5.10)$$

*Demostración.* Notemos que

$$P_0(\zeta)Q_1(\zeta) - P_1(\zeta)Q_0(\zeta) = 1b_1^{-1} - \frac{\zeta - q_1}{b_1}0 = \frac{1}{b_1}$$

Supongamos que

$$P_{n-2}(\zeta)Q_{n-1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)Q_{n-2}(\zeta) = \frac{1}{b_{n-1}} \quad (5.11)$$

se cumple. Tomando en cuenta que  $\{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  son soluciones para (5.5) con  $n > 1$ , tenemos

$$b_{n-1}P_{n-2}(\zeta) + q_n P_{n-1}(\zeta) + b_n P_n(\zeta) = \zeta P_{n-1}(\zeta) \quad (5.12)$$

$$b_{n-1}Q_{n-2}(\zeta) + q_n Q_{n-1}(\zeta) + b_n Q_n(\zeta) = \zeta g_{n-1}(\zeta). \quad (5.13)$$

Así, multiplicando (5.23) por  $Q_{n-1}(\zeta)$  y restándolo a (5.24) multiplicado por  $P_{n-1}(\zeta)$ , se tiene

$$b_{n-1}(P_{n-2}(\zeta)Q_{n-1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)Q_{n-2}(\zeta)) = b_n(P_{n-1}(\zeta)Q_n(\zeta) - P_n(\zeta)Q_{n-1}(\zeta)), \quad (5.14)$$

ya que (5.11) se cumple, la ecuación (5.14) queda en la forma

$$1 = b_n(P_{n-1}(\zeta)Q_n(\zeta) - P_n(\zeta)Q_{n-1}(\zeta)),$$

dividiendo entre  $b_n$  la ecuación anterior, obtenemos (5.10).  $\square$

*Comentario 5.1.7.* Sea  $f_k$ , la solución de (5.5) con  $\zeta = \mu$ , y  $g_k$  la solución de la misma ecuación pero con  $\zeta = \lambda$ , se tiene que

$$b_{n-1}f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1} = \mu f_n \quad (5.15)$$

$$b_{n-1}g_{n-1} + q_n g_n + b_n g_{n+1} = \lambda g_n. \quad (5.16)$$

Ahora, multiplicando (5.15) por  $g_n$  y restándosela a (5.16) multiplicada por  $f_n$ , se sigue que

$$b_{n-1}(f_{n-1}g_n - f_n g_{n-1}) - b_n(f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n) = (\mu - \lambda)f_n g_n. \quad (5.17)$$

Si tomamos (5.17) reemplazando  $n$  por  $n - 1$ , tenemos

$$b_{n-2}(f_{n-2}g_{n-1} - f_{n-1}g_{n-2}) - b_{n-1}(f_{n-1}g_n - f_n g_{n-1}) = (\mu - \lambda)f_{n-1}g_{n-1},$$

sumemos esta última ecuación a (5.17), obteniendo

$$b_{n-2}(f_{n-2}g_{n-1} - f_{n-1}g_{n-2}) - b_n(f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n) = (\mu - \lambda)[f_n g_n + f_{n-1}g_{n-1}].$$

Análogamente, si sumamos (5.17) más (5.17) con  $n - 1$  y  $n - 2$  en vez de  $n$ , obtenemos

$$b_{n-3}(f_{n-3}g_{n-2} - f_{n-2}g_{n-3}) - b_n(f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n) = (\mu - \lambda)[f_n g_n + f_{n-1}g_{n-1} + f_{n-2}g_{n-2}]$$

Ahora, sumando de la misma forma la ecuación (5.17) desde  $n = n$  hasta  $n = m$  con  $n > m \geq 2$ , tenemos

$$b_{m-1}(f_{m-1}g_m - f_m g_{m-1}) - b_n(f_n g_{n+1} - f_{n+1} g_n) = (\mu - \lambda) \sum_{k=m}^n f_k g_k. \quad (5.18)$$



El último caso que tendríamos de la ecuación anterior es:

$$b_1(f_1g_2 - f_2g_1) - b_n(f_ng_{n+1} - f_{n+1}g_n) = (\mu - \lambda) \sum_{k=2}^n f_k g_k, \quad (5.19)$$

Tomando en (5.18)  $f_k = P_{k-1}(\mu)$ ,  $g_k = P_{k-1}(\lambda)$  y  $m = 2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} b_1(P_0(\mu)P_1(\lambda) - P_1(\mu)P_0(\lambda)) - b_n(P_{n-1}(\mu)P_n(\lambda) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)) \\ = (\mu - \lambda) \sum_{k=2}^n P_{k-1}(\mu)P_{k-1}(\lambda). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $b_1(P_0(\mu)P_1(\lambda) - P_1(\mu)P_0(\lambda)) = (\mu - \lambda)$  y reacomodando términos, se sigue

$$b_n(P_{n-1}(\mu)P_n(\lambda) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)) = (\lambda - \mu) \sum_{k=1}^n P_{k-1}(\mu)P_{k-1}(\lambda), \quad (5.20)$$

llamada la fórmula de Christoffel-Darboux.

Tomando en cuenta que  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $Q(\zeta) = \{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  (los polinomios de primero y segundo género respectivamente) son soluciones lineales de (5.5), entonces una combinación lineal de ellos también es solución de (5.5). Ahora, tomemos en (5.18) el parámetro  $\lambda = \bar{\zeta}$ ,  $\mu = \zeta$ ,  $\text{Im } \zeta \neq 0$ ,  $m = 2$ ,  $f_k = wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)$  y  $g_k = \bar{f}_k$ , obteniendo

$$\begin{aligned} b_1[(wP_0(\zeta) + Q_0(\zeta))\overline{(wP_1(\zeta) + Q_1(\zeta))} - ((wP_1(\zeta) + Q_1(\zeta))\overline{(wP_0(\zeta) + Q_0(\zeta))})] \\ - b_n[(wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))\overline{(wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))} \\ - (wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))\overline{(wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))}] \\ = (\zeta - \bar{\zeta}) \sum_{k=2}^n (wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta))\overline{(wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta))} \end{aligned}$$

Ahora, tomemos en cuenta que  $P_0(\zeta) = 1$ ,  $P_1(\zeta) = \frac{\zeta - q_1}{b_1}$ ,  $Q_0(\zeta) = 0$ ,  $Q_1(\zeta) = b_1^{-1}$ , realizando los productos, reduciendo y agrupando términos semejantes en las ecuaciones anteriores, tenemos

$$\begin{aligned} [|w|^2 (\bar{\zeta} - \zeta) + w - \bar{w}] - b_n[(wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))\overline{(wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))} \\ - (wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))\overline{(wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))}] \\ = (\zeta - \bar{\zeta}) \sum_{k=2}^n |wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)|^2, \end{aligned}$$

dividiendo todo entre  $(\zeta - \bar{\zeta})$ , multiplicando y dividiendo el lado izquierdo de la igualdad anterior por  $|wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta)|^2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & \left[ -|w|^2 + \frac{w - \bar{w}}{\zeta - \bar{\zeta}} \right] - \left( \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}} \right) \left( \frac{|wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta)|^2}{|wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta)|^2} \right) \\ b_n & \left[ (wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))\overline{(wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))} - (wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta))\overline{(wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta))} \right] \\ & = \sum_{k=2}^n |wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)|^2. \end{aligned}$$

Por último, pasamos restando este término  $\frac{w-\bar{w}}{\zeta-\bar{\zeta}}$  y sumando este  $|w|^2$ , (tomando en cuenta que  $(wP_0(\zeta) + Q_0(\zeta))\overline{(wP_0(\zeta) + Q_0(\zeta))} = |w|^2$ ) y reacomodando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)|^2 - \frac{w - \bar{w}}{\zeta - \bar{\zeta}} \\ & = b_n |wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta)|^2 \frac{\operatorname{Im} \frac{wP_n(\zeta) + Q_n(\zeta)}{wP_{n-1}(\zeta) + Q_{n-1}(\zeta)}}{\operatorname{Im} \zeta}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde  $w \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 5.1.8.** *Si  $J$  es un operador de Jacobi, entonces tiene índices de deficiencia  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$ .*

*Demostración.* Comenzamos calculando el índice de deficiencia  $n_-(J)$  de acuerdo a la fórmula (3.45). Del Teorema 5.1.5 con  $\operatorname{Im} \zeta > 0$ , se sigue que  $n_-(J)$  es igual a uno cuando

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |P_n(\zeta)|^2, \quad (5.22)$$

converge e igual a cero cuando (5.22) diverge.

Note que la convergencia de la serie (5.22) para  $\operatorname{Im} \zeta > 0$  es equivalente a la convergencia cuando  $\operatorname{Im} \zeta < 0$ . En efecto; ya que, los coeficientes de los polinomios  $P_n$  son reales para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$|P_n(\zeta)|^2 = P_n(\zeta)\overline{P_n(\zeta)} = P_n(\zeta)P_n(\bar{\zeta}),$$

lo cual nos lleva a concluir que  $n_-(J) = n_+(J)$ . Concluyendo que  $J$  tiene índices  $(0, 0)$  o  $(1, 1)$ .  $\square$

**Corolario 5.1.9.** *Si (5.22) es convergente para cierto  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ , entonces (5.22) es convergente para todo  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ . Por lo tanto, si (5.22) es convergente para  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ , entonces  $J \neq J^*$ .*

*Demostración.* La demostración es directa tomando en cuenta el Teorema 3.3.9 y el Teorema 5.1.8.  $\square$

**Definición 5.1.10.** Sean  $\phi = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  elementos de  $l_2(\mathbb{N})$ . El wronskiano asociado con el operador  $J$  se define como:

$$W_n(\phi, \psi) := b_n(\phi_n \psi_{n+1} - \psi_n \phi_{n+1}),$$

con  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de la Definición 5.1.1.

*Comentario 5.1.11.* Nótese que  $W_n(\phi, \psi) = -W_n(\psi, \phi)$  y además  $W_n(a\phi_1 + b\phi_2, \psi) = aW_n(\phi_1, \psi) + bW_n(\phi_2, \psi)$ .

**Teorema 5.1.12.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  soluciones de (5.5) con  $\zeta \in \mathbb{C}$  fija. Entonces el wronskiano  $W_n(\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  es constante, con respecto a  $n$ .

*Demostración.* Ya que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son soluciones para (5.5) con  $n > 1$ ,

$$b_{n-1}f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1} = \zeta f_n \quad (5.23)$$

$$b_{n-1}g_{n-1} + q_n g_n + b_n g_{n+1} = \zeta g_n. \quad (5.24)$$

Así, multiplicando (5.23) por  $g_n$  y restándolo a (5.24) multiplicado por  $f_n$ , vemos que

$$W_n(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) - W_{n-1}(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0, \quad \forall n > 1.$$

Por lo tanto, el wronskiano es constante con respecto a  $n$ .  $\square$

**Definición 5.1.13.** Definimos

$$W_\infty(\phi, \psi) := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\phi, \psi).$$

**Teorema 5.1.14.** Sea  $J \neq J^*$ . Los auto-valores de toda extensión auto-adjunta  $\tilde{J}$  de  $J$  son simples, es decir, su multiplicidad es igual a uno.

*Demostración.* Sea  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Como  $\tilde{J}$  es restricción de  $J^*$ , entonces  $J \subset \tilde{J} \subset J^*$ . Además,

$$\ker(\tilde{J} - \zeta I) \subset \ker(J^* - \zeta I).$$

Aunque, por el Teorema 5.1.5, sabemos que la dimensión  $\ker(J^* - \zeta I)$  es a lo más uno. Por lo tanto, los auto-valores de  $\tilde{J}$  son simples.  $\square$

**Teorema 5.1.15.** Sea  $J \neq J^*$ ,  $\tilde{J}$  una extensión auto-adjunta de  $J$ ,  $\zeta \in \rho(\tilde{J})$  y  $g := (\tilde{J} - \zeta I)^{-1}u_1$ . Fijemos la base ortonormal  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $J$  tiene como representación matricial (5.1). La representación matricial de la resolvente  $R_\zeta(\tilde{J})$  con respecto a la base ortonormal  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es:

$$R_\zeta(\tilde{J})_{jk} = \begin{cases} g_k P_{j-1}(\zeta) & j \leq k \\ g_j P_{k-1}(\zeta) & j > k \end{cases},$$

donde  $g_k = \langle g, u_n \rangle$  para toda  $n$  y  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los polinomios de primer género asociados a la matriz (5.1).

