UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LOS HIPERESPACIOS DE SUBCONTINUOS
REGULARES Y MAGROS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. en C. NORBERTO ORDOÑEZ RAMIREZ

DIRECTOR DE LA TESIS
Dr. ALEJANDRO IllANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. MICHAEL HRUSAK
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, MORELIA
Dra. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. (ABRIL DE 2013).

Para Brenda, con todo mi amor.

Índice general

Introducción

Cuando estudiamos una estructura matamática algunas veces construimos otras estructuras que nos permiten visualizar los problemas en formas diferentes.

Afortunadamente, al hacer este tipo de búsqueda en espacios creados a partir de otros, descubrimos nuevos mundos en los que se puede desarrollar una teoría totalmente diferente.

Un ejemplo muy exitoso en esta dirección lo constituyen los hiperespacios de un continuo.

A groso modo, si X es un continuo (un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío), podemos definir un hiperespacio de X como una familia de subconjuntos cerrados de X que cumplen alguna propiedad particular.

En este sentido, la teoría de hiperespacios actualmente juega un papel sobresaliente en la topología, ya que por un lado nos ayuda a caracterizar distintas propiedades topológicas del espacio para el que se definen, y por otro invaden al mundo matemático de una increíble cantidad de problemas nuevos.

En general, si $\mathcal{H}$ representa un hiperespacio de un continuo X, algunos de los problemas más naturales que se estudian son los siguientes.

Problema 0.1 *Sea X un continuo y $\boldsymbol{P}$ una propiedad topológica.*

1. *¿Si X tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$, entonces el hiperespacio $\mathcal{H}$ tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$?*

2. *¿Si un hiperespacio tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$, entonces X tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$?*

3. *¿Qué propiedades topológicas naturales hereda el hiperespacio $\mathcal{H}$, como por ejemplo: conexidad, compacidad, etc.?*

4. *¿Qué nuevas propiedades topológicas adquiere el hiperespacio $\mathcal{H}$?*

Con el afán de seguir caracterizando algunas propiedades intrínsecas en teoría de continuos y extender diversos resultados en teoría de hiperespacios, así como el hecho de buscar nuevas herramientas y objetos de estudio en las matemáticas; los topólogos siempre están a la búsqueda de definir nuevos hiperespacios para un continuo.

De aquí es de donde surge el tema de investigación de este proyecto.

Recordemos que una definición básica en topología, nos dice que un subconjunto cerrado de un espacio topológico es un cerrado regular si la cerradura de su interior recupera el conjunto con el que empezamos. Podemos pensar este tipo de conjuntos, geométricamente, como aquellos que son "gorditos" en todos lados, o que en cierta forma, guardan toda su información conjuntista en el abierto más natural contenido en ellos, su interior.

Estudiando las propiedades de este tipo de conjuntos en un continuo, nos dimos cuenta que preservan muchas propiedades interesantes y así fue como surgió la idea de estudiar el siguiente hiperespacio.

Definición 0.2 *Si X es un continuo, definimos el* ***hiperespacio de subcontinuos regulares*** *como:*

$$D(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado, conexo, no vacío y } \overline{int(A)} = A\}.$$

Desde el principio del estudio del hiperespacio de subcontinuos regulares, nos dimos cuenta que los elementos de este hiperespacio necesitaban complementarse con otro tipo de conjuntos, así fue como surgió la idea de definir el siguientes hiperespacio.

Definición 0.3 *Si X es un continuo, definimos el* ***hiperespacio de subcontinuos magros*** *como:*

$$M(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado, conexo, no vacío e } int(A) = \emptyset\}.$$

Notemos que los subcontinuos magros son como los opuestos de los subcontinuos regulares, ya que los subcontinuos magros no arrojan ninguna información cuando pensamos en su interior.

Podría dar mil razones por las cuales el estudio de estos dos hiperespacios resulta ser importante, pero creo que a lo largo de la lectura de este trabajo, nos vamos a convencer que estos nuevos hiperespacios forman una poderosa herramienta que caracteriza, no sólo propiedades topológicas del continuo del que provienen, sino también caracterizan importantes relaciones y propiedades entre algunos hiperespacios que ya se han estudiado antes.

A continuación hago un resumen de lo que vamos a tratar en cada uno de los capítulos de este trabajo.

En el capítulo uno daremos una breve introducción a los continuos y sus hiperespacios. Mostramos la topología que se le asigna a éstos y enunciamos una serie de resultados de la literatura general que nos serán de gran utilidad a la largo de todo el trabajo.

En el capítulo dos definimos formalmente el hiperespacio de subcontinuos regulares y estudiamos algunas de sus propiedades topológicas básicas, tales como conexidad, compacidad, arco conexidad, densidad, contractibilidad, etc. También enunciamos algunas preguntas relacionadas con este hiperespacio y al final del capítulo, definimos una función que liga la estructura de los subcontinuos regulares, con funciones conjuntistas que ya se han estudiado.

En el capítulo tres definimos formalmente el hiperespacio de subcontinuos regulares y estudiamos sus propiedades topológicas básicas, como son conexidad, compacidad, arco conexidad, densidad, etc. Enunciamos algunas preguntas abiertas relacionadas con este hiperespacio.

En el capítulo cuatro estudiamos la contractibilidad del hiperespacio de subcontinuos regulares en la familia de los dendroides suaves por arcos. En este capítulo construimos una contracción particular para este hiperespacio usando fuertemente la estructura de esta familia.

En el capítulo cinco desarrollamos algunos elementos que nos permiten demostrar que el hiperespacio de subcontinuos regulares nunca es un subconjunto compacto infinito.

En el capítulo seis estudiamos la relación conjuntista que existe entre los subcontinuos regulares y magros, y los singulares de un continuo. Más concretamente, algunos de los problemas que abordamos son el encontrar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el hiperespacio de subcontinuos de un continuo se puede describir mediante sus subcontinuos regulares y magros, o cuándo el hiperespacio de singulares coincide con los subcontinuos magros.

En el capítulo siete describimos la relación que existe entre los subcontinuos regulares y magros entre dos espacios cuando están relacionados por una función que satisface alguna condición particular. Así también, caracterizamos algunas propiedades topológicas de estos espacios usando la estructura de sus hiperespacios regulares y magros.

En el capítulo ocho introducimos un concepto que denominamos *composante magra*. Estudiamos algunas de sus propiedades topológicas básicas, enunciamos algunos problemas relacionados con este concepto y mostramos los avances que obtuvimos en la solución de los Problemas 24 y 25 que se encuentran en [1].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo voy a mencionar algunas de las definiciones y resultados más importantes que se conocen en la teoría de continuos y sus hiperespacios, los cuales nos permitirán desarrollar satisfactoriamente este trabajo.

No incluimos la demostración de algunos de ellos, debido a que nos desviaría del propósito fundamental de esta tesis, que es el estudio de los hiperespacios de subcontinuos regulares y subcontinuos magros.

Para comenzar introducimos la notación que vamos a utilizar.

Notación 1.1 *Si X es un espacio topológico y $A \subset Y \subset X$, entonces:*

1. *$\overline{Y}$ denota la cerradura de Y en X.*
2. *$\overline{A}^Y$ denota la cerradura de A en Y, como subespacio de X.*
3. *$Fr(Y)$ denota la frontera de Y en X.*
4. *$Fr_Y(A)$ denota la frontera de A en Y, como subespacio de X.*
5. *$int(Y)$ denota el interior de Y en X.*
6. *$int_Y(A)$ denota el interior de A en Y, como subespacio de X.*

1.2. Introducción a los Continuos

Definición 1.2 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.*

Si X es un continuo, un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de X, recibe el nombre de **subcontinuo**.

En esta sección voy a enunciar una serie de resultados que se satisfacen en forma general para un continuo. En este sentido el siguiente resultado es una herramieta muy útil que nos permite construir subcontinuos.

Teorema 1.3 *[5, Teorema 1.1] Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión anidada de subcontinuos de X, es decir $A_{n+1} \subset A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un subcontinuo de X.*

Teorema 1.4 *[10, Teorema 5.6]* ***de los Golpes en la Frontera****.*

Sea X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap Fr(E) \neq \emptyset$.

Notación 1.5 *Durante todo el trabajo, me voy a referir al Teorema 1.4 como Teorema de los Golpes en la Frontera.*

Lema 1.6 *[10, Corolario 5.9] Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X - A$, entonces $K \cup A$ es un subcontinuo de X.*

Definición 1.7 *Sea X un espacio topológico, entonces:*

1. *X es un* ***espacio de Baire*** *si y sólo si la intersección de toda familia de subconjuntos abiertos y densos es densa.*

2. *Un subconjunto $A \subset X$ es* ***denso en ninguna parte*** *si y sólo si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

3. *Un subconjunto $A \subset X$ es de la* ***primera categoría*** *si y sólo si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde A_n es denso en ninguna parte, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.8 *[2, Teorema 10.1] Todo espacio localmente compacto es de Baire.*

Como consecuencia directa del Teorema 1.8, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.9 *Todo continuo es un espacio de Baire.*

El siguiente lema tendrá un papel importante en diversos resultados que presentaremos en capítulos posteriores.

Teorema 1.10 *[2, Teorema 10.5] En un espacio de Baire, todo conjunto de la primera categoría tiene interior vacío.*

Lema 1.11 *Sean X un continuo y $A_1, \ldots, A_n$ subcontinuos de X tales que:*

(a) $int(A_i) = \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,

(b) $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Entonces $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ es un subcontinuo de X con interior vacío.

Demostración. Por (b) obtenemos que A es conexo y al ser la unión finita de cerrados, obtenemos que A es un subcontinuo de X.

Supongamos que $int(A) \neq \emptyset$, entonces existe un abierto no vacío U de X tal que $U \subset A$. Como $int(A_1) = \emptyset$, tenemos que $U \not\subset A_1$, lo que implica que $U_1 = U - A_1$ es un abierto diferente del vacío en X. Como $int(A_2) = \emptyset$, también tenemos que $U_2 \not\subset A_2$, lo que implica que $U_2 = U_1 - A_2 = U - (A_1 \cup A_2)$ es un abierto diferente del vacío en X. Continuando con este proceso obtenemos que el subconjunto $U_{n-1} = U_{n-2} - A_{n-1} = U - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ es un abierto diferente del vacío en X. Pero $U_{n-1} \subset A_n$, lo que es una contradicción, ya que $int(A_n) \neq \emptyset$. Así concluimos la demostración de este lema. ∎

1.2.1. Continuos Localmente Conexos

Definición 1.12 *Un espacio topológico X es **localmente conexo**, si existe $\mathcal{U}$ una base de vecindades conexas y abiertas para X.*

Teorema 1.13 *[6, Teorema 10.2] Si X es un continuo localmente conexo, entonces X es arco conexo.*

Definición 1.14 *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es **conexo en pequeño** en x, si para todo abierto U tal que $x \in U$, existe un subconjunto conexo K de X, tal que $x \in int(K)$ y $K \subset U$.*

Observación 1.15 *Si X es un espacio localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño en todos sus puntos.*

Teorema 1.16 *[13, Teorema 27.6] Sea X un espacio topológico. Si X es conexo en pequeño en todo punto, entonces X es localmente conexo.*

Como una consecuencia directa de la Observación 1.15 y del Teorema 1.16, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.17 *Si X es un espacio topológico, entonces X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en todo punto.*

Definición 1.18 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que d es una **métrica convexa** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $z \in X$, tal que:*

$$d(x, z) = \frac{1}{2}d(x, y) = d(z, y).$$

Teorema 1.19 *[6, Teorema 10.3] Si X es un continuo localmente conexo, entonces X admite una métrica convexa.*

Teorema 1.20 *[4, Teorema 3.6] Si X es un continuo localmente conexo y U es un subconjunto abierto y conexo de X, entonces U es arco conexo.*

Durante todo el trabajo, cuando trabajemos con un continuo localmente conexo, por el Teorem 1.20, podemos suponer que tiene una métrica convexa.

1.2.2. Continuos Interesantes

A continuación voy a definir algunos tipos de continuos que son muy importantes y que estaremos usando a lo largo de este trabajo.

Definición 1.21 *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Algunos ejemplos de dendritas son el espacio de la Figura 2.5 y la dendrita $\mathcal{D}_1$ de la Figura 6.1.

Definición 1.22 *Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Definición 1.23 *Un continuo **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.*

Definición 1.24 *Un **dendroide** es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

Algunos ejemplos de dendroides son: el doble abanico armónico de la Figura 2.1, el continuo Z de la Figura 2.4 y el peine de Cantor de la Figura 3.1

Definición 1.25 *Un continuo es **descomponible**, si se puede describir como la unión de dos subcontinuos propios.*

Existen muchos ejemplos de continuos descomponibles, entre los cuales puedo mencionar el intervalo $[0, 1]$ y cualquier n-celda (espacio homeomorfo a $[0, 1]^n$, con $n \in \mathbb{N}$).

Definición 1.26 *Un continuo es **indescomponible**, si no es descomponible.*

En otras palabras, un continuo X es indescomponible si y sólo si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A = X$ o $B = X$.

Algunos ejemplos de continuos indescomponibles son el arcoiris de Knaster, el seudoarco, etc. El siguiente resultado nos proporciona una caracterización muy útil de este tipo de espacios.

Teorema 1.27 *[8, Teorema 2, p. 272] Un continuo es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio tiene interior vacío.*

Definición 1.28 *Sean X un continuo y $p, q \in X$ dos puntos diferentes. Decimos que X **es irreducible entre p y q**, si no existe ningún subcontinuo propio de X que los contiene.*

Definición 1.29 *Un continuo X es **irreducible**, si existen dos puntos $p, q \in X$ de tal forma que X es irreducible entre p y q.*

Un ejemplo clásico de un continuo irreducible es el **seno del topólogo**, espacio que se define en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma.

$$\overline{sen(\tfrac{1}{x})} = \{0\} \times [-1,1] \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}.$$

Teorema 1.30 *[10, Ejercicio 4.35, Inciso (a)] Sea X un continuo. Si $p, q \in X$ son dos puntos diferentes, entonces existe un subcontinuo A de X irreducible entre p y q.*

Por último quiero mencionar que a lo largo de este trabajo voy a ir recordando algunas definiciones que he incluido en esta sección y también pondré algunos otros resultados, según los necesite.

