



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CONTROL SERVOVISUAL DE ROBOTS MANIPULADORES EN 3D

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA-CONTROL

TESIS  
**Presenta:**  
**MAXIMILIANO BUENO LÓPEZ**

TUTOR  
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA

**México, D.F.      Diciembre de 2012**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Jurado asignado

Presidente: Dr. Yu Tang Xu

Secretario: Dr. Héctor Benítez Pérez

Vocal: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Marco Antonio Moreno Armendariz

2<sup>do</sup>. Suplente: Dr. Fernando Cesar Lizarralde

La tesis se realizó en el Laboratorio de Robótica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. México, D.F., México

TUTOR DE TESIS:  
Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

---

FIRMA

# Agradecimiento

Este trabajo esta basado en una investigación soportada por CONACYT con referencia **58112** y por la DGAPA UNAM con referencia **IN105408**.

Agradezco al Proyecto PAPIIT **IN109611**.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología-CONACYT por la beca proporcionada durante 4 años (Número de becario: **221582**)

# Agradecimiento Personal

Le agradezco especialmente a mi tutor el Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez por guiarme en este trabajo, por su paciencia y respaldo en todo momento.

Agradezco a cada uno de los sinodales por sus consejos y correcciones para terminar de la mejor manera este trabajo.

Gracias a mis compañeros y amigos Carlo, Juan, Alejandro, Daniel y cada una de las personas que han pasado por el laboratorio de Robótica de la UNAM en este tiempo. Un especial agradecimiento a Juvenal Villanueva, Jens Weist e Irvin López por sus consejos y apoyo en este largo camino. Gracias por cada chela y cada taza de café que compartimos.

Gracias a TODOS mis amigos mexicanos que no pude mencionar en esta página porque no alcanzaría el espacio. Con su amistad y compañía forman parte de cuatro maravillosos años en su país.

Obrigado a todos no Laboratório de Controle da Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, especialmente agradecer ao Dr. Fernando Lizarralde por seus comentários e disponibilidade e ao Dr. Antonio Candela Leite por sua orientação, mas sobretudo pela sua amizade durante este tempo.

Gracias a mi madre Blanca Lilia, a mi padre Maximiliano y a mi hermana Liliana, quienes a pesar de la distancia estuvieron mas cerca que nunca, sus palabras han sido en cada momento el impulso para seguir adelante.

A Patricia y Nicolás gracias por todo el amor y comprensión que me han dado durante estos años. Gracias por acompañarme y ayudarme a soportar los momentos difíciles.

A Colombia, gracias por la formación recibida en la universidad pública. Espero que algún día entendamos que el camino correcto es el de la educación y no nos desgastemos matándonos entre nosotros.

*AL PUEBLO DE MÉXICO* le hago un reconocimiento especial y le agradezco por financiar mis estudios de doctorado a través de CONACYT.

Un humano  
Un hombre  
Un alumno  
Un maestro  
Un colega  
Un amigo



Jorge Lenin Ruiz Mejía

1978 - 2009

# Índice general

<b>Jurado asignado</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimiento</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimiento Personal</b>	<b>III</b>
<b>En Memoria de Jorge Lenin Ruiz Mejía</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	VIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. Control visual de robots . . . . .	2
1.1.2. Desarrollo histórico del control visual de robots . . . . .	5
1.1.3. Importancia y aplicación del control visual de robots en la industria . . . . .	7
1.1.4. Clasificación del control servovisual de robots . . . . .	10
1.2. Controladores y observadores difusos aplicados a robots manipu- ladores . . . . .	16
1.3. Problemas en desarrollo . . . . .	18
1.4. Resultados de la tesis . . . . .	19
1.5. Contribución de la tesis . . . . .	20
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	21
<b>2. Preliminares</b>	<b>23</b>
2.1. Modelado de las cámaras de video en 3D . . . . .	25
2.1.1. Modelo de la Cámara 1 . . . . .	26
2.1.2. Modelo de la Cámara 2 . . . . .	28
2.1.3. Combinación de los modelos de las cámaras . . . . .	29
2.2. Compensación Distribuida Paralela para modelos Takagi-Sugeno .	32
2.2.1. Condiciones de estabilidad cuadrática . . . . .	34

2.2.2.	Algoritmo de control difuso basado en Lyapunov . . . . .	34
2.2.3.	Diseño de observadores difusos . . . . .	36
<b>3.</b>	<b>Algoritmos de control en 3D</b>	<b>40</b>
3.1.	Algoritmo PID con termino deslizante . . . . .	40
3.2.	Diseño del controlador difuso . . . . .	45
3.3.	Resultados experimentales algoritmos en 3D . . . . .	47
3.3.1.	Trayectoria generada con campo de velocidad . . . . .	47
3.3.2.	Algoritmo PID con modo deslizante . . . . .	48
3.3.3.	Algoritmo Difuso . . . . .	53
<b>4.</b>	<b>Comparación de los algoritmos propuestos con algunas técnicas conocidas en 2D</b>	<b>58</b>
4.1.	Algoritmo Comparativo 1 . . . . .	58
4.2.	Algoritmo Comparativo 2 . . . . .	60
4.3.	Resultados experimentales . . . . .	61
4.4.	Discusión . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>68</b>
5.1.	Contribuciones . . . . .	69
<b>Apéndice A – Banco de Pruebas</b>		<b>70</b>
<b>Apéndice B – Demostración del Teorema (3.1.1)</b>		<b>73</b>
<b>Apéndice C – Modelo del Robot en coordenadas de imagen</b>		<b>80</b>



## Resumen

La investigación actual en el control de robots se orienta fundamentalmente a la incorporación de información sensorial externa que, conjuntamente con la utilización de algoritmos avanzados de control permiten la realización de tareas en medios parcialmente estructurados o con grandes incertidumbres. Esto aumenta notablemente el campo de aplicación de los sistemas robóticos y los incorpora a ambientes de trabajo naturales o cotidianos que son difíciles de acceder para los seres humanos. Entre los sensores externos, los de visión proveen una información bastante completa del medio de trabajo. El control basado en visión ha despertado mucho interés en los últimos años debido a la reducción de costos de las cámaras y de todo el sistema de procesamiento asociado. Se han propuesto numerosos algoritmos de control servo visual. Algunos están basados en el modelo cinemático del robot, el cual es suficiente en los casos que consideran manipuladores con altas relaciones de reducción en sus actuadores y bajas velocidades de trabajo. También se han desarrollado algoritmos de control servo visual considerando la dinámica del manipulador, que utiliza la teoría de Lyapunov para analizar la estabilidad. Algunos mas recientes buscan no utilizar ningún tipo de modelo. En este trabajo se diseñan controladores servo visuales basados en imagen con cámara fija. Se utiliza una técnica de control clásica (PID) y controladores difusos y adaptables para cumplir el objetivo. Los resultados experimentales empleando dos diferentes plataformas de pruebas (Robot A465 de *CRS Robotics* y LAW3 de SCHUNK ) permiten validar el trabajo realizado.

# Abstract

Current research in robot control is mainly focused on the incorporation of external sensory information in conjunction with the use of advanced control algorithms allow to carry out tasks on environments partially structured or with large uncertainties. This allows to extend the field of robotic systems application and incorporate environments natural or daily that are difficult to access for humans. Among the external sensors used in robotics, of the vision providing a complete information about the working environment. The vision-based control has attracted much interest in recent years due to low costs of cameras and all processing system associated. Different visual servo control algorithms have been proposed. Some of them are based on the kinematic model of the robot, which is sufficient in cases that consider manipulators with high reduction ratios in the actuators and low operating speeds. Visual servo control algorithms considering manipulator dynamics, have been developed by means of Lyapunov theory. In this paper, some visual servoing controllers are designed based on fixed camera image. If is used a classical control technique (PID) and fuzzy controllers and adaptable to achieve the objective. Experimental results using two different testbed (Robot A465 de *CRS Robotics* and LAW3 de SCHUNK) allows to validate the work done.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Actualmente existe un gran interés en realizar tareas con eficiencia y precisión en lugares donde la presencia humana se torna difícil, arriesgada o inclusive imposible como por ejemplo, en el espacio exterior o en el fondo del mar. Para solucionar este problema, es necesario el empleo de mecanismos autónomos o remotos que sustituyan a los seres humanos de la ejecución de una tarea y es gracias a esta necesidad que surgen los robots. Los manipuladores industriales, desde su nacimiento en la década de los 1950's, han evolucionado de una manera sorprendente. Dicha evolución ha sido posible gracias a la investigación que se ha dado en diferentes disciplinas concernientes al campo de la robótica, tales como la mecánica y el control automático; esto ha dotado a los robots de mejores diseños, pero sobre todo, de algoritmos de control más eficientes que son capaces de explotar al máximo sus cualidades mecánicas. Es común encontrar en la actualidad manipuladores realizando diferentes tareas como por ejemplo:

- Inspección remota y mantenimiento preventivo de plantas nucleares para evitar la exposición humana a la radiación.
- Combinación de robots móviles con brazos robóticos para realizar tareas en lugares remotos a los que es difícil tener acceso.
- Corte, pulido, soldadura y pintura de piezas industriales aumentando la eficiencia del proceso y reduciendo el tiempo de ejecución de la tarea.
- Aplicaciones médicas como realización de telecirugías.

La capacidad sensorial y su respectivo nivel de integración constituyen otro factor clave en la evolución de los robots. Son los sensores propioceptivos y exteroceptivos los que proporcionan al robot información útil para controlar sus movimientos, así como para medir y conocer su entorno. De todos los sensores

---

que en la actualidad se emplean en los sistemas robotizados, el de visión es sin duda el que puede proporcionar la mayor cantidad de información necesaria acerca del ambiente y del propio robot para realizar con éxito una gran variedad de tareas o para complementar aquéllas donde la principal medición proviene de algún otro sensor. Pero sobre todo, es el que puede extender el campo de aplicación de los robots dotándolos de “inteligencia” y mayor versatilidad. Hoy en día son pocas las aplicaciones que se encuentran de robots controlados a partir de información visual en la industria. Esto se debe entre varios otros aspectos, a que el análisis y diseño de las estrategias de control representan un trabajo verdaderamente desafiante, cuyos problemas radican sobre todo en la inestabilidad y en el bajo desempeño. El control visual de robots sigue siendo un tema de investigación muy activo entre la comunidad mundial de robótica y representa el eje primario sobre el cual se desarrolla la presente tesis.

### 1.1.1. Control visual de robots

El control visual de robots se define como: *el uso de información visual procedente de una o varias cámaras de video, ya sean fijas o móviles, para controlar la posición y/u orientación del efector final del robot con respecto a un objeto o a un conjunto de características visuales de éste (dependiendo de la tarea por realizar)*. A menudo, cuando una persona se introduce por primera vez en este campo, suele confundir sistemas que poseen los elementos principales que aparecen en la definición, es decir, un equipo de visión combinado con un robot, con aquellos que se estudian en el control visual de robots, pero que son totalmente distintos [15]. Considérese el siguiente ejemplo.

En la Figura 1.1 se muestra un robot SCARA (*Selective Compliance Articulated Robot Arm*) que separa piezas mecánicas en defectuosas o no defectuosas de acuerdo a información proveniente de una cámara de video. En este caso, el sistema de visión compara la imagen que toma de cada pieza con un patrón previamente almacenado en memoria, para que una vez efectuado el procesamiento, emita un comando hacia el controlador del robot, que le indique a éste en qué banda debe colocar la pieza. Los movimientos necesarios son previamente “enseñados” al robot por un programador. Se observa entonces que el robot no es directamente controlado por la información visual, simplemente ejecuta uno u otro movimientos previamente programados, de acuerdo a una señal dada. Ejemplos como éste, pueden encontrarse con regularidad en la industria; sin embargo, son casos ajenos al control visual. A diferencia del caso anterior, en el control visual, los movimientos del robot son alterados de forma paulatina por efecto de la información extraída e interpretada a partir del sistema de visión. De modo que cambios en el escenario visual, modifican la conducta del robot. Existen algunos sistemas de control visual que operan en lazo abierto. Su forma de trabajo puede describirse de la siguiente manera: primero, se toma una o

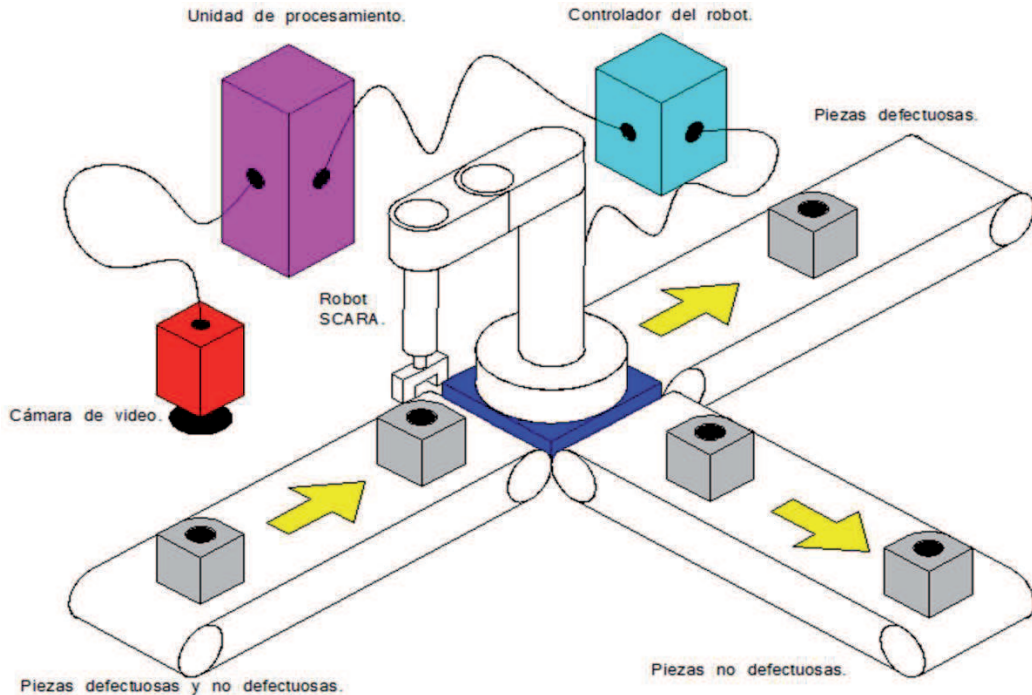


Figura 1.1: Célula para control de calidad de piezas mecánicas.

varias imágenes, a continuación, se extrae y se interpreta la información, posteriormente, se hace un razonamiento de la tarea que se tiene que ejecutar y, por último, se calcula y se realiza el movimiento requerido bajo la supervisión de un control articular. A este tipo de sistemas se les denomina *look-then-move*. Al control que sí hace uso de la información visual para cerrar el lazo de control, suele denominársele *visual servoing*. A este campo pertenecen la mayoría de los sistemas que se estudian hoy en día y el trabajo presentado en esta tesis, por lo que de ahora en adelante, se hará referencia sólo a estos y bajo el nombre de control servovisual.

Considérese un robot cuyo objetivo es insertar una pieza de precisión, en otra que tiene una cavidad con la forma de la primera. Para ello, el robot cuenta con una cámara de video montada sobre él (véase la Figura 1.2). La pieza con la cavidad puede estar orientada, inicialmente, de cualquier manera con respecto al efector final del robot, que lleva la pieza de precisión. Aquí, se ilustra un ejemplo de lo que es el control servovisual, ya que en principio, la imagen que se tiene del escenario es diferente a la imagen que se desea, es decir, aquella que debe “ver” el robot para poder insertar la pieza. La imagen deseada es la referencia que se introduce al sistema, para que en cada instante de tiempo se le compare con la real y en respuesta, el controlador ejecute la acción pertinente moviendo al manipulador hasta reducir el error a cero. Se muestra entonces cómo los movimientos del robot son controlados con base en la imagen obtenida a cada

instante.

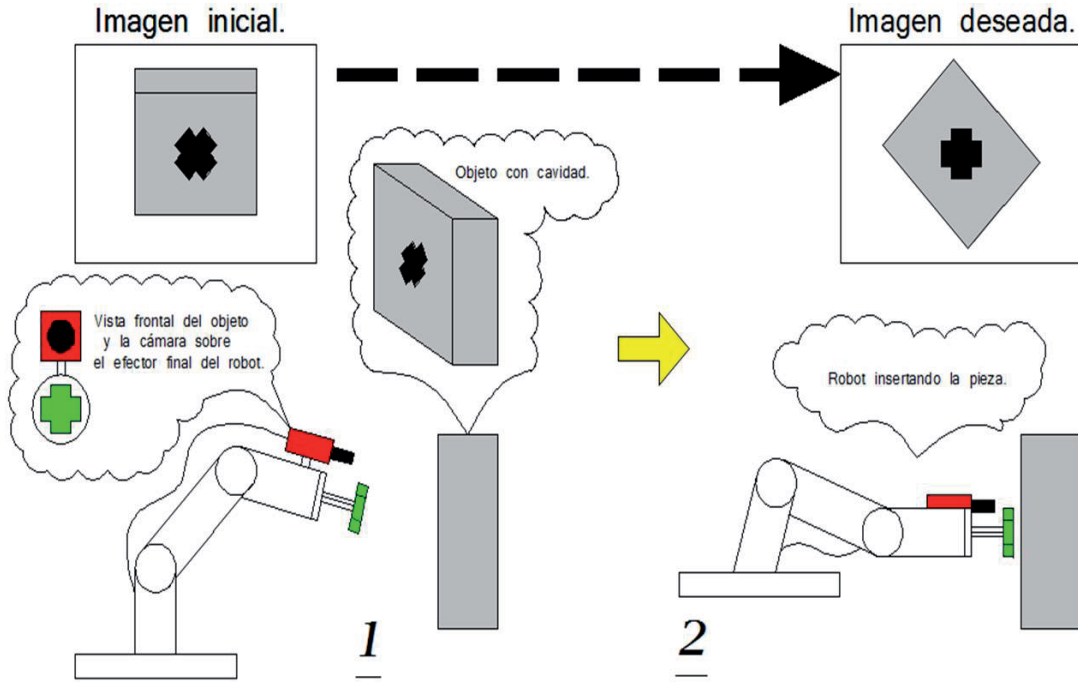


Figura 1.2: Inserción de pieza mediante un robot controlado visualmente.

El control servovisual ofrece ventajas con relación al control visual en lazo abierto; principalmente, ser independiente de la precisión de los sensores de visión así como de la precisión del robot. La información que se extrae de las imágenes para su posterior interpretación se conoce como parámetros de imagen. Un parámetro de imagen es un valor real que representa a una característica de la misma, la cual a su vez es el resultado de la proyección en el plano de imagen de las características físicas de un objeto, por ejemplo un contorno, una línea, un punto, etc. Los parámetros pueden ser el perímetro del contorno, la longitud de la línea y las coordenadas de imagen del punto [50]. De esta manera, si se tiene un conjunto de  $k$  parámetros, entonces

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_k]^T \in P \subseteq \mathbb{R}^k \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el vector de parámetros y  $P$  el espacio de los parámetros. En el desarrollo que se presenta en este trabajo, se tomó como característica de imagen un punto de interés, cuyos parámetros son las dos coordenadas de imagen asociadas a él. De modo que para tal caso se tiene:

$$\mathbf{p} = [c_1, c_2]^T \in P \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

La cámara de video puede tener dos configuraciones relativas al robot. Estar fija en algún lugar del entorno, o estar montada sobre el efector final. En el pri-

---

mer caso, la relación entre los marcos de referencia del robot y de la cámara es constante. La mayor ventaja que ofrece esta configuración es el amplio campo de visibilidad disponible, lo que facilita el posicionamiento de la herramienta. En el segundo caso, la relación entre los marcos de referencia de la cámara y del efector final es variable. Las principales ventajas de este arreglo son tener información casi directa sobre el espacio de trabajo, así como una mayor resolución visual del mismo, para facilitar la orientación del efector final. Aquí, la imagen obtenida sobre el objeto a manipular depende del movimiento del robot. En algunas ocasiones, un robot dispone de ambas configuraciones para auxiliarse tanto de las ventajas de una como de la otra, incluso, la cámara móvil puede estar montada sobre un segundo robot observando al primero.

### 1.1.2. Desarrollo histórico del control visual de robots

La historia del control visual de robots comenzó a principios de los años setentas cuando Shirai e Inoue, dos investigadores japoneses, probaron las ventajas de la retroalimentación visual al poner en marcha un robot ayudado por la información de una cámara de video fija, manipulaba un cubo y lo colocaba dentro de una caja [15]. Probablemente no fueron los pioneros en el intento, pero sí en tener éxito. Posteriormente, a finales de esa misma década, Hill y Park introdujeron el término *visual servoing* al desarrollar una investigación para controlar un robot UNIMATE [23]. Más tarde, a mediados de los ochentas, Sanderson y Weiss propusieron una clasificación dentro de la cual se pueden agrupar todos los sistemas de control visual desarrollados hoy en día [58]. Muchos son los aportes que se han hecho desde aquel entonces, los cuales avanzaron de manera rápida una vez que se fueron desarrollando mejores sensores de visión y computadoras más poderosas [13]. La Tabla 1.1 presenta una lista de personas y sus contribuciones ordenadas de manera cronológica que cubre desde 1973 al 2010.

Año	Personajes	Contribución
1973	Shirai e Inoue [60]	Muestran cómo una retroalimentación visual mejora la precisión de un robot.
1979	Hill y Park [23]	Control visual de movimiento en 3D de un robot PUMA. A ellos se atribuye el término <i>visual servoing</i> .
1984	L. Weiss [80]	Propone y prueba las técnicas de control adaptable para guiar visualmente el movimiento de robots de hasta tres grados de libertad.
1987	Sanderson y Weiss [59]	Realizan estudios para elaborar una clasificación de los sistemas de control visual.

---

1989	Harrel, Slaughter [22]	Diseño e implementación de un robot recolector de frutas controlado con visión.
1989	Feddema and Mitchell [65]	Desarrollo de la generación de trayectorias en el espacio de las características de imagen.
1995	Papanikolopoulos [52]	Selección de características y evaluación de comportamientos a partir de información visual de un robot.
1996	G. Wells, C. Venaille, and C. Torras [81]	Recurren al uso de redes neuronales.
1997	Demey, Bruyninckx y De Schutter [57]	Integran los sensores de visión y fuerza.
2000	Malis, Martinet, Cervera	Aplicación de la visión estereoscópica.
2001	Corke, Hutchinson [14]	Control servovisual particionado.
2001	Zergeroglu [84]	Inclusión de la dinámica no lineal del robot en el diseño del control servovisual.
2002	Mezouar [49]	Estudio de la generación de trayectorias para control visual.
2002	Thuilot, Martinet, Cordesses y Gallice [73]	Aportación al esquema de control visual basado en posición.
2004	Carelli [10]	Combinación de visión y fuerza sobre superficie plana.
2004	Malis [46]	Control servovisual invariante.
2006	Zhang [85]	Avances en el proceso de calibración.
2006	Dean-León y Cheah [38]	Combinación de visión y fuerza con incertidumbre en los parámetros del robot y la cámara.
2007	Pomares y Torres [55]	Combinación de visión y fuerza sobre superficie curva.
2008	Dixon y Braganza [8]	Control de posición con incertidumbre en los parámetros de la cámara.
2008	Wang, Liu y Zhou [78]	Control de posición con incertidumbre en los parámetros de la cámara y geometría del entorno.

---



---

2011	Bueno y Ar- teaga [5]	Control servovisual difuso en tres dimensiones.
------	--------------------------	---

**Tabla 1.1:** Aportaciones al control visual de robots.

### 1.1.3. Importancia y aplicación del control visual de robots en la industria

La notable presencia y el confiable desempeño de que gozan los robots actualmente en las labores de manufactura, parecieran indicar que los problemas de la robótica industrial han sido en su totalidad resueltos. Sin embargo, aún existen dificultades prácticas y teóricas por afrontar. Si se considera por ejemplo la distribución poblacional de robots por industria, se advierte el gran acaparamiento de los sectores automotriz y eléctrico con más del 50% [51]. En otros sectores, los robots no han tenido gran éxito. Una de las principales razones se encuentra en que la necesidad de proporcionar al robot un entorno altamente estructurado para su correcto funcionamiento, eleva considerablemente el costo de implementación, volviendo al sistema robotizado poco rentable para ciertas industrias. Un elemento útil para reducir el nivel de estructuración del entorno puede ser el control visual, ya que al agregar la visión a un robot, éste podría operar con piezas y herramientas sin que cuenten con una orientación forzosa, prescindir del uso de efectores finales altamente especializados e incluso, trabajar en diferentes líneas de ensamble a la vez. En pocas palabras, necesitaría de dispositivos periféricos menos complejos y en menor cantidad. También, sería posible reducir el tiempo necesario para programar una tarea al robot.

Aparte de las ventajas mencionadas y entre muchas otras, el control visual puede incrementar notablemente la precisión de un robot sin necesitar de diseños avanzados y sin importar los efectos de inexactitud generados por conjuntos mecánicos entre engranes, bandas o cadenas. En el contexto industrial, muchas son las tareas donde el control visual ha encontrado aplicación: el ensamble de piezas, la manipulación de objetos, el maquinado y la realización de tareas conjuntas humano-robot. Son también comunes las investigaciones para controlar robots paralelos planares y no planares mediante la observación de la plataforma y los brazos [66]. Existen de la misma manera, otros campos en los cuales el uso de robots manipuladores guiados visualmente se considera con gran potencial, uno de ellos es el de la medicina [47]. En esta área se analizan y estudian las cirugías robotizadas de cerebro, huesos, corazón y aquellas donde la invasión mínima de los instrumentos es necesaria. Las ventajas principales radican en mayor precisión, aplicación de fuerzas mejor controladas e incremento de la destreza. Por otra parte, es importante mencionar que no sólo los robots industriales pueden ser controlados visualmente; en general, se puede controlar cualquier otro sistema

---

mecánico, ya sea un vehículo, un robot móvil, etc. Fuera de la robótica, se han realizado experimentos para controlar visualmente el movimiento de vehículos no tripulados [20]. En aeronáutica se pretende controlar el aterrizaje sin la intervención de los pilotos, mientras que en agricultura, realizar de manera automática la recolección de frutos. En biología se han llevado a cabo pruebas en las cuales el sensor consiste en un sistema de visión formado por un microscopio especial capaz de entregar una cantidad elevada de cuadros por segundo, cerca de mil, mientras que los actuadores se constituyen de electrodos que aplican un voltaje variable el cual obliga a los microorganismos a moverse hacia determinada dirección. En general, el campo de aplicación del control visual es muy extenso, ya que son bastantes los sistemas en los cuales la visión puede representar un avance significativo; sin embargo, en la mayoría de los casos, particularmente aquéllos externos a la robótica, el desarrollo se encuentra aún en la fase experimental.

En la mayoría de las leyes de control de trayectoria para robots manipuladores, las mediciones necesarias son obtenidas a partir de encoders ubicados en las articulaciones [24], [72]. Cuando este opera en un ambiente no estructurado, una alternativa es emplear sistemas de visión para obtener la posición del efector final requerida por el controlador, como lo mencionan [11] y [21]. El uso de cámaras en el control de robots manipuladores se ha incrementado en los últimos años debido a su buen comportamiento. En [44] se propone un controlador adaptable para robots manipuladores planares empleando servovisión. El algoritmo es desarrollado para sistemas visuales basados en imagen y permite el seguimiento de una trayectoria deseada cuando la calibración de la cámara y la dinámica del robot son inciertas. En [82] se presenta un controlador adaptable para seguimiento de trayectoria basado en la imagen sin medición de velocidad; los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara no son calibrados. Para evitar el pobre comportamiento causado por errores en las mediciones de velocidad, un estimador en coordenadas de imagen es propuesto. Otra aplicación del control servovisual es presentada en [41], donde se propone un control adaptable, esta es una de las técnicas más utilizadas en el área del control visual de robots manipuladores.

En la industria, es cada vez mas común encontrar plantas y líneas de producción completamente automatizadas. En esto los robots ocupan un papel muy importante. En septiembre de 2011 la IFR (Federación Internacional de Robótica) reporto un máximo histórico de robots industriales alimentado por un alza de 18 % en ventas durante ese año. Se espera que la cantidad robots industriales a finales de 2014 sea de 1.3 millones. Algunas aplicaciones de control servovisual que se presentan en la industria son las siguientes:

***FlexPicker - ABB.*** La empresa especializada en robots ABB ofrece un producto que promete ser una base para implementar aplicaciones de recolección a alta velocidad fácilmente y con un mínimo de programación. La unidad básica

---

del sistema consta de una o dos bandas transportadores, una cámara y un robot IRB360 (paralelo) todos orquestados por el software PickMaster. En la Figura 1.3 se observa esta plataforma. El software ofrece la facilidad de agregar elementos a



Figura 1.3: FlexPicker ABB.

la línea de producción de manera gráfica e integrarlos sin necesidad de programación, cuenta con una cámara perfectamente integrada al sistema que encuentra los objetos de interés, pudiendo diferenciarlos de otros objetos en la misma banda y le permite al robot conocer el punto exacto en el espacio tridimensional al cual se tiene que dirigir para recolectarlo. La calibración de la cámara se hace de un modo muy sencillo utilizando una cuadrícula especial que permite conocer el origen de los ejes  $x$  y  $y$ , el tamaño real de los objetos y su posición en la banda transportadora. Gracias a estas características poner en marcha aplicaciones de colección y colocación a alta velocidad es sencillo. Este tipo de aplicaciones es muy común en líneas de producción que se dedican a empaque de productos.