*Demostración.* Sea  $h = R_\zeta(\tilde{J})d$ , entonces  $h_j = \sum_{k \in \mathbb{N}} R_\zeta(\tilde{J})_{jk}d_k$ . Tomando en cuenta (5.4) y (5.5), y usando el hecho de que  $g_n$  y  $f_n = P_{n-1}(\zeta)$  son soluciones de  $\tilde{J}g = \zeta g$  para  $m \geq 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} ((\tilde{J} - \zeta I)h)_m &= b_{m-1}h_{m-1} + (q_m - \zeta)h_m + b_m h_{m+1} \\ &= b_{m-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} R_\zeta(\tilde{J})_{m-1k}d_k + (q_m - \zeta) \sum_{k \in \mathbb{N}} R_\zeta(\tilde{J})_{mk}d_k \\ &\quad + b_m \sum_{k \in \mathbb{N}} R_\zeta(\tilde{J})_{m+1k}d_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k [b_{m-1}R_\zeta(\tilde{J})_{m-1k} + (q_m - \zeta)R_\zeta(\tilde{J})_{mk} + b_m R_\zeta(\tilde{J})_{m+1k}] \end{aligned}$$

Ahora, distribuimos la serie anterior en tres sumando. Así,

$$\begin{aligned} ((\tilde{J} - \zeta I)h)_m &= \sum_{k=1}^{m-1} d_k f_k [b_{m-1}g_{m-1} + (q_m - \zeta)g_m + b_m g_{m+1}] \\ &\quad + \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k g_k [b_{m-1}f_{m-1} + (q_m - \zeta)f_m + b_m f_{m+1}] \\ &\quad + d_k [b_{m-1}g_m f_{m-1} + (q_m - \zeta)g_m f_m + b_m g_{m+1} f_m]. \end{aligned}$$

La suma finita es cero, dado que  $u_1 = (J - \zeta I)g$  y  $m \geq 2$ . La serie es también cero porque  $f$  es la sucesión dada en (5.6). Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} ((\tilde{J} - \zeta I)h)_m &= d_m [b_{m-1}g_m f_{m-1} + (q_m - \zeta)g_m f_m + b_m g_{m+1} f_m] \\ &= d_m [g_m (b_m f_m + (q_{m-1} - \zeta)f_{m-1}) + b_m g_{m+1} f_m] \\ &= d_m [-b_m g_m f_{m+1} + b_m g_{m+1} f_m] \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$= d_m b_m [g_{m+1} f_m - g_m f_{m+1}] = d_m. \tag{5.26}$$

La igualdad (5.25) es válida, ya que  $f$  es la sucesión dada en (5.6) y  $b_{m-1}f_{m-1} + (q_m - \zeta)f_m = -b_m g_m f_{m+1}$ . Para probar la igualdad (5.26), observe que  $g, f$  satisfacen (5.5), o sea que  $W_n(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}})$  es constante. Así, basta calcular  $W_1(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ .

$$W_1(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = b_1(g_2 - g_1 f_2)$$

y dado que  $f_2 = (\frac{\zeta - q_1}{b_1})$ , se tiene que

$$W_1(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = b_1(g_2 - g_1(\frac{\zeta - q_1}{b_1})) = b_1 g_2 + g_1(q_1 - \zeta) = 1.$$

Para  $m = 1$ , se tiene que también que

$$\begin{aligned} ((\tilde{J} - \zeta I)h)_1 &= d_1 g_2 b_1 f_1 + d_1 g_1 (q_1 - \zeta) f_1 \\ &= d_1 [g_2 b_1 f_1 + g_1 (q_1 - \zeta) f_1] \\ &= d_1 [g_2 b_1 + g_1 (q_1 - \zeta)] = d_1. \end{aligned}$$

□

**Teorema 5.1.16.** *Sea  $J \neq J^*$ ,  $\tilde{J}$  una extensión auto-adjunta de  $J$  y  $\zeta \in \rho(\tilde{J})$ . Entonces la resolvente  $R_\zeta(\tilde{J})$  es compacta.*

*Demostración.* Probemos que  $R_\zeta(\tilde{J})$  satisface el Teorema 4.2.6. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \left| R_\zeta(\tilde{J})_{jk} \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left| R_\zeta(\tilde{J})_{jk} \right|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( |f_j(\zeta)|^2 \sum_{k < j} |g_k(\zeta)|^2 + |g_j(\zeta)|^2 \sum_{k \geq j} |f_k(\zeta)|^2 \right) \\ &\leq 2 \|f(\zeta)\|^2 \|g(\zeta)\|^2 < \infty \end{aligned}$$

Ésto último se satisface ya que tanto  $g$  como  $f$  están en  $\mathcal{H}$ . Por lo que hemos probado que la resolvente es compacta. □

El Teorema 5.1.16 tiene un corolario importante en nuestra discusión; La demostración requiere del siguiente resultado para operadores normales compactos (un operador  $T$  en  $\mathcal{H}$  se dice normal si  $TT^* = T^*T$ ). No daremos la demostración de este resultado ya que ella requiere del Teorema Espectral el cual no está contenido en este trabajo.

**Teorema V.** *Sea  $T \in S_\infty(\mathcal{H})$  y normal. Además, sea  $\{\mu_k\}$  la sucesión de auto-valores no nulos de  $T$  tal que  $|\mu_{k+1}| < |\mu_k|$  para toda  $k$  y  $P_k$  el proyector ortogonal al auto espacio correspondiente a  $\mu_k$ . Entonces*

$$T = \sum_k \mu_k P_k$$

donde la suma es finita o infinita. Si es infinita,  $\{\mu_k\}_k$  converge a cero cuando  $k$  tiende a infinito.

**Corolario 5.1.17.** *Sea  $J \neq J^*$ , entonces toda extensión auto-adjunta  $\tilde{J}$  de  $J$  tiene espectro discreto.*

*Comentario 5.1.18.* Nótese que no se pudo prescindir del Teorema V y usar el Teorema 3.4.2 porque no sabemos que exista  $\lambda$  en  $\rho(\tilde{J}) \cap \mathbb{R}$  de manera que  $R_\lambda(\tilde{J})$  sea auto-adjunta.

*Demostración.* Notemos que tomando  $\zeta = \zeta_0$  en las ecuaciones (3.32) y (3.31) vemos que la resolvente siempre es un operador normal (véase la nota antes del Teorema V). Ahora, como vemos que la resolvente es normal, aplicamos el Teorema V sobre  $R_\zeta(\tilde{J}) = (\tilde{J} - \zeta I)^{-1}$ , ya que por el Teorema 5.1.16 sabemos que la resolvente  $R_\zeta(\tilde{J})$  es compacta. Por el Teorema 3.2.15, se sigue que el conjunto  $\sigma(R_\zeta(\tilde{J})) \setminus \{0\}$  consiste de auto-valores aislados de multiplicidad finita. Por lo tanto

$$R_\zeta(\tilde{J}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k,$$

y por el Comentario 3.4.3, se tiene

$$\begin{aligned} R_\zeta(\tilde{J}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k \\ R_\zeta^{-1}(\tilde{J}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} P_k, \end{aligned}$$

concluyendo que

$$\tilde{J} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\mu_k} - \zeta \right) P_k,$$

de aquí se ve que  $\sigma(\tilde{J})$  es discreto.  $\square$

*Comentario 5.1.19.* Notemos que para  $\phi = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\psi = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  elementos de  $l_2(\mathbb{N})$  se tiene que para toda  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^N [(b_{n-1}\phi_{n-1} + q_n\phi_n + b_n\phi_{n+1})\psi_n - (b_{n-1}\psi_{n-1} + q_n\psi_n + b_n\psi_{n+1})\phi_n] \\ &= \sum_{n=2}^N (b_{n-1}\phi_{n-1} + q_n\phi_n + b_n\phi_{n+1})\psi_n - \sum_{n=2}^N (b_{n-1}\psi_{n-1} + q_n\psi_n + b_n\psi_{n+1})\phi_n \\ &= \sum_{n=2}^N (b_{n-1}\phi_{n-1} + b_{n+1}\phi_n)\psi_n - \sum_{n=2}^N (b_{n-1}\psi_{n-1} + b_n\psi_{n+1})\phi_n \\ &= b_1(\phi_1\psi_2 - \psi_1\phi_2) - b_N(\phi_N\psi_{N-1} - \psi_N\phi_{N-1}) \\ &= W_1(\phi, \psi) - W_N(\phi, \psi). \end{aligned}$$

**Teorema 5.1.20.** Sean  $f, g \in \text{dom}(J^*)$ . Entonces existe  $W_\infty(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty)$  y

$$\langle J^* f, g \rangle - \langle f, J^* g \rangle = W_\infty(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty), \quad (5.27)$$

donde  $f = \sum_{n=1}^\infty f_n u_n$ ,  $g = \sum_{n=1}^\infty g_n u_n$ .

*Demostración.* Sea  $f, g \in \text{dom}(J^*)$ ,

$$\begin{aligned} \langle J^* f, g \rangle - \langle f, J^* g \rangle &= (q_1 f_1 + b_1 f_2) \bar{g}_1 - (q_1 \bar{g}_1 + b_1 \bar{g}_2) f_1 \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N [(b_{n-1} f_{n-1} + q_n f_n + b_n f_{n+1}) \bar{g}_n - (b_{n-1} \bar{g}_{n-1} + q_n \bar{g}_n + b_n \bar{g}_{n+1}) f_n]. \end{aligned}$$

Entonces por el Comentario 5.1.19

$$\begin{aligned} \langle J^* f, g \rangle - \langle f, J^* g \rangle &= -W_1(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty) + W_1(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty) \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty) \\ &= W_\infty(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty). \end{aligned}$$

□

**Corolario 5.1.21.** Si para cualquier  $f, g \in \text{dom}(J^*)$  se cumple que  $W_\infty(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty) = 0$ , entonces  $J = J^*$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.1.38, existe  $J^{**}$  ya que  $J$  es cerrado. Sustituyendo  $W_\infty(\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{\bar{g}_n\}_{n=1}^\infty) = 0$  en la ecuación (5.27), se tiene que  $\langle J^* f, g \rangle = \langle f, J^* g \rangle$  para toda  $f, g \in \text{dom}(J^*)$ , entonces  $J^* \subset J^{**} = J$ . Se concluye que  $J = J^*$ , puesto que  $J$  es simétrico. □

**Definición 5.1.22.** Definimos

$$m_n(\zeta, \tau) := -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta))\tau - W_n(P(0), Q(\zeta))}{W_n(Q(0), P(\zeta))\tau - W_n(P(0), P(\zeta))}. \quad (5.28)$$

con  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $Q(\zeta) = \{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  los polinomios de primer y segundo género.

*Comentario 5.1.23.* Se verifica fácilmente que los polinomios de primer género  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y de segundo género  $Q(\zeta) = \{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  asociados a la matriz (5.1), se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned} P_n(\zeta) &= Q_n(0)W_n(P(0), P(\zeta)) - P_n(0)W_n(Q(0), P(\zeta)) \\ P_{n-1}(\zeta) &= Q_{n-1}(0)W_n(P(0), P(\zeta)) - P_{n-1}(0)W_n(Q(0), P(\zeta)) \\ Q_n(\zeta) &= Q_n(0)W_n(P(0), Q(\zeta)) - P_n(0)W_n(Q(0), Q(\zeta)) \\ Q_{n-1}(\zeta) &= Q_{n-1}(0)W_n(P(0), Q(\zeta)) - P_{n-1}(0)W_n(Q(0), Q(\zeta)) \end{aligned}$$

**Teorema 5.1.24.** Sean  $P_n(\zeta)$  y  $Q_n(\zeta)$  los polinomios de primer y segundo género, respectivamente, asociados a la matriz (5.1). Entonces la ecuación (5.28), se puede expresar como sigue

$$m_n(\zeta, \tau) = -\frac{Q_{n-1}(\zeta)f(\tau) - Q_n(\zeta)}{P_{n-1}(\zeta)f(\tau) - P_n(\zeta)}, \quad (5.29)$$

con  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$  y  $f(\tau)$  una función lineal real de  $\tau$ .

*Demostración.* Sustituyendo  $P_n(\zeta)$ ,  $P_{n-1}(\zeta)$ ,  $Q_n(\zeta)$  y  $Q_{n-1}(\zeta)$  por sus equivalente dados en el Comentario 5.1.23 y desarrollando, tenemos que (5.29) queda en la forma:

$$\begin{aligned} m_n(\zeta, \tau) &= -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta)) \left( \frac{P_n(0) - P_{n-1}(0)f(\tau)}{Q_{n-1}(0)f(\tau) - Q_n(0)} \right) - W_n(P(0), Q(\zeta))}{W_n(Q(0), P(\zeta)) \left( \frac{P_n(0) - P_{n-1}(0)f(\tau)}{Q_{n-1}(0)f(\tau) - Q_n(0)} \right) - W_n(P(0), P(\zeta))} \\ &= -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta))\tau - W_n(P(0), Q(\zeta))}{W_n(Q(0), P(\zeta))\tau - W_n(P(0), P(\zeta))}, \end{aligned}$$

donde  $f(\tau) = \frac{P_n(0)+Q_n(0)\tau}{P_{n-1}(0)+Q_{n-1}(0)\tau}$  que claramente es una función lineal real de  $\tau$ . De lo anterior se concluye que la ecuación (5.28), se expresa como la ecuación (5.29).  $\square$

**Teorema 5.1.25.** *Sea  $\zeta_0$  fijo en  $\mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ , entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_n(\zeta_0, \tau)$  describe un círculo en el plano complejo cuando  $\tau$  recorre el eje real y ese círculo es la frontera de un disco cerrado que denotaremos  $K_n(\zeta_0)$ .*

*Demostración.* Notemos que  $m_n(\zeta_0, \tau)$ , puede describir un punto una recta o un círculo cuanto  $\tau$  recorre el eje real. Para mostrar que  $m_n(\zeta_0, \tau)$  describe un círculo tiene que poderse escribir la forma  $c + re^{i\theta}$ . Donde  $c$  es el centro y  $r$  el radio. Sea  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$  fijo tal que  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ .

Escribimos

$$\begin{aligned} m_n(\zeta_0, \tau) &= -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), Q(\zeta_0))}{W_n(Q(0), P(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), P(\zeta_0))} \\ &= \frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))} - W_n(P(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \\ &\quad - \frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))W_n(P(0), P(\zeta_0)) - W_n(P(0), Q(\zeta_0))W_n(Q(0), P(\zeta_0))}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \\ &\quad * \frac{\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}\tau - \overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}}{W_n(Q(0), P(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), P(\zeta_0))}. \end{aligned}$$

Ahora, sean

$$A = -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), Q(\zeta_0))}{W_n(Q(0), P(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), P(\zeta_0))} \quad (5.30)$$

$$B = \frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))} - W_n(P(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \quad (5.31)$$

$$C = \frac{\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}\tau - \overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}}{W_n(Q(0), P(\zeta_0))\tau - W_n(P(0), P(\zeta_0))}. \quad (5.32)$$

Mostraremos que  $m_n(\zeta_0, \tau) = A + BC = A + |B|e^{i\theta}$ , es decir,  $|BC| = |B|$ . Tomemos en cuenta que  $|BC|^2 = |B|^2|C|^2$ , entonces de (5.32) se verifica que  $C\overline{C} = 1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} m_n(\zeta, \tau) &= \\ &= -\frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))} - W_n(P(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \\ &\quad + \left| \frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))} - W_n(P(0), Q(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))}}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \right| e^{i\theta}, \end{aligned}$$



donde  $\theta = \theta(\tau)$  es un número real. Es evidente que en la ecuación anterior se obtiene el radio del círculo, el cual está dado tomando el valor absoluto sobre la ecuación (5.31).

Ahora, desarrollando (5.31) con algunas modificaciones y tomando en cuenta las ecuaciones (5.10) y (5.20), obtenemos que el radio del círculo está dado por

$$\begin{aligned}
& \frac{W_n(Q(0), Q(\zeta_0))W_n(P(0), P(\zeta_0)) - W_n(P(0), Q(\zeta_0))W_n(Q(0), P(\zeta_0))}{W_n(P(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(Q(0), P(\zeta_0))} - W_n(Q(0), P(\zeta_0))\overline{W_n(P(0), P(\zeta_0))}} \\
&= \frac{b_n(Q_n(0)Q_{n+1}(\zeta_0) - Q_{n+1}(0)Q_n(\zeta_0))b_n(P_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))}{b_n(P_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))b_n(Q_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - Q_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))} \\
&- \frac{b_n(P_n(0)Q_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(0)Q_n(\zeta_0))b_n(Q_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - Q_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))}{-b_n(Q_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - Q_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))b_n(P_n(0)P_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(0)P_n(\zeta_0))} \\
&= \frac{b_n^2[(P_n(0)Q_{n+1}(0))(P_n(\zeta_0)Q_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(\zeta_0)Q_n(\zeta_0))]}{b_n^2[(P_n(\zeta_0)P_{n+1}(\zeta_0))(Q_n(0)P_{n+1}(0) - Q_{n+1}(0)P_n(0))]} \\
&- \frac{b_n^2[(P_{n+1}(0)Q_n(0))(Q_n(\zeta_0)P_{n+1}(\zeta_0) - Q_{n+1}(\zeta_0)P_n(\zeta_0))]}{-b_n^2[(P_{n+1}(\zeta_0)P_n(\zeta_0))(P_n(0)Q_{n+1}(0) - P_{n+1}(0)Q_n(0))]} \\
&= \frac{b_n(P_n(0)Q_{n+1}(0) - P_{n+1}(0)Q_n(0))}{b_n(P_n(\zeta_0)P_{n+1}(\zeta_0) - P_{n+1}(\zeta_0)P_n(\zeta_0))} = \frac{1}{(\zeta_0 - \overline{\zeta_0}) \sum_{k=1}^n |P_{k-1}(\zeta_0)|^2}. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Lo cual termina la prueba.  $\square$

**Teorema 5.1.26.** *Fijemos  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ . Se satisface que*

$$\partial K_n(\zeta_0) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{w - \overline{w}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 = 0 \right\}.$$

Además, si  $w \in K_n(\zeta_0)$ , entonces

$$\frac{w - \overline{w}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \geq 0,$$

mientras que si  $w \notin K_n(\zeta_0)$

$$\frac{w - \overline{w}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 < 0.$$

*Demostración.* Tomando en cuenta los Teoremas 5.1.24 y 5.1.25, se sigue que la ecuación (5.29) describe la misma familia de círculos que la ecuación (5.28).

Fijamos  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ . Tomando la identidad (5.21) con  $\zeta = \zeta_0$  e insertando (5.29) en lugar de  $w$ , tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n |m_n(\zeta_0, \tau) P_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 - \frac{m_n(\zeta_0, \tau) - \overline{m_n(\zeta_0, \tau)}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} \\
&= b_n |m_n(\zeta_0, \tau) P_{n-1}(\zeta_0) + Q_{n-1}(\zeta_0)|^2 \frac{\operatorname{Im} \frac{m_n(\zeta_0, \tau) P_n(\zeta_0) + Q_n(\zeta_0)}{m_n(\zeta_0, \tau) P_{n-1}(\zeta_0) + Q_{n-1}(\zeta_0)}}{\operatorname{Im} \zeta_0} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

donde de la ecuación (5.29), se sigue que

$$f(\tau) = \frac{m_n(\zeta_0, \tau) P_n(\zeta_0) + Q_n(\zeta_0)}{m_n(\zeta_0, \tau) P_{n-1}(\zeta_0) + Q_{n-1}(\zeta_0)}$$

donde sabemos que  $f(\tau) \in \mathbb{R}$ , para toda  $\tau \in \mathbb{R}$  por lo tanto  $\operatorname{Im} f(\tau) = 0$ . Así, la ecuación (5.34) queda en la forma

$$\frac{m_n(\zeta_0, \tau) - \overline{m_n(\zeta_0, \tau)}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |m_n(\zeta_0, \tau) P_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 = 0.$$

Ahora, desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior, tomando  $w = m_n(\zeta_0, \tau)$ , se sigue que

$$\begin{aligned}
& \frac{w - \overline{w}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |w P_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \\
&= \frac{w}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \frac{\overline{w}}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n |w|^2 |P_{k-1}(\zeta_0)|^2 - \sum_{k=1}^n w P_{k-1}(\zeta_0) \overline{Q_{k-1}(\zeta_0)} \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \overline{w} \overline{P_{k-1}(\zeta_0)} Q_{k-1}(\zeta_0) - \sum_{k=1}^n |Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \\
&= |w|^2 \left( - \sum_{k=1}^n |P_{k-1}(\zeta_0)|^2 \right) + w \left( \frac{1}{\zeta_0 - \overline{\zeta_0}} - \sum_{k=1}^n w P_{k-1}(\zeta_0) \overline{Q_{k-1}(\zeta_0)} \right) \\
&\quad + \overline{w} \left( \frac{1}{\overline{\zeta_0} - \zeta_0} - \sum_{k=1}^n \overline{w} \overline{P_{k-1}(\zeta_0)} Q_{k-1}(\zeta_0) \right) + \left( - \sum_{k=1}^n |Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \right),
\end{aligned}$$

de aquí vemos que para valores muy grandes de  $|w|$  la última igualdad en la ecuación anterior es negativa. Lo cual termina la prueba.  $\square$

**Teorema 5.1.27.** *Sea  $\zeta_0$  fijo en  $\mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Im} \zeta_0 \neq 0$ , entonces*

$$K_{n+1}(\zeta_0) \subset K_n(\zeta_0) \quad y \quad \partial K_{n+1}(\zeta_0) \cap \partial K_n(\zeta_0) \neq \emptyset.$$

*Demostración.* Sea  $w \in K_n(\zeta_0)$ . Tomando en cuenta el Teorema 5.1.26, tenemos que si  $w$  esta en el círculo  $\partial K_n(\zeta_0)$

$$\frac{w - \bar{w}}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0} - \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{w - \bar{w}}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0} - \sum_{k=1}^{n-1} |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \geq 0,$$

entonces  $w$  se encuentra dentro de  $K_{n-1}(\zeta_0)$  o en el círculo  $\partial K_{n-1}(\zeta_0)$ .

Para mostrar que la intersección de los círculos  $\partial K_{n+1}(\zeta_0)$  y  $K_n(\zeta_0)$  no es vacía, basta ver que la función  $m_n(\zeta_0, \tau)$  coincide con  $m_{n+1}(\zeta_0, \tau)$ , en un punto, para alguna  $\tau$ . Se verifica que

$$m_{n+1} \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right) = m_n \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right).$$

Para mostrar la ecuación anterior, se va a tomar en cuenta la ecuación (5.29). Fijemos en (5.29)  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ . Cuando  $f(\tau) = \infty$  en la ecuación

$$m_{n+1} \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right),$$

entonces

$$\tau = -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)},$$

obteniendo que

$$m_{n+1} \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right) = -\frac{Q_n(\zeta_0)}{P_n(\zeta_0)}.$$

Si  $f(\tau) = 0$  en la ecuación

$$m_{n+1} \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right),$$

se sigue que

$$\tau = -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)},$$

por lo tanto

$$m_n \left( \zeta_0, -\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} \right) = -\frac{Q_n(\zeta_0)}{P_n(\zeta_0)},$$

se concluye que  $\partial K_{n+1}(\zeta_0) \cap \partial K_n(\zeta_0) \neq \emptyset$ . □

**Corolario 5.1.28.** *Es claro que cuando  $n$  tiende a infinito,  $K_n(\zeta)$  tiende a un disco límite o a un punto que denotaremos  $K_\infty(\zeta_0)$  y a su frontera  $\partial K_\infty(\zeta_0)$  (si  $K_\infty(\zeta_0)$  es un punto, entonces  $\partial K_\infty(\zeta_0)$  es un punto).*

*Demostración.* Tomando en cuenta el Teorema 5.1.27 y la ecuación (5.33). Vemos que los círculos están contenidos uno dentro de otro y que su radio es un número positivo que cada vez se va haciendo más chico. Si la serie  $\sum_{k=1}^n |P_{k-1}(\zeta_0)|^2$  que se encuentra en la ecuación del radio del círculo dado por (5.33) es convergente cuando  $n$  tiende a infinito, claramente tendremos un círculo. Mientras que si diverge, se tendría un punto.  $\square$

**Corolario 5.1.29.**  $J = J^*$  sii  $\partial K_\infty(\zeta_0)$  es un punto y  $J \neq J^*$  sii  $\partial K_\infty(\zeta_0)$  es un círculo. En ambos casos se cumple para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta \neq 0$ .

*Demostración.* La demostración es directa tomando en cuenta el Teorema 5.1.8, el Corolario 5.1.28 y la ecuación (5.33).  $\square$

**Teorema 5.1.30.** Sea  $\zeta_0$  fijo en  $\mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ . Considere  $K_\infty(\zeta_0)$  y  $w \in K_\infty(\zeta_0)$ , entonces  $wP(\zeta_0) + Q(\zeta_0)$  esta en  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

*Demostración.* Sea  $w \in K_\infty(\zeta)$ . Por el Teorema 5.1.26 y el Corolario 5.1.29, tenemos que

$$\sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 < \frac{w - \bar{w}}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0},$$

es valido para toda  $n$ . Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 < \frac{w - \bar{w}}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0},$$

concluyendo que  $wP(\zeta_0) + Q(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ .  $\square$

**Corolario 5.1.31.** Fijamos  $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ . Si  $P(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces  $Q(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ .

*Demostración.* Suponga que  $P(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces por el Teorema 5.1.30 se sigue que  $Q(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ ; Ésto como consecuencia de que  $P(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$  y  $wP(\zeta_0) + Q(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$  (véase Teorema 5.1.30).  $\square$

**Teorema 5.1.32.** Sea  $J \neq J^*$ , entonces (5.22) converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* Sabemos que (5.22) converge, para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \zeta \neq 0$ , como consecuencia del Corolario 5.1.9. Ahora, fijemos  $w \in K_n(\zeta)$ , tomemos  $|\text{Im } \zeta| > \epsilon$  y tomando en cuenta Teorema 5.1.30, tenemos

$$\sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta_0) + Q_{k-1}(\zeta_0)|^2 \leq \frac{w - \bar{w}}{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0} < \frac{w - \bar{w}}{2\epsilon}, \quad (5.35)$$

ya que  $\frac{w-\bar{w}}{2\epsilon}$  no depende de  $n$  ni de  $\zeta$ , tomando el límite en (5.35), vemos que converge uniformemente con  $|\operatorname{Im} \zeta| > \epsilon$ . Así, fijemos  $\tilde{w} \in K_n(\zeta)$  y tomando la misma  $\zeta$ , es decir,  $|\operatorname{Im} \zeta| > \epsilon$  de manera que (5.35) se sigue satisfaciendo. Notemos que  $wP_k(\zeta) + Q_k(\zeta) - [\tilde{w}P_k(\zeta) + Q_k(\zeta)] = (w - \tilde{w})P_k(\zeta)$ , entonces

$$\begin{aligned} |w - \tilde{w}|^2 \sum_{k=1}^n |P_{k-1}(\zeta)|^2 &= \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta) - [\tilde{w}P_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)]|^2 \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n |wP_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)|^2 + 2 \sum_{k=1}^n |\tilde{w}P_{k-1}(\zeta) + Q_{k-1}(\zeta)|^2, \end{aligned}$$

como cada suma converge uniformemente, concluimos que  $\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(\zeta)|^2$  converge uniformemente para  $|\zeta| > \epsilon$ . Tomando  $\zeta = x + iy$  y por lo concluido anteriormente,  $\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(x + iy)|^2$  converge uniformemente. Entonces tomando  $|\tilde{y}| > \epsilon$  tal que  $|y| < |\tilde{y}|$  y por el Lema 5.1.4, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(x + iy)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(x + i\tilde{y})|^2,$$

concluyendo que  $\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(\zeta)|^2$  converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Corolario 5.1.33.** *Sea  $J \neq J^*$ , entonces  $\hat{\rho}(J) = \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* La demostración es directa del Teorema 5.1.32, ya que (5.22) converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$ , es decir, converge para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Definición 5.1.34.** (Matriz truncada) Dada la matriz (5.1) quitamos el primer renglón y la primera columna, definiendo la matriz

$$\begin{pmatrix} q_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots \\ b_2 & q_3 & b_3 & 0 & \cdots \\ 0 & b_3 & q_4 & b_4 & \cdots \\ 0 & 0 & b_4 & q_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Podemos asociar a esta matriz un operador como se hizo al principio de la sección 5.1, es decir, se construye  $J^1$  en  $\ell_2(2, \infty)$  por el Teorema 4.3.11 tal que (5.36) es su representación matricial.

**Teorema 5.1.35.** *Sea  $P_n^1(\zeta)$  el polinomio de primer género de grado  $n$  asociado a la matriz (5.36) y  $Q_n(\zeta)$  el polinomio de segundo género de grado  $n$  asociado a la matriz (5.1). Entonces*

$$P_{n-1}^1(\zeta) = b_1 Q_n(\zeta) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.37)$$

*Demostración.* Dada la matriz (5.36), tenemos el sistema

$$\begin{aligned} q_2 f_1 + b_2 f_2 &= \zeta f_1 \\ b_n f_{n-1} + q_{n+1} f_n + b_{n+1} f_{n+1} &= \zeta f_n \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

De donde generamos los polinomios de primer género  $P_n^1(\zeta)$ , haciendo  $f_1 = 1$ , despejando y sustituyendo hasta tener  $f_n = P_{n-1}^1(\zeta)$ . Por otra parte, para la matriz (5.1) dadas las condiciones  $f_1 = 0$  y  $f_2 = b_1^{-1}$ , obtenemos  $g_n = Q_{n-1}(\zeta)$  tomando en cuenta (5.5) sin usar (5.4).

Sea  $\tilde{g}_n = b_1 g_n$ , entonces  $\tilde{g}_1 = 0$  y  $\tilde{g}_2 = 1$ . Bajo estas nuevas condiciones, tomando en cuenta (5.5) para  $n = 2$ , tenemos

$$b_1 \tilde{g}_1 + q_2 \tilde{g}_2 + b_3 \tilde{g}_3 = \zeta \tilde{g}_2,$$

que resulta en

$$q_2 \tilde{g}_2 + b_3 \tilde{g}_3 = \zeta \tilde{g}_2,$$

donde observamos que  $\tilde{g}_2 = f_1$  y además  $\tilde{g}_3$  satisface la misma ecuación en recurrencias que  $f_2$ , por lo tanto  $b_1 \tilde{g}_3 = f_2$ . Así, cuando obtenemos  $g_{n-1}$  y  $\tilde{g}_n$  estamos en la posibilidad de obtener  $g_{n+1}$  de la siguiente ecuación

$$b_{n-1} g_{n-1} + q_n \tilde{g}_n + b_n g_{n+1} = \zeta \tilde{g}_n,$$

y por las condiciones dadas vemos que  $g_{n+1}$  satisface la misma ecuación en recurrencias que  $f_n$ . Concluyendo que  $g_{n+1} = f_n$ , donde sustituyendo  $f_n = P_{n-1}^1(\zeta)$  y  $g_{n+1} = b_1 Q_n(\zeta)$ , obtenemos (5.37). □

**Teorema 5.1.36.** *Si  $J \neq J^*$ , entonces  $P(\zeta), Q(\zeta) \in \ell_2(\mathbb{N})$  para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración.* Ya que  $J \neq J^*$  por el Corolario 5.1.9, se sigue que (5.22) converge para todo  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Ahora, tomemos  $\zeta_0$ ,  $\text{Im } \zeta_0 \neq 0$ , y por el Corolario 5.1.31  $Q(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces por el Teorema 5.1.35  $P^1(\zeta_0) \in \ell_2(\mathbb{N})$  y por el Corolario 5.1.32, tenemos que  $P^1(\zeta) \in \ell_2(\mathbb{N})$  para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ , lo cual implica que  $Q(\zeta) \in \ell_2(\mathbb{N})$  para toda  $\zeta \in \mathbb{C}$ . □

*Comentario 5.1.37.* Las series  $\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1}(\zeta)|^2$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} |Q_{n-1}(\zeta)|^2$  convergen, esto como consecuencia del Teorema 5.1.36. Además, como estamos trabajando con el caso  $J \neq J^*$  las series  $\sum_{n=1}^{\infty} |P_{n-1}(\zeta)|^2$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} |Q_{n-1}(\zeta)|^2$  convergen uniformemente para toda  $\zeta$  en compactos del plano complejo. Esta afirmación la podemos consultar en [2, Cap.1 Sec.3 T.1.2.3].

## 5.2. Caracterización de extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi

En esta sección se vera como construir extensiones auto-adjuntos utilizando algunas condiciones de frontera. Además, se dará una caracterización completa de dichas extensiones.

**Definición 5.2.1.** Construimos las sucesiones  $v(\tau) = \{v_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$  tal que para toda  $k \in \mathbb{N}$

$$v_k(\tau) := P_{k-1}(0) + \tau Q_{k-1}(0), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

y

$$v_k(\infty) := Q_{k-1}(0).$$

Donde  $P_{k-1}(0)$  y  $Q_{k-1}(0)$  son los polinomios de primer género y segundo género respectivamente valuados en 0 y asociados a la matriz (5.1).

**Teorema 5.2.2.** Sea  $J \neq J^*$  y  $v(\tau)$  como en la Definición 5.2.1, entonces  $v(\tau) \in \text{dom}(J^*)$  para toda  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

*Demostración.* Fijemos  $\tau \in \mathbb{R}$ . Recordemos que  $v_k(\tau) = P_{k-1}(0) + \tau Q_{k-1}(0)$  y por el Teorema 5.1.36, tenemos que  $v(\tau) \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Aplicando  $UJ^*U^{-1} = \widehat{J^*}$  (véase la Definición 4.1.2) a la sucesión  $\{P_{k-1}(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ , obtenemos las ecuaciones (5.4) y (5.5) en  $\ell_2(\mathbb{N})$ . Ahora, notemos que la sucesión  $P(0) = \{P_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ , satisface las ecuaciones (5.4) y (5.5). Sabemos que  $P(0) \in \ell_2(\mathbb{N})$  y  $0 \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Por lo tanto  $P(0) \in \text{dom}(J^*)$ . Ahora, aplicamos  $\widehat{J^*}$  a la sucesión  $Q(0) = \{Q_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ , resultando que la ecuación (5.5) con las condiciones  $Q_1(0) = 0$  y  $Q_2(0) = b_1^{-1}$ , se convierte en general en

$$b_{n-1}Q_{n-1}(0) + q_n Q_n(0) + b_n Q_{n+1}(0) = 0, \quad n \geq 2.$$

Entonces, obtenemos que

$$\widehat{J^*}Q(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \delta_1 \in \ell_2(\mathbb{N}).$$

Esto nos dice que  $Q(0) \in \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces  $Q(0) \in \text{dom}(J^*)$  Concluyendo que  $v(\tau) \in \text{dom}(\widehat{J^*})$ .  $\square$

**Definición 5.2.3.** Sea  $J \neq J^*$ , defínase para toda  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$D_\tau := \{f \in \text{dom}(J^*) : W_\infty(v(\tau), \{f_k\}_{k=1}^{\infty}) = 0\}. \quad (5.38)$$

Del Teorema 5.1.36, se sigue que  $v(\tau) \in \ell_2(\mathbb{N})$  y  $w_n(v(\tau), f)$  está bien definido para  $f \in \text{dom}(J^*)$ . De hecho, el límite siempre existe como resultado del Teorema 5.1.20 y el Teorema 5.2.2.

**Teorema 5.2.4.** *Sea  $D_\tau$  el conjunto dado en (5.38), entonces  $D_\tau$  es denso en  $\mathcal{H}$ , para toda  $\tau \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Haremos la prueba para  $\tau$  fija. Sabemos por lo hecho en la sección 4.1 que  $\overline{\ell_{fin}(\mathbb{N})} = \ell_2(\mathbb{N})$ , entonces  $\overline{U^{-1}\ell_{fin}(\mathbb{N})} = \mathcal{H}$  (véase Definición 4.1.2). Si  $\phi \in \ell_2(\mathbb{N})$ , se sigue que  $W_n(v(\tau), \phi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Por lo tanto  $U^{-1}\ell_{fin}(\mathbb{N}) \subset D_\tau$ , concluyendo que  $D_\tau$  es denso en  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Teorema 5.2.5.** *Sea  $J \neq J^*$ , entonces para toda  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  existe  $f \in \text{dom}(J^*)$  tal que  $W_\infty(v(\tau), f) \neq 0$ .*

*Demostración.* Del Teorema 5.1.20 y del Teorema 5.2.2, se sigue que existe  $W_\infty(v(\tau), f)$  para toda  $f \in \text{dom}(J^*)$ . Fijemos  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  y suponga que para toda  $f \in \text{dom}(J^*)$   $W_\infty(v(\tau), f) = 0$ , lo cual implica que  $D_\tau = \text{dom}(J^*)$ . Ahora, sean  $\tau \neq \tilde{\tau}$  ambos en  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} & W_\infty(v(\tau), v(\tilde{\tau})) \\ &= W_\infty(\{P_{k-1}(0) + \tau Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}, \{P_{k-1}(0) + \tilde{\tau} Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}) \\ &= W_\infty(P(0), P(0)) + \tau W_\infty(Q(0), P(0)) \\ &+ \tilde{\tau} W_\infty(P(0), Q(0)) + \tau \tilde{\tau} W_\infty(Q(0), Q(0)) \\ &= \tau W_\infty(Q(0), P(0)) + \tilde{\tau} W_\infty(P(0), Q(0)). \end{aligned}$$

Ahora, como  $P(0)$  y  $Q(0)$  son soluciones de (5.5) para  $n > 1$  del Teorema 5.1.12, se sigue que el wronskiano es constante. Por lo tanto  $\tau - \tilde{\tau} \neq 0$ , concluyendo por una parte que  $v(\tilde{\tau}) \notin D_\tau$ , pero por otro lado del Teorema 5.2.2 tenemos que  $v(\tilde{\tau}) \in \text{dom}(J^*)$ , obteniendo que  $D_\tau \neq \text{dom}(J^*)$ . Lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 5.2.6.** *Sea  $J \neq J^*$  y  $v(\tau)$ ,  $D_\tau$  la sucesión y el conjunto de la Definición 5.2.1 y 5.2.3 respectivamente. Entonces*

$$f \in D_\tau \quad \text{sii} \quad f^* \in D_\tau.$$

donde  $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k u_k$  y  $f^* = \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{f}_k u_k$

*Demostración.* Sea  $f \in D_\tau$  sii  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(v(\tau), \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$ . Del hecho de que  $v(\tau) = \overline{v(\tau)}$  se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\overline{v(\tau)}, \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$ , por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\overline{v(\tau)}, \{\bar{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$  sii  $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(v(\tau), \{\bar{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$  sii  $f^* \in D_\tau$ .  $\square$

**Teorema 5.2.7.** *(Identidad de Plücker) Para cualquier sucesión  $\alpha, \beta, \sigma, \delta \in \ell_2(\mathbb{N})$  se tiene que*

$$W_n(\alpha, \beta)W_n(\sigma, \delta) + W_n(\alpha, \sigma)W_n(\delta, \beta) + W_n(\alpha, \delta)W_n(\beta, \sigma) = 0 \quad (5.39)$$



*Demostración.* La demostración la haremos para  $n \in \mathbb{N}$  fija.

$$\begin{aligned}
& W_n(\alpha, \beta)W_n(\sigma, \delta) + W_n(\alpha, \sigma)W_n(\delta, \beta) + W_n(\alpha, \delta)W_n(\beta, \sigma) \\
&= b_n(\alpha_n\beta_{n+1} - \beta_n\alpha_{n+1})b_n(\sigma_n\delta_{n+1} - \delta_n\sigma_{n+1}) \\
&+ b_n(\alpha_n\sigma_{n+1} - \sigma_n\alpha_{n+1})b_n(\delta_n\beta_{n+1} - \beta_n\delta_{n+1}) \\
&+ b_n(\alpha_n\delta_{n+1} - \delta_n\alpha_{n+1})b_n(\beta_n\sigma_{n+1} - \sigma_n\beta_{n+1}) \\
&= b_n(\alpha_n\beta_{n+1}\sigma_n\delta_{n+1} - \alpha_n\beta_{n+1}\delta_n\sigma_{n+1} - \beta_n\alpha_{n+1}\sigma_n\delta_{n+1} + \beta_n\alpha_{n+1}\delta_n\sigma_{n+1}) \\
&+ b_n(\alpha_n\sigma_{n+1}\delta_n\beta_{n+1} - \alpha_n\sigma_{n+1}\beta_n\delta_{n+1} - \sigma_n\alpha_{n+1}\delta_n\beta_{n+1} + \sigma_n\alpha_{n+1}\beta_n\delta_{n+1}) \\
&+ b_n(\alpha_n\delta_{n+1}\beta_n\sigma_{n+1} - \alpha_n\delta_{n+1}\sigma_n\beta_{n+1} - \delta_n\alpha_{n+1}\beta_n\sigma_{n+1} + \delta_n\alpha_{n+1}\sigma_n\beta_{n+1}) \\
&= b_n[(\alpha_n\beta_{n+1}\sigma_n\delta_{n+1} - \alpha_n\delta_{n+1}\sigma_n\beta_{n+1}) + (-\alpha_n\beta_{n+1}\delta_n\sigma_{n+1} + \alpha_n\sigma_{n+1}\delta_n\beta_{n+1}) \\
&+ (-\beta_n\alpha_{n+1}\sigma_n\delta_{n+1} + \sigma_n\alpha_{n+1}\beta_n\delta_{n+1})] + (\beta_n\alpha_{n+1}\delta_n\sigma_{n+1} - \delta_n\alpha_{n+1}\beta_n\sigma_{n+1}) \\
&+ (-\alpha_n\sigma_{n+1}\beta_n\delta_{n+1} + \alpha_n\delta_{n+1}\beta_n\sigma_{n+1}) + (\delta_n\alpha_{n+1}\sigma_n\beta_{n+1} - \sigma_n\alpha_{n+1}\delta_n\beta_{n+1})] = 0.
\end{aligned}$$

□

**Corolario 5.2.8.** Sea  $J \neq J^*$  y  $v(\tau)$ ,  $D_\tau$  la sucesión y el conjunto de la Definición 5.2.1 y 5.2.3 respectivamente. Entonces

$$f, g \in D_\tau \quad \text{implica que} \quad W_\infty(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0.$$

*Demostración.* Sea  $f, g \in D_\tau$  sii  $W_\infty(v(\tau), \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$  y  $W_\infty(v(\tau), \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0$ . Sustituyendo en la ecuación (5.39)  $\alpha = v(\tau)$ ,  $\beta = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\sigma = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $\delta = \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde  $\tilde{f} = \sum_{\mathbb{N}} \tilde{f}_k u_k \in \text{dom}(J^*)$  y no esta en  $D_\tau$  (véase Teorema 5.2.5). Se tiene que

$$\begin{aligned}
& W_n(v(\tau), \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}})W_n(\{\tilde{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) \\
&+ W_n(v(\tau), \{\tilde{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}})W_n(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}) \\
&+ W_n(v(\tau), \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}})W_n(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\tilde{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0,
\end{aligned}$$

de donde claramente  $W_\infty(f, g) = 0$ . □

**Teorema 5.2.9.** Sea  $J \neq J^*$  y  $v(\tau)$ ,  $D_\tau$  la sucesión y el conjunto de la Definición 5.2.1 y 5.2.3 respectivamente. Entonces  $J^* \upharpoonright_{D_\tau}$  es una extensión auto-adjunta de  $J$ .

*Demostración.* Sea  $f, g \in D_\tau$  y  $\tau$  fija. Del Teorema 5.1.20 y el Corolario 5.2.8, se sigue que  $\langle J^* \upharpoonright_{D_\tau} f, g \rangle - \langle f, J^* \upharpoonright_{D_\tau} g \rangle = 0$ , es decir,  $\langle J^* \upharpoonright_{D_\tau} f, g \rangle = \langle f, J^* \upharpoonright_{D_\tau} g \rangle$ , concluyendo que  $J^* \upharpoonright_{D_\tau}$  es simétrico. Por otra parte, tenemos que  $J$  y  $J^*$  son cerrados, además tomando en cuenta (3.65), tenemos que  $\dim \left[ \frac{\text{dom}(J^*)}{\text{dom}(J)} \right] = 2$  cumpliéndose las hipótesis del Teorema 3.1.26, entonces  $J^* \upharpoonright_{D_\tau}$  es cerrado. Ahora, por el Corolario 3.7.15, se sigue que  $J^* \upharpoonright_{D_\tau}$  es una extensión auto-adjunta de  $J^*$  para toda  $\tau$ . □

**Definición 5.2.10.** Sea  $J \neq J^*$  y  $D(\tau)$  el conjunto de la Definición 5.2.3. Defínase  $J^* \upharpoonright_{D_\tau} =: J(\tau)$ .