1.3. Introducción a los Hiperespacios

En esta sección voy a incluir las definiciones y algunos de los resultados más importantes en la Teoría de Hiperespacios. Vamos a definir la métrica con la que se usan, y probaremos algunos lemas que nos serán de gran utilidad más adelante.

Si X es un continuo, definimos el **hiperespacio de subconjuntos cerrados** de X como:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Quiero mencionar que, hasta cierto punto, el hiperespacio de subconjuntos cerrados es el más importante que se le asocia a un continuo; debido a que todos los demás hiperespacios son un subconjunto de éste.

A continuación doy la definición de los hiperespacios más populares que se le asocian a un continuo.

Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces definimos:

El **n-ésimo producto simétrico** de X como:

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

También definimos:

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Notemos que para $n = 1$, de las definiciones anteriores, obtenemos dos hiperespacios muy particulares. El primero de ellos es:

$$F_1(X) = \{\{x\} \in 2^X : x \in X\}.$$

Este conjunto recible el nombre de el **hiperespacio de singulares** de X y tiene la propiedad particular de ser isométrico al continuo X.

También tenemos:

$$C_1(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un subcontinuo de } X\}.$$

Este conjunto recibe el nombre de el **hiperespacio de subcontinuos** de X y en adelante lo denotaremos simplemente por $C(X)$.

Es importante mencionar que los hiperespacios $F_1(X)$ y $C(X)$ tendrán un papel muy importante en el desarrollo de algunos capítulos de este trabajo.

1.3.1. La Métrica de Hausdorff

Para darle una métrica a los hiperespacios de un continuo, basta con definir una métrica para el hiperespacio de subconjuntos cerrados.

Para definir la métrica en 2^X, necesitamos la siguiente definición.

Si X es un continuo con métrica d, $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos **la nube de radio ε con centro en A** como:

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Si X es un continuo y $A, B \in 2^X$, definimos:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Teorema 1.31 *[5, Proposición 2.1] Si X es un continuo y $A, B, C \in 2^X$, entonces:*

- *$H(A, B)$ está bien definida,*

- $H(A,B) \geqslant 0$,
- $H(A,B) = 0$ *si y sólo si* $A = B$,
- $H(A,B) \leqslant H(A,C) + H(C,B)$.

Como consecuencia directa del Teorema 1.31, tenemos que H es una métrica para 2^X, a la que se le da el nombre de **métrica de Hausdorff**.

Algunos resultados que nos ayudan a entender el comportamiento de la métrica de Hausdorff y que serán de gran utildad en el desarrollo de este trabajo, son los siguientes.

Lema 1.32 *Si* X *es un continuo y* $A, B \in 2^X$*, entonces* $H(A,B) < \varepsilon$ *si y sólo si* $A \subset N(\varepsilon, B)$ *y* $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$.

Como $\varepsilon > \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(r,A)\} = H(A,B)$, por propiedades de ínfimo, existe $r_0 \in \{r > 0 : A \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(r,A)\}$ tal que $\varepsilon > r_0 \geqslant H(A,B)$. Por lo tanto $A \subset N(r_0,B) \subset N(\varepsilon,B)$ y $B \subset N(r_0,A) \subset N(\varepsilon,A)$. Con esto concluimos la demostración de esta implicación.

Ahora supongamos que $A \subset N(\varepsilon,B)$ y que $B \subset N(\varepsilon,A)$.

Por propiedades de ínfimo, basta demostrar que existe $r < \varepsilon$ tal que $A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)$. Para esto primero probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación. $\{N(\beta,A) : 0 < \beta < \varepsilon\}$ y $\{N(\delta,B) : 0 < \delta < \varepsilon\}$ son cubiertas abiertas de los conjuntos B y A, respectivamente.

Demostración. Demostremos que $\{N(\beta,A) : 0 < \beta < \varepsilon\}$ es una cubierta abierta de B.

Sea $b \in B$, como $B \subset N(\varepsilon,A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Del hecho que $0 < \varepsilon - d(a,b)$, existe $\beta_0 > 0$ tal que $\beta_0 < \varepsilon - d(a,b) \leqslant \varepsilon$. De esto podemos concluir que $d(a,b) < \varepsilon - \beta_0 < \varepsilon$. Por lo tanto $b \in N(\varepsilon - \beta_0, A)$. Esto demuestra que $\{N(\beta, A) : 0 < \beta < \varepsilon\}$ es una cubierta abierta B.

De forma análoga podemos demostrar que $\{N(\delta, B) : 0 < \delta < \varepsilon\}$ es una cubierta abierta de A. Así concluimos la demostración de esta afirmación.

Por ser A y B subconjuntos compactos de X, existen $n, m \in \mathbb{N}$ y números reales $\delta_1^A, \ldots, \delta_n^A$ y $\delta_1^B, \ldots, \delta_m^B$, tales que $0 < \delta_i^A < \varepsilon$ y $0 < \delta_j^B < \varepsilon$ para cualesquiera $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i^A, B)$ y $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} N(\delta_j^B, A)$.

Si $\delta = \max\{\delta_1^A, \ldots, \delta_n^A, \delta_1^B, \ldots, \delta_m^B\}$, entonces $\delta < \varepsilon$ y se tiene que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i^A, B) \subset N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} N(\delta_j^B, A) \subset N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$, que es lo que deseábamos demostrar. ■

Observación 1.33 *Para toda $\varepsilon > 0$, si $\delta > \varepsilon$, como $A \subset \overline{N(\varepsilon, A)}$ tenemos que $A \subset N(\delta, \overline{N(\varepsilon, A)})$ y como también $\overline{N(\varepsilon, A)} \subset N(\delta, A)$, por el Lema 1.32, tenemos que $H(A, \overline{N(\varepsilon, A)}) < \delta$.*

Por lo tanto si $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos tales que $\lim \varepsilon_n = 0$, tenemos que $\lim H(A, \overline{N(\varepsilon_n, A)}) = 0$, lo que nos dice que $\lim \overline{N(\varepsilon, A)} = A$.

Pero notemos que lo más natural es que $\lim \overline{N(\varepsilon_n, A)} = \overline{N(0, A)}$, sin embargo $N(0, A) = \emptyset$, lo que no tiene mucho sentido.

Por lo tanto, es natural definir, para todo $A \in 2^X$, la nube de radio 0 con centro en A como:

$$N(0, A) = A.$$

Lema 1.34 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X tal que $\lim A_n = A$ para algún $A \in 2^X$, entonces $a \in A$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim a_n = a$.*

Demostración. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n = H(A, A_n)$. Observemos que $\lim r_n = 0$, pues $\lim A_n = A$.

Supongamos que $\lim A_n = A$ y sea $a \in A$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, como $H(A, A_n) < r_n + \frac{1}{n}$, por el Lema 1.32, tenemos que $A \subset N(r_n + \frac{1}{n}, A_n)$; así existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) < r_n + \frac{1}{n}$.

Demostremos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface que $\lim a_n = a$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim r_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N$, entonces $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$ y que además $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta forma, si $n \geqslant N$, entonces $d(a_n, a) < r_n + \frac{1}{n} < \varepsilon$; lo que demuestra que $\lim a_n = a$.

Como por construcción se cumple que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, concluimos la demostración de esta implicación.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que $a \in X$ tiene la propiedad de que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim a_n = a$ y que además $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, como $H(A_n, A) < r_n + \frac{1}{n}$, por el Lema 1.32, tenemos que $A_n \subset N(r_n + \frac{1}{n}, A)$, lo que implica que existe $b_n \in A$ tal que $d(b_n, a_n) < r_n + \frac{1}{n}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim b_n = b$, para algún $b \in A$. Vamos a demostrar que $\lim a_n = b$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim r_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \frac{\varepsilon}{3}$ y que además $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$, para toda $n \geqslant N$. Como $\lim b_n = b$, también podemos suponer que $d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por lo tanto, si $n \geqslant N$, tenemos que $d(a_n, b) \leqslant d(a_n, b_n) + d(b_n, b) < r_n + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Lo que demuestra que $a = \lim a_n = b \in A$.

Con esto terminamos la demostración de este lema. ■

Lema 1.35 *Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, para algunos $A, B \in 2^X$, entonces:*

(a) $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

(c) Si $B_n \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $B \subset A$.

Demostración. Demostremos (a).

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ con la propiedad que $H(A, A_n) < \varepsilon$ y $H(B, B_n) < \varepsilon$ para toda $n \geqslant N$. Por el Lema 1.32, tenemos que:

(1) $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ para toda $n \geqslant N$.

(2) $B \subset N(\varepsilon, B_n)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$ para toda $n \geqslant N$.

Notemos que si $n \geqslant N$, entonces:

(i) $A \subset N(\varepsilon, A_n) \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $B \subset N(\varepsilon, B_n) \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$, lo que implica que $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$.

(ii) $A_n \subset N(\varepsilon, A) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B) \subset N(\varepsilon, A \cup B)$, lo que implica que $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$.

De (i) y (ii), aplicando el Lema 1.32, podemos concluir que $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \varepsilon$ para toda $n \geqslant N$, lo que demuestra que $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$.

Demostremos (b).

Sea $b \in B$. Por el Lema 1.34 existe $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $b_n \in B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $\lim b_n = b$.

Notemos que $b_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que implica, por el Lema 1.34, que $b = \lim b_n \in A$. Por lo tanto $B \subset A$. $\blacksquare$

Notación 1.36 *Sea $\mathcal{H}$ un hiperespacio de un continuo X. Dados $A \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$, cuando no se preste a confusión, a la bola de radio ε con centro en A, inducida por la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $\mathcal{H}$, la vamos a denotar por:*

$$B_{\varepsilon}^{H}(A) = \{B \in \mathcal{H} : H(A, B) < \varepsilon\}.$$

1.3.2. Algunos Resultados Generales

Los siguientes resultados son de gran importancia, ya que nos indican que los hiperespacios que se le asocian comúnmente a un continuo, siguen siendo continuos.

Teorema 1.37 *[6, Corolario 14.10] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos arco conexos.*

Teorema 1.38 *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces:*

(a) $F_n(X)$ *es un continuo,*

(b) $C_n(X)$ *es un continuo.*

Por último enunciaremos algunas definiciones y resultados en teoría de hiperespacios, que vamos a usar más adelante.

Definición 1.39 *Sean X y Y continuos. Si $f : X \mapsto Y$ es una función, definimos $2^f : 2^X \mapsto 2^Y$, **la función inducida de** f al hiperespacio 2^X, por:*

$$2^f(A) = f(A).$$

Teorema 1.40 *[5, Ejercicio 2.10] Si $f : X \mapsto Y$ es una función continua entre continuos, entonces 2^X está bien definida y es continua.*

Definición 1.41 *Sea X un continuo. Entonces una **función de Whitney** es una función continua $\mu : 2^X \mapsto [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $\mu(\{p\}) = 0$ *para todo* $p \in X$,

(b) $\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subsetneq B$.

Teorema 1.42 *[5, Teorema 5.3] Si X es un continuo, entonces 2^X admite funciones de Whitney.*

Definición 1.43 *Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \mapsto C(X)$ es un **arco ordenado de** A **a** B en $C(X)$, si:*

(a) $\alpha(0) = A$ *y* $\alpha(1) = B$,

(b) $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, *cuando* $0 \leqslant s < t \leqslant 1$.

Teorema 1.44 *[5, Teorema 6.10] Si* X *es un continuo y* $A, B \in C(X)$ *son tales que* $A \subsetneq B$, *entonces existe un arco ordenado de* A *a* B *en* $C(X)$.

Teorema 1.45 *[5, Ejercicio 2.17] Si* X *es un continuo localmente conexo, entonces* $C(X)$ *es localmente conexo.*

Capítulo 2

El Hiperespacio $D(X)$

2.1. Introducción

Recordemos que, si X es un continuo, entonces el **Hiperespacio de Subcontinuos Regulares** se define como:

$$D(X) = \{A \in C(X) : \overline{int(A)} = A\}.$$

Como es natural, decimos que $A \subset X$ es un **subcontinuo regular** si A es un elemento del hiperespacio $D(X)$; es decir, si $A \in C(X)$ y además $\overline{int(A)} = A$.

El propósito de este capítulo es incursionar en el estudio del hiperespacio de subcontinuos regulares de un continuo X.

Cuando definimos un nuevo hiperespacio, inmediatamente nos preguntamos si éste es conexo y compacto, ya que estas propiedades son fundamentales en la Teoría de Hiperespacios, pues nos indican que seguimos trabajando en la familia de los continuos.

En las siguientes secciones, nos encargaremos de estudiar la conexidad y la compacidad de este hiperespacio. También veremos que, cuando restringimos este hiperespacio a familias particulares de continuos, adquiere propiedades muy interesantes que no se cumplen en forma general.

2.2. Conexidad de $D(X)$

El siguiente ejemplo, tiene como propósito el de ilustrar que el hiperespacio de subcontinuos regulares, desafortunadamente, no siempre resulta ser conexo.

Ejemplo 2.1 *El doble abanico armónico.*

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea L_n el segmento convexo en $\mathbb{R}^2$ que une al punto $(1, 0)$ con el punto $(0, \frac{1}{n})$. Consideremos:

$$Y = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

$$y$$

$$Y^- = \{-x : x \in Y\}.$$

Definimos el doble abanico armónico como (Figura 2.1):

$$X = Y \cup Y^-.$$

Observación 2.2 *El doble abanico armónico es un dendroide.*

Lema 2.3 *Sean X el doble abanico armónico y $B \in D(X)$, entonces:*

(a) Si $B \cap [-1, 1] \times \{0\} = \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $B \subset L_n$ o $B \subset \{-x : x \in L_n\}$.

(b) Si $B \cap [-1, 0) \times \{0\} \neq \emptyset$ y $B \cap (0, 1] \times \{0\} \neq \emptyset$, entonces $(-1, 0), (1, 0) \in B$.