***Sellado - Mercedes-Benz.*** En la planta de coches de Mercedes-Benz en Alemania se utilizan robots KUKA articulados guiados por visión que emplean un modelo cámara ojo en mano para aplicar sellador al chasis de los automóviles o ensamblar estos de una manera mas eficiente. En la Figura 1.4 se observa este proceso.

***Recubrimiento de Aspas - Enercon.*** La empresa alemana Enercon se dedica a la fabricación de turbinas de viento para generadores eólicos que van

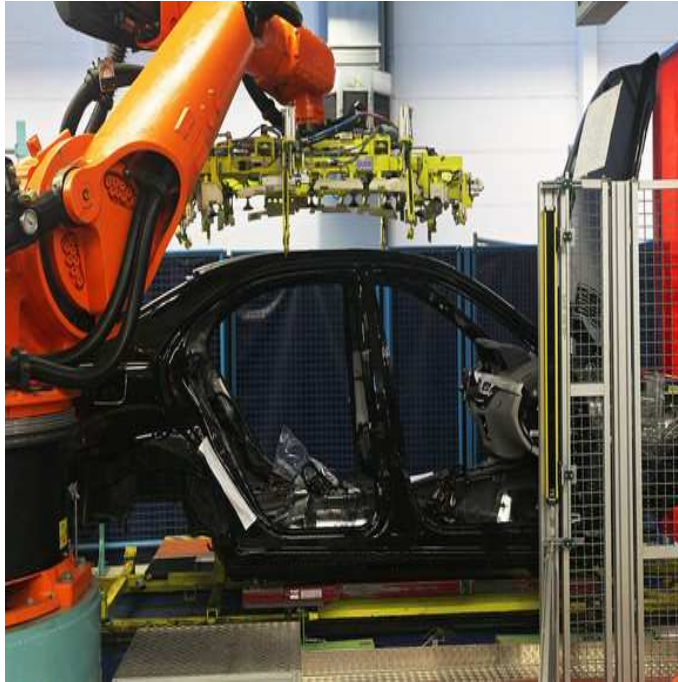


Figura 1.4: Ensamblaje de vehículo empleando Robot KUKA en Mercedes-Benz.

desde los 800 hasta los 7,580KVA. Para aplicar el recubrimiento que protege a las aspas del deterioro por factores ambientales, utilizan una cámara de recubrimiento y secado automatizada con dos robots articulados montados sobre rieles que les permiten desplazarse a lo largo de la cámara. Dado que la empresa produce una variedad de rotores y por lo tanto de aspas, era necesario lograr flexibilidad en la automatización de esta cámara de pintura. Esta flexibilidad se logró implementando un sistema de servocontrol (Figura 1.5) en el que se utilizan varias cámaras, debido a la longitud del espacio de trabajo, para detectar la posición del aspa y dirigir los robots pintores. Mediante este sistema es posible lograr un excelente control de calidad y gracias a su precisión, también se logra optimización ya que se logra que el recubrimiento sea tan grueso como se necesita pero al mismo tiempo tan delgado como sea posible.

#### 1.1.4. Clasificación del control servovisual de robots

El control visual de robots es un campo de investigación multidisciplinario. En él convergen temas relacionados con disciplinas tales como la visión computacional, que aplica técnicas para el procesamiento de imágenes, la robótica, que constituye la estructura sobre la que descansa toda esta área de investigación, y el control automático, que proporciona el análisis para el desarrollo de controladores. Además de algunas otras como el estudio de sistemas en tiempo real.



Figura 1.5: Aplicación de recubrimiento que protege las aspas de una turbina.

Este apartado se enfoca en el control automático para presentar una clasificación del control servovisual de robots manipuladores. Antes de continuar, conviene recordar que las cámaras de video, ya sea que se utilice una o más, pueden tener diferentes configuraciones respecto al robot: pueden estar fijas, pueden ser móviles, o bien, alguna combinación entre estas. En la Figura 1.6 se ilustran las configuraciones principales. Cualquier otra configuración posible, es resultado de una combinación entre ellas.

Independientemente de cuales sean la configuración de la cámara y el esquema de control que se utilicen, el objetivo principal del control servovisual es reducir un error a cero. El cual en términos generales se expresa como

$$\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$  es el vector de parámetros de imagen y depende de la información extraída de la imagen procesada. Además puede depender de parámetros intrínsecos del sistema de visión y de la geometría 3D de la escena. El vector  $\mathbf{p}_d$  representa el valor deseado. Por otra parte, ya sea que la cámara se mueva y el objeto esté fijo, o viceversa, existe una relación

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{L}_p \mathbf{v} \quad (1.4)$$

que vincula la variación de los parámetros de imagen  $\dot{\mathbf{p}}$  con la velocidad  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ , en este caso, de la cámara. A la matriz  $\mathbf{L}_p \in \mathbb{R}^{k \times p}$  habitualmente se le llama matriz de interacción. Si se considera una cámara móvil, cuyos movimientos son

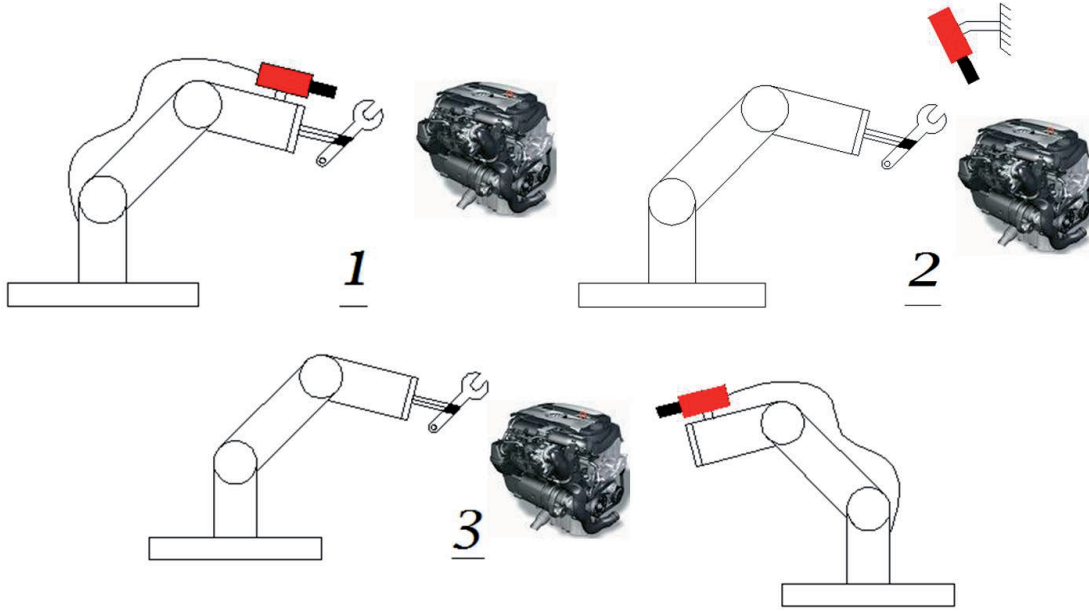


Figura 1.6: Configuración de la cámara respecto al robot.

inducidos por los movimientos del robot que realiza una tarea sobre un objeto que carece de movimiento (Configuración 1, Figura 1.6), esto es  $\mathbf{p}_d$  constantes. De las ecuaciones (1.3) y (1.4) se tiene la relación

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{L}_p \mathbf{v} \quad (1.5)$$

Mientras que si se hace

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e} \quad (1.6)$$

con  $\lambda$  una constante, se puede escribir

$$\mathbf{v} = -\lambda \hat{\mathbf{L}}_p^+ (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) \quad (1.7)$$

donde  $\hat{\mathbf{L}}_p^+ \in \mathbb{R}^{p \times k}$  es la aproximación de la pseudoinversa de  $\mathbf{L}_p$ , ya que por lo general  $k \neq p$ . Se usa una aproximación debido a que resulta imposible conocer  $\mathbf{L}_p$  a la perfección, dado que depende de parámetros intrínsecos del sistema de visión y del conocimiento de la coordenada de profundidad, cuando se trabaja con puntos de interés. Esta profundidad debe ser estimada con algún método, debido a que directamente con la información proporcionada por una cámara no es posible. En las configuraciones 2 y 3 de la Figura 1.6 se presentan otras dos posibles ubicaciones de la cámara dentro de un sistema vision-robot.

---

La relación (1.7) es normalmente la ley de control que se introduce como referencia a un controlador articular que gobierna directamente al robot. La mayoría de los controladores servovisuales son diseñados bajo la metodología que se presentó en las líneas anteriores, el esquema de control difiere primordialmente de la manera en que se elige a  $\mathbf{p}$ .

A continuación se presenta una clasificación de los esquemas de control servovisual dentro de la cual se pueden incluir todos los sistemas desarrollados. Esta clasificación fue propuesta por Sanderson y Weiss en 1987 después de realizar estudios para ello [59]. A pesar de que ya han pasado más de dos décadas, la clasificación hoy en día continúa vigente.

### **Control servovisual indirecto basado en imagen**

En este esquema de control,  $\mathbf{p}$  está formado por los parámetros de imagen, por lo que la señal de error está definida en términos del espacio de las características de la misma. Se puede decir que las cámaras de video son utilizadas como sensores 2D. De la señal de video se extrae la información de interés para formar a  $\mathbf{p}$ , posteriormente, se le compara con el valor deseado y con base en el error obtenido, se calcula la ley de control diseñada en espacio de imagen. Esta señal sirve de entrada, aplicando el Jacobiano inverso, para el controlador articular del robot, cuya referencia es  $\dot{\mathbf{q}}$ . Este último controlador se encarga de manipular al robot y garantizar estabilidad. A este esquema también se le conoce como control servovisual dinámico basado en imagen.

### **Control servovisual directo basado en imagen**

A diferencia del esquema anterior, en este caso, se retira el controlador articular del robot, para que sea la ley de control definida en espacio de imagen, quien se encargue de forma directa de gobernar al robot y de proporcionar estabilidad al sistema. En las aplicaciones, es menos común encontrar este esquema que el anterior, ya que representa un desafío mayor debido a que el periodo de muestreo del sensor de visión junto con el tiempo de procesamiento de imagen, es mucho más grande comparado con el tiempo de muestreo de un sensor de posición articular, generando con esto fuertes probabilidades de un pobre desempeño. La Figura 1.7 ilustra este esquema, al que también se le conoce como control servovisual estático basado en imagen.

### **Control servovisual indirecto basado en posición**

En este esquema de control,  $\mathbf{p}$ , que depende tanto de los parámetros intrínsecos del sistema de visión como de la información tridimensional que se tenga de la escena, está definido por la posición y orientación del efector final del robot respecto a un objeto sobre el cual ejecuta una determinada tarea (véase la Figura

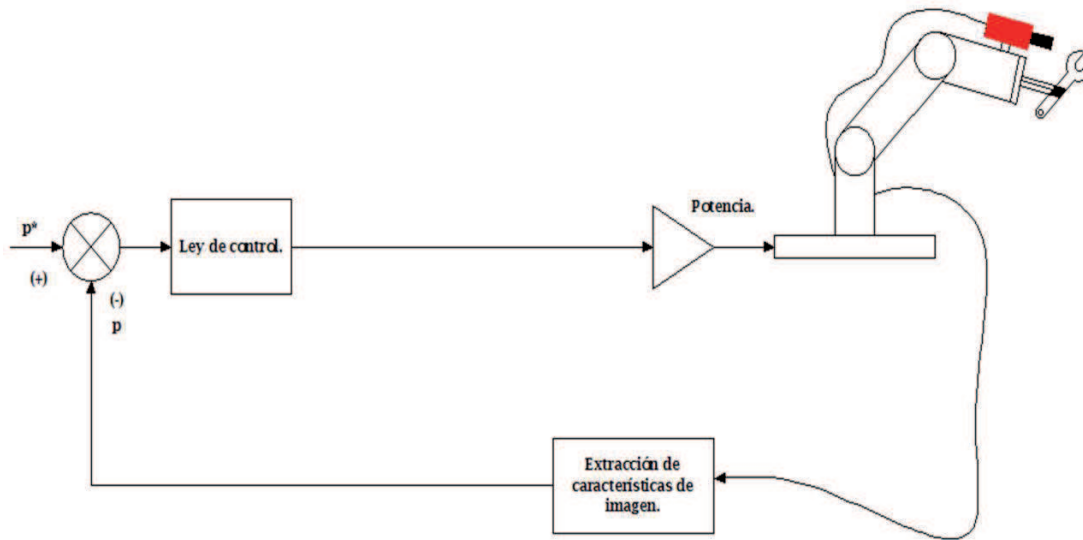


Figura 1.7: Control servovisual directo basado en imagen.

1.8). En contraste con el control servovisual basado en imagen, los datos extraídos de la información visual se usan en conjunto con modelos 3D del objeto para estimar a  $\mathbf{p}$ , es decir, la cámara de video es usada de manera indirecta como un sensor 3D. Una vez realizada la comparación entre la tarea deseada y  $\mathbf{p}$ , el error se usa para calcular la ley de control definida en espacio cartesiano y con ello fijar una entrada de referencia al controlador articular del robot. Cabe mencionar que como la relación entre los marcos de referencia de la cámara y del efector final es constante, al estimar la posición y orientación de la cámara se puede conocer también para el efector.

### Control servovisual directo basado en posición

A diferencia del esquema anterior y en similitud con el control servovisual estático basado en imagen, en este esquema se elimina el controlador articular del manipulador y es la ley de control definida en espacio cartesiano quien gobierna directamente al robot. En la Figura 1.9 se muestra el esquema.

El control servovisual basado en posición resulta más práctico que el basado en imagen en el sentido de que la tarea está especificada directamente sobre el espacio cartesiano, tal como se hace en cualquier aplicación. Sin embargo, existen bastantes aplicaciones tanto para uno como para otro esquema. No se puede decir de manera tajante cuál de los dos esquemas es mejor, ya que ambos presentan ventajas y desventajas. La elección de uno u otro depende principalmente del tipo de tarea que se quiere realizar. Un factor que resulta clave para el correcto desempeño del sistema, es la adecuada elección de los parámetros de imagen, ya que están íntimamente relacionados con el diseño y el análisis de estabilidad del



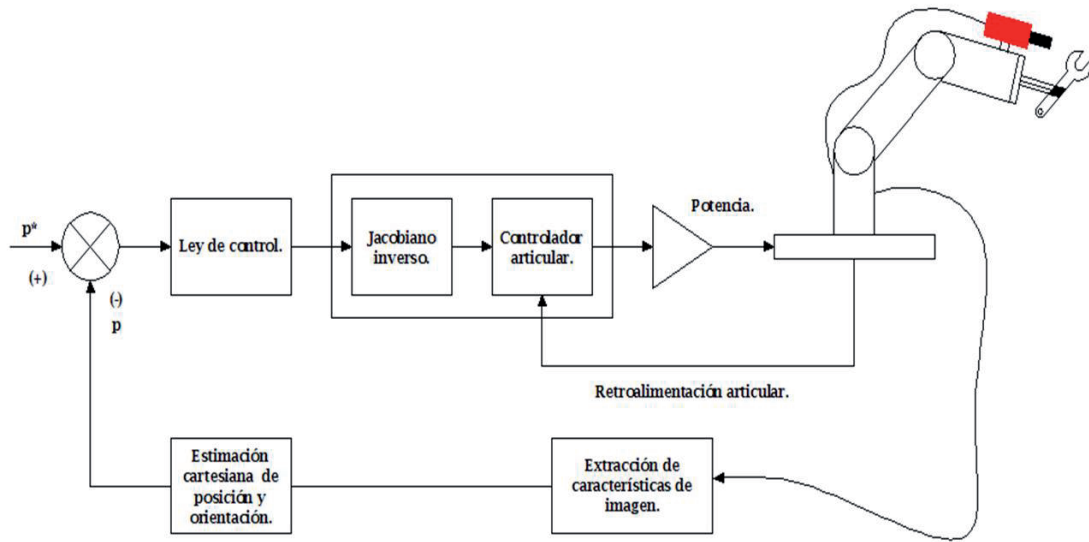


Figura 1.8: Control servovisual indirecto basado en posición.

controlador. Por un lado, en el esquema de control servovisual basado en imagen, el hecho de no estimar correctamente parámetros tridimensionales como la profundidad de los puntos de interés, resulta en causas de inestabilidad, mientras que por el otro, en el esquema de control servovisual basado en posición, una deficiente estimación de la posición y orientación del efector final del robot, afecta notablemente el desempeño del sistema. Cuando sólo se emplea una cámara de video, el esquema basado en imagen presenta mayor robustez ante el ruido y errores en la calibración del sistema de visión, ya que en realidad, para el esquema basado en posición, la cámara no está diseñada para ser un sensor 3D. Si se utilizan dos cámaras de video para formar un sistema de visión estereoscópica, se puede obtener prácticamente de manera directa información en 3D. Con ello, los dos esquemas mejoran notablemente su desempeño. En este caso, la información tridimensional del objeto o el ambiente, para el caso del control servovisual basado en posición, ya no es necesaria. Si se pretende trabajar con objetos móviles, el esquema basado en posición resulta más apropiado, debido a que conviene referir la velocidad de un objeto respecto a un sistema cartesiano en lugar de uno expresado en características de imagen. En algunas ocasiones, los dos esquemas de control mencionados, se usan en conjunto con la finalidad de obtener un sistema que una las ventajas de ambos y disminuya las limitaciones de cada uno. De este modo, resulta el esquema de control híbrido, el cual puede ser directo o indirecto (véase la Figura 1.10). En este caso,  $\mathbf{p}$  se forma tanto por los parámetros de imagen, como por la posición y orientación del efector final del robot. Aparte de los esquemas de control mencionados, se han estudiado y probado técnicas más avanzadas que no se exponen en esta breve introducción, algunas se apoyan en

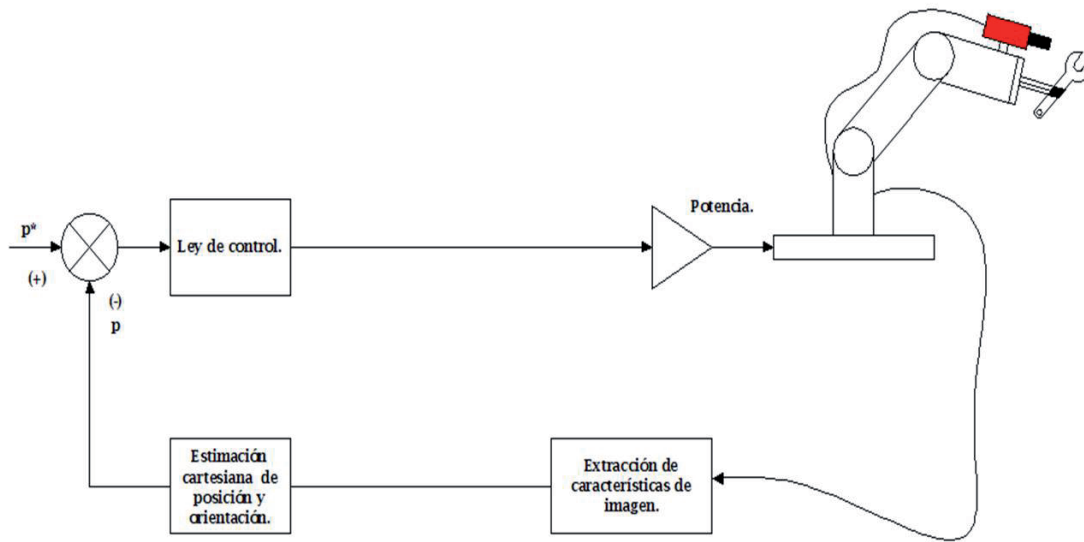


Figura 1.9: Control servovisual directo basado en posición.

los esquemas básicos y entre ellas se tienen al control servovisual particionado y al control servovisual basado en imagen empleando coordenadas cilíndricas de los puntos de interés, entre otras.

## 1.2. Controladores y observadores difusos aplicados a robots manipuladores

Durante las últimas dos décadas, el control empleando lógica difusa ha atraído gran atención tanto en las comunidades académicas como industriales. Muchas personas han destinado una gran cantidad de tiempo y esfuerzo a la investigación teórica y la aplicación de técnicas de controladores difusos, siendo uno de los métodos más útiles para el uso del conocimiento cualitativo en el diseño de controladores. Entre los métodos de control basados en modelos difusos, el propuesto por Takagi y Sugeno (T-S) es una de las estrategias más eficaces [25], [67], [68]. Básicamente, esta aproximación supone que un modelo dinámico complejo puede estar compuesto por un conjunto de modelos lineales. No es sorprendente hoy en día encontrar aplicaciones prácticas de lógica difusa en diferentes campos, como se menciona en [9], [26], [56], [64], [76] y [77]. En el diseño de controladores difusos una buena opción es usar la técnica conocida como Compensación Distribuida Paralela (PDC). La historia del PDC inicia con un diseño basado en el modelo T-S. Sin embargo, la estabilidad del sistema no fue discutida sino hasta 1992 [69]. Algunos autores ya han abordado este tema.

En [34] se propone una solución para la identificación de un objetivo y el efector

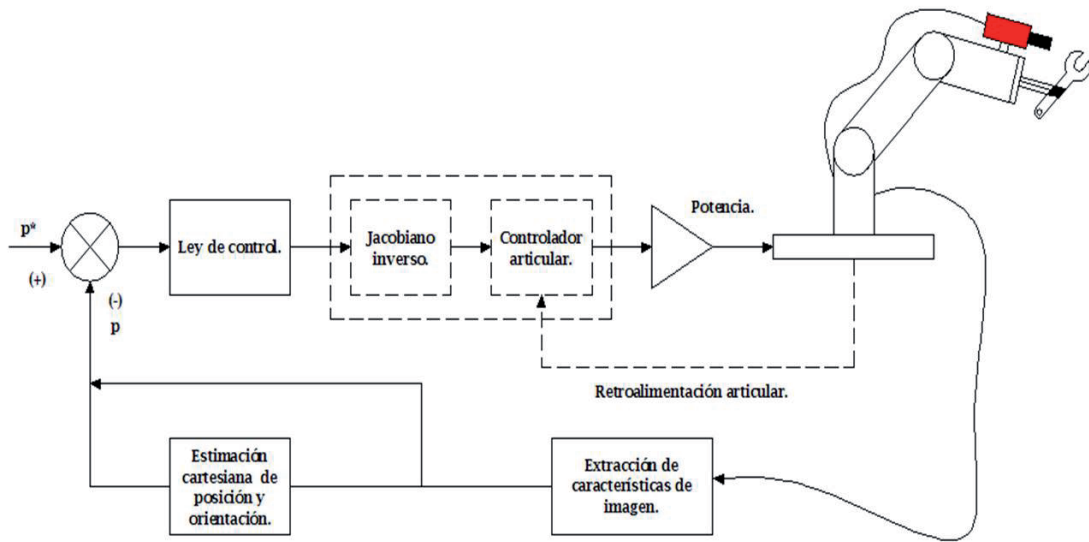


Figura 1.10: Control servovisual híbrido.

final del manipulador usando un robot con un sistema de visión. La tarea que debe ejecutar el efector final es acercarse a un objeto esférico de tamaño conocido colocado al azar. La ley de control se diseña mediante el uso de un enfoque basado en reglas que se construyen de una manera supervisada, después de estudiar el comportamiento del sistema. En [16] se propone un sistema de lógica difusa y algoritmos genéticos integrados para adaptación visual. Los algoritmos genéticos se utilizan para optimizar las funciones de pertenencia. En [19] se propone un novedoso modelo difuso basado en la configuración cámara en mano para obtener la relación inversa del mapeo entre la variación de las características de imagen y la velocidad de las articulaciones. Esta aproximación es independiente del modelo cinemático del robot y de la calibración de la cámara. Solo algunas de las referencia mencionadas se combinan con visión. Es importante mencionar que [33] y [62] emplean técnicas tradicionales como PID y PD con lógica difusa para el control de robots manipuladores. [7], [12], [36], [39], [70] y [83] han establecido conceptos básicos para probar estabilidad de sistemas difusos usando desigualdades de matrices lineales (LMI).

En el diseño de sistemas de control, la mayoría de las veces se asume que todas las variables están disponibles. Asumir esto no siempre es cierto porque no todas las variables de estado son posibles de medir. Diferentes métodos se han propuesto para estimar e identificar los estados del sistema cuando solo se tienen datos de entrada y salida [70]. La lógica difusa se ha empezado a utilizar para el diseño de observadores no hace mucho tiempo, y es una estrategia que esta actualmente bajo investigación como lo mencionan [27], [71], [75] y [85]. En [48]

---

se presenta uno de los pocos estudios existentes en el área de observadores difusos, donde diferentes diseños son propuestos aplicados a sistemas no lineales con resultados satisfactorios. Recientemente, varios autores han propuesto controlar la trayectoria del efector final de un manipulador empleando controladores y observadores difusos, como lo mencionan [3], [12], [35] y [45]. En [1] y [75] se han propuesto modelos Takagi-Sugeno basados en lecturas de encoders para robots manipuladores. Según la revisión bibliográfica hecha para la elaboración de esta tesis, la combinación de observadores y controladores difusos en aplicaciones que utilizan cámaras como sensores no ha sido publicada.

### 1.3. Problemas en desarrollo

A pesar que la historia comenzó a principios de los años setentas, la aplicación de los sistemas de control servovisual se encuentra principalmente en las áreas experimental y de investigación, ya que las soluciones de múltiples problemas, que permitan llevarla al “mundo real”, no han sido dadas de manera definitiva. La problemática parece centrarse en los terrenos de las ciencias computacionales, donde se trabaja árdamente en la visión por computadora, el diseño de “cabezas” robóticas y de sistemas de visión inspirados biológicamente [74]. En el campo del control automático queda mucho trabajo por hacer. El desarrollo de dicho trabajo se irá beneficiando en la medida en que los sensores y el hardware disponibles, continúen ofreciendo mayores prestaciones. En primer lugar, la mayoría de los sistemas presentados en la literatura están desarrollados en el espacio de imagen, ante lo cual queda la pregunta si es posible especificar las tareas comunes que realiza un robot cotidianamente en este espacio. De ser así, el estudio para definir trayectorias en espacio de imagen ha sido poco investigado. Faltaría además desarrollar herramientas virtuales e interfaces de operación que permitan programar tareas a los robots visualmente controlados. Por un lado, es latente el problema de la pérdida de información visual cuando se ejecuta una tarea, es decir, qué hacer cuando por los propios movimientos del robot o por los de algún objeto involucrado, las características de imagen elegidas desaparecen momentáneamente o por un periodo de tiempo largo. Para afrontar esta dificultad, se han venido probando diferentes ideas. En [18] se presenta un esquema de control que utiliza el cambio de visibilidad en las características de imagen. Las estrategias que utilizan predictores de oclusiones y estimadores de los parámetros de imagen ocluidos, basados en el filtro de Kalman, son también investigadas [40]. Otro problema de considerable importancia, es el hecho de contar con una adecuada calibración del sistema de visión, ya que el desempeño del sistema completo depende en buena medida de la aproximación que se haga de la matriz de interacción y de la forma en que se elija a ésta, particularmente en los sistemas monoculares. Por ello, es mejor disponer de esquemas de control que no requieran

---

de un procedimiento de calibración. Al respecto, en [78] se diseña un sistema de cámara móvil no calibrado, mientras que en [43] se expone un sistema de cámara fija igualmente no calibrado, ambos esquemas utilizan leyes de control adaptable para estimar los parámetros del sistema de visión. Además de los problemas citados, un factor importante para el diseño de controladores servovisuales es el hecho de modelar de manera precisa la dinámica del robot. Son pocos los trabajos que no emplean el modelo del robot en la ley de control o que consideran las incertidumbres de dicho modelo. En [2] se exhibe un controlador adaptable para manejar la incertidumbre en el modelo dinámico de un sistema formado por un robot planar de dos eslabones que emplea una cámara fija. En ese esquema, se utiliza además un segundo lazo de control adaptable para estimar los parámetros del sistema de visión. Por último, es importante mencionar la necesidad de trabajar en el desarrollo de nuevas y mejores estrategias de control que permitan a los sistemas servovisuales gozar de mayor desempeño. Son varias las técnicas novedosas de control con las cuales se ha experimentado. En [17] se presenta un esquema de control conmutado que se apoya de las estructuras de control servovisual de imagen y de posición. El cambio entre una estructura u otra se realiza con base en la más adecuada para determinado momento de la tarea que se ejecuta, a diferencia del control servovisual híbrido, en el que ambos esquemas se utilizan de manera conjunta.

La prueba de estabilidad de cada uno de estos controladores se ha estudiado ampliamente aunque en el campo de la lógica difusa es un tema en plena evolución [32]. La propuesta presentada en esta tesis basada en LMIs es una buena opción aunque presenta el inconveniente de necesitar del modelo del robot para ser obtenidas. Se han empezado a realizar trabajos donde se combinan la pasividad y la lógica difusa convirtiéndose en otra alternativa de investigación en esta área. La utilización de robots autónomos o remotos para aplicaciones submarinas relacionadas por ejemplo con la exploración y producción de petróleo en aguas profundas esta despertando interés de la comunidad académica y de diversos grupos de investigación [37].

El control servovisual de robots continúa teniendo muchos retos, no se sabe cuándo quedarán resueltos la mayoría de sus problemas en los que hoy trabaja la comunidad científica interesada en el tema, sin embargo, se augura un futuro prometedor, en el cual, esta técnica para controlar robots quedará bien establecida como cualquiera de las ya conocidas, ofreciendo mejores prestaciones y con ello incrementando notoriamente las aplicaciones de la robótica.

## 1.4. Resultados de la tesis

En esta tesis se desarrollan varios controladores servovisuales basados en imagen para controlar la posición en tres dimensiones del efector final de un robot

---

articular de tres grados de libertad, ambos expresados en coordenadas de imagen. Además se presentan algunos algoritmos en dos dimensiones, que aunque no son parte del tema propuesto de esta tesis permiten complementar el trabajo realizado.

Se presentan algoritmos PID, difusos y adaptables. Los algoritmos de control PID no requieren del modelo dinámico del robot. La única información necesaria (además de las imágenes captadas por los sensores de visión) es el Jacobiano geométrico. Por consiguiente se requiere de las señales de posición articular de los encoders. En las aplicaciones difusas se requiere de las lecturas de los encoders y las imágenes capturadas con la cámara. Para el control de los movimientos en tres dimensiones no se aplicó la visión estereoscópica, sino, se recurrió a un enfoque más sencillo, diseñando un sistema de visión no calibrado formado por dos cámaras de video fijas observando al robot. El modelado de las cámaras de video se obtuvo con la ya conocida teoría de proyección perspectiva. La tasa de variación de las coordenadas de imagen del punto de interés se estimó con el empleo de un observador. La teoría fue probada mediante experimentos con el Robot A465 de *CRS Robotics* y *LAW3 de SCHUNK*. Se pone de manifiesto un nivel de robustez por parte de los controladores ante pequeñas variaciones en los parámetros externos del sistema de visión. De acuerdo con la clasificación presentada en la Subsección 1.1.4, el sistema que se desarrolla en capítulos posteriores recaé en el esquema de control servovisual directo basado en imagen. Se eligió esta estrategia debido a que hoy en día es una de las más investigadas, considerando además que el número de aplicaciones que demandan movimientos en 3D es mayor que aquellas para 2D. Los algoritmos permiten eliminar restricciones en cuanto a la posición y orientación que deben guardar las cámaras de video.

## 1.5. Contribución de la tesis

El objetivo principal de esta tesis es la integración de las estrategias de adaptación para control visual y control de posición, que considera la presencia de las incertidumbres en los parámetros de calibración de la cámara y parámetros mecánicos del robot. Simulaciones y resultados experimentales obtenidos a partir de un sistema robótico real se presentan para ilustrar la viabilidad del método de control propuesto.

En este trabajo se considera el problema de control servovisual en 3D empleando dos cámaras y lecturas de los encoders con que cuenta el robot en sus articulaciones. No se considera el modelo del robot ni es necesario calibrar las cámaras. Se proponen dos estrategias de control. La primera es básicamente un controlador PID para seguimiento de trayectoria del efector final de brazos manipuladores de tres grados de libertad. La característica principal del algoritmo es que no

---

requiere del modelo dinámico del sistema y como retroalimentación se emplean directamente las coordenadas de imagen, mientras que se incluye el diseño de un observador para estimar su velocidad. La segunda es un controlador servovisual difuso que requiere lecturas de los encoders e información obtenida de las cámaras para seguir una trayectoria. El diseño se hace en coordenadas de imagen como el caso anterior y según la revisión bibliográfica no se ha utilizado antes una metodología como la propuesta para este tipo de aplicaciones. Para cada uno de los controladores se ha realizado la prueba de estabilidad empleando la teoría de Lyapunov y además para el sistema difuso ha sido necesario emplear los conceptos de desigualdad de matrices lineales (LMI).

Los controladores fueron simulados, para lo cual se obtuvo un modelo de las cámaras en 2D y 3D. Los resultados de simulación permitieron ajustar los parámetros necesarios para obtener los resultados experimentales, los cuales finalmente muestran el correcto funcionamiento de la propuesta de esta tesis.

Los aportes son:

- Modelo de las cámaras para un sistema de visión en 2D y 3D que permite realizar simulaciones de controladores visuales.
- Controlador servovisual en 2D y 3D que no necesita el modelo dinámico del robot ni realizar calibración de la cámara.
- Controlador servovisual difuso en 2D y 3D, que no requiere calibración de la cámara ni el modelo del robot.
- Prueba de estabilidad de los controladores difusos empleando la teoría de LMI.
- Estudio teórico sobre diferentes tipos de controladores aplicados en servovisión.

## 1.6. Estructura de la tesis

La tesis esta organizada de la siguiente manera:

- Capítulo 1: se realiza una introducción al control servovisual y la lógica difusa aplicada en este.
- Capítulo 2: inicialmente se da el modelo del sistema de visión en 3D, a partir del cual es posible obtener fácilmente el de 2D. Algunos conceptos básicos sobre PDC y modelos del tipo T-S son presentados.
- Capítulo 3: en este capítulo se presentan los diseños de los algoritmos en 3D. Además se presentan resultados experimentales con los bancos de pruebas presentados en el Apéndice A.

- 
- Capítulo 4: son presentados tres algoritmos que se utilizan para ser comparados con los propuestos. Resultados experimentales permiten concluir sobre las ventajas y desventajas de cada uno.
  - Capítulo 5: en este último capítulo se dan las conclusiones y recomendaciones.
  - Apéndice A: se describen los sistemas experimentales utilizados.
  - Apéndice B: prueba del Teorema 3.1.1.
  - Apéndice C: modelo del robot manipulador en coordenadas de imagen es dado.



# Capítulo 2

## Preliminares

Una vez establecidos los fundamentos del control visual de robots y antes de presentar la estructura de los controladores que se desarrollaron en esta tesis, es necesario mostrar las herramientas preliminares que sirven de base para el diseño de estos. Tales herramientas son en primera instancia el modelo matemático que caracteriza la relación existente entre los objetos reales, en este caso el efector final del robot, y sus respectivos parámetros de imagen. En segunda instancia algunas propiedades del modelo dinámico de robots y conceptos fundamentales sobre control difuso deben ser recordados. Como se mencionó con anterioridad, los parámetros que se utilizaron en este trabajo son las coordenadas de imagen del efector final del robot. Con tal fin, se supone al efector como un punto de interés en el espacio cartesiano. Si se considera un punto tridimensional con coordenadas  $(x, y, z)$  y se proyecta sobre una pantalla, o bien, un plano de imagen, dicha proyección se compone sólo de dos coordenadas llamadas  $(y_1, y_2)$ . Si de manera inversa se quisiera partir de estas coordenadas de pantalla para obtener las coordenadas tridimensionales del punto en cuestión, no sería posible, ya que no se puede aplicar el mapeo de dos coordenadas a tres, puesto que se ha perdido la información de profundidad. Para controlar movimientos en 3D es necesario resolver el problema de la profundidad. Varias son las soluciones que se han empleado con éxito, una de ellas consiste en mover la cámara de video y tomar imágenes desde distintos puntos de vista para realizar posteriormente un cómputo que entregue la información requerida, más aún, es posible estimar la profundidad sin mover la cámara siempre y cuando se tenga un amplio conocimiento a priori sobre la geometría del sistema, que ayude a realizar una serie de cálculos. Sin embargo, una manera más directa de atacar el problema es utilizar una segunda cámara de video. Esto requiere generalmente de menos cálculos pero de mayor capacidad de procesamiento, la cual es posible obtener con las computadoras comerciales de las que se dispone hoy en día.

En el presente trabajo se propone el uso de dos cámaras de video (en general, esta propuesta es más sencilla que la visión estereoscópica), una colocada al frente

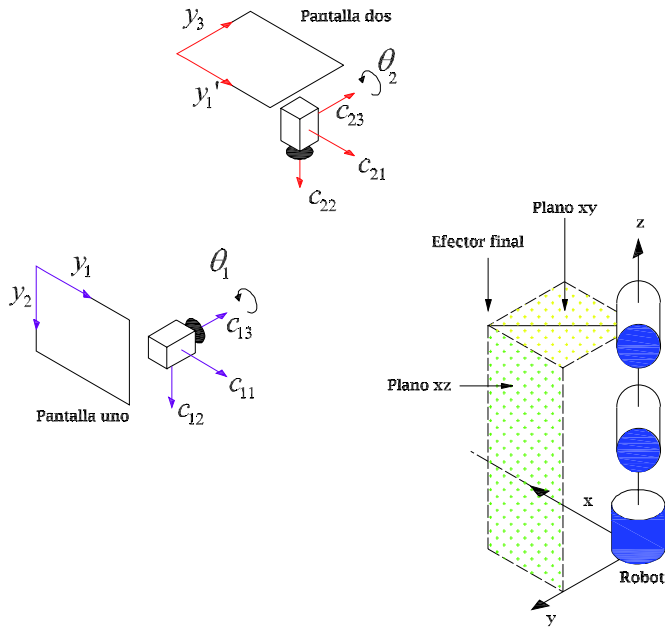


Figura 2.1: Configuración de las cámaras de video respecto al robot.

del robot denominada cámara uno y otra por arriba de él denominada cámara dos, tal como se aprecia en la Figura 2.1. Inicialmente se supone que las cámaras pueden tener cualquier posición, además de una rotación, para la cámara uno, respecto a su eje óptico  $c_{13}$ , y para la cámara dos, respecto a su eje  $c_{23}$ . Con la cámara uno se obtienen las coordenadas  $(y_1, y_2)$  correspondientes al plano  $xz$ , mientras que con la cámara dos, la coordenada  $y_3$  que es paralela al eje  $y$ . Nótese que la información de  $y'_1$  no es relevante. Es decir, basta con despreciar  $y'_1$  para aplicar el control de posición en 3D mediante las coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ . Trabajar en dos pantallas con la información de las coordenadas de imagen del efector final, resulta prácticamente lo mismo que si se trabaja con las coordenadas  $(x, y, z)$  directamente en el espacio cartesiano. Por esta razón se pudo hacer sin ningún problema la adaptación de un controlador que opera en el espacio de trabajo del robot, a otro que actúa sobre las características de imagen, las cuales no son más que una proyección de los movimientos del robot en dos planos de imagen. Si se considera por ejemplo que el robot se mueve sobre un plano (véase la Figura 2.2 a), y se desea ir de una posición inicial a una final, un control diseñado en espacio cartesiano puede llevar sin ningún problema al robot de un punto a otro. De manera análoga, el resultado anterior puede extenderse para el caso tridimensional cuando los movimientos del robot abandonan el plano y se ejecuta un movimiento en profundidad (véase la Figura 2.2 b). En este caso el movimiento del robot puede considerarse como una combinación de dos movimientos planares,  $x-z$  y  $x-y$ . Se advierte entonces la necesidad de una segunda cámara de video que proporcione información de la tercera coordenada si se quiere aplicar el control

---

servovisual en 3D.

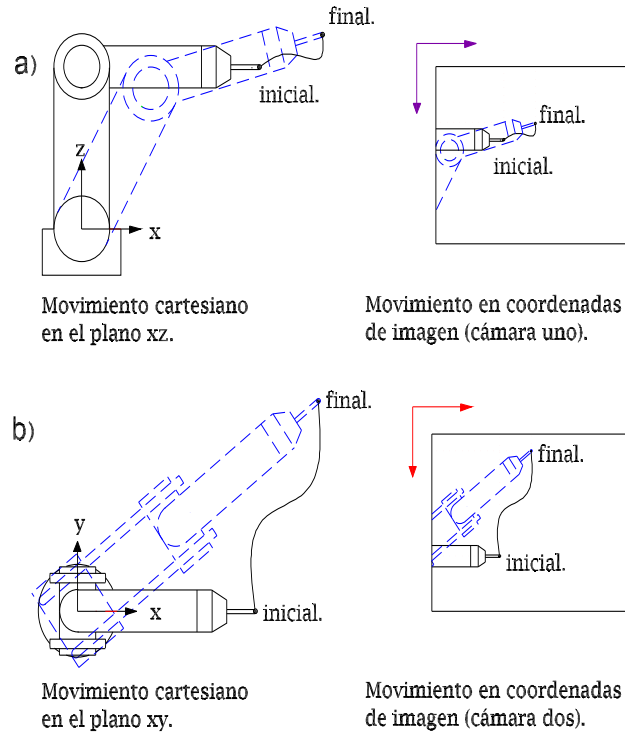


Figura 2.2: Adaptación de coordenadas cartesianas a coordenadas de imagen.

## 2.1. Modelado de las cámaras de video en 3D

El objetivo de modelar las cámaras de video es conocer la expresión matemática que asigna las coordenadas de pantalla ( $y_1, y_2$ ) a un punto tridimensional con coordenadas ( $x, y, z$ ) expresadas respecto a un sistema de referencia. Aunque en la realidad las coordenadas de pantalla se obtienen mediante el empleo de técnicas para el procesamiento de imágenes y herramientas computacionales, el modelo es necesario para realizar el diseño y el análisis del sistema de control, así como la simulación por computadora. La geometría de las cámaras, es decir, la manera en que se forma una imagen, es el punto inicial para obtener la aproximación matemática mencionada. Entre estas aproximaciones, una de las más precisas es la proyección perspectiva. En ella se supone que la luz reflejada por un objeto que es proyectado sobre el plano de imagen, el cual se ubica en el sensor CCD (Charge Coupled Device), pasa a través de un orificio de apertura infinitesimal, obteniéndose así una proyección invertida. A la distancia que existe entre la lente

---

de la cámara y el foco o punto focal se le conoce como longitud focal, mientras que a la intersección del eje óptico, que pasa por el centro de la lente, con el plano de imagen, se le conoce como centro óptico. El modelo de proyección perspectiva constituye un mapeo no lineal a partir del cual se generan algunos modelos lineales que pueden resultar útiles dependiendo de la naturaleza de la aplicación que se tenga en mente. En esta tesis se presentan algoritmos en 2D y 3D, pero solo se dará el modelo de las cámaras en 3D ya que a partir de este fácilmente se puede derivar el modelo en 2D. Se considera un arreglo de dos cámaras como el que se muestra en la Figura 2.3. Respectivamente, las coordenadas asociadas a cada cámara son  $(y_{11}, y_{12})$  y  $(y_{21}, y_{22})$ . La primera se encuentra situada paralela al plano  $(x, z)$  y se asociará a las coordenadas  $(y_1, y_2)$ , mientras que para la segunda el eje  $y_{21}$  es paralelo al eje  $y$ . De este modo se obtiene la coordenada  $y_3$ .

**Suposición 2.1.1** *La elección del arreglo de cámaras permite formar con facilidad el sistema dextrógiro de coordenadas de imagen  $(y_1, y_2, y_3)$  y hace más difícil que se presenten oclusiones del efector final. Sin embargo, el origen de  $(y_1, y_2)$  y el de  $y_3$  no coinciden y adicionalmente, los factores de escalamiento pueden no ser iguales. A pesar de ello el diseño de la ley de control permite el empleo de este sistema de coordenadas directamente y sin necesidad de calibrar las cámaras. Nótese, sin embargo, que la información del eje  $y_{22}$  no se utiliza en absoluto.  $\triangle$*

**Suposición 2.1.2** *Para hacer la Figura 2.3 más clara, sólo se muestran en ella los sistemas de coordenadas  $\Sigma_{c_i}$  asociados a las lentes de las cámaras, con  $i = 1, 2$ . Usualmente se incluyen también los sistemas asociados al plano de imagen en el arreglo CCD de la cámara y a la imagen que se observa en la pantalla de la computadora, i. e.  $\Sigma_{I_i}$  y  $\Sigma_{y_i}$ , respectivamente. Es de este último sistema de coordenadas de donde se obtiene la información necesaria para la retroalimentación visual. Sin ninguna pérdida de generalidad se puede considerar que todos estos marcos de referencia son paralelos y la representación de un punto en particular difiere básicamente en factores de escalamiento (positivos o negativos) y offsets de los distintos orígenes. Por facilidad se incluyen en la figura la dirección de las coordenadas  $(y_{11}, y_{12})$  y  $(y_{21}, y_{22})$ . El lector interesado puede consultar detalles en [30].  $\triangle$*

### 2.1.1. Modelo de la Cámara 1

Para describir la relación entre la posición del efector final dada por  $\mathbf{x}_R$  y las coordenadas  $(y_1, y_2) \equiv (y_{11}, y_{12})$  de la Cámara 1 se pueden emplear transformaciones homogéneas y proyecciones de perspectiva. El procedimiento detallado

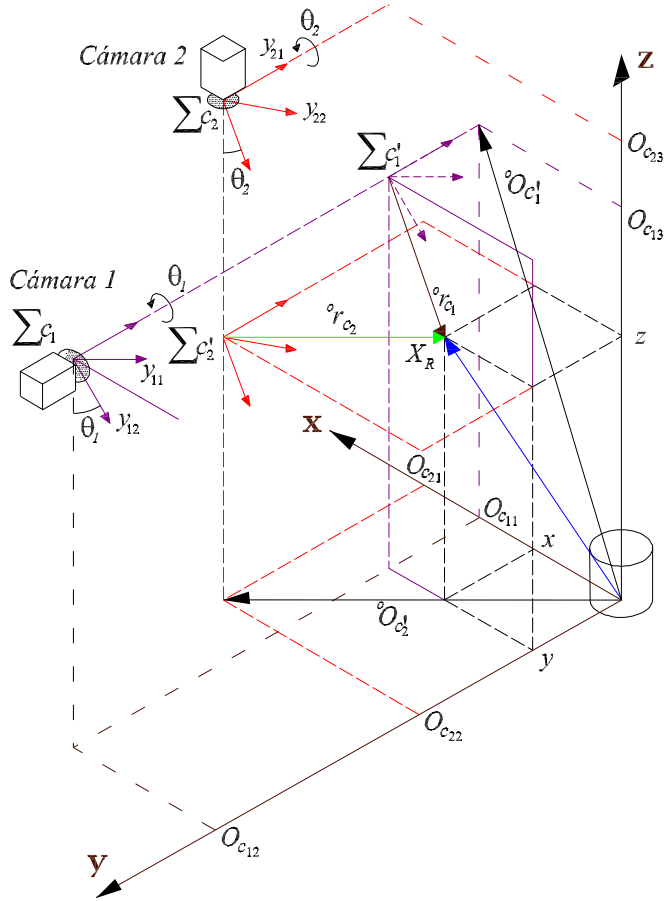


Figura 2.3: Arreglo de un sistema de visión con dos cámaras.

se describe en [28, 29, 30], mientras que en esta subsección y en la siguiente se proporcionan únicamente los pasos básicos. De la Figura 2.3 se tiene

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{o}_{c'_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0\mathbf{r}_{c_1}, \quad (2.1)$$

donde  ${}^0\mathbf{o}_{c'_1}$  representa la componente en el plano  $x-z$  del origen del sistema  $\Sigma_{c_1}$  y  ${}^0\mathbf{r}_{c_1}$  es la ubicación del efector final con respecto al sistema  $\Sigma_{c'_1}$ . Este es un marco de referencia auxiliar paralelo a  $\Sigma_{c_1}$  cuyo origen no está fijo sino que varía de acuerdo con  $[o_{c11} \ y \ o_{c13}]^T$ . De la ecuación (2.1) se tiene

$${}^0\mathbf{r}_{c_1} = \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - {}^0\mathbf{o}_{c'_1} = \begin{bmatrix} r_{c1x} \\ r_{c1y} \\ r_{c1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{c1x} \\ 0 \\ r_{c1z} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

---

Puesto que la Cámara 1 se emplea exclusivamente para obtener información del plano  $x$ - $z$ , se pueden definir los siguientes vectores auxiliares

$${}^0\bar{\mathbf{r}}_{c_1} = \begin{bmatrix} r_{c_{1x}} \\ r_{c_{1z}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{R_1} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{o}}_{c'_1} = \begin{bmatrix} o_{c_{11}} \\ o_{c_{13}} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

de tal forma que se puede calcular

$${}^0\bar{\mathbf{r}}_{c_1} = \bar{\mathbf{x}}_{R_1} - \bar{\mathbf{o}}_{c'_1} = \begin{bmatrix} x - o_{c_{11}} \\ z - o_{c_{13}} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Para expresar el vector  ${}^0\bar{\mathbf{r}}_{c_1}$  con respecto a  $\Sigma_{c'_1}$  se requiere multiplicarlo por la siguiente matriz de rotación

$$\mathbf{R}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} = {}^{c'_1}\mathbf{R}_0. \quad (2.7)$$

Con base en las ecuaciones anteriores es sencillo calcular la representación en coordenadas de imagen como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \alpha_{\lambda_1} \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_1} & -c_{\theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c_{11}} \\ z - o_{c_{13}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde  $c_{\theta_1} = \cos(\theta_1)$ ,  $s_{\theta_1} = \sin(\theta_1)$  y

$$\alpha_{\lambda_1} = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{o_{c_{12}} - y - \lambda_1}. \quad (2.9)$$

$\alpha_1$  es un factor de conversión de metros a pixeles,  $\lambda_1$  es la distancia focal de la Cámara 1, y  $[u_{01} \ v_{01}]^T$  es el offset del centro de la imagen.

### 2.1.2. Modelo de la Cámara 2

El modelo cinemático de la Cámara 2 se obtiene empleando un procedimiento similar en todo al método utilizado en la Subsección 2.1.1. En este caso se puede expresar la posición del efector final como

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{o}_{c'_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} + {}^0\mathbf{r}_{c_2}, \quad (2.10)$$

---

de tal forma que se tiene

$${}^0\mathbf{r}_{c_2} = \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} - \mathbf{o}_{c'_2} = \begin{bmatrix} r_{c_{2x}} \\ r_{c_{2y}} \\ r_{c_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{c_{2x}} \\ r_{c_{2y}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Como antes se pueden definir los siguientes vectores en el plano  $x$ - $y$

$${}^0\bar{\mathbf{r}}_{c_2} = \begin{bmatrix} r_{c_{2x}} \\ r_{c_{2y}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{R_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\bar{\mathbf{o}}_{c'_2} = \begin{bmatrix} o_{c_{21}} \\ o_{c_{22}} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Entonces se calcula

$${}^0\bar{\mathbf{r}}_{c_2} = \bar{\mathbf{x}}_{R_2} - \bar{\mathbf{o}}_{c'_2} = \begin{bmatrix} x - o_{c_{21}} \\ y - o_{c_{22}} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Es posible representar este vector en un marco de referencia auxiliar paralelo a  $\Sigma_{c_2}$ , *i. e.*  $\Sigma_{c'_2}$  con origen  $[o_{c_{21}} \ o_{c_{22}} \ z]^T$ . Sólo se requiere emplear la siguiente matriz de rotación

$$\mathbf{R}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_2) \end{bmatrix} = {}^{c'_2}\mathbf{R}_0. \quad (2.16)$$

Llevando a cabo la manipulación de matrices de transformación homogénea se obtienen las coordenadas de imagen para la Cámara 2:

$$\begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_{22} \end{bmatrix} = \alpha_{\lambda_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - o_{c_{22}} \\ x - o_{c_{21}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{02} \\ v_{02} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde

$$\alpha_{\lambda_2} = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{o_{c_{23}} - z - \lambda_2}. \quad (2.18)$$

$\alpha_2$  es un factor de conversión de metros a pixeles,  $\lambda_2$  es la distancia focal de la Cámara 2, y  $[u_{02} \ v_{02}]^T$  es el offset del centro de la imagen.

### 2.1.3. Combinación de los modelos de las cámaras

Para el diseño de la ley de control se propone formar un sistema dextrógiro empleando las coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ . A pesar de que las coordenadas  $(y_1, y_2)$

---

no comparten el mismo origen que  $y_3$  y posiblemente tampoco la misma escala, la dirección de estos ejes es la apropiada para el objetivo deseado, pues son mutuamente ortogonales. Combinando las ecuaciones (2.8) y (2.17) se obtiene

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda_1} c_{\theta_1} & 0 & \alpha_{\lambda_1} s_{\theta_1} \\ -\alpha_{\lambda_1} s_{\theta_1} & 0 & -\alpha_{\lambda_1} c_{\theta_1} \\ 0 & -\alpha_{\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - o_{c11} \\ y - o_{c22} \\ z - o_{c13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

con

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

De manera conveniente se pueden hacer las siguientes definiciones

$$\mathbf{R}_\theta \triangleq \begin{bmatrix} -c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} \\ -s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{o}_c \triangleq \begin{bmatrix} o_{c11} \\ o_{c22} \\ o_{c13} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{u}_0 \triangleq \begin{bmatrix} u_{01} \\ v_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Con base en (2.21)–(2.24) se puede reescribir (2.19) como

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{A} (\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c) + \mathbf{u}_0. \quad (2.25)$$

La derivada de (2.25) es

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}}_R + \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{A} (\mathbf{x}_R - \mathbf{o}_c). \quad (2.26)$$

Si se define

$$\bar{\alpha}_1 \triangleq \frac{\alpha_1 \lambda_1}{(o_{c12} - y - \lambda_1)^2} = \frac{\alpha_{\lambda_1}^2}{\alpha_1 \lambda_1} \quad (2.27)$$

$$\bar{\alpha}_2 \triangleq \frac{\alpha_2 \lambda_2}{(o_{c23} - z - \lambda_2)^2} = \frac{\alpha_{\lambda_2}^2}{\alpha_2 \lambda_2}, \quad (2.28)$$



se puede calcular la derivada de  $\mathbf{A}$  como

$$\dot{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \dot{y} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_2 \dot{z} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1 \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Esta relación permite calcular después de cierta manipulación matemática  $\dot{\mathbf{y}}$  como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda_2} & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1(z - o_{c13}) & \alpha_{\lambda_1} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_R \triangleq \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \dot{\mathbf{x}}_R. \quad (2.30)$$

Como es bien sabido, la velocidad del efector final  $\dot{\mathbf{x}}_R$  se relaciona con la velocidad de las coordenadas articulares,  $\dot{\mathbf{q}}$ , por medio del Jacobiano geométrico  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ :

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.31)$$

Por tanto, es posible reescribir (2.30) como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.32)$$

Siempre que el robot no se encuentre en una singularidad y que la inversa de la matriz  $\mathbf{B}$  exista es posible obtener

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}}. \quad (2.33)$$

Nótese que  $\mathbf{R}_\theta^{-1} = \mathbf{R}_\theta^T$ .

**Suposición 2.1.3** *Evitar que el robot pase por una singularidad, de tal manera que  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  exista, es principalmente un problema de planeación de trayectorias. Por lo general las singularidades se presentan en la frontera del espacio de trabajo, aunque hay excepciones. Por ejemplo, en [63] se muestra que para un manipulador con configuración articulada se tendrá una singularidad si el efector final se encuentra sobre el eje de giro de la base. Por simplicidad, en este trabajo se supondrá que la trayectoria deseada en coordenadas de imagen esta libre de singularidades.*  $\triangle$

**Suposición 2.1.4** *La existencia de la inversa de la matriz  $\mathbf{B}$  está garantizada si  $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ . No es difícil mostrar por cálculo directo que este será el caso si se satisface*

$$(o_{c22} - y)(o_{c13} - z) \neq (o_{c12} - y - \lambda_1)(o_{c23} - z - \lambda_2). \quad (2.34)$$

*Puesto que las Cámaras 1 y 2 se sitúan lejos una de la otra y en las posiciones que se observan en la Figura 2.3, se debe tener  $o_{c22} \neq o_{c12}$  y  $o_{c13} \neq o_{c23}$ . Entonces, considerando que las distancias focales son despreciables, la relación (2.34) debe ser válida para todo tiempo.*  $\triangle$

---

## 2.2. Compensación Distribuida Paralela para modelos Takagi-Sugeno

La compensación distribuida paralela, la cual proporciona un procedimiento para diseñar controladores difusos a partir del modelo T-S, fue propuesta por Hua Wang, Kasuo Tanaka and Mark Griffin en [79]. La idea consiste en compensar cada uno de los subsistemas propuestos por las reglas difusas utilizando técnicas de control lineal, y luego inferir una acción de control global a partir de las reglas que tengan las mismas premisas que las del modelo y que propongan cada una la compensación correspondiente. La construcción del modelo está basada en reglas de la forma [67], [71]

$$\begin{aligned}
 & \text{Regla } i : \text{Si } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\
 & \text{Entonces } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\
 & \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde  $M_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, g$ ) son conjuntos difusos,  $r$  es el número de reglas del modelo,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida,  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), \dots, z_g(t)]$  son las variables que componen las premisas. El estado final del sistema se calcula como

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t))
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \tag{2.37}$$

donde

$$w_i(\mathbf{z}(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(\mathbf{z}_j(t)) \tag{2.38}$$

---


$$h_i(\mathbf{z}(t)) = \frac{w_i(\mathbf{z}(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))}. \quad (2.39)$$

$M_{ij}(\mathbf{z}(t))$  es el grado de pertenencia de  $\mathbf{z}_j(t)$  en  $M_{ij}$ . En este trabajo se asume que

$$w_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) > 0, \quad (2.40)$$

para todo  $t$ . Por lo tanto

$$h_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) = 1. \quad (2.41)$$

Por conveniencia de notación  $h_i(\mathbf{z}(t)) = h_i$  y  $w_i(\mathbf{z}(t)) = w_i$ . La dinámica del estado final del sistema difuso se representa como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t). \quad (2.42)$$

**Propiedad 2.2.1** *Si los pares  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  son controlables, el sistema difuso (2.35) es llamado localmente controlable [71].  $\triangle$*

Para el modelo (2.35) se propone el siguiente controlador PDC

$$\begin{aligned} & \text{Regla } i : \text{ Si } \mathbf{z}_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } \mathbf{z}_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ & \text{Entonces } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.43)$$

El objetivo principal es determinar los valores de  $\mathbf{F}_i$  en los consecuentes de las reglas. Con la aproximación PDC se tiene un procedimiento simple para afrontar el problema de control de sistemas no lineales. La salida final está dada por

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t). \quad (2.44)$$

El esquema PDC que estabiliza el modelo difuso T-S fue propuesto por Wang *et al.* [42, 71] como un proceso de diseño que incluye un algoritmo de control y una prueba de estabilidad utilizando restricciones por medio de LMIs. El objetivo es encontrar apropiadamente  $\mathbf{F}_i$  de manera que garantice estabilidad en lazo cerrado.