Observe que por el Teorema 5.2.9, para toda  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$   $J(\tau)$ , es una extensión auto-adjunta de  $J$ .

**Teorema 5.2.11.** *Sea  $J \neq J^*$  y  $\tilde{J}$  una extensión auto-adjunta de  $J$ , entonces existe una única  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tal que  $\tilde{J} = J(\tau)$ .*

*Demostración.* Sea  $\tilde{J}$  una extensión auto-adjunta arbitraria de  $J$  y  $\lambda_0 \in \sigma(\tilde{J})$ , entonces  $P(\lambda_0) = \{P_{k-1}(\lambda_0)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ker(\tilde{J} - \zeta I)$ . Siguiéndose que para toda  $g \in \text{dom}(\tilde{J})$

$$\langle \tilde{J}P(\lambda_0), g \rangle = \langle P(\lambda_0), \tilde{J}g \rangle$$

De donde por el Teorema 5.1.20, se sigue que

$$W_\infty(P(\lambda_0), \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) = 0. \quad (5.40)$$

Ahora, consideremos

$$\tau = \begin{cases} \infty & \text{si } W_\infty(Q(0), P(\lambda_0)) = 0 \\ \frac{W_\infty(P(0), P(\lambda_0))}{W_\infty(Q(0), P(\lambda_0))} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lo cual implica que

$$W_\infty(v(\tau), P(\lambda_0)) = W_\infty(P(0), P(\lambda_0)) + \tau W_\infty(Q(0), P(\lambda_0)) = 0. \quad (5.41)$$

Debido a (5.40) y (5.41), al pasar al límite en (5.39) tomando  $\alpha = P(\lambda_0)$ ,  $\beta = g$ ,  $\sigma = v(\tau)$ ,  $\delta = f$ , con  $f \in \text{dom}(J^*) \setminus D_0$ , obtenemos

$$W_\infty(P(\lambda_0), \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}})W_\infty(v(\tau), \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}) + W_\infty(P(\lambda_0), v(\tau))W_\infty(\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}) \\ + W_\infty(P(\lambda_0), \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}})W_\infty(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}, v(\tau)) = 0.$$

Concluyendo que  $W_\infty(v(\tau), g) = 0$ , obteniendo así que  $\text{dom}(\tilde{J}) \subset D_\tau$ .

Ahora, tomemos  $g \in D_\tau$  tal que  $g \notin \text{dom}(\tilde{J})$  y  $f \in \text{dom}(\tilde{J})$ , entonces

$$\langle \tilde{J}f, g \rangle = \langle J(\tau)f, g \rangle = \langle f, J(\tau)g \rangle, \quad (5.42)$$

obteniendo que  $g \in \text{dom}(\tilde{J}^*) = \text{dom}(\tilde{J})$ . La primer igualdad en la ecuación (5.42), se sigue del hecho de que  $\tilde{J} = J^* \upharpoonright_{\text{dom}(\tilde{J})}$  y de que  $\text{dom}(\tilde{J}) \subset D_\tau$ , la segunda es por que  $g \in D_\tau$  y hecho de que  $J(\tau)$  es auto-adjunto.  $\square$

### 5.3. Representación canónica de un operador de Jacobi

En esta sección se construye la representación canónica del operador de Jacobi  $J$ . Para facilitar el trabajo de esta sección, consideré, solo en esta sección, que el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  sobre el cual está definido  $J$  es  $\ell_2(\mathbb{N})$ , es decir,  $J$  es el operador que actúa sobre cada elemento de  $\ell_{fin}(\mathbb{N})$  (véase Capítulo 4) como el sistema recurrente dado por las ecuaciones (5.4) y (5.5). Además,  $J$  tiene como representación matricial la matriz (5.1) con respecto de la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ ;  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $J^*$  el operador adjunto de  $J$  y  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ , entonces*

$$J^* \delta_1 = q_1 \delta_1 + b_1 \delta_2 \quad (5.43)$$

y para  $n \geq 2$

$$J^* \delta_n = b_{n-1} \delta_{n-1} + q_n \delta_n + b_n \delta_{n+1}. \quad (5.44)$$

*Demostración.* Sea  $J^*$  el operador adjunto de  $J$  y  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ , entonces

$$\begin{aligned} J^* \delta_1 &= \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = q_1 \delta_1 + b_1 \delta_2. \end{aligned}$$

Ahora, tomemos  $n \geq 2$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
 J^* \delta_n &= \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_{n-1} \\ q_n \\ b_n \\ \vdots \end{pmatrix} \\
 &= b_{n-1} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + q_n \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{n-1} \delta_{n-1} + q_n \delta_n + b_n \delta_{n+1}.
 \end{aligned}$$

□

Note que como  $J^*$  satisface (5.43) y (5.44), entonces  $J(\tau)$  satisface (5.43) y (5.44), ya que  $J(\tau)$  es restricción de  $J^*$ . Tomemos  $J(\tau)$  en vez de  $J^*$  y despejemos  $\delta_2$  en términos de  $\delta_1$  de la ecuación (5.43), obteniendo

$$\delta_2 = \frac{(J(\tau) - q_1)\delta_1}{b_1}. \quad (5.45)$$

Así, podemos despejar  $\delta_n$  para  $n \geq 2$ , teniendo como resultado un polinomio de grado  $n - 1$  con respecto a  $J(\tau)$  actuando sobre  $\delta_1$ , el cual escribimos como

$$\delta_n = P_{n-1}(J(\tau))\delta_1 \quad (5.46)$$

**Corolario 5.3.2.**  $\delta_1 \in \text{dom}(J^n(\tau))$  para toda  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $n$ . Se quiere demostrar que  $J^{n-1}(\tau) \in D_\tau$ . Observemos que  $\delta_1 \in \ell_{fin}(\mathbb{N}) \subset D_\tau$ , ya que claramente de (5.45) tenemos  $J(\tau)\delta_1 \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$ . Suponga que  $J^k(\tau)\delta_1 \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$  para toda  $k < n - 1$ . De la ecuación (5.46), tenemos que

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k J^k(\mathbb{N})\delta_1,$$

de esta última ecuación, concluimos que  $J^{n-1}(\tau)\delta_1 \in \ell_{fin}(\mathbb{N})$  □

Note que

$$\langle P_{n-1}(J(\tau))\delta_1, P_{m-1}(J(\tau))\delta_1 \rangle = \langle \delta_n, \delta_m \rangle = \delta_{nm}$$

donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker.

*Comentario 5.3.3.* Ya se sabe que  $J(\tau)$  es extensión auto-adjunta de  $J$  y cuando  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ;  $J(\tau)$  son todas las extensiones que existen de  $J$  (véase los Teoremas 5.2.9 y 5.2.11). Además, sabemos que  $J(\tau)$  tiene espectro discreto (véase Teorema 5.1.17) y por el Teorema 3.4.2, podemos escribir la acción de  $J(\tau)$  sobre  $f \in D_\tau$  de la siguiente forma

$$J(\tau)f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\langle P(\lambda_k), f \rangle P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2},$$

donde  $P(\zeta) = \{P_{k-1}(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$  y  $\lambda_k \in \sigma(J(\tau))$ ; De la Sección 5.1 se desprende que  $\ker(J(\tau) - \lambda_k I) \neq \{0\}$  y  $\ker(J(\tau) - \lambda_k I) \subset \ker(J^* - \lambda_k I)$ , ya que  $J \subset J(\tau) \subset J^*$ , concluyendo  $\ker(J(\tau) - \lambda_k I) = \ker(J^* - \lambda_k I)$ . Así,  $P(\lambda_k) \in \ker(J(\tau) - \lambda_k I)$ . Después, defínase la función

$$\rho_\tau(t) := \sum_{\lambda_k \leq t} \frac{1}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \quad (5.47)$$

que es la función espectral de la extensión auto-adjunta  $J(\tau)$ . Entonces tomemos en cuenta el siguiente producto interior

$$\begin{aligned} \langle J(\tau)\delta_1, \delta_1 \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\langle P(\lambda_k), \delta_1 \rangle P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \delta_1 \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\|P(\lambda_k)\|^2} = \int_{\mathbb{R}} t d\rho(t), \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el Comentario 5.3.3 y el Corolario 5.3.2, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.4.** *Sea  $\delta_1$  el elemento de la base canónica de  $\ell_2(\mathbb{N})$ ,  $\rho(t)$  dado en la ecuación (5.47) y  $R$  un polinomio cualquiera, entonces*

$$\langle R(J(\tau))\delta_1, \delta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} R(t) d\rho(t).$$

*Demostración.* Para la prueba de este hecho es suficiente mostrar que

$$\langle J^n(\tau)\delta_1, \delta_1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} t^n d\rho(t). \quad (5.48)$$

La demostración de esta afirmación sera por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  se satisface la igualdad, por lo visto arriba. Ahora, suponga que se satisface para  $n - 1$ . Por

demostrar que se satisface para  $n$ . Consideremos el siguiente producto interior

$$\begin{aligned}
\langle J^n(\tau)\delta_1, \delta_1 \rangle &= \langle J(\tau)J^{n-1}(\tau)\delta_1, \delta_1 \rangle \\
&= \left\langle J(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n-1} \frac{\langle P(\lambda_k), \delta_1 \rangle P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \delta_1 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n-1} \frac{\langle P(\lambda_k), \delta_1 \rangle J(\tau)P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \delta_1 \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{n-1} \frac{\langle P(\lambda_k), \delta_1 \rangle \lambda_k P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \delta_1 \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \frac{\langle P(\lambda_k), \delta_1 \rangle P(\lambda_k)}{\|P(\lambda_k)\|^2}, \delta_1 \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n}{\|P(\lambda_k)\|^2} = \int_{\mathbb{R}} t^n d\rho(t).
\end{aligned}$$

□

*Comentario 5.3.5.* Sabemos que la relación dada en la ecuación (5.48) se satisface para cualquier  $n$  y por tanto  $\rho_\tau(t)$  definida en la ecuación (5.47) es tal que existen todos sus momentos.

Por lo dicho anteriormente, vemos que podemos construir una isometría  $V$  entre  $\ell_2(\mathbb{N})$  y  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  de forma tal que  $V\delta_n = P_{n-1}(t)$ . Para ver que  $V$  es isometría solo probaremos que los polinomios  $P_n(t)$  son una sistema ortonormal (s.o.n.) en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  y además que se satisface la ecuación (2.15). En efecto, comencemos viendo que son ortonormales

$$\begin{aligned}
\delta_{mn} &= \langle P_{n-1}(J(\tau))\delta_1, P_{m-1}(J(\tau))\delta_1 \rangle = \langle P_{n-1}(J(\tau))P_{m-1}(J(\tau))\delta_1, \delta_1 \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} P_{n-1}(t)P_{m-1}(t)d\rho(t),
\end{aligned} \tag{5.49}$$

como los índices de los polinomios fueron escogidos arbitrariamente se ve claramente que forman un sistema ortonormal. Ahora, veamos que se satisface (2.15). Sea  $\phi = \{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ ,  $\phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k \delta_k$ . Entonces

$$V\phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k V\delta_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k P_{k-1}(t). \tag{5.50}$$

Ahora, al calcular la norma en  $\ell_2(\mathbb{N})$  de  $\phi$  vemos que utilizando el Teorema 2.2.3, tenemos

$$\|\phi\|^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \delta_k \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2.$$

Por otro lado, tomando la norma en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  del lado derecho de la ecuación (5.50), se sigue

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k P_{k-1}(t) \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2,$$

tomando en cuenta que los polinomios son un s.o.n. en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  y usando el Teorema 2.2.3. Así,

$$\|\phi\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^2 = \|V\phi\|_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)}^2.$$

Por lo tanto  $V$  es una isometría.

Ahora, notemos que para  $n \in \mathbb{N}$

$$VJ(\tau)V^{-1}P_{n-1}(t) = VJ(\tau)\delta_n \quad (5.51)$$

y usando el Teorema 5.3.1, tenemos

$$VJ(\tau)\delta_n = V(b_{n-1}\delta_{n-1} + q_n\delta_n + b_n\delta_{n+1}) = b_{n-1}P_{n-2}(t) + q_nP_{n-1}(t) + b_nP_n(t).$$

Y si sustituimos  $P_0(t)$  en vez de  $P_{n-1}(t)$  en la ecuación (5.51), se deduce fácilmente

$$VJ(\tau)\delta_1 = q_1P_0(t) + b_1P_1(t).$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} \langle VJ(\tau)V^{-1}P_{n-1}(t), P_0(t) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)} &= \langle J(\tau)V^{-1}P_{n-1}(t), V^{-1}P_0(t) \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} \\ &= \langle J(\tau)V^{-1}P_{n-1}(t), \delta_1 \rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} = \int_{\mathbb{R}} tP_{n-1}(t)P_0(t)d\rho(t) \\ &= \langle tP_{n-1}(t), P_0(t) \rangle_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)}. \end{aligned}$$

Notemos que en el producto interior anterior podemos tomar cualquier  $P_{m-1}(t)$  en sustitución de  $P_0(t)$  y como los polinomios son un s.o.n. Concluimos que  $VJ(\tau)V^{-1}P_{n-1}(t) = tP_{n-1}(t)$ , obteniendo

$$\begin{aligned} tP_0(t) &= q_1P_0(t) + b_1P_1(t) \\ tP_{n-1}(t) &= b_{n-1}P_{n-2}(t) + q_nP_{n-1}(t) + b_nP_n(t), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

De esta forma  $V\ell_2(\mathbb{N}) = \overline{\text{span}\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}} \subset L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  y  $VJ(\tau)V^{-1}$  es el operador de multiplicación por la variable independiente en  $\text{span}\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ . Esto corresponde a la representación canónica del operador  $J(\tau)$ .<sup>1</sup>

De (5.48) (véase también el Comentario 5.3.5) todos los polinomios están en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ . Ahora, es fácil ver que si ortonormalizamos por el método de Gram-Schmidt la sucesión  $\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ , obtenemos  $\{P_{k-1}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ . Donde  $P_k(t)$  son los polinomios de primer género asociados a  $J$ .