Demostración. Demostremos (a).

Como las componentes de $X - ([-1, 1] \times \{0\})$ son los conjuntos de la forma $L_n - \{(1, 0)\}$ y $\{-x : x \in L_n - \{(1, 0)\}\}$ donde $n \in \mathbb{N}$; al ser B un conjunto conexo tal que $B \subset X - ([-1, 1] \times \{0\})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset L_n$ o $B \subset \{-x : x \in L_n\}$.

Demostremos (b).

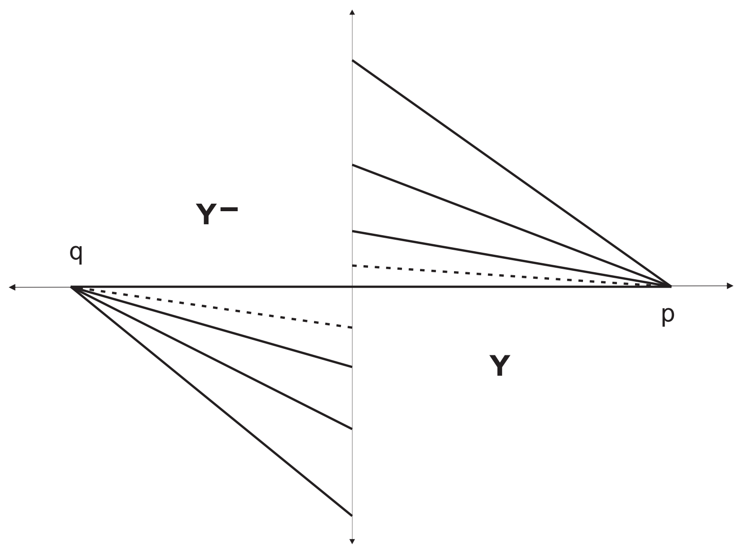

Figura 2.1: El doble abanico armónico.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(-1,0) \notin B$; como $B \cap [-1,0) \times \{0\} \neq \emptyset$, existe $c \in [-1,0]$ tal que $-1 < c < 0$ y $B = (B \cap Y) \cup ([c,0] \times \{0\})$.

Entonces $int(B) \subset B$, así $(c,0) \notin \overline{int(B)} = B$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $(-1,0), (1,0) \in B$. ■

Afirmación 2.4 *Si X es el doble abanico armónico, entonces $D(X)$ no es conexo.*

Demostración. Siguiendo la notación del Ejemplo 2.1, vamos a demostrar que $\mathcal{D} = D(X) \cap C(Y)$ es un subconjunto abierto y cerrado en $D(X)$.

Como $C(Y)$ es cerrado en $C(X)$, tenemos que $\mathcal{D} = D(X) \cap C(Y)$ es cerrado en $D(X)$.

Demostremos que $\mathcal{D}$ es abierto en $D(X)$.

Ssea $A \in \mathcal{D}$ y consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $(1,0) \notin A$.

Como $(-1,0) \notin A$, por el inciso (a) del Lema 2.3, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A \subset L_n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Como $L_n - \{(0,1)\}$ es un subconjunto abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ con la propiedad que $B^H_\varepsilon(A) \subset C(L_n)$. Esto implica que $A \in B^H_\varepsilon(A) \cap D(X) \subset \mathcal{D}$.

Caso 2. $(1,0) \in A$.

Sean $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $B \in B^H_{\frac{1}{2}}(A) \cap D(X)$.

Como $H(B,A) < \frac{1}{2}$, por el Lema 1.32, obtenemos que $A \subset N(\frac{1}{2}, B)$ y $B \subset N(\frac{1}{2}, A)$.

Supongamos que $B \not\subset Y$, entonces $B \cap ([-1,0) \times \{0\}) \neq \emptyset$. Como $A \subset N(\frac{1}{2}, B)$ y $(1,0) \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(b,(1,0)) < \varepsilon$. Por la conexidad de B, tenemos que $B \cap ((0,1] \times \{0\}) \neq \emptyset$.

Por el inciso (b) del Lema 2.3; tenemos que $(-1,0) \in B$. Como $B \subset N(\frac{1}{2}, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a,(-1,0)) < \varepsilon$, y por la conexidad de A, tenemos que $A \cap ([-1,0) \times \{0\}) \neq \emptyset$; lo que es una contradicción, ya que $A \subset Y$.

Por lo tanto $B^H_{\frac{1}{2}}(A) \cap D(X) \subset \mathcal{D}$.

Por lo tanto $\mathcal{D}$ es abierto en $D(X)$, como también es cerrado en $D(X)$, obtenemos que $D(X)$ no es conexo. ■

Por la Afirmación 2.4, tenemos que el hiperespacio de subcontinuos regulares no siempre es conexo; más aún, al ser el doble abanico amónico un dendroide, nos indica que el continuo para el cual se construye este hiperespacio, no necesita ser muy complicado para romper con la conexidad.

Sin embargo, veremos que cuando nos restringimos a algunas familias particulares, obtenemos resultados agradables, en lo que a conexidad se refiere.

2.3. $D(X)$ en Localmente Conexos

En esta sección vamos a suponer que X es un continuo localmente conexo con métrica convexa (Teorema 1.19) y que además diám$(X) = 1$. Para estudiar algunas propiedades del hiperespacio $D(X)$ en la familia de los continuos localmente conexos, los siguientes lemas nos serán de gran utilidad.

Lema 2.5 *Sea X un continuo. Si U es un subconjunto abierto y conexo de X, entonces $\overline{U}$ es un subcontinuo regular.*

Demostración. Como U es conexo, tenemos que $\overline{U} \in C(X)$. Por ser U abierto en X, tenemos que $U \subset int(\overline{U}) \subset \overline{U}$, lo que implica que $\overline{U} \subset \overline{int(\overline{U})} \subset \overline{U}$. Por lo tanto $\overline{U} \in D(X)$. ∎

Lema 2.6 *Sean X un continuo localmente conexo y A un subcontinuo de X. Si $\varepsilon > 0$, entonces $\overline{N(\varepsilon, A)}$ es un subcontinuo regular.*

Demostración. Como la métrica de X es convexa (Teorema 1.20), si $\varepsilon > 0$, tenemos que $B_\varepsilon(a)$ es conexo, para toda $a \in A$. Por lo tanto $N(\varepsilon, A)$ es un abierto conexo de X.

Por el Lema 2.5, obtenemos que $\overline{N(\varepsilon, A)}$ es un subcontinuo regular. ∎

Proposición 2.7 *Sea X un continuo localmente conexo. Si $s, t \in [0, 1]$ y $A \in C(X)$, entonces $N(s, N(t, A)) = N(s + t, A)$.*

Demostración. Tenemos que verificar los siguientes casos.

Caso 1. $s = t = 0$.

En este caso, por la Observación 1.33, tenemos que $N(0 + 0, A) = A$ y que $N(0, N(0, A)) = N(0, A) = A$.

Caso 2. $s = 0$ y $t > 0$.

Por la Observación 1.33, tenemos que $N(0, N(t, A)) = N(t, A) = N(0 + t, A)$.

Caso 3. $t = 0$ y $s > 0$.

Por la Observación 1.33, tenemos que $N(s, N(0, A)) = N(s, A) = N(s + 0, A)$.

Caso 4. $t, s > 0$.

Para mostrar este caso debemos verificar ambas contenciones.

Sea $x \in N(s, N(t, A))$. Entonces existen $y \in N(t, A)$ y $a \in A$ tales que $d(x, y) < s$ y $d(y, a) < t$, lo que implica que $d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(x, a) < s + t$. Esto demuestra que

$$N(r, N(s, A)) \subset N(r + s, A).$$

Para la otra contención, si $x \in N(s + t, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < s + t$. Como la métrica d es convexa, por [6, Proposición 10.4], existe una isometría $\gamma : [0, d(x, a)] \mapsto X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(d(x, a)) = x$.

Sea $\varepsilon = (s + t) - d(x, a) > 0$. Sea $r > 0$ tal que $t - \frac{\varepsilon}{2} < r < t$. Como γ es una isometría, $d(a, \gamma(r)) = r < t$ y $d(\gamma(r), x) = d(x, a) - r = t + s - \varepsilon - r < t + s - \varepsilon - (t - \frac{\varepsilon}{2}) = s - \frac{\varepsilon}{2} < s$. De manera que $d(a, \gamma(r)) < t$ y $d(\gamma(r), x) < s$. De aquí que $\gamma(r) \in N(t, A)$ y $x \in N(s, N(t, A))$. Por lo tanto $N(s + t, A) \subset N(s, N(t, A))$.

Con esto terminamos la demostración de esta proposición. ■

Lema 2.8 *Si X un continuo localmente conexo con métrica convexa d, entonces la función $K : [0, 1] \times C(X) \mapsto C(X)$ dada por $K((t, A)) = \overline{N(t, A)}$ es continua.*

Demostración. Sean:

(*i*) $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0, 1]$ con $\lim t_n = t$, para algún $t \in [0, 1]$,

(*ii*) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ con $\lim A_n = A$, para algún $A \in C(X)$.

Probaremos que $\lim \overline{N(t_n, A_n)} = \overline{N(t, A)}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces:

existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in (t - \frac{\varepsilon}{4}, t + \frac{\varepsilon}{4})$, para toda $n \geqslant N_1$, y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{4}$, para toda $n \geqslant N_2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $n \geqslant N$, tenemos que:

(1) $t_n < t + \frac{\varepsilon}{4}$,

(2) $t < t_n + \frac{\varepsilon}{4}$.

Como $H(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{4}$, por el Lema 1.32, también se cumple que:

(3) $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, A)$,

(4) $A \subset N(\frac{\varepsilon}{4}, A_n)$.

Aplicando la Proposición 2.7, tenemos las siguientes contenciones:

De (3), tenemos que $N(t_n, A_n) \subset N(t_n, N(\frac{\varepsilon}{4}, A)) = N(\frac{\varepsilon}{4}, N(t_n, A))$.

De (1), obtenemos que $N(t_n, A) \subset N(t + \frac{\varepsilon}{4}, A)$.

Lo que implica que:

$$N(\tfrac{\varepsilon}{4}, N(t_n, A)) \subset N(\tfrac{\varepsilon}{4}, N(t + \tfrac{\varepsilon}{4}, A)) = N(\tfrac{\varepsilon}{4} + t + \tfrac{\varepsilon}{4}, A) = N(\tfrac{\varepsilon}{2}, N(t, A)).$$

Como $N(t, A) \subset \overline{N(t, A)}$, concluimos que $N(t_n, A_n) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t, A)})$.

Por lo tanto:

$$\overline{N(t_n, A_n)} \subset \overline{N(\tfrac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t, A)})} \subset N(\varepsilon, \overline{N(t, A)})$$

Por otro lado, de (4), tenemos que $N(t, A) \subset N(t, N(\frac{\varepsilon}{4}, A_n)) = N(\frac{\varepsilon}{4}, N(t, A_n))$.

De (2), tenemos que $N(t, A_n) \subset N(t_n + \frac{\varepsilon}{4}, A_n)$.

Lo que implica que:

$$N(\tfrac{\varepsilon}{4}, N(t, A_n)) \subset N(\tfrac{\varepsilon}{4}, N(t_n + \tfrac{\varepsilon}{4}, A_n)) = N(\tfrac{\varepsilon}{4} + t_n + \tfrac{\varepsilon}{4}, A_n) = N(\tfrac{\varepsilon}{2}, N(t_n, A_n)).$$

Como $N(t_n, A_n) \subset \overline{N(t_n, A_n)}$, concluimos que $N(t, A) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t_n, A_n)})$.

Por lo tanto:

$$\overline{N(t,A)} \subset \overline{N(\tfrac{\varepsilon}{2}, \overline{N(t_n,A_n)})} \subset N(\varepsilon, \overline{N(t_n,A_n)})$$

Lo que hemos demostrado es que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geqslant N$, entonces: $\overline{N(t_n,A_n)} \subset N(\varepsilon, \overline{N(t,A)})$ y $\overline{N(t,A)} \subset N(\varepsilon, \overline{N(t_n,A_n)})$.

Por lo tanto, por el Lema 1.32, obtenemos que $H(\overline{N(t,A)}, \overline{N(t_n,A_n)}) < \varepsilon$, para toda $n \geqslant N$, lo que demuestra que $\lim \overline{N(t_n,A_n)} = \overline{N(t,A)}$. ■

Lema 2.9 *Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in D(X)$ y $t \in [0,1]$, entonces $\alpha : [0,1] \mapsto D(X)$, definida por:*

$$\alpha(s) = \overline{N(s \cdot t, A)}.$$

Está bien definida y es continua.

Demostración. Si $s \in [0,1]$, por el Lema 2.6, tenemos que $\overline{N(s \cdot t, A)} \in D(X)$, lo que demuestra que α está bien definda.

Para ver que α es continua, sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim s_n = s$, para algún $s \in [0,1]$. Como $\lim s_n \cdot t = s \cdot t$, por el Lema 2.8, tenemos que $\lim \alpha(s_n) = \lim \overline{N(s_n \cdot t, A)} = \overline{N(s \cdot t, A)} = \alpha(s)$. Por lo tanto α es continua. ■

Teorema 2.10 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $D(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Sea $A \in D(X)$. Demostraremos que $D(X)$ es conexo en pequeño en A. Sea $\varepsilon > 0$.

Por el Teorema 1.45, tenemos que $C(X)$ es localmente conexo. Sea $\mathcal{V}$ un abierto conexo en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{V} \subset B^H_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$, definimos:

$$\mathcal{U} = \{\overline{N(t,B)} : 0 \leq t < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ y } B \in \mathcal{V}\}.$$

Por el Lema 2.6, $\overline{N(t,B)} \in D(X)$ para toda $t > 0$.

Afirmación 1. $A \in int_{D(X)}(\mathcal{U} \cap D(X))$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{V}$, entonces $B = \overline{N(0,B)} \in \mathcal{U}$, lo que implica que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Como $\mathcal{V}\cap D(X)$ es un abierto en $D(X)$ y se cumple que $A\in\mathcal{V}\cap D(X)\subset \mathcal{U}\cap D(X)$, obtenemos que $A\in int_{D(X)}(\mathcal{U}\cap D(X))$.

Afirmación 2. $\mathcal{U}\cap D(X)\subset B^H_\varepsilon(A)\cap D(X)$.

Demostración. Si $E\in\mathcal{U}\cap D(X)$, entonces existen $B\in\mathcal{V}$ y $0\leq t<\frac{\varepsilon}{2}$ tales que $E=\overline{N(t,B)}$. Como $\mathcal{V}\subset B^H_{\frac{\varepsilon}{2}}(A)$, tenemos que $H(B,A)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Como $B\subset N(\frac{\varepsilon}{2},\overline{N(t,B)})$, y al ser $t<\frac{\varepsilon}{2}$ se cumple también que $\overline{N(t,B)}\subset N(\frac{\varepsilon}{2},B)$, por el Lema 1.32, concluimos que $H(B,\overline{N(t,B)})<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por la desigualdad del triángulo tenemos que $H(A,E)\leq H(A,B)+H(B,\overline{N(t,B)})<\varepsilon$. Esto demuestra que $\mathcal{U}\cap D(X)\subset B^H_\varepsilon(A)\cap D(X)$.

Afirmación 3. $\mathcal{U}\cap D(X)$ es conexo.

Demostración. Si $E\in\mathcal{U}\cap D(X)$, entonces existen $B\in\mathcal{V}$ y $0\leq t_0<\frac{\varepsilon}{2}$ tales que $E=\overline{N(t_0,B)}$. Como $\mathcal{V}$ es abierto y conexo en $C(X)$, que es localmene conexo, por el Teorema 1.20, tenemos que $\mathcal{V}$ es arco conexo.

Sea $\alpha:[0,1]\mapsto\mathcal{V}$ un encaje tal que $\alpha(0)=A$ y $\alpha(1)=B$. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $t_0>0$.

Sea $\beta:[0,1]\mapsto\mathcal{U}\cap D(X)$, definida por

$$\beta(s)=\overline{N(st_0,\alpha(s))}.$$

Como para toda $s\in[0,1]$ se tiene que $0\leq st_0\leq t_0<\frac{\varepsilon}{2}$ y $\alpha(s)\in\mathcal{V}$; tenemos que $\beta(s)\in\mathcal{U}$ para toda $s\in[0,1]$. Por el Lema 2.6, tenemos que $\beta(s)\in D(X)$ para toda $s\in[0,1]$, lo que demuestra que β está bien definida.

Verifiquemos que β es una función continua.

Sea $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim s_n=s$ para algún $s\in[0,1]$. Por la continuidad de α tenemos que $\lim\alpha(s_n)=\alpha(s)$. Aplicando el Lema 2.8, tenemos que $\lim\beta(s_n)=\lim\overline{N(s_nt_0,\alpha(s_n))}=\overline{N(st_0,\alpha(s))}=\beta(s)$. Lo que demuestra que β es continua.

Como $\beta(0) = \overline{N(0 \cdot t_0, \alpha(0))} = \overline{N(0, A)} = A$ y $\beta(1) = \overline{N(1 \cdot t_0, \alpha(1))} = \overline{N(t_0, B)} = E$, concluimos que $\beta([0,1])$ es una trayectoria de A a E en $\mathcal{U} \cap D(X)$.

Caso 2. $t_0 = 0$.

Fijemos un t_1 tal que $0 < t_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos las siguientes funciones:

$\beta : [0,1] \mapsto \mathcal{U} \cap D(X)$, definida por $\beta(s) = \overline{N(st_1, \alpha(s))}$ y

$\gamma : [0,1] \mapsto \mathcal{U} \cap D(X)$, definida por $\gamma(s) = \overline{N(st_1, B)}$.

Por el Caso 1, tenemos que β es una función que está bien definida y que es continua; y que además cumple que $\beta(s) = A$ y $\beta(1) = \overline{N(t_1, B)}$.

Como $B \in \mathcal{V}$ y $st_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $s \in [0,1]$, obtenemos que $\gamma(s) \in \mathcal{U} \cap D(X)$, para toda $s \in [0,1]$, lo que demuestra que γ está bien definida. Por el Lema 2.9, tenemos que γ es una función continua.

Como $\gamma(0) = \overline{N(0, B)} = E$ y $\gamma(1) = \overline{N(t_1, B)}$, podemos concluir que $\beta([0,1]) \cup \gamma([0,1])$ es una trayectoria de E a A, contenida en $\mathcal{U} \cap D(X)$.

Lo que hemos demostrado es que todo elemento en $\mathcal{U} \cap D(X)$, se puede unir por una trayectoria en $\mathcal{U} \cap D(X)$ con el punto A. Lo que demuestra que $\mathcal{U} \cap D(X)$ es conexo.

Por lo tanto $\mathcal{U} \cap D(X)$ es un subconjunto conexo en $D(X)$, que tiene a A en su interior y que está contenido en $B^H_\varepsilon(A) \cap D(X)$. Lo que demuestra que $D(X)$ es conexo en pequeño en A

Por el Teorema 1.17, obtenemos que $D(X)$ es localmente conexo. ■

A continuación estudiaremos algunas propiedades adicionales del hiperespacio $D(X)$, en la familia de los continuos localmente conexos.

Teorema 2.11 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $D(X)$ es denso en $C(X)$.*

Demostración. Sean A un elemento en $C(X)$ y $\varepsilon > 0$.

Por el Lema 2.6, tenemos que $\overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)}$ es un subcontinuo regular.

Como $A \subset N(\varepsilon, \overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)})$ y $\overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)} \subset N(\varepsilon, A)$, por el Lema 1.32, tenemos que $H(A, \overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)}) < \varepsilon$.

Por lo tanto $\overline{N(\frac{\varepsilon}{2}, A)} \in B_{\varepsilon}^{H}(A) \cap D(X)$, lo que demuestra que $D(X)$ es denso en $D(X)$. ■

Teorema 2.12 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $D(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sea A en $D(X)$ y consideremos $\alpha : [0,1] \mapsto D(X)$ dada por $\alpha(t) = \overline{N(t, A)}$.

Por el Lema 2.9, tenemos que α está bien definida y es continua.

Como $\alpha(0) = \overline{N(0, A)} = A$ y $\alpha(1) = \overline{N(1, A)} = X$, tenemos que todo elemento en $D(X)$ se puede conectar por una trayectoria con X en $D(X)$, lo que implica que $D(X)$ es arco conexo. ■

Teorema 2.13 *Si X es localmente conexo, entonces $D(X)$ es contráctil.*

Demostración. Sea $G : D(X) \times [0,1] \mapsto D(X)$, definida por

$$G((A,t)) = \overline{N(t, A)}.$$

Si $(A,t) \in D(X) \times [0,1]$, por el Lema 2.6, tenemos que $G((A,t)) = \overline{N(t, A)} \in D(X)$, lo que demuestra que G está bien definida.

Por el Lema 2.8, G es continua.

Por último, notemos que:

- $G((A,0)) = \overline{N(0, A)} = A$, para todo $A \in D(X)$.
- $G((A,1)) = \overline{N(1, A)} = X$, para todo $A \in D(X)$.

Lo anterior demuestra que G es una contracción de $D(X)$ en X. ■

Desgraciadamente muchas propiedades topológicas para el hiperespacio $D(X)$ son algo complicadas de estudiar, debido a que $D(X)$ no preserva las propiedades naturales que se esperarían a primera vista.

Por ejemplo, tenemos que existen espacios muy sencillos para los cuales $D(X)$ no es conexo, y en estos espacios no tendría mucho sentido preguntarse si $D(X)$ es arco conexo, contráctil, etc.

Más adelante estudiaremos qué sucede con la compacidad de $D(X)$, pero antes de esto, necesitamos presentar un espacio que va a tener un papel muy importante en diferentes etapas del estudio del hiperespacio de subcontinuos regulares.

2.4. $\mathcal{B}$ un Ejemplo Especial

Recordemos que si X es un continuo indescomponible, entonces todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío (Teorema 1.27).

Por lo tanto, si X es indescomponible, entonces:

$$D(X) = \{X\}.$$

En este sentido, quiero mencionar que durante mucho tiempo, al estudiar la estructura de los subcontinuos regulares en diversos espacios, creimos que el hecho de que X fuera el único subcontinuo regular, era una condición necesaria y suficiente para que un continuo fuera indescomponible.

En esta sección vamos a construir un continuo descomponible, el cual contiene sólo un subcontinuo regular.

Comencemos por tomar $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor canónico contenido en el intervalo $[0,1]$ y denotemos por $\mathcal{K}$ el arcoiris de Knaster en $\mathbb{R}^2$ que se construye con base en el conjunto $\mathcal{C} \times \{0\}$.

Consideremos $T : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}^3$, definida por

$$T((x,y)) = \begin{cases} (x, y+1, 0), & \text{si } y \geq 0 \\ (x, y-1, 0), & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notemos que geométricamente podemos pensar a $T(\mathcal{K})$ como la traslación de la parte superior de $\mathcal{K}$ una unidad hacia arriba y la parte inferior de $\mathcal{K}$ una unidad hacia abajo (ver Figura 2.2).

Denotemos por Z al cilindro del conjunto de Cantor en $\mathbb{R}^3$ determinado por

$$Z = \{(c, t, 0) \in \mathbb{R}^3 : c \in \mathcal{C} \text{ y } t \in [-1, 1]\}.$$

Sea

$$Y = T(\mathcal{K}) \cup Z.$$

Notemos que Y es de nueva cuenta una copia del arcoiris de Knaster, pero que contiene, de manera natural, el cilindro del conjunto de Cantor Z (Figura 2.2).

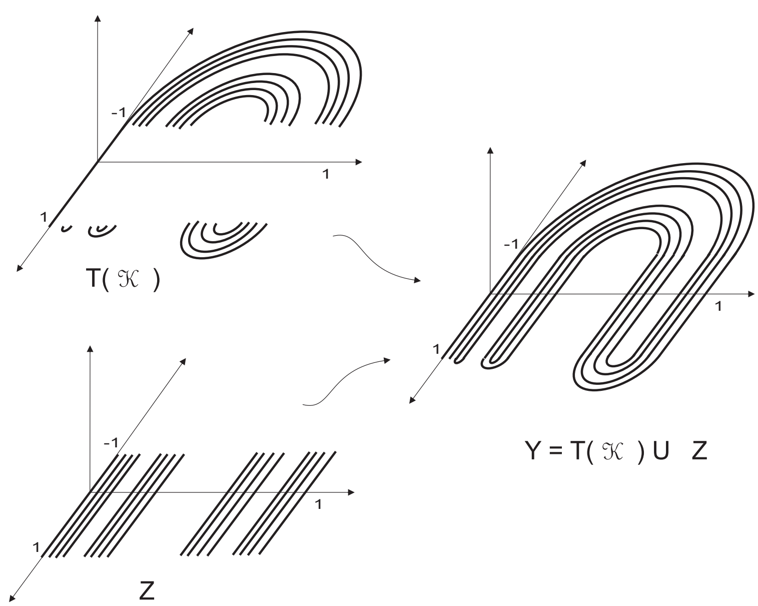

Figura 2.2: El Arcoiris de Knaster.

Para cada punto c en $\mathcal{C}$, sea:

$$Y_c = \{(x, c, y) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, 0) \in Y\}$$

Notemos que para cada $c \in \mathcal{C}$, el conjunto Y_c es una copia del espacio Y posicionado de manera natural en el plano $y = c$ (Figura 2.3).

Si para cada $c \in \mathcal{C}$, denotamos por L_c al arco definido por $\{(t, c, 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in [-1, 1]\}$, entonces:

$$Y_c \cap Y = L_c.$$

Con las construcciones anteriores estamos listos para definir el continuo que nos interesa.

Definición 2.14 *El Continuo $\mathcal{B}$.*

En $\mathbb{R}^3$, sea $\mathcal{B}$ el continuo dado por

$$\mathcal{B} = Y \cup (\bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c).$$

Observación 2.15 *Las siguientes propiedades del continuo $\mathcal{B}$ se cumplen por construcción:*

(a) *Y es un subcontinuo propio de $\mathcal{B}$ que tiene interior diferente del vacío (el punto $w_0 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ pertenece al interior de Y, ya que $\mathcal{B} - (\bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c)$ es un abierto en $\mathcal{B}$ que tiene a w_0).*

(b) *$Y_c \cap Y_v = \emptyset$, para cualesquiera $c, v \in \mathcal{C}$ tales que $c \neq v$.*

(c) *$int(Y_c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$.*

(d) *Si $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $\lim c_n = c$, para algún $c \in \mathcal{C}$, entonces $\lim Y_{c_n} = Y_c$.*

A lo largo de esta sección usaremos la notación que usamos para definir al continuo $\mathcal{B}$.

Observación 2.16 *El conjunto $\mathcal{B} - Y$ es un subconjunto abierto y no conexo. Más aún, sus componentes coinciden con los conjuntos $Y_c - L_c$, donde $c \in \mathcal{C}$.*

Afirmación 2.17 *$\mathcal{B}$ es descomponible.*

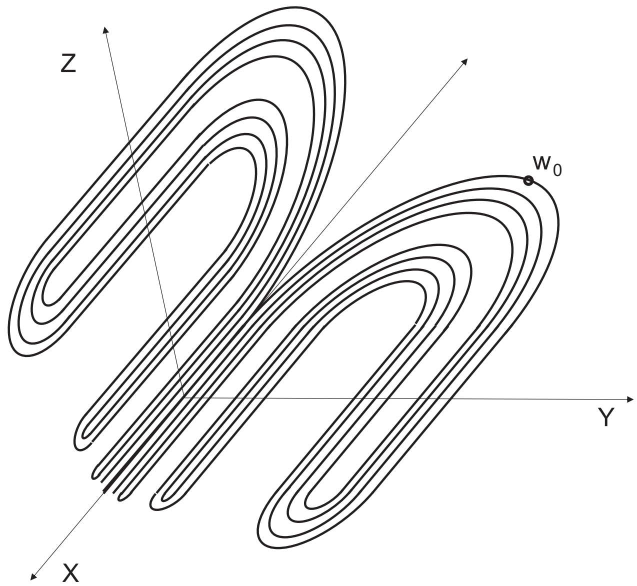

Figura 2.3: El conjunto $Y \cup Y_0$.

Demostración. Como Y es un subcontinuo propio de $\mathcal{B}$ con interior diferente del vacío, por el Teorema 1.27, concluimos que $\mathcal{B}$ es descomponible. ■

En lo que resta de esta sección mostraremos que $\mathcal{B}$ no contiene subcontinuos regulares propios. Para esto vamos a introducir la siguiente notación que facilitará la escritura de algunos resultados.

Sean $A \in C(\mathcal{B})$ y $c \in \mathcal{C}$ tales que $A \cap Y_c \neq \emptyset$ y que además $A \not\subset Y_c$.

Si $x \in A \cap Y_c$, entonces denotaremos por C_x^c la componente de $A \cap Y_c$ que tiene a x y por C_x a la composante de Y_c que tiene a x.

Lema 2.18 *Sean $A \in C(\mathcal{B})$ y $e \in \mathcal{C}$ tales que $A \not\subset Y_e$. Si $x \in A \cap Y_e$, entonces $C_x^e \cap L_e$ es un subconjunto conexo y no vacío.*

Demostración. Primero demostremos que $C_x^e \cap L_e \neq \emptyset$.

Supongamos que $C_x^e \cap L_e = \emptyset$. Entonces $C_x^e \subset \mathcal{B} - Y$. Por el Teorema 1.44, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \mapsto C(X)$ de C_x^e a A. Por la continuidad de α, existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \cap Y = \emptyset$.

Por la Observación 2.16, tenemos que $\mathcal{B}-Y$ es un subconjunto no conexo cuyas componentes coinciden con los conjuntos $Y_c - L_c$ con $c \in \mathcal{C}$. Dado que $\alpha(t)$ es un subcontinuo de $\mathcal{B}-Y$, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha(t) \subset Y_c - L_c$. Como además $x \in \alpha(t) \cap Y_e$, concluimos que $\alpha(t) \subset Y_e$.

Pero C_x^e es la componente de $A \cap Y_e$ que tiene a x, así tenemos que $\alpha(x) \subset C_x^e$. Lo que es una contradicción ya que $C_x^e = \alpha(0) \subsetneq \alpha(t) \subset C_x^e$.

Con esto concluimos que $C_x^e \cap L_e \neq \emptyset$.

Como Y_e es indescomponible y C_x^e es un subcontinuo de Y_e, para demostrar que $C_x^e \cap L_e$ es conexo, tenemos dos casos.

Caso 1. $C_x^e = Y_e$.

En este caso $C_x^e \cap L_e = L_e$ y terminamos el análisis de este caso.

Caso 2. $C_x^e \subsetneq Y_e$.

En este caso C_x^e es un arco de C_x, como también $L_e \subset C_x$ y $C_x^e \cap L_e \neq \emptyset$, tenemos que $C_x^e \cup L_e$ es un arco. Como la intersección de dos subarcos conenidos en un arco más grande, es también un arco, concluimos que $C_x^e \cap L_e$ es conexo.

Así concluimos la demostración de este lema. ■

Afirmación 2.19 *Si A es un subcontinuo de $\mathcal{B}$, entonces $A \cap Y$ es un subconjunto conexo de Y.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de $\mathcal{B}$ tal que $A \not\subset Y$ y supongamos que $A \cap Y$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y K de $\mathcal{B}$ tales que $A \cap Y = H \cup K$.

Si $x \in A - Y$, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $x \in Y_c$. Por el Lema 2.18, tenemos que $C_x^c \cap L_c$ es conexo y no vacío. Como $C_x^c \cap L_c \subset A \cap Y = H \cup K$, obtenemos que $C_x^c \cap L_c \subset H$ o $C_x^c \cap L_c \subset K$. Sean

$$H' = \{x \in A : \text{existe } c \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in Y_c \text{ y } C_x^c \cap H \neq \emptyset\} \cup H \text{ y}$$

$$K' = \{x \in A : \text{existe } c \in \mathcal{C} \text{ tal que } x \in Y_c \text{ y } C_x^c \cap K \neq \emptyset\} \cup K.$$

Verifiquemos que H' es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}$.

Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en H' tal que $\lim y_n = y$ para algún $y \in \mathcal{B}$.

Si la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ está contenida en H, es claro que $y \in H$. Supongamos que $y_n \in \mathcal{B} - Y$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $\mathcal{C}$, tal que $y_n \in C_{y_n}^{c_n}$. Podemos suponer, sin pérdida de genera-lidad, que $\lim c_n = c$ para algún $c \in \mathcal{C}$. Como $y_n \in H'$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $C_{y_n}^{c_n} \cap H \neq \emptyset$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in C_{y_n}^{c_n} \cap H$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim x_n = x$ para algún $x \in \mathcal{B}$. Pero $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión contenida en H, que por ser cerrado, tenemos que $x \in H$.

Como $\{C_{y_n}^{c_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de $C(A)$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim C_{y_n}^{c_n} = C$ para algún subcontinuo C de A. Más aún, por el Inciso (d) de la Observación 2.15, como $C_{y_n}^{c_n} \subset Y_{c_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $C \subset \lim Y_{c_n} = Y_c$.

Por el Lema 1.34, tenemos que $x = \lim x_n \in C$ y $y = \lim y_n \in C$. Entonces, si C_y^c es la componente de $A \cap Y_c$ que tiene a y, se cumple que $C \subset C_y^c$. Lo que demuestra que $C_y^c \cap H \neq \emptyset$ y concluimos que $y \in H'$.

Con esto hemos demostrado que H' es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}$. De forma análoga, podemos probar que K' es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}$.

Verifiquemos que H' y K' son ajenos.

Para esto vamos a demostrar que ningún punto de H' pertenece a K'.

Sea $x \in H'$.

Si $x \in H$, entonces $x \notin K$. Si $x \in K'$, entonces existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $x \in Y_c$ y $C_x^c \cap K \neq \emptyset$. Por el Lema 2.18, tenemos que $C_x^c \cap L_c$ es un subconjunto conexo de Y, pero $x \in (C_x^c \cap L_c) \cap H$. Como $C_x^c \cap Y = C_x^x \cap L_c \subset A \cap Y = K \cup H$ y por ser H y K una separación de $A \cap Y$, concluimos que $C_x^c \cap Y \subset H$. Lo que demuestra que $x \notin K'$.

Supongamos entonces que $x \in \mathcal{B} - Y$.

Sea $c \in \mathcal{C}$ tal que $x \in Y_c$. Entonces $C_x^c \cap H \neq \emptyset$. Por el Lema 2.18, tenemos que $C_x^c \cap L_c$ es un subconjunto conexo. Como $C_x^c \cap L_c \subset A \cap Y = H \cup K$, por ser H y K una separación de $A \cap Y$ y $C_x^c \cap H \neq \emptyset$ tenemos que $C_x^c \cap Y \subset H$. Lo que demuestra que $C_x^c \cap K = \emptyset$. Por lo tanto $x \notin K'$.

Con esto obtenemos que H' y K' son ajenos. Como $A = H' \cup K'$, tenemos que H' y K' forman una separación de A, lo que es una contradicción, ya que $A \in C(\mathcal{B})$.

Así demostramos que $A \cap Y$ es un subconjunto conexo de Y. ■

Afirmación 2.20 *Si $A \in C(\mathcal{B})$ y $c \in \mathcal{C}$, entonces $A \cap Y_c$ es un subconjunto conexo de Y_c*

Demostración. Sean $A \in C(\mathcal{B})$ y $c \in \mathcal{C}$ tales que $A \cap Y_c$ es no vacío y que además $A \not\subset Y_c$.

Por el Lema 2.18, tenemos que toda componente de $A \cap Y_c$ intersecta al arco L_c. Sea $a \in A \cap L_c$, analicemos dos casos.

Caso 1. Existe una componente C de $A \cap Y_c$, tal que $C \not\subset C_a$.

Por el Lema 2.18, tenemos que $C \cap L_c \neq \emptyset$, lo que implica que C intersecta dos composantes diferentes de Y_c. Como C es un subcontinuo de un continuo indescomponible, que intersecta más de dos composantes, tenemos que $C = Y_c$. Por lo tanto $Y_c = C \subset A \cap Y_c \subset Y_c$, lo que demuestra que $A \cap Y_c = Y_c$ es un subconjunto conexo de Y_c.

Caso 2. Toda componente de $A \cap Y_c$ es un subconjunto de C_a.

Afirmación 1. Existe un arco pq en C_a tal que $A \cap Y_c \subset pq$ y es mínimo con esta propiedad.

Demostración. Recordemos que $L_c = \{(t, c, 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in [-1, 1]\}$, así podemos asignar a L_c el orden natural inducido por $[-1, 1]$. Como $A \cap Y_c$ es un subconjunto cerrado, existen $r = \text{mín}\{z \in L_c : z \in A\}$ y $s = \text{máx}\{z \in L_c : z \in A\}$. Denotemos por rs el arco contenido en L_c con extremos r y s.

Sean C_r^c y C_s^c las componentes de $A \cap Y_c$ que tienen a r y s, respectivamente.

Por hipótesis tenemos que $C_r^c \subset C_a$ y $C_s^c \subset C_a$, lo que implica que C_r^c y C_s^c son dos arcos contenidos en C_a. Por lo tanto $C_r^c \cup rs \cup C_s^c$ es el arco mínimo que contiene a $A \cap Y_c$.

Por la Afirmación 2.19, tenemos que $A \cap Y$ es un subconjunto conexo de Y, como también es cerrado en Y, concluimos que $A \cap Y$ es un subcontinuo de Y. Por ser Y indescomponible, debemos analizar dos casos.

Caso 2.1 $A \cap Y = Y$.

En este caso tenemos que $L_c \subset A$, lo que implica que $L_c \subset A \cap Y_c$. Así tenemos que $L_c = rs$ y concluimos que $C_r^c \cup L_c \cup C_s^c$ es un arco contenido en C_a que contiene al conjunto $A \cap Y_c$. Como también $C_r^c \cup L_c \cup C_s^c \subset A \cap Y_c$, concluimos que $C_r^c \cup L_c \cup C_s^c = A \cap Y_c$ es un subconjunto conexo de Y_c.

Caso 2.2 $A \cap Y \subsetneq Y$.

Como Y es homeomorfo al arcoiris de Knaster y $A \cap L_c \neq \emptyset$ tenemos que $A \cap Y$ es un arco contenido en la composante de Y que tiene a los puntos r y s. Como $r, s \in A \cap L_c \subset A \cap Y$, tenemos que $A \cap Y$ es un arco que tiene a los puntos r y s, lo que implica que el arco rs está contenido en $A \cap Y$.

Por lo tanto $rs \subset A$ y $rs \subset L_c \subset Y_c$, lo que nos dice que $rs = A \cap L_c$. Así obtenemos que $A \cap Y_c = C_r^c \cup rs \cup C_s^c$, que es un arco contenido en C_a.

Con los casos anteriores, hemos probado que $A \cap Y_c$ es conexo. ■

Afirmación 2.21 *Si A es un subcontinuo regular de $\mathcal{B}$, entonces $Y \subset A$.*

Demostración. Por la Afirmación 2.19, tenemos que $B = A \cap Y$ es un subconjunto conexo de Y, como además es cerrado en $\mathcal{B}$, concluimos que B es un subcontinuo de $\mathcal{B}$.

Notemos que $B \cap (\mathcal{B} - \bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c) \neq \emptyset$. Pues de lo contrario $A \subset \bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c$, por ser A conexo tendríamos que $A \subset Y_c$, para algún $c \in \mathcal{C}$. Pero $int(Y_c) = \emptyset$, lo que implica que $int(A) = \emptyset$, lo cual no puede suceder.

Sea $x \in B \cap (\mathcal{B} - \bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c)$, como $\bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c$ es cerrado en $\mathcal{B}$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \cap \bigcup_{c \in \mathcal{C}} Y_c = \emptyset$.

Como $x \in A = \overline{int(A)}$, existe $y \in U \cap int(A)$. Notemos que $W = U \cap int(A)$ es un abierto no vacío de $\mathcal{B}$ tal que $W \subset B$.

Lo que hemos demostrado es que B es un subcontinuo de Y con interior diferente del vacío, al ser Y indescomponible, por el Teorema 1.27, obtenemos que $Y = B$. Por lo tanto $Y \subset A$. ■

Afirmación 2.22 *Sean A un subcontinuo de $\mathcal{B}$ y $c \in \mathcal{C}$. Si $int(A) \cap (Y_c - L_c) \neq \emptyset$, entonces $Y_c \subset A$.*

Demostración. Por la Afirmación 2.20, tenemos que $B = A \cap Y_c$ es un subcontinuo de Y_c.

Sea $x \in int(A) \cap (Y_c - L_c)$ y U un abierto en $\mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset A$ y $U \cap Y = \emptyset$.

Entonces $U \cap Y_c$ es un abierto no vacío de Y_c contenido en B, lo que demuestra que B es un subcontinuo de Y_c con interior (en Y_c) no vacío. Al ser Y_c indescomponible, por el Teorema 1.27, concluimos que $Y_c = B$. Así que $Y_c \subset A$. ■

Afirmación 2.23 *Si A es un subcontinuo regular de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{D} = \{c \in \mathcal{C} : Y_c \subset A\}$ es denso en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Por la Afirmación 2.21, tenemos que $Y \subset A$.

Sean $c \in \mathcal{C}$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $x \in L_c$, tal que $x \in int(\bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$. Como A es regular se cumple que $\overline{int(A)} = A$, dado que $x \in L_c \subset Y \subset A = \overline{int(A)}$, existe $y \in int(A)$ tal que $y \in B_\varepsilon(x)$. Sea U un abierto tal que $y \in U \subset A \cap (B_\varepsilon(x) \cap \bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$.

Como $y \in int(\bigcup_{e \in \mathcal{C}} Y_e)$, existe $c_1 \in C$ tal que $y \in Y_{c_1}$, lo que implica que $U \cap (Y_{c_1} - L_{c_1}) \neq \emptyset$, es decir $int(A) \cap (Y_{c_1} - L_{c_1}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, por la Afirmación 2.22, tenemos que $Y_{c_1} \subset A$.

Como $x \in L_c$ y $y \in L_{c_1}$, existen $t, s \in [0, 1]$ tales que $x = (t, c, 0)$ y $y = (s, c_1, 0)$. Pero $y \in B_\varepsilon(x)$, lo que implica que:

$$|c - c_1| \leqslant d(x, y) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{C}$. ■

Teorema 2.24 *El continuo $\mathcal{B}$ no contiene subcontinuos regulares propios; en otras palabras $D(\mathcal{B}) = \{\mathcal{B}\}$.*

Demostración. Sea A un subcontinuo regular de $\mathcal{B}$.

Por la Afirmación 2.21, tenemos que $Y \subset A$; y por la Afirmación 2.23, tenemos que $\{c \in \mathcal{C} : Y_c \subset A\}$ es denso en $\mathcal{C}$, lo que implica que A es denso en $\bigcup\limits_{c\in\mathcal{C}} Y_c$.

Por lo tanto, al ser A un subconjunto cerrado, tenemos que $\mathcal{B} = Y \cup (\bigcup\limits_{c\in\mathcal{C}} Y_c) \subset A$, por lo tanto $A = \mathcal{B}$. ■

2.5. Compacidad de $D(X)$

Otra de las propiedades topológicas que nos interesa que un hiperespacio preserve, es el de ser un subconjunto compacto.

En el Capítulo 6, abordamos por completo el problema de determinar si el hiperespacio de subcontinuos regulares es compacto; en esta sección quiero hablar sobre algunos temas secundarios del resultado principal que obtenemos en dicho capítulo.

Por tal motivo me permito usar el siguiente resultado, el cual demostramos más adelante (ver Teorema 5.20):

Teorema 2.25 *Si $D(X)$ es infinito, entonces $D(X)$ no es cerrado.*

El Teorema 2.25 nos da una caracterización inmediata sobre la compacidad del hiperespacio $D(X)$.

Teorema 2.26 *Sea X un continuo, entonces $D(X)$ es compacto si y sólo si $D(X)$ es finito.*

Demostración. Si $D(X)$ es finito, claramente $D(X)$ es compacto.

Por otro lado, si $D(X)$ es compacto, por el Teorema 2.25, tenemos que $D(X)$ no es infinito.

Por lo tanto $D(X)$ es finito. ■

Teorema 2.27 *Si X es un continuo, entonces $D(X)$ es un continuo si y sólo si $D(X)$ es degenerado.*

Demostración. Si $D(X)$ es un continuo, entonces $D(X)$ es un subconjunto cerrado y conexo. Por el Teorema 2.26, tenemos que $D(X)$ es cerrado si y sólo si $D(X)$ es finito. Pero un conjunto finito es conexo si y sólo si es degenerado. ■

El Teorema 2.27, podría terminar con nuestras ilusiones de estudiar el hiperespacio de subcontinuos regulares, ya que nos indica que la única oportunidad que tenemos para que el hiperespacio $D(X)$ sea un continuo, es que $D(X)$ sea degenerado. Pero de forma muy natural tenemos el siguiente problema.

Problema 2.28 *¿Cuál es la familia de continuos X, para los cuales $D(X)$ es degenerado?*

En este sentido, debo mencionar que, por mucho tiempo creí que los únicos subcontinuos que iban a satisfacer que su hiperespacio de subcontinuos regulares es degenerado, serían los continuos indescomponibles.

Afortunadamente (o desafortunadamente) el continuo $\mathcal{B}$ (Definición 2.14) que estudiamos en la sección anterior, nos proporciona un ejemplo que no satisface esta propiedad; ya que por la Afirmación 2.17 tenemos que $\mathcal{B}$ es descomponible, pero por el Teorema 2.24 obtenemos que $D(\mathcal{B}) = \{\mathcal{B}\}$.

Indagando un poco en las propiedades del espacio $\mathcal{B}$, lo único que podemos decir en relación al Problema 2.28, es la siguiente conjetura.

Conjetura 2.29 *Si $D(X) = \{X\}$, entonces X contiene un subcontinuo indescomponible.*

Ahora bien, continuando con la discución de la compacidad del hiperespacio $D(X)$, por el Teorema 2.26 tenemos que la única posibilidad para que $D(X)$ sea compacto es que sea finito, de esta forma podemos pensar en el siguiente problema:

Problema 2.30 *¿Para qué enteros $n \in \mathbb{N}$, existe un continuo X de tal forma que $D(X)$ tenga exactamente n elemenentos?*

Para discutir un poco el Problema 2.30, pensando en la estructura de los subcontinuos regulares de un continuo indescomponible, consideremos X como la unión de dos subcontinuos indescomponibles Y_1 y Y_2 que se intersectan sólo en un punto p.

Notamos que si A es un subcontinuo de X que no tiene al punto p, entonces A es un subcontinuo propio de Y_1 o Y_2, y en cualquier caso, el interior de A es vacío. Por otro lado, si $p \in A$, y $A \cap Y_1$ es un subcontinuo propio no degenerado de Y_1, entonces A no es regular, ya ningún punto en $A \cap Y_1$, diferente de p, pertenece a $\overline{int(A)}$. Esto nos dice que $D(X)$ tiene sólo tres elementos, a saber Y_1, Y_2 y X.

Siguiendo la idea de unir adecuadamente continuos indescomponibles para obtener una cantidad finita de subcontinuos regulares, en la siguiente sección construiremos algunos espacios para los cuales el número de subcontinuos regulares de X tiene un patrón particular.

2.5.1. Contando en $D(X)$

Proposición 2.31 *Sea $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ un continuo, tal que $n \geq 2$ y:*

1. *Y_i es indescomponible para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
2. *Existe $y \in X$ tal que $Y_i \cap Y_j = \{y\}$ para cualesquiera $i \neq j$.*

Entonces $D(X)$ tiene $2^n - 1$ elementos.

Demostración. Notemos que el punto $y \in X$ es de corte.

Observación 1. Si $A \in D(X)$ y $A \cap Y_i$ es no degenerado para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $Y_i \subset A$.

Para argumentar esta observación, analicemos dos casos.

Caso 1. $y \notin A$.

Como y es de corte en X, tenemos que A es un subcontinuo propio de Y_i y por el Teorema 1.27, obtenemos que $int_{Y_i}(A) = \emptyset$. Sea $a \in A$, como $U = Y_i - \{y\}$ es un abierto de X tal que $a \in U$, dado que $A \in D(A)$, se cumple que $\emptyset \neq int(A) \cap (Y_i - \{y\}) \subset A \cap Y_i$, lo que implica que $int_{Y_i}(A) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción.

Caso 2. $y \in A$.

Si $x \in A \cap Y_i$, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $y \in C_x$, donde C_x es la componente de x en $A \cap Y_i$. Como $y \in A$, concluimos que $A \cap Y_i$ es un subcontinuo de Y_i.

Si $A \cap Y_i$ es un subcontinuo propio de Y_i, tenemos que $int_{Y_i}(A \cap Y_i) = \emptyset$. Sea $a \in A \cap Y_i$, con $a \neq y$, como $a \in A = \overline{int(A)}$ y $Y_i - \{y_i\}$ es un abierto que tiene al punto a, entonces $\emptyset \neq int(A) \cap (Y_i - \{y_i\}) \subset A \cap (Y)$, lo que es una contradicción, al Teorema 1.27. Por lo tanto $Y_i \subset A$. Con esto concluimos la demostración de esta observación.

La Observación 1, muestra que si $A \in D(X)$, entonces:

$$A = \bigcup_{i \in I} Y_i,$$

donde I es un subconjunto no vacío de $\{1, \ldots, n\}$.

Como existen $2^n - 1$ subconjuntos no vacíos de $\{1, \ldots, n\}$, concluimos que $D(X)$ tiene $2^n - 1$ elementos. ■

Proposición 2.32 *Sea $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ un continuo, tal que:*

1. *Y_i es indescomponible para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*
2. *$Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leqslant 1$.*
3. *$Y_i \cap Y_{i+1} = \{y_i\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Entonces $D(X)$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

Demostración. Notemos que X se puede pensar como una cadena donde los eslabones son los subcontinuos $Y_1, \dots, Y_n$. Además tenemos que el punto $y_i \in Y_i \cap Y_{i+1}$ es de corte en X, para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Observación 1. Si $A \in D(X)$ y $A \cap Y_i$ es no degenerado, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $Y_i \subset A$.

Para argumentar esta observación, analicemos los siguientes casos.

Caso 1. $A \subset Y_i$.

Si A es un subcontinuo propio de Y_i, al ser Y_i indescomponible, por el Teorema 1.27, tenemos que $int_{Y_i}(A) = \emptyset$. Como A es un subcontinuo no degenerado, existe $a \in A - \{y_{i-1}, y_i\}$. Así que $U = Y_i - \{y_{i-1}, y_i\}$ es un abierto en X tal que $a \in U$. Como $A \in D(X)$, se tiene que $\emptyset \neq int(A) \cap U \subset A \cap Y_i$, lo que implica que $int_{Y_i}(A) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $A = Y_i$.

Caso 2. $A \not\subset Y_i$.

Sea $x \in A \cap Y_i$. Si C_x es la componente de $A \cap Y_i$ que tiene a x, por el Teorema de los Golpes en al Frontera, tenemos que $y_i \in C_x$ o $y_{i+1} \in C_x$, lo que implica que $A \cap Y_i$ tiene a lo más dos componentes.

Sean C_i y C_{i+1} las componentes de $A \cap Y_i$ tales que $y_i \in C_i$ y $y_{i+1} \in C_{i+1}$. Si $A \cap Y_i$ es no conexo, entonces $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$ y $A \cap Y_i = C_i \cup C_{i+1}$, es decir, C_i y C_{i+1} forman una separación de $A \cap Y_i$.

De esta forma $H = C_i \cup (A \cap (Y_1 \cup \ldots \cup Y_{i-1}))$ y $K = C_{i+1} \cup (A \cap (Y_{i+2} \cup \ldots \cup Y_n))$ forman una separación de A en Y, lo que es una contradicción. Con este hemos demostrado que $C_i = C_{i+1}$, es decir, tenemos que $A \cap Y_i$ es conexo en Y_i.

Si $A \cap Y_i$ es un subcontinuo propio de Y_i, entonces $int_{Y_i}(A \cap Y_i) = \emptyset$. Sea $a \in A \cap (Y_i - \{y_i, y_{i+1}\})$, como $Y_i - \{y_i, y_{i+1}\}$ es un abierto que tiene al punto a, tenemos que $\emptyset \neq int(A) \cap (Y_i - \{y_i, y_{i+1}\}) \subset A \cap Y_i$, lo que es una contradicción al Teorema 1.27. Por lo tanto $Y_i = A \cap Y_i$. De modo que $Y_i \subset A$.

Con lo anterior terminamos la demostración de esta observación.

Con ayuda de la Observación 1, demostraremos por inducción sobre n que $D(X)$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

Para la base de inducción, demostremos que el resultado se cumple para $n = 2$.

En este caso $X = Y_1 \cup Y_2$ donde Y_1 y Y_2 son indescomponibles y $Y_1 \cap Y_2 = \{y_1\}$, así por la Afirmación 2.31, $D(X)$ tiene $2^2 - 1 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$ elementos.

Supongamos que el resultado se cumple para una $n \geqslant 3$; es decir, todo continuo $\tilde{X} = \tilde{Y}_1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_n$, tal que:

1. $\tilde{Y}_i$ es indescomponible para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $\tilde{Y}_i \cap \tilde{Y}_j \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$.
3. $\tilde{Y}_i \cap \tilde{Y}_{i+1} = \{y_i\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Cumple que $D(\tilde{X})$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

Sea $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n+1}$, donde

1. Y_i es indescomponible para toda $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.
2. $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid \leq 1$.
3. $Y_i \cap Y_{i+1} = \{y_i\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por hipótesis de inducción tenemos que si $\tilde{X} = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$, entonces $D(\tilde{X})$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos.

Notemos que si $B \in D(X)$ y $B \notin D(\tilde{X})$, por ser B la unión "consecutiva" de subcontinuos Y_i (Observación 1), se cumple que $B = Y_{n+1}$ o existe $A \in D(\tilde{X})$ con $y_n \in A$, tal que $B = A \cup Y_{n+1}$. De esta forma obtenemos que:

$$D(X) \subset D(\tilde{X}) \cup \{A \cup Y_{n+1} : A \in D(\tilde{X}) \text{ y } y_n \in A\} \cup \{Y_{n+1}\}.$$

Como todo subcontinuo que es la unión de los subcontinuos Y_i es un elemento en $D(X)$, concluimos que:

$$D(X) = D(\tilde{X}) \cup \{A \cup Y_{n+1} : A \in D(\tilde{X}) \text{ y } y_n \in A\} \cup \{Y_{n+1}\}.$$

Como los elementos $A \in D(\tilde{X})$ tales que $y_n \in A$ son:

$$Y_n, Y_n \cup Y_{n-1}, \ldots, Y_n \cup Y_{n-1} \cup \ldots \cup Y_1,$$

Concluimos que $D(X)$ tiene $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ elementos.

Lo anterior termina la demostración de esta proposición. ■

Notación 2.33 *En la siguiente proposición para $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, vamos a considerar $i \oplus j$ como la suma módulo n en el conjunto $\{0, \ldots, n-1\}$.*

Proposición 2.34 *Sea $X = Y_0 \cup \ldots \cup Y_{n-1}$ un continuo tal que:*

1. *Y_i es indescomponible para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*
2. *$Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid i - j \mid = 1$ o $\{i, j\} = \{0, n-1\}$.*
3. *$Y_i \cap Y_{i\oplus 1} = \{y_{i\oplus 1}\}$ para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

Entonces $D(X)$ tiene $n(n-1) + 1$ elementos.

Demostración. Notemos que X se puede pensar como una cadena circular de subcontinuos.

Observación 1. Si $A \in D(X)$ e $int(A) \cap Y_i \neq \emptyset$, para algún $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $Y_i \subset A$.

Para argumentar esta observación, consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $A \subset Y_i$.

Si A es un subcontinuo propio de Y_i, al ser Y_i indescomponible, por el Teorema 1.27 tenemos que $int_{Y_i}(A) = \emptyset$. Sea $a \in A - \{y_i, y_{i\oplus 1}\}$, como $U = Y_i - \{y_i, y_{i\oplus 1}\}$ es un abierto tal que $a \in U$ y $A \in D(X)$, obtenemos que $\emptyset \neq int(A) \cap U \subset A \cap Y_i$, lo que implica que $int_{Y_i}(A) \neq \emptyset$, lo que es una contadicción. Por lo tanto $A = Y_i$

Caso 2 $A \not\subset Y_i$.

En este caso debemos considerar los siguientes subcasos.

Caso 2.1 $y_i \in A$ y $y_{i\oplus 1} \notin A$.

Si $x \in A \cap Y_i$, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $y_i \in C_x$, donde C_x es la componente de $A \cap Y_i$ que tiene a x. Como $y_i \in A \cap Y_i$, obtenemos que $A \cap Y_i$ es un subcontinuo.

Si $A \cap Y_i$ es un subcontinuo propio de Y_i, entonces $int_{Y_i}(A \cap Y_i) = \emptyset$. Sea $a \in A \cap (Y_i - \{y_i, y_{i\oplus 1}\})$, como $Y_i - \{y_i, y_{i\oplus 1}\}$ es un abierto que tiene al punto a, tenemos que $\emptyset \neq int(A) \cap (Y_i - \{y_i, y_{i\oplus 1}\}) \subset A \cap Y_i$, lo que es una contradicción al Teorema 1.27. Por lo tanto $Y_i = A \cap Y_i \subset A$.

Caso 2.2 $y_i, y_{i\oplus 1} \in A$.

Si $x \in A \cap Y_i$, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $y_i \in C_x$ o $y_{i\oplus 1} \in C_x$, donde C_x es la componente de x en $A \cap Y_i$. Como $y_i, y_{i\oplus 1} \in A \cap Y_i$, obtenemos que $A \cap Y_i$ tiene a lo más dos componentes, digamos C_i y $C_{i\oplus 1}$.

Si $C_i = C_{i\oplus 1}$, entonces $A \cap Y_i$ es conexo, y por el Caso 2.1, obtenemos que $Y_i = A \cap Y_i$.

Si $C_i \cap C_{i\oplus 1} = \emptyset$, entonces $A \cap Y_i$, es un subconjunto propio de Y_i y $int_{Y_i}(A \cap Y_i) = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, sea $a \in C_{i\oplus 1}$, como $Y_i - (C_i \cup \{y_{i\oplus 1}\})$ es un abierto que tiene al punto a y $A \in D(X)$, se cumple que $\emptyset \neq int(A) \cap (Y_i - (C_i \cup \{y_{i\oplus 1}\})) \subset A \cap Y_i$, lo que es una contradicción al Teorema 1.27. Así terminamos la demostración de esta observación.

Si $B \in D(X) - \{X\}$, por la Observación 1, tenemos que B se puede pensar como la unión consecutiva (módulo n).

De esta forma si $\tilde{Y} = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-1}$, y $B \in D(X)$ con $B \notin D(\tilde{Y})$, entonces se cumple que $B = Y_0$ o existen $A_{y_0}, A_{y_1} \in D(\tilde{Y})$ con $y_0 \in A_{y_0}$ y $y_1 \in A_{y_1}$, tales que $B = A_{y_0} \cup Y_0$ o $B = Y_0 \cup A_{y_1}$ o $B = A_{y_0} \cup Y_0 \cup A_{y_1}$; es decir, se cumple que $Y_0 \subset B$.

Como todo subcontinuo que se vea como la unión de subcontinuos Y_i, es un elemento en $D(X)$, tenemos que se cumple que:

$$D(X) = D(\tilde{Y}) \cup \{A \in D(X) : Y_0 \subset A\}.$$

Por la Proposición 2.32, tenemos que $D(\tilde{Y})$ tiene $\frac{(n-1)n}{2}$ elementos.

Contemos el número de elementos en $\mathcal{M} = \{A \in D(X) : Y_0 \subset A\}$.

Si $A \in \mathcal{M}$, por la Observación 1, tenemos que $A = X$ o que:

$$A = Y_i \cup \ldots \cup Y_1 \cup Y_0 \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_{n-(j\oplus 2)},$$

donde $i \in \{0, 1, \ldots, n-2$ y $j \in \{n, n-1, \ldots, i+2\}$.

Como para toda $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ fija, podemos construir $n-(i \oplus 1)$ elementos diferentes en $\mathcal{M}$, concluimos que $\mathcal{M}$ tiene $1 + \sum_{i=0}^{n-2}[n-(i+1)] = 1 + [(n-1) + \ldots + 1] = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$ elementos.

De lo anterior podemos concluir que $D(X)$ tiene $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + 1 = (n-1)n + 1$ elementos, lo que termina la demostración de esta proposición. ■

Para finalizar esta sección, deseo incluir una pregunta que surge de forma natural en relación al número de elementos que tiene el hiperespacio de subcontinuos regulares.

Problema 2.35 *¿Si $n \in \mathbb{N}$, existe un continuo X con la propiedad de que $D(X)$ tiene n elementos?*

2.6. La Función N

En esta sección quiero introducir la definición y enunciar algunas propiedades básicas de una función que estudiamos en este proyecto.

La función que quiero presentar está relacionada con una de las funciones entre conjuntos más famosas que se han estudiado en teoría de continuos, la **función T de Jones**, la cual está definida de la siguiente forma.

Definición 2.36 *Si X es un continuo, definimos $T : 2^X \to 2^X$ por*

$$T(A) = \{x \in X : si\ W \in C(X)\ y\ x \in int(W),\ entonces\ W \cap A \neq \emptyset\}.$$

Se conocen diversas propiedades interesantes de esta función. A continuación mencionamos algunas.

Afirmación 2.37 *Sea X un continuo, entonces:*

1. *T está bien definida [3, Lema 1.5, p. 86],*
2. *$A \subset T(A)$, para toda $A \in 2^X$ [3, Lema 1.5, p. 86],*
3. *$T(A) \subset T(B)$, si $A \subset B$ [3, Lema 1.5, p. 86],*
4. *$T(A) = A$ para toda $A \in 2^X$ si y sólo si X es localmente conexo [3, Teorema 1.28, p. 94].*

Tomando como base al papel tan importante que juega el interior de los subconjuntos al definir la función T de Jones, resulta natural definir lo siguiente:

Definición 2.38 *Sea X un continuo, definimos $N : 2^X \mapsto 2^X$ por*

$$N(A) = \{x \in X : \textit{si } D \in D(X) \textit{ y } x \in int(D), \textit{ entonces } D \cap A \neq \emptyset\}.$$

Afirmación 2.39 *Si X es un continuo, entonces N está bien definida.*

Demostración. Para demostrar que N está bien definda, como $\emptyset \neq A \subset N(A)$ para todo $A \in 2^X$, sólo tenemos que verificar que $N(A)$ es cerrado para todo $A \in 2^X$.

Sea $A \in 2^X$, si $x \in X - N(A)$, entonces existe $D \in D(X)$ tal que $x \in int(D)$ y $D \cap A = \emptyset$, así $x \in int(D) \subset X - N(A)$, lo que implica que $X - N(A)$ es abierto. Por lo tanto $N(A)$ es cerrado. ■

Afirmación 2.40 *Sea X un continuo, entonces:*

(a) $A \subset T(A) \subset N(A)$, para toda $A \in 2^X$;

(b) $N = T$, si X es localmente conexo.

Demostración. (a) Sea $A \in 2^X$.

Por 2 de la Afirmación 2.37, tenemos que $A \subset T(A)$. Sea $x \in T(A)$, si $D \in D(X)$ tal que $x \in int(D)$, como $x \in T(A)$ y como $D \in C(X)$, obtenemos que $D \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in N(A)$. Lo que demuestra que $A \subset T(A) \subset N(A)$.

(b) Supongamos X localmente conexo, como T y N tienen el mismo dominio y codominio, sólo necesitamos verificar que cumplen la misma regla de correspondencia.

Sea $A \in 2^X$, por (a) tenemos que $T(A) \subset N(A)$.

Verifiquemos la otra contención. Sea $x \in N(A)$ y $W \in C(X)$ tal que $x \in int(W)$. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo U en X tal que $x \in U \subset W$. Por el Lema 2.5, tenemos que $\overline{U} \in D(X)$, lo que implica, por definición de N, que $\overline{U} \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto $W \cap A \neq \emptyset$, lo que demuestra que $x \in T(A)$.

Por lo tanto $N = T$ y terminamos la demostración de (b). ■

Teorema 2.41 *Sea X un continuo. Entonces $N(A) = A$ para toda $A \in 2^X$ si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos X localmente conexo.

Si $A \in 2^X$, por 4 de la Afirmación 2.37 y por (b) de la Afirmación 2.40, se cumple que $A = T(A) = N(A)$.

Demostremos la otra implicación. Supongamos que $N(A) = A$ para toda $A \in 2^X$.

Consideremos $x \in X$ y U un abierto tal que $x \in U$. Como $x \notin X - U = N(X-U)$, tenemos que existe $D \in D(X)$ tal que $x \in int(D)$ y $D \cap (X-U) = \emptyset$. Así $x \in int(D) \subset D \subset U$, lo que demuestra que X es conexo en pequeño en x.

Como X es conexo en pequeño en todos sus puntos, obtenemos que X es localmente conexo. ■

A continuación vamos a construir el ejemplo de un continuo para el cual la función N no coincide con la función T.

Ejemplo 2.42 *Para este ejemplo vamos a considerar tres abanicos armónicos en $\mathbb{R}^3$, los cuales van a ser la estructura del espacio (ver Figura 2.4).*

Construcción del abanico $\mathcal{A}_1$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea L_n el segmento convexo en $\mathbb{R}^3$ del punto $(0,-1,0)$ al punto $(0,0,\frac{1}{n})$; y sea L el segmento convexo del punto $(0,-1,0)$ al punto $(0,0,0)$. Sea:

$$\mathcal{A}_1 = [\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n] \cup L.$$

Notemos que el abanico armónico $\mathcal{A}_1$ está contenido en el plano YZ y L es su arco límite.

Construcción del abanico $\mathcal{A}_2$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$ sea I_n el segmento convexo en $\mathbb{R}^3$ del punto $(0,0,0)$ al punto $(\frac{1}{n},2,0)$; y sea I el segmento convexo del punto $(0,0,0)$ al punto $(0,2,0)$. Sea:

$$\mathcal{A}_2 = [\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n] \cup I.$$

Notemos que el abanico armónico $\mathcal{A}_2$, está contenido en el plano XY e I es su arco límite.

Construcción del abanico $\mathcal{A}_3$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea J_n el segmento convexo en $\mathbb{R}^3$ del punto $(0,0,0)$ al punto $\frac{1}{2}(\frac{1}{n},2,0)$; y sea J el segmento convexo del punto $(0,0,0)$ al punto $\frac{1}{2}(0,2,0)$. Sea:

$$\mathcal{A}_3 = [\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n] \cup J.$$

Notemos que el abanico armónico $\mathcal{A}_3$, está contenido en el plano XY y J es su arco límite.

Como además, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que J_n es la mitad del arco I_n, tenemos que $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$ y geométricamente podemos pensar que $\mathcal{A}_3$ es la mitad de $\mathcal{A}_2$.

Para poder definir el ejemplo que nos interesa, necesitamos construir también los siguientes abanicos, los cuales tienen como base a $\mathcal{A}_3$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$\mathcal{A}^n = \{\overline{x} + (0,0,\tfrac{1}{n}) : \overline{x} \in \mathcal{A}_3\}.$$

Notemos que:

(a) $\mathcal{A}^n$ *es la traslación del abanico* $\mathcal{A}_3$ *al punto* $(0,0,\frac{1}{n})$.

Por lo tanto $\mathcal{A}^n$ *es homeomorfo a un abanico armónico con arco límite* $J^n = \{\overline{x} + (0,0,\frac{1}{n}) : \overline{x} \in J\}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim \mathcal{A}^n = \mathcal{A}_3$.

(c) $\mathcal{A}^n \cap \mathcal{A}_1 = \{(0,0,\frac{1}{n})\}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente consideremos el siguiente continuo en $\mathbb{R}^3$ *(Figura 2.4):*

$$Z = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n].$$

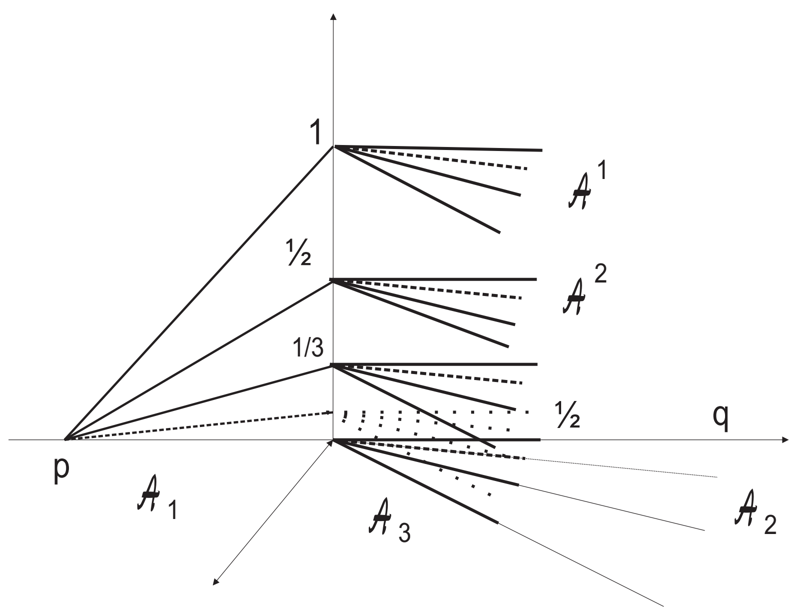

Figura 2.4: El continuo Z.

Proposición 2.43 *Si Z es el continuo del Ejemplo 2.42 y denotamos $p = (0,-1,0)$ y $q = (0,2,0)$, entonces $q \in N(\{p\})$ pero $q \notin T(\{p\})$.*

Demostración. Verifiquemos que $q \notin T(\{p\})$.

Notemos que $\mathcal{A}_2$ es un subcontinuo de Z, que por construcción satisface que $q \in int(\mathcal{A}_2)$ y que $p \notin \mathcal{A}_2$, lo que demuestra que $q \notin T(\{p\})$.

Verifiquemos que $q \in N(p)$.

Sea $D \in D(Z)$ tal que $q \in int(D)$.

Sea U un abierto en Z tal que $q \in U \subset D$ y que además $U \cap (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_3 \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^n]) = \emptyset$.

Como $\lim(\frac{1}{n}, 2, 0) = q$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{N}, 2, 0) \in U$. Por ser $(\frac{1}{n}, 2, 0)$ el punto extremo de I_n para toda $n \in \mathbb{N}$, y por la conexidad de D, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que $I_n \subset D$, para toda $n \geq N_0$.

Como $J_n \subset I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $J_n \subset D$, para toda $n \geq N_0$.

Sea $r \in J_{N_0} - \{(0,0,0), \frac{1}{2}(\frac{1}{N_0}, 2, 0)\}$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(r) \cap I_m = \emptyset$, para toda $m \neq N_0$ y que además $(0,0,0), \frac{1}{2}(\frac{1}{N_0}, 2, 0) \notin B_\varepsilon(r)$.

Como $r \in D = \overline{int(D)}$, existe $z \in B_\varepsilon(r) \cap int(D)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $z \notin J_{N_0}$.

Por la elección de ε y por tener que $\lim \mathcal{A}^n = \mathcal{A}_3$, se cumple que $z \in \mathcal{A}^M$, para alguna $M \in \mathbb{N}$.

Si $p \notin D$, al ser p un punto de corte de X, tendríamos que $U = (\mathcal{A}^M \cup [L_M - \{p\}]) \cap D$ y $V = (Z - [\mathcal{A}^M \cup L_M]) \cap D$ formarían una separación de D, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $p \in D$.

Caso 2. $z \in J_N$.

Como $z \in B_\varepsilon(r) \cap int(D)$ que es un abierto, al tener que $\lim \mathcal{A}^n = \mathcal{A}_3$, existe $M_0 \in \mathbb{N}$ y $z_0 \in \mathcal{A}^{M_0}$ tal que $z_0 \in int(D) \cap B_\varepsilon(x)$.

Aplicando el Caso 1 al punto z_0, obtenemos que $p \in D$.

Esto termina la demostración de esta proposición. ■

Observación 2.44 *Si Z es el continuo del Ejemplo 2.42, por la Proposición 2.43, tenemos que $q \in N(\{p\}) - T(\{p\})$, lo que demuestra que la función N no siempre coincide con la función T de Jones.*

Teorema 2.45 *Si $A \in C(X)$, entonces $N(A) \in C(X)$.*

Demostración. Supongamos que $N(A)$ es disconexo, entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y K de X tales que $N(A) = H \cup K$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \subset H$.

Sea U un abierto en X tal que $H \subset U \subset \overline{U} \subset X - K$. De esta forma tenemos que $Fr(U) \subset X - N(A)$. Por lo tanto para toda $x \in Fr(U)$ existe $D_x \in D(X)$ tal que $x \in int(D_x)$ y $D_x \cap A = \emptyset$. Como $Fr(U)$ es compacto y $Fr(U) \subset \bigcup\{int(D_x) : x \in Fr(U)\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ y existen $x_1, \ldots, x_n \in Fr(U)$ tales que:

$$Fr(U) \subset \bigcup_{i=1}^{n} int(D_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_{x_i}.$$

Sean $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_{x_i}$ y $E = (X - U) \cup D$.

Notemos que D y E son subconjuntos cerrados de X.

Afirmación 1. E tiene un número finito de componentes.

Demostración. Sea C una componente de E. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C} \cap Fr(U) \neq \emptyset$, lo que implica que $C \cap D_{x_i} \neq \emptyset$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por ser D_{x_i} conexo, tenemos que $D_{x_i} \subset C$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lo anterior nos dice que las componentes de E son las componentes de E que contienen a los conjuntos $D_{x_1}, \ldots, D_{x_n}$. Así concluimos que E tiene a lo más n componentes y terminamos la demostración de la Afirmación 1.

Sean $C_1, \ldots, C_m$ las componentes distintas de E.

Afirmación 2. Si $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $C_i \in D(X)$.

Demostración. Al ser E un subconjunto cerrado en X, obtenemos que C_i es cerrado en X.

Como $int(C_i) \subset C_i$, entonces $\overline{int(C_i)} \subset C_i$. Así, para demostrar que $C_i \in D(X)$, sólo tenemos que ver que $C_i \subset \overline{int(C_i)}$.

Sea $x \in C_i$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $C_i \cap D_{x_j} \neq \emptyset$ si y sólo si $j = 1, \ldots, r$; donde $r \leq n$. Analicemos dos casos.

Caso 1. $x \in D_{x_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, r\}$.

En este caso tenemos que $D_{x_i} \subset C_i$, así $int(D_{x_j}) \subset int(C_i)$. Como $D_{x_j} \in D(X)$, tenemos que $x \in D_{x_j} = \overline{int(D_{x_j})} \subset \overline{int(C_i)}$; lo que implica que $x \in \overline{int(C_i)}$.

Caso 2. $x \in C_i - (D_{x_1} \cup \ldots \cup D_{x_r})$.

Como $C_k \cap C_i = \emptyset$ para toda $k \neq i$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$B_\varepsilon(x) \cap ([\bigcup_{j=1}^{r} D_{x_j}] \cup [\bigcup_{k \neq i} C_k]) = \emptyset$$

Por la elección de ε, tenemos que $B_\varepsilon(x) \subset C_i$, lo que demuestra que $x \in int(C_i)$, así $x \in \overline{int(U_i)}$.

Esto termina la demostración de la Afirmación 2.

Sea $k \in K$, como $K \subset X - \overline{U}$ podemos suponer que $k \in C_i$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $C_i \cap D_{x_j} \neq \emptyset$ si y sólo si $j \in \{1, \ldots, r\}$, entonces

$$k \in X - (\overline{U} \cup [\bigcup_{j \neq i} C_j]) \subset C_i.$$

Por lo tanto $k \in int(C_i)$. Por la Afirmación 2, tenemos que $C_i \in D(X)$ y por construcción se cumple que $C_i \cap A = \emptyset$ lo que es una contradicción ya que $k \in K \subset N(A)$.

Por lo tanto $N(A)$ es conexo, si A es conexo. ■

Como podemos apreciar, la función N se comporta, hasta cierto punto, como la función T de Jones. Dado que la función T caracteriza varias propiedades topológicas de un continuo, es natural preguntarse si la función N es capaz de caracterizar condiciones similares.

En este sentido, me gustaría enunciar el siguiente resultado que caracteriza el hecho de que un continuo sea indescomponible en términos de la función T.

Teorema 2.46 *Sea X un continuo, entonces X es indescomponible si y sólo si $T(\{x\}) = X$ para todo $x \in X$.*

Sería agradable obtener un resultado como el Teorema 2.46 para la función N. Desgraciadamente no se tiene una caracterización de este estilo, como mostramos a continuación:

Afirmación 2.47 *Si $\mathcal{B}$ es el continuo de la Definición 2.14, entonces:*

(a) $\mathcal{B}$ es descomponible.

(b) $N(\{x\}) = \mathcal{B}$ para todo $x \in \mathcal{B}$.

Demostración. El inciso (a) se cumple por la Afirmación 2.17.

Demostremos (b).

Sea $x \in \mathcal{B}$ y sea $p \in \mathcal{B} - \{x\}$. Por el Teorema 2.24, tenemos que $D(\mathcal{B}) = \{\mathcal{B}\}$, por lo tanto si $D \in D(\mathcal{B})$ y $p \in int(D)$, entonces $D = \mathcal{B}$, lo que implica que $x \in D$.

Por lo tanto $T(\{x\}) = \mathcal{B}$. ■

Si tratamos de extender a la función N a otros resultados que se tienen para la función T de Jones, como los que caracterizan la aposindesis, la conexidad en pequeño, etc; se pueden encontrar ejemplos (algo complicados de plasmar en papel y que no incuyo en este trabajo ya que nos desviarían del propósito principal de este trabajo) que muestran que la función N no preserva dichas propiedades.

En el *Sexto Taller de Investigación en Continuos y sus Hiperespacios*, evento que se realizó del 1 al 14 de julio de 2012 en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, el Dr. David P. Bellamy presentó las siguientes funciones:

Definición 2.48 *Si X es un continuo, definimos:*

- $Y : 2^X \mapsto 2^X$ *definida por*

$$Y(A) = \{x \in X : \textit{si } B \in C(X) \textit{ con } int(B) \textit{ conexo y } x \in int(B), \textit{ entonces } B \cap A \neq \emptyset\}.$$

- $\Gamma : 2^X \mapsto 2^X$ *definida por*

$$\Gamma(A) = \{x \in X : \textit{si } B \in 2^X,\ B \textit{ tiene a lo más una cantidad numerable de componentes y } x \in int(B),\ \textit{entonces } B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Directamente de la definicón tenemos que, si $A \in 2^X$, entonces:

$$A \subset T(A) \subset Y(A) \subset \Gamma(A).$$

Lo natural es preguntarse donde esta posicionada la función N, en este sentido tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 2.49 *Si X es un continuo y $A \in 2^X$, entonces $N(A) \subset Y(A)$.*

Demostración. Sea $x \in N(A)$, si $B \in C(X)$ es tal que $int(B)$ es conexo y $y \in int(B)$, por el Lema 2.5, tenemos que $\overline{int(B)} \in D(X)$, así $\overline{int(B)} \cap A \neq \emptyset$, lo que implica que $B \cap A \neq \emptyset$.

Por lo tanto $x \in Y(A)$. Con esto demostramos que $N(A) \subset Y(A)$. ■

Como es natural, a continuación presentamos un ejemplo donde N no coincide con Y.

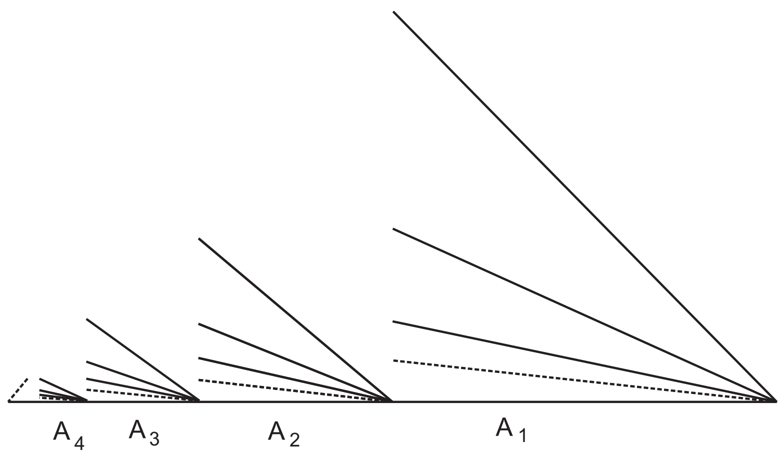

Figura 2.5: Continuo donde $Y \neq N$.

Ejemplo 2.50 *Sea $n \in \mathbb{N}$, para toda $m \in \mathbb{N}$, sea I^n_m el segmento convexo en $\mathbb{R}^2$ que une al punto $(\frac{1}{n}, 0)$ con el punto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n \cdot m})$. Además consideremos $I_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \times \{0\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$A_n = [\bigcup_{m \in \mathbb{N}} I^n_m] \cup I_n.$$

Notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, A_n es hoemomorfo a un abanico armónico con barra límite el arco I_n.

Por último consideremos:

$$X = [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] \cup \{(0,0)\}.$$

Notemos que X es el típico ejemplo de un espacio que es conexo en pequeño en el punto $(0,0)$, pero no localmente conexo en ese punto (Figura 2.5).

Como podemos apreciar, si $A \in C(X)$ *es tal que* $int(A)$ *es conexo y además* $(0,0) \in int(A)$*, entonces* $(1,0) \in A$*. Por lo tanto* $(0,0) \in Y(\{(1,0)\})$*.*

Por otro lado, es claro que $A = [\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n] \cup \{(0,0)\}$ *es un subcontinuo de* X *tal que* $(0,0) \in int(A)$*,* $A \in D(X)$ *y* $(1,0) \notin A$*. Lo que demuestra que* $(0,0) \notin N(\{(1,0)\})$*.*

El Ejemplo 2.50, nos dice que N no siempre coincide con Y.

Por lo tanto, si X es un continuo y $A \in 2^X$, entonces:

$$A \subset T(A) \subset N(A) \subset Y(A) \subset \Gamma(A).$$

Con esta observación concluyo esta sección, y como comentario final, menciono que me reservo el estudio de la función N en investigaciones próximas, considerando el enfoque que el Dr. David P. Bellamy nos presentó en el taller que mencioné.

Capítulo 3

El Hiperespacio $M(X)$

3.1. Introducción

Recordemos que, si X es un continuo, entonces el **Hiperespacio de Subcontinuos Magros** se define como:

$$M(X) = \{A \in C(X) : intA = \emptyset\}.$$

Como es natural, decimos que $A \subset X$ es un **subcontinuo magro** si A es un elemento del hiperespacio $M(X)$, es decir, si $A \in C(X)$ y además $int(A) = \emptyset$.

En este capítulo vