UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

PRESIONES HIDRODINAMICAS EN PRESAS DURANTE TEMBLORES DEBIDAS A ACELERACION VERTICAL

T E S I S

que presenta el Ing.

JOSE FABIAN WOLFFER PALLARES

para optar al grado de:

DOCTOR EN INGENIERIA

(E S T R U C T U R A S)

México, D. F. 1970

Reconocimiento

Este trabajo forma parte del plan de trabajo conjunto entre la Secretaría de Recursos Hidráulicos y el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Agradezco en forma muy especial al Ing. José Hernández Terán la oportunidad que me brindó para desarrollar este trabajo y al Dr. Emilio Rosenblueth por su orientación y dirección del mismo.

Mi agradecimiento al Centro de Cálculo Electrónico de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, en particular a los ingenieros Javier Belaunzarán García, Alexis Aguilar Maldonado y Edmundo Rodarte Ramón, por la codificación de los programas desarrollados y su proceso en la computadora así como al Sr. René Carmona Oses por la elaboración de las gráficas presentadas, a las señoritas perforistas, a los operadores del equipo CDC 3300, a la señorita Ma. del Refugio Emma Torres Pico por su cuidadosa transcripción y a todas las personas cuya cooperación hizo posible el cálculo de los resultados aquí presentados.

I N D I C E

PRESIONES HIDRODINAMICAS EN PRESAS DURANTE TEMBLORES DEBIDAS A ACELERACION VERTICAL

Introducción

Para analizar el efecto de la componente vertical de los temblores en la presión hidrodinámica que actúa en presas es necesario hacer hipótesis respecto a:

a) La geometría del vaso, deformaciones de la cortina y deformaciones de las paredes del vaso
b) Las propiedades del movimiento perturbador
c) Las características del fluido.

De todas estas hipótesis es necesario distinguir cuáles tienen mayor influencia sobre la determinación de la presión hidródinámica; ya que mejorándolas se podrá llegar a un estado más realista en la solución del problema.

Este análisis es importante debido a que los resultados teóricos presentan valores de la presión hidrodinámica comprendidos en un rango muy amplio y sobre todo muy alto en comparación con la presión hidrostática debida a la acción de la gravedad.

Chopra[1] resuelve el problema y encuentra que para un vaso de 100 pies de profundidad y utilizando la componente vertical del temblor de El Centro California, 1940, los valores de la fuerza hidrodinámica que obraría contra la cortina y el momento de volteo correspondiente en la base de la cortina serían más de tres veces los debidos a la acción de la gravedad.

Hatano[2] utilizando una analogía eléctrica resuelve el problema pero considera el agua como si fuese incompresible. El y otros investigadores [3-4] hacen la misma hipótesis de incompresibilidad y tomando este criterio se encontraría que los valores de la fuerza y el momento de volteo hidrodinámicos para el temblor de El Centro serían menores que la quinceava parte de los valores obtenidos según el primer criterio.

Rosenblueth[5] toma en cuenta la reflexión de las ondas de sonido que viajan en el líquido y considera refracción en la roca; este análisis incorporará en un modelo matemático algunas de las numerosas hipótesis que pueden ser decisivas en la determinación de la presión hidrodinámica.

A la luz de la experiencia y de los resultados de otros análisis resulta muy probable que el criterio simplista, que incorpora la compresibilidad del agua pero desprecia la de la roca, sobrestima las presiones hidrodinámicas, uno de los factores a corregir es, indudablemente, el correspondiente a la forma del vaso, en efecto, si como en la mayor parte de los estudios realizados, se lo supone prismático, con fondo horizontal, deja de tenerse en cuenta una causa importante de la dispersión de las ondas en el agua,

En este trabajo se desarrollará una teoría aproximada de la influencia de la forma de la sección del vaso en la determinación de la presión hidrodinámica; se analizará la sensibilidad de dicha hipótesis, tomando la componente vertical del temblor de El Centro, California, 1940, para poder comparar los resultados obtenidos con aquellos ya publicados. De este estudio se verá la conveniencia de tomar en cuenta este efecto.

Nath[6] resuelve el problema para vasos de forma arbitraria por medio de una analogía eléctrica. En este método las condiciones de frontera se satisfacen y las soluciones se obtienen para vibraciones de cuerpo rígido de la cortina. No se toma en cuenta el efecto del oleaje efecto que sí se tomará en cuenta en este trabajo.

Planteamiento del problema

En este caso se adoptaron las siguientes hipótesis:

1. El vaso es cilíndrico de sección semicircular
2. El comportamiento de los materiales es lineal
3. El líquido es invíscido e irrotacional
4. Se limita el movimiento a velocidades y desplazamientos pequeños.
5. Sobre la superficie original del líquido se considera el efecto de olas de gravedad.

6. La perturbación consiste en aceleración vertical actuando simultáneamente en todo el fondo del vaso.

Cuando el líquido se encuentra en reposo y se le inducen movimientos de alguna manera, para saber cómo se mueve cada partícula del fluido habrá que emplear tres coordenadas. Puede darse el caso que baste con usar dos, cuando el líquido se mueve en secciones paralelas entre sí.

De esta manera, si cualquier sección plana tiene el mismo estado de movimiento que otra paralela a ella se tendrá un movimiento bidimensional, y el movimiento perturbador que alteró el estado inicial del agua se encontrará alojado en los mismos planos que las secciones representativas del estado bidimensional y con magnitud igual en ellos. Puede ser el movimiento excitador como el del fluido, horizontal, vertical o inclinado. Ello da lugar en cada caso sobre las paredes del vaso a presiones distintas en magnitud y dirección.

Con la notación que consigna la fig. 1 y las hipótesis que hemos admitido el problema consiste en resolver la siguiente ecuación diferencial[7]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \qquad (1)$$

donde Φ es el potencial de velocidades. Si u y v representan las componentes del desplazamiento paralelas a los ejes coordenados x-y se debe de cumplir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad (2)$$

y la presión hidrodinámica en términos de Φ estará dada por:

$$p = \frac{\gamma}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (3)$$

donde γ es el peso volumétrico del agua, g la aceleración de la gravedad, t significa tiempo y c es la velocidad del sonido en el agua y vale*: $\left(\frac{g E_v}{\gamma}\right)^{1/2}$. Para transformar (1) a coordenadas pola

* E_v — Módulo de compresibilidad volumétrico.

res se tiene[8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \qquad (4)$$

y (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Respuesta a movimientos verticales

La ecuación diferencial ha de resolverse sujeta a las siguientes condiciones de frontera y condiciones iniciales[9]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(r,0,t) + \frac{g}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r,0,t) = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(r,\pi,t) - \frac{g}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(r,\pi,t) = 0 \qquad (7)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)(r_0,\theta,t) = \ddot{v}_g(t)\operatorname{sen}\theta \qquad (8)$$

en las cuales $\ddot{v}_g(t)$ es la componente vertical de la aceleración del terreno.

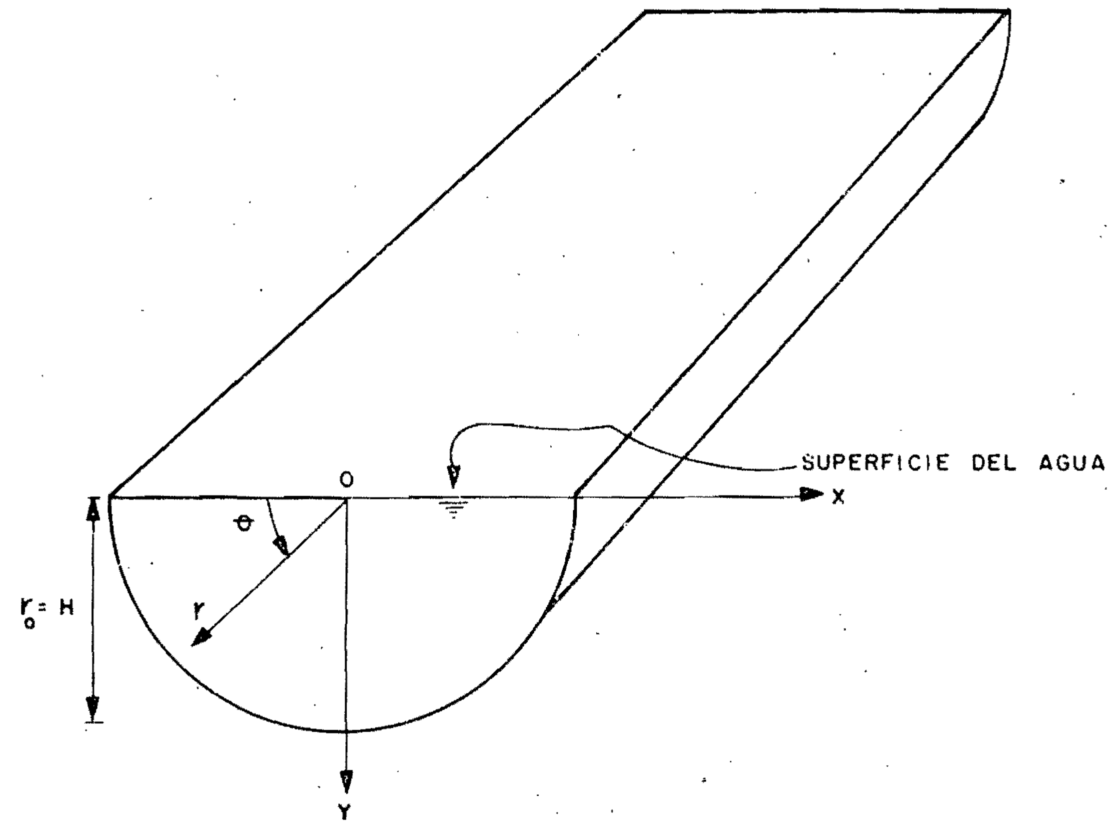
Si el vaso está en reposo cuando el temblor empieza, las condiciones iniciales son[10]:

$$\phi(r,\theta,0) = 0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,\theta,0) = 0 \qquad (10)$$

Para resolver la ecuación (5) para una excitación arbitraria se puede utilizar el método de la respuesta de frecuencia compleja junto con la integral de Fourier y el uso de la respuesta a un impulso unitario con la integral de convolución[11]. Estos métodos están intimamente relacionados ya que son esencialmente transformadas de Fourier uno del otro.

El último método se usa generalmente para excitaciones arbitrarias tales como temblores. Sin embargo en este problema es interesante determinar la respuesta de frecuencia compleja por que proporciona una comparación directa con los resultados obtenidos sin tomar en cuenta el efecto de olas de gravedad sobre la su perficie original del líquido. La respuesta a un impulso unitario se obtiene tomando la transformada de Fourier inversa de la respuesta de frecuencia compleja.



VASO CILINDRICO DE SECCION SEMICIRCULAR — LONGITUD INFINITA

FIG. 1

Respuesta de frecuencia compleja

Es una propiedad de los sistemas lineales constantes en el tiempo que cuando la excitación es un movimiento armónico simple estacionario (sin tomar en cuenta las condiciones iniciales), la respuesta es también un movimiento armónico simple de la misma frecuencia. La amplitud y fase de la respuesta dependen de la frecuencia y ésta está definida por la respuesta de frecuencia compleja $H_{\Phi}^{\theta}(\omega)$, la cual tiene la propiedad que cuando la excitación es la parte real de $e^{i\omega t}$ entonces la respuesta es la parte real de $H_{\Phi}^{\theta}(\omega)$[12-13]

Sea $\ddot{v}_g(t) = e^{i\omega t}$. La solución de la ecuación (5) para el potencial de velocidades Φ será de la forma:

$$\Phi(r,\theta,t) = H_{\Phi}^{\theta}(r,\theta,\omega)\, e^{i\omega t} \tag{11}$$

donde $H_{\Phi}^{\theta}(r,\theta,\omega)$ = respuesta de frecuencia compleja de Φ debida a un movimiento a lo largo de la frontera circular. Esta solución puede obtenerse por diferentes métodos; en este caso el problema fundamental son las condiciones de frontera. Se indicarán a continuación los métodos analíticos con los cuales se puede satisfacer la ecuación (5), pero no son apropiados para las condiciones de frontera. Finalmente se presentará la solución establecida por métodos aproximados indicando las limitaciones de la misma.

Método de separación de variables

El método de separación de variables[14] consiste en escoger soluciones producto de (11) en la forma:

$$H_{\Phi}^{\theta}(r,\theta,\omega) = R(r)\,.\,\Theta(\theta) \tag{12}$$

tomando en cuenta (11) y (12) y substituyendo Φ en la ecuación (5) se tiene que las funciones R y Θ deben de ser tales que satisfagan las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias[15]:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - k^2\right).\,R = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2\Theta = 0 \tag{14}$$

donde k^2 es la constante de separación.

Las soluciones de (13) y (14) se establecen en términos de funciones de Bessel y funciones armónicas[16], y si se acota R para $r = 0$ [17], estas quedan definidas por:

$$R = A_k J_k\left(\frac{\omega r}{c}\right) \tag{15}$$

$$\Theta = C_k \cos k\theta + D_k \operatorname{sen} k\theta \tag{16}$$

por lo que finalmente substituyendo (15) y (16) en (12), H_ϕ^θ se expresa como:

$$H_\phi^\theta = A_k J_k\left(\frac{\omega r}{c}\right)\left[C_k \cos k\theta + D_k \operatorname{sen} k\theta\right] \tag{17}$$

donde A_k, C_k, D_k son constantes asociadas con k y que deben ser calculadas satisfaciendo las condiciones de frontera (6), (7) y (8), las que en términos de R y Θ son:

$$-\omega^2\Theta(0) + \frac{g}{r}\frac{d\Theta}{d\theta}(0) = 0 \tag{18}$$

$$-\omega^2\Theta(\pi) - \frac{g}{r}\frac{d\Theta}{d\theta}(\pi) = 0 \tag{19}$$

$$-\frac{dR}{dr}(r_0) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{i\omega} \tag{20}$$

pero (18) y (19) no pueden ser satisfechas por R y Θ, ya que no son separables porque se llega a la conclusión de que $\Theta(0)$ y $\Theta(\pi)$ deben de ser funciones de r. Por lo tanto, el método de separación de variables genera una solución que satisface la ecuación diferencial pero no satisface completamente las condiciones de frontera, por lo que no es adecuado para definir H_ϕ^θ.

Métodos de transformadas

Dentro del campo de las transformadas la más común es la de Laplace[18], que transforma a las funciones por medio de:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{21}$$

donde $f(s)$ es la imagen o transformada de Laplace de $F(t)$ que es la función original. Definiendo

$$f(r,\theta,s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(r,\theta,t)\, dt \tag{22}$$

la ecuación diferencial (5) se transforma en[19]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=\frac{s^2 f}{c^2}-s\,\Phi(0)-\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0) \qquad (23)$$

pero $\Phi(r,\theta,0)=\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r,\theta,0)=0$ (condiciones iniciales)

con lo que (23) queda como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=\frac{s^2 f}{c^2} \qquad (24)$$

con condiciones de frontera:

$$s^2 f(r,0,s)+\frac{g}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,0,s)=0 \qquad (25)$$

$$s^2 f(r,\pi,s)-\frac{g}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\pi,s)=0 \qquad (26)$$

$$-s\frac{\partial f}{\partial r}(r_0,\theta,s)=\mathcal{L}\{\ddot{v}_g(t)\}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (27)$$

De las expresiones anteriores $\mathcal{L}\{\ddot{v}_g(t)\}$ representa la transformada de Laplace de la excitación arbitraria vertical $\ddot{v}_g(t)$, la cual se puede determinar si se idealiza el movimiento del terreno como una serie de pulsos[20], en cuyo caso la imagen de $\ddot{v}_g(t)$ será una función exclusivamente de s. Sin embargo, si se hubiese utilizado la respuesta de frecuencia compleja $\ddot{v}_g(t)=e^{i\omega t}$, en cuyo caso substituyendo s^2 por $-\omega^2$, se tendría la ecuación diferencial (24) y las condiciones de frontera (25), (26) y (27) sin necesidad de haber aplicado la transformada de Laplace a (5) y a las condiciones de frontera originales. Pero como la dificultad fundamental la constituyen las propias condiciones de frontera, se puede continuar el análisis con la ecuación diferencial definida por (24) y las condiciones de frontera (25), (26) y (27).

Cuando un problema de valores iniciales tiene más de una variable la transformada de Laplace elimina la variable tiempo pero aún deja una ecuación diferencial parcial en el espacio de variables. Para resolver este nuevo problema es conveniente utilizar series de Fourier y transformadas de Fourier, de tal manera que varios métodos de transformación sean usados en combinación. Para continuar con el proceso de eliminación de las variables se pueden usar la transformada coseno o la transformada seno de Fourier[21], pero con cualquiera de las dos se llegaría a establecer dentro de la ecuación diferencial a $f(r,0,s)$ y $f(r,\pi,s)$ en términos de sus derivadas calculadas en los mismos puntos y que se desconocen; por lo que dentro de la ecuación se tendría una función de r desconocida. Para intentar resolver la ecuación diferencial ordinaria en términos de una función de r se debe de proceder por tanteos y obtener la antitransformada y comparar con la función propuesta; pero en este proceso no se puede determinar su convergencia ni si las expresiones son lo suficientemente simples como para continuar con el proceso hasta regresar al problema original.

Transformada coseno de Fourier

Si:

$$F_n(r,n,s) = \int_0^{\pi} f(r,\theta,s)\cdot\cos n\theta\, d\theta \tag{28}$$

la ecuación diferencial (24) se transforma en:

$$\frac{d^2F_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_n}{dr} + F_n\left(n^2 - \frac{s^2}{c^2}\right) = R(r) \tag{29}$$

en donde $R(r)$ es una función exclusiva de r que contiene a la función f y a sus derivadas[21] calculadas en 0 y π. Las condiciones de frontera son ahora:

$$\frac{dF_n}{dr}(r_0,n,s) = \text{constante} \tag{30}$$

donde la constante sería el producto de las transformadas[21] de $\ddot{v}_g(t)$ y de $\operatorname{sen}\theta$. La dificultad se hace evidente ahora: la función R es desconocida y se necesita en la solución definida para F_n, como una función de Green[22], suponerla y calcular a f antitransformando (28); si la f así calculada y la supuesta son iguales, el proceso termina; en caso contrario se vuelve a continuar usando como nueva f a la calculada en (28). Si se hubiera utilizado la transformada seno[21] de Fourier, $R(r)$ hubiera cambiado y la constante en (30) también; pero la secuencia sigue siendo la misma.

La manera de proceder, satisfaciendo condiciones de frontera homogéneas en θ, es inadecuada usando el método de separación de varia bles; por lo que se procederá en forma inversa, se empezará por satisfacer condiciones de frontera homogéneas en r y posteriormente se hará la expansión en θ. Para poder hacer esto, es necesario quitarles a las condiciones en θ su homogeneidad y esto se logra descomponiendo la solución en dos partes:

Si $$H_{\Phi}^{\theta} = h(r,\theta) + R(r)\,\text{sen}\,\theta \tag{31}$$

la ecuación diferencial (5) queda como:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}h + \text{sen}\,\theta\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + R\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right] = 0 \tag{32}$$

que se puede satisfacer si h y R son tales que cumplen con:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2}h = 0 \tag{33}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + R\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \tag{34}$$

condiciones de frontera:

$$-\omega^2 h + \frac{g}{r}\left[\frac{\partial h}{\partial \theta} + R\right] = 0 \tag{35}$$

$$-\omega^2 h - \frac{g}{r}\left[\frac{\partial h}{\partial \theta} - R\right] = 0 \tag{36}$$

$$-\left[\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{dR}{dr}\,\text{sen}\,\theta\right] = \frac{\text{sen}\,\theta}{i\omega} \tag{37}$$

finalmente, (35), (36) y (37) se escriben como:

$$-\omega^2 h(r,0) + \frac{g}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,0) = -\frac{g}{r}R(r) \tag{38}$$

$$-\omega^2 h(r,\pi) - \frac{g}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\pi) = -\frac{g}{r}R(r) \tag{39}$$

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r_0,\theta) = 0 \;;\; \frac{dR}{dr}(r_0) = -\frac{1}{i\omega} \tag{40}$$

con lo que se le ha quitado a las condiciones en θ su homogeneidad y h satisface condiciones homogéneas en r. La función R que satisface la ecuación (34) y la (40), se obtiene como la función generada en (15) por el método de separación de variables y vale:

$$R = A_1 J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) \tag{41}$$

donde:

$$A_1 = -\frac{1}{i\omega} \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial r}\left(\frac{\omega r}{c}\right)\Big|_{r=r_0}} \tag{42}$$

por lo que $R\,sen\,\theta$ es la solución que no toma en cuenta el efecto del oleaje[23], ya que en la superficie $sen\,\theta=0$. En el anexo 1 se presenta la solución completa tomando la respuesta de frecuencia compleja para generar la debida a un impulso unitario y finalmente por medio de la integral de convolución la debida a un impulso cualquiera.

Una vez definida R es necesario determinar A para generar la solución completa H_{ℓ}^{θ}. Para poder hacerlo se puede proceder de dos maneras:

a) definir A utilizando el método de separación de variables

b) definir A utilizando la solución de la ecuación (33) expresada en coordenadas rectangulares y aplicando la transformación (4) expresarla en coordenadas polares.

a) A definida por el método de separación de variables

Si $$A(r,\theta) = R(r).\Theta(\theta) \tag{43}$$

R y Θ están definidas por[14]:

$$R = A_{\ell} J_{\ell}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \tag{44}$$

$$\Theta = C_{\ell} \cos \ell\theta + D_{\ell}\, sen\, \ell\theta \tag{45}$$

como $A = R\Theta$ debe satisfacer condiciones de frontera homogéneas en $r=r_0$ para su derivada, se tiene:

$$\frac{dR}{dr}(r=r_0) = 0 \tag{46}$$

pero $$\frac{dR}{dr} = A_{\ell}\left[\frac{\omega}{c} J_{\ell-1}\left(\frac{\omega r}{c}\right) - \frac{\ell}{r} J_{\ell}\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right]$$

y para $r=r_0$, como $A_{\ell} \neq 0$:

$$\frac{\omega}{c} J_{\ell-1}\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \frac{\ell}{r_0} J_{\ell}\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) = 0 \tag{47}$$

utilizando el desarrollo asintótico[24] de las funciones de Bessel se tiene que[25]:

$$k_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega r_0}{c} - n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \tag{48}$$

donde k_n son los valores característicos de (47). Como puede observarse los valores definidos en (48) no son enteros por lo que tampoco lo es el orden de las funciones de Bessel que satisfacen la condición homogénea en $r = r_0$. Substituidas estas funciones en (45) hacen que, para $\theta = \pi$, $\cos k_n\theta$ y $\operatorname{sen} k_n\theta$ sean diferentes de cero, por lo que no pueden satisfacerse las condiciones de frontera (38) y (39) por la presencia de π en el denominador de la derivada de A.

b) A definida utilizando la solución de (33) en coordenadas rectangulares.

La ecuación (33) expresada en coordenadas rectangulares toma la forma:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2 A}{c^2} \tag{49}$$

la solución de (49) generada por el método de separación de variables[26] es:

$$A(x,y) = (C_1 e^{iky} + C_2 e^{-iky}).(C_3 e^{k_1 x} + C_4 e^{-k_1 x}) \tag{50}$$

donde $k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$ y k^2 es la constante de separación.

Aplicando la transformación (4) a (50) tenemos:

$$A(r,\theta) = (C_1 e^{ikr\operatorname{sen}\theta} + C_2 e^{-ikr\operatorname{sen}\theta}).(C_3 e^{k_1 r\cos\theta} + C_4 e^{-k_1 r\cos\theta}) \tag{51}$$

la solución (51) sí satisface las condiciones de frontera originales en θ ya que las variables r y θ no están separadas, pero no satisface las condiciones en r ya que es necesario hacerlo con soluciones producto; pero como al descomponer H_ϕ^θ en dos partes A satisface ahora condiciones homogéneas en r es necesario separar r y θ para generar los valores característicos k_n. Como comentario adicional (51) representa la solucion más general de la ecuación diferencial (5) ya que dando valores a k se pueden generar todas las posibles soluciones de (5). Si por ejemplo $k=\frac{\omega^2}{c^2}$ entonces $k_1=0$ y (51) se reduce a:

$$h(r,\theta)=C_1 e^{ikr\,sen\theta}+C_2 e^{-ikr\,sen\theta} \qquad (52)$$

que es precisamente la solución obtenida por el método de separación de variables ya que $e^{ikr\,sen\theta}$ y $e^{-ikr\,sen\theta}$ aceptan los siguientes desarrollos en serie[27]:

$$e^{\pm ikr\,sen\theta}=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(kr)\cos 2n\theta$$
$$+\;2i\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(kr)sen(2n+1)\theta \qquad (53)$$

y como[28] $e^{\pm ikr\,sen\theta}=\cos(kr\,sen\theta)\pm i\,sen(kr\,sen\theta)$

entonces (53) se transforma en

$$\cos(kr\,sen\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_{2n}J_{2n}(kr)\cos 2n\theta \qquad (54)$$

$$sen(kr\,sen\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_{2n+1}J_{2n+1}(kr)sen(2n+1)\theta \qquad (55)$$

donde ϵ_n son los factores de Neumann que tienen la propiedad de que

$$\epsilon_0=1\quad,\qquad \epsilon_n=2\qquad (n\neq 0) \qquad (56)$$

Con las expresiones (54) y (55), (51) se puede escribir como:

$$h(r,\theta)=[A_1\cos(kr\,sen\theta)+B_1\,sen(kr\,sen\theta)]\cdot$$
$$[C_1\cosh(k_1 r\cos\theta)+D_1\,senh(k_1 r\cos\theta)] \qquad (57)$$

donde $\cosh$ y $senh$ son funciones hiperbólicas que pueden expresarse en términos de funciones armónicas como[29]:

$$i\,senh\,z = sen\,iz$$
$$\cosh z = \cos iz \qquad (58)$$

en cuyo caso se tendrían en (57), utilizando (54), (55) y (58), funciones de Bessel con argumento real, multiplicadas por funciones de Bessel con argumento imaginario.

De acuerdo con lo anterior (51) formalmente se puede escribir como:

$$h(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_1(r,\theta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_2(r,\theta) \qquad (59)$$

pero el producto de dos suman infinitas es igual a otra suma infinita[30]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k . K(k) . \sum_{k=0}^{\infty} b_k . K(k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k . K(k) \qquad (60)$$

donde $\quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k . b_{n-k}$

por lo que (59) podrá reducirse a una forma similar a la expresada en (60), ya que además las funciones de Bessel de argumento imaginario se expresan en términos de funciones de Bessel de argumento real[31]. Sin embargo como se observa la expresión (59) aún cuando ya está separada en funciones producto de r y θ no es lo suficientemente manejable para poder satisfacer las condiciones de frontera en r, por lo que no es conveniente su uso. En este caso la h definida por (51) sí satisface condiciones de frontera homogéneas originales en θ, pero como k está asociada a r se deben generar los valores característicos en dicha variable utilizando sus condiciones homogéneas definidas en (40) y luego satisfacer las condiciones (38) y (39); es por eso que se planteó como medio de solución el indicado anteriormente, pero se ha visto que tampoco conduce a resultados inmediatos.

Con todos los procedimientos descritos se ha intentado indicar que la solución analítica ofrece desventajas grandes en cuanto a su desarrollo. En unos casos satisface condiciones de frontera solamente en una variable y en otros el proceso de cálculo es demasiado complicado como para que sea práctico su uso. Es por eso que se presenta a continuación un método numérico apropiado y sencillo en su desarrollo. Esto no asegura que sea el único ni el más conveniente, pero se ha empleado en problemas parecidos con anterioridad[32] y ha dado resultados aceptables.

Método de diferencias finitas

La solución numérica de ecuaciones diferenciales consiste en obtener los valores numéricos de la solución desconocida en algunos puntos pivotes espaciados en el plano X-Y para ecuaciones diferenciales parciales en dos dimensiones. Para conocer en los puntos pivotes la solución es necesario aproximar las derivadas por parábolas de grado n pasando por dichos puntos o por expansión en series de Taylor de la solución desconocida. Haciendo esto y tomando en cuenta las condiciones de frontera se establece un sistema de ecuaciones algebraicas en las que las incógnitas son los valores de la solución en los puntos pivotes. La aproximación del método depende fundamentalmente de cuán espaciados queden estos puntos, ya que si se tuviese un número infinito de ellos uniformemente espaciados la solución numérica coincidiría con la solución analítica.