<sup>1</sup>Ya que  $\delta_1$  es cíclico de  $J(\tau)$ , en base a [2, Sec. 69] se puede demostrar que  $\overline{\text{span}\{t^{k-1}\}_{k=1}^{\infty}} = L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ . Por lo tanto  $V$  realiza la representación canónica de  $J(\tau)$  como se define en [2, Sec. 69].

*Comentario 5.3.6.* De (5.49) haciendo  $m = n = 1$ , se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}} d\rho(t) = 1.$$

Esto último a la luz de (5.47), implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|P(\lambda_k)\|^2} = 1. \quad (5.52)$$





# Capítulo 6

## Reconstrucción de la matriz de Jacobi

Este es el capítulo central de nuestra investigación, basada en los resultados de [18]. En la sección 6.1 veremos teoría introductoria de reconstrucción de una matriz de Jacobi, haciendo uso de los polinomios de primer y segundo genero vistos en el capitulo anterior y que nos ayudan a introducir nuevas funciones que nos serán auxiliares. Por otra parte en la sección 6.2 veremos el problema central de nuestra investigación que se encuentra escrito en el Teorema 6.2.2 y el cual nos da una técnica de reconstruir única para una matriz de Jacobi en el caso no auto-adjunto a partir del espectro de dos de sus extensiones auto-adjuntas.

### 6.1. Reconstrucción

Comenzaremos introduciendo algunas funciones auxiliares. La función  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son denotadas usualmente por estas letras ya que forman las entradas de la matriz de Nevanlinna asociada a la matriz de Jacobi (5.1).

**Definición 6.1.1.** Defínanse las funciones

$$A_n(\zeta) := W_n(Q(0), Q(\zeta)), \quad (6.1)$$

$$B_n(\zeta) := W_n(Q(0), P(\zeta)), \quad (6.2)$$

$$C_n(\zeta) := W_n(P(0), Q(\zeta)), \quad (6.3)$$

$$D_n(\zeta) := W_n(P(0), P(\zeta)), \quad (6.4)$$

donde  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $Q(\zeta) = \{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  son los polinomios de primer y segundo género respectivamente asociados a la matriz (5.1).

Recordemos que los polinomios de primer y segundo género son una sucesión denotada usualmente por  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $Q(\zeta) = \{Q_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  respectivamente. Dichas sucesiones están dadas en las ecuaciones (5.6) y (5.9).

**Lema 6.1.2.** Sea  $A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$  dados como en la Definición 6.1.1, entonces

$$A_n(\zeta) = \zeta \sum_{k=1}^n Q_k(0)Q_k(\zeta) \quad (6.5)$$

$$B_n(\zeta) = -1 + \zeta \sum_{k=1}^n Q_k(0)P_k(\zeta) \quad (6.6)$$

$$C_n(\zeta) = 1 + \zeta \sum_{k=1}^n P_k(0)Q_k(\zeta) \quad (6.7)$$

$$D_n(\zeta) = \zeta \sum_{k=1}^n P_k(0)P_k(\zeta) \quad (6.8)$$

*Demostración.* Utilizando la ecuación (5.19) (tomando en cuenta que  $\mu = 0$  para todas las ecuaciones) y aplicándola sobre la ecuación (6.1), se sigue que

$$\begin{aligned} & b_1(Q_0(0)Q_1(\zeta) - Q_1(0)Q_0(\zeta)) - b_n(Q_{n-1}(0)Q_n(\zeta) - Q_n(0)Q_{n-1}(\zeta)) \\ &= -\zeta \sum_{k=1}^n Q_k(0)Q_k(\zeta), \end{aligned}$$

tomando en cuenta que  $Q_1(0) = Q_0(\zeta) = 0$ , se obtiene (6.5). Ahora, aplicando (5.19) a la ecuación (6.2), tenemos

$$\begin{aligned} & b_1(Q_0(0)P_1(\zeta) - Q_1(0)P_0(\zeta)) - b_n(Q_{n-1}(0)P_n(\zeta) - Q_n(0)P_{n-1}(\zeta)) \\ &= -\zeta \sum_{k=1}^n Q_k(0)P_k(\zeta), \end{aligned}$$

utilizando que  $Q_0(0) = 0$ ,  $Q_1(0) = b_1^{-1}$ ,  $P_0(\zeta) = 1$  y despejando, obtenemos (6.6). Después, aplicando (5.19) a la ecuación (6.3), se sigue

$$\begin{aligned} & b_1(P_0(0)Q_1(\zeta) - P_1(0)Q_0(\zeta)) - b_n(P_{n-1}(0)Q_n(\zeta) - P_n(0)Q_{n-1}(\zeta)) \\ &= -\zeta \sum_{k=1}^n P_k(0)Q_k(\zeta), \end{aligned}$$

notando que  $Q_0(\zeta) = 0$ ,  $Q_1(\zeta) = b_1^{-1}$ ,  $P_0(0) = 1$  y despejando, tenemos la ecuación (6.7). Para la ecuación (6.4), también aplicamos (5.19), resultando en

$$\begin{aligned} & b_1(P_0(0)P_1(\zeta) - P_1(0)P_0(\zeta)) - b_n(P_{n-1}(0)P_n(\zeta) - P_n(0)P_{n-1}(\zeta)) \\ &= -\zeta \sum_{k=1}^n P_k(0)P_k(\zeta), \end{aligned}$$

de donde usando que  $P_0(0) = P_0(\zeta) = 1$ ,  $P_1(0) = -\frac{q_1}{b_1}$ ,  $P_1(\zeta) = \frac{\zeta - q_1}{b_1}$ , y despejando, se tiene la ecuación (6.8).  $\square$

Note que utilizando las ecuaciones (6.1)–(6.4) y la identidad (5.10), se verifica fácilmente que

$$P_n(\zeta) = Q_n(0)D_n(\zeta) - P_n(0)B_n(\zeta), \quad (6.9)$$

$$Q_n(\zeta) = Q_n(0)C_n(\zeta) - P_n(0)A_n(\zeta), \quad (6.10)$$

**Teorema 6.1.3.** *Sea  $A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$  dados como en la Definición 6.1.1, entonces*

$$\begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \left( I + \zeta \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix} \right), \quad (6.11)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$  y tomamos el producto de matrices en orden cronológico, es decir, para una sucesión de matrices cuadradas  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tenemos

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1$$

A partir de aquí cada vez que veamos un producto de matrices sera en orden cronológico.

*Demostración.* Observe que

$$\begin{pmatrix} -B_1(\zeta) & -A_1(\zeta) \\ D_1(\zeta) & C_1(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} = \left( I + \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ahora, suponga que (6.11) es cierta para  $n$ , entonces demostraremos que es también cierta para  $n + 1$ , para probar esto basta demostrar que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -B_{n+1}(\zeta) & -A_{n+1}(\zeta) \\ D_{n+1}(\zeta) & C_{n+1}(\zeta) \end{pmatrix} \\ &= \left( I + \zeta \begin{pmatrix} -Q_n(0)P_n(0) & -Q_n(0)Q_n(0) \\ P_n(0)P_n(0) & P_n(0)Q_n(0) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Es decir, desarrollando el lado derecho de (6.12), tenemos que verificar que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -B_{n+1}(\zeta) & -A_{n+1}(\zeta) \\ D_{n+1}(\zeta) & C_{n+1}(\zeta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix} + \zeta \left( \begin{pmatrix} -Q_n(0)P_n(0) & -Q_n(0)Q_n(0) \\ P_n(0)P_n(0) & P_n(0)Q_n(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Así, por entradas debemos probar que las siguientes igualdades se satisfacen

$$-B_{n+1}(\zeta) = -B_n(\zeta) + \zeta(Q_n(0)P_n(0)B_n(\zeta) - Q_n(0)Q_n(0)D_n(\zeta)) \quad (6.13)$$

$$-A_{n+1}(\zeta) = -A_n(\zeta) + \zeta(Q_n(0)P_n(0)A_n(\zeta) - Q_n(0)Q_n(0)C_n(\zeta)) \quad (6.14)$$

$$D_{n+1}(\zeta) = D_n(\zeta) + \zeta(-P_n(0)P_n(0)B_n(\zeta) + P_n(0)Q_n(0)D_n(\zeta)) \quad (6.15)$$

$$C_{n+1}(\zeta) = C_n(\zeta) + \zeta(-P_n(0)P_n(0)A_n(\zeta) + P_n(0)Q_n(0)C_n(\zeta)). \quad (6.16)$$

Utilizando la ecuación (6.9) para la parte derecha de (6.13) y (6.15), y la ecuación (6.10) para la parte derecha de (6.14) y (6.16), tenemos que las ecuaciones a verificar son

$$\begin{aligned} -B_{n+1}(\zeta) &= -[B_n(\zeta) + \zeta(Q_n(0)P_n(\zeta))] \\ -A_{n+1}(\zeta) &= -[A_n(\zeta) + \zeta(Q_n(0)Q_n(\zeta))] \\ D_{n+1}(\zeta) &= D_n(\zeta) + \zeta(P_n(0)P_n(\zeta)) \\ C_{n+1}(\zeta) &= C_n(\zeta) + \zeta(P_n(0)Q_n(\zeta)). \end{aligned}$$

Pero del Lema 6.1.2 se verifica directamente que las igualdades anteriores son validas, es decir, la ecuación (6.12) tiene lugar.  $\square$

**Definición 6.1.4.** Sea  $J \neq J^*$ , defínanse

$$\begin{aligned} A(\zeta) &:= W_\infty(Q(0), Q(\zeta)), \\ B(\zeta) &:= W_\infty(Q(0), P(\zeta)), \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} C(\zeta) &:= W_\infty(P(0), Q(\zeta)), \\ D(\zeta) &:= W_\infty(P(0), P(\zeta)), \end{aligned} \tag{6.18}$$

*Comentario 6.1.5.* La Definición 6.1.4 es correcta, debido al Teorema 5.1.20 y al Teorema 5.1.36 y los límites existen siempre que  $J \neq J^*$ .

**Teorema 6.1.6.** Sea  $J \neq J^*$ . Entonces

$$\begin{pmatrix} -B(\zeta) & -A(\zeta) \\ D(\zeta) & C(\zeta) \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \left( I + \zeta \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix} \right) \tag{6.19}$$

*Demostración.* Note que, por definición,

$$\begin{aligned} A_n(\zeta) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(\zeta), \\ B_n(\zeta) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} B(\zeta), \\ C_n(\zeta) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} C(\zeta), \\ D_n(\zeta) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} D(\zeta). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho de que  $J \neq J^*$ , tenemos que los límites de las funciones en la Definición 6.1.4 existen y están bien definidos. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} -B(\zeta) & -A(\zeta) \\ D(\zeta) & C(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Entonces el límite del lado derecho de (6.19) también existe, es decir, el producto es convergente.  $\square$

**Teorema 6.1.7.** *Sea  $J \neq J^*$ , entonces*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix} \right\| < \infty \quad (6.20)$$

*Demostración.* Para esta demostración primero calcularemos la norma de la matriz, utilizando la norma de un vector  $v$  en  $\mathbb{C}^2$  como  $\|v\| = \max\{|v_1|, |v_2|\}$  (recuerde que en espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes).

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sup_{\|(v_1, v_2)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sup_{\|(v_1, v_2)\|=1} (\max\{|-Q_k(0)P_k(0)v_1 - Q_k(0)Q_k(0)v_2|, |P_k(0)P_k(0)v_1 + P_k(0)Q_k(0)v_2|\}) \\ &\leq C \max\{|Q_k(0)P_k(0)|, |Q_k(0)Q_k(0)|, |P_k(0)P_k(0)|\}. \end{aligned}$$

Tomemos el elemento  $|Q_k(0)P_k(0)|$  del conjunto al que se le evalúa el máximo y estudiemos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(0)P_k(0)|,$$

por la desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(0)P_k(0)| \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

ya que  $\{Q_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$  y  $\{P_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$  son sucesiones en  $\ell_2(\mathbb{N})$  siempre que  $J \neq J^*$ . Análogamente  $\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(0)Q_k(0)| < \infty$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(0)P_k(0)| < \infty$ . Por lo tanto (6.20) tiene lugar.  $\square$

**Teorema 6.1.8.** *Sea  $J \neq J^*$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$\left\| \begin{pmatrix} -B(\zeta) & -A(\zeta) \\ D(\zeta) & C(\zeta) \end{pmatrix} \right\| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (6.21)$$

*Demostración.* Sea

$$N_n(\zeta) := \begin{pmatrix} -B_n(\zeta) & -A_n(\zeta) \\ D_n(\zeta) & C_n(\zeta) \end{pmatrix}$$

y

$$S_k := \begin{pmatrix} -Q_k(0)P_k(0) & -Q_k(0)Q_k(0) \\ P_k(0)P_k(0) & P_k(0)Q_k(0) \end{pmatrix}$$

Ahora, note que

$$\|N_n(\zeta)\| = \left\| \prod_{k=0}^{n-1} (I + \zeta S_k) \right\| \leq \prod_{k=0}^{n-1} (1 + |\zeta| \|S_k\|) = e^{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + |\zeta| \|S_k\|)} \leq e^{|\zeta| \sum_{k=0}^{n-1} \|S_k\|} \quad (6.22)$$

Por el Teorema 6.1.6, se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\zeta)$  existe y denotaremos ese límite por  $N(\zeta)$ ,  $N(\zeta)$  es entera. Por (6.22), se obtiene

$$\begin{aligned} \|N(\zeta)\| &= \left\| \prod_{k=0}^{n-1} (I + \zeta S_k) \prod_{k=n}^{\infty} (I + \zeta S_k) \right\| \\ &\leq \left\| \prod_{k=0}^{n-1} (I + \zeta S_k) \right\| \left\| \prod_{k=n}^{\infty} (I + \zeta S_k) \right\| \leq \left( e^{|\zeta| \sum_{k=0}^{n-1} \|S_k\|} \right) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + |\zeta| \|S_k\|) \end{aligned}$$

Claramente  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + |\zeta| \|S_k\|)$  es un polinomio de  $|\zeta|$  de grado  $n - 1$ , entonces ya que  $\|S_k\| > 0$  existen números  $a_k > 0$  tales que

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + |\zeta| \|S_k\|) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k |\zeta|^k.$$