---

### 2.2.1. Condiciones de estabilidad cuadrática

Considérese la siguiente definición

**Definición 1** Se dice que el sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  es cuadráticamente estable si existe una función cuadrática [78]

$$V(x(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t), V(0) = 0, \quad (2.45)$$

que satisface las siguientes condiciones

$$V(x(t)) > 0, \forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0} \iff \mathbf{P} > 0, \quad (2.46)$$

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Si  $V(t)$  existe, se le conoce como función de Lyapunov.

△

Al sustituir (2.44) en (2.36), se obtiene el sistema Takagi–Sugeno en lazo cerrado como lo presenta [1]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t), \quad (2.48)$$

que se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) \left( \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \mathbf{x}(t) \quad (2.49)$$

donde  $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j$  y  $\mathbf{G}_{ii} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i$ . Las condiciones de estabilidad correspondientes a funciones cuadráticas de Lyapunov fueron presentadas inicialmente por Tanaka y Sugeno [69]. Esta aproximación requiere encontrar una matriz común definida positiva para  $r$  subsistemas, lo que hace a este método altamente conservativo. En [1] se han definido condiciones de estabilidad no cuadráticas que eliminan esta restricción.

### 2.2.2. Algoritmo de control difuso basado en Lyapunov

La estrategia utilizada para probar estabilidad de los sistemas PDC en este trabajo fue propuesta en [1] y toma en cuenta las siguientes consideraciones

---

**Suposición 2.2.1** *La derivada con respecto al tiempo de las funciones de pertenencia de las premisas tienen una cota superior de manera que*

$$\left| \dot{h}_i(\mathbf{z}(t)) \right| \leq \phi_i,$$

donde  $\phi_i, i = 1, \dots, r$  son constantes positivas dadas. △

**Teorema 2.2.1** *Sea válida la Suposición 2.2.1. Entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (2.48) es asintóticamente estable, si para cada subsistema de la forma (2.35), existe una función de Lyapunov cuadrática dada por*

$$V_i = \mathbf{X}^T \mathbf{P}_i \mathbf{X} \text{ con } \mathbf{P}_i \text{ } i = 1, \dots, r \quad (2.50)$$

tal que se satisface

$$a) \mathbf{P}_j = \alpha_{ij} \mathbf{P}_i \text{ con } \begin{cases} \alpha_{ij} \neq 1 \text{ y } \alpha_{ij} > 0 \text{ si } i \neq j \\ \alpha_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{cases} \quad (2.51)$$

$$b) \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho \mathbf{P}_\rho + (\mathbf{G}_{jj}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{G}_{jj}) < \mathbf{O}, \text{ } i, j = 1, \dots, r, \quad (2.52)$$

$$c) \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right)^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right) < \mathbf{O} \quad (2.53)$$

$\forall i, j, k \in \{1, \dots, r\} \text{ tal que } j < k,$

donde  $\mathbf{G}_{jk} = \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_k$  y  $\mathbf{G}_{jj} = \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{F}_j$ . △

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t). \quad (2.54)$$

La derivada con respecto al tiempo de  $V(\mathbf{x}(t))$  es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \dot{\mathbf{x}}^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{P}_i \right) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \left( \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(\mathbf{z}(t)) \mathbf{P}_\rho \right) \mathbf{x}(t) \\ &+ \mathbf{x}^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{P}_i \right) \dot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Al sustituir (2.49) en (2.55) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{G}_{ii}\mathbf{x}^\top(t) + \mathbf{x}^\top(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(\mathbf{z}(t))\mathbf{P}_\rho\mathbf{x}(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i<j} h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t)) \left( \frac{\mathbf{G}_{ji} + \mathbf{G}_{ij}}{2} \right) \mathbf{x}^\top(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{P}_i \right) \mathbf{x}^\top(t) \\
&+ \mathbf{x}^\top(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{P}_i \right) \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))h_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{G}_{ii}\mathbf{x}(t) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i<j} h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t)) \left( \frac{\mathbf{G}_{ji} + \mathbf{G}_{ij}}{2} \right) \mathbf{x}(t) \tag{2.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^\top(t) \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{jj}^\top\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{G}_{jj}) + \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(\mathbf{z}(t))\mathbf{P}_\rho \right. \\
&\tag{2.57} \\
&\left. + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{j<k} h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))h_k(\mathbf{z}(t)) \left( \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right)^\top \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right) \right) \right] \mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

De acuerdo con la Suposición 2.1.1  $|\dot{h}_\rho(\mathbf{z}(t))| \leq \phi_\rho$  (2.57) puede escribirse nuevamente como

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &\leq \mathbf{x}^\top(t) \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))(\mathbf{G}_{jj}^\top\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i\mathbf{G}_{jj}) + \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho\mathbf{P}_\rho \right. \\
&\tag{2.58} \\
&\left. + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{j<k} h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))h_k(\mathbf{z}(t)) \left( \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right)^\top \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right) \right) \right] \mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

Si las ecuaciones (2.51), (2.52) y (2.53) se cumplen, la derivada con respecto al tiempo es negativa.

### 2.2.3. Diseño de observadores difusos

En la práctica no es posible medir todos los estados de un sistema y es necesario diseñar un observador para implementar la ley de control (2.44). Si los pares  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i)$  son observables, el sistema difuso (2.35) es llamado localmente observable [45]. Basados en la estructura PDC, el observador de estados tiene la

forma

$$\begin{aligned}
& \text{Regla } i : \text{Si } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y, } \dots, \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\
& \text{Entonces } \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{L}_i (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\
& \hat{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r
\end{aligned} \tag{2.59}$$

donde  $\mathbf{L}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) es la ganancia del observador para la  $i$ -ésima regla. Al incluir el observador, el controlador difuso toma la siguiente forma en lugar de (2.44)

$$\mathbf{u}(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{z}(t))} = - \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{F}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \tag{2.60}$$

mientras que el observador satisface

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) [\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{L}_i (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))]. \tag{2.61}$$

La salida final es

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t). \tag{2.62}$$

Se utilizan los mismos pesos  $w_i(\mathbf{z}(t))$  que se emplearon en el sistema difuso (2.36). El diseño del observador difuso consiste en encontrar las ganancias  $\mathbf{L}_i$  que se utilizan en los consecuentes de las reglas. Al reemplazar (2.60) en (2.36) y al definir  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  como el error de observación se obtiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \hat{\mathbf{x}}(t)). \tag{2.63}$$

La ecuación del controlador en lazo cerrado es

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \tilde{\mathbf{x}}(t)] \tag{2.64}$$

Al sustituir (2.37) y (2.62) en (2.61) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) (\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \\
&+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) \mathbf{L}_i \mathbf{C}_i (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

De (2.36) y (2.65) se obtiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))h_j(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i - \mathbf{L}_i\mathbf{C}_j)\tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (2.66)$$

El diseño del observador difuso consiste en determinar las ganancias  $L_i$ , utilizando las condiciones de estabilidad del Teorema 2.2.2, tal que el error en estado estacionario tienda a cero.

**Teorema 2.2.2** *La dinámica del error de observación (2.66) es asintóticamente estable si existen matrices definidas positivas  $\mathbf{P}\mathbf{o}_1, \mathbf{P}\mathbf{o}_2, \dots, \mathbf{P}\mathbf{o}_r$  y matrices  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_r$  tal que las siguientes condiciones sean satisfechas:*

$$a) \mathbf{P}\mathbf{o}_i > \mathbf{O}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (2.67)$$

$$b) \sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} \mathbf{P}\mathbf{o}_{\rho} + (\mathbf{G}_{jj}^T \mathbf{P}\mathbf{o}_i + \mathbf{P}\mathbf{o}_i \mathbf{G}_{jj}) < \mathbf{O}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (2.68)$$

$$c) \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right)^T \mathbf{P}\mathbf{o}_i + \mathbf{P}\mathbf{o}_i \left( \frac{\mathbf{G}_{jk} + \mathbf{G}_{kj}}{2} \right) < \mathbf{O} \quad (2.69)$$

$\forall i, j, k \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $j < k$ ,

$$d) \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T(0) \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{P}\mathbf{o}_i^{-1} \end{bmatrix} \geq \mathbf{O} \quad \text{para } i = 1, \dots, r, \quad (2.70)$$

$$e) \begin{bmatrix} \phi_{\rho} \mathbf{P}\mathbf{o}_i & \mathbf{W}_{ij\rho l}^T \\ \mathbf{W}_{ij\rho l} & \phi_{\rho} \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i, j, \rho \in \{1, \dots, r\} \forall l, \quad (2.71)$$

donde  $\mathbf{G}_{jk} = \mathbf{A}_j - \mathbf{L}_j\mathbf{C}_k, \mathbf{G}_{jj} = \mathbf{A}_j - \mathbf{L}_j\mathbf{C}_j$  y  $\mathbf{W}_{ij\rho l} = \xi_{\rho l}(\mathbf{A}_i\mathbf{X}_i - \alpha_{ij}\mathbf{B}_i\mathbf{M}_j)$ .

△

Estas desigualdades pueden escribirse en términos de LMIs haciendo el siguiente cambio de variable

$$\mathbf{P}\mathbf{o}_i = \mathbf{X}\mathbf{o}_i^{-1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{o}_i = \alpha_{ij}\mathbf{X}\mathbf{o}_j, \quad \text{tal que } \alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ y } i \neq j \quad (2.73)$$

$$\mathbf{L}_i = \beta_{ij}\mathbf{L}_j, \quad \text{tal que } \beta_{ij} = 1/\beta_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ y } i \neq j \quad (2.74)$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{L}_i\mathbf{C}_i\mathbf{X}\mathbf{o}_i, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\}. \quad (2.75)$$

Se puede obtener la siguiente representación de  $2n$  dimensiones para el sistema observador/controlador en lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ 0 & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{L}_i \mathbf{C}_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r h_i \mathbf{C}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$



---

Por tratarse de un sistema lineal difuso el principio de superposición se satisface y tanto  $\mathbf{x}$  como  $\hat{\mathbf{x}}$  tenderán a cero.

# Capítulo 3

## Algoritmos de control en 3D

### 3.1. Algoritmo PID con termino deslizante

En esta sección se presentan las leyes de control diseñadas para lograr el seguimiento de trayectoria por parte del efector final del robot en 3D. Es necesario tener en cuenta la posición del efector final del robot con respecto al marco de referencia cartesiano  $\Sigma_0$

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (3.1)$$

$\mathbf{x}_R$  se obtiene como función de las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  al aplicar la cinemática directa; también se requiere la posición del efector final en el marco de referencia de imagen  $\Sigma_y$ , este valor se obtiene directamente de la cámara en la parte experimental.

La dinámica de un brazo manipulador rígido con articulaciones de revolución puede ser descrita por medio de las ecuaciones de Euler–Lagrange como se explica en [31, 61]. El modelo resultante es

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva que representa la inercia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal semidefinida positiva que contiene los coeficientes de fricción viscosa,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques generalizados actuando en las articulaciones y  $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$  representa cualquier perturbación externa acotada o bien términos de fricción desconocidos. Se representa el eigenvalor mas grande (mas pequeño) de una matriz por  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ). Para un vector  $\mathbf{x}$  de  $n \times 1$ , se utiliza la norma euclidiana  $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ , mientras que la norma para una matriz  $\mathbf{A}$  de  $m \times n$  es la correspondiente norma

---

inducida  $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ . Al recordar que se consideran articulaciones de revolución, las siguientes propiedades se pueden establecer:

**Propiedad 3.1.1** *Al cumplirse  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y  $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$ , dado por*

$$\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$$

$$\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q})). \quad \triangle$$

**Propiedad 3.1.2** *Mediante el uso de los símbolos de Christoffel (de primera especie) se puede concluir que  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica.  $\triangle$*

Una de las formas de crear una trayectoria aleatoria entre los dos puntos de interés emplea el mapeo  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado en primera instancia por

$$\dot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{v}(\mathbf{y}) \triangleq -\frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} \tilde{\mathbf{y}} - k_1(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_f), \quad (3.3)$$

donde  $k_0, k_1$  y  $\epsilon$  son constantes positivas.  $\mathbf{y}_d$  es obtenida por la integración de (3.3) con  $\mathbf{y}_d(0) = \mathbf{y}(0)$ . Esta es solo una forma de generar el valor de  $\mathbf{y}_d$ , en la parte experimental se puede observar que el algoritmo funciona correctamente también ante una trayectoria circular. Además

$$\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_f. \quad (3.4)$$

Se ha realizado una adaptación para control servovisual del algoritmo propuesto en [6]. Aunque las modificaciones son pocas es necesario hacerlas, principalmente para la prueba de estabilidad. Puesto que  $\dot{\mathbf{y}}$  no esta disponible, se diseña un observador de estados. Una estimación de  $\mathbf{y}$  es dada por  $\hat{\mathbf{y}}$ , y el error de observación se calcula como

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (3.5)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\hat{\mathbf{y}}}_o + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}}(0) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_o = \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.7)$$

donde  $\hat{\mathbf{y}}$  es el valor estimado de  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  es el error de observación,  $\mathbf{\Lambda}_z, \mathbf{\Lambda}_y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales definidas positivas,  $k_d$  es una constante positiva y  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^3$  está dado en (3.13). Por otro lado, el error de seguimiento en coordenadas de imagen se define como

$$\Delta \mathbf{y} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_d. \quad (3.8)$$

---

Para la implementación del controlador se introducen las siguientes variables

$$\dot{\mathbf{y}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_r \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^3$  se define en (3.14). Asimismo, se introduce

$$\mathbf{s} = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{\Lambda}_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \mathbf{\Lambda}_y \bar{\mathbf{y}} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d \quad (3.12)$$

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-kt} \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{ \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta)) \} d\vartheta. \quad (3.14)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\text{sign}(\mathbf{s}_1) = [\text{sign}(s_{11}) \quad \text{sign}(s_{12}) \quad \text{sign}(s_{13})]^\top$ ,  $s_{1i}$  es elemento de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k > 0$ , y  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva. Nótese que la definición de  $\mathbf{s}_d$  fuerza a que  $\mathbf{s}_1(0) = \mathbf{0}$ , lo que ayuda a la respuesta transitoria del error a ser más suave. Finalmente, la ley de control está dada por

$$\mathbf{s}_o \triangleq \dot{\mathbf{y}}_o - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^\top(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{R}}_\theta^\top \mathbf{s}_o, \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva, y

$$\hat{\mathbf{R}}_\theta = \begin{bmatrix} -c_{\theta_{01}} & 0 & s_{\theta_{01}} \\ -s_{\theta_{01}} & 0 & -c_{\theta_{01}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

$\theta_{01}$  es el valor nominal de  $\theta_1$  en (2.21).

Para llevar a cabo un análisis de estabilidad y convergencia a cero de los distintos errores se requiere plantear la dinámica del sistema en lazo cerrado. Exclusivamente con este fin se definen las siguientes variables

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_o = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} \quad (3.18)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1} \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.19)$$

$$\mathbf{s}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.20)$$

$$\mathbf{s}_y \triangleq \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r. \quad (3.21)$$

Nótese que  $\mathbf{s}_r$  y  $\mathbf{s}_y$  se relacionan por

$$\mathbf{s}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{s}_y, \quad (3.22)$$

y

$$\mathbf{s}_y = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r. \quad (3.23)$$

Ahora bien, es posible reescribir (3.2) como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r + \mathbf{D} \mathbf{s}_r = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_a, \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{y}_a \triangleq \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p. \quad (3.25)$$

Por otro lado, la ley de control (3.16) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{R}_\theta \mathbf{B} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{s}_o, \quad (3.26)$$

o bien

$$\boldsymbol{\tau} = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{s}_o, \quad (3.27)$$

donde

$$\bar{\mathbf{K}}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{B} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{\theta}} = \hat{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} c_{\tilde{\theta}} & 0 & -s_{\tilde{\theta}} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\tilde{\theta}} & 0 & c_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

En la última relación se tiene  $c_{\tilde{\theta}} = \cos(\tilde{\theta})$ ,  $s_{\tilde{\theta}} = \sin(\tilde{\theta})$  y  $\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_{01}$ . Tomando en cuenta (3.15), (3.18) y (3.21) se tiene  $\mathbf{s}_o = \mathbf{s}_y - \mathbf{r}$ , lo que permite combinar (3.22), (3.24) y (3.27) para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r + \mathbf{D} \mathbf{s}_r &= -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{s}_r \\ &+ \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{r} - \mathbf{y}_a. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Finalmente, definiendo  $\mathbf{K}_{DP} \triangleq \mathbf{D} + \bar{\mathbf{K}}_p$  se obtiene la dinámica del error de seguimiento como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{DP} \mathbf{s}_r = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{R}}_\theta^T \mathbf{r} - \mathbf{y}_a. \quad (3.32)$$

Calcular la dinámica del error de observación es más bien simple. De (3.6)–(3.7)

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{y}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta + \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z}. \quad (3.33)$$

---

Combinando (3.8), (3.11), (3.18) y (3.33) se puede obtener

$$\mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r} \, d\vartheta = \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{s}_d, \quad (3.34)$$

o bien de (3.13)

$$\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\bar{\mathbf{y}}} + k \mathbf{s}_d. \quad (3.35)$$

Para la dinámica de los errores de seguimiento de trayectoria y de observación dada por (3.32) y (3.35) se define el estado

$$\mathbf{w} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

**Teorema 3.1.1** *Considérese una trayectoria deseada acotada en el espacio de imagen  $\mathbf{y}_d$  suficientemente alejada de cualquier singularidad del robot manipulador y con al menos primera y segunda derivadas acotadas. Entonces, para el observador (3.6)–(3.7) y la ley de control (3.16) en lazo cerrado con el sistema (3.2), siempre es posible encontrar una combinación de ganancias  $k$ ,  $k_d$ ,  $\Lambda_y$ ,  $\Lambda_z$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$  y  $\mathbf{K}_p$  tal que los errores de seguimiento y observación asociados a las ecuaciones dinámicas (3.32) y (3.35) ( $\Delta \dot{\mathbf{y}}$ ,  $\Delta \mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{z}$ ) permanezcan acotados y tiendan a cero a condición de que*

1. La ganancia  $\bar{\mathbf{K}}_p$  en (3.28) sea definida positiva
2. El robot no pasa por ninguna singularidad
3. Se satisface (2.34)

△

Nótese que en el teorema anterior se propone elegir  $\mathbf{y}_d$  suficientemente alejada de cualquier singularidad para garantizar que  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  exista, lo que sería cierto siempre que la respuesta transitoria del error de seguimiento no sea demasiado abrupta. Para ello se requiere una apropiada sintonización de ganancias. Adicionalmente, no es difícil satisfacer las condiciones de la Observación 2.1.4. Por otro lado, la demostración del Teorema 3.1.1 es completamente similar a las presentadas en [4] y [6]. Lo único que se requiere es suponer que  $\bar{\mathbf{K}}_p$  es definida positiva, por lo que en el Apéndice C se proporciona una discusión de algunas condiciones suficientes para ello.

---

## 3.2. Diseño del controlador difuso

El objetivo de control es hacer que el efector final siga una trayectoria establecida. Las entradas son obtenidas mediante el procesamiento de las imágenes adquiridas por las cámaras, y las salidas corresponden a los torques aplicados a cada una de las articulaciones. El procedimiento de diseño es el siguiente:

1. Seleccionar las funciones de pertenencia para el sistema no lineal y las reglas de la planta (2.35).
2. Obtener las matrices  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  y  $\mathbf{C}_i$ .
3. Establecer un modelo de referencia o trayectoria a seguir.
4. Obtener las ganancias  $\mathbf{L}_i$ .
5. Resolver la LMI para obtener  $\mathbf{F}_i$
6. Resolver la LMI para obtener  $\mathbf{P}_i$ .
7. Resolver la LMI para obtener  $\mathbf{P}\mathbf{o}_i$ .
8. Construir el observador difuso (2.59).
9. Construir el controlador difuso (2.60).

Los siguientes estados son considerados

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ y_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) \in [x_{1_{min}}, x_{1_{max}}] = [0, 1000]$$

$$x_2(t) \in [x_{2_{min}}, x_{2_{max}}] = [-50, 50]$$

$$x_3(t) \in [x_{3_{min}}, x_{3_{max}}] = [0, 1000]$$

$$x_4(t) \in [x_{4_{min}}, x_{4_{max}}] = [-50, 50]$$

$$x_5(t) \in [x_{5_{min}}, x_{5_{max}}] = [0, 1000]$$

$$x_6(t) \in [x_{6_{min}}, x_{6_{max}}] = [-50, 50]$$

Los máximos y mínimos valores de las variables de estado son definidas con base en imágenes adquiridas.  $x_1$ ,  $x_3$  y  $x_5$  son tomadas directamente de las cámaras y  $x_2$ ,  $x_4$  y  $x_6$  son estimadas por el observador. El modelo T-S está dado por el siguiente

---

conjunto de reglas cuyas funciones de pertenencia tienen forma triangular. Las variables en las premisas son el error de seguimiento y la velocidad en coordenadas de imagen.

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_{d1} \\ y_2 - y_{d2} \\ y_3 - y_{d3} \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

donde  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$  representan la posición del efector final obtenida a través de la cámara y  $y_{d1}$ ,  $y_{d2}$  y  $y_{d3}$  representan la trayectoria deseada. Para el procedimiento de diseño es necesario representar la dinámica no lineal del robot por un modelo difuso, en este caso del tipo T-S. Para minimizar el diseño y complejidad, se emplean la menor cantidad de reglas posibles. El número de reglas ha sido seleccionado después de un proceso de simulación y descartando algunos casos que no se presentarían.

- *Regla 1* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 2* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 3* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_3 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 4* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_4 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_4 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_4 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 5* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_5 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_5 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_5 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 6* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_6 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_6 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_6 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 7* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{13}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{21}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_7 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_7 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_7 \mathbf{x}(t)$
- *Regla 8* : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{13}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_8 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_8 \mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}_8 \mathbf{x}(t)$



- 
- *Regla 9 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{13}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{32}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_9\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_9\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_9\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 10 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{31}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{10}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{10}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{10}\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 11 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{31}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{11}\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 12 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{11}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{22}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{31}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{12}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{12}\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 13 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{33}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{13}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{13}\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 14 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{33}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{14}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{14}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{14}\mathbf{x}(t)$*
  - *Regla 15 : Si  $\Delta y_1$  es  $M_{12}$  y  $\Delta y_2$  es  $M_{23}$  y  $\Delta y_3$  es  $M_{33}$   
Entonces  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{15}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{15}\mathbf{u}(t), \mathbf{y} = \mathbf{C}_{15}\mathbf{x}(t)$*

Las funciones de pertenencia se presentan en la Figura 3.1 y se ajustan según los siguientes valores:  $d_1 = -400$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 400$ ,  $d_4 = -200$ ,  $d_5 = 0$ ,  $d_6 = 200$ .

### 3.3. Resultados experimentales algoritmos en 3D

A continuación se presentan los resultados obtenidos de manera experimental con los algoritmos en 3D.

#### 3.3.1. Trayectoria generada con campo de velocidad

En esta parte se genera una trayectoria basado en campos de velocidad, la cual tiene la ventaja de no depender del tiempo. Se empleara

El experimento consiste en llevar el efector final de su posición inicial  $\mathbf{y}(0) = [y_1(0) \ y_2(0) \ y_3(0)]^T$ , obtenida directamente de las imágenes de las cámaras, a

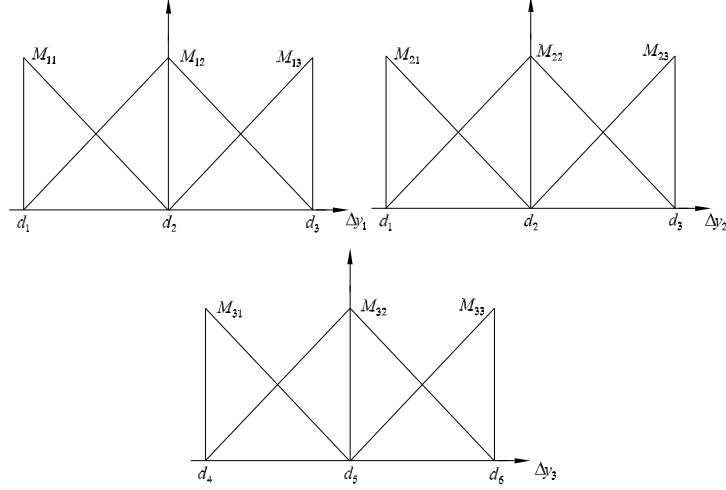


Figura 3.1: Funciones de pertenencia

una posición final arbitraria  $\mathbf{y}_f$  siguiendo de manera precisa una trayectoria suave. Para generar dicha trayectoria se propone emplear

$$\mathbf{y}_d = \int_0^t \dot{\mathbf{y}}_d d\vartheta + \mathbf{y}(0) \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_d = -\frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \epsilon} \tilde{\mathbf{y}} - k_1(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_f), \quad (3.39)$$

donde  $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_f$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $k_0 = 0.1$  y  $k_1 = 2$ . Los parámetros empleados en el experimento son  $k_d = 400$ ,  $k = 0.1$ ,  $\mathbf{K}_p = 0.15\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_z = 50\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_y = 30\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}_\gamma = 0.1\mathbf{I}$  y  $\mathbf{K}_\beta = 5.2\mathbf{I}$ .

### 3.3.2. Algoritmo PID con modo deslizante

En las Figuras 3.2, 3.3 y 3.4 se muestran las trayectorias generadas en cada una de las coordenadas.

Las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 presentan los respectivos errores de seguimiento. Nótese la rápida convergencia a cero para las coordenadas  $y_2$  y  $y_3$ , mientras que el error  $\Delta y_1$  no es mayor a 5 [píxeles] después de un segundo. Es importante resaltar que la trayectoria deseada generada por (3.38) es en realidad continua, mientras que los píxeles representan números enteros. Si se lleva a cabo un redondeo en las distintas gráficas los resultados son todavía mejores, pero se ha preferido mostrar los datos sin ninguna manipulación extra.

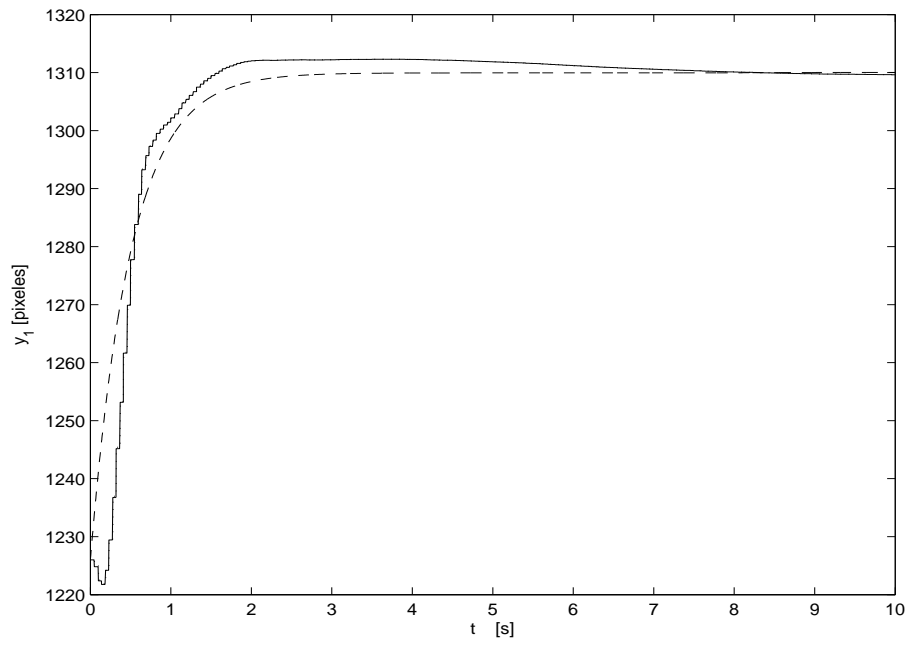


Figura 3.2: Seguimiento de trayectoria para la primera coordenada.  $y_1$  (—),  $y_{d1}$  (- - -) y  $\hat{y}_1$  (···). PID con modo deslizante

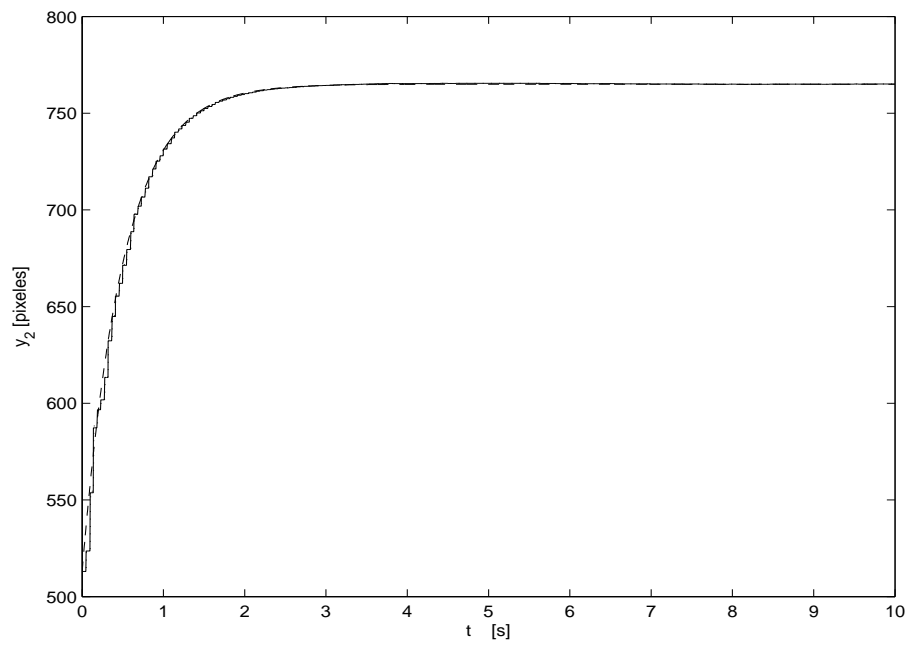


Figura 3.3: Seguimiento de trayectoria para la segunda coordenada.  $y_2$  (—),  $y_{d2}$  (- - -) y  $\hat{y}_2$  (···). PID con modo deslizante

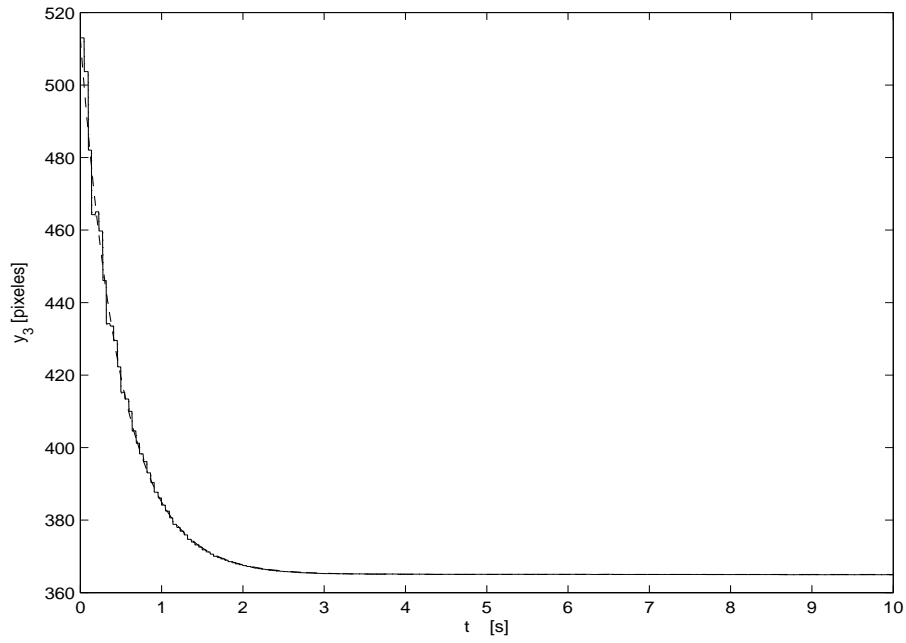


Figura 3.4: Seguimiento de trayectoria para la tercera coordenada.  $y_3$  (—),  $y_{d3}$  (- - -) y  $\hat{y}_3$  (···). PID con modo deslizante

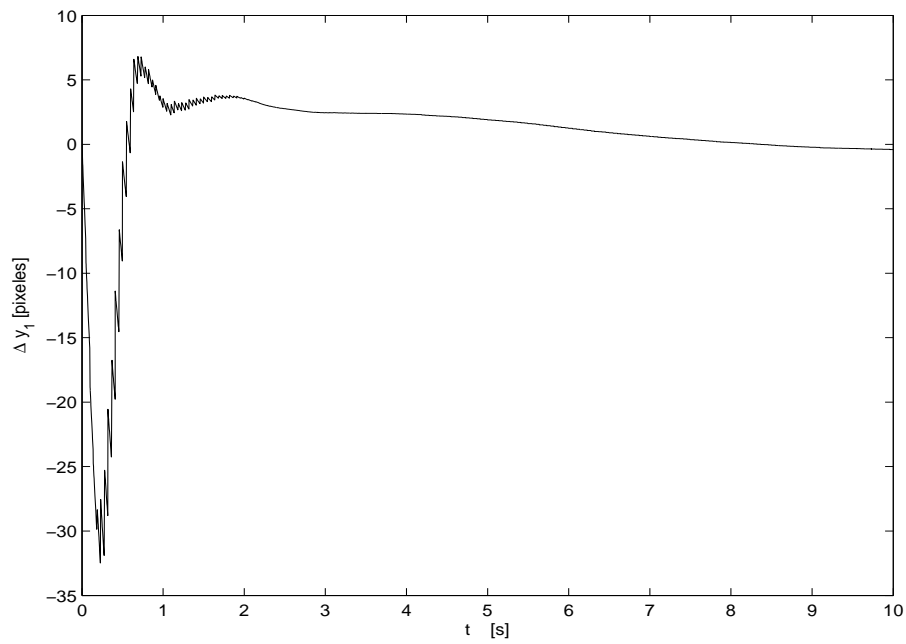


Figura 3.5: Error de seguimiento de trayectoria  $\Delta y_1$ . PID con modo deslizante

En las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10 se aprecian los errores de observación. A pesar de que la respuesta transitoria es sumamente oscilatoria durante los primeros dos

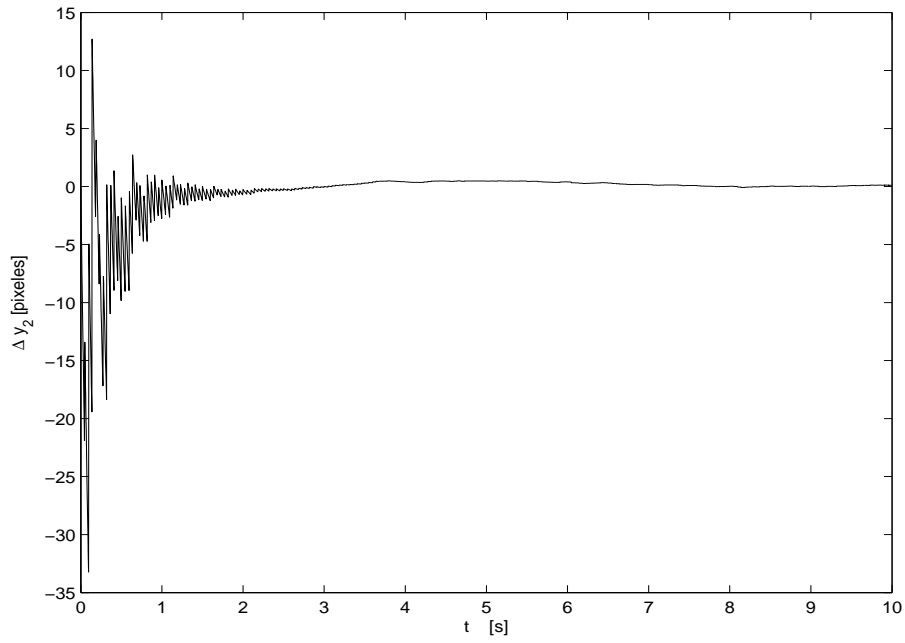


Figura 3.6: Error de seguimiento de trayectoria  $\Delta y_2$ .PID con modo deslizante

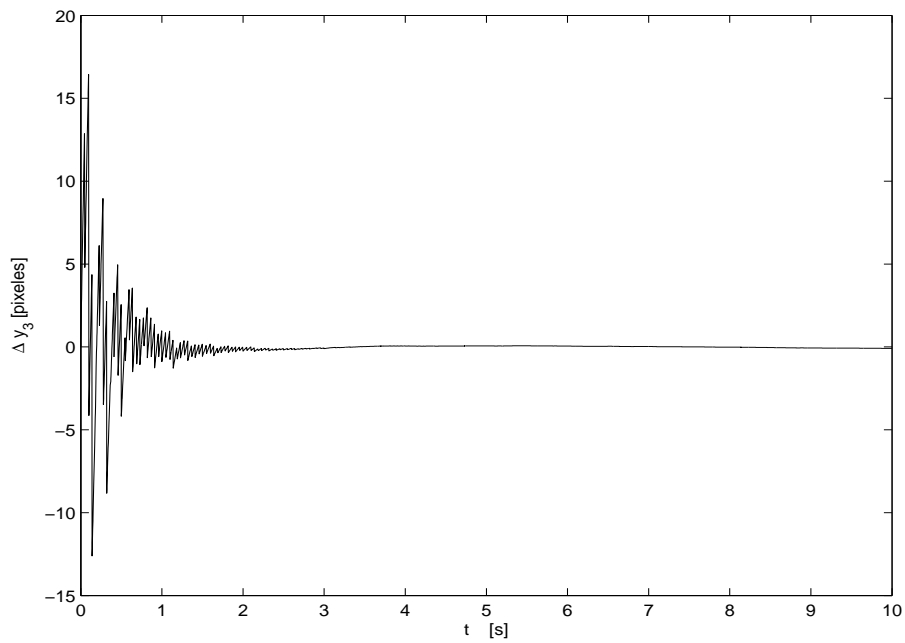


Figura 3.7: Error de seguimiento de trayectoria  $\Delta y_3$ . PID con modo deslizante

segundos, el error se mantiene en cero el resto del experimento. Esto muestra un excelente desempeño del observador.

Claramente el desempeño total del sistema controlador-observador ha sido

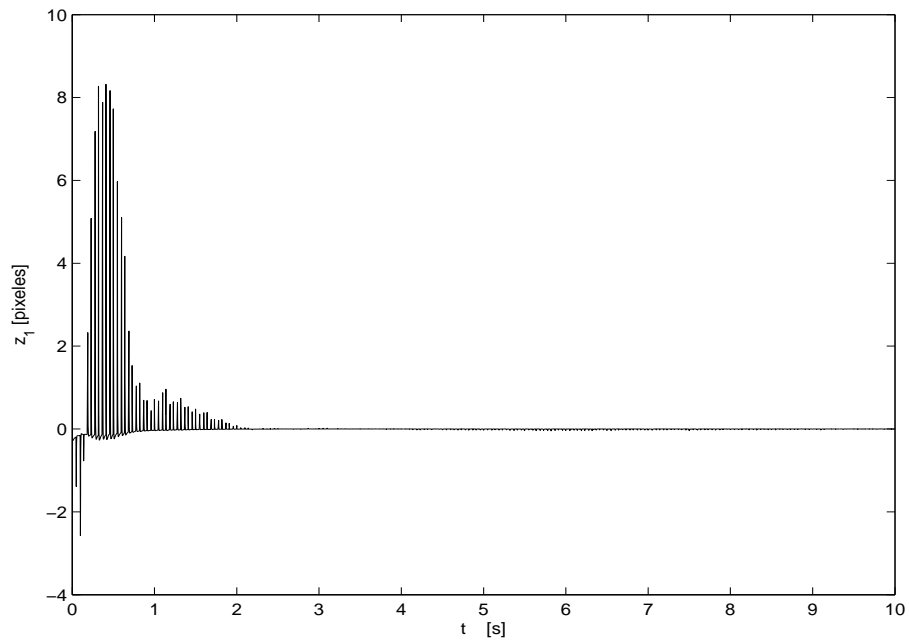


Figura 3.8: Error de observación  $z_1$ . PID con modo deslizante

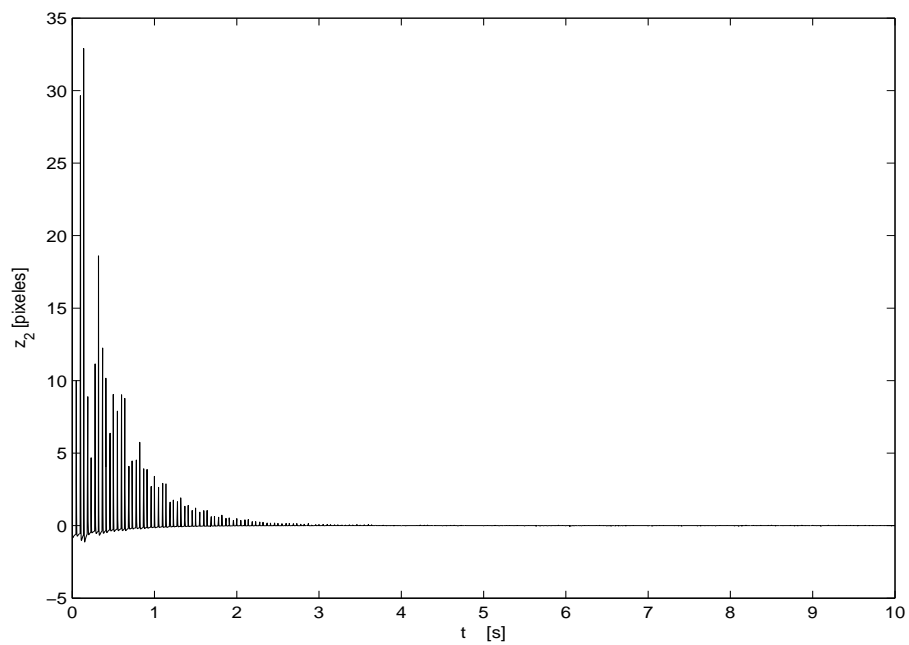


Figura 3.9: Error de observación  $z_2$ . PID con modo deslizante

muy bueno, excepto por la coordenada  $y_1$ . Para entender mejor la causa de esto, en las Figuras 3.11, 3.12 y 3.13 se muestran los voltajes generados por el controlador. Aunque no son demasiado grandes y los motores del robot aceptan una entrada de

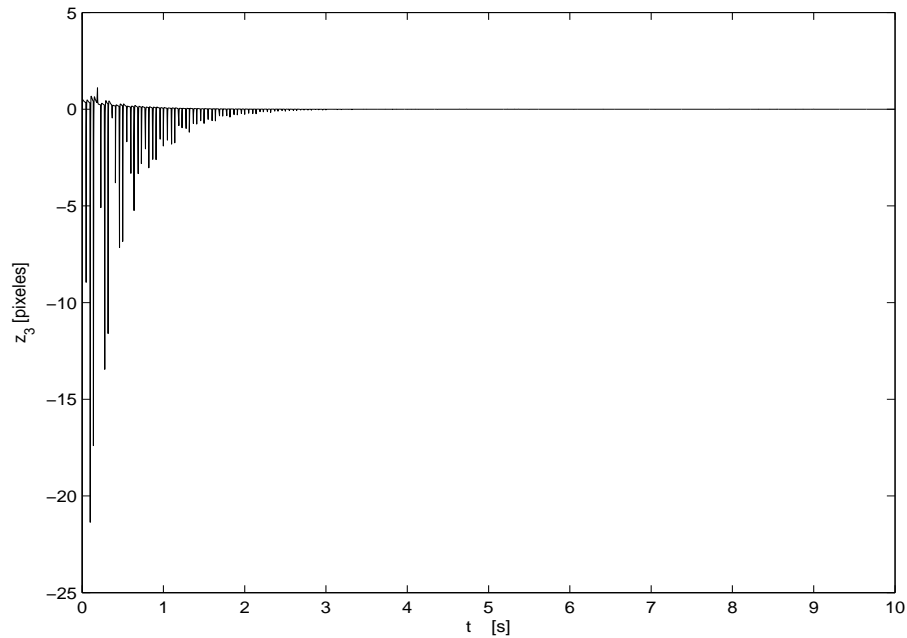


Figura 3.10: Error de observación  $z_3$ . PID con modo deslizante

$\pm 10V$ , por motivos de seguridad la salida se satura siempre a un máximo de  $\pm 3V$ . Esto evita que el manipulador lleve a cabo movimientos demasiados bruscos que puedan dañarlo, aunque tiene el efecto secundario de no poder seguir trayectorias demasiado rápidas.

### 3.3.3. Algoritmo Difuso

Las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16 muestran las trayectorias deseadas y reales en coordenadas de imagen con el algoritmo difuso. Con los experimentos se ha demostrado que el controlador lleva el efector final a la posición deseada en coordenadas de imagen, garantizando la convergencia a cero de los errores de seguimiento y de observación. Las tres coordenadas convergen a su valor deseado en poco tiempo. El seguimiento para  $y_3$  no es el mejor. Esto se debe probablemente a la selección de los valores de las funciones de pertenencia, si los conjuntos difusos se hacen mas pequeños esto mejorara aunque seria necesario utilizar mas reglas. A pesar de esto el controlador garantiza que se alcanza el punto final deseado. Los voltajes en cada uno de los motores se muestran en la Figura 3.17. E

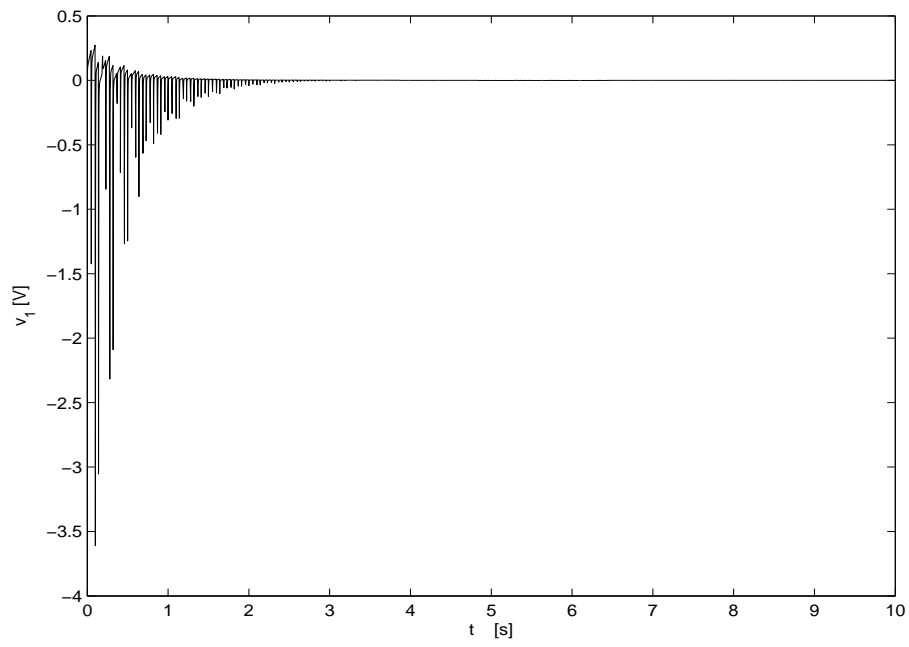


Figura 3.11: Voltaje de salida  $v_1$ . PID con modo deslizante

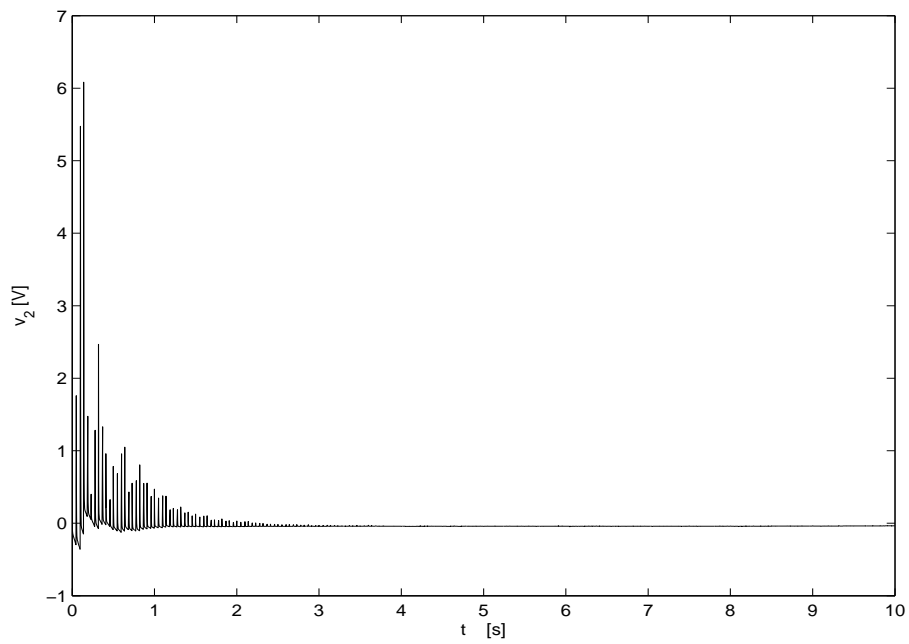


Figura 3.12: Voltaje de salida  $v_2$ . PID con modo deslizante



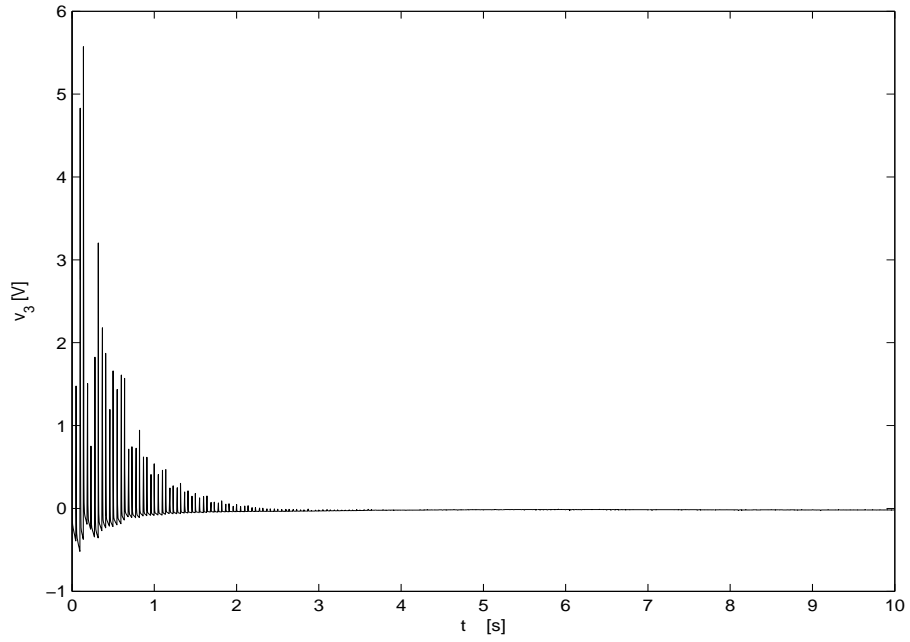


Figura 3.13: Voltaje de salida  $v_3$ . PID con modo deslizante

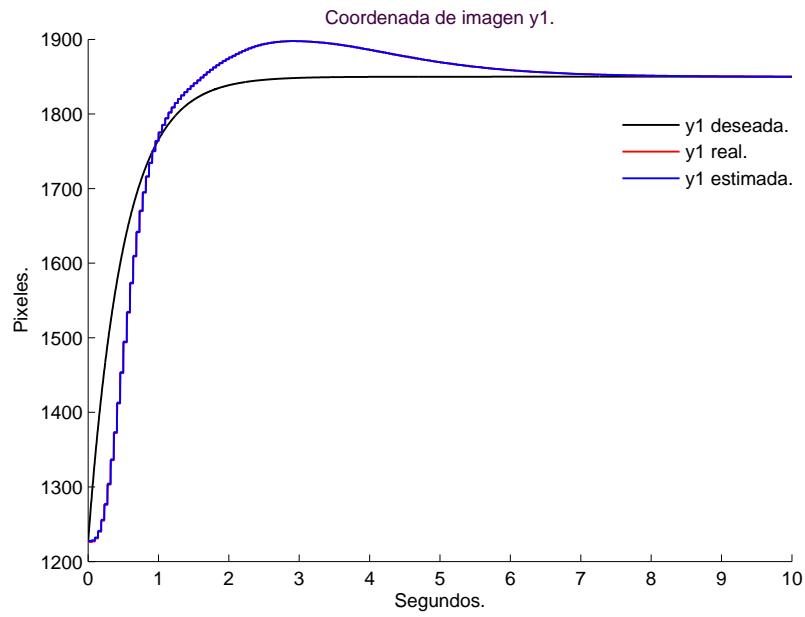


Figura 3.14: Trayectoria de la coordenada  $y_1$ . Algoritmo Difuso

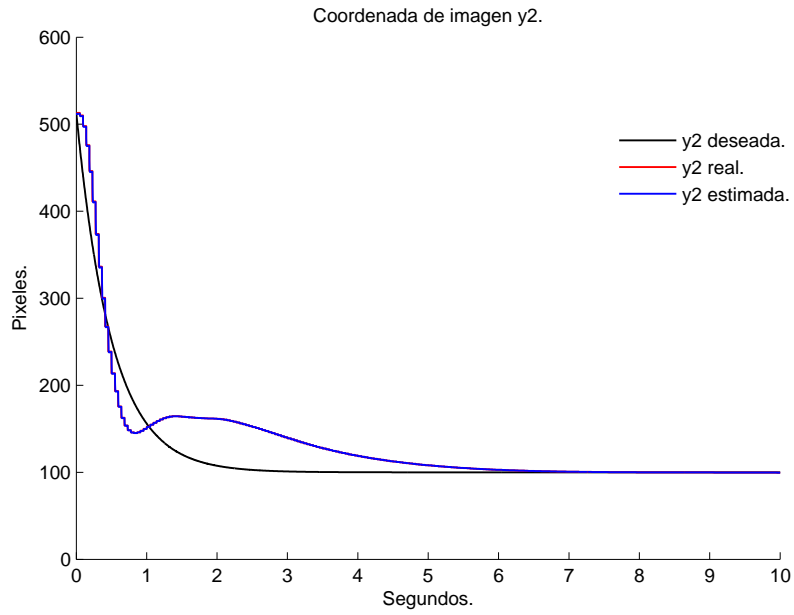


Figura 3.15: Trayectoria de la coordenada  $y_2$ . Algoritmo Difuso

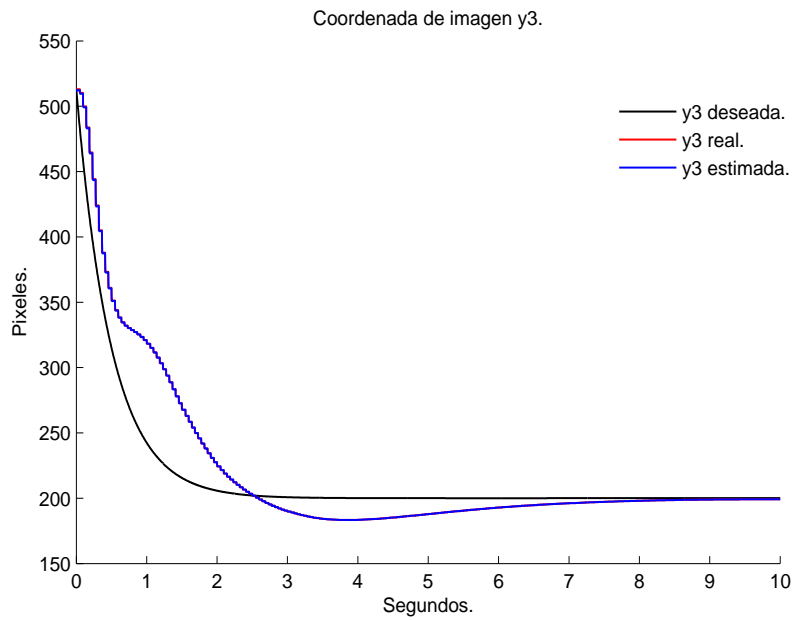


Figura 3.16: Trayectoria de la coordenada  $y_3$ . Algoritmo Difuso

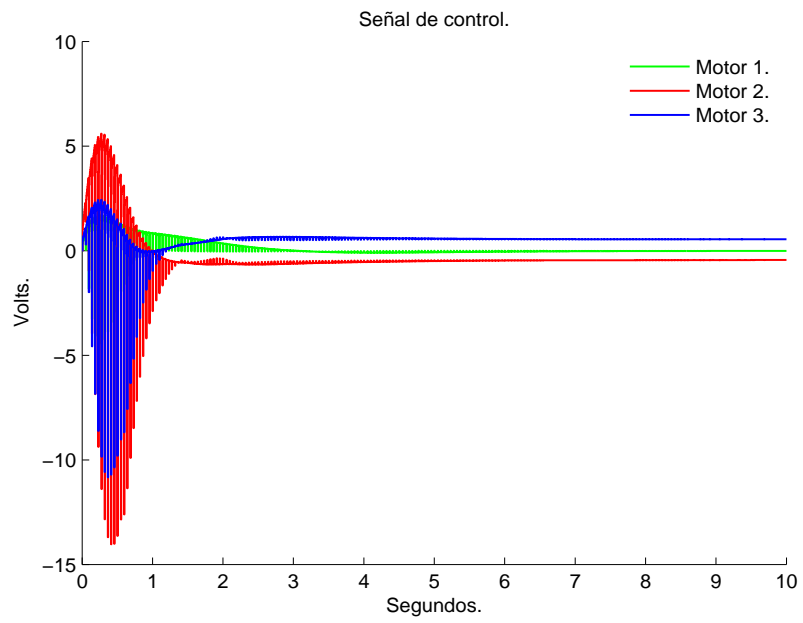


Figura 3.17: Voltajes en cada una de las articulaciones. Algoritmo Difuso

# Capítulo 4

## Comparación de los algoritmos propuestos con algunas técnicas conocidas en 2D

Dadas las características de los algoritmos de control propuestos en el Capítulo 3, no resulta sencillo encontrar algoritmos de comparación por diversas razones, *e.g.* varios esquemas requieren del modelo completo del sistema, de mediciones de todas las variables y/o de calibración de las cámaras. Por ello se decidió llevar a cabo una comparación con técnicas en 2D, lo que simplemente constituye un caso particular por el cual los esquemas propuestos siguen siendo válidos. Se eligieron dos algoritmos de comparación.