Respuesta de frecuencia compleja

Substituyendo (11) en (5) la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} H_\phi = 0 \qquad (61)$$

Para obtener la solución de (61) en forma adimensional es necesario que: $r = \rho r_0$ en cuyo caso:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \rho}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \qquad (62)$$

y (61) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} H_\phi = 0 \qquad (63)$$

con condiciones de frontera:

$$-\omega^2 H_\phi(\rho,0) + \frac{g}{\rho r_0}\frac{\partial H_\phi}{\partial \theta}(\rho,0) = 0 \qquad (64)$$

$$-\omega^2 H_\phi(\rho,\pi) - \frac{g}{\rho r_0}\frac{\partial H_\phi}{\partial \theta}(\rho,\pi) = 0 \qquad (65)$$

$$-\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho}(1,\theta) = \frac{r_0 \operatorname{sen}\theta}{i\omega} \qquad (66)$$

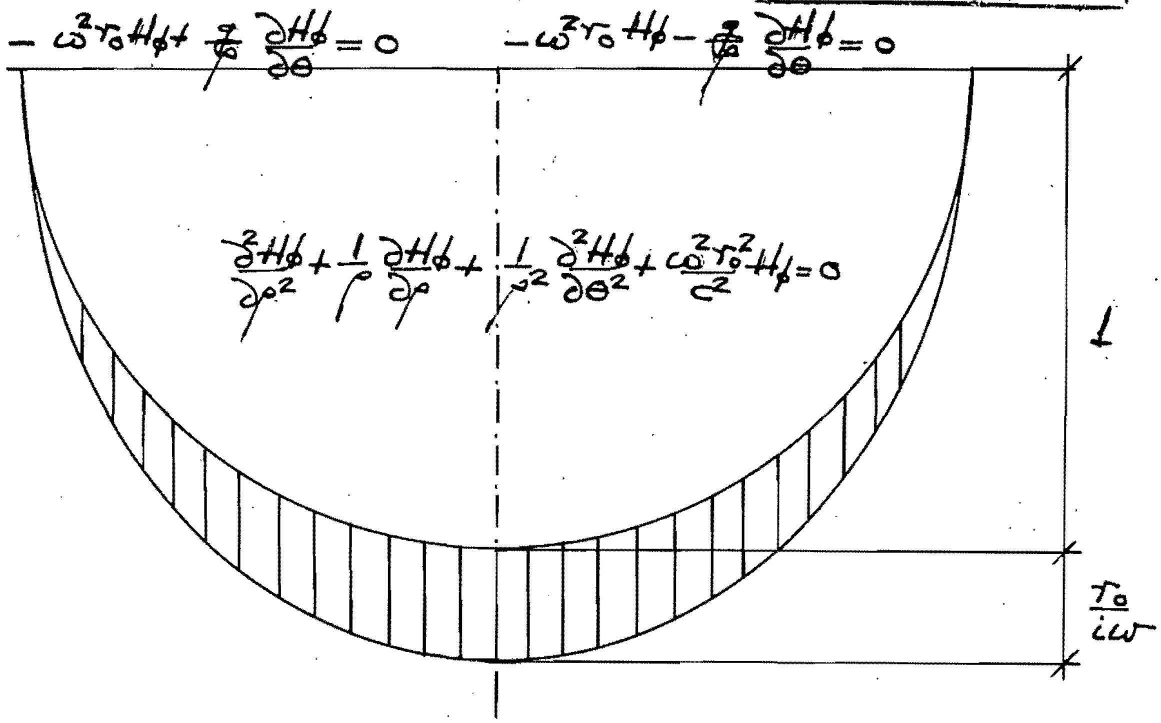


Fig. 2 Formulación adimensional del problema

La ecuación (63) sujeta a las condiciones (64), (65) y (66) se resuelve por el método de diferencias finitas substituyéndola por la suma de los operadores[33]:

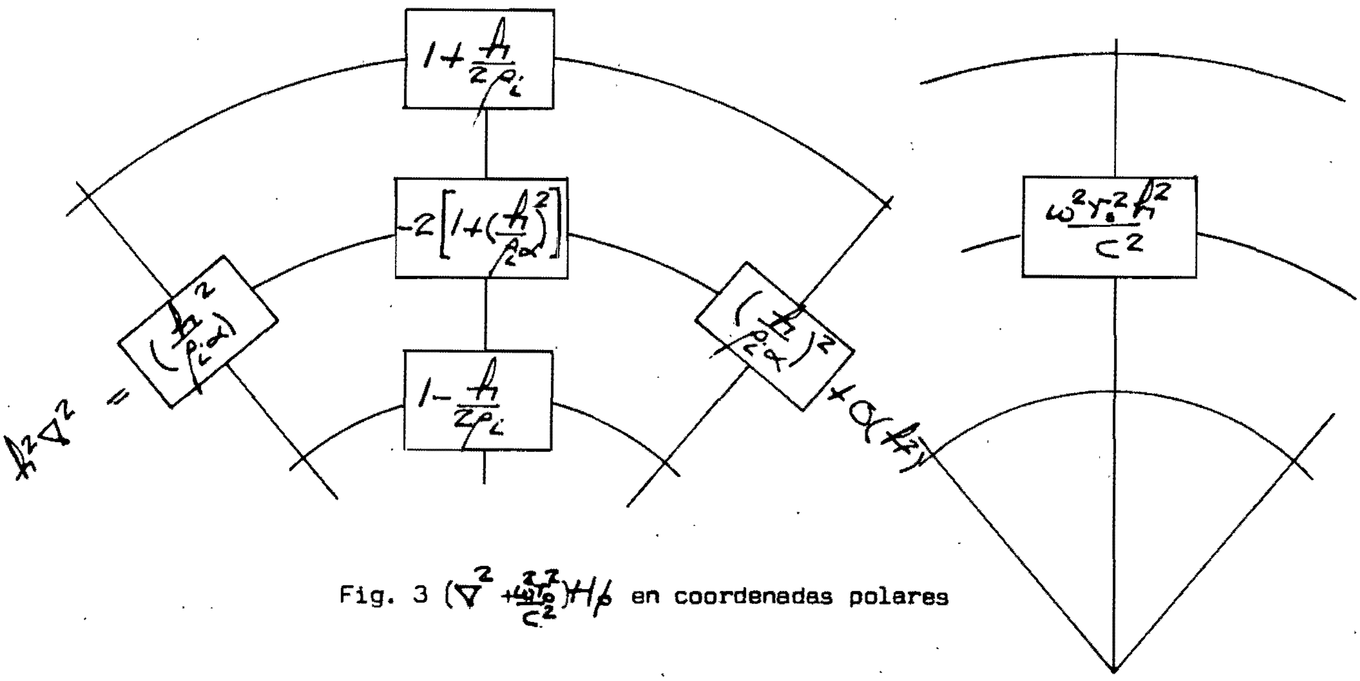


Fig. 3 $\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2 r_o^2}{c^2}\right) H_\phi$ en coordenadas polares actuando en los puntos[34].

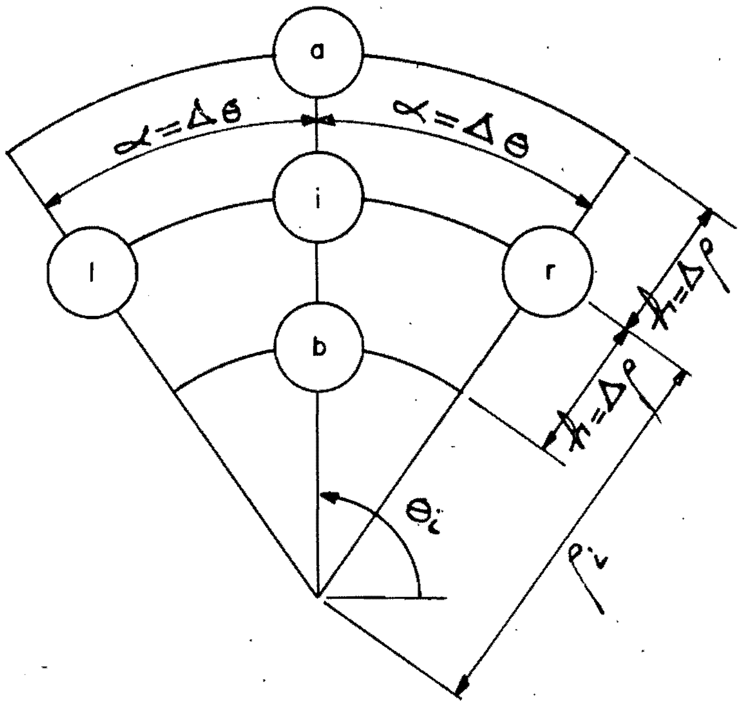


Fig. 4 Celosía en coordenadas polares

Los operadores así definidos deben aplicarse en el interior del medio limitado por la frontera circular y el nivel libre del líquido; en estas fronteras las condiciones están definidas por las ecuaciones (64) y (65); las que deben expresarse análogamente a (63) en diferencias finitas. Para hacer esto es necesario utilizar[35]:

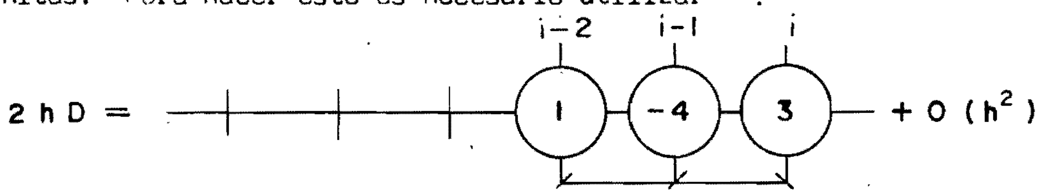
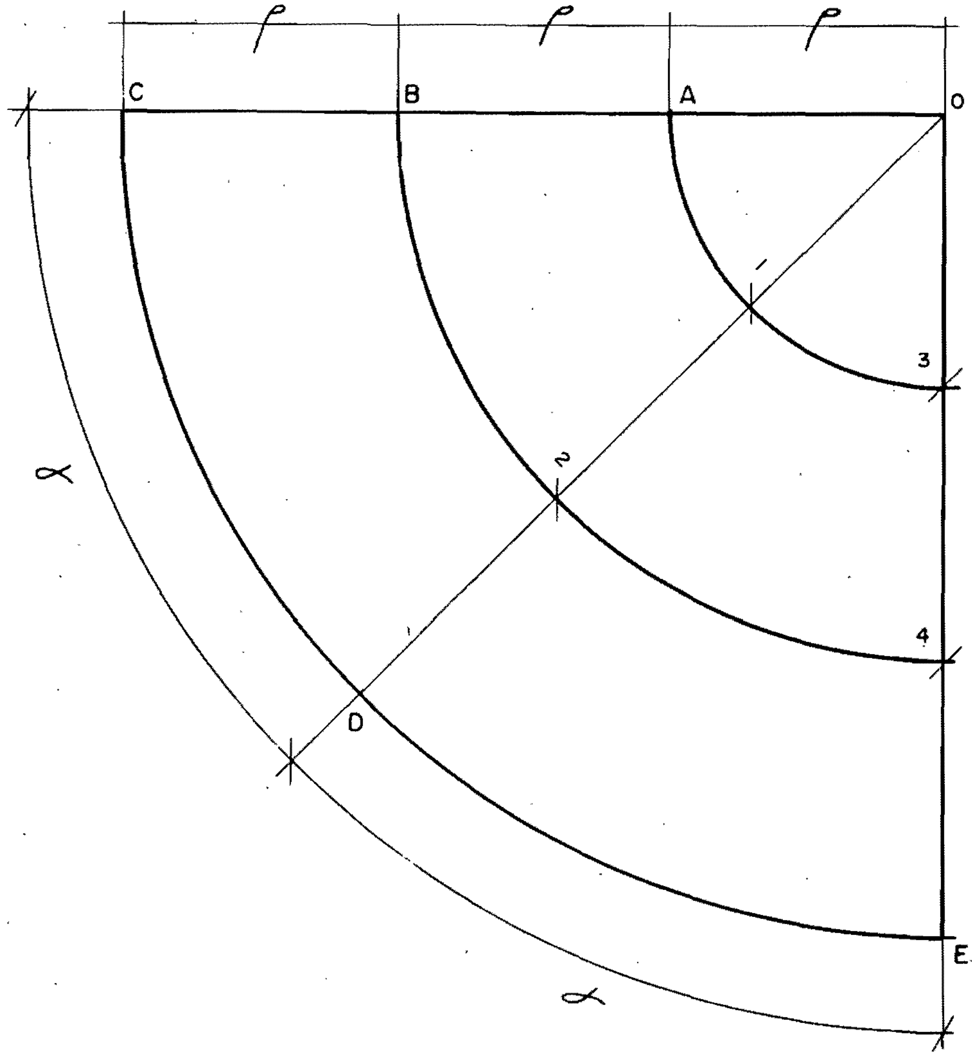


Fig. 5 Operador $D = \frac{\partial}{\partial x}$ en diferencias hacia atrás

Combinando los operadores así definidos es posible resolver el problema continuo discretizado en los puntos pivotes, y de esta manera se puede medir la influencia del oleaje en la determinación de la presión hidrodinámica.



MALLA CIRCULAR

$\rho = \frac{1}{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

RESPUESTA DE FRECUENCIA COMPLEJA (CON OLEAJE)

METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

FIGURA 6

Solución tomando en cuenta el efecto del oleaje

Para establecer el sistema de ecuaciones para la malla definida en la figura 6 se tienen las siguientes características geométricas.

$$\rho_A = \rho_1 = \rho_3 = \rho \qquad \alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 0$$
$$\rho_B = \rho_2 = \rho_4 = 2\rho \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_D = \alpha$$
$$\rho_C = \rho_D = \rho_E = 3\rho \qquad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_E = 2\alpha$$
$$h = \rho = 1/3 \qquad \alpha = \pi/4$$

Por lo que las ecuaciones obtenidas centrando los operadores en el interior del medio son:

$$X_1\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2}\right] + \frac{X_C}{2} + \frac{3X_2}{2} + (X_A + X_3)\cdot\frac{1}{\alpha^2} = 0 \quad (67)$$

$$X_2\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2}\right] + \frac{3X_1}{4} + \frac{5X_D}{4} + (X_B + X_4)\cdot\frac{1}{4\alpha^2} = 0 \quad (68)$$

$$X_3\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2}\right] + \frac{X_C}{2} + \frac{3X_4}{2} + 2X_1\cdot\frac{1}{\alpha^2} = 0 \quad (69)$$

$$X_4\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2}\right] + \frac{3X_3}{4} + \frac{5X_E}{4} + 2X_2\,\frac{1}{\alpha^2} = 0 \quad (70)$$

En total hay 4 ecuaciones con 9 incógnitas; o sea se tienen 5 incógnitas adicionales, las que se deben de eliminar de las ecuaciones definidas por las condiciones de frontera para formar un sistema completo de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Las incógnitas adicionales son X_A, X_B, X_D, X_E, las que se relacionan con X_1, X_2, X_3 y X_4 por las condiciones de frontera.

Condiciones de frontera

Condición de Poisson en la superficie libre

$$-\omega^2 H_\theta(\rho,0) + \frac{g}{\rho r_0}\frac{\partial H_\theta(\rho,0)}{\partial\theta} = 0$$

utilizando el operador $\frac{\partial}{\partial\theta}$ en diferencias hacia atrás se tiene:

$$-\omega^2 X_C + \frac{g}{3\rho r_0}\cdot\frac{3X_C - 4X_D + X_E}{2\alpha} = 0 \qquad (71)$$

$$-\omega^2 X_B + \frac{g}{2\rho r_0}\cdot\frac{3X_B-4X_2+X_4}{2\alpha} = 0 \qquad (72)$$

$$-\omega^2 X_A + \frac{g}{\rho r_0}\cdot\frac{3X_A-4X_1+X_3}{2\alpha} = 0 \qquad (73)$$

Como el punto X_0 tiene $\rho = 0$, se utilizará como ecuación para ese punto:

$$X_0 = 0 \qquad (74)$$

Condición en la frontera circular: $-\frac{\partial H_d}{\partial \rho}(1,\theta) = \frac{r_0 \operatorname{sen}\theta}{\omega}$

$$3X_C - 4X_B + X_A = 0 \qquad (75)$$

$$\frac{3X_D - 4X_2 + X_1}{2\rho} = -r_0\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\omega} \qquad (76)$$

$$\frac{3X_E - 4X_4 + X_3}{2\rho} = -r_0\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\omega} \qquad (77)$$

De acuerdo con las ecuaciones definidas anteriormente se observa que el valor de la presión en el punto C tiene dos maneras de calcularse: una por la ecuación (71) y la otra por la ecuación (75). En el problema continuo el valor de la presión en dicho punto es único, por lo que (71) y (75) deberían de ser iguales; sin embargo esto no sucederá ya que se ha escogido una malla muy abierta. En este método la diferencia entre las dos ecuaciones tiende a cero a medida que la malla se cierra y en el límite (problema continuo), el valor también será único.

Tomando (71) o (75) y las ecuaciones (67), (68), (69) y (70) se tiene un sistema no homogéneo de 10 ecuaciones con 10 incógnitas.

Eliminando de las ecuaciones del sistema a las incógnitas adicionales X_A, X_B, X_D, X_C, X_E, se tiene el sistema final de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, el que escrito en forma matricial se indica en la fig.7.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2} + \frac{4g}{(3g\alpha^2 - 2\alpha^3 \rho r_0 \omega^2)} & 1.5 & \frac{1}{\alpha^2} - \frac{g}{(3g\alpha^2 - 2\alpha^3 \rho r_0 \omega^2)} & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2} + \frac{4g}{(12g\alpha^2 - 16\alpha^3 \rho r_0 \omega^2)} + 5/3 & 0 & \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{g}{(12g\alpha^2 - 16\alpha^3 \rho r_0 \omega^2)} \\
\frac{2}{\alpha^2} & 0 & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2} & 1.5 \\
0 & \frac{1}{2\alpha^2} & \frac{1}{3} & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2} + \frac{5}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{10}{12} \rho r_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\omega} \\ 0 \\ \frac{10}{12} \rho r_0 \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\omega} \end{bmatrix}
$$

SISTEMA I

RESPUESTA DE FRECUENCIA COMPLEJA CON OLEAJE.

FIGURA 7

<u>Solución sin tomar en cuenta el efecto del oleaje</u>

Antes de continuar con la solución del sistema 1, se establecerá la solución que no toma en cuenta el efecto del oleaje, para comparar los dos sistemas.

Si el efecto del oleaje no es incluido entonces en la frontera, $X_A = X_B = X_C = X_D = 0$, con lo que las ecuaciones (67), (68), (69) y (70) se modifican, quedando:

$$X_1\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2}\right] + \frac{3X_2}{2} + \frac{X_3}{\alpha^2} = 0 \quad (78)$$

$$X_2\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2}\right] + \frac{3X_1}{4} + \frac{5X_D}{4} + \frac{X_4}{4\alpha^2} = 0 \quad (79)$$

$$X_3\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2}\right] + \frac{3X_4}{2} + \frac{2X_1}{\alpha^2} = 0 \quad (80)$$

$$X_4\left[\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2}\right] + \frac{3X_3}{4} + \frac{5X_E}{4} + \frac{X_2}{2\alpha^2} = 0 \quad (81)$$

y las condiciones de frontera son ahora:

$$X_A = X_B = X_C = X_D = 0 \quad (82)$$

$$3X_C - 4X_B + X_A = 0 \quad (83)$$

$$\frac{3X_D - 4X_2 + X_1}{2\rho} = -r_0\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\omega} \quad (84)$$

$$\frac{3X_E - 4X_4 + X_3}{2\rho} = -r_0\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\omega} \quad (85)$$

La ecuación (83) es condición en la frontera circular y es satisfecha con la configuración de la frontera superior definida en (82).

Eliminando las incógnitas adicionales X_D y X_E de (84) y (85) se tiene el sistema final de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, el que se puede escribir en forma matricial como se indica en la figura 8.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2} & 1.5 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2} + \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{4\alpha^2} \\
\frac{2}{\alpha^2} & 0 & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2} & 1.5 \\
0 & \frac{1}{2\alpha^2} & \frac{1}{3} & \frac{\omega^2 r_0^2 h^2}{c^2} - \frac{2(4\alpha^2+1)}{4\alpha^2} + \frac{5}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{10}{12}\rho r_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\omega} \\ 0 \\ \frac{10}{12}\rho r_0 \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\omega} \end{bmatrix}
$$

SISTEMA 2

RESPUESTA DE FRECUENCIA COMPLEJA SIN OLEAJE.

FIGURA 8

Como puede observarse los sistemas 1 y 2 son iguales para valores de ω grandes ($\omega \geq 4,5$ rad/seg). El límite exacto no se cuantifica debido a que la malla es muy abierta y aún se tienen problemas para definir la presión en algunos puntos (el C por ejemplo). La discrepancia en los valores de la presión en algunos puntos es una de las limitaciones del método y el punto C no está incluido en ninguna de las ecuaciones definidas en el interior del medio. En este punto únicamente se puede definir el valor de la presión si se conocen los valores de los puntos de frontera, los que relacionados con los puntos interiores nos conducen al sistema completo de ecuaciones. Esta limitación podría utilizarse para resolver el sistema de ecuaciones por algún proceso de relajaciones, pero en este caso se ha considerado conveniente utilizar un método de solución numérico de ecuaciones como el de Gauss-Jordan debido a las características propias de los sistemas:

a) matriz de coeficientes muy porosa (muchos de los valores son nulos)

b) diagonal principal muy pesada

Para este efecto, se elaboró un programa para computadora escrito en lenguaje FORTRAN para la CDC 3300 de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, denominado DIFFIN, cuyas características se indican en el anexo 2.

Lo conveniente es utilizar una malla más cerrada en la cual se eliminen los problemas anteriores y se encuentre el valor de ω para el cual la solución del sistema con oleaje tienda a la del sistema sin oleaje.

En las figuras 9 y 10 se indican las nuevas mallas cuyas características son:

malla 2 (figura 9)

Número de círculos	5	
Número de radios	4	
Puntos en el interior		9
Puntos de frontera		8
Total de puntos		17

malla 3 (figura 10)

Número de círculos	13	
Número de radios	9	
Puntos en el interior		88
Puntos de frontera		21
Total de puntos		109

En las 3 mallas se han utilizado los siguientes datos:

ω = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 rad/seg

H =30,60,90 m

En estas mallas no se han utilizado valores de $\omega > 10$ rad/seg, debido a que para dichos valores la solución con oleaje se aproxima mucho a la sin oleaje. Para comparar los valores obtenidos con los teóricos se elaboró un programa en lenguaje FORTRAN para la CDC 3300 de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, denominado MALLASER (ver anexo 2). Dicho programa calcula los valores de la solución analítica (ver anexo 1):

$$H\phi(r,\theta,\omega) = -\frac{1}{i\omega}\,\frac{\operatorname{sen}\theta\; J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{\left[\frac{\omega}{c}J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)-\frac{1}{r_0}J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)\right]} \qquad (86)$$

en los mismos puntos que los definidos en el programa DIFFIN.

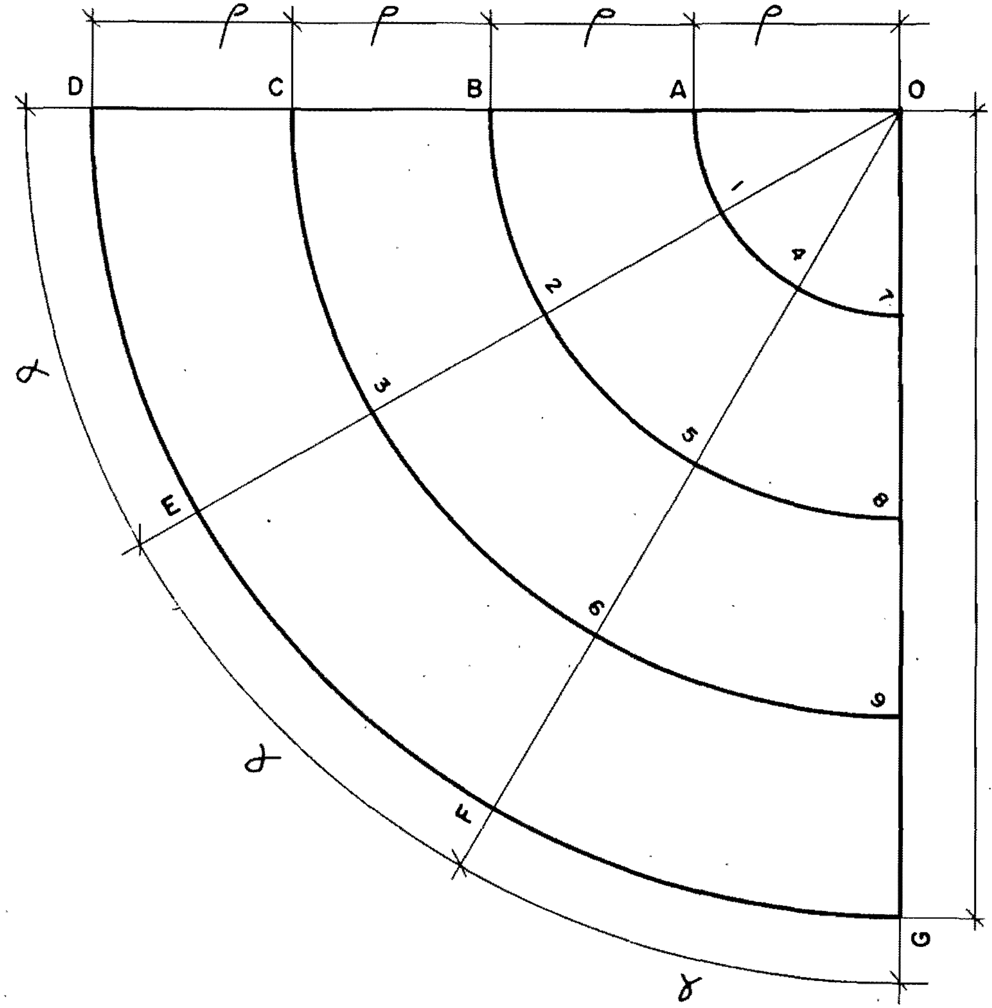
En las tablas 1,2 y 3 se indican los valores obtenidos en los puntos 1,2,3 y 4 de la malla 1 y la solución analítica. Se puede observar que para valores de $\omega > 4$ rad/seg la solución numérica tiende a la analítica, por lo que para frecuencias bajas el efecto del oleaje no influye en la determinación de las presiones. Ahora bien, como en un temblor se pueden presentar frecuencias en un rango muy amplio, se debe acotar el porcentaje de influencia de frecuencias bajas para estimar el error que se comete al no tomar en cuenta el efecto del oleaje. En forma semejante es necesario valuar la influencia de la forma de la sección del vaso en la determinación de las presiones hidrodinámicas y para hacerlo se comparan los valores obtenidos con los de Chopra[1]. La primera comparación se hará con la respuesta de frecuencia compleja definida por Chopra[36] como:

$$H\phi(x,y,\omega) = \frac{c}{i\omega^2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega}{c}(H-y)}{\cos \frac{\omega}{c} H} \tag{87}$$

En esta respuesta de frecuencia compleja se supone que el vaso es de sección rectangular con $\frac{H}{T_1}$ = 360 m/seg (T_1 = primer período fundamental) y en donde las frecuencias naturales valen:

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi c}{2H} = \frac{2\pi}{T_n} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{88}$$

Para comparar los resultados obtenidos por Chopra y los obtenidos en el semicírculo se han elaborado dos programas para computadora: COMPA y WAVE; el primero calcula los valores $H\phi$ definidos en (86) en secciones verticales y el segundo calcula la $H\phi$ de (87) para distintos valores de ω. El rango de ω es de 1 a 100 rad/seg, que corresponde a períodos de 6.283 a 0.06283 seg.



MALLA CIRCULAR

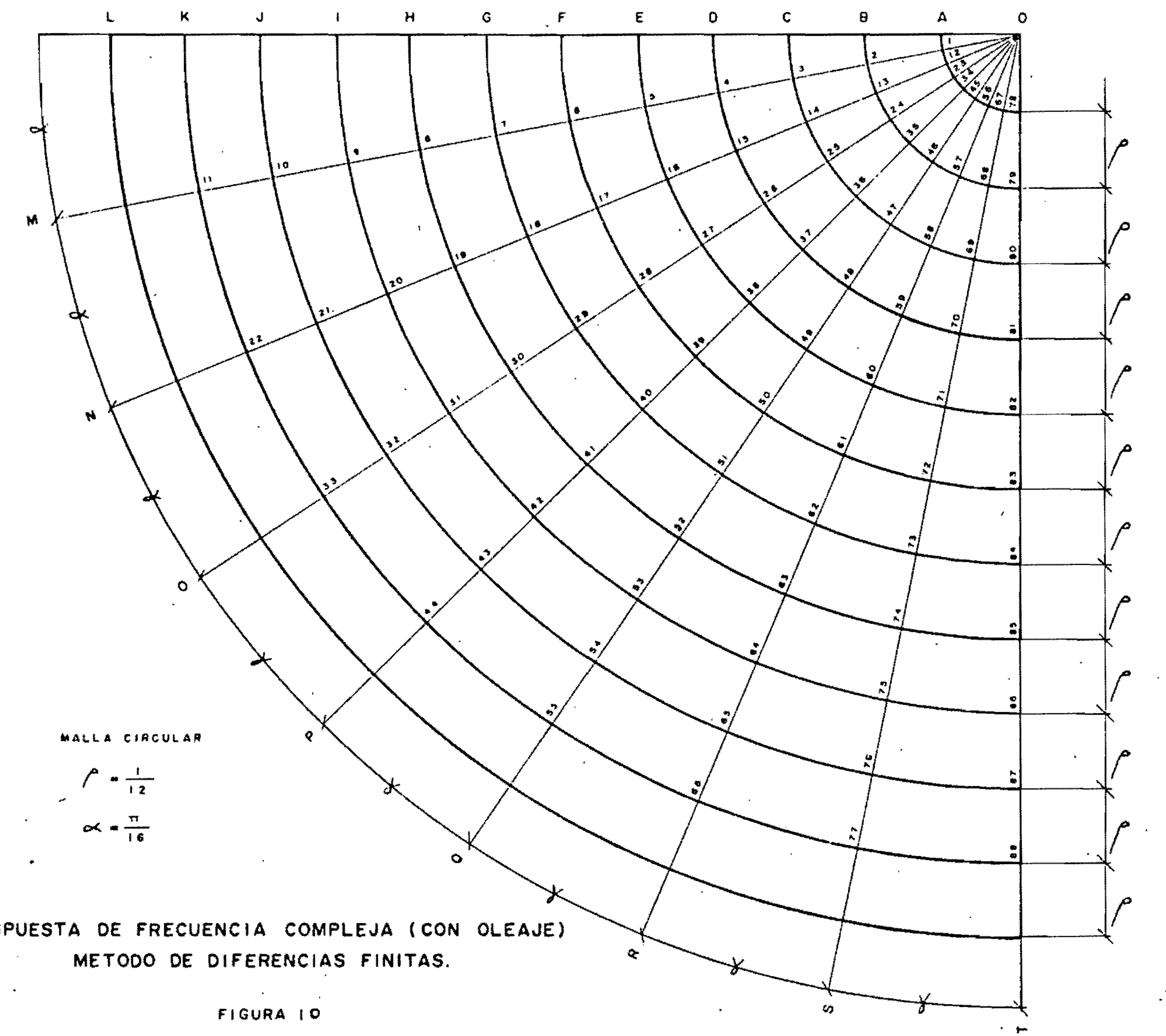
$\rho = \frac{1}{4}$

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

RESPUESTA DE FRECUENCIA COMPLEJA (CON OLEAJE)

METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

FIGURA 9



MALLA CIRCULAR

$\rho = \frac{1}{12}$

$\alpha = \frac{\pi}{16}$

RESPUESTA DE FRECUENCIA COMPLEJA (CON OLEAJE)
METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

FIGURA 10

H_{ϕ} EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

$$\begin{bmatrix} -5.58768 \\ -1.61488 \\ -42.10440 \\ -26.36840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.14191 \\ -5.23527 \\ -4.95959 \\ -12.66410 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.07261 \\ 14.14520 \\ 10.00220 \\ 20.00440 \end{bmatrix}$$

$\omega = 1$ rad./seg. T = 6.283 seg.

$$\begin{bmatrix} -2.46412 \\ -5.97632 \\ -4.12231 \\ -9.08009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.23845 \\ -5.81463 \\ -3.68746 \\ -8.73086 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.53861 \\ -7.07722 \\ -5.00435 \\ -10.00870 \end{bmatrix}$$

$\omega = 2$ rad./seg. T = 3.142 seg.

$$\begin{bmatrix} -2.13246 \\ -4.50492 \\ -3.19446 \\ -6.55387 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.00523 \\ -4.36525 \\ -2.99041 \\ -6.32678 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.36049 \\ -4.72098 \\ -3.33823 \\ -6.67647 \end{bmatrix}$$

$\omega = 3$ rad./seg. T = 2.094 seg.

$$\begin{bmatrix} -1.72141 \\ -3.51312 \\ -2.50861 \\ -5.04506 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.62822 \\ -3.39917 \\ -2.36781 \\ -4.87195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.77239 \\ -3.54341 \\ -2.50654 \\ -5.01114 \end{bmatrix}$$

$\omega = 4$ rad./seg. T = 1.571 seg.

$$\begin{bmatrix} -1.42262 \\ -2.86182 \\ -2.04962 \\ -4.08646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.34828 \\ -2.76696 \\ -1.94007 \\ -3.94628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.42000 \\ -2.83829 \\ -2.00819 \\ -4.01395 \end{bmatrix}$$

$\omega = 5$ rad./seg. T = 1.257 seg.

MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA
NC = 4	NC = 13	(SIN OLEAJE)
NR = 3	NR = 9	
H = 30 m.	H = 30 m.	H = 30 m.

TABLA 1

Hø EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

-1,20702	-1, 14512	-1, 18547
-2.40987	-2, 32920	-2, 36888
-1, 72876	-1.63872	-1.67651
-3.43078	-3, 31323	-3, 35011

ω=6 rad./seg. T= 1.047 seg.

-1,04663	-0.993623	-1,01829
-2.08022	-2.01031	-2.03417
-1,49387	-1,41734	-1.44008
-2,75619	-2,85515	-2,87675

ω=7 rad./seg. T= 0.898 seg.

-0,923521	-0,877187	-0.892841
-1,83004	-1,76851	-1,78361
-1,31525	-1,24868	-1,26267
-2,59768	-2,50920	-2,52240

ω=8 rad./seg. T= 0.785 seg.

-0,826426	-0,785294	-0,795773
-1,63414	-1,57928	-1,589210
-1, 17521	-1, 11631	-1, 12539
-2, 31778	-2, 23919	-2, 24748

ω=9 rad./seg. T= 0.698 seg

-0.748090	-0,71113	-0.718354
-1,47682	-1,42742	-1,43410
-1,06268	-1,00988	-1,01591
-2,09349	-2,02287	-2,02813

ω=10 rad./seg. T= 0.628 seg

MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA (SIN OLEAJE)
NC= 4	NC= 13	
NR= 3	NR= 9	
H= 30 m.	H= 30 m.	H= 30 m.

TABLA 1

Hø EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

	MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA (SIN OLEAJE)
ω = 1 rad./seg. T = 6.283 seg.			
	-3.52724	-31.68970	-14.15440
	-17.83580	-15.07590	-28.30890
	-10.87550	-24.96350	-20.01740
	-30.38270	-13.04410	-40.03480
ω = 2 rad./seg. T = 3.142 seg.			
	-6.262.86	-5.87466	-7.08957
	-13.37370	-12.96330	-14.17370
	-9.46385	-8.82891	-10.02620
	-19.53260	-18.85060	-20.04460
ω = 3 rad./seg. T = 2.094 seg.			
	-4.64849	-4.40064	-4.74189
	-9.44116	-9.13461	-9.47553
	-6.74987	-6.37826	-6.70604
	-13.53420	-13.07240	-13.4004
ω = 4 rad./seg. T = 1.571 seg.			
	-3.61866	-3.43345	-3.37136
	-7.23647	-6.99728	-7.13444
	-5.19148	-4.92101	-5.05067
	-10.31090	-9.96091	-10.08960
ω = 5 rad./seg. T = 1.257 seg.			
	-2.95362	-2.80589	-2.87342
	-5.86417	-5.67015	-5.73641
	-4.21497	-4.00137	-4.06363
	-8.33280	-8.05241	-8.11251

MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA
NC = 4	NC = 13	(SIN OLEAJE)
NR = 3	NR = 9	
H = 60 m.	H = 60m.	H = 60m.

TABLA 2

Hø EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

$$\begin{bmatrix} -2.49693 \\ -4.93655 \\ -3.55323 \\ -7.00439 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.37428 \\ -4.77439 \\ -3.37731 \\ -6.77160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.41131 \\ -4.81003 \\ -3.41011 \\ -6.80241 \end{bmatrix}$$

ω=6 rad./seg. T= 1.047 seg.

$$\begin{bmatrix} -2.16685 \\ -4.27141 \\ -3.07838 \\ -6.05533 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.06224 \\ -4.13287 \\ -2.92887 \\ -5.85721 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.08407 \\ -4.15331 \\ -2.94732 \\ -5.87367 \end{bmatrix}$$

ω=7 rad./seg. T= 0.898 seg.

$$\begin{bmatrix} -1.91873 \\ -3.77351 \\ -2.72294 \\ -5.34645 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.82773 \\ -3.65316 \\ -2.59321 \\ -5.17478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.84133 \\ -3.66554 \\ -2.60403 \\ -5.18386 \end{bmatrix}$$

ω=8 rad./seg. T=0.785 seg.

$$\begin{bmatrix} -1.72648 \\ -3.38853 \\ -2.44832 \\ -4.79913 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.64617 \\ -3.28269 \\ -2.33400 \\ -4.64841 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.65487 \\ -3.29027 \\ -2.34034 \\ -4.65315 \end{bmatrix}$$

ω=9 rad./seg. T = 0.698 seg.

$$\begin{bmatrix} -1.57400 \\ -3.08339 \\ -2.23009 \\ -4.36576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.50232 \\ -2.98942 \\ -2.12901 \\ -4.23211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.50800 \\ -2.99407 \\ -2.13263 \\ -4.23426 \end{bmatrix}$$

ω=10 rad./seg. T = 0.628 seg.

MALLA 1	MALL 2	SOLUCION ANALITICA
NC = 4	NC = 13	(SIN OLEAJE)
NR = 3	NR = 9	
H = 60 m.	H = 60 m.	H = 60 m.

TABLA 2

$H\phi$ EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

$$\begin{bmatrix} -11.91100 \\ -32.95100 \\ -22.15610 \\ -51.68000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12.44650 \\ -33.44430 \\ -24.32120 \\ -52.0640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21.2444 \\ -42.4888 \\ -30.04410 \\ -60.08820 \end{bmatrix}$$

$\omega = 1$ rad./seg. T= 6.283 seg.

$$\begin{bmatrix} -10.04840 \\ -20.79200 \\ -14.81010 \\ -30.02200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.48689 \\ -20.13670 \\ -13.94050 \\ -28.99780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.66930 \\ -21.31990 \\ -15.08860 \\ -30.15090 \end{bmatrix}$$

$\omega = 2$ rad./seg. T= 3.142 seg.

$$\begin{bmatrix} -7.19841 \\ -14.44140 \\ -10.35610 \\ -20.60650 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6.82853 \\ -13.96970 \\ -9.81254 \\ -19.9114 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.16195 \\ -14.30290 \\ -10.12850 \\ -20.22730 \end{bmatrix}$$

$\omega = 3$ rad./seg. T= 2.094 seg.

$$\begin{bmatrix} -5.56710 \\ -11.05040 \\ -7.94764 \\ -15.7056 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.29124 \\ -10.69030 \\ -7.54908 \\ -15.18440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.42546 \\ -10.82260 \\ -7.67275 \\ -15.30540 \end{bmatrix}$$

$\omega = 4$ rad./seg. T= 1.571 seg.

$$\begin{bmatrix} -4.55110 \\ -8.98299 \\ -6.47480 \\ -12.74420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.33208 \\ -8.69540 \\ -6.16077 \\ -12.33150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.39693 \\ -8.75794 \\ -6.21819 \\ 12.38560 \end{bmatrix}$$

$\omega = 5$ rad./seg. T= 1.257 seg.

MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA
NC=4	NC=13	(SIN OLEAJE)
NR= 3	NR= 9	
H= 90m.	H= 90m.	H= 90m.

TABLA 3

Hø EN LOS PUNTOS 1-2-3-4 PARA DISTINTOS VALORES DE ω

- 3.86894	- 3.68826	- 3.72347
- 7.60662	- 7.36990	- 7.40312
- 5.49416	- 5.23614	- 5.26578
-10.78110	-10.44280	-10.46960

ω = 6 rad./seg. T = 1.047 seg

- 3.38573	- 3.23283	- 3.25328
- 6.63465	- 6.43579	- 6.45442
- 4.80267	- 4.58486	- 4.60084
- 9.39806	- 9.11459	- 9.12793

ω = 7 rad./seg. T = 0.898 seg.

- 3.03041	-2.89873	-2.91118
- 5.91989	-5.75059	-5.76174
- 4.29558	-4.10830	-4.11702
- 8.38243	-8.14149	-8.14833

ω = 8 rad./seg. T = 0.785 seg.

- 2.76243	-2.64764	-2.65553
- 5.37949	-5.23420	-5.24112
- 3.91383	-3.75074	-3.75548
- 7.61527	-7.40872	-7.41207

ω = 9 rad./seg. T = 0.698 seg.

- 2.55721	-2.45633	-2.46143
- 4.96358	-4.83847	-4.84290
- 3.62181	-3.47859	-3.48099
- 7.02521	-6.84748	-6.84890

ω = 10 rad./seg. T = 0.628 seg.

MALLA 1	MALLA 2	SOLUCION ANALITICA
NC = 4	NC = 13	(SIN OLEAJE)
NR = 3	NR = 9	
H = 90 m.	H = 90 m.	H = 90 m.

TABLA 3

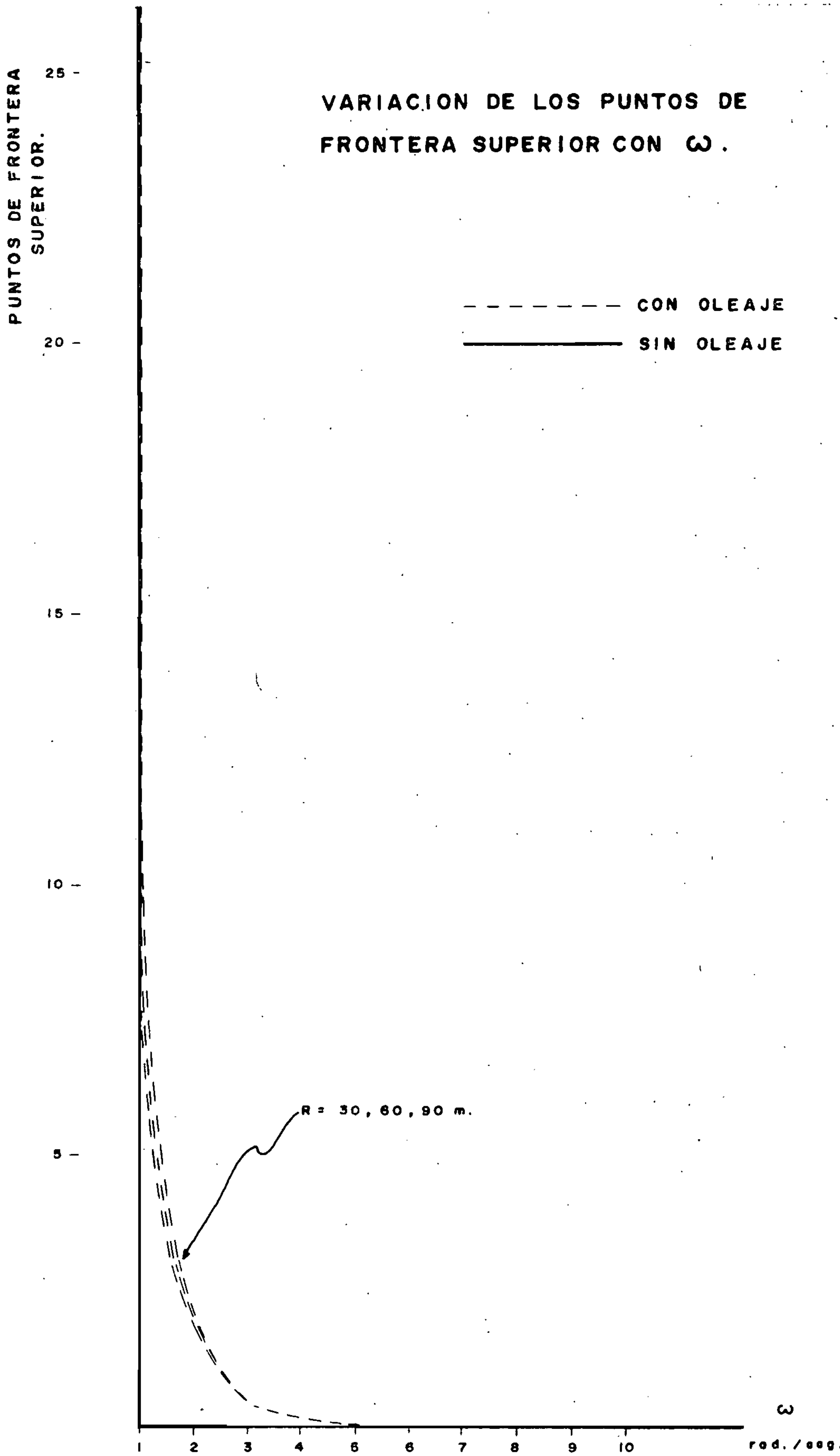

VARIACION DE LOS PUNTOS DE FRONTERA SUPERIOR CON ω.
PUNTOS DE FRONTERA SUPERIOR.
25
20
15
10
5
CON OLEAJE
SIN OLEAJE
R = 30, 60, 90 m.
ω
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
rad./seg.

FIGURA 11

VALOR EXTRAPOLADO

W= 4.0 RAD/SEG T= 1.571 SEG R= 60 M

PUNTOS MALLA

XC(1)=	-3.6186600	XG(37)=	-3.4334500	X=	-3.42110014
XC(2)=	-7.2364700	XG(41)=	-6.9972800	X=	-6.98133073
XC(3)=	-5.1914800	XG(81)=	-4.9210100	X=	-4.90297497
XC(4)=	-10.3109000	XG(85)=	-9.9609100	X=	-9.93757255

PUNTOS FRONTERA SUPERIOR

XC(1)=	0	XG(1)=	0	X=	0
XC(2)=	.1924400	XG(5)=	.1576500	X=	.15532945
XC(3)=	.1873200	XG(9)=	.1570400	X=	.15502018
XC(4)=	.1856200	XG(13)=	.1566600	X=	.15472820

PUNTOS FRONTERA CIRCULAR

XC(2)=	-10.7994000	XG(5)=	-10.5442000	X=	-10.52718318
XC(3)=	-15.3507000	XG(9)=	-14.9770000	X=	-14.95208156

VALOR EXTRAPOLADO

W= 6.0 RAD/SEG T= 1.047 SEG R= 30 M

PUNTOS MALLA

XC(1)=	-1.2070200	XG(37)=	-1.1451200	X=	-1.14099249
XC(2)=	-2.4098700	XG(41)=	-2.3292000	X=	-2.32382090
XC(3)=	-1.7287600	XG(81)=	-1.6387200	X=	-1.63271610
XC(4)=	-3.4307800	XG(85)=	-3.3132300	X=	-3.30539173

PUNTOS FRONTERA SUPERIOR

XC(1)=	0	XG(1)=	0	X=	0
XC(2)=	.0567183	XG(5)=	.0465016	X=	.04582015
XC(3)=	.0552928	XG(9)=	.0463525	X=	.04575619
XC(4)=	.0548176	XG(13)=	.0462737	X=	.04570375

PUNTOS FRONTERA CIRCULAR

XC(2)=	-3.5964930	XG(5)=	-3.5099500	X=	-3.50417928
XC(3)=	-5.1092270	XG(9)=	-4.9830600	X=	-4.97464714

TABLA 4

VALOR EXTRAPOLADO

W= 10.0 RAD/SEG T= .628 SEG R= 30 M

PUNTOS MALLA

XC(1)=	-0.7480900	XG(37)=	-0.7111300	X=	-0.70866550
XC(2)=	-1.4768200	XG(41)=	-1.4274200	X=	-1.42412599
XC(3)=	-1.0626800	XG(81)=	-1.0098800	X=	-1.00635928
XC(4)=	-2.0934900	XG(85)=	-2.0228700	X=	-2.01816104

PUNTOS FRONTERA SUPERIOR

XC(1)=	0	XG(1)=	0	X=	0
XC(2)=	.0122810	XG(5)=	.0101330	X=	.00998972
XC(3)=	.0120210	XG(9)=	.0100970	X=	.00996866
XC(4)=	.0119350	XG(13)=	.0100660	X=	.00994133

PUNTOS FRONTERA CIRCULAR

XC(2)=	-2.1911000	XG(5)=	-2.1381000	X=	-2.13456594
XC(3)=	-3.1037000	XG(9)=	-3.0279000	X=	-3.02284563

TABLA 4

<u>Influencia de las frecuencias bajas en la respuesta hidrodinámica</u>

Las tablas 1,2 y 3 consignan los valores de H_Φ obtenidos en los puntos 1,2,3 y 4 de la primera malla (fig.6) por el método de diferencias finitas y la solución analítica.

En $\omega = 1$, los resultados indican diferencias significativas: en $\omega = 2$, los resultados son del mismo orden y en $\omega = 5$, el error entre la solución analítica y la numérica es menor del 6% en promedio. Esto indica que para excitaciones con frecuencias mayores a 5 rad/seg, el no tomar en cuenta el efecto del oleaje no introduce errores considerables.

En las tablas anteriores no se indican los valores de H_Φ en los puntos de frontera. En la figura 11 se indica la variación de estos en la frontera superior (nivel libre) con respecto a ω. Se observa que en $\omega = 1$, son distintos de cero y con valores grandes (del orden de 10^2), en $\omega = 2$, disminuyen notablemente y en $\omega = 5$ practicamente son nulos. Con los valores obtenidos en la frontera superior es sencillo obtener las configuraciones del oleaje en la superficie libre:

como $$p = \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad y \quad \eta = \frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{g}[p]_{y=0} \qquad (89)$$

entonces* $$\eta_j = \frac{i\omega}{g} H_{\Phi_j} e^{i\omega t} \qquad (90)$$

donde η_j = altura de la superficie libre en el punto j

H_{Φ_j} = respuesta de frecuencia compleja en el punto j

si fuese $\eta = 0$ en cualquier punto, se tendría la condición de nivel libre sin oleaje.

En la tabla 4 se indican los valores extrapolados de H_Φ de las mallas 1 y 3 obtenidos usando la fórmula de extrapolación[37] h^2:

$$A_{n_1,n_2} = \alpha_1 A_{n_1} + \alpha_2 A_{n_2} \qquad (91)$$

donde A_{n_1,n_2} es el valor extrapolado de A_{n_1} y A_{n_2}.

* En las gráficas y tablas H_Φ tiene unidades de (seg^2).

h	n	A
1/3	1	An_1
1/12	4	An_2

38

$$\alpha_1 = -\frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} = -0.06666$$

$$\alpha_2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} = 1.06666$$

Tabla 5

Valores utilizados en la fórmula de extrapolación h^2

Se tienen valores de puntos en el medio, en la frontera superior y en la frontera circular para distintos valores de y . Los valores obtenidos al utilizar la ecuación (91) modifican ligeramente los de la malla más cerrada, p.e. en $\omega = 4$ y $T_0 = 60$ m:

Puntos	1	2	3	4	Promedio
Valor malla / Sol. analítica	1,01842	0.98077	0.97432	0.98725	0.99019
Valor extrap. / Sol. analítica	1.01475	0.97853	0.97076	0.98493	0.98724

Tabla 6

Diferencias entre valores extrapolados y valores de la malla con $h = \frac{1}{12}$

La diferencia en promedio de los valores es de 0.295% como indica la tabla 6, por lo que en este caso los valores extrapolados no mejoran notablemente a los de la malla más cerrada.

De acuerdo con las tablas 1,2 y 3 se puede proceder de dos maneras:

a) No tomar en cuenta el efecto del oleaje y considerar como válida la solución que lo desprecia

b) Continuar con el proceso para definir a la presión en cualquier punto con la solución completa y compararla con la anterior

En el primer caso, la solución se encuentra desarrollada en el anexo 1 y para el segundo se debe continuar con el método de diferencias finitas, tomando como excitación a $\ddot{v}_g(t)$ (aceleración vertical del terreno), en lugar de $e^{i\omega t}$. La decisión entre uno y otro depende fundamentalmente de los efectos que se producen en las respuestas hidrodinámicas al desprecial el oleaje.

Efectos de la condición de frontera en la superficie libre

Cuando se desprecia el efecto del oleaje en la superficie libre, la presión se calcula (ver anexo 1) con la expresión:

$$p = H_p e^{i\omega t} = \frac{i\omega}{g} \gamma H_\phi e^{i\omega t} = \frac{\gamma}{g} \frac{\operatorname{sen}\theta \, J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right) e^{i\omega t}}{\left[\frac{\omega}{c} J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \frac{1}{r_0} J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)\right]} \quad (92)$$

integrando[39] la expresión (92) en toda el área se obtiene el empuje total sobre la cortina:

$$\frac{H_p^\theta(t)}{H_0} = \frac{3c^2}{g r_0^3 \omega^2} \cdot \frac{\frac{\omega r_0}{c} \cdot J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \int_0^{\frac{\omega r_0}{c}} J_0(x)\, dx}{\left[\frac{\omega}{c} J_0\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \frac{1}{r_0} J_1\left(\frac{\omega r_0}{c}\right)\right]} \quad (93)$$

donde $H_0 = \frac{2}{3} \gamma r_0^3$ = empuje hidrostático total

tomando en cuenta el efecto del oleaje la integración anterior debe ser numérica. Utilizando la regla trapezoidal o la de Simpson[38] se calcula el empuje total normalizado con respecto al hidrostático. En la figura 13 se indica la distribución de presiones para $\theta = 90°$ tomando en cuenta el efecto del oleaje y la solución analítica.

Las diferencias entre las presiones definidas por el método de diferencias finitas y la solución analítica disminuyen al aumentar ω, sin embargo analizar punto por punto no cuantifica el error que se comete al despreciar el oleaje, es necesario hacerlo valuando las variaciones en las respuestas hidrodinámicas y por medio de espectros de respuesta analizar dichas variaciones.

Espectros de respuesta y espectro de Fourier

Para el cálculo de desplazamientos, cortantes, etc., de un sistema lineal de un grado de libertad sujeto a una excitación arbitraria $\ddot{v}_g(t)$, es necesario calcular la siguiente expresión[40]:

$$\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\, e^{-\frac{n 2\pi}{T}(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t-\tau)\, d\tau \qquad (94)$$

T = período natural del sistema

$\ddot{v}_g(\tau)$ = aceleración del terreno

n = fracción del amortiguamiento crítico

t = tiempo en el cual la respuesta es valuada

por lo que, (94) indica el efecto de la aceleración del terreno sobre el sistema. El valor máximo de la integral anterior recibe el nombre[41] de S_v para un valor de T y de n. Calculando S_v para un rango de períodos y diferentes valores de n se obtienen los espectros de respuesta de velocidades. Las dimensiones de S_v son de cm/seg. En la figura 14 se indica el espectro[42] de seudo velocidades del temblor de junio de 1965 ocurrido en Acapulco, Gro.