Ahora, estimemos la cota superior de las desigualdades anteriores. Comencemos sustituyendo la igualdad anterior en la última desigualdad de arriba, obteniendo

$$\begin{aligned} \left( e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \right) \sum_{k=0}^{n-1} a_k |\zeta|^k &\leq e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \left[ \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \right] \sum_{k=0}^{n-1} |\zeta|^k \\ &\leq \left( e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \right) 2^{n-1} \left[ \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \right] \frac{(n-1)!}{\epsilon^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\frac{1}{2}\epsilon)^k |\zeta|^k}{k!} \\ &< \left( e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \right) 2^{n-1} \left[ \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \right] \frac{(n-1)!}{\epsilon^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\epsilon)^k |\zeta|^k}{k!} \\ &\leq \left( e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \right) 2^{n-1} \left[ \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \right] \frac{(n-1)!}{\epsilon^{n-1}} e^{\frac{1}{2}\epsilon|\zeta|}. \end{aligned}$$

Note que las desigualdades anteriores son válidas para  $0 < \epsilon < 1$ . Ahora, escogiendo  $n$  tal que el primer miembro de la última desigualdad, este acotado por  $e^{1/2\epsilon|\zeta|}$  (véase el Teorema 6.1.7). Tomando en cuenta que  $2^{n-1} \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \frac{(n-1)!}{\epsilon^{n-1}}$  depende de  $\epsilon$ , definimos  $C_\epsilon := 2^{n-1} \max_{0 \leq k \leq n-1} a_k \frac{(n-1)!}{\epsilon^{n-1}}$ , obteniendo que

$$\|N(\zeta)\| \leq \left( e^{|\zeta| \sum_{k=n}^{\infty} \|S_k\|} \right) \prod_{k=0}^{n-1} (1 + |\zeta| \|S_k\|) \leq C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|}.$$

□

**Teorema 6.1.9.** *Las funciones de la Definición 6.1.1 son enteras que no crecen más rápido que una función entera de tipo minimal de orden uno.*

*Demostración.* Del Comentario 5.1.37 y el Comentario 1.1.8, se sigue directamente que las funciones de la Definición 6.1.1 son enteras. Ahora, tomando en cuenta el Teorema 6.1.8 y como se cumple (6.21) para toda la matriz. Entonces (6.21) se satisface para cada entrada de la matriz. Además, utilizando la función de la Definición 1.2.1 sobre  $C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|}$ , tenemos

$$\max_{|\zeta|=r} |C_\epsilon e^{\epsilon|\zeta|}| = |C_\epsilon e^{\epsilon r}| = C_\epsilon e^{\epsilon r}.$$

Para calcular el tipo utilizaremos el Teorema 1.2.9, con  $\rho = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(C_\epsilon e^{\epsilon r})}{r} &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C_\epsilon + \ln e^{\epsilon r}}{r} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln C_\epsilon}{r} + \epsilon \right) = \epsilon, \end{aligned}$$

pero como  $\epsilon$  lo podemos hacer tan pequeño como queramos, se sigue que el límite anterior es cero.  $\square$

*Comentario 6.1.10.* Note que del la Definición 6.1.4 y del Comentario 5.1.11, si  $P(\zeta) = \{P_{n-1}(\zeta)\}_{n \in \mathbb{N}}$  esta en  $D_\tau$  (véase la Definición 5.2.3), implica que

$$0 = W_\infty(v(\tau), P(\zeta)) = \begin{cases} D(\zeta) + \tau B(\zeta) & \text{si } \tau \in \mathbb{R} \\ B(\zeta) & \text{si } \tau = \infty. \end{cases} \quad (6.23)$$

Ahora, defínase la función:

$$\mathfrak{R}_\tau(\zeta) := \begin{cases} D(\zeta) + \tau B(\zeta) & \text{si } \tau \in \mathbb{R} \\ B(\zeta) & \text{si } \tau = \infty. \end{cases} \quad (6.24)$$

**Teorema 6.1.11.** *Sea  $J \neq J^*$ . Si  $\lambda_0 \in \sigma(J(\tau))$ , entonces  $\mathfrak{R}_\tau(\lambda_0) = 0$ . Recíprocamente, si  $\lambda_0$  es cero de  $\mathfrak{R}_\tau$ , entonces  $\lambda_0 \in \sigma(J(\tau))$ .*

*Demostración.* Sabemos que las soluciones de la ecuación  $(J^* - \lambda_0 I)u = 0$  son tales que  $u = cP(\lambda_0)$  (véase Teorema 5.1.5). Si  $\lambda_0 \in \sigma(J(\tau))$  entonces  $\ker(J(\tau) - \lambda_0 I) = \ker(J^* - \lambda_0 I)$  (véase Comentario 5.3.5). Entonces  $P(\lambda_0) \in \ker(J(\tau) - \lambda_0 I)$ . Obteniendo  $P(\lambda_0) \in D_\tau$ , por lo tanto  $\mathfrak{R}_\tau(\lambda_0) = 0$ .

Supongamos que  $\mathfrak{R}_\tau(\lambda_0) = 0$ , entonces  $P(\lambda_0) \in D_\tau$ . Por otra parte  $(J^* - \lambda_0 I)P(\lambda_0) = 0$ , pero como  $P(\lambda_0) \in D_\tau$ , tenemos  $(J(\tau) - \lambda_0 I)P(\lambda_0) = 0$ . Por lo tanto  $P(\lambda_0) \in \ker(J(\tau) - \lambda_0 I)$  y  $\lambda_0 \in \sigma(J(\tau))$ .  $\square$

Una matriz de Jacobi de la forma (5.1) determina, de modo único, la sucesión  $P(t) = \{P_{k-1}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (véase la Sec. 2, Cap. 5). Esta sucesión es ortonormal en cualquier espacio  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ , donde  $\rho_\tau$  esta definida en la ecuación (5.47) y es solución del problema de momentos asociado a la matriz de Jacobi (5.1) (comparece con [2, Sec.2.1, Cap. 2]).



## 6.2. Reconstrucción única de una matriz de Jacobi no auto-adjunta

Hay formas de recuperar una matriz de Jacobi a partir de la función espectral de alguna de sus extensiones auto-adjuntas. Una forma clásica de reconstruir una matriz de Jacobi es la siguiente:

Sea  $\rho$  la función espectral de cierta extensión auto-adjunta de el operador  $J \neq J^*$  y  $\{P_k(t)\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  la sucesión que se obtiene de aplicar en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (véase la demostración del Lema 2.2.11) a la sucesión  $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Observe que  $\{t^{k-1}\}_{k=1}^\infty$  está en  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$  por el Comentario 5.3.5. Del capítulo 5 sección 3, [4, Sec. 1.5 Cap. 7] y [25, Sec. 1], se sigue que los polinomios satisfacen

$$tP_{k-1}(t) = b_{k-1}P_{k-2}(t) + q_kP_{k-1}(t) + b_kP_k(t), \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (6.25)$$

$$tP_0(t) = q_1P_0(t) + b_1P_1(t) \quad (6.26)$$

donde  $b_k > 0$  y  $q_k \in \mathbb{R}$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces vemos que en el espacio de Hilbert  $\text{span}\{t^k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ . El operador de multiplicación por la variable independiente actúa sobre el s.o.n.  $\{P_{n-1}(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la misma forma que  $V\tilde{J}V^{-1}$ , donde  $\tilde{J}$  es una extensión auto-adjunta de  $J$ . Por lo que podemos identificar los coeficientes de  $b_k$  y  $q_k$  con las entradas de la matriz que es representación matricial con respecto a la base canónica en  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

Una vez encontrada la matriz de Jacobi asociada al operador  $J$ , estamos ahora en la posibilidad de obtener la condición a la frontera en el infinito que define el dominio de  $J(\tau)$ .  $\tau$  puede encontrarse de la siguiente forma: tomando un auto-valor  $\lambda$  de  $J(\tau)$ , o lo que es lo mismo, un polo de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_\tau(t)}{t - \zeta}, \quad (6.27)$$

(donde la ecuación (6.27) es la función  $m$  de Weyl) y su auto-vector correspondiente  $\phi(\lambda) = \{\phi_k(\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \text{dom}(J(\tau))$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} W_\infty(v(\tau), \phi(\lambda)) &= W_\infty(P(0) + \tau Q(0), \phi(\lambda)) \\ &= W_\infty(P(0), \phi(\lambda)) + \tau W_\infty(Q(0), \phi(\lambda)) = 0, \end{aligned}$$

donde  $P(0) = \{P_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  y  $Q(0) = \{Q_{k-1}(0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Así, si  $W_\infty(Q(0), \phi(\lambda)) \neq 0$ , entonces

$$\tau = -\frac{W_\infty(P(0), \phi(\lambda))}{W_\infty(Q(0), \phi(\lambda))}.$$

Y si  $W_\infty(Q(0), \phi(\lambda)) = 0$ , entonces  $\tau = \infty$ .

En esta sección mostraremos que dado el espectro de dos distintas extensiones auto-adjuntas  $J(\tau_1)$ ,  $J(\tau_2)$  del operador de Jacobi  $J \neq J^*$ , siempre podemos recobrar

la matriz, es decir, la representación matricial de  $J$  con respecto a una base ortonormal fija en  $\mathcal{H}$  y dos parámetros  $\tau_1, \tau_2$ , que definen las extensiones auto-adjuntas de  $J$ .<sup>1</sup> El espectro  $\sigma(J(\tau_1))$  y  $\sigma(J(\tau_2))$  determinan únicamente la matriz de  $J$  y a los números  $\tau_1, \tau_2$ .<sup>2</sup>

Comencemos considerando la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^n P_{k-1}^2(\zeta) = b_n(P_{n-1}(\zeta)P'_n(\zeta) - P_n(\zeta)P'_{n-1}(\zeta)) = W_n(P(\zeta), P'(\zeta)), \quad (6.28)$$

que surge de la ecuación (5.18) tomando  $m = 0$ ,  $y_k = P_k(\zeta)$  y  $z_k = P_k(\lambda)$ .

$$(\lambda - \zeta) \sum_{k=1}^n P_{k-1}(\zeta)P_k(\lambda) = b_n(P_{n-1}(\zeta)P_n(\lambda) - P_n(\zeta)P_{n-1}(\lambda)),$$

esta última ecuación es conocida como la ecuación de Christoffel-Darboux y de la cual haciendo tender  $\lambda$  a  $\zeta$  resulta en (6.28).

Es fácil verificar, tomando en cuenta la ecuación (5.10) la ecuación

$$\begin{aligned} W_n(P(\zeta), P'(\zeta)) &= W_n(P(0), P(\zeta))W_n(Q(0), P'(\zeta)) \\ &\quad - W_n(Q(0), P(\zeta))W_n(P(0), P'(\zeta)). \end{aligned}$$

que es conocida como la ecuación de Liouville-Ostrogradskii. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}^2(\zeta) &= W_{\infty}(P(\zeta), P'(\zeta)) \\ &= D(\zeta)B'(\zeta) - B(\zeta)D'(\zeta). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Además, de la existencia y convergencia del límite en (6.4) y (6.2), lo siguiente es válido

$$\begin{aligned} B'(\zeta) &= W_{\infty}(Q(0), P'(\zeta)) \\ D'(\zeta) &= W_{\infty}(P(0), P'(\zeta)). \end{aligned}$$

Ahora, tomemos en cuenta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}'_{\tau_2}(\zeta) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}_{\tau_2}(\zeta) \\ &= (D(\zeta) + \tau_1 B(\zeta))(D'(\zeta) + \tau_2 B'(\zeta)) - (D'(\zeta) + \tau_1 B'(\zeta))(D(\zeta) + \tau_2 B(\zeta)) \\ &= [D(\zeta)D'(\zeta) + \tau_2 D(\zeta)B'(\zeta) + \tau_1 B(\zeta)D'(\zeta) + \tau_1 \tau_2 B(\zeta)B'(\zeta)] \\ &\quad - [D(\zeta)D'(\zeta) + \tau_2 D'(\zeta)B(\zeta) + \tau_1 B'(\zeta)D(\zeta) + \tau_1 \tau_2 B(\zeta)B'(\zeta)] \\ &= (\tau_2 - \tau_1)[D(\zeta)B'(\zeta) - B(\zeta)D'(\zeta)], \end{aligned} \quad (6.30)$$

<sup>1</sup>Esto ya fue enunciado en el trabajo [9, T. 1], donde  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  y  $\tau_1 \neq \tau_2$ .

<sup>2</sup>Un resultado similar pero en un contexto más general puede ser encontrado en [8, T. 7].

para  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  con  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Por otro lado, tenemos que

$$\mathfrak{R}_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}'_{\infty}(\zeta) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}_{\infty}(\zeta) = D(\zeta)B'(\zeta) - B(\zeta)D'(\zeta), \quad \tau_1 \in \mathbb{R}. \quad (6.31)$$

Por lo que sustituyendo (6.30) y (6.31) en (6.29), tenemos

$$\|P(\zeta)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}^2(\zeta) = \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}'_{\tau_2}(\zeta) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}_{\tau_2}(\zeta)}{\tau_2 - \tau_1} & \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \tau_1 \neq \tau_2 \\ \mathfrak{R}_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}'_{\infty}(\zeta) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\zeta)\mathfrak{R}_{\infty}(\zeta) & \tau_1 \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (6.32)$$

El análogo a (6.32) con  $\tau_1 \neq \tau_2$  y  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  para operadores de Schrödinger en  $L_2(0, \infty)$  siendo en el caso no auto-adjunto es [10, Eq. 1.20]. La ecuación [10, Eq. 1.20] juega un papel central para la prueba del teorema único de reconstrucción de dicho operador [10, T. 1.1]. La contra parte discreta de [10, T. 1.1] es [9, T. 1]. El trabajo mencionado da una técnica de reconstrucción basada en (6.32).

Es muy sabido que el espectro de cualquier dos diferentes extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi son disjuntos [2, Cap. 4, Sec. 2.4]. Uno puede concluir esto de (6.32). Además, la siguiente afirmación es válida.