### 4.1. Algoritmo Comparativo 1

En [53] se desarrolla un controlador adaptable con un modo deslizante de segundo orden y retroalimentación visual bajo parámetros desconocidos. Las dinámicas del robot son linealmente parametrizables en términos de un regresor conocido  $\mathbf{Y}_b = \mathbf{Y}_b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p_1}$  y un vector desconocido pero constante  $\boldsymbol{\theta}_b$  de los parámetros del robot como se muestra a continuación

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}_b\boldsymbol{\theta}_b. \quad (4.1)$$

Por otro lado, la variable de salida del sistema es la posición  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  en función de las coordenadas de imagen, *i. e.* la posición del punto objetivo en la pantalla del computador. Para el caso particular de movimiento en un plano se puede emplear sólo la Cámara 1. De acuerdo con (2.8) se obtiene

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (4.2)$$

---

donde para el plano  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{f}_k(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el Jacobiana del robot para el plano, que satisface la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.3)$$

Además se considera por simplicidad

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

y

$$\alpha_\lambda = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{O_{C_{12}} - \lambda_1} \quad (4.5)$$

Nótese que  $\alpha_\lambda$  es un caso particular de  $\alpha_{\lambda_1}$  en (2.9) dado que  $y \equiv O$  y no varía porque el robot no abandona el plano.

Siempre que el robot no esté en una singularidad, se tiene también la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_R. \quad (4.6)$$

La ley de control está dada por <sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{y}}_r = \dot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y(\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son matrices diagonales definidas positivas y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2$ .  $\mathbf{y}_d$  and  $\dot{\mathbf{y}}$  denotan la posición deseada y la velocidad del efector-final con respecto al marco de la imagen, respectivamente, y

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-kt} \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta))\} d\vartheta, \quad (4.9)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$ ,  $k$  es una constante positiva,  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \ \cdots \ \text{sign}(s_{1n})]^T$  con  $s_{1i}$  elementos de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alternativamente a (4.9) se puede usar

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1). \quad (4.10)$$

La derivada de (4.7) se convierte en

$$\ddot{\mathbf{y}}_r = \ddot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{\Lambda}_y(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d) + \dot{\mathbf{s}}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.11)$$

---

<sup>1</sup>Las siguientes definiciones son similares a las del algoritmo de la sección 3.1, pero sin observador, *i.e.* sin valor estimado para  $\mathbf{y}$

---

Una referencia nominal en el espacio articular se define como

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi \dot{\mathbf{y}}_r. \quad (4.12)$$

Es posible calcular ahora el error en el espacio articular

$$\mathbf{s}_q \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi^{-1} \mathbf{s}_y \quad (4.13)$$

$$\mathbf{s}_y \triangleq \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r. \quad (4.14)$$

Se observa que la correspondiente  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  es calculada por

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi^{-1} \ddot{\mathbf{y}}_r + \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\phi^{-1} \dot{\mathbf{y}}_r, \quad (4.15)$$

de tal forma que se puede definir

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}_b \boldsymbol{\theta}_b. \quad (4.16)$$

Finalmente, las leyes de control y adaptación están dadas por

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_d \mathbf{s}_q + \mathbf{Y}_b \hat{\boldsymbol{\theta}}_b \quad (4.17)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_b = -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Y}_b^T \mathbf{s}_q, \quad (4.18)$$

respectivamente, donde  $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}$  and  $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}$ .

$\mathbf{K}_d = \text{diag}\{0.20 \ 0.20\}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{0.003 \ 0.003\}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_y = \text{diag}\{0.62 \ 0.62\}$ ,  $\mathbf{K}_\gamma = \text{diag}\{6.2 \ 6.2\}$ ,  $\mathbf{K}_\beta = \text{diag}\{12 \ 12\}$ .

## 4.2. Algoritmo Comparativo 2

El segundo algoritmo utilizado para la comparación es el que se presenta en [84]. Es un controlador adaptable calibrado para compensar los parámetros inciertos de la cámara y asegurar el seguimiento de una trayectoria. Se define

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Según (4.19) la ley de control está dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{Y}_n \hat{\boldsymbol{\theta}}_n + \mathbf{K}_n \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}_n \hat{\boldsymbol{\theta}}_n + \mathbf{K}_n \boldsymbol{\eta}, \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{K}^n \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\boldsymbol{\eta}$  es una variable auxiliar definida como

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_R, \quad (4.21)$$

con  $\mathbf{v}$  dado en (4.24).  $\mathbf{Y}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^{2 \times p}$  es un regresor y  $\boldsymbol{\theta}_n \in \mathbb{R}^p$  es el vector que contiene tanto la información del modelo del robot como los parámetros de la cámara, *i.e.* se satisface

$$\mathbf{Y}_n \boldsymbol{\theta}_n = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{v} + \bar{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{A})} e_1 \\ \left( \frac{A_3}{A_4} - \frac{A_2}{A_4 \det(\mathbf{A})} \right) e_1 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

donde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha \lambda} \mathbf{R}_\phi^\top = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \hat{\phi}_1 + k_1 e_1 \\ \mathbf{W}_2 \hat{\phi}_2 + k_2 e_2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{W}_1 = [\dot{y}_{d1} \quad \dot{y}_{d1} - v_2] \quad (4.25)$$

$$\mathbf{W}_1 = [\dot{y}_{d1} \quad \dot{y}_{d1}] \quad (4.26)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{W}_1^\top e_1 \quad (4.27)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_2 = \boldsymbol{\Gamma}_1 \mathbf{W}_2^\top e_2 \quad (4.28)$$

$\boldsymbol{\Gamma}_1$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_2$  son matrices definidas positivas de dimensiones apropiadas. El estimado  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \in \mathbb{R}^p$  es adaptado de acuerdo a

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_n = \boldsymbol{\Gamma}_n \mathbf{Y}_n^\top \boldsymbol{\eta}, \quad (4.29)$$

donde  $\boldsymbol{\Gamma}_n \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es una matriz diagonal definida positiva. Las diferentes ganancias se han establecido como

$$\mathbf{K}_n = \text{diag}\{1.02 \quad 1.72\},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \text{diag}\{0.002 \quad 0.002 \quad 0.002\},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = \text{diag}\{0.002 \quad 0.020\},$$

$$k_1 = 0.437, \quad k_2 = 0.515, \text{ y}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \text{diag}\{0.0014 \quad 0.0002 \quad 0.0012 \quad 0.0002 \quad 0.0008 \quad 0.0006 \quad 0.0014\}.$$

### 4.3. Resultados experimentales

Se llevó a cabo un experimento para todos los esquemas de control que se considera suficientemente representativo con el fin de comprobar el comportamiento de seguimiento. Consiste en seguir un círculo en el plano  $y_1 - y_2$  descrito por

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{bmatrix} 60 \times \sin(0.2t) + 650 \\ -60 \times \cos(0.2t) + 450 \end{bmatrix} \text{ pixel} \quad (4.30)$$

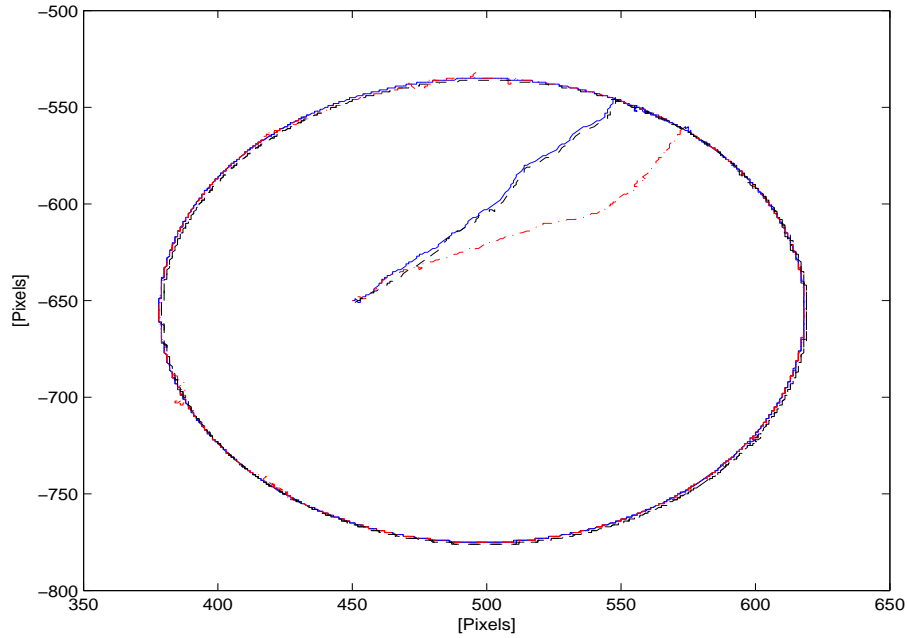


Figura 4.1: Trayectoria en el plano de imagen  $(y_1, y_2)$ . Trayectoria deseada ( $\dots$ ). Algoritmo Propuesto Difuso ( $\text{—}$ ). Algoritmo Comparativo 1 ( $\text{--}\cdot\text{--}$ ). Algoritmo Comparativo 2 ( $\text{- - -}$ ).

En la Figura 4.1 el círculo deseado se muestra junto con los resultados de los algoritmos comparativos *vs* el algoritmo difuso propuesto. Vale la pena recordar que en el plano de imagen  $y_1 - y_2$  origen  $(0, 0)$  está en la esquina superior izquierda. Para tener una mejor visión del rendimiento de cada algoritmo, las condiciones iniciales son similares en todos los casos. Se puede apreciar que la trayectoria deseada es correctamente seguida en todos los casos. Los errores de seguimiento y del observador para los algoritmos comparativos se muestran en las Figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 respectivamente.

La ventaja de los modelos difusos T-S es su potente capacidad para representar una relación compleja no lineal a pesar de un menor número de reglas IF-THEN, que las del modelo Mamdani. El diseño es simple y no requiere demasiados cálculos matemáticos. Contrario a los enfoques adaptables, no se requiere calcular un regresor y por lo tanto no es necesario ningún modelo del robot. Por esta razón la programación es muy directa. Obsérvese que esto hace que sea también menos sensible cuando la dinámica de los motores no es considerada. Si se desea por alguna razón calcular algunos parámetros del sistema, entonces deben ser preferidas las técnicas de adaptación. Como es bien sabido, la excitación persistente es necesaria para la estimación de parámetros precisos que difícilmente pueden lograrse para la trayectoria circular elegida en este trabajo.

En la Figura 4.7 se muestran los resultados obtenidos en cuanto a trayectoria



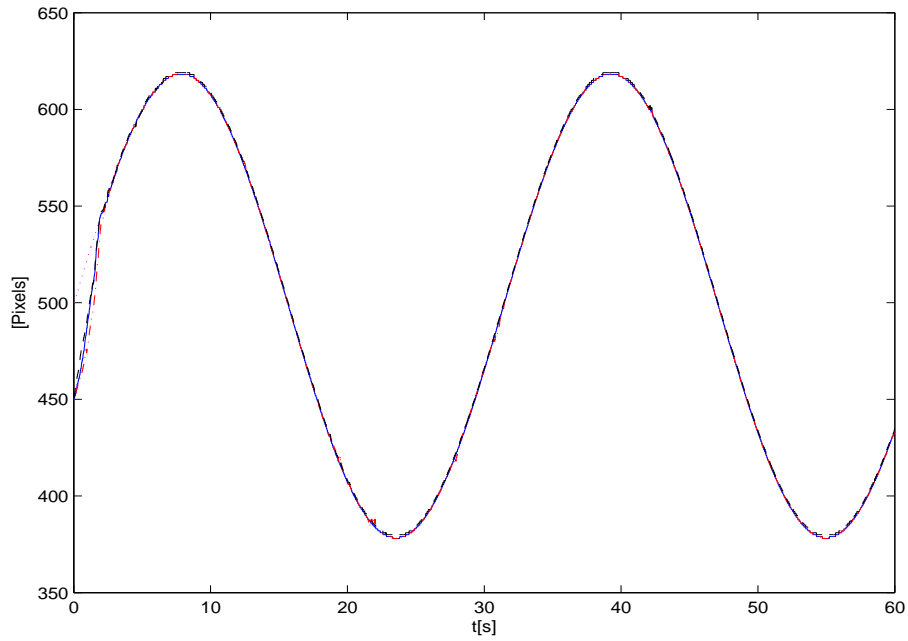


Figura 4.2: Coordenada  $y_1$ . Trayectoria deseada ( $\cdots$ ). Algoritmo Propuesto Difuso ( $\text{—}$ ). Algoritmo Comparativo 1 ( $\text{--}\cdot\text{--}$ ). Algoritmo Comparativo 2 ( $\text{--}\text{--}$ ).

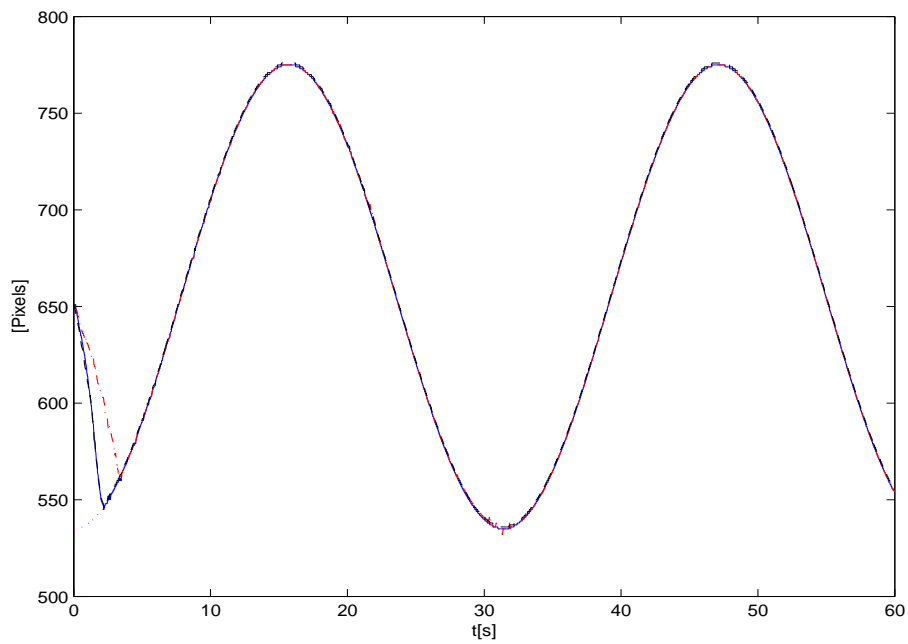


Figura 4.3: Coordenada  $y_2$ . Trayectoria deseada ( $\cdots$ ). Algoritmo Propuesto Difuso ( $\text{—}$ ). Algoritmo Comparativo 1 ( $\text{--}\cdot\text{--}$ ). Algoritmo Comparativo 2 ( $\text{--}\text{--}$ ).

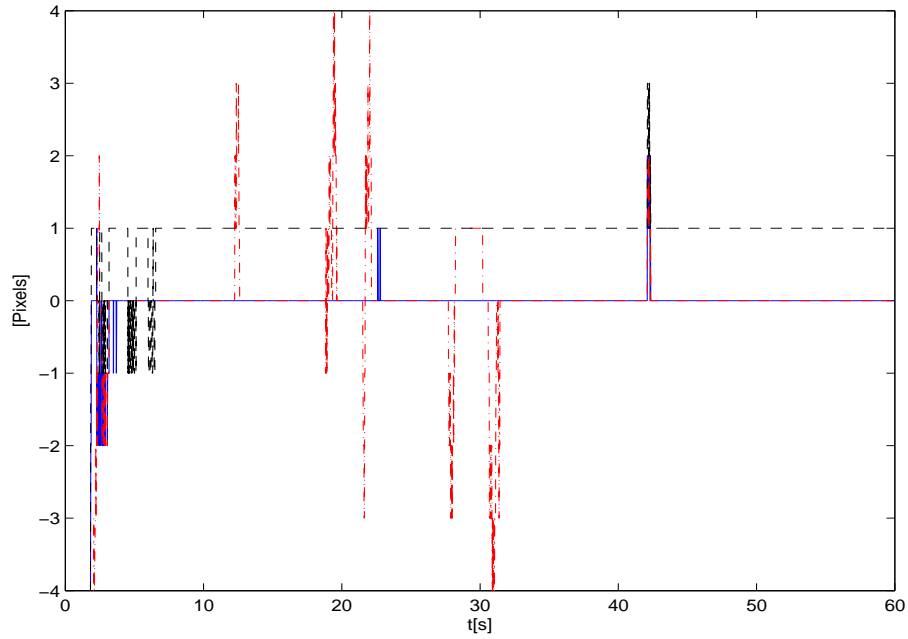


Figura 4.4: Error de seguimiento  $\Delta y_1$ . Algoritmo Propuesto Difuso (—). Algoritmo Comparativo 1 (- · -). Algoritmo Comparativo 2 (- - -).

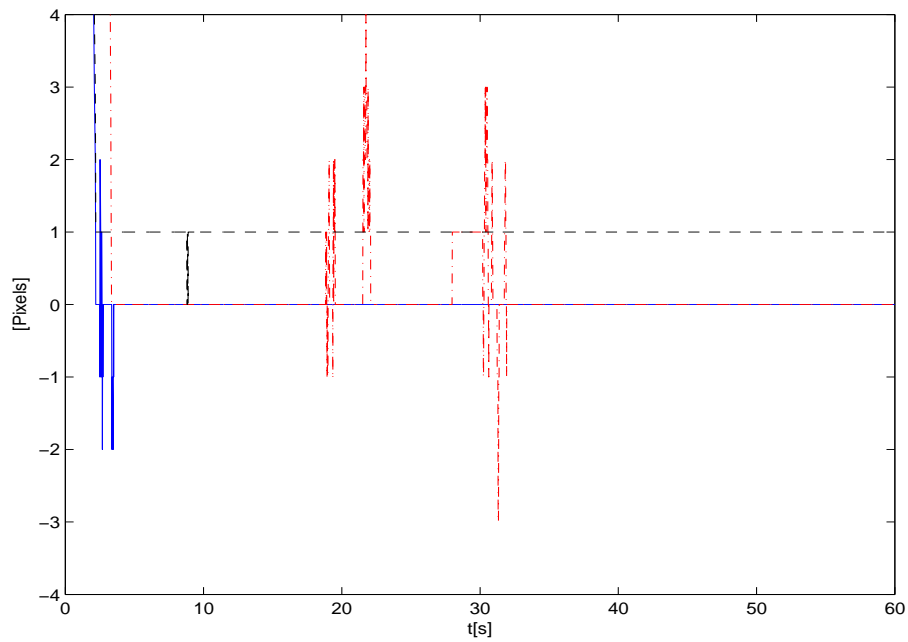


Figura 4.5: Error de seguimiento  $\Delta y_2$ . Algoritmo Propuesto Difuso (—). Algoritmo Comparativo 1 (- · -). Algoritmo Comparativo 2 (- - -).

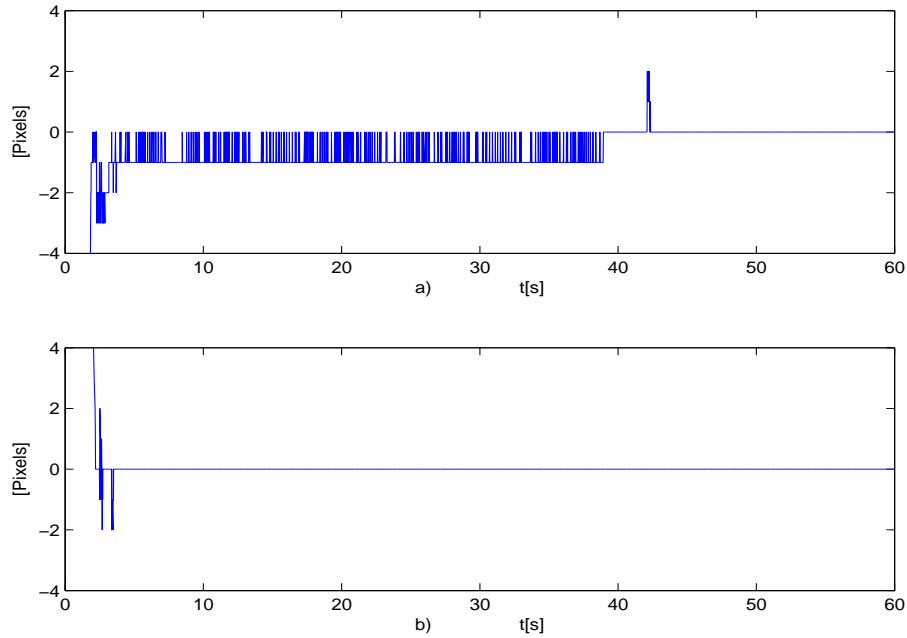


Figura 4.6: Error de Observación para el algoritmo propuesto. a)  $\tilde{y}_1$ . b)  $\tilde{y}_2$ .

para el algoritmo PID con modo deslizante comparado con los dos algoritmos previamente mencionados. Los resultados son satisfactorios en todos los casos, sin embargo la propuesta presentada tiene un mejor comportamiento.

Además de la comparación con dos diferentes algoritmos, se realizaron algunas pruebas con el robot LAW3 de *SCHUNK* el cual esta disponible en Laboratorio de Controle e Automação, Engenharia de Aplicação e Desenvolvimento de la Universidad Federal de Rio de Janeiro. En la Figura 4.8 se presentan los resultados obtenidos. El objetivo de esta prueba era verificar la universalidad de los algoritmos, su utilizo para este fin el controlador difuso del tipo T-S.

## 4.4. Discusión

Se observa que los algoritmos propuestos tienen un mejor desempeño además de no requerir del modelo del sistema o de mediciones de velocidad. Para tener una visión más objetiva se calcula en cada caso la raíz media cuadrática del error (RMSE) como

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (4.31)$$

donde  $i$  es el número de la muestra,  $e_i$  es el error asociado a  $i$  y  $n$  es el número total de muestras.

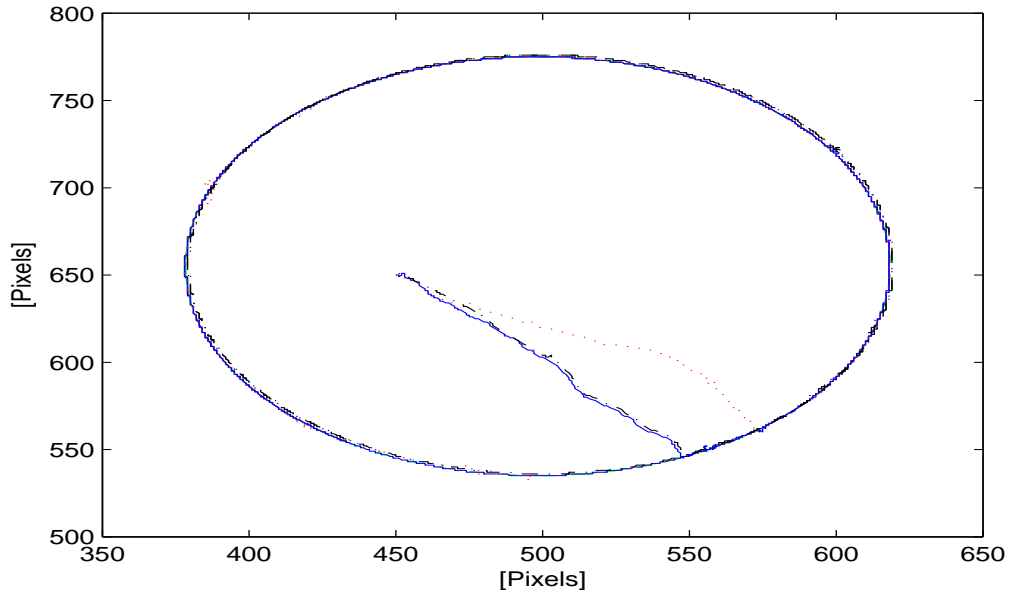


Figura 4.7: Trayectoria en el plano de imagen  $(y_1, y_2)$ . Trayectoria deseada ( $\cdots$ ). Algoritmo PID con modo deslizante ( $\text{—}$ ). Algoritmo Comparativo 1 ( $\text{-}\cdot\text{-}$ ). Algoritmo Comparativo 2 ( $\text{-}\text{-}$ ).

En las Tablas 4.1 y 4.2 se puede apreciar de nuevo que el desempeño de todos los esquemas es similar. Se puede concluir que esto depende del objetivo particular del experimento.

Error	Algoritmo Propuesto PID+DES	Algoritmo Propuesto Difuso
$\Delta y_1$	4.3123	3.9876
$\Delta y_2$	10.7642	8.7653

**Tabla 4.1:** Raíz media cuadrática del error [PIXELS].

Error	Algoritmo Comparativo 1	Algoritmo Comparativo 2
$\Delta y_1$	5.7234	5.9960
$\Delta y_2$	15.1442	14.1335

**Tabla 4.2:** Raíz media cuadrática del error [PIXELS].

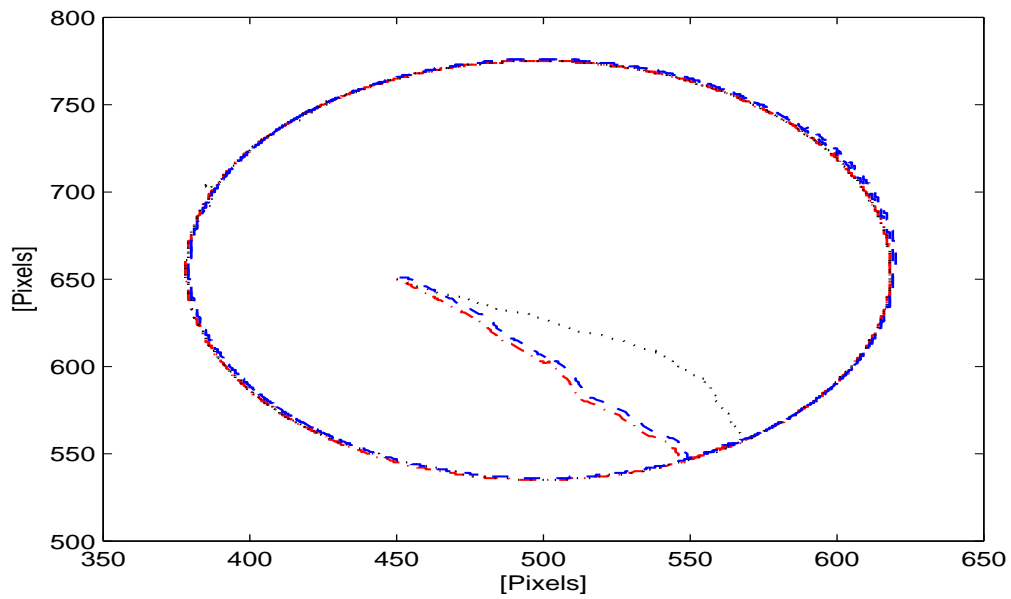


Figura 4.8: Trayectoria en el plano de imagen  $(y_1, y_2)$ . Trayectoria deseada ( $\cdots$ ). Algoritmo difuso ( $\text{—}$ ). Algoritmo Comparativo 1 ( $\text{-}\cdot\text{-}$ ). Algoritmo Comparativo 2 ( $\text{-}\text{-}\text{-}$ ).

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se introducen leyes de control servovisual en 3D con el fin de llegar a un punto establecido o para seguimiento de trayectorias de robots manipuladores en el espacio de imagen. Los algoritmos no requieren tener conocimiento de los parámetros intrínsecos o extrínsecos del sistema de visión, con excepción de un ángulo de rotación. El modelo dinámico es sólo utilizado con fines de análisis para mostrar la estabilidad de los controladores de tipo difuso propuestos. Para lograr el escenario 3D se utilizan dos cámaras colocadas perpendicularmente una de la otra y cuyos ejes coinciden con los del sistema inercial de la base del manipulador. El esquema de control se implementa directamente en coordenadas de imagen y se diseña un observador para estimar sus velocidades. Para probar la teoría desarrollada se llevaron a cabo experimentos en dos robots manipuladores diferentes.

Como trabajo futuro se puede analizar el caso en que los ejes de las cámaras no coincidan con los del sistema de la base del manipulador.

Se presenta un control difuso servovisual en 3D para robots manipuladores de 3 grados de libertad, junto con el diseño de un observador también difuso para estimar la velocidad de las coordenadas de imagen. El estudio de observadores difusos ha sido limitado hasta el momento, lo que hace que el algoritmo propuesto represente un avance significativo en el área. El modelo Takagi-Sugeno permite describir de manera correcta la dinámica del robot, lo que es esencial para el diseño del controlador. Por medio de experimentos se muestra el buen desempeño de la estrategia propuesta. El seguimiento de trayectoria puede mejorarse con la implementación de más reglas, aunque esto implica mayor costo computacional.

El algoritmo PID con término deslizante presentó un adecuado funcionamiento, es un aporte significativo no requerir el modelo dinámico ni calibración de las cámaras. El algoritmo es robusto ante pequeñas variaciones en el ángulo de orientación de la cámara con respecto al plano de trabajo del robot.

---

## 5.1. Contribuciones

Durante la realización de este proyecto fueron publicados los siguientes artículos:

### *Artículos en revistas*

- Bueno Maximiliano and Arteaga Marco. *Uncalibrated 2D Tracking Visual Servoing: Adaptive vs. non Adaptive Techniques*. Aceptado para publicación en Robotica.
- Arteaga Marco, Bueno Maximiliano y Leyva Adrian. *Control Servovisual para Robots Manipuladores en 3D sin Identificación Paramétrica*. Aceptado para publicación en Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial-RIAI.
- Bueno Maximiliano y Arteaga Marco *Modelado de Sistemas de Vision en 2D Y 3D: Un enfoque hacia el control de Robots Manipuladores*. Aceptado para publicación en revista Tecnura. Universidad Distrital de Colombia.
- Bueno Maximiliano and Arteaga Marco *Fuzzy vs Nonfuzzy in 2D Visual Servoing for Robot Manipulators*. Sometido en International Journal of Advanced Robotic Systems.

### *Artículos en congresos*

- Bueno Maximiliano and Arteaga Marco. *Fuzzy Logic Control of a Robot Manipulator in 3D based on Visual Servoing*. 18th IEEE IFAC World Congress. Milán, Italia. Agosto 28-Septiembre 2, 2011.
- Bueno Maximiliano, Arteaga Marco y Giles Alejandro. *Control servovisual para un robot planar empleando un observador difuso*. AMCA. Congreso Anual 2011 de la Asociación de México de Control Automático. Saltillo, México, Octubre 5-7. Paginas 87-92.
- Bueno Maximiliano and Arteaga Marco. *Fuzzy Control for 2D Visual Servoing*. AMCA. Congreso Anual 2010 de la Asociación de México de Control Automático. Puerto Vallarta, México.
- Arteaga Marco, Bueno Maximiliano and Espinoza Arturo. *A Simple Approach for 2D Visual Servoing*. 18th IEEE International Conference on Control Applications Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control Saint Petersburg, Russia, July 8-10, 2009.
- Rivera Juan, Bueno Maximiliano and Arteaga Marco. *Adaptive Control for 2D Visual Servoing*. AMCA. Congreso Anual 2009 de la Asociación de México de Control Automático. Zacatecas, México.

# Apéndice A – Bancos de Pruebas

Para obtener los resultados experimentales presentados en esta tesis fue necesario realizar la puesta a punto de dos plataformas con sus respectivos sistemas de vision y adquisición. Se utilizo el robot A465 of *CRS Robotics*. Este tiene seis grados de libertad, pero para las pruebas en 2D y 3D se utilizaron solo dos y tres articulaciones respectivamente.

Para las pruebas se utilizó la configuración mostrada en la Figura A.1. Los algoritmos en 2D fueron también probados en el robot LAW3 de *SCHUNK* el cual esta disponible en Laboratorio de Controle e Automação, Engenharia de Aplicação e Desenvolvimento de la Universidad Federal de Rio de Janeiro. En la Figura A.2 se muestra esta plataforma.



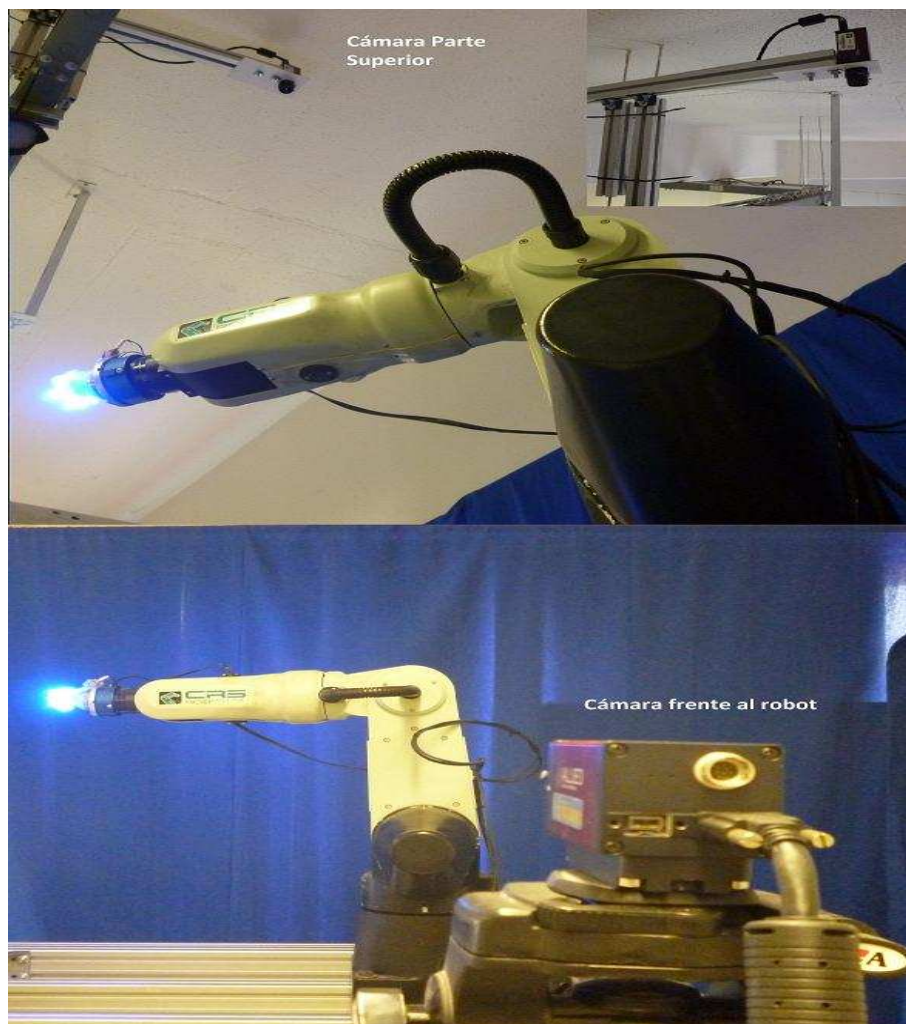


Figura A.1: Robot *A465* de *CRS Robotics* con sistema de visión-3D.

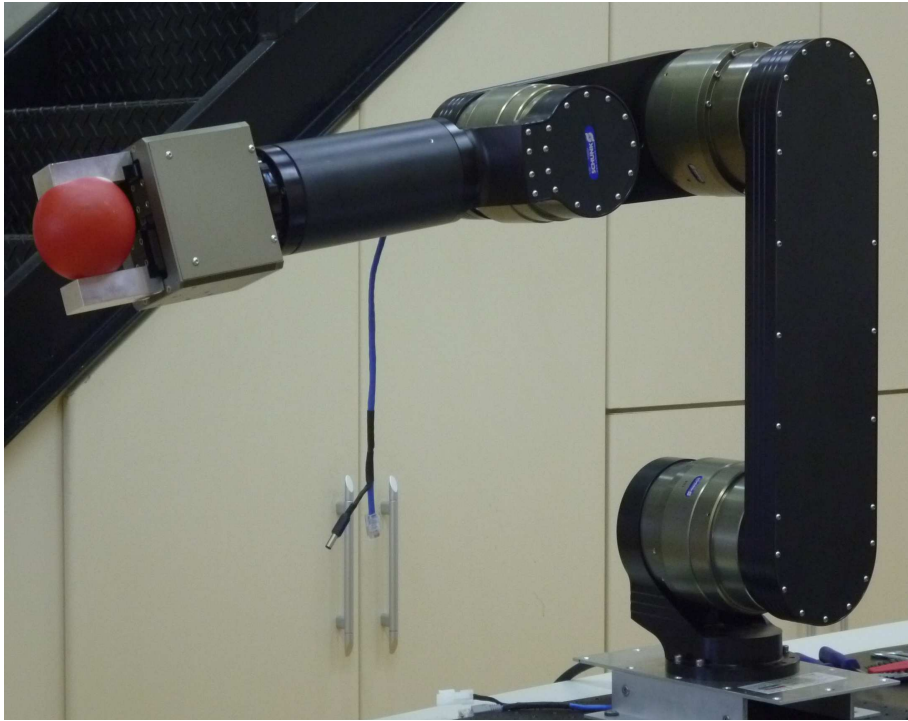


Figura A.2: Robot LAW3 de *SCHUNK*

# Apéndice B – Demostración del Teorema 3.1.1

En este apéndice se presenta la demostración del Teorema 3.1.1. Como se mencionó en la introducción, se trata de una modificación del algoritmo presentado en [54] con aplicación al control servo visual, por lo que para el trabajo actual se presentaron los temas principales de la demostración, mientras que el lector interesado puede ver los detalles en la referencia. Considere el siguiente teorema y lema.

**Teorema B.0.1** [32] y [54] *Sea  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  el dominio que contiene el origen y  $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable continua tal que*

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{\omega}\|) \leq V(t, \boldsymbol{\omega}) \leq \alpha_2(\|\boldsymbol{\omega}\|) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\omega}} \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\omega}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\boldsymbol{\omega}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{B.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\boldsymbol{\omega})$  es una función continua definida positiva y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua definida por tramos en  $t$  y es localmente Lipschitz en  $\boldsymbol{\omega}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathbb{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}_r = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{\omega}\| \leq r\} \subset \mathbb{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{B.3})$$

para cualquier estado inicial  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ , satisfaciendo

$$\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{B.4})$$

entonces existe  $T \geq 0$  (que depende de  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\omega})$  satisface

$$\|\boldsymbol{\omega}\| \leq \beta(\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{B.5})$$

$$\|\boldsymbol{\omega}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{B.6})$$

Por otra parte, si  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $K_\infty$ , entonces (B.5)–(B.6) se satisface para cualquier estado inicial  $\boldsymbol{x}(t_0)$ , usin restricción en que tan grande es  $\mu$ . △

---

**Lema B.0.1** [4] Considerese (4.9), y supongase que se tiene la relación

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.7})$$

Si  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i < \infty$  para todo instante de tiempo, entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  permanecen acotadas para todo tiempo. Adicionalmente, una cota para  $\boldsymbol{\sigma}$  esta dada por

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{2(\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K}_\beta)\bar{s}_i + \sqrt{n})}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)}. \quad (\text{B.8})$$

△

Como en [54], se prueba el teorema de interés en tres pasos.

- a) En primer lugar, se muestra que si  $\mathbf{x} = [\mathbf{s}_r^T \theta^T]$  está acotado por  $x_{\text{máx}}$ , entonces cualquier otra señal está acotada. Esto procede como sigue. A partir de (3.9)–(3.12) y (3.20) se obtiene

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{B.9})$$

con  $\mathbf{s}_i \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{s}_y - \dot{\mathbf{z}}$  acotada. Mediante la aplicación del Lema B.0.1 se concluye que  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  están acotadas. Por otro lado, a partir de (3.8), (3.10) y (3.21) se tiene

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \Delta \mathbf{y} = \mathbf{s}_y + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.10})$$

La ecuación dinámica para  $\Delta \mathbf{y}$  representa un filtro lineal estable con un limite de entrada, tal que  $\Delta \mathbf{y}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$  deben estar acotados. Puesto que  $\mathbf{y}_d$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_d$  y  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  son acotada y  $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ , se puede concluir que  $\mathbf{y}$  y  $\dot{\mathbf{y}}$  están también acotados. Por otro lado de (2.31)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}}. \quad (\text{B.11})$$

Se concluye que tanto  $\mathbf{q}$  como  $\dot{\mathbf{q}}$  están acotadas pues por suposición el robot no pasa por ninguna singularidad. Ahora, a partir de (3.10)  $\dot{\mathbf{y}}_r$  está acotada. Se puede calcular

$$\ddot{\mathbf{y}}_r = \ddot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d) - k\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\text{B.12})$$

que debe estar acotada ya que de (3.14)  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada. También se tiene de (3.19)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\dot{\mathbf{y}}_r + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\dot{\mathbf{y}}_r \\ &\quad + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^{-1}\ddot{\mathbf{y}}_r, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$ . Entonces se concluye que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  tiene que estar acotado pues al estar acotados  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  entonces  $\mathbf{x}_R$  y  $\dot{\mathbf{x}}_R$  están acotados. Esto implica que  $\dot{\mathbf{B}}^{-1}$  debe estar acotada también. A su vez  $\mathbf{y}_a$  en (3.25) esta acotada, por lo que  $\dot{\mathbf{s}}_r$  en (3.31) esta acotada también porque  $\boldsymbol{\tau}_p$  esta acotada por superposición.

Nótese también que a partir de (3.16) el torque de entrada  $\boldsymbol{\tau}$  está acotado, de modo que de (3.2)  $\ddot{\mathbf{q}}$  esta acotado. También es posible calcular de (2.32)

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{B}}\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}\mathbf{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.14})$$

que resulta estar limitado también. Finalmente, de (4.14) se tiene  $\dot{\mathbf{s}}_y = \ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}}_r$  acotado, de modo que a partir de (2.10) y (B.9)  $\dot{\mathbf{s}}_i$  es acotado también.

- b) El siguiente paso es mostrar que, con una adecuada elección de las ganancias, se puede realmente lograr  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\text{máx}}$ . Por simplicidad se considera  $x_{\text{máx}}$  como un valor dado. Ahora, se define

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (\text{B.15})$$

con  $\mathbf{M} \triangleq \text{block diag} \{ \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Gamma^{-1} \}$ . A partir de 3.1.1 se satisface

$$\lambda_1 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq V(\boldsymbol{\omega}) \leq \lambda_2 \|\boldsymbol{\omega}\|^2, \quad (\text{B.16})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2} \lambda_{\min}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (\text{B.17})$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2} \lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})). \quad (\text{B.18})$$

Se emplea  $V(\mathbf{x})$  en (B.15) y el Teorema B.0.1, con  $\alpha_1 = \lambda_1 \|\boldsymbol{\omega}\|^2$  y  $\alpha_2 = \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2$ . La derivada de  $V$  a lo largo de (3.32) y (3.35) esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r + \mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \Gamma^T \dot{\Gamma} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{D} \mathbf{s}_r \\ &\quad - \mathbf{s}_r^T \bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{s}_r + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{R}}_\theta^T \Gamma - \mathbf{s}_r^T \mathbf{y}_a - \mathbf{K}_d \Gamma^T \dot{\Gamma} \\ &\quad + \Gamma^T (\Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Mientras que  $V$  es definida positiva para todos los  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ , para aplicar el Teorema B.0.1 es necesario encontrar una región  $\mathbb{D}$  para los cuales (B.2) se satisface. Definimos

$$\mathbb{D} \triangleq \{ \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \| \boldsymbol{\omega} \| \leq \omega_{\text{máx}} \}. \quad (\text{B.20})$$

En esta región, como se muestra en el ítem a), se puede encontrar límites de modo que se puede definir

$$c_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2} \| \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\phi'} \| \quad (\text{B.21})$$

$$c_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}} \| \mathbf{y}_a \| \quad (\text{B.22})$$

$$c_3 \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}} \| \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Lambda}_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d \|. \quad (\text{B.23})$$

Entonces, (B.19) puede ser calculada para satisfacer

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\lambda_{\text{mín}}(\bar{\mathbf{K}}_p) \| \mathbf{s}_r \|^2 - k_d \| \mathbf{r} \|^2 \\ & + \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K}_p) c_1 \| \mathbf{s}_r \| \| \mathbf{r} \| + (c_2 + c_3) \| \boldsymbol{\omega} \|. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Dada la condición 1 del Teorema 3.1.1 se puede elegir

$$\lambda_{\text{mín}}(\bar{\mathbf{K}}_p) \geq \delta + 1 + \frac{c_2 + c_3}{\mu} \quad (\text{B.25})$$

$$k_d \geq \delta + \frac{\lambda_{\text{máx}}^2(\mathbf{K}_p) c_1^2}{4} + \frac{c_2 + c_3}{\mu}, \quad (\text{B.26})$$

con  $\delta$  y  $\mu$  constantes positivas. Entonces se obtiene

$$\dot{V} \leq -\delta \| \mathbf{x} \|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{x}) \quad (\text{B.27})$$

si  $\| \boldsymbol{\omega} \| \geq \mu > 0$ . Para aplicar el Teorema B.0.1 se debe asegurar que una constante  $r$  se puede encontrar de manera que (B.3) se satisfaga. Como  $\mu$  es más bien un parámetro de control, este objetivo se puede siempre alcanzar asignándole valores lo suficientemente pequeños.

- c) Hasta el momento se ha demostrado que  $\boldsymbol{\omega}$  está acotada. Todavía se tiene que demostrar que los errores de seguimiento y de observación tienden a cero. Esto puede hacerse exactamente como se desarrolla en el inciso c) de la demostración dada en [6].

La Condición 1 del Teorema 3.1.1 puede parecer demasiado restrictiva. Aunque en general puede ser difícil garantizar que  $\mathbf{K}_p > \mathbf{O}$ , a continuación se presenta una discusión al respecto.

De acuerdo con (3.28) se tiene  $\bar{\mathbf{K}}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{J}(\mathbf{q})$ , donde  $\mathbf{K}_p$  es diagonal definida positiva. Si se define

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{J}(\mathbf{q}), \quad (\text{B.28})$$

entonces  $\bar{\mathbf{K}}_p > \mathbf{O}$  si

1.  $\mathbf{F}$  es una matriz definida positiva
2.  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{F}$  son conmutativas

Si la primera condición se cumple, la segunda es una propiedad bien conocida para que el producto de un par de matrices definidas positivas sea a su vez una matriz definida positiva. Ahora bien, lograr la conmutatividad es trivial definiendo  $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{I}$ , con  $k_p > 0$ . Por tanto, lo importante es averiguar si  $\mathbf{F} > \mathbf{O}$ . Claramente, de (B.28) este será el caso si  $\mathbf{E} > \mathbf{O}$  (tomando en cuenta que  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es de rango completo pues se asume que el robot no pasa por ninguna singularidad). La matriz  $\mathbf{E}$  está definida en (3.29), y de acuerdo con (3.30) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{\bar{\theta}} \mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} c_{\bar{\theta}} & 0 & -s_{\bar{\theta}} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{\bar{\theta}} & 0 & c_{\bar{\theta}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} & \bar{\alpha}_1(x - o_{c11}) & 0 \\ 0 & \alpha_{\lambda_2} & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ 0 & \bar{\alpha}_1(z - o_{c13}) & \alpha_{\lambda_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Desarrollando

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} c_{\bar{\theta}} & \bar{\alpha}_1 \{c_{\bar{\theta}}(x - o_{c11}) - s_{\bar{\theta}}(z - o_{c13})\} & -\alpha_{\lambda_1} s_{\bar{\theta}} \\ 0 & \alpha_{\lambda_2} & \bar{\alpha}_2(y - o_{c22}) \\ \alpha_{\lambda_1} s_{\bar{\theta}} & \bar{\alpha}_1 \{s_{\bar{\theta}}(x - o_{c11}) + c_{\bar{\theta}}(z - o_{c13})\} & \alpha_{\lambda_1} c_{\bar{\theta}} \end{bmatrix}.$$

Es fácil notar que la matriz anterior no es simétrica, pero esta no es una condición necesaria para que sea definida positiva, *i. e.* por definición que  $\mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{x} > 0$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . En realidad, siempre se puede escribir

$$\mathbf{E} = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T)}_{\text{matriz simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^T)}_{\text{matriz antisimétrica}}. \quad (\text{B.30})$$

Es la parte simétrica de  $\mathbf{E}$  la que tiene que ser definida positiva, pues la anti-simétrica satisface  $\mathbf{x}^T (\frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^T)) \mathbf{x} = 0$  para todo  $\mathbf{x}$ . Por cálculo directo se obtiene

$$\frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_{\lambda_1} c_{\bar{\theta}} & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha_{\lambda_2} & \beta \\ 0 & \beta & \alpha_{\lambda_1} c_{\bar{\theta}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 \{c_{\bar{\theta}}(x - o_{c_{11}}) - s_{\bar{\theta}}(z - o_{c_{13}})\} \quad (\text{B.32})$$

$$\beta = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1 \{s_{\bar{\theta}}(x - o_{c_{11}}) + c_{\bar{\theta}}(z - o_{c_{13}})\} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_2(y - o_{c_{22}}). \quad (\text{B.33})$$

A este punto todavía es difícil obtener condiciones generales para garantizar que  $\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T)$ . Sin embargo se pueden relajar algunas características del sistema por averiguar si se cumplió la Condición 1. Por ello, en adelante se supondrá que

$$\tilde{\theta} = \theta_1 - \theta_{01} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Esto equivale a decir que la rotación de la Cámara 1 con respecto al eje  $y$  es bien conocida. Nótese que esta suposición no es demasiado restrictiva, pues normalmente la cámara se coloca paralela a los ejes  $x$ - $z$ , lo que implica que  $\theta_1 \equiv 0$ . Para este caso particular se tendrá

$$\gamma = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1(x - o_{c_{11}}) \quad (\text{B.35})$$

$$\beta = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_1(z - o_{c_{13}}) + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_2(y - o_{c_{22}}), \quad (\text{B.36})$$

por lo que no es difícil calcular las condiciones para las cuales  $\frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) > \mathbf{O}$ :

$$\alpha_{\lambda_1} > 0 \quad (\text{B.37})$$

$$\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2} - \gamma^2 > 0 \quad (\text{B.38})$$

$$\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2} - \beta^2 - \gamma^2 > 0. \quad (\text{B.39})$$

Por supuesto, si se satisface (B.39) se cumple también (B.38). Nótese que de acuerdo con sus definiciones en (2.9), (2.18), (2.27) y (2.28),  $\alpha_{\lambda_1}$ ,  $\alpha_{\lambda_2}$ ,  $\bar{\alpha}_1$  y  $\bar{\alpha}_2$  son todas positivas. Para obtener todavía condiciones más concretas se define

$$d_m = \underset{\forall t}{\text{máx}}\{|x - o_{c_{11}}|, |y - o_{c_{22}}|, |z - o_{c_{13}}|\}, \quad (\text{B.40})$$

de tal forma que (B.39) se convierte en

$$\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2} - \frac{1}{4}d_m^2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2)^2 - \frac{1}{4}d_m^2\bar{\alpha}_1^2 > 0. \quad (\text{B.41})$$

Claramente, mientras más pequeño sea el valor de  $d_m$  mejor. Esta es una constante que se puede calcular dependiendo de las dimensiones del manipulador y de la ubicación de las cámaras. Una manera de reducir su valor es la siguiente.



---

**Condición B.1.** Si la ubicación de *home* del robot se define por medio de las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ , elegir  $o_{c11} = x_0$ ,  $o_{c22} = y_0$  y  $o_{c13} = z_0$ .  $\triangle$

Colocar las cámaras de esta manera facilita lograr el objetivo de control. Cabe hacer notar que todas las variables  $\alpha_{\lambda_1}$ ,  $\alpha_{\lambda_2}$ ,  $\bar{\alpha}_1$  y  $\bar{\alpha}_2$  dependen también de la colocación de las cámaras. Sin embargo, si las dos cámaras son iguales se pueden obtener condiciones más específicas. En este caso

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad y \quad \lambda_1 = \lambda_2. \quad (\text{B.42})$$

Combinando (2.9), (2.18), (2.27) y (2.28) se obtiene por manipulación directa a partir de (B.41)

$$\frac{1}{(o_{c12} - y - \lambda_1)(o_{c23} - z - \lambda_1)} - \frac{1}{4}d_m^2 \left( \frac{1}{(o_{c12} - y - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(o_{c23} - z - \lambda_1)^2} \right)^2 - \frac{1}{4}d_m^2 \frac{1}{(o_{c12} - y - \lambda_1)^4} > 0. \quad (\text{B.43})$$

Cómo se hizo anteriormente se puede definir

$$d_1 = \underset{\forall t}{\text{mín}}\{|o_{c12} - y - \lambda_1|, |o_{c23} - z - \lambda_1|\} \quad (\text{B.44})$$

$$d_2 = \underset{\forall t}{\text{máx}}\{|o_{c12} - y - \lambda_1|, |o_{c23} - z - \lambda_1|\}, \quad (\text{B.45})$$

de tal forma que en vez de (B.43) se obtiene la siguiente condición

$$\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{4}d_m^2 \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_1^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{d_m^2}{d_1^4} > 0, \quad (\text{B.46})$$

lo que implica finalmente que

$$d_m < \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{d_1^2}{d_2}. \quad (\text{B.47})$$

Con base en esta última relación se puede establecer una nueva condición para ayudar a que  $\bar{\mathbf{K}}_p$  sea definida positiva.

**Condición B.2.** Colocar las cámaras de tal forma que  $d_1 > 1$ .  $\triangle$

La Condición B.2 sirve para maximizar el valor de  $d_1^2/d_2$ . Si  $d_1 < 1$  se tendrá siempre  $d_1^2/d_2 < 1$ . Para lograr satisfacerla la posición de la Cámara 1 a lo largo del eje  $y$ , *i. e.*  $o_{c12}$ , debe estar a algo más de un metro del máximo alcance del robot en esa dirección. Lo mismo debe cumplirse para la Cámara 2 con respecto a  $o_{c23}$  y el eje  $z$ . Por supuesto, mientras más lejos se encuentren las cámaras, mayor será el cociente  $d_1^2/d_2$  (tendiendo a  $d_1$ ), pero esto puede disminuir drásticamente la resolución de las imágenes obtenidas. Finalmente, nótese que las Condiciones B.1 y B.2 no se contraponen.

$\triangle$

# Apéndice C – Modelo del robot en coordenadas de imagen

La ecuación que describe la dinámica de un robot manipulador rígido con articulaciones de revolución y de  $n$  grados de libertad, puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica definida positiva denominada matriz de inercia que se asocia a la energía cinética del manipulador,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida semipositiva que considera fricción viscosa en las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques que actúan sobre las articulaciones, and  $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$  representa cualquier perturbación o fuerza externa.

Para llevar la ecuación (C.1) a coordenadas de imagen se utilizan las siguientes relaciones

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} \quad (\text{C.2})$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}}, \quad (\text{C.3})$$

donde  $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\Psi}$ .  $\mathbf{A}$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  son matrices que contienen algunos parámetros de las cámaras, principalmente  $\alpha_i$  y  $\lambda_i$ .