El espectro de Fourier[43] para una función entre $0<t<T$ se define como:

$$F(\omega)=\int_0^T \ddot{v}_g(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \qquad (95)$$

ω = frecuencia natural o frecuencia de excitación

La ecuación (95) suele expresarse como una transformada de Fourier[44]:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_g(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \qquad (96)$$

y la función $\ddot{v}_g(\tau)$ se representa como una superposición de senos y cosenos por medio de la integral de Fourier:

$$\ddot{v}_g(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega \qquad (97)$$

en general $F(\omega)$ es compleja pero si $\ddot{v}_g(\tau)$ es real entonces $F(\omega)$ es el conjugado complejo de $F(-\omega)$.

El espectro de Fourier coincide con el espectro redisual de velocidades para el caso en que el sistema no esté amortiguado[43] y está acotado superiormente por el espectro de respuesta de velocidades en este caso, siendo relativamente pequeñas las diferencias entre los máximos de los espectros de Fourier y de respuesta de velocidades. A través de el espectro de Fourier, es posible obtener la información suficiente de cada temblor para ver sus frecuencias o períodos dominantes. Para el caso del temblor de El Centro (componente vertical), sería necesario conocer su espectro, pero aún cuando se puede obtener, para cuantificar el efecto del oleaje es más conveniente utilizar espectros medios para diseño, que espectros de temblores particulares que pueden o no repetirse. En este caso se utiliza el de la figura 14 para cuantificar el efecto del oleaje. Para ello es necesario valuar los empujes hidrodinámicos debidos a excitación armónica en el rango de períodos indicado en la figura. Combinando los empujes con el espectro de seudo velocidades es posible tener una idea del error que se comete al despreciar el oleaje. En la figura 14 se indican los empujes obtenidos al calcular las presiones por el método de diferencias finitas e integrando numericamente y los obtenidos por la solución analítica al utilizar la expresión (93), C es una constante que depende de la malla utilizada para efectuar la integración. Las líneas quebradas en la figura son las variaciones de los empujes obtenidos con mallas muy abiertas que tienden a las curvas definidas con mallas más cerradas. En este caso fue necesario disminuir la malla para evitar esas oscilaciones y llegar a las curvas (2) y (4), la malla final agrupa más de 100 puntos en el medio. En la figura 15 se han dibujado los empujes en el eje vertical y el período o la frecuencia en el horizontal, la forma de la curva es totalmente distinta y la curva de los empujes con respecto a las frecuencias es característica de los sistemas de un grado de libertad. En la figura 16 se indica la relación entre los empujes definidos en la 15, la máxima corresponde para ω's chicas y es alrededor de 1.15.

Multiplicando las ordenadas de las curvas de los empujes por las del espectro de seudo velocidades e integrando las áreas bajo las curvas se encuentra la relación entre la que no considera el oleaje y la que lo toma en cuenta, en la tabla 7 se indican los valores utilizados para efectuar dicho cálculo.

ω rad/seg	T seg	$E_1.C.10^3$ (con oleaje)	$E_2.C.10^3$ (sin oleaje)	valor del espectro
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1.795	3.500	-14.5879	-16.3537	1.79
1.930	3.250	-13.4207	-15.2108	1.79
2.090	3.000	-13.0124	-14.0475	1.70
2.280	2.750	-12.3990	-12.8783	2.05
2.510	2.500	-11.5721	-11.6990	2.15

Valores utilizados para cuantificar el efecto del oleaje

Tabla 7

En este caso, se hizo el cálculo para una altura de 30 m y se obtuvo al integrar el área bajo la curva utilizando como abscisas a los períodos una diferencia de 5.5%, por lo que el error al despreciar el efecto del oleaje para una altura de 30 m es menor del 5.5%, ya que al utilizar los períodos en vez de las frecuencias se obtienen áreas menores, o sea, se está sobrestimando el error. De la tabla 7 es posible definir el valor de ω para el cual el error es nulo. Si el temblor por analizar tiene frecuencias dominantes mayores de 2.5 rad/seg el oleaje no tiene importancia, lo que concuerda con los resultados obtenidos anteriormente: dado un valor de H la importancia del oleaje es función rapidamente decreciente de la frecuencia.

Debido a que el error que se comete al despreciar el efecto del oleaje es menor del 5.5% para cortinas de altura moderada se utilizará la solución analítica definida en el anexo 1 para calcular respuestas hidrodinámicas debidas a excitaciones arbitrarias. Comparando esta solución y la del vaso rectangular se encuentra que para $\theta = 90°$ y $\omega' S$ pequeñas la diferencia no es importante; sin embargo para $\omega' S$ grandes y para secciones alejadas de la central, la diferencia es notable. En la figura 17 se indican estas diferencias tomando las presiones en la vertical para el vaso semicircular y valuándolas para el rectangular tomando la altura definida en el semicircular.

Esto es

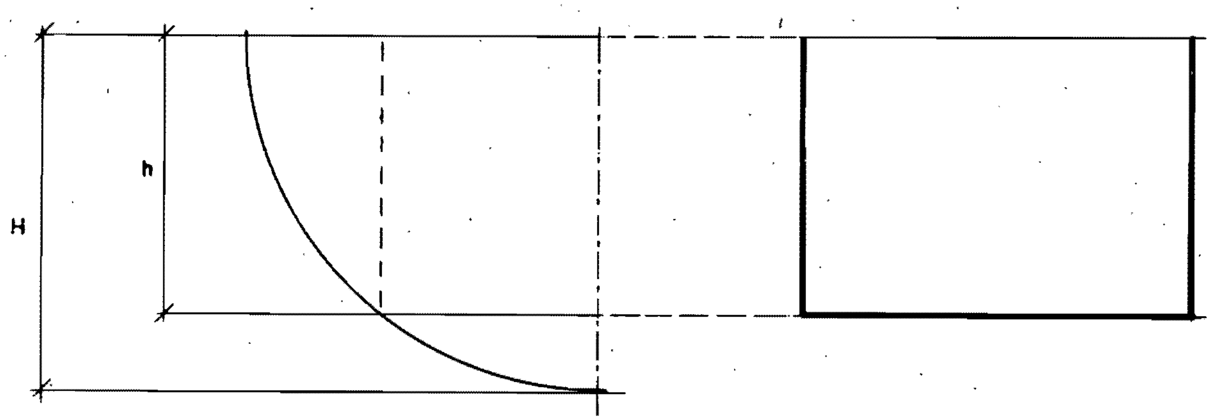
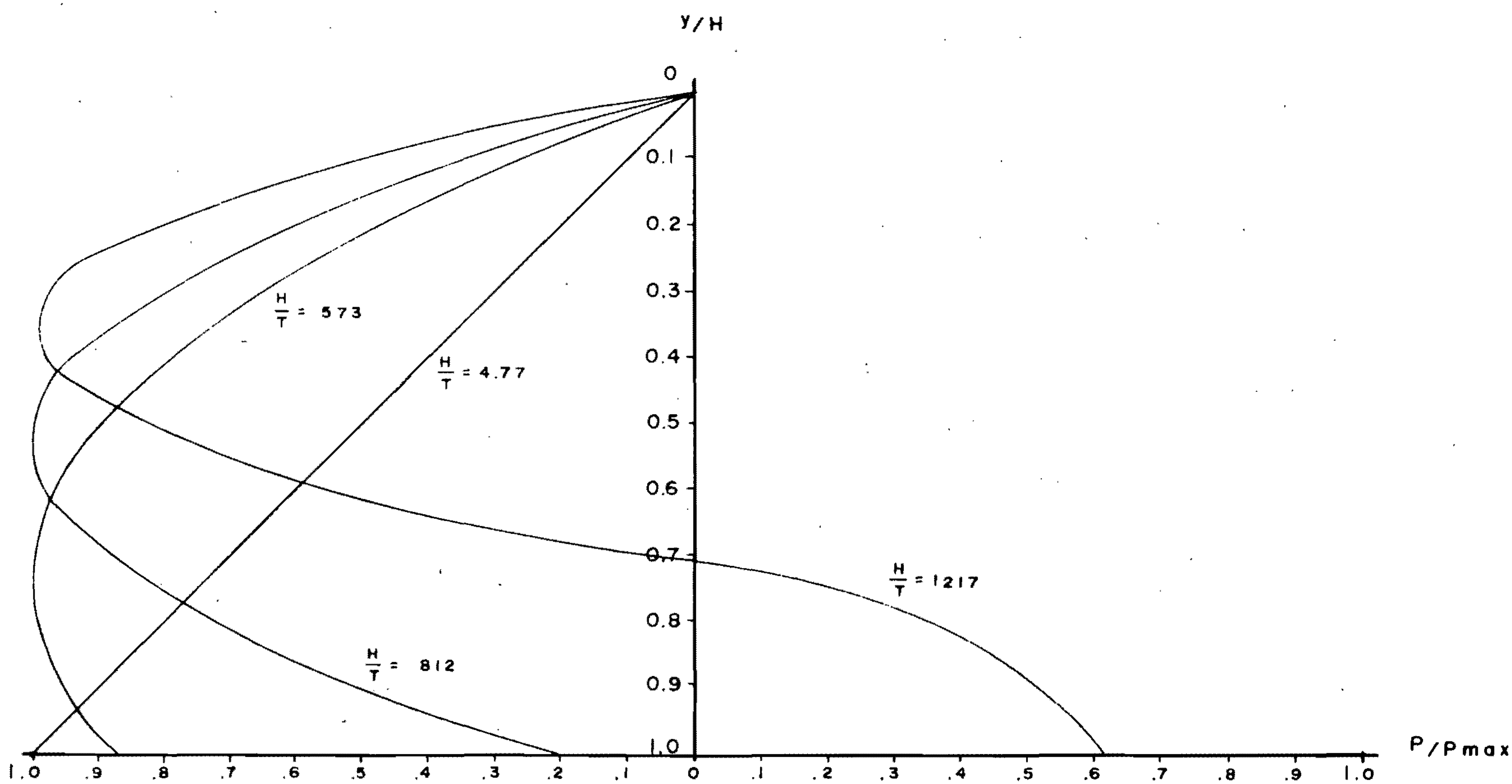


Fig. 12

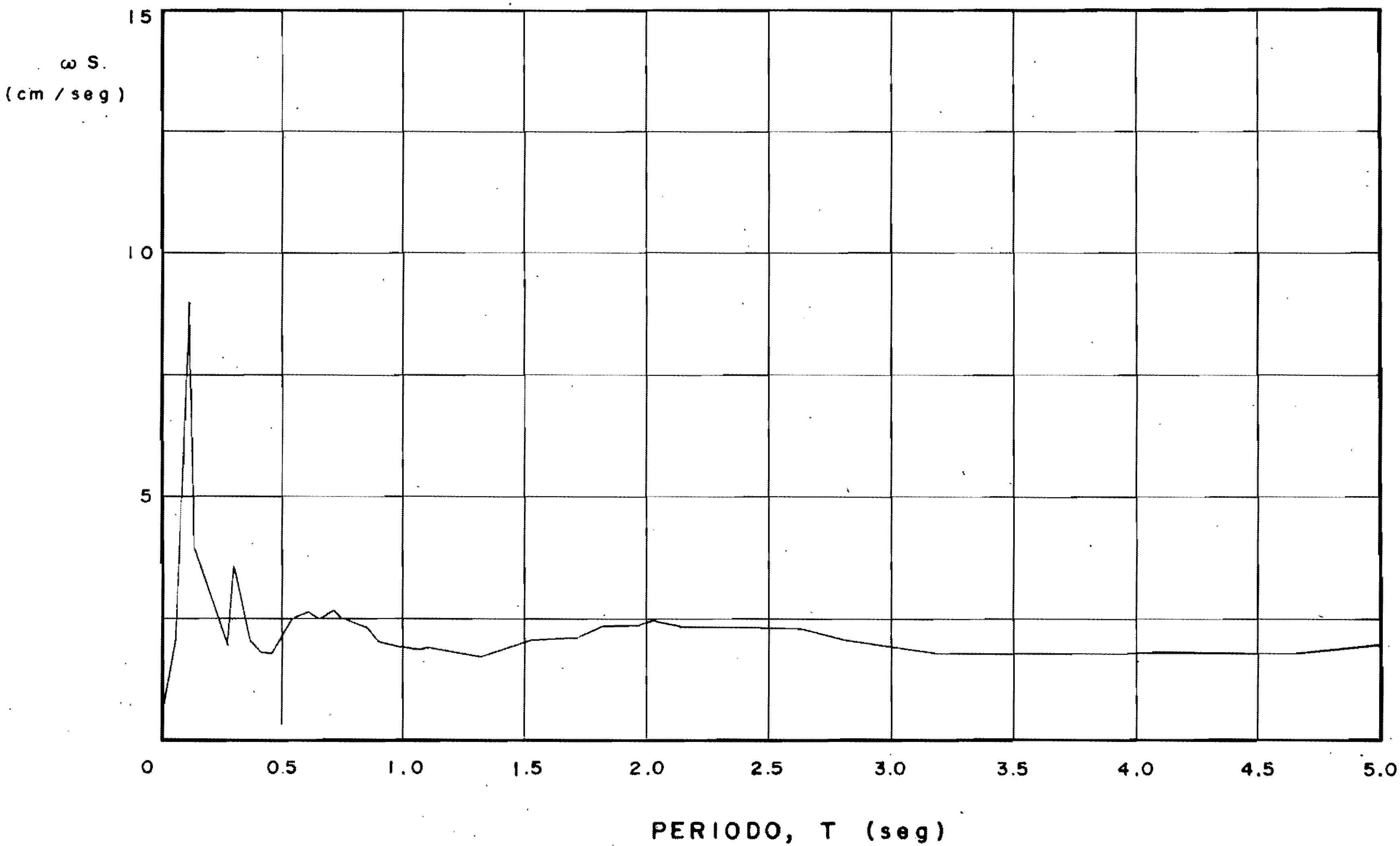
altura del vaso rectangular para valuar presiones

Los valores en el rectangular son mayores que en el semicircular y el error graficado está referido a estos.



DISTRIBUCION DE PRESIONES EN EL VASO SEMICIRCULAR

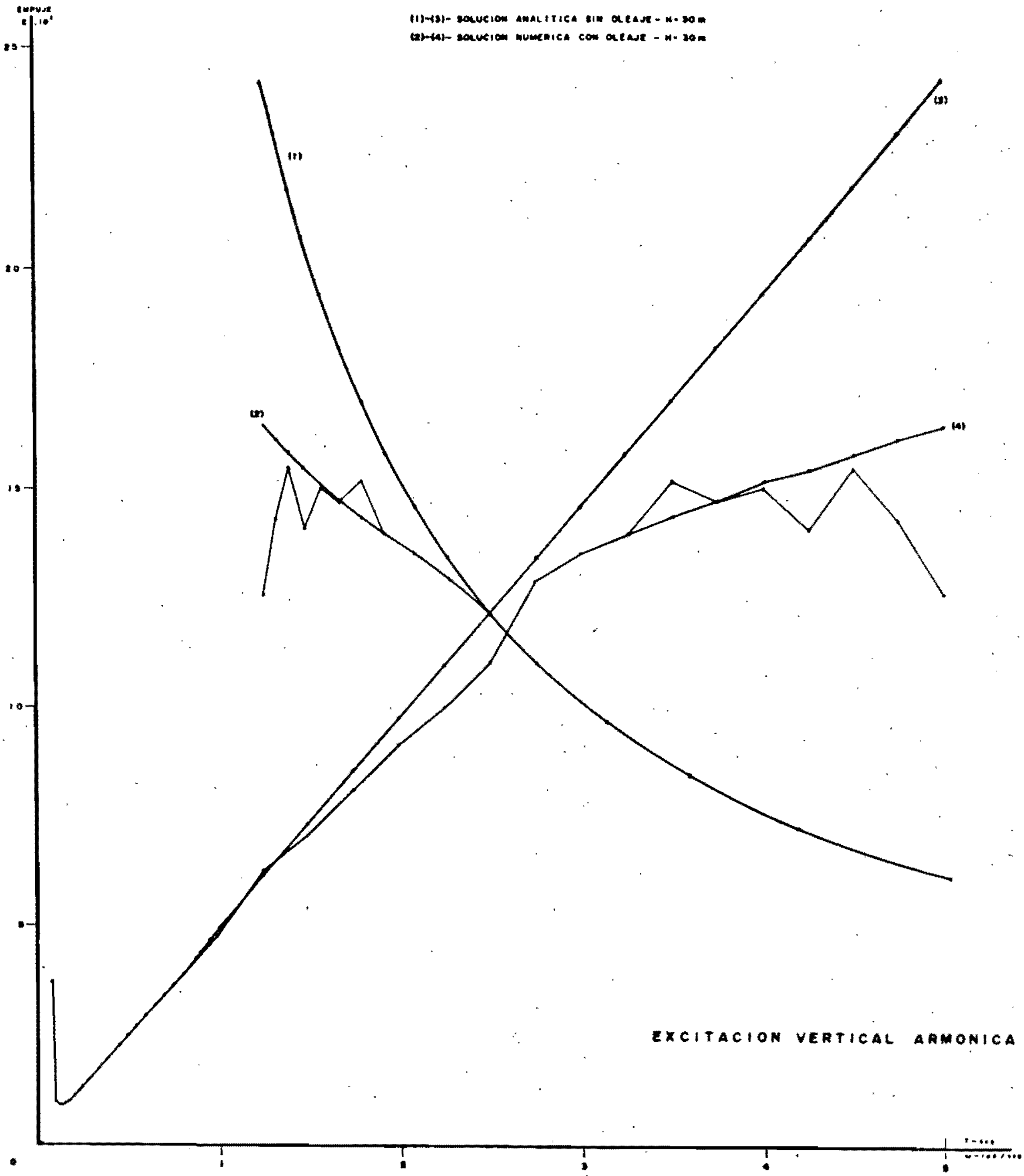
FIGURA 13



SISMO DEL 23 DE JUNIO DE 1965, COMPONENTE VERTICAL, ACAPULCO GRO.

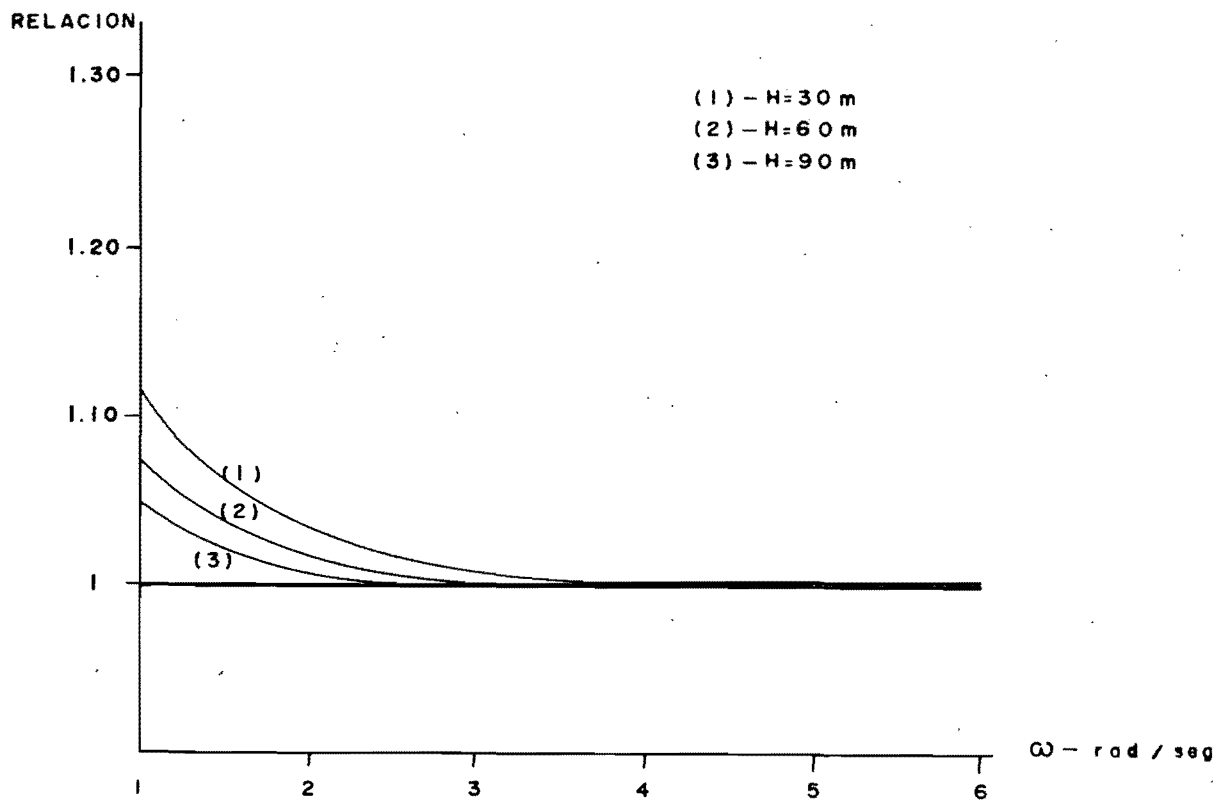
ESPECTROS DE VELOCIDAD PARA SISTEMAS SIN AMORTIGUAR

FIGURA 14



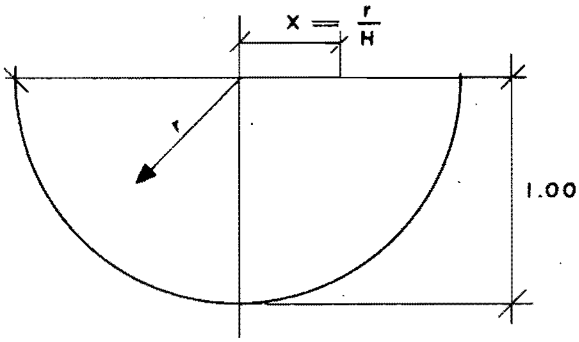
EMPUJE HIDRODINAMICO H= 30 m

FIGURA 15



RELACION DE EMPUJES $\frac{(\text{sin oleaje})}{(\text{con oleaje})}$

FIGURA 16



(1) H= 30, 60, 90 m. , ω = 1 rad./seg.

(2) H= 30m. , ω = 10 rad./seg.

(3) H= 60m. , ω = 10 rad./seg.

(4) H= 90m. , ω = 10 rad./seg.

Escala Hor. = 1:200
Escala Ver. = 1:200

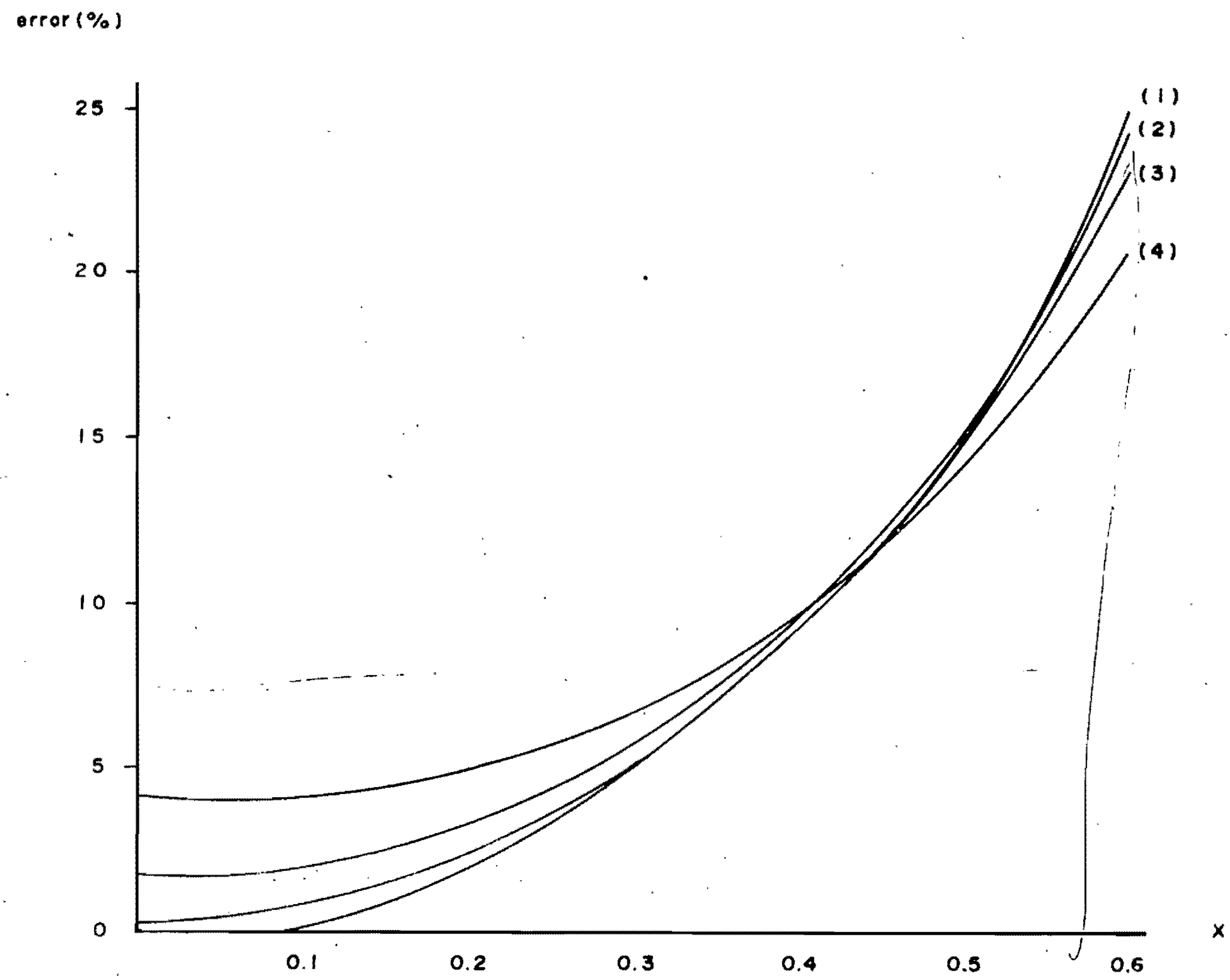


FIGURA 17

Respuestas hidrodinámicas para el temblor de El Centro

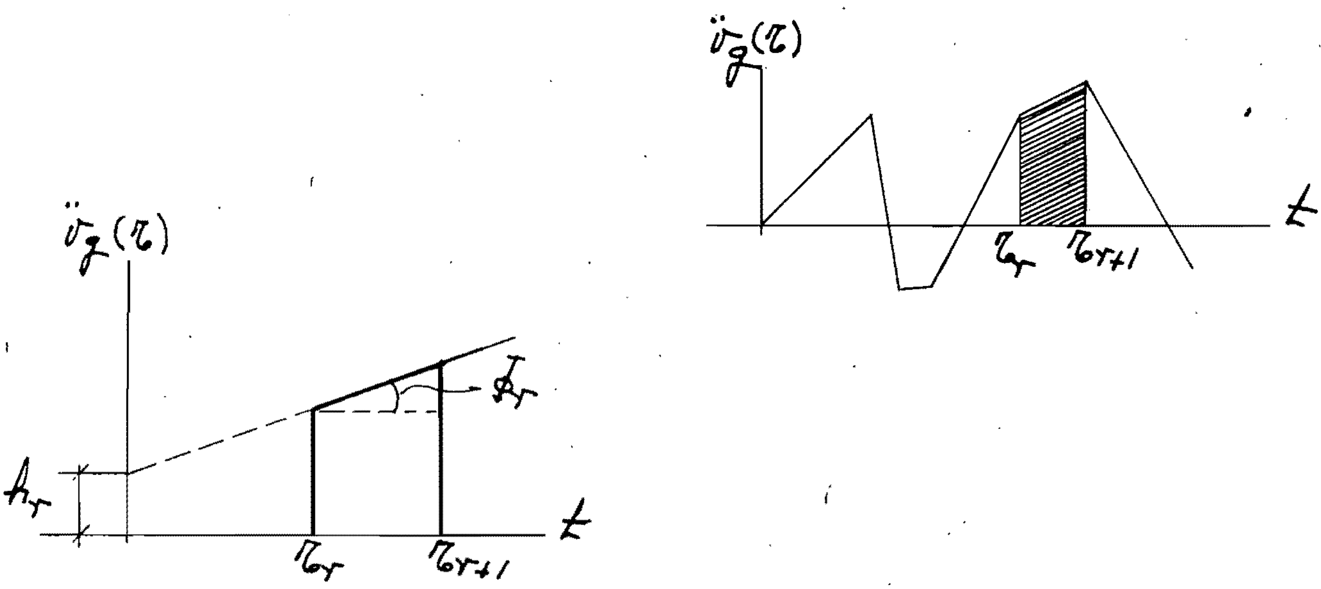
Para determinar las características de la respuesta hidrodinámica ante un sismo, se utiliza el registrado el 18 de mayo de 1940 en El Centro, California, componente vertical. En la figura 19 se indica la gráfica de aceleraciones del temblor hasta los 8 segundos de duración.

Para obtener la respuesta hidrodinámica es necesario valuar las ecuaciones (15) y (17) del anexo 1. Un procedimiento numérico se ha desarrollado para valuar la integral de convolución, considerando la curva de aceleraciones como una poligonal. Esto permite tratar cada tramo como un pulso independiente y la integral se valúa como la suma de los efectos de los pulsos que preceden al tiempo t.

Los pulsos se numeran en orden creciente de $\tau=0$ a $\tau=t$. La aceleración $\ddot{v}_g(\tau)$ comprendida entre dos tiempos consecutivos τ_r y τ_{r+1} del pulso r queda dada por:

$$\ddot{v}_g(\tau) = g(h_r + \phi_r \tau) \, ; \quad \tau_r \le \tau \le \tau_{r+1} \qquad (98)$$

donde h_r es la ordenada de las aceleraciones del pulso en $\tau=0$, ϕ_r su pendiente tal como se indica en la figura 18



Pulso del acelerograma $\ddot{v}_g(\tau)$

Fig. 18

La contribución de ese pulso en el valor de la integral de convolución queda dada por

$$W_r = g\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} (A_r + \phi_r \tau) . \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} (t-\tau) d\tau \tag{99}$$

si hay q pulsos, desde $\tau = 0$ a $\tau = t$, el valor de la integral en el instante t se obtiene sumando todos los efectos de los pulsos, así:

$$W = \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) . \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} (t-\tau) d\tau = \sum_{r=1}^{q} W_r \tag{100}$$

de esta manera el problema se reduce a calcular la integral (99) para todos los pulsos y luego hacer la suma (100). La integral (99) se determina inmediatamente si se conocen[45]:

$$SS_r = \int_0^{\tau_r} \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} (t-\tau) d\tau$$

$$SS_r = \frac{\operatorname{sen} \frac{\lambda_n c t}{r_o} . \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r}{\lambda_n c / r_o} + \frac{\cos \frac{\lambda_n c t}{r_o}}{\lambda_n c / r_o} \left[\cos \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r - 1 \right] \tag{101}$$

$$TS_r = \int_0^{\tau_r} \tau \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} (t-\tau) d\tau$$

$$TS_r = \frac{\operatorname{sen} \frac{\lambda_n c t}{r_o}}{\frac{\lambda_n^2 c^2}{r_o^2}} . \left[\cos \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r - 1 + \frac{\lambda_n c \tau_r}{r_o} . \operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r \right]$$

$$- \frac{\cos \frac{\lambda_n c t}{r_o}}{\frac{\lambda_n^2 c^2}{r_o^2}} . \left[\operatorname{sen} \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r - \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r . \cos \frac{\lambda_n c}{r_o} \tau_r \right] \tag{102}$$

SSr y TSr son variables usadas para expresar el valor de las integrales (101) y (102). Con ellas se obtiene (99) en la forma:

$$\Delta W_r = g A_r (SS_{r+1} - SS_r) + g \phi_r (TS_{r+1} - TS_r) \tag{103}$$

y W con la suma:

$$W = \sum_{r=1}^{t} \Delta W \tag{104}$$

En las expresiones anteriores, λ_n son las raíces de la ecuación característica:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[J_1 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right]_{r=r_o} = 0 \tag{105}$$

y valen[46] :

$$\lambda_1 = 1.8412, \ \lambda_2 = 5.3314, \ \lambda_3 = 8.5363$$

$$\lambda_4 = 11.7060, \ \lambda_5 = 14.8636, \ \lambda_6 = 18.0155$$

para n grande, las raíces consecutivas difieren entre sí aproximadamente π. Mientras estas raíces valen

$$\omega_{semic.} = \frac{\lambda_n c}{r_0} \tag{106}$$

las del vaso rectangular son

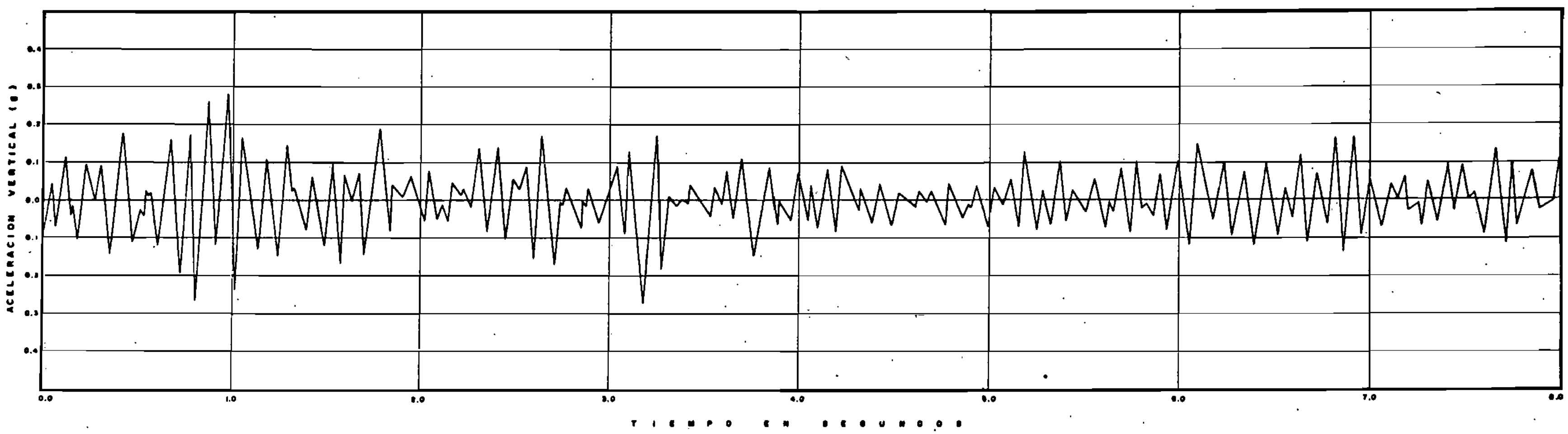
$$\omega_{rect.} = (2n-1)\frac{\pi c}{2H} \tag{107}$$

cuando n = 1, se tiene:

$$\begin{aligned} \omega_s &= 1.8412 \frac{c}{r_0} \quad ; \quad \frac{H}{T_1} = 422 \ m/seg \\ \omega_r &= 1.57 \frac{c}{r_0} \quad ; \quad \frac{H}{T_1} = 360 \ m/seg \end{aligned} \tag{108}$$

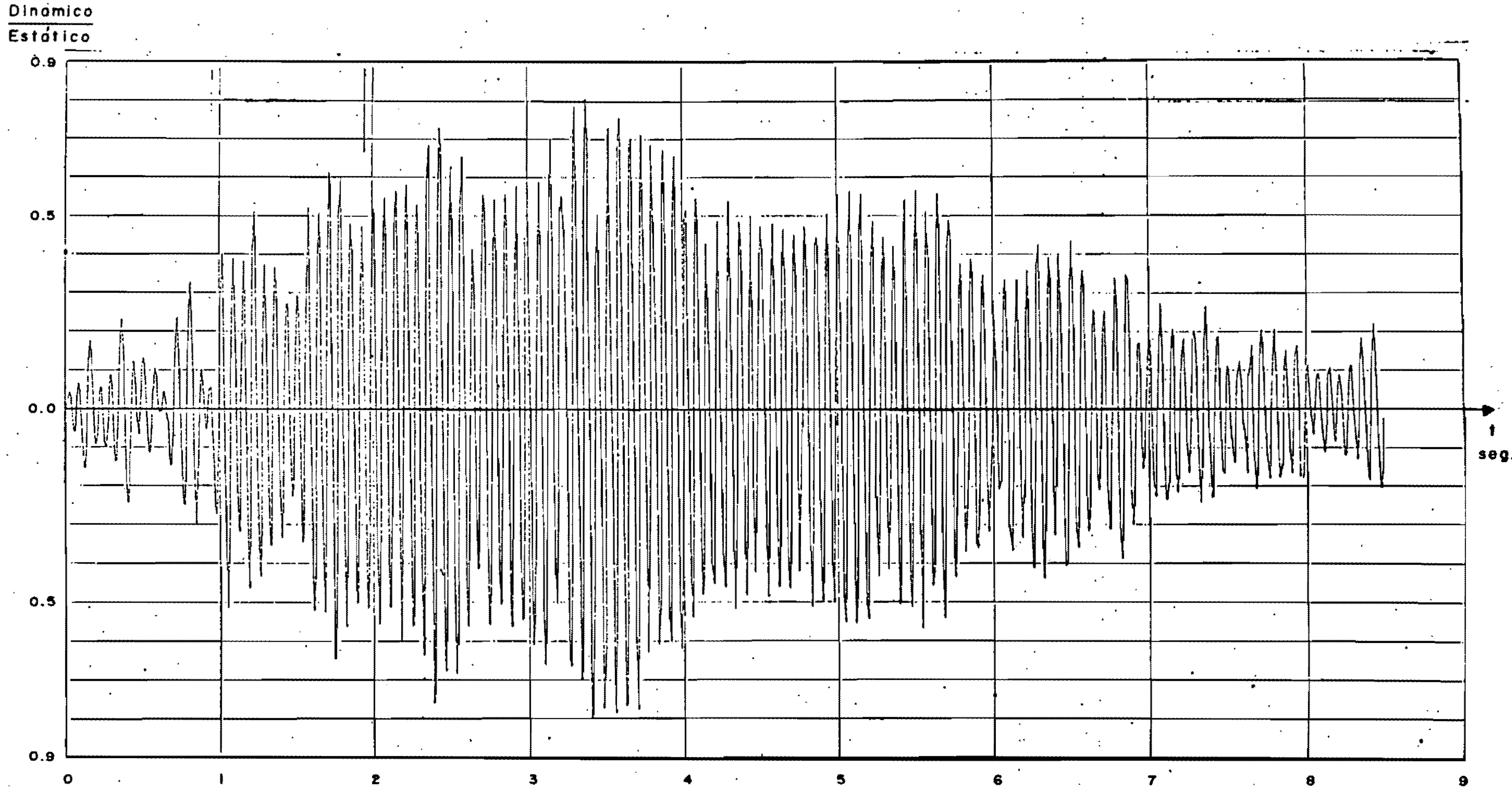
donde los índices s y r se refieren respectivamente a vaso semicircular y rectangular. En las figuras 20 a 23 se representan los empujes y el momento de volteo hidrodinámicos para alturas de 30,90 y 180 m en vasos semicirculares y en las figuras 24 a 29 los correspondientes al rectangular. En la figura 20 se dibujó el empuje desde 0 hasta 8.5 seg en las 21 y 22 únicamente los valores máximos y una parte al inicio y al fin del temblor y en la 23 se tienen en una sola gráfica los momentos correspondientes a las tres alturas en sus valores máximos.

Se consignaron los valores junto con los del rectangular para determinar el efecto de la forma del vaso en las presiones. Como se observa en la Tabla 8 la diferencia para el vaso de 30 m es notable, bajando el empuje y el momento de 3.20 y 3.50 a 0.806 y 1.128, para el de 90 m únicamente el empuje es ligeramente mayor en el semicircular que en el rectangular y para el de 180 m los valores del rectangular son mayores que los del semicircular; por lo que se puede observar que la forma de la sección del vaso es importante, sobre todo en vasos de altura pequeña o moderada.



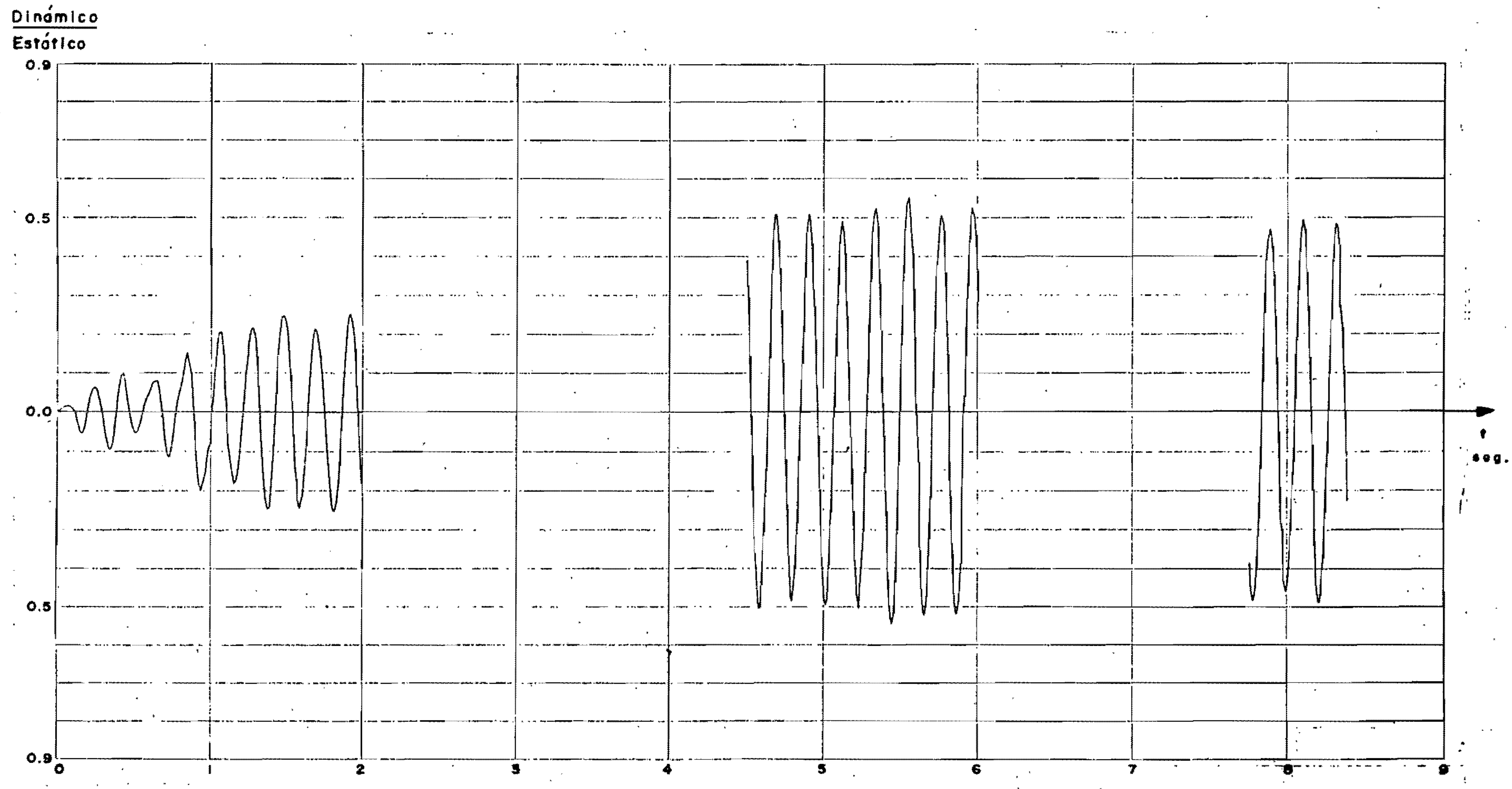
ACELEROGRAMA DEL TEMBLOR DE EL CENTRO CAL., MAYO 19, 1940

FIGURA 19



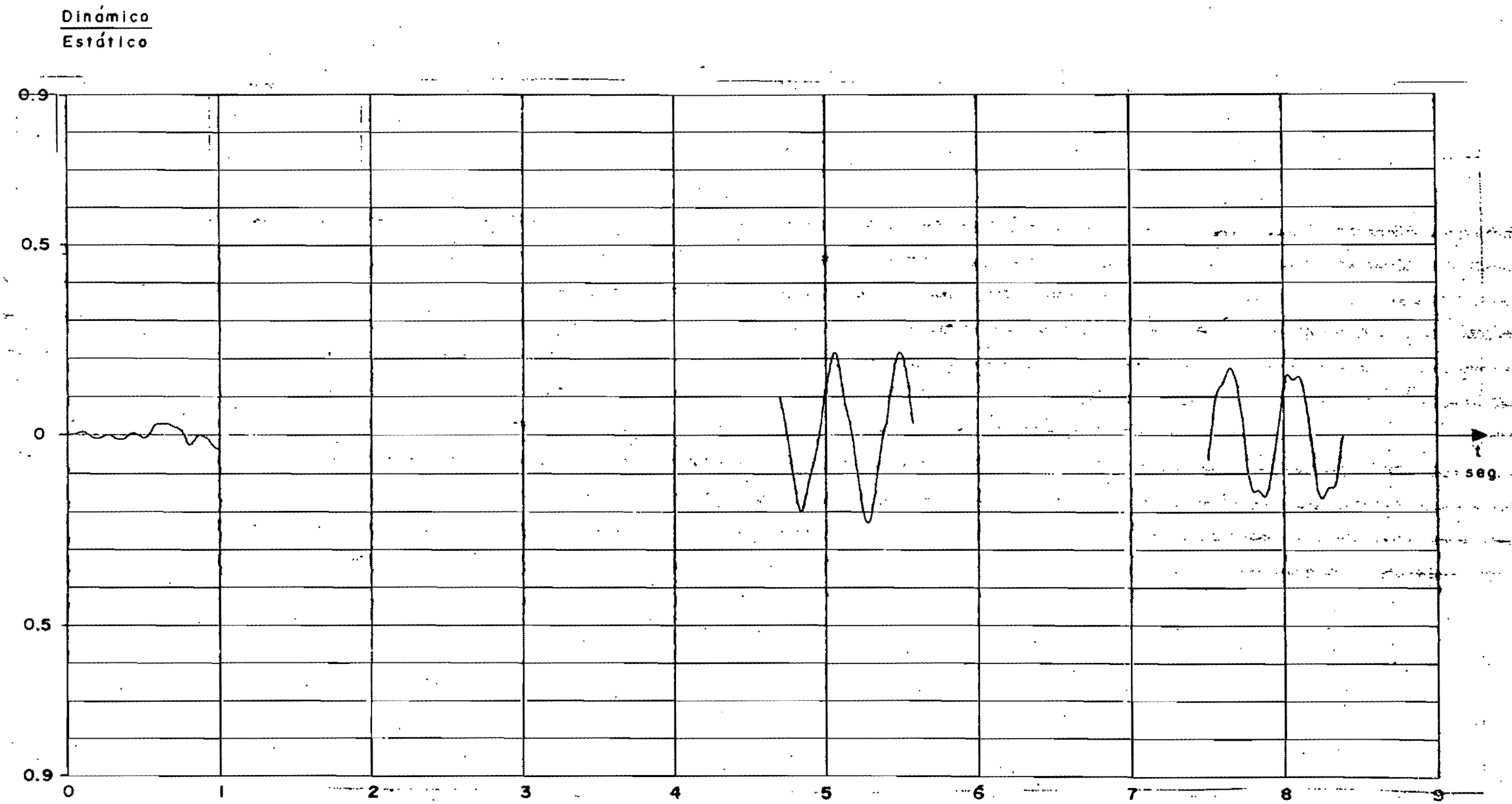
EMPUJE TOTAL EN LA CORTINA H. 30. m.

FIGURA 20



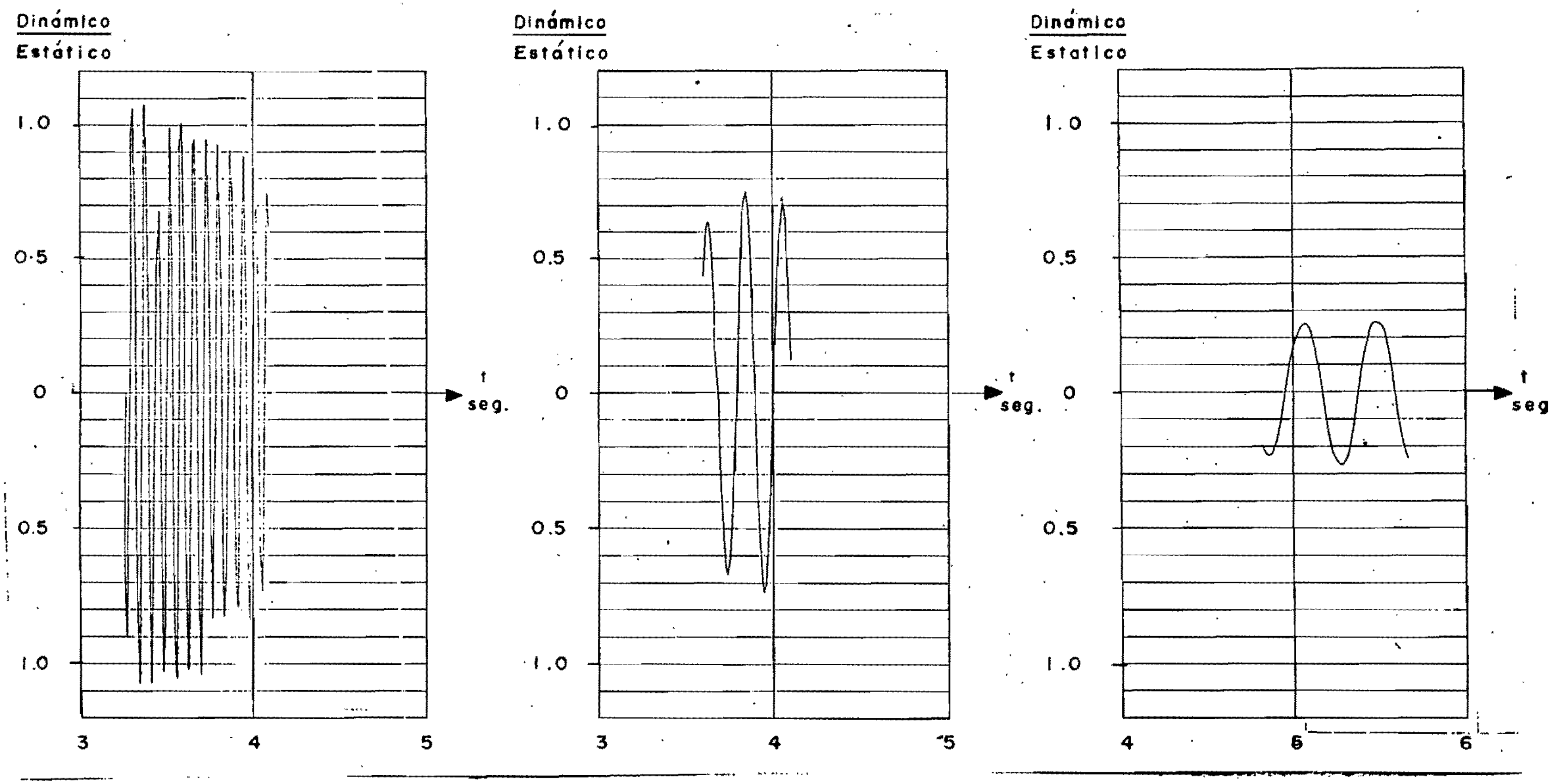
EMPUJE TOTAL EN LA CORTINA H 90 m.

FIGURA 21



EMPUJE TOTAL EN LA CORTINA H. = 180 m.

FIGURA 22

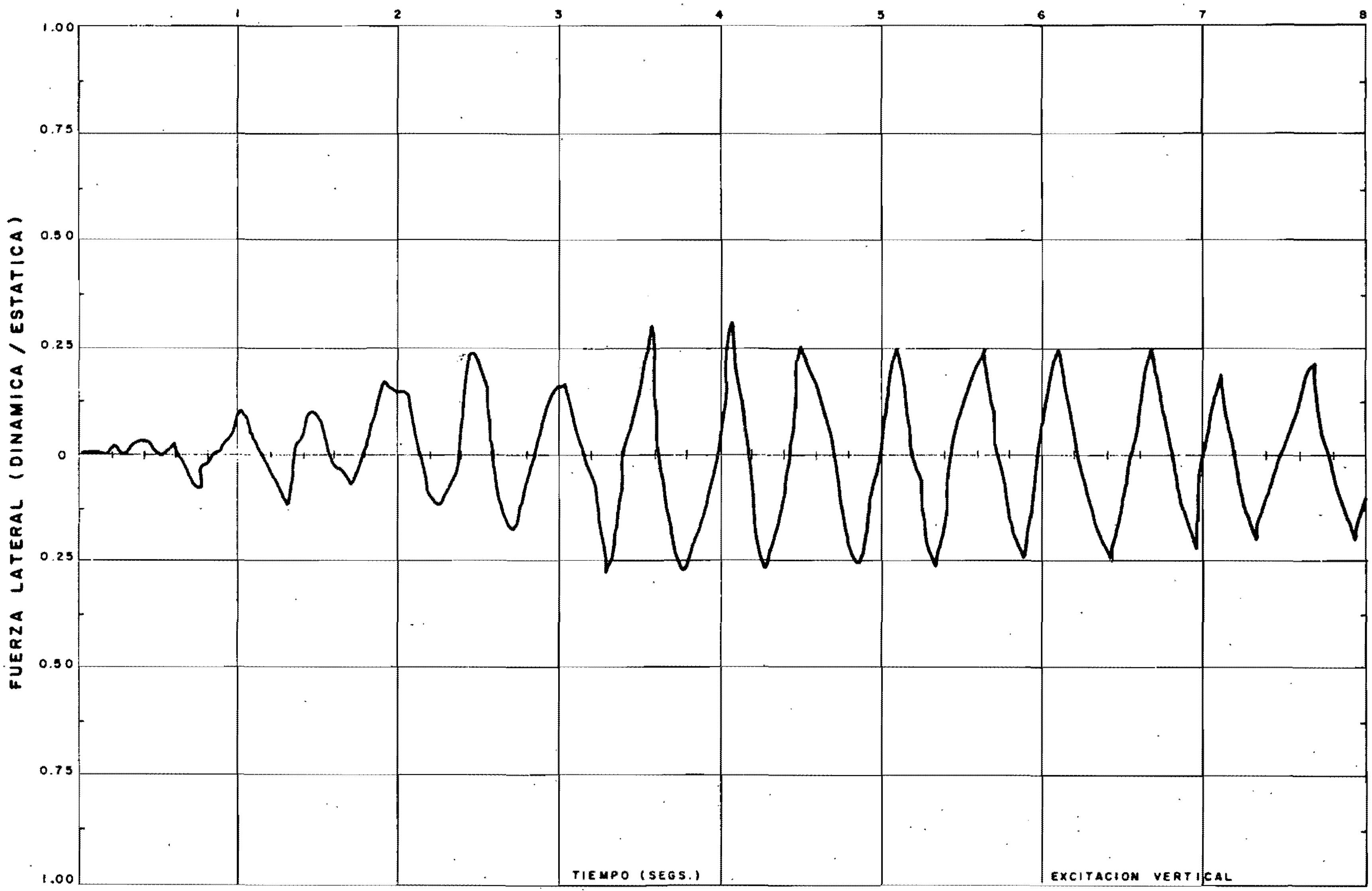


H = 30 m. H = 90 m. H = 180 m.