**Teorema 6.2.1.** *Los auto-valores de dos diferentes extensiones auto-adjuntas de un operador de Jacobi se entrelazan, es decir, sólo hay un auto-valor de una extensión auto-adjunta entre dos auto-valores de cualquier otra extensión auto-adjunta.*

*Demostración.* Note que de la ecuación (6.24), se sigue que la función entera  $\mathfrak{R}_{\tau}(\zeta)$ ,  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , es real, es decir, toma valores reales sobre la recta real. Sea  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$  dos valores propios vecinos de la extensión auto-adjunta  $J(\tau_2)$  de  $J$ , con  $\tau_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Entonces  $\lambda_k, \lambda_{k+1}$  son ceros de  $\mathfrak{R}_{\tau_2}(\zeta)$  y por (6.32) esos ceros son simples. Ya que  $\mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_k)$  y  $\mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_{k+1})$  tienen diferentes signos, se sigue de (6.32) que  $\mathfrak{R}_{\tau_1}(\lambda_k)$  y  $\mathfrak{R}_{\tau_1}(\lambda_{k+1})$  ( $\tau_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $\tau_1 \neq \tau_2$ ) tienen signos opuestos. De la continuidad de  $\mathfrak{R}_{\tau_1}$  en el intervalo  $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ , hay al menos un cero de  $\mathfrak{R}_{\tau_1}$  en  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Ahora, supongamos que en este intervalo hay más de un cero de  $\mathfrak{R}_{\tau_1}$ , entonces uno puede tomar dos vecinos que sean ceros de  $\mathfrak{R}_{\tau_1}$  en  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Reproduciendo este argumento intercambiando  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , uno obtiene que al menos hay un cero de  $\mathfrak{R}_{\tau_2}$  en alguna parte de  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Esto contradice la hipótesis de que  $\lambda_k$  y  $\lambda_{k+1}$  son vecinos.  $\square$

La prueba de la afirmación anterior sigue de la ecuación (6.32) y esta prueba es similar a la prueba de [2, T. 1.2.2].

Sea  $\{\lambda_n(\tau)\}_{n \in \mathbb{N}}$  los auto-valores de  $J(\tau)$ . Por como se define (6.24) resulta ser una función entera que no crecen más rápido que una función de tipo minimal de orden uno, ya que  $D(\zeta)$ ,  $B(\zeta)$  son enteras por el Teorema 6.1.9 y además no crece más rápido que una función de tipo minimal de orden uno. Entonces, por el Teorema 1.2.18, siempre podemos escribir

$$\mathfrak{R}_{\tau}(\zeta) = C_{\tau} \zeta^{\delta_{\tau}} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{0 < |\lambda_k(\tau)| \leq r} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_k(\tau)}\right), \quad \tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad (6.33)$$

donde  $C_\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $\delta_\tau$  es la delta de Kronecker, es decir,  $\delta_\tau = 1$  si  $\tau = 0$ , y  $\delta_\tau = 0$  en otro caso. El límite en (6.33) converge uniformemente en compactos de  $\mathbb{C}$  (véase Teorema 1.2.18). Note que cuando  $\tau = 0$  excluimos naturalmente al elemento de  $\sigma(J(\tau))$  que es igual a 0 del producto infinito.

Observemos que de (6.33), inmediatamente obtenemos que  $\mathfrak{R}_0(0) = 0$ , lo cual puede derivarse independientemente de evaluar las funciones  $D(\zeta)$  y  $B(\zeta)$  dadas en (6.17) y (6.18). En efecto, de (6.6) y (6.8), se sigue que

$$D(\zeta) = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)P_k(\zeta), \quad (6.34)$$

$$B(\zeta) = -1 + \zeta \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0)P_k(\zeta), \quad (6.35)$$

y se verifica de (6.34) que  $D(0) = 0$ , mientras que de (6.35), se tiene  $B(0) = -1$ . Por el otro lado, las distintas extensiones auto-adjuntas tiene espectros disjuntos (véase Teorema 6.2.1). Lo que implica que  $D(\zeta)$  y  $B(\zeta)$  no tienen ceros comunes. Además, ya que  $J \neq J^*$  tenemos que las series (6.34) y (6.35) convergen.

Ahora, valuemos en 0 la función (6.24) y veamos los casos siguientes casos:  $\mathfrak{R}_\tau(0) = -\tau$  para toda  $\tau \in \mathbb{R}$ , y  $\mathfrak{R}_\infty(0) = -1$  por lo dicho arriba. Entonces  $C_\tau = -\tau$  para alguna  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \neq 0$ , y  $C_\infty = -1$ , es decir,  $\mathfrak{R}_\tau(0) = C_\tau$  esto como consecuencia de (6.33).

Para simplificar la fórmula (6.33), introducimos  $R_\tau(\zeta) := \frac{\mathfrak{R}_\tau(\zeta)}{C_\tau}$ , resultando en

$$R_\tau(\zeta) := \zeta^{\delta_\tau} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{0 < |\lambda_k(\tau)| \leq r} \left( 1 - \frac{\zeta}{\lambda_k(\tau)} \right), \quad \tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

donde  $\delta_\tau$  es definida en (6.33).

En conjunto con la convergencia uniforme en compactos de  $\mathbb{C}$  de la expresión

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ \prod_{0 < |\lambda_k(\tau)| \leq r} \left( 1 - \frac{\zeta}{\lambda_k(\tau)} \right) \right], \quad r \rightarrow \infty$$

se tiene

$$R'_\tau(\lambda_j(\tau)) = \begin{cases} -[\lambda_j(\tau)]^{\delta_\tau-1} \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{0 < |\lambda_k(\tau)| \leq r} \left( 1 - \frac{\lambda_j(\tau)}{\lambda_k(\tau)} \right), & \lambda_j(\tau) \neq 0 \quad j \neq k \\ 1 & \lambda_j(\tau) = 0. \end{cases} \quad (6.36)$$

Por (6.32) y (6.36), se sigue que

$$C_0 = \|P(0)\|^2.$$

**Teorema 6.2.2.** *Sea  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  con  $\tau_1 \neq \tau_2$  y  $\{\lambda_k(\tau_1)\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\lambda_k(\tau_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$  los espectros de dos diferentes extensiones auto-adjuntas  $J(\tau_1), J(\tau_2)$  de un operador de Jacobi  $J$ ,  $J \neq J^*$ . Estos espectros determinan de forma única la matriz que es representación matricial de  $J$  y los números  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\tau_1 \neq 0$ , es decir, la sucesión  $\{\lambda_k(\tau_1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  no contiene ningún elemento cero.

Por (6.32), tenemos que

$$\|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2 = MR_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1)). \quad (6.37)$$

Así, tomando  $\zeta = \lambda_k(\tau_1)$  en (6.32), tenemos que para  $\tau_1 \neq \tau_2$  con  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2 &= \frac{\mathfrak{R}_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}'_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1)) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))}{\tau_2 - \tau_1} \\ &= \frac{-\mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))}{\tau_2 - \tau_1} \\ &= \frac{-\tau_1 R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\tau_2 R_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))}{\tau_2 - \tau_1}, \end{aligned}$$

entonces  $M = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}$ . Ahora, tomando en (6.32)  $\tau_1 = \infty$  y  $\tau_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_2 \neq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2 &= \mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}'_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) - \mathfrak{R}'_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) \\ &= \mathfrak{R}_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}'_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) = \tau_2 R_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))R'_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)), \end{aligned}$$

obteniendo que  $M = \tau_2$ . Por otro lado, tomando en (6.32)  $\tau_2 = \infty$  y  $\tau_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2 &= \mathfrak{R}_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}'_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) \\ &= -\mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)) = -\tau_1 R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))R_{\infty}(\lambda_k(\tau_1)), \end{aligned}$$

implica  $M = -\tau_1$ . Por último, tomando en (6.32)  $\tau_2 = 0$  y  $\tau_1 \in \mathbb{R}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2 &= \frac{\mathfrak{R}_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}'_0(\lambda_k(\tau_1)) - \mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_0(\lambda_k(\tau_1))}{-\tau_1} \\ &= -\frac{\mathfrak{R}'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))\mathfrak{R}_0(\lambda_k(\tau_1))}{-\tau_1} = \frac{C_0 \tau_1 R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))R_0(\lambda_k(\tau_1))}{-\tau_1} \\ &= -C_0 R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))R_0(\lambda_k(\tau_1)), \end{aligned}$$

concluyendo que  $M = -C_0$ . Resumimos los valores de  $M$  en el siguiente ecuación:

$$M = \begin{cases} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} & \text{si } \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \tau_2 & \text{si } \tau_1 = \infty, \tau_2 \neq 0 \\ -\tau_1 & \text{si } \tau_2 = \infty \\ -C_0 & \text{si } \tau_2 = 0 \end{cases} \quad (6.38)$$

Debido a (5.52), tenemos

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2} = \frac{1}{M} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{R_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))}.$$

De esta forma

$$M = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{R_{\tau_2}(\lambda_k(\tau_1))R'_{\tau_1}(\lambda_k(\tau_1))}. \quad (6.39)$$

Entonces,  $M$  está completamente determinada por las sucesiones  $\{\lambda_k(\tau_i)\}_{k \in \mathbb{N}}$  con  $i = 1, 2$ .

Insertando el valor obtenido de  $M$  por medio de (6.39) en (6.37), se obtiene  $\|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2$  para toda  $k$ . Teniendo  $\|P(\lambda_k(\tau_1))\|^2$ , podemos construir la función espectral de  $J(\tau_1)$  dada en (5.47). Entonces, por el método descrito en el inicio de la sección 2 capítulo 6, se reconstruye la matriz asociada al operador  $J$  y la condición de frontera al infinito  $\tau_1$ . Del valor de  $M$  y  $\tau_1$  se obtiene  $\tau_2$ , usando los primeros tres casos de (6.38), ya que del primer caso si fijamos  $\tau_1$  y dado que conocemos  $M$  despejamos  $\tau_2$ . Del segundo caso, si  $\tau_1 = \infty$ , entonces  $M = \tau_2$ , y del tercer caso si  $M = -\tau_1$ , implica que  $\tau_2 = \infty$ . Cuando  $0 \in \{\lambda_k(\tau_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , no usamos (6.38), puesto que ya sabemos que  $\tau_2 = 0$ .  $\square$

*Comentario 6.2.3.* Note que la prueba del Teorema 6.2.2 nos da un método de reconstrucción de una matriz de Jacobi.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Aunque se menciona anteriormente, también note aquí que la afirmación del Teorema 6.2.2, para el caso  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ , estaba escrita sin prueba en [9, T. 1].



# Bibliografía

- [1] Ahlfors L. V. : *Complex analysis: An introduction of the theory of analytic functions of one complex variable* McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [2] Akhiezer N. I. : *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Hafner Publishing Co., New York, 1965.
- [3] Akhiezer N. I. y Glazman I. M. : *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993.
- [4] Berezans'kii J. M. : *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators.* Translations of Mathematical Monographs. Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [5] Birman M. S. y Solomjak M. Z. : *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.* D. Reidel Publishing Company, Holland, 1987.
- [6] Borg G. : *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte,* *Acta Math.* **78** (1945), 1-96.
- [7] Borg G. : *Uniqueness theorems in the spectral theory of  $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ .* *Proc. 11th Scandinavian Congress of Mathematicians.* Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, 276-287.
- [8] Donoghue W. F., Jr. : *On the perturbation of spectra.* *Comm. Pure Appl. Math.***18**, 559-527.
- [9] Gasymov M. G. y Guseinov G. S. : *On inverse problems of spectral analysis for infinite Jacobi matrices in the limit-circle case.* *Dokl. Akad. Nauk. SSSR***309**(6), 1293-1296(1989).
- [10] Gasymov M. G. y Guseinov G. S. : *Uniqueness theorem in inverse problems of spectral analysis for Sturm-Liouville operators in the case of the Weyl limit circle.* *Differentsial'nye Uravneniya* **25**(4), 588-599. Traducido en *Diferential Equations* **25**(4), 394-402 (1989).



- [11] Gelfand I. M. y Levitan B. M. : *On the determination of a differential equation from its spectral function* Am. Math. Soc. Trans. 1 (1951), 253–302.
- [12] Gesztesy F. y Simon B. : *On local Borg-Marchenko uniqueness results*. *Comm. Math. Phys.* **211** (2000), 273–287.
- [13] Marsden J. E. y Hoffman M. J. : *Análisis Básico de Variable Compleja* Trillas., México, 2004.
- [14] Krein M. G. : *Solution of the inverse Sturm-Liouville problem*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 76 (1951), 21-24
- [15] Krein M. G. : *On a method of the effective solution of an inverse boundary value problem*. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 95 (1954), 767-770.
- [16] Krein M. G.: *On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary problem in the interval  $(0, \infty)$* . *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* 16, 293-324 (1952) (En Ruso)
- [17] Silva L. O. y Weder R. : *On the Two Spectra Inverse Problem for Semi-infinite Jacobi Matrices*. *Math Phys Anal Geom* (3)**9**, (2006), 263–290
- [18] Silva L. O. y Weder R. : *The Two-Spectra Inverse Problem for Semi-infinite Jacobi Matrices in The Limit-Circle Case*. *Math Phys Anal Geom* (2)**11**, (2008), 131–154.
- [19] Levin B. Ja. : *Distribution of zeros of entire functions*. Translations of Mathematical Monographs **5**. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [20] Levitan B. M. and Gasymov, M. G. : *Determination of a differential equation by two spectra*. *Uspehi Mat. Nauk* **19**(2 (116)) (1964), 3–63.
- [21] Marchenko V. A. : *Certain problems in the theory of second-order differential operators*, *Doklady Akad. Nauk SSSR* **72**, (1950), 457-460 [En ruso].
- [22] Marchenko V. A. : *Some questions in the theory of one-dimensional linear differential operators of the second order*. I, *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* **1** (1952) 327-420 [En ruso, traducción al inglés en *Am. Math. Soc. Transl.* (ser. 2) **101** (1973) 1-104].
- [23] Markushevich A. I. y Silverman R. A. : *Theory of Functions of a Complex Variable, Volumen II*. American Mathematical Society, Bookstore, 2005.
- [24] Simon B. : *Spectral analysis of rank one perturbations and applications*. In *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators (Vancouver, BC, 1993)*, *CRM Proc. Lecture Notes* **8**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 109–149.

- 
- [25] Simon B. : *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*. *Adv. Math.* **137**(1) (1998), 82–203.
- [26] Pérez Ortiz R. : *Problema inverso de dos espectros para matrices de Jacobi semi-infinitas*. Facultad de Ciencias UNAM (2010), 122.
- [27] Teschl G. : *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices*. Mathematical Surveys and Monographs **72**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [28] Titchmarsh E. C. : *Theory of fuctions*. Oxford University Press, Amen Hours, London, 1952.
- [29] Weidmann J. : *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980.