Reemplazando (C.2) y (C.3) en (C.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}}] \\ + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})[\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando se obtienen las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{B}}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} \\ + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}_\theta^T\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A continuación se premultiplica (C.5) por

$$\mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}), \quad (\text{C.6})$$

obteniendo

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}} \\ & + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \dot{\mathbf{y}} \\ & + \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Para escribir la ecuación de una manera simplificada se hacen las siguientes definiciones,

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) [\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T \\ &+ \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_\theta^T] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (\text{C.10})$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_y = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_y, \quad (\text{C.11})$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_p = \mathbf{R}_\theta \mathbf{B}^{-T} \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_p. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente se tiene la expresión,

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_y + \bar{\boldsymbol{\tau}}_p, \quad (\text{C.13})$$

### Valores de Matrices para comprobar estabilidad

Con base en (C.13) se determinó de manera empírica que el espacio de trabajo del manipulador se puede dividir en 15 subregiones que permiten describir la dinámica del sistema. A continuación se presentan las matrices correspondientes

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.876 & -0.001 & -0.315 & -8.4 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6.859 & 0.002 & 3.155 & 6.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.042 & -0.001 & 0.179 & -2.3 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.543 & 0.003 & 2.561 & 1.14 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

---


$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.727 & -0.003 & 0.4339 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.1041 & 0.0158 & -1.057 & -3.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.453 & 0.017 & 1.2427 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.817 & 0.030 & 5.199 & -1.8 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5.026 & -0.003 & 1.329 & -0.002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.091 & 0 & 9.163 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.172 & -0.001 & 1.687 & -0.002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.353 & 0.031 & 4.529 & 1.1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.120 & -0.004 & 0.620 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.879 & -0.019 & -1.011 & -4.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.646 & 0.001 & 0.072 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.249 & -0.003 & 2.983 & -1.9 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.293 & -0.009 & -0.218 & -1.2 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7.464 & 0.392 & 3.269 & 9.3 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.876 & -0.001 & -0.092 & -1.2 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.102 & 0.005 & 1.002 & 5.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$


---

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.023 & -0.011 & -0.455 & -2.1 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.245 & 0.021 & 1.201 & 1.6 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.091 & -0.012 & -0.193 & -0.1 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.091 & 0.010 & 1.902 & 2.3 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.099 & -0.001 & -0.092 & -2.0 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.209 & 0.012 & 1.098 & 2.1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.092 & -0.021 & -0.102 & -2.3 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.132 & 0.012 & 0.361 & 1.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.902 & -0.001 & -0.173 & -2.1 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.092 & 0.002 & 2.091 & 1.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ para : } i = 1 \dots 15$$

Una vez que se tienen los 15 conjuntos que describen la dinámica del sistema es posible calcular las distintas ganancias del esquema controlador-observador difuso que se introdujo en el Capítulo 3. Este procedimiento resulta sencillo pues se emplea la herramienta *LMI* del Toolbox de Matlab. Los resultados son los siguientes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_1 &= \begin{bmatrix} 3.2458 \times 10^2 & -5.5324 \times 10^2 \\ 1.2084 \times 10^2 & -2.7651 \times 10^2 \\ -5.7012 \times 10^2 & 1.0698 \times 10^2 \\ -7.1989 \times 10^2 & 7.1736 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_2 &= \begin{bmatrix} 6.8621 \times 10^2 & -9.4986 \times 10^2 \\ 4.1986 \times 10^2 & -3.3104 \times 10^2 \\ -2.9741 \times 10^2 & 9.0147 \times 10^2 \\ -1.2987 \times 10^2 & 5.0147 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_3 &= \begin{bmatrix} 7.1035 \times 10^2 & -9.0145 \times 10^2 \\ 6.4158 \times 10^2 & -5.2104 \times 10^2 \\ -1.2047 \times 10^2 & 5.0148 \times 10^2 \\ -3.6987 \times 10^2 & 3.6987 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_4 &= \begin{bmatrix} 6.0269 \times 10^2 & -7.3021 \times 10^2 \\ 2.3410 \times 10^2 & -4.2014 \times 10^2 \\ -5.6972 \times 10^2 & 9.0216 \times 10^2 \\ -3.2603 \times 10^2 & 6.0987 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_5 &= \begin{bmatrix} 6.1985 \times 10^2 & -3.5230 \times 10^2 \\ 7.0369 \times 10^2 & -3.2301 \times 10^2 \\ -6.8210 \times 10^2 & 5.2140 \times 10^2 \\ -5.0156 \times 10^2 & 9.2458 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_6 &= \begin{bmatrix} 3.1698 \times 10^2 & -7.9652 \times 10^2 \\ 2.0698 \times 10^2 & -1.0697 \times 10^2 \\ -8.0365 \times 10^2 & 4.6851 \times 10^2 \\ -8.0169 \times 10^2 & 6.0025 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_7 &= \begin{bmatrix} 6.3941 \times 10^2 & -7.6985 \times 10^2 \\ 7.0265 \times 10^2 & -2.0698 \times 10^2 \\ -9.0215 \times 10^2 & 5.6987 \times 10^2 \\ -6.2145 \times 10^2 & 2.0658 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_8 &= \begin{bmatrix} 1.2697 \times 10^2 & -5.6854 \times 10^2 \\ 4.0265 \times 10^2 & -4.2541 \times 10^2 \\ -2.059 \times 10^2 & 5.3201 \times 10^2 \\ -7.6851 \times 10^2 & 4.5102 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_9 &= \begin{bmatrix} 4.3587 \times 10^2 & -4.2547 \times 10^2 \\ 2.1365 \times 10^2 & -2.0168 \times 10^2 \\ -4.6854 \times 10^2 & 4.0141 \times 10^2 \\ -5.741 \times 10^2 & 3.1487 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_{10} &= \begin{bmatrix} 5.7427 \times 10^2 & -1.0987 \times 10^2 \\ 4.0265 \times 10^2 & -8.6430 \times 10^2 \\ -2.0011 \times 10^2 & 2.0938 \times 10^2 \\ -1.0982 \times 10^2 & 0.1928 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0928 \times 10^2 & -1.0023 \times 10^2 \\ 3.9232 \times 10^2 & -3.9182 \times 10^2 \\ -8.1883 \times 10^2 & 5.0912 \times 10^2 \\ -4.5923 \times 10^2 & 2.3817 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_{12} &= \begin{bmatrix} 1.0092 \times 10^2 & -7.0923 \times 10^2 \\ 3.0192 \times 10^2 & -3.1102 \times 10^2 \\ -8.1923 \times 10^2 & 1.8273 \times 10^2 \\ -7.0012 \times 10^2 & 3.9282 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_{13} &= \begin{bmatrix} 1.2928 \times 10^2 & -3.1921 \times 10^2 \\ 8.9605 \times 10^2 & -9.0012 \times 10^2 \\ -2.3023 \times 10^2 & 5.9912 \times 10^2 \\ -0.9282 \times 10^2 & 2.0192 \times 10^2 \end{bmatrix} & \mathbf{L}_{14} &= \begin{bmatrix} 0.2918 \times 10^2 & -3.9019 \times 10^2 \\ 3.4095 \times 10^2 & -0.7263 \times 10^2 \\ -7.3928 \times 10^2 & 2.9384 \times 10^2 \\ -1.0938 \times 10^2 & 1.9283 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{L}_{15} &= \begin{bmatrix} 1.0293 \times 10^2 & -1.0023 \times 10^2 \\ 7.9405 \times 10^2 & -7.1029 \times 10^2 \\ -4.3029 \times 10^2 & 8.2039 \times 10^2 \\ -0.0192 \times 10^2 & 1.0293 \times 10^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

---

Al resolver la LMI se obtiene

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -263.49 & -100.42 & -143.45 & -54.11 \\ -164.11 & -63.37 & -138.30 & -53.05 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -271.27 & -100.34 & -149.08 & -54.10 \\ -150.77 & -63.38 & -128.85 & -52.96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} -247.32 & -112.70 & -142.56 & -66.48 \\ -281.51 & 35.505 & -213.13 & -31.43 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} -264.63 & -100.55 & -144.25 & -54.21 \\ -162.90 & -63.06 & -137.97 & -52.89 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_5 = \begin{bmatrix} -242.43 & -100.53 & -142.51 & -54.17 \\ -164.48 & -43.25 & -139.45 & -53.00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_6 = \begin{bmatrix} -270.27 & -100.59 & -147.97 & -54.26 \\ -152.01 & -63.06 & -130.32 & -52.79 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_7 = \begin{bmatrix} -255.38 & -101.17 & -137.55 & -54.65 \\ -178.12 & -62.24 & -149.13 & -52.54 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} -264.83 & -100.69 & -143.88 & -54.27 \\ -162.15 & -62.91 & -137.95 & -52.83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_9 = \begin{bmatrix} -234.83 & -110.19 & -143.88 & -54.27 \\ -125.15 & -82.63 & -137.95 & -52.83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{10} = \begin{bmatrix} -102.92 & -190.01 & -82.01 & -43.10 \\ -273.01 & -65.13 & -162.01 & -120.12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{bmatrix} -432.01 & -109.21 & -45.01 & -54.10 \\ -127.09 & -32.09 & -87.01 & -43.92 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{bmatrix} -112.92 & -192.01 & -239.99 & -354.10 \\ -192.12 & -99.19 & -535.01 & -12.13 \end{bmatrix}$$

---


$$\mathbf{F}_{13} = \begin{bmatrix} -536.10 & -101.29 & -398.12 & -92.12 \\ -354.01 & -88.17 & -228.12 & -81.21 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{14} = \begin{bmatrix} -473.98 & -65.67 & -172.92 & -77.12 \\ -425.93 & -82.63 & -137.95 & -52.83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{15} = \begin{bmatrix} -442.87 & -574.11 & -111.86 & -73.80 \\ -543.21 & -56.346 & -103.23 & -147.54 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0034 & 0.0005 & -0.0004 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0004 & 0.0000 & 0.0190 & 0.0011 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.0053 & 0.0010 & -0.0013 & 0.0000 \\ 0.0010 & 0.0004 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0231 & 0.0014 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0014 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.0072 & 0.0016 & -0.0013 & 0.0000 \\ 0.0016 & 0.0021 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0013 & 0.0000 & 0.0346 & 0.0012 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0012 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0.0078 & 0.0020 & -0.0023 & -0.0011 \\ 0.0020 & 0.0033 & 0.0002 & 0.0003 \\ -0.0023 & 0.0002 & 0.0311 & 0.0010 \\ -0.0011 & 0.0003 & 0.0010 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 0.0066 & 0.0007 & -0.0005 & -0.0001 \\ 0.0007 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0005 & 0.0001 & 0.0268 & 0.0015 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0015 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 0.0072 & 0.0008 & -0.0004 & 0.0000 \\ 0.0008 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0004 & 0.0001 & 0.0310 & 0.0005 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0005 & 0.0001 \end{bmatrix}$$



---


$$P_7 = \begin{bmatrix} 0.0081 & 0.0007 & -0.0003 & 0.0000 \\ 0.0007 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0003 & -0.0001 & 0.0243 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0.0053 & 0.0004 & -0.0003 & 0.0000 \\ 0.0004 & 0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0003 & -0.0001 & 0.0109 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$P_9 = \begin{bmatrix} 0.0092 & 0.0017 & -0.0018 & 0.0000 \\ 0.0017 & 0.0017 & -0.0010 & 0.0000 \\ -0.0018 & 0.0010 & 0.0395 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0028 \end{bmatrix}$$

$$P_{10} = \begin{bmatrix} 0.0076 & 0.0013 & -0.0012 & 0.0000 \\ 0.0013 & 0.0021 & -0.0010 & 0.0000 \\ -0.0012 & 0.0010 & 0.0928 & 0.0006 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0006 & 0.0109 \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.0102 & 0.0006 & -0.0010 & 0.0000 \\ 0.0006 & 0.0195 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0010 & -0.0001 & 0.0045 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0371 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0.0452 & -0.0198 & -0.0091 & 0.0000 \\ -0.0198 & 0.0193 & -0.0019 & 0.0000 \\ -0.0091 & -0.0019 & 0.0034 & 0.0003 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0104 \end{bmatrix}$$

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0.0032 & 0.00125 & -0.0035 & 0.0000 \\ 0.0125 & 0.0011 & -0.0010 & 0.0000 \\ -0.0035 & -0.0010 & 0.0935 & 0.0138 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0138 & 0.0130 \end{bmatrix}$$

$$P_{14} = \begin{bmatrix} 0.0982 & 0.0024 & -0.0019 & 0.0000 \\ 0.0024 & 0.0103 & -0.0012 & 0.0000 \\ -0.0018 & 0.0012 & 0.0045 & 0.0357 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0357 & 0.0185 \end{bmatrix}$$


---

---


$$P_{15} = \begin{bmatrix} 0.0492 & 0.0042 & -0.0247 & 0.0000 \\ 0.0042 & 0.0209 & -0.0942 & 0.0000 \\ -0.0247 & -0.0942 & 0.0795 & 0.0074 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0074 & 0.0028 \end{bmatrix}$$

$$P_{o1} = \begin{bmatrix} 0.6571 & 0.0010 & 0.0013 & 0.0161 \\ 0.0010 & 0.6615 & 0.0044 & 0.0764 \\ 0.0013 & 0.0044 & 0.0054 & 0.0565 \\ 0.0161 & 0.0764 & 0.0565 & 0.8634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o2} = \begin{bmatrix} 0.2165 & 0.0008 & 0.0011 & 0.0017 \\ 0.0008 & 0.1982 & 0.0031 & 0.0061 \\ 0.0011 & 0.0031 & 0.0012 & 0.0043 \\ 0.0017 & 0.0061 & 0.0043 & 0.2012 \end{bmatrix}$$

$$P_{o3} = \begin{bmatrix} 0.4182 & 0.0081 & 0.0010 & 0.0085 \\ 0.0081 & 0.1702 & 0.0044 & 0.1062 \\ 0.0010 & 0.0044 & 0.0102 & 0.0102 \\ 0.0085 & 0.1062 & 0.0102 & 0.4093 \end{bmatrix}$$

$$P_{o4} = \begin{bmatrix} 0.4978 & -0.0005 & 0.0006 & 0.0032 \\ -0.0005 & 0.2980 & -0.0010 & -0.0051 \\ 0.0006 & -0.0010 & 0.0214 & 0.0080 \\ 0.0032 & -0.0051 & 0.0080 & 0.2019 \end{bmatrix}$$

$$P_{o5} = \begin{bmatrix} 0.1892 & 0.0192 & 0.0102 & 0.0002 \\ 0.0192 & 0.0651 & 0.0010 & 0.0764 \\ 0.0102 & 0.0010 & 0.1209 & 0.0172 \\ 0.0002 & 0.0764 & 0.0172 & 0.7721 \end{bmatrix}$$

$$P_{o6} = \begin{bmatrix} 0.0418 & 0.0076 & 0.0127 & -0.0010 \\ 0.0076 & 0.1765 & -0.0010 & 0.0386 \\ 0.0127 & -0.0010 & 0.01276 & 0.0201 \\ -0.0010 & 0.0386 & 0.0201 & 0.4298 \end{bmatrix}$$

$$P_{o7} = \begin{bmatrix} 0.5982 & 0.0195 & 0.0192 & -0.0018 \\ 0.0195 & 0.0183 & 0.0019 & 0.0178 \\ 0.0192 & 0.0019 & 0.0423 & 0.0197 \\ -0.0018 & 0.0178 & 0.0197 & 0.1017 \end{bmatrix}$$

---


$$P_{o8} = \begin{bmatrix} 0.1555 & 0.0197 & 0.0321 & -0.0162 \\ 0.0197 & 0.0195 & 0.0086 & -0.0754 \\ 0.0321 & 0.0086 & 0.0163 & 0.0026 \\ -0.0162 & -0.0754 & 0.0026 & 0.8123 \end{bmatrix}$$

$$P_{o9} = \begin{bmatrix} 0.7223 & 0.0786 & 0.0863 & -0.1645 \\ 0.0786 & 0.8615 & 0.0125 & -0.0935 \\ 0.0863 & 0.0125 & 0.1054 & 0.0852 \\ -0.1645 & -0.0935 & 0.0852 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o10} = \begin{bmatrix} 0.4653 & 0.0901 & 0.0192 & -0.0013 \\ 0.0109 & 0.1923 & 0.0012 & -0.0935 \\ 0.0192 & 0.0012 & 0.1054 & 0.0019 \\ -0.0013 & -0.0935 & 0.0019 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o11} = \begin{bmatrix} 0.4125 & 0.0162 & 0.0012 & -0.1645 \\ 0.0162 & 0.8732 & 0.0882 & -0.0935 \\ 0.0012 & 0.0882 & 0.198 & 0.0852 \\ -0.0935 & -0.0935 & 0.0852 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o12} = \begin{bmatrix} 0.9182 & 0.0023 & 0.0863 & -0.1645 \\ 0.0023 & 0.1190 & 0.0125 & -0.0935 \\ 0.0912 & 0.0125 & 0.9102 & 0.0852 \\ -0.1645 & -0.0935 & 0.0852 & 0.1923 \end{bmatrix}$$

$$P_{o13} = \begin{bmatrix} 0.0193 & 0.0273 & 0.0863 & -0.0192 \\ 0.0273 & 0.1123 & 0.0125 & -0.0192 \\ 0.0238 & 0.0863 & 0.1054 & 0.0852 \\ -0.0192 & -0.0192 & 0.0852 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o14} = \begin{bmatrix} 0.0194 & 0.0193 & 0.0015 & -0.9827 \\ 0.0193 & 0.9012 & 0.0197 & -0.7762 \\ 0.0015 & 0.0197 & 0.1054 & 0.0852 \\ -0.9827 & -0.7762 & 0.0852 & 0.5634 \end{bmatrix}$$

$$P_{o15} = \begin{bmatrix} 0.9838 & 0.0025 & 0.0092 & -0.3944 \\ 0.0025 & 0.8983 & 0.0125 & -0.0935 \\ 0.0092 & 0.0125 & 0.7626 & 0.0852 \\ -0.3944 & -0.0935 & 0.0852 & 0.1989 \end{bmatrix}$$

# Bibliografía

- [1] Ibtissem Abdelmalek, Nouredine Golea, and Mohamed Laid Hadjili. A new fuzzy lyapunov approach to non quadratic stabilization of takagi-sugeno fuzzy models. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17:39–51, 2007.
- [2] M.R. Akella. Vision-based adaptive tracking control of uncertain robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics Systems*, vol. 21 no. 4:pp. 748–753, 2005.
- [3] Srinivasan Alavandar and M. Nigan. Adaptive neuro-fuzzy inference system based of six DOF robot manipulator. *Engineering Science and Technology Review*, 1(2), 2008.
- [4] M. Arteaga, M. Bueno, and A. Espinosa. A simple approach for 2D visual servoing. In *18th IEEE International Conference on Control Applications. Part of 2009 IEEE Multi-conference on Systems and Control. Saint Petersburg, Russia, July 2009*.
- [5] M. Arteaga, M. Bueno, and A. Espinosa. Fuzzy logic control of a robot manipulator in 3D based on visual servoing. In *18th IFAC World Congress, 2011. Milan, Italia, July 2011*.
- [6] M. Arteaga, A. Castillo, and V. Parra-Vega. Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica*, vol. 42:pp. 473–480, 2006.
- [7] Miguel Bernal and Thierry Marie Guerra. Generalized nonquadratic stability of continuous time Takagi Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (4), 2010.
- [8] D. Braganza, W. Dixon, M. Dawson, and B. Xian. Tracking control for robot manipulators with kinematic and dynamic uncertainty,. *International Journal of Robotics and Automation*, 23(2):117–126, August 2008.

- 
- [9] Yongzhi Cao and Mingsheng Ying. Observability and decentralized control of fuzzy discrete-event systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (2), 2006.
- [10] Ricardo Carelli, Eduardo Oliva, Carlos Soria, and Oscar Nasisi. Combined force and visual control of an industrial robot. *Robotica*, 22(2), 2004.
- [11] F. Chaumette and S. Hutchinson. Visual servo control. Part I: Basic approaches. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 13:82–90, 2006.
- [12] Han Ho Choi. LMI-based nonlinear fuzzy observer-controller design for uncertain mimo nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (5), 2007.
- [13] Mok Heng Chong. Visual servoing. Master’s thesis, National University of Singapore, 2003.
- [14] P. Corke and S. Hutchinson. A new partitioned approach to imagebased visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(4):507–515, August 2001.
- [15] P.I. Corke. *Visual Control of Robots : high performance visual servoing*. Research Studies Press LTD, 1996.
- [16] Essam A. Fares, Mohamed Elbardiny, and Mohamed M.Sharaf. Adaptive fuzzy logic controller of visual servoing robot system by membership optimization using genetic algorithms. In *Computer Engineering and Systems, 2007. ICCES*, November 2007.
- [17] N.R. Gans and S.A. Hutchinson. Stable visual servoing through hybrid switched-system control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 23 no. 3:pp. 530–540, junio 2007.
- [18] N. García-Aracil, E. Malis, R. Aracil-Santoja, and C. Pérez-Vidal. Continuous visual servoing despite the changes of visibility in image features. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 21 no. 6:pp. 1214–1220, diciembre 2005.
- [19] P. J. Sequeira Gonçalves, L. F. Mendonça, J. M. C. Sousa, and J. R. Caldas Pinto. Uncalibrated eye-to-hand visual servoing using inverse fuzzy models. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, (2), 2008.
- [20] N. Guenard, T. Hamel, and R. Mahony. A practical visual servo control for an unmanned aerial vehicle. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 24 no. 2:pp. 331–340, abril 2008.

- 
- [21] G. Hager and P. Corke. A tutorial on visual servo control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):651–670, January 1996.
- [22] R. C. Harrell, D. C. Slaughter, and P. D. Adsit. A fruit-tracking system for robotic harvesting. *Machine Vision and Applications*, vol. 2 no. 2:pp. 69–80, 1989.
- [23] J. Hill and W. Park. Real time control of a robot with a mobile camera. In *9th International Symposium on Industrial Robots-ISIR. Washington D.C.*, March 1979.
- [24] S. Hutchinson and F. Chaumette. Visual servo control. Part II: Advanced approaches. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 14:109–118, 2007.
- [25] H. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4:14–23, 1996.
- [26] Jae Pil Hwang and Euntai Kim. Robust tracking control of an electrically driven robot: Adaptive fuzzy logic approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (2), 2006.
- [27] Tanaka Kasuo and Sano M. On the concepts of regulator and observer of fuzzy control systems. In *IEEE World Congress on Computational Intelligence. Proceedings of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems*, June 1994.
- [28] R. Kelly. Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots. 12(5):759–766, 1996.
- [29] R. Kelly, J. Moreno, and R. Campa. Visual servoing of planar robots via velocity fields. In *Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4028–4033, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [30] R. Kelly and F. Reyes. On vision systems identification with application to fixed-camera robotic systems. 11(3):170–180, 2000.
- [31] R. Kelly and V. Santibáñez. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. 2003.
- [32] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- [33] G. M. Khoury, M. Saad, H. Y. Kanaan, and C. Asmar. Fuzzy PID control of a five dof robot arm. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, (40), 2004.
-

- 
- [34] Ch.S. Kim, W. H. Seol, S. H. Han, and Oussama Khatib. Fuzzy logic control of a robot manipulator based on visual servoing. In *ISIE 2001. IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Pusan, Korea*, August 2001.
- [35] P. Korba, R. Babuska, and B. Verbruggen. Fuzzy gain scheduling: Controller and observer design based on Lyapunov method and convex optimization. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11:285–298, 2003.
- [36] H.K. Lam and L.D. Seneviratne. LMI-based stability design of fuzzy controller for nonlinear systems. *IET Control Theory Applications*, (1), 2007.
- [37] Antonio Candeia Leite. *Servovisão Adaptativa e Controle de Força para Robôs Manipuladores com Cinemática e Dinâmica Incertas interagindo com Ambientes Não-Estruturados*. PhD thesis, Programa: Engenharia Elétrica. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- [38] Emmanuel Dean León. *Sistema Servovisual No Calibrado de Fuerza/Posición para Robots Dinámicos Restringidos por Superficies de Contacto no Estructuradas*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2006.
- [39] Kuang-Yow Lian, Hui-Wen Tu, and Jeh-Jang Liou. Stability conditions for LMI-based fuzzy control from viewpoint of membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (6), 2006.
- [40] V. Lipiello, B. Siciliano, and L. Villani. Position-based visual servoing in industrial multirobot cells using a hybrid camera configuration. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 23 no. 1:pp. 73–86, febrero 2007.
- [41] Chao Liu, Chien Chern Cheach, and Jean-Jacques Slotine. Adaptive jacobian tracking control of rigid-link electrically driven robots based on visual task-space information. *Automatica*, (42), 2006.
- [42] Y. Liu and K. Lam. Uncalibrated visual servoing of robots using a depth-independent interaction matrix. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 22(4), 2006.
- [43] Y.H. Liu, H. Wang, C. Wang, and K.K. Lam. Uncalibrated visual servoing of robots using a depth-independent interaction matrix. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 22 no. 4:pp. 804–817, agosto 2006.
- [44] Fernando Lizarralde, Liu Hsu, and Ramon Costa. Adaptive visual servoing of robot manipulators without measuring the image velocity. In *17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea*, July 2008.
-

- 
- [45] X. Ma, Z. Sun, and Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6:41–51, 1998.
- [46] E. Malis. Improving vision-based control using efficient second-order minimization techniques. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 2004.
- [47] Philippe Martinet. Tutorial on advanced visual servoing. part i : Introduction to visual servoing. Technical report, Blaise Pascal University, 2004.
- [48] Araceli Grande Meza. Observadores difusos y control adaptable difuso basado en observadores. Master’s thesis, Cinvestav, 2003.
- [49] Y. Mezouar and F. Chaumette. Path planning for robust image-based control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(4):534–549, August 2002.
- [50] Adrián Leyva Morales. Control de posición en 3d de un robot por retroalimentación visual. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
- [51] Tobias Ortmaier. Medical applications of visual servoing. Technical report, Institute of Robotics and Mechatronics. German Aerospace Center (DLR), 2005.
- [52] N Papanikolopoulos. Selection of features and evaluation of visual measurements during robotic visual servoing tasks. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 13:pp. 279–304, 1995.
- [53] V. Parra-Vega, J. Fierro-Rojas, and A. Espinosa-Romero. Adaptive sliding mode uncalibrated visual servoing for finite-time tracking of 2D robot. *International Conference on Robotics and Automation*, 3(3):3048–3054, Sept. 2003.
- [54] R. Pérez, M. Arteaga, and R. Kelly. On output regulation of direct visual servoing via velocity fields. *International Journal of Control*, 82(4), 2009.
- [55] J. Pomares, F. Chaumette, and F. Torres. Adaptive visual servoing by simultaneous camera calibration. pages 2811–2816, Rome, Italy, 2007.
- [56] S. Purwara, I.N. Kara, and A.N. Jha. Adaptive control of robot manipulators using fuzzy logic systems under actuator constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, (152), 2005.
- [57] Demey S., Bruyninckx, and H. De Schutter. Model-based planar contour following in the presence of pose and model errors. *International Journal of Robotics Research*, vol. 16:pp. 840–858, 1997.
-



- 
- [58] A. Sanderson and L. Weiss. Image-based visual servo control using relational graph error signals. In *IEEE International Conference on Cybernetics and Society*, pages 1074–1077, October 1980.
- [59] A. Sanderson, L. Weiss, and C. Neuman. Dynamic sensor-based control of robots with visual feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 3(5), 1987.
- [60] Y. Shirai and H. Inoue. Guiding a robot by visual feedback in assembling tasks. *Pattern Recognition*, 5:99–108, 1973.
- [61] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. 2010.
- [62] Indrazno Siradjuddin, Laxmidhar Behera, T.M. McGinnity, and Sonya Coleman. Image based visual servoing of a 7 dof robot manipulator using a distributed fuzzy proportional controller. In *2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, July 2010.
- [63] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. 2006.
- [64] Ya Lei Sun and Meng Joo Er. Hybrid fuzzy control of robotics systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (6), 2004.
- [65] Feddema J. T. and Mitchell O. R. Vision guided servoing with feature based trajectory generation. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 5 no. 5:pp. 691–670, 1989.
- [66] O. Tahri, Y. Mezouar, N. Andreff, and P. Martinet. Omnidirectional visual-servo of a gough-stewart platform. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 25 no. 1:pp. 178–183, febrero 2009.
- [67] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, (1), 1985.
- [68] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O.Wang. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability, H control theory, and linear matrix inequalities. *IEEE Transions on Fuzzy Systems*, 4:1–13, 1996.
- [69] K. Tanaka and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, (4), 1992.

- 
- [70] Kazuo Tanaka, Takayuki Ikeda, and Hua O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (2), 1998.
- [71] Kazuo Tanaka and Hua Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [72] A. Tayebia and S. Islam. Adaptive iterative learning control for robot manipulators: Experimental results. *Control Engineering Practice*, 14:843–851, 2006.
- [73] B. Thuilot, P. Martinet, L. Cordesses, and J. Gallice. Position based visual servoing: Keeping the object in the field of vision. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, May 2002.
- [74] O. Tonet, F. Focacci, M. Piccigallo, L. Mattei, C. Quaglia, G. Megali, B. Mazzolai, and P. Dario. Bioinspired robotic dual-camera system for high-resolution vision. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 24 no. 1:pp. 55–64, febrero 2008.
- [75] Chung-Shi Tseng, Bor-Sen Chen, and Huey-Jian Uang. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T–S fuzzy model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (3), 2001.
- [76] Rong-Jong Wai and Po-Chen Chen. Robust neural-fuzzy-network control for robot manipulator including actuator dynamics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, (4), 2006.
- [77] Rong-Jong Wai and Zhi-Wei Yang. Adaptive fuzzy neural network control design via a T–S fuzzy model for a robot manipulator including actuator dynamics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics.*, (5), 2008.
- [78] H. Wang, Y.H Liu, and D. Zhou. Adaptive visual servoing using point and line features with an uncalibrated eye-in-hand camera. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 24(4), 2008.
- [79] Hua Wang, Kasuo Tanaka, and Mark Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, March 1995.
- [80] L. Weiss, A. Sanderson, and C. Neuman. Dynamic visual servo control of robots: An adaptive image-based approach. pages 662–668, Pittsburgh,USA, 1985.

- 
- [81] G. Wells, C. Venaille, and C. Torras. Vision-based robot positioning using neural networks. *Image Vision Computer*, vol. 10:pp. 715–732, 1996.
- [82] Hesheng Weng, Yun Hui Liu, and Weidong Chen. Uncalibrated visual tracking control without visual velocity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, (6), 2010.
- [83] Zhi-Hong Xiua and Guang Rena. Stability analysis and systematic design of Takagi Sugeno fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, (151), 2005.
- [84] E. Zergeroglu, D. Dawson, S. de Queiroz, and A. Behal. Vision based nonlinear tracking controllers with uncertain robot camera parameters. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 6(3):332–337, Sept. 2001.
- [85] Jian Zhang and Minrui Fei. Analysis and design of robust fuzzy controllers and robust fuzzy observers of nonlinear systems. In *6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, China*, June 2006.