MOMENTO DE VOLTEO EN LA BASE DE LA CORTINA

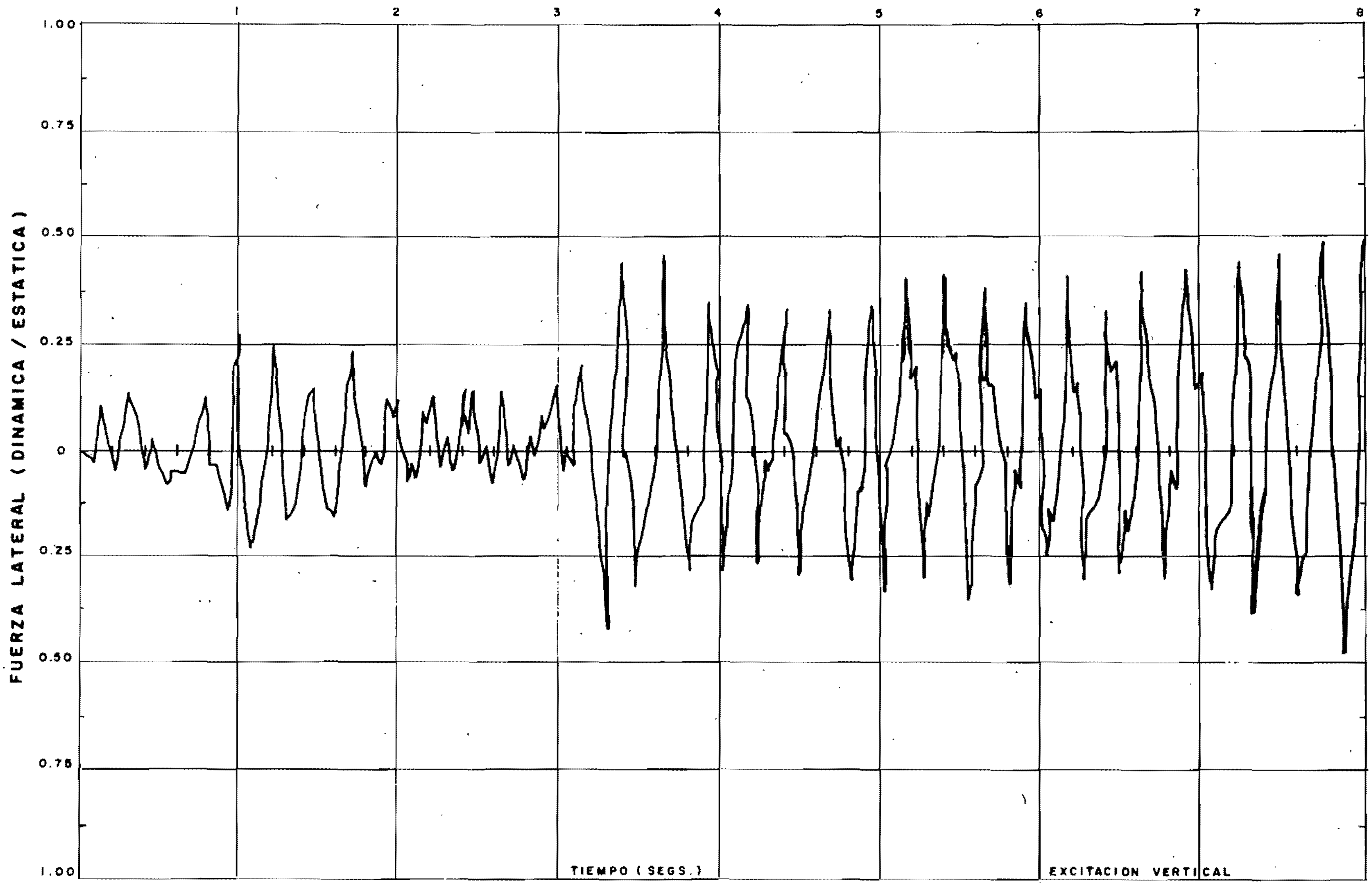
VALORES MAXIMOS.

FIGURA 23



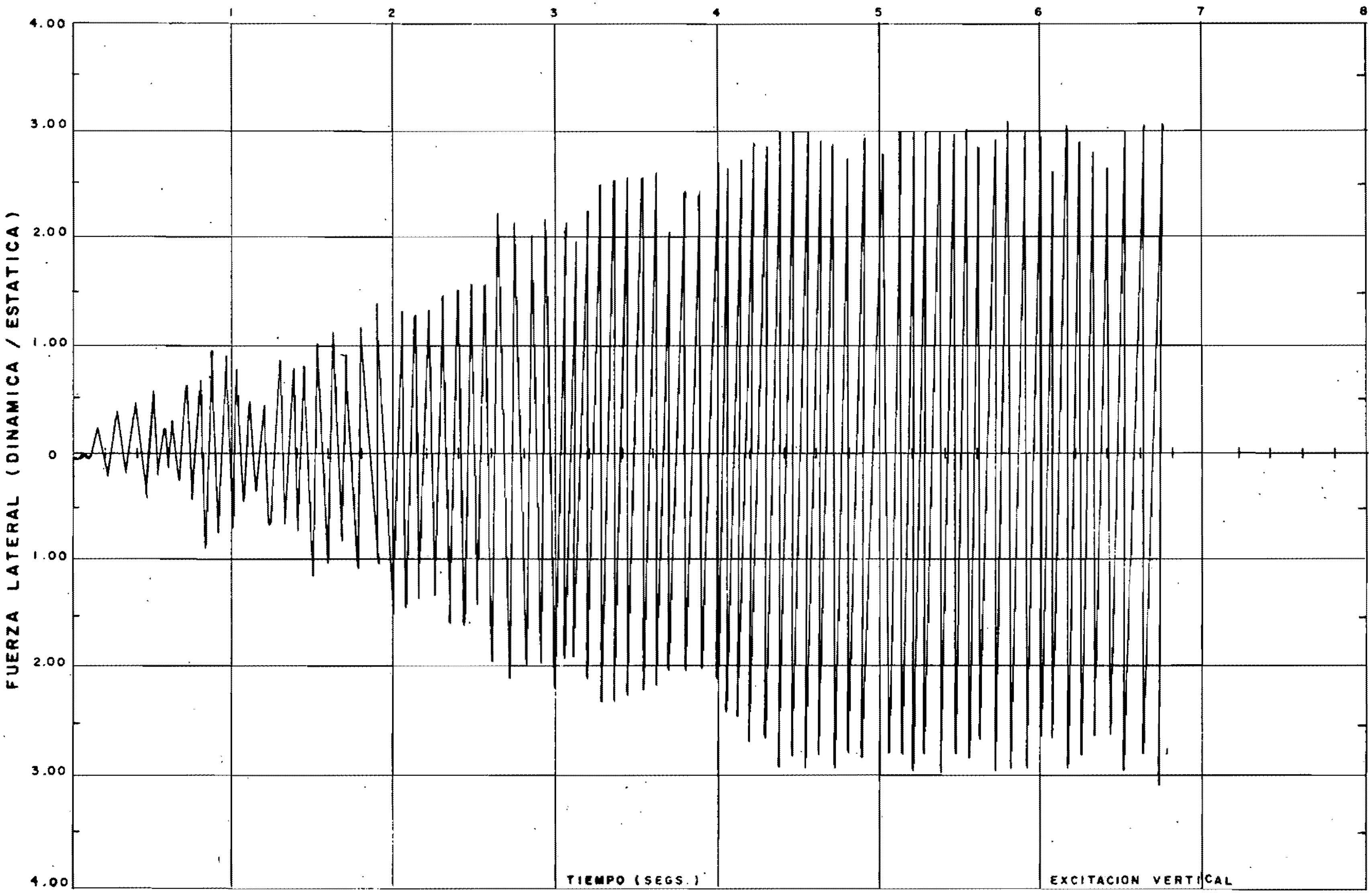
FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 180M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 24



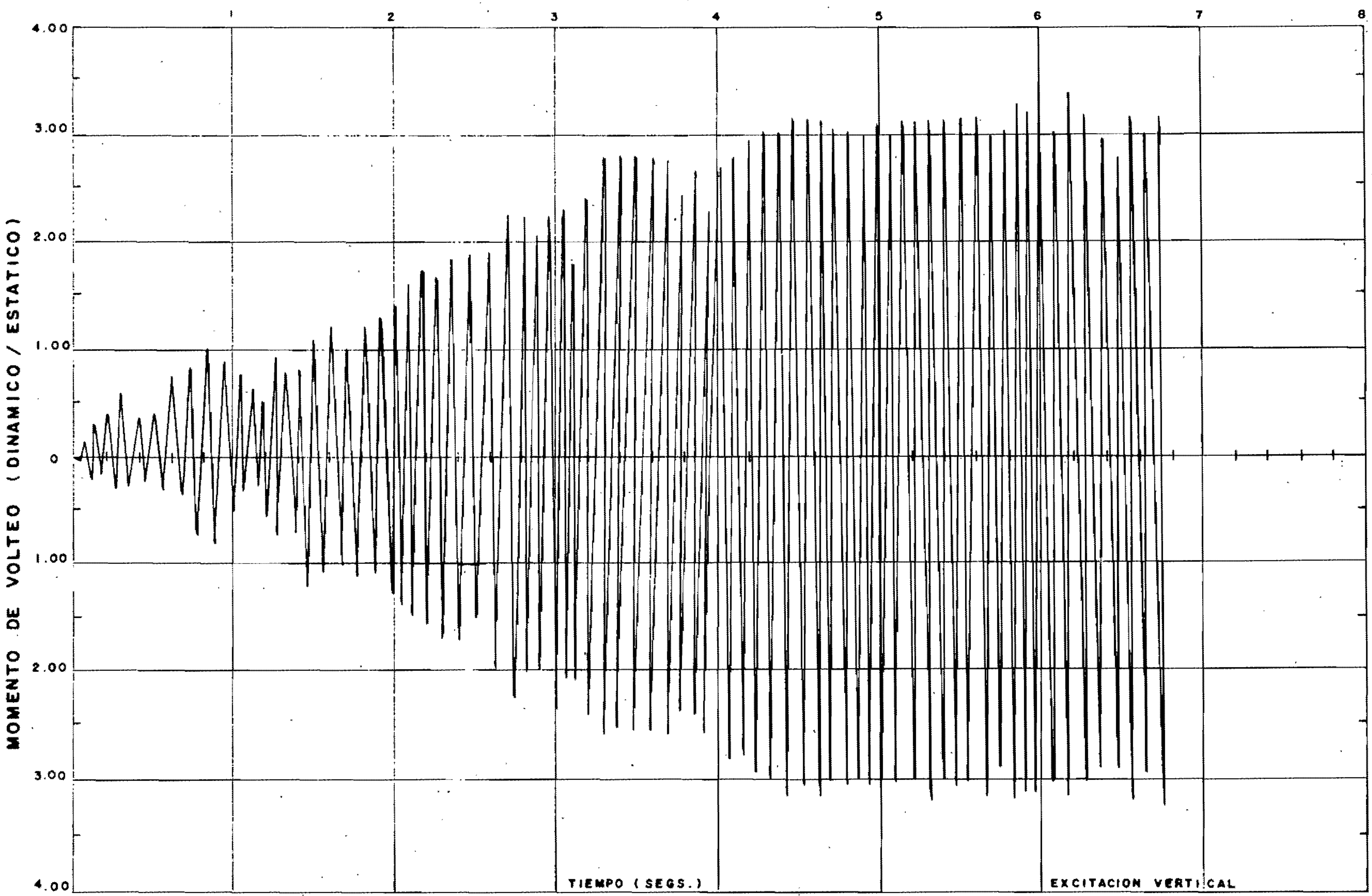
FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 91.5M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 25



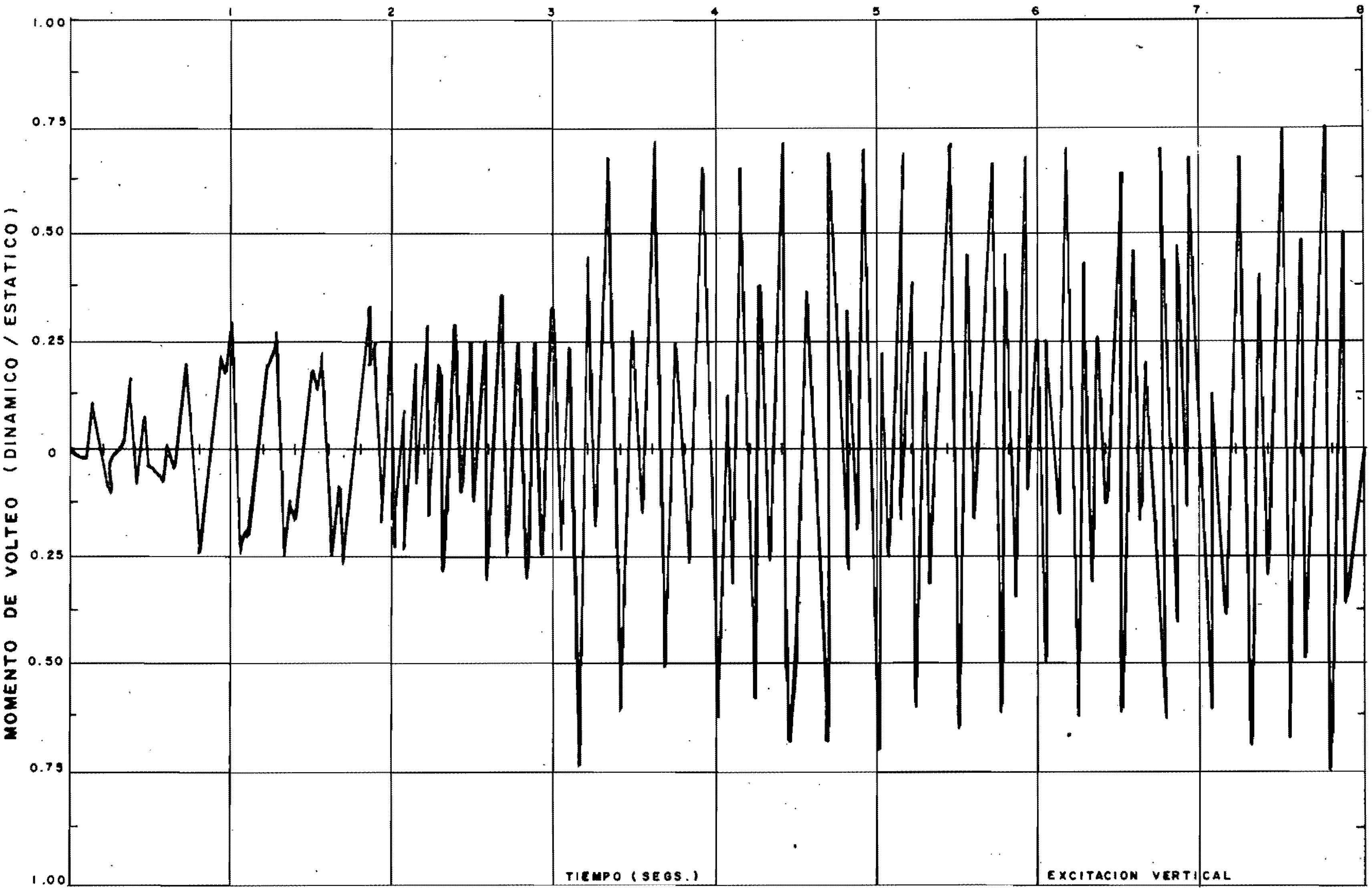
FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 30.5M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 26



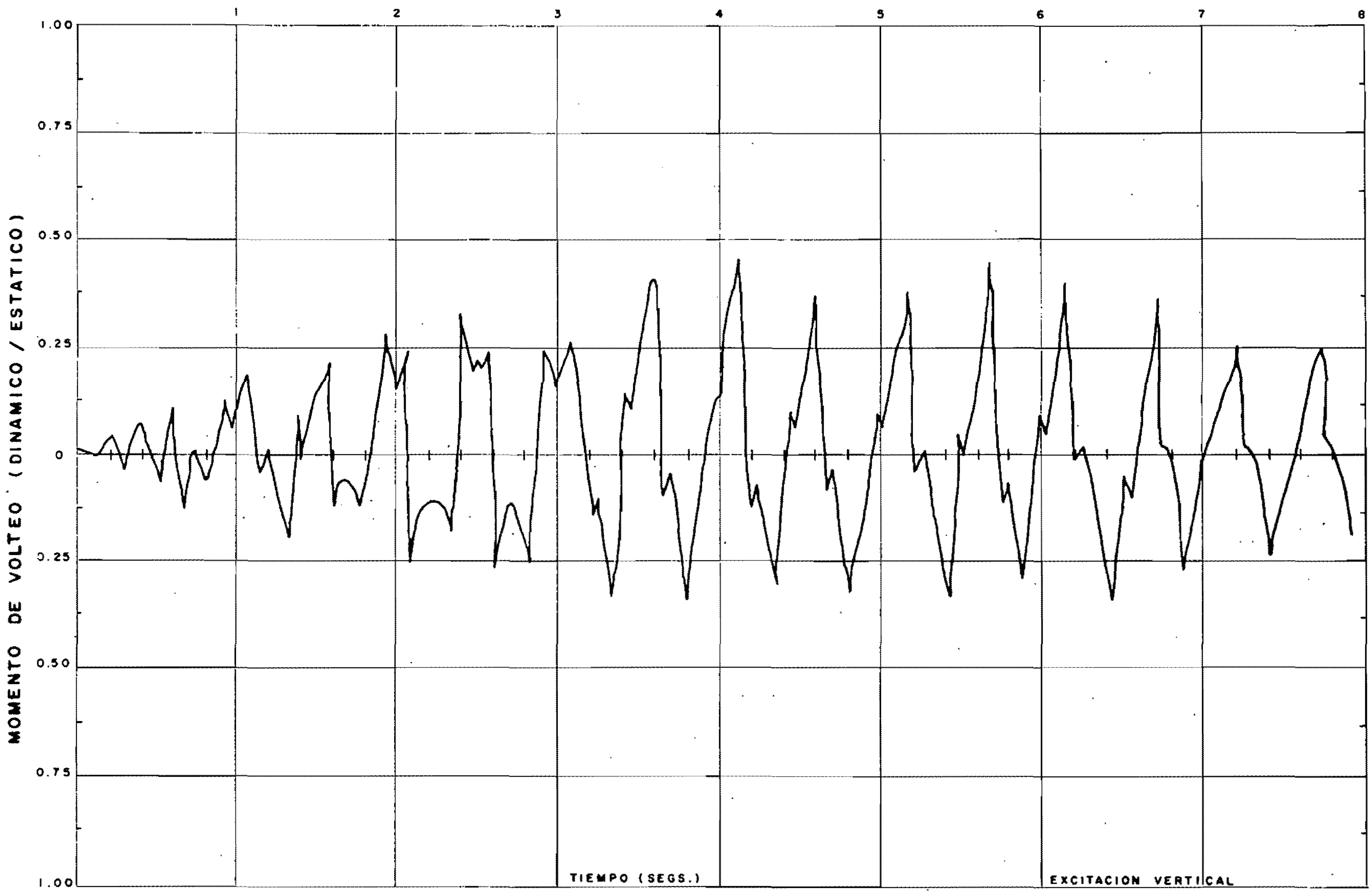
FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 30.5M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 27



FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 91.5M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 28



FUERZAS HIDRODINAMICAS TOTALES—VASO DE 180M. PROFUNDIDAD, TEMBLOR DE EL CENTRO, 1940

FIGURA 29

Máximas presiones hidrodinámicas/estáticas

	Empuje total		Momento de volteo	
	*vaso rectangular	vaso semicircular	*vaso rectangular	vaso semicircular
Altura del nivel libre				
30 m	3.20	0.806	3.50	1.128
90 m	0.52	0.551	0.80	0.774
180 m	0.32	0.228	0.42	0.278

Tiempos en que se presentan las máximas presiones en el vaso semicircular

Altura del nivel libre	Empuje total	Momento de volteo
30 m	3.374 seg	3.374 seg
90 m	3.848 seg	3.848 seg
180 m	5.277 seg	5.282 seg

* Valores del vaso rectangular tomados de Chopra[1]

T A B L A 8

Conclusiones

La forma de la sección del vaso es importante. Los resultados obtenidos para el vaso semicircular despreciando el efecto del oleaje indican que para vasos de 30 m la disminución de las respuestas hidrodinámicas con respecto a las del vaso rectangular son notables; en los otros ejemplos analizados existen diferencias apreciables. Para determinar las respuestas hidrodinámicas, se utilizó el temblor de El Centro (mayo 18, 1940), para compararlas con las del vaso rectangular. En el cálculo de las mismas es necesario valuar la integral de convolución. El método aquí presentado es laborioso. Existen otros métodos numéricos que son más accesibles y directos, como el desarrollado por Flores V.[47] en el cual utiliza aproximación parabólica junto con interpolación de Lagrange. Sin embargo, no se juzgó aconsejable usar tales métodos en vista de que sólo se deseaba resolver un número corto de casos.

El efecto del oleaje no es importante en el diseño de una cortina, sólo debe considerarse para la parte superior de la misma. Para cuantificar el efecto del oleaje se acudió al método de diferencias finitas, si bien existen otros como el del elemento finito, que pueden presentar ventajas. En combinación con el método de diferencias finitas se utilizó el espectro de seudo velocidades para cuantificar de una manera aproximada el error al despreciar el efecto del oleaje. El espectro usado es típico de espectros sobre terreno duro. El análisis aproximado se hubiese podido realizar con espectros medios o con el espectro de Fourier del temblor de El Centro; pero lo importante era cuantificar el error al despreciar el efecto del oleaje y por otra parte el espectro de Fourier de un sólo temblor no asegura características comunes de temblores futuros. El error que se comete al despreciar el efecto del oleaje en el empuje es menor de 5.45% en cortinas de altura moderada ($\leq$ 30 m); por lo que para el cálculo del empuje y el momento hidrodinámicos dicho efecto no se considera. Además el análisis matemático cuando se incluye el oleaje se complica en alto grado debido a la forma de las condiciones de frontera, y los procedimientos usuales de solución de ecuaciones diferenciales no conducen a resultados positivos en este caso. Sin embargo, el análisis numérico es sencillo y proporciona resultados que pueden compararse directamente con los teóricos.

En el modelo matemático desarrollado no se considera pérdida de energía. En un modelo más completo sería importante incluirla junto con condiciones más realistas del fenómeno, como lo sería tener en cuenta la disminución de las presiones al reflejarse en el fondo del vaso.

ANEXO I

<u>Solución sin tomar en cuenta el efecto del oleaje</u>

Ecuación de movimiento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Respuesta a movimientos verticales

Condiciones de frontera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(r, 0, t) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(r, \pi, t) = 0 \qquad (3)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)(r_0, \theta, t) = \ddot{v}_g(t)\, sen\, \theta \qquad (4)$$

Condiciones iniciales:

$$\phi(r, \theta, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0 \qquad (5)$$

Respuesta de frecuencia compleja. Sea $\ddot{v}_g(t) = e^{i\omega t}$. La solución de la ecuación (1) es de la forma:

$$\phi(r, \theta, t) = H_\phi^\theta(r, \theta, \omega) \cdot e^{i\omega t} \qquad (6)$$

donde H_ϕ^θ = respuesta de frecuencia compleja de ϕ debida a un movimiento a lo largo de la frontera circular. La solución para $H_\phi(r, \theta, \omega)$ se obtiene por el método de separación de variables [13]

$$H_\phi^\theta(r, \theta, \omega) = -\frac{1}{i\omega}\, \frac{sen\,\theta\; J_1(\omega r/c)}{\left[\frac{\omega}{c} J_0(\omega r_0/c) - \frac{1}{r_0} J_1(\omega r_0/c)\right]} \qquad (7)$$

La respuesta de frecuencia compleja para la presión hidrodinámica es:

$$H_p^\theta(r, \theta, \omega) = -\frac{\gamma}{g}\, \frac{sen\,\theta\; J_1(\omega r/c)}{\left[\frac{\omega}{c} J_0(\omega r_0/c) - \frac{1}{r_0} J_1(\omega r_0/c)\right]} \qquad (8)$$

Respuesta a un impulso unitario. La respuesta a un impulso unitario debida a un movimiento vertical vale

$$h_p^\theta(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_p^\theta(r, \theta, \omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (9)$$

$$h_p^\theta(r, \theta, t) = \frac{\gamma\, c\, sen\,\theta}{r_0\, g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,\lambda_n c t \cdot J_1(\lambda_n r/r_0)}{J_1(\lambda_n)\left[\frac{1-\lambda_n^2}{\lambda_n}\right]} \qquad (10)$$

Respuesta a un impulso cualquiera. La presión hidrodinámica debida a un movimiento vertical arbitrario $\ddot{v}_g(t)$ vale:

$$p^{e}(r,\theta,t) = \frac{\rho c\,\operatorname{sen}\theta}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{J_1(\lambda_n \frac{r}{r_0})}{J_1(\lambda_n)[1-\lambda_n^2]} \cdot \int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\,.\,\operatorname{sen}\frac{\lambda_n c}{r_0}(t-\tau)\,d\tau \tag{11}$$

Integrando (11) sobre toda el área se obtiene el empuje total e integrando el empuje se obtiene el momento de volteo sobre la base de la cortina:

$$H_p^{e}(t) = 2\int_0^{r_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{e}(r,\theta,t)\, r\,dr\,d\theta \tag{12}$$

$$M_p^{e}(t) = 2\int_0^{r_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{e}(r,\theta,t)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\,d\theta \tag{13}$$

Para obtener resultados comparables con los del vaso rectangular, se normalizan (12) y (13) con respecto al empuje hidrostático total y el momento de volteo hidrostático del área semicircular:

$$H_0 = \frac{2\rho r_0^3}{3} \tag{14}$$

$$M_0 = \rho r_0^4 \left(\frac{16-3\pi}{24}\right) \tag{15}$$

por lo que (12) y (13) quedan definidos como:

$$\frac{H_p^{e}(t)}{H_0} = \frac{3c}{g r_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-\lambda_n J_0(\lambda_n) + \int_0^{\lambda_n} J_0(x)\,dx]}{J_1(\lambda_n)\,[\lambda_n - \lambda_n^3]} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\,.\,\operatorname{sen}\frac{\lambda_n c}{r_0}(t-\tau)\,d\tau \tag{16}$$

$$\frac{M_p^{e}(t)}{M_0} = \frac{12 c\pi}{g r_0 (16-3\pi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\lambda_n)}{J_1(\lambda_n)[1-\lambda_n^2]} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\,.\,\operatorname{sen}\frac{\lambda_n c}{r_0}(t-\tau)\,d\tau \tag{17}$$

donde $J_0(\lambda_n)$, $J_1(\lambda_n)$ y $J_2(\lambda_n)$ son las funciones de Bessel de primera clase y órdenes 0, 1 y 2. En las expresiones anteriores es necesario valuar $\int_0^{\lambda_n} J_0(x)\,dx$; para poder hacerlo se utiliza la relación:

$$\int_0^{\lambda_n} J_0(x)\,dx = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\lambda_n) \tag{18}$$

En el anexo 2 se indican los programas desarrollados para el cálculo de estas expresiones y un detalle mayor de las ecuaciones (16) y (17).

A N E X O 2

Descripción de programas para computadora electrónica

Para realizar el cálculo numérico de las soluciones presentadas, se elaboraron los siguientes programas para la CDC 3300 de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, los que al final del anexo se encuentran listados.

Programa DIFFIN

Genera y resuelve el sistema de ecuaciones que analiza la sección semicircular por el método de diferencias finitas. Tiene capacidad para dividir a la sección en 100 círculos y 100 radios. No utiliza cintas magnéticas ni discos.

Tiene como subrutina para resolver el sistema de ecuaciones la subrutina SOLEC, que es el programa del método de eliminación de Gauss-Jordan para la solución de ecuaciones.

Programa MALLASER

Calcula los valores de la solución que no toma en cuénta el efecto del oleaje para comparar resultados con los del programa DIFFIN. Obtiene los resultados en los mismos puntos que ese programa. Tiene como subrutina la subrutina BESSEL, la que calcula a las funciones $J_0(x)$ y $J_1(x)$ utilizando su propia definición:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \quad (1)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots \quad (2)$$

Esta subrutina no tiene en este caso problemas de convergencia, debido a que los argumentos de las funciones de Bessel son menores de 15. No utiliza cintas magnéticas ni discos.

Programa EXTRAPOL

Este programa extrapola valores obtenidos al analizar la sección semicircular por el método de diferencias finitas. Se necesitan como datos parejas de valores obtenidos al hacerl el análisis y el ancho de cada malla.

$$A_{n_1,n_2} = \alpha_1 A_{n_1} + \alpha_2 A_{n_2} \qquad (3)$$

donde h^2 es el orden del error obtenido en el método de diferencias finitas.

No utiliza cintas magnéticas ni discos.

Programa WAVE

Calcula los valores de la solución obtenida por Chopra para el vaso rectangular (respuesta de frecuencia compleja). No se indica la subrutina para graficar que también utiliza este programa. No utiliza cintas magnéticas ni discos.

Programa COMPA

Calcula los valores de la solución que no toma en cuenta el efecto del oleaje en secciones verticales, para comparar con los del vaso rectangular. Este programa utiliza las siguientes subrutinas:

BESSEL - Una versión distinta a la presentada anteriormente debido a que como los argumentos de las funciones son muy altos ($X>15$), se tenían problemas de convergencia con el otro programa.

GRAFICA, MAXIMOS y MAXMIN - Estas tres subrutinas sirven para graficar los valores calculados por el programa principal.

Programa WOLFFER

Este programa calcula los valores del empuje y del momento definidos en las ecuaciones (16) y (17) del anexo 1; donde $\ddot{v}_g(t)$ es la aceleración del terreno y está definida como una serie de líneas rectas. El temblor utilizado fue el de El Centro, el que tuvo una duración de

31.7 seg; en este caso se integraron alrededor de 8.5 seg para definir las respuestas máximas y se utilizaron alrededor de 200 puntos de los 800 que representan el temblor completo.
Utiliza como subrutinas:

CONVO - Calcula la integral de convolución

$$\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) . sen \lambda_{q_0}^{c} (t-\tau) d\tau \qquad (4)$$

INTEGRO - Calcula la expresión $\int_0^{\lambda_n} J_0(x)dx$ utilizando la relación:

$$\int_0^{\lambda_n} J_0(x)dx = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\lambda_n) \qquad (5)$$

BESSEL - Misma versión que la utilizada en el COMPA, tiene opción para cualquier orden de las funciones J de Besse.

```
      PROGRAM DIFFIN
      COMMON A(100,100),P(100),X(100),IND(6),AL(6),BL(6),NUPUN,NTI,DET
      COMMON TIT(20),IPIV(100),NRU(100)
      DIMENSION C(50),W(70),R(20),B(100)
 5000 FORMAT(24I3)
 5001 FORMAT(8F10.0)
 5002 FORMAT(49H1  RESPUESTA  DE FRECUENCIA COMPLEJA  CON OLEAJE.//3X,4H
     1 W =F10.3,10H RAD/SEG.  ,4H T =F8.4,5H SEG.,7HRADIO =F10.0,4H MT.)
 5003 FORMAT (/12H ECUACION NO,I3,11F7.2)
 5004 FORMAT(10A8)
 5005 FORMAT(28X,10A8/28X,10A8)
 5006 FORMAT(//X54HSOLUCION PARA EL VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES NO
     1.,I3//)
 5007 FORMAT(6(A3,I2,2H)=,E12.5))
 5008 FORMAT (//1X,25HDETERMINANTE DEL SISTEMA=,E14.3)
 5009 FORMAT(/1X,40HEL SISTEMA NO TIENE SOLUCION DETERMINADA)
 5010 FORMAT(29H  PUNTOS DE FRONTERA SUPERIOR,I3,1X,E18.11)
 5011 FORMAT(29H  PUNTOS DE FRONTERA CIRCULAR,I3,1X,E18.11)
 5012 FORMAT(13H EMPUJE HID.=E18.11)
      CE=1438.45
      PI=3.14159
      GE=9.81
      READ 5000,NCA
      DO 35 IJ=1,NCA
      READ 5004,(TIT(NM),NM=1,20)
      READ 5000,NC,NR,N,M
      READ 5001,(W(I),I=1,N)
      READ 5001,(R(I),I=1,M)
      NC1=NC-1
      NR1=NR-1
      DIFC=NC1
      DIFR=NR1
      H=1./DIFC
      ALFA=0.5*PI/DIFR
      NUPUN=(NC-2)*NR1
      DO 35 I=1,N
      T=2.*PI/W(I)
      DO 35 J=1,M
      DO 1 LI=1,NUPUN
      B(LI)=0.0
      DO 1 LJ=1,NUPUN
      A(LI,LJ)=0.0
    1 CONTINUE
      LK=0
      DO 18 K=2,NR
      DO 18 L=2,NC1
      LK=LK+1
      LKAD=LK+1
      LKAT=LK-1
      LKD=LK-(NC-2)
      LKI=LK+(NC-2)
      TETA=(K-1)*ALFA
      RO=(L-1)*H
      FACR=0.5*H/RO
      ADE=1.+FACR
      ATR=1.-FACR
```

```
      FACA=H/(RO*ALFA)
      FLAT=FACA**2
      CENT=(W(I)*R(J)*H/CE)**2-2.*(1.+FLAT)
      IF(K-2)2,2,7
    2 CONST=1.5*GE/(R(J)*ALFA*RO)-W(I)**2
      IF(CONST)36,25,36
   36 FACT=(GE/(2.*ALFA*RO*R(J)))*FLAT
      COR1=4.*FACT/CONST
      COR2=-1.*FACT/CONST
      IF(L-2)3,3,4
    3 A(LK,LK)=CENT+COR1
      A(LK,LKAD)=ADE
      A(LK,LKI)=FLAT+COR2
      GO TO 18
    4 IF(L-NC1)5,6,6
    5 A(LK,LK)=CENT+COR1
      A(LK,LKAT)=ATR
      A(LK,LKI)=FLAT+COR2
      A(LK,LKAD)=ADE
      GO TO 18
    6 A(LK,LK)=CENT+COR1+4.*ADE /3.
      A(LK,LKAT)=ATR-ADE/3.
      A(LK,LKI)=FLAT+COR2
      B(LK)=2.*H*R(J)*SINF(TETA)*ADE/(3.*W(I))
      GO TO 18
    7 IF(K-NR)8,13,13
    8 IF(L-2)11,11,9
    9 IF(L-NC1)10,12,12
   10 A(LK,LKAT)=ATR
   11 A(LK,LK)=CENT
      A(LK,LKAD)=ADE
      A(LK,LKD)=FLAT
      A(LK,LKI)=FLAT
      GO TO 18
   12 A(LK,LK)=CENT+4.*ADE/3.
      A(LK,LKAT)=ATR-ADE/3.
      A(LK,LKD)=FLAT
      A(LK,LKI)=FLAT
      B(LK)=2.*H*R(J)*SINF(TETA)*ADE/(3.*W(I))
      GO TO 18
   13 IF(L-2)16,16,14
   14 IF(L-NC1)15,17,17
   15 A(LK,LKAT)=ATR
   16 A(LK,LK)=CENT
      A(LK,LKAD)=ADE
      A(LK,LKD)=2.*FLAT
      GO TO 18
   17 A(LK,LK)=CENT+4.*ADE/3.
      A(LK,LKAT)=ATR-ADE/3.
      A(LK,LKD)=2.*FLAT
      B(LK)=2.*H*R(J)*SINF(TETA)*ADE/(3.*W(I))
   18 CONTINUE
      IF(NUPUN-20)19,19,21
   19 PRINT 5002,W(I),T,R(J)
      DO 20 K=1,NUPUN
      PRINT 5003,K,B(K),(A(K,L),L=1,NUPUN)
```

```
 20 CONTINUE
 21 PRINT 5002,W(I),T,R(J)
    DO 45 ICC=1,NUPUN
    P(ICC)=B(ICC)
 45 CONTINUE
    NTI=1
    CALL SOLEC
    PRINT 5005,(TIT(L),L=1,20)
    IF(DET)22,24,22
 22 DO 23 K=1,NTI
    PRINT 5006,K
    LET=3H X(
    PRINT 5007,(LET,NM,X(NM),NM=1,NUPUN)
 23 CONTINUE
 24 PRINT 5008,DET
    IF(DET)26,25,26
 25 PRINT 5009
    GO TO 35
 26 DO 27 L=1,NC1
    C(L)=0.0
 27 CONTINUE
    LK=0
    DO 31 L=2,NC
    LK=LK+1
    LKD=LK+(NC-2)
    RO=(L-1)*H
    CONST=1.5*GE/(R(J)*ALFA*RO)-W(I)**2
    FACT=GE/(2.*ALFA*RO*R(J))
    IF(CONST)28,25,28
 28 IF(L-NC)29,30,30
 29 C(L)=FACT*(4.*X(LK)-1.*X(LKD))/CONST
    GO TO 31
 30 L1=L-1
    L2=L-2
    C(L)=(4.*C(L1)-C(L2))/3.
 31 CONTINUE
    PRINT 5010,(L,C(L),L=1,NC)
    EMPUJE=0
    MULT=1 $ MULTI=0
    DO 200 L=1,NUPUN
    IF(L-((NC-2)*(NR-2)+1))201,202,202
201 IF(L-MULT*(NC-2))203,203,204
203 MULTI=MULTI+1
    FACTOR=4*MULTI
205 EMPUJE=EMPUJE+FACTOR*X(L)
    GO TO 200
204 MULT=MULT+1
    MULTI=0
    GO TO 203
202 FACTOR=2*(L-(NC-2)*(NR-2))
    GO TO 205
200 CONTINUE
    DO 300 L=2,NC
    IF(L-NC)301,302,302
301 EMPUJE=EMPUJE+2*(L-1)*C(L)
    GO TO 300
```

```
302 EMPUJE=EMPUJE+(L-1)*C(L)
300 CONTINUE
    DO 32 L=2,NR
    C(L)=0.0
 32 CONTINUE
    DO 33 L=2,NR
    TETA=(L-1)*ALFA
    LKA=(NC-2)*(L-1)
    LKAA=LKA-1
    C(L)=(-2.*H*R(J)*SINF(TETA)/W(I)+4.*X(LKA)-X(LKAA))/3.
 33 CONTINUE
    CONST=3.*GE/(6.*ALFA*H*R(J))-W(I)**2
    FACT=GE/(6.*ALFA*H*R(J))
    IF(CONST)34,25,34
 34 C(1)=FACT*(4.*C(2)-C(3))/CONST
    PRINT 5011,(L,C(L),L=1,NR)
    DO 400 L=2,NR
    IF(L-NR)401,402,402
401 EMPUJE=EMPUJE+2*(NC-1)*C(L)
    GO TO 400
402 EMPUJE=EMPUJE+(NC-1)*C(L)
400 CONTINUE
    PRINT 5012,EMPUJE
 35 CONTINUE
    END
```

```
      SUBROUTINE SOLEC
C     SUBRUTINA PARA EL METODO DE ELMINACION DE GAUSS
      COMMON A(100,100),B(100,1),X(100,1),IND(6),AL(6),BL(6),N,JB,DET
      COMMON TIT(20),IPIV(100),NRU(100)
      DO 105 J=1,N
      IPIV(J)=0
      NRU(J)=0
      PIV=0.
      DO 15 I=1,N
      DO 25 K=1,J
      IF(I-IPIV(K)) 25,15,25
   25 CONTINUE
      IF(ABSF(A(I,J))-ABSF(PIV)) 15,10,10
   10 PIV=A(I,J)
      IPIV(J)=I
      NRU(J)=I
   15 CONTINUE
      IF(ABSF(PIV)-0.1E-06)30,30,40
   30 DET=0.0
      RETURN
   40 DO 5 I=1,N
      DO 45 K=1,J
      IF(I-IPIV(K)) 45,5,45
   45 CONTINUE
      FEL=A(I,J)/PIV
      K1=IPIV(J)
      DO 55 J1=1,N
      A(I,J1)=A(I,J1)-FEL*A(K1,J1)
   55 CONTINUE
      DO 205 J2=1,JB
      B(I,J2)=B(I,J2)-FEL*B(K1,J2)
  205 CONTINUE
    5 CONTINUE
  105 CONTINUE
      DO 65 J3=1,N
      DO 65 J4=1,JB
      X(J3,J4)=0.0
   65 CONTINUE
      K=N+1
      DO 75 J3=1,N
      K=K-1
      I=IPIV(K)
      DO 75 J4=1,JB
      SUMA=0.0
      DO 95 J5=1,N
      SUMA=SUMA+A(I,J5)*X(J5,J4)
   95 CONTINUE
      X(K,J4)=(B(I,J4)-SUMA)/A(I,K)
   75 CONTINUE
      PROD=1.0
      IC=2
      DO 85 J6=1,N
      J7=IPIV(J6)
      PROD=PROD*A(J7,J6)
      IF(J6-NRU(J6))50,85,50
   50 NRU(J6)=J6
```

```
      NRU(J7)=J7
      IC=IC+1
   85 CONTINUE
      DET=((-1.0)**IC)*PROD
      RETURN
      END
```

```
      PROGRAM MALLASER
      INTEGER XMAXOF
      COMMON A,P,SUMA(200),NUCA
      COMMON BEJ1(500)'W(100)'R(100)'XMA(500)
      COMMON FAC(200),X
      COMMON D,BJ,IER,B,N
   10 FORMAT(4I5)
   11 FORMAT(8F10.0)
   12 FORMAT(6(A3,I3,2H)=,E12.5,1X))
   13 FORMAT(8X,17HPUNTO DE FRONTERA,I3,2H =,E15.8)
   19 FORMAT(49H1  RESPUESTA  DE FRECUENCIA COMPLEJA  SIN OLEAJE.//3X,4H
     1 W =F10.3,10H RAD/SEG. ,4H T =F8.4,5H SEG.,7HRADIO =F10.0,4H MT.)
 5012 FORMAT(13H EMPUJE HID.=E18.11)
      D=1.E-10
      XJ0=XJ1=RO=X=0.
      LET=3H X(
      READ 10,NUCA
      DO 500 I=1,NUCA
      READ 10,NC,NR,NW,M
      READ 11,(W(L),L=1,NW)
      READ 11,(R(L),L=1,M)
      CE=1438.45
      PI=3.14159265
      ALFA=0.5*PI/(NR-1)
      NUPUN=(NC-2)*(NR-1)
      NC1=NC-1
      DO 150 J=1,NW
      T=2.*PI/W(J)
      DO 150 K=1,M
      PRINT 19,W(J),T,R(K)
      X=(W(J)*R(K))/CE   $ P=0
      P=0.
      B=X    $ N=P
      CALL BESSEL
      XJ0=BJ
      X=(W(J)*R(K))/CE
      P=1.
      B=X    $ N=P
      CALL BESSEL
      XJ1=BJ
      Y=(W(J)*XJ0/CE) - XJ1/R(K)
      DIV=1./(W(J)*Y)
      LK=0
      DO 100 L=2,NR
      DO 100 KL=2,NC1
      LK=LK+1
      TETA=(L-1)*ALFA
      Z=KL-1
      O=NC-1
      RO=Z/O*R(K)
      X=(W(J)*RO)/CE
      P=1.
      B=X    $ N=P
      CALL BESSEL
      X=BJ
      BEJ1(LK)=X * SINF(TETA)
```

```
100 CONTINUE
    EMPUJE=0
    LK=0
    DO 120 L=2,NR
    DO 120 KL=2,NC1
    IF(L-NR)200,201,201
200 FACTOR=4
    GO TO 202
201 FACTOR=2
202 LK=LK+1
    XMA(LK)=BEJ1(LK)*DIV
    EMPUJE=EMPUJE+FACTOR*(KL-1)*XMA(LK)
120 CONTINUE
    PRINT 12,(LET,LK,XMA(LK),LK=1,NUPUN)
    KON=0
    DO 140 KK=1,NR
    LK=LK+1
    TETA=(KK-1)*ALFA
    BEJ1(LK)=XJ1*SINF(TETA)
    XMA(LK)=BEJ1(LK)*DIV
    KON=KON+1
    PRINT 13,KON,XMA(LK)
    IF(KK-NR)300,301,301
300 FACTOR=2*NC1
    GO TO 302
301 FACTOR=NC1
302 EMPUJE=EMPUJE+FACTOR*XMA(LK)
140 CONTINUE
    PRINT 5012,EMPUJE
150 CONTINUE
500 CONTINUE
    END
```

```
      PROGRAM BESSEL
      COMMON X,P,SUMA(200)
      COMMON ARG(1000),BES(1000)
      COMMON FAC(200)
   10 FORMAT(F5.0,I5)
   11 FORMAT(1H1,32X,64HS E C R E T A R I A  D E  R E C U R S O S  H I D
     1 R A U L I C O S//46X,36HOFICINA DE PROCESAMIENTO ELECTRONICO//43X
     2,40HCALCULO DE LA FUNCION DE BESSEL PARA J =,I2/1X,127(1H*)/4X,1HX
     3,6X,4H0.00,8X,4H0.01,8X,4H0.02,8X,4H0.03,8X,4H0.04,8X,4H0.05,8X,4H
     40.06,8X,4H0.07,8X,4H0.08,8X,4H0.09/1X,127(1H*))
   12 FORMAT(1X,1HI,5X,10(1HI,11X),1HI/1X,1HI,F5.2,10(1HI,F11.8),1HI)
   13 FORMAT (1X,127(1H*))
   20 FORMAT(I5)
      FAC(1)=1.0
      DO 1 I=2,200
      FAC(I)=FAC(I-1)*I
    1 CONTINUE
      READ 20,NUCA
  100 READ 10,A,IP
      IF(IP.EQ.99999)200,105
  105 DO 9  J=1,NUCA
      IF(J.EQ.1)1111,1112
 1111 ARG(J)=A
      GO TO 1113
 1112 A=A+0.01
      ARG(J)=A
 1113 IF(IP-1)2,3,3
    2 SUMA(1)=1.0
      GO TO 4
    3 SUMA(1)=(A/2.)**IP/FAC(IP)
    4 DO 7  K=2,100    $ IK=K-1
      EXP=2*IK+IP
      KP=IK+IP
      TER=((-1)**IK*(A/2.)**EXP)/(FAC(IK)*FAC(KP))
      ABSO=ABSF(SUMA(K-1))
      IF(ABSO-0.000000001)111,111,112
  112 IF(ABSO.GT.1.E307.OR.ABSO.LT.1.E-307)8,111
  111 ABSOT=ABSF(TER)
      IF(ABSOT.GT.0.00001)6,8
    6 SUMA(K)=SUMA(K-1)+TER
    7 CONTINUE
      BES(J)=SUMA(K)
      GO TO 9
    8 BES(J)=SUMA(K-1)
    9 CONTINUE
      PRINT 11,IP    $ KLIN=10
      DO 140 J=1,1000,10
      IF(KLIN.EQ.62)136,138
  136 PRINT 13
      PRINT 11,IP     $ KLIN=10
  138 M=J+9
      PRINT 12,ARG(J),(BES(L),L=J,M)
      KLIN=KLIN+2
  140 CONTINUE
      GO TO 100
  200 END
```

```
FORTRAN (3.1)/MASTER

      PROGRAM EXTRAPOL
      DIMENSION  XMC(4),XMG(4),IPXM(4),XFC(4),XFG(4),IPXF(4)
      DIMENSION  XCC(4),XCG(4),IPXC(4)
      READ 1,NCASOS
    1 FORMAT(I5)
      DO 50 J=1,NCASOS
      PRINT 52
   52 FORMAT(/////)
      READ 7,W,T,R
    7 FORMAT(3F10.0)
      PRINT 8,W,T,R
    8 FORMAT(60X,18H VALOR EXTRAPOLADO/5X,4H W= ,F4.1,8H RAD/SEG,4H T= ,
     1F7.3,4H SEG,4H R= ,F5.0,2H M)
      READ 2,(XMC(I),XMG(I),IPXM(I),I=1,4)
      READ 2,(XFC(I),XFG(I),IPXF(I),I=1,4)
      READ 2,(XCC(I),XCG(I),IPXC(I),I=2,3)
    2 FORMAT(F20.7,F20.7,I3)
      PRINT 51
      PRINT 9
    9 FORMAT(15X,13H PUNTOS MALLA)
      DO 20 I=1,4
      X=(XMG(I)*0.3333**2-XMC(I)*0.083333**2)/(0.3333**2-0.083333**2)
   20 PRINT 4,I,XMC(I),IPXM(I),XMG(I),X
    4 FORMAT(1X,3HXC(,I1,2H)=F20.7,2X,3HXG(,I2,2H)=F20.7,2X,3HX= ,F20.8)
      PRINT 51
      PRINT 10
   10 FORMAT(15X,25H PUNTOS FRONTERA SUPERIOR)
      DO 30 I=1,4
      X=(XFG(I)*0.3333**2-XFC(I)*0.083333**2)/(0.3333**2-0.08333**2)
   30 PRINT 5,I,XFC(I),IPXF(I),XFG(I),X
    5 FORMAT(1X,3HXC(,I1,2H)=,F20.7,2X,3HXG(,I2,2H)=,F20.7,2X,3HX= ,F20.
     18)
      PRINT 51
   51 FORMAT(//)
      PRINT 11
   11 FORMAT(15X,25H PUNTOS FRONTERA CIRCULAR)
      DO 40 I=2,3
      X=(XCG(I)*0.3333**2-XCC(I)*0.083333**2)/(0.3333**2-0.083333**2)
   40 PRINT 6,I,XCC(I),IPXC(I),XCG(I),X
    6 FORMAT(1X,3HXC(,I1,2H)=,F20.7,2X,3HXG(,I2,2H)=,F20.7,2X,3HX= ,F20.
     18)
   50 CONTINUE
      END

         FORTRAN DIAGNOSTIC RESULTS FOR      EXTRAPOL

NO ERRORS

   EXTRAPOL    P    00765    C    00000    D    00000
X,LGO
```

```
      PROGRAM WAVE
      REAL MAX,MIN,MINX,MAXX,MINY,MAXY,MAX1,MIN1
      INTEGER G,EYE,AST,BLANCO,AST1,G1,G2
      COMMON X(100),X1(100),Y(100),Y1(100),G(102),XT(21),YT(51),Z(100),Z
     11(100),TITX(20),TITY(51),G2(102)
      COMMON NDATA1,NDATA2,AMPX,AMPY,MINX,MAXX,MINY,MAXY,I3,I4,I5
      COMMON NUPUN,BLANCO,EYE,AST,AST1,G1,MAX,DX,AR,L,MIN,MAX1,MIN1
      DIMENSION W(100),R(100),HP(100),ALT(100)
    1 FORMAT(14I5)
    2 FORMAT(10F8.0)
    3 FORMAT(30H1 TEORIA DE CHOPRA SIN OLEAJE.,5H W  =,F10.0,9H RAD/SEG.
     1,4H T =,F7.3,5H SEG.,4H R =,F10.0,4H MT.///)
    4 FORMAT(///27H VALORES SOBRE LA VERTICAL.///)
    5 FORMAT(4(3X,F10.2,A4,E12.5))
      X1=Y1=NDATA2=AMPX=AMPY=MINX=MAXX=MINY=MAXY=0
      LET=4H HP=
      CE=1438.45
      PI=3.14159
      READ 1,NUPUN,NW,NR,IND,I3,I4,I5
      DIF=NUPUN-1
      H=1./DIF
      READ 2,(W(I),I=1,NW)
      READ 2,(R(I),I=1,NR)
      DO 30 I=1,NW
      T=2.*PI/W(I)
      DO 20 J=1,NR
      DO 11 LK=1,NUPUN
      YE=(LK-1)*R(J)*H $ ALT(LK)=YE
      HP(LK)=CE*SINF(W(I)*(R(J)-YE)/CE)/(W(I)**2*COSF(W(I)*R(J)/CE))
   11 CONTINUE
      PRINT 3,W(I),T,R(J)   $ PRINT 4
      PRINT 5,(ALT(LK),LET,HP(LK),LK=1,NUPUN)
      IF(IND.EQ.1)13,20
   13 PRINT 3,W(I),T,R(J)
      NDATA1=NUPUN
      DO 15 LK=1,NUPUN
      X(LK)=HP(LK)
      Y(LK)=ALT(LK)
   15 CONTINUE
      CALL GRAFICA
   20 CONTINUE
   30 CONTINUE
      END
```

```
      PROGRAM COMPA
      REAL MAX,MIN,MINX,MAXX,MINY,MAXY,MAX1,MIN1
      INTEGER G,EYE,AST,BLANCO,AST1,G1,G2
      INTEGER XMAXOF
      COMMON X(100),X1(100),Y(100),Y1(100),G(102),XT(21),YT(51),Z(100),Z
     11(100),TITX(20),TITY(51),G2(102)
      COMMON NDATA1,NDATA2,AMPX,AMPY,MINX,MAXX,MINY,MAXY,I3,I4,I5
      COMMON NUPUN,BLANCO,EYE,AST,AST1,G1,MAX,DX,AR,L,MIN,MAX1,MIN1
      COMMON D,BJ,TER,B,N
      DIMENSION W(50),R(50),XPUN(50),YPUN(50),HP(50)
  100 FORMAT(14I5)
  101 FORMAT(10F8.0)
  102 FORMAT(48H1 RESPUESTA DE  FRECUENCIA COMPLEJA  SIN OLEAJE.,5H W  =
     1,F8.0,9H RAD/SEG.,4H T =,F7.3,5H SEG.,4H R =,F8.0,4H MT.)
  103 FORMAT(///33H  VALORES SOBRE LA VERTICAL EN X=,F10.2,///)
  104 FORMAT(4(3X,F10.2,A4,E12.5))
      LET=4H HP=
      D=1.E-10
      CE=1438.45
      PI=3.14159265
      READ 100,NICA,I3,I4,I5
      DO  2  I=1,NICA
      READ 100,NC,NN,M,NH
      READ 101,(W(J),J=1,NN)
      READ 101,(R(J),J=1,M)
      NC1=NC-1
      NC2=NH-1
      DIF=NC1
      H=1./DIF
      C=NC/NC2
      DO 2 J=1,NN
      T=2.*PI/W(J)
      DO  2  K=1,M
      B=W(J)*R(K)/CE
      N=0
      CALL BESSEL
      XJ0=BJ
      N=1
      CALL BESSEL
      XJ1=BJ
      V=W(J)*XJ0/CE-XJ1/R(K)
      DIV=1./(W(J)*V)
      DO 2 LK=1,NC2
      XPUN(LK)=(LK-1)*H*R(K)*C       $   H1=SQRTF(R(K)**2-XPUN(LK)**2)
      COC=H1/DIF
      PRINT 102,W(J),T,R(K)
      PRINT 103,XPUN(LK)
      DO 1 KL=1,NC
      YPUN(KL)=(KL-1)*COC
      B=W(J)*YPUN(KL)/CE
      N=1
      IF(KL-1)4,4,5
    4 HP(KL)=0.0
      GO TO 1
    5 CALL BESSEL
      A=BJ
```

```
      HP(KL)=A*DIV*YPUN(KL)/SQRTF(XPUN(LK)**2+YPUN(KL)**2)
    1 CONTINUE
      NDATA1=NUPUN=NC
      DO 15 KL=1,NC
      Y(KL)=YPUN(KL)
      X(KL)=HP(KL)
   15 CONTINUE
      CALL GRAFICA
    2 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE BESSEL
      INTEGER XMAXOF
      COMMON A,P,SUMA(200),NUCA
      COMMON BEJ1(500),W(100),R(100),XMA(500)
      COMMON FAC(200),X
      COMMON D,BJ,IER,B,N
      BJ=0.
      IF(N)10,20,20
   10 IER=1
      RETURN
   20 IF(B)30'30'31
   30 IER=2
      RETURN
   31 IF(B-15.)32'32'34
   32 NTEST=20.+10.*B/2.
      GO TO 36
   34 NTEST=90.+B/2.
   36 IF(N-NTEST)40,38,38
   38 IER=4
      RETURN
   40 IER=0
      N1=N+1
      BPREV=0.
C
C     VALOR INICIAL DE M
C
      IF(B-5.)50,60,60
   50 MA=B+6.
      IFIJO=B
      GO TO 70
   60 MA=1.4*B+60./B
   70 MB=N+IFIJO/4.+2
      MZERO=XMAXOF(MA,MB)
      MMAX=NTEST
  100 DO 190 M=MZERO,MMAX,3
      FM1=1'0E-28
      FM=0.
      ALPHA=0.
      IF(M-(M/2)*2)120,110,120
  110 JT=-1
      GO TO 130
  120 JT= 1
  130 M2=M-2
      DO 160 K=1,M2
      MK=M-K
      BMK=2.*FLOATF(MK)*FM1/B-FM
      FM=FM1
      FM1=BMK
      IF(MK-N-1)150,140,150
  140 BJ= BMK
  150 JT=-JT
      S=1+JT
  160 ALPHA=ALPHA+BMK*S
      BMK=2.*FM1/B-FM
      IF(N)180,170,180
  170 BJ=BMK
```

```
180 ALPHA=ALPHA+BMK
    BJ=BJ/ALPHA
    IF(ABSF(BJ-BPREV)-ABSF(D*BJ))200,200,190
190 BPREV=BJ
    IER=3
200 RETURN
    END
```

```
      SUBROUTINE GRAFICA
      REAL MAX,MIN,MINX,MAXX,MINY,MAXY,MAX1,MIN1
      INTEGER G,EYE,AST,BLANCO,AST1,G1,G2
      INTEGER XMAXOF
      COMMON X(100),X1(100),Y(100),Y1(100),G(102),XT(21),YT(51),Z(100),Z
     11(100),TITX(20),TITY(51),G2(102)
      COMMON NDATA1,NDATA2,AMPX,AMPY,MINX,MAXX,MINY,MAXY,I3,I4,I5
      COMMON NUPUN,BLANCO,EYE,AST,AST1,G1,MAX,DX,AR,L,MIN,MAX1,MIN1
      COMMON D,BJ,IER,B,N
      BLANCO=1H   $  EYE=1HI  $  AST=1H*  $  AST1=1HO
      IF(I5.EQ.1)1,2
    1 CALL MAXMIN
      DY=(AMPY-MIN)/50.  $  YT(1)=MIN  $  AR=DY/2.
      CALL MAXMIN
      DX=(AMPX-MIN)/100. $  XT(1)=MIN  $  GO TO 3
    2 IF(I3.EQ.1)15,16
   15 DY=(MAXY-MINY)/50.  $  YT(1)=MINY  $  AR=DY/2
      DX=(MAXX-MINX)/100. $  XT(1)=MINX  $  MIN=MINX  $  GO TO 3
   16 DO 120 JJ=1,NUPUN
  120 Z(JJ)=Y(JJ)
      CALL MAXMIN
      DY=(MAX-MIN)/50.  $  YT(1)=MIN  $  AR=DY/2.
      DO 121 JJ=1,NUPUN
  121 Z(JJ)=X(JJ)
      CALL MAXMIN
      DX=(MAX-MIN)/100. $  XT(1)=MIN
    3 DO 100 I=1,50
  100 YT(I+1)=YT(I)+DY  $  IN=0  $  M=1
      DO 101 I=IN,95,5  $  M=M+1
  101 XT(M)=XT(1)+(I+5)*DX  $  L=51
      IF(I5.EQ.1)4,10
    4 DO 102 I=1,101
  102 G(I)=BLANCO
      DO 103 I=1,NDATA1
      IF (Y(I).GT.YT(51).AND.X(I).GE.XT(1).AND.X(I).LE.XT(21))5,103
    5 LL=(X(I)-MIN)/DX+1.5
      G(LL)=1H↑
  103 CONTINUE
      IF(I4.EQ.1)6,8
    6 DO 104 I=1,NDATA2
      IF (Y1(I).GT.YT(51).AND.X1(I).GE.XT(1).AND.X1(I).LE.XT(21))7,104
    7 LL=(X1(I)-MIN)/DX+1.5
      G(LL)=1H↑
  104 CONTINUE
    8 PRINT 9,(G(I),I=1,101)  $  GO TO 17
    9 FORMAT (20X,101A1)
   10 IF(I3.EQ.1)4,17
   17 CALL MAXIMOS
      M=51-L+1
      PRINT 11,YT(L),G1,(G(I),I=1,102)  $  L=L-1
   11 FORMAT (10X,F9.2,A1,102A1)
      IF (L.EQ.0)12,17
   12 IF(I3.EQ.1)18,24
   18 DO 105 I=1,101
  105 G(I)=BLANCO
      DO 106 I=1,NDATA1
```

```
      IF  (Y(I).LT.YT(1).AND.X(I).GE.MINX.AND.X(I).LE.MAXX)19,106
   19 LL=(X(I)-MIN)/DX+1.5   $   G(LL)=1H+
  106 CONTINUE
      IF(I4.EQ.1)20,23
   20 DO 107 I=1,NDATA2
      IF  (Y1(I).LT.YT(1).AND.X1(I).GE.MINX.AND.X1(I).LE.MAXX)21,107
   21 LL=(X1(I)-MIN)/DX+1.5   $   G(LL)=1H*
  107 CONTINUE
   23 PRINT 22,(G(I),I=1,101)
   22 FORMAT (20X,101A1)
   24 PRINT 13,(XT(I),I=1,21,2),(XT(I),I=2,20,2),DX,DY
   13 FORMAT (/17X,11(F7.2,3X)/22X,10(F7.2,3X)//50X,18HESCALAS    EJE X 1
     1:,F7.3,2X,8HEJE Y 1:,F7.3)
      END
```

```
      SUBROUTINE MAXIMOS
      REAL MAX,MIN,MINX,MAXX,MINY,MAXY,MAX1,MIN1
      INTEGER G,EYE,AST,BLANCO,AST1,G1,G2
      INTEGER XMAXOF
      COMMON X(100),X1(100),Y(100),Y1(100),G(102),XT(21),YT(51),Z(100),Z
     11(100),TITX(20),TITY(51),G2(102)
      COMMON NDATA1,NDATA2,AMPX,AMPY,MINX,MAXX,MINY,MAXY,I3,I4,I5
      COMMON NUPUN,BLANCO,EYE,AST,AST1,G1,MAX,DX,AR,L,MIN,MAX1,MIN1
      COMMON D,BJ,IER,B,N
      DO 100 I=1,102  $  G2(I)=0
  100 G(I)=BLANCO  $  G1=BLANCO
      DO 101 I=1,101,10
  101 G(I)=EYE
      IF (L.EQ.1)1,2
    1 DO 102 J=2,101
  102 G(J)=1H-
      DO 103 J=6,101,5
  103 G(J)=EYE
    2 DO 104 I=1,NDATA1
      IF (Y(I).LT.(YT(L)+AR).AND.Y(I).GE.(YT(L)-AR))3,104
    3 IF (X(I).LE.XT(21))4,5
    4 IF (X(I).GE.XT(1))13,14
   13 LL=(X(I)-MIN)/DX+1.5  $  G(LL)=AST  $  G2(LL)=1  $  GO TO 104
   14 G1=1H<  $  GO TO 104
    5 G(102)=1H>
  104 CONTINUE
      IF(I4.EQ.1)6,12
    6 DO 105 J=1,NDATA2
      IF (Y1(J).LT.(YT(L)+AR).AND.Y1(J).GE.(YT(L)-AR))7,105
    7 IF(X1(J).LE.XT(21))8,11
    8 IF (X1(J).GE.XT(1))15,16
   16 G1=1H<  $  GO TO 105
   15 LL=(X1(J)-MIN)/DX+1.5
      IF (G2(LL))9,10,9
    9 G(LL)=1H=  $  GO TO 105
   10 G(LL)=AST1  $  GO TO 105
   11 G(102)=1H>
  105 CONTINUE
   12 END
```

```
      SUBROUTINE MAXMIN
      REAL MAX,MIN,MINX,MAXX,MINY,MAXY,MAX1,MIN1
      INTEGER G,EYE,AST,BLANCO,AST1,G1,G2
      INTEGER XMAXOF
      COMMON X(100),X1(100),Y(100),Y1(100),G(102),XT(21),YT(51),Z(100),Z
     11(100),TITX(20),TITY(51),G2(102)
      COMMON NDATA1,NDATA2,AMPX,AMPY,MINX,MAXX,MINY,MAXY,I3,I4,I5
      COMMON NUPUN,BLANCO,EYE,AST,AST1,G1,MAX,DX,AR,L,MIN,MAX1,MIN1
      COMMON D,BJ,IER,B,N
      MAX=MIN=Z(1)
      DO 100 I=1,NUPUN
      IF (Z(I).GE.MIN)10,11
   11 MIN=Z(I)
      GO TO 100
   10 IF (Z(I).GT.MAX)12,100
   12 MAX=Z(I)
  100 CONTINUE
      IF(I4.EQ.1)13,20
   13 MAX1=MIN1=Z1(1)
      DO 101 I=1,N2
      IF (Z1(I).GE.MIN1)14,15
   15 MIN1=Z1(I)
      GO TO 101
   14 IF (Z1(I).GT.MAX1)16,101
   16 MAX1=Z1(I)
  101 CONTINUE
      IF (MAX.GE.MAX1)18,17
   17 MAX=MAX1
   18 IF (MIN.LE.MIN1)20,19
   19 MIN=MIN1
   20 END
```

```
      PROGRAM WOLFFER
      REAL MOMENTO,MOMEN
      INTEGER XMAXOF
      COMMON H(3),Z(220),Y(220),HLAN(30),PEND(220),ACHE(220)
      COMMON BES2(30),BESIN(30),XCAL(1500),FACDA,G,FA1,NIN,NFIN
      COMMON D,BJ,IER,X,N
      COMMON SUMA
 5000 FORMAT(14I5)
 5001 FORMAT(8F10.4)
 5002 FORMAT(8F10.0)
 5004 FORMAT(3X,4(F8.4,F9.6))
 5006 FORMAT(52H1    RESPUESTA HIDRODINAMICA. TEMBLOR  EL CENTRO,CAL. /23
     1H   COMPONENTE VERTICAL. /25H   VASO  DE  PROFUNDIDAD-F10.0,3H M./
     1)
 5010 FORMAT(16X,2(2X,E15.8,2X,E15.8,3X,F10.5))
 5011 FORMAT(16X,47HEMPUJE(DIN/HID)  MOMENTO(DIN/HID)   TIEMPO(SEG))
      D=1.E-10
      C=1438.45 $ G=9.81  $ PI=3.14159
      READ 5000,NUMH,NUPUN,NULAN,NINT
      READ 5002,(H(I),I=1,NUMH)
      READ 5004,(Z(I),Y(I),I=1,NUPUN)
      READ 5001,(HLAN(I),I=1,NULAN)
      FNINT=(NINT-1)
      NUPU=NUPUN-1
      DO 1 K=1,NUPU
      PEND(K)=(Y(K+1)-Y(K))/(Z(K+1)-Z(K))
      ACHE(K)=-PEND(K)*Z(K)+Y(K)
    1 CONTINUE
      DO 50 K=1'NULAN
      X=HLAN(K)
      XXX=1.-X**2
      N=0
      CALL BESSEL
      BES0=-BJ*X
      N=1
      CALL BESSEL
      BES1=BJ * XXX
      N=2
      CALL BESSEL
      BES2(K)=BJ/BES1
      CALL INTEGRO
      BESIN(K)=(BES0+SUMA)/(BES1*X)
   50 CONTINUE
      DO 17 I=1,NUMH
      LLL=1
      PRINT 5006,H(I)
      PRINT 5011
      CONST1=3.*C/(G*H(I))
      CONST2=12.*PI*C/(G*H(1)*(16.-3*PI))
      INDJ=1
      XCAL(1)=Z(1)
      DO 18 KK=1,NUPU
      DO 45 LK=2,NINT
      EMPU=MOMEN=0.0
      INDP=1
      INDM=1
```

```
      LLL=LLL+1
      XCAL(LLL)=Z(KK)+(LK-1)/FNINT*(Z(KK+1)-Z(KK))
      IF(XCAL(LLL).GE.Z(KK+1))39,40
   39 XCAL(LLL)=Z(KK+1)
      INDJ=2
   40 NFIN=LLL
      NIN=NFIN-1
      DO 19 K=1,NULAN
      X=HLAN(K)
      IF(INDP+INDM-4)21,30,30
   21 FACDA=0.0
      FA1=X*C/H(1)
      CALL CONVO
      PRESION=CONST1*BESIN(K)*FACDA
      MOMENTO=CONST2*BES2(K)*FACDA
   25 GO TO(10,11),INDP
   10 IF(ABSF(PRESION)-0.0000001)13,13,12
   12 EMPU=EMPU+PRESION
   11 GO TO(14,30),INDM
   14 IF(ABSF(MOMENTO)-0.0000001)16,16,15
   15 MOMEN=MOMEN+MOMENTO
      GO TO 19
   13 INDP=2
      GO TO 11
   16 INDM=2
   19 CONTINUE
      PRINT 5010,EMPU,MOMEN,XCAL(LLL)
      GO TO(45,46),INDJ
   30 PRINT 5010,EMPU,MOMEN,XCAL(LLL)
      GO TO(45,46),INDJ
   45 CONTINUE
   46 INDJ=1
   18 CONTINUE
   17 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE CONVO
      REAL MOMENTO,MOMEN
      INTEGER XMAXOF
      COMMON H(3),Z(220),Y(220),HLAN(30),PEND(220),ACHE(220)
      COMMON BES2(30),BESIN(30),XCAL(1500),FACDA,G,FA1,NIN,NFIN
      COMMON D,BJ,IER,X,N
      COMMON SUMA
      TER5=SINF(FA1*XCAL(NFIN))
      TER6=COSF(FA1*XCAL(NFIN))
      KK=0
      DO 7 J=1,NIN
      IF(J-1)4,4,5
    4 FAC1=SINF(FA1*XCAL(J+1))
      FAC2=SINF(FA1*XCAL(J))
      FAC3=COSF(FA1*XCAL(J+1))
      FAC4=COSF(FA1*XCAL(J))
      GO TO 6
    5 FAC2=FAC1
      FAC1=SINF(FA1*XCAL(J+1))
      FAC4=FAC3
      FAC3=COSF(FA1*XCAL(J+1))
    6 TER1=(FAC1-FAC2)/FA1
      TER2=(FAC4-FAC3)/FA1
      TER3=(-TER2/FA1+(XCAL(J+1) *FAC1-XCAL(J)*FAC2)/FA1)
      TER4=( TER1/FA1-(XCAL(J+1)*FAC3-XCAL(J)*FAC4)/FA1)
      KK1=J-1
      IF(KK1/5*5-KK1.EQ.0)11,12
   11 KK=KK+1
   12 FAMP=G*(ACHE(KK)*(TER5*TER1-TER6*TER2)+PEND(KK)*(TER5*TER3-TER6*TE
     1R4))
      FACDA=FACDA+FAMP
    7 CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE INTEGRO
      REAL MOMENTO,MOMEN
      INTEGER XMAX,DF
      COMMON H(3),Z(220),Y(220),HLAN(30),PEND(220),ACHE(220)
      COMMON BES2(30),BESIN(30),XCAL(1500),FACDA,G,FA1,NIN,NFIN
      COMMON D,BJ,TER,X,N
      COMMON SUMA
      SUMA=0.0
      DO 2 I=1,20,2
      N=I
      CALL BESSEL
      IF(ABSF(BJ)-1.E-10)3,3,1
    1 SUMA=SUMA+2.*BJ
    2 CONTINUE
    3 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE BESSEL
      REAL MOMENTO,MOMEN
      INTEGER XMAX0F
      COMMON H(3),Z(220),Y(220),HLAN(30),PEND(220),ACHE(220)
      COMMON BES2(30),BESIN(30),XCAL(1500),FACDA,G,FA1,NIN,NFIN
      COMMON D,BJ,IER,X,N
      COMMON SUMA
      BJ=0.
      IF(N)10,20,20
   10 IER=1
      RETURN
   20 IF(X)30,30,31
   30 IER=2
      RETURN
   31 IF(X-15.)32,32,34
   32 NTEST=20.+10.*X/2.
      GO TO 36
   34 NTEST=90.+X/2.
   36 IF(N-NTEST)40,38,38
   38 IER=4
      RETURN
   40 IER=0
      N1=N+1
      BPREV=0.

      VALOR INICIAL DE M

      IF(X-5.)50,60,60
   50 MA=X+6.
      IFIJO=X
      GO TO 70
   60 MA=1,4*X+60./X
   70 MB=N+IFIJO/4.+2
      MZERO=XMAX0F(MA,MB)
      MMAX=NTEST
  100 DO 190 M=MZERO,MMAX,3
      FM1=1.0E-28
      FM=0.
      ALPHA=0.
      IF(M-(M/2)*2)120,110,120
  110 JT=-1
      GO TO 130
  120 JT= 1
  130 M2=M-2
      DO 160 K=1,M2
      MK=M-K
      BMK=2.*FLOATF(MK)*FM1/X-FM
      FM=FM1
      FM1=BMK
      IF(MK-N-1)150,140,150
  140 BJ= BMK
  150 JT=-JT
      S=1+JT
  160 ALPHA=ALPHA+BMK*S
      BMK=2.*FM1/X-FM
      IF(N)180,170,180
```

```
170 BJ=BMK
180 ALPHA=ALPHA+BMK
    BJ=BJ/ALPHA
    IF(ABSF(BJ-BPREV)-ABSF(D*BJ))200,200,190
190 BPREV=BJ
    IER=3
200 RETURN
    END
```

N O T A C I O N

A_1	=	coeficiente de Fourier en la solución que desprecia el efecto del oleaje
A_k	=	coeficiente de Fourier
An_1, An_2	=	valores de la respuesta de frecuencia compleja asociados a los tamaños de mallas n_1 y n_2
An_1n_2	=	valor extrapolado de An_1 y An_2
ak, bk	=	coeficiente de las series infinitas en la ecuación (60)
C	=	factor del empuje hidrodinámico debido a una excitación armónica
C_k	=	coeficiente
C_1, C_2, C_3, C_4	=	coeficientes
c	=	velocidad del sonido en el agua
D	=	operador $\frac{\partial}{\partial x}$
D_k	=	coeficiente
D_1	=	coeficiente
E_1	=	empuje hidrodinámico debido a una excitación armónica tomando en cuenta el oleaje
E_2	=	empuje hidrodinámico debido a una excitación armónica despreciando el oleaje
E_v	=	módulo de compresibilidad volumétrico
$e^{i\omega t}$	=	excitación armónica
F(t)	=	función de t
$F(\omega)$	=	espectro de Fourier
$F(-\omega)$	=	conjugado complejo de F( )
$F_n(r,n,s)$	=	transformada coseno de Fourier
f(s)	=	transformada de Laplace de F(t)
$f(r,\theta,s)$	=	transformada de Laplace de $\phi(r,\theta,t)$
g	=	aceleración de la gravedad
H	=	altura del nivel libre del agua en reposo
$H_\phi^\theta(\omega)$	=	respuesta de frecuencia compleja para el potencial de velocidades

$H_p^{\theta}(\omega)$	=	respuesta de frecuencia compleja para la presión
$H_1(r,\theta), H_2(r,\theta)$	=	funciones de r y θ
h	=	amplitud radial de la malla circular en el método de diferencias dinitas
$h(r,\theta)$	=	función de r y θ
h_r	=	ordenada al origen del pulso r
i	=	argumento imaginario $=\sqrt{-1}$
$J_k(x)$	=	funciones de Bessel de primera clase de orden k y argumento x
$K(k)$	=	función de k
k^2	=	constante de separación
k_1	=	$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$
k_n	=	valores característicos de la ecuación: $\frac{\omega}{c} J_{k-1}\left(\frac{\omega r_o}{c}\right) - \frac{1}{r_o} J_k\left(\frac{\omega r_o}{c}\right) = 0$
n	=	entero positivo
n_1, n_2	=	tamaños de mallas rectangulares en el método de diferencias finitas
$O(h^2)$	=	de orden h^2
p	=	presión hidrodinámica
p_{max}	=	presión máxima
$R(r)$	=	función de r
r	=	coordenada radial en el problema bidimensional
r_o	=	radio del vaso semicilíndrico
S_v	=	espectro de respuesta de velocidades
SS_{γ}	=	valor de la ecuación (100)
T	=	período del movimiento perturbador
TS_r	=	valor de la ecuación (101)
T_1	=	período fundamental del vaso
t	=	tiempo
u	=	desplazamiento horizontal
v	=	desplazamiento vertical

$\ddot{v}_g(t)$	=	aceleración vertical arbitraria del terreno
W	=	valor de la integral de convolución en el tiempo t
W_r	=	contribución del pulso r al valor de W
x_1, x_2, x_3, x_4 x_A, x_B, x_C, x_D	=	valor de la respuesta de frecuencia compleja en los puntos 1,2,3,4,A,B,C y D
x	=	eje coordenado
y	=	eje coordenado
α	=	amplitud angular de la malla circular en el método de diferencias finitas
α_1, α_2	=	coeficientes de extrapolación
γ	=	peso volumétrico del agua
Δ	=	incremento
∇^2	=	laplaciano
θ	=	coordenada angular en el problema bidimensional
λ_n	=	valores característicos de la ecuación $\frac{\partial}{\partial r}\left[J_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\right]_{r=r_0} = 0$
η_j	=	altura de la superficie libre en el punto j
ρ	=	coordenada radial adimensional
ρ_i	=	coordenada radial adimensional en el punto j
Φ	=	función potencial de velocidades
Φ_r	=	pendiente en el acelerograma para $\tau = \tau_r$
ϵ_n	=	factores de Neumann, $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_n = 2\ (n \neq 0)$
τ	=	variable de integración
ω	=	frecuencia angular del movimiento armónico perturbador
ω_1	=	frecuencia fundamental del vaso
ω_s	=	frecuencias naturales del vaso semicircular
ω_r	=	frecuencias naturales del vaso rectangular
ω_k	=	frecuencia natural de orden k
Θ	=	función de θ

R E F E R E N C I A S

1. A.K.Chopra, "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes", Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. Vol 93, No. EM6, Proc. Paper 5695, Dec. 1967, pp. 205-223.

2. T.Hatano, "Numerical solution of hydrodynamic pressures during earthquakes on arch dams", Central Res. Inst. of Electric Power Industry, Tokio, Technical Report C-65002 (1966)

3. T.Hatano, "Dynamical study of Tsukabaru gravity dam", Central Res. Inst. of Electric Power Industry, Tokio, Technical Report C-2891(1958).

4. T.Takahashi, "Vibration tests on concrete dams and resulting observation of and their studies", Memorias 8°. Congr. Internac. de Grandes Presas. (1964).

5. E.Rosenblueth, "Presión hidrodinámica en presas debido a aceleración vertical con refracción en el fondo", Memoria 2°. Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz, Ver. México, (Mayo, 1968).

6. O.C.Zienkiewics & B. Nath: "Earthquake hydrodynamic pressures on arch dams, an electric analogue solution", Proc. I.C.E., Vol. 25, June, 1963, p. 165.

7. A.Flores V."Presión hidrodinámica en presas y tanques", Tesis presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México en 1963, para obtener el título de Ingeniero Civil, pp. 14-17.

8. Ruel V.Churchill, Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill Book Company, N.Y., segunda edición, 1963, pp. 17-20.

9. A.Flores V."Presión hidrodinámica en presas y tanques", Tesis presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México en 1963, para obtener el título de Ingeniero Civil, pp. 17-20.

10. A.Flores V. "Presión hidrodinámica en presas y tanques", Tesis presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México en 1963, para obtener el título de Ingeniero Civil, p. 17.

11. W.C.Hurty y M.F.Rubinstein, Dynamics of Structures, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1964, p.392.

12. W.C.Hurty y MF.Rubinstein, Dynamics of Structures, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1964, pp. 338-344

13. S.H.Crandall y W.D.Mark, Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, New York and London, 1963, pp. 55-61.

14. G.F.Duff y D.Naylor, Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., 1966, pp. 81-87.

15. F.B.Hildebrand, Advanced Calculus for Engineers, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1960, p. 438

16. F.B.Hildebrand, Advanced Calculus for Engineers, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.Y., Novena edición 1960, p. 439

17. F.B.Hildebrand, Advanced Calculus for Engineers, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1960, p. 249

18. Murray R.Spiegel, Laplace Transform, Schaum Publishing Co., N.Y. 1965.

19. Ruel V.Churchill, Operational Mathematics, McGraw-Hill Book Company, N.Y., Segunda edición 1958, pp. 7-10.

20. A.Flores V., "Presión hidrodinámica en presas sujetas a sismos", Tesis presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México en 1966, para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Civil, pp. 10-12.

21. Ruel V.Churchill, Operational Mathematics, McGraw-Hill Book Company, N.Y., Segunda edición, 1958, pp. 288-300

22. Hans R.Weinberger, A First Course in Partial Differential Equations, Blaisdell Publishing Company, 1965, pp. 120-126, 362-370

23. A.Flores V., "Presión hidrodinámica en presas y tanques", Tesis presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México en 1963, para obtener el título de Ingeniero Civil, pp. 66-68

24. W.Magnus y F.Oberthettinger, Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1949, pp. 22-25

25. F.B.Hildebrand, Advanced Calculus for Engineers, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1960, p. 575

26. F.B.Hildebrand, Advanced Calculus for Engineers, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., Novena edición, 1960, pp. 420-421

27. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions 2d. ed Cambridge Univ., Pres, 1958, pp. 22-23.

28. Murray R.Spiegel, Complex Variables, Schaum Publishing Co., N.Y., 1964, P. 5.

29. Murray R.Spiegel, Complex Variables, Schaum Publishing Co., N.Y. 1964, p. 36

30. I.S.Gradshteyn, et al, Tabla de Integrales, Multiplicaciones y Series, Moscu, 1963.

31. M.Abramowitz y I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., N.Y., 1965, pp. 358-389.

32. Ishizahi H., y Hatakeyama N., "Considerations on the vibrational behaviors of earth dams", Bulletin No. 52, Disaster Prevention Research Inst., Kyoto Univ., Kyoto, Japan, February 1962.

33. M.G.Salvadori y M.L.Baron, Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., Segunda edición, 1962, pp. 241

34. M.G.Salvadori y M.L.Baron, Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Segunda edición, 1962 p. 242.

35. M.G.Salvadori y M.L.Baron, Numerical Methods in Engineering, Pren tice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Segunda edición, 1962, p. 74

36. A.K.Chopra "Hydrodinamic Pressures on dams during earthquakes", Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. Vol. 93, No. EM6, Proc. Paper 5695, Dec. 1967, p. 212

37. Stephen H. Crandall, Engineering Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956, pp. 171-173

38. M.G.Salvadori y M.L.Baron, Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., Segunda edición, 1962, pp. 96-101, pp. 198-206

39. Murray R.Spiegel, Mathematical Handbook, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1960, pp. 136-145

40. Hausner, G.W., Limit design of Structures to resist earthquakes,"Proceedings of World Conference on Earthquake Engineering", EERI and University of California, Berkeley, Junio, 1956, pp. 5-1, 5-13

41. Hudson, D.E., Response spectrum technique in engineering seismology, "Proceedings of World Conference onf Earthquake Engineering", EERI and University of California, Los Angeles, Junio, 1956, pp. 4-1, 4-12

42. Bustamante, Jorge I., Prince J., Espectros elásticos del sismo de Acapulco del 23 de junio de 1965, Reunión Conjunta sobre Ingeniería Estructural ASCE-CICM, feb. 1966

43. Hudson, D.E., Some problems in the application of spectrum techniques to strong-motion earthquake analysis, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 52, No. 2, pp. 417-430. April, 1962

44. S.H.Crandall y W.D.Mark, Random Vibration in Mechanical Systems, Academic Press, New York and London, 1963, pp. 25-27

45. C.H.Norris, R.J.Hansen, M.J.Holley Jr., J.M.Briggs, S.Namyet, J,K. Minami, Structural Design for Dynamic Loads, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959, pp. 64-69

46. M.Abramowitz y I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc, N.Y., 1965.

47. A.Flores V., I.Herrera y C.Lozano, "Presión hidrodinámica generada por la componente vertical de un sismo", Memoria 2° Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz, Ver., México, (Mayo 1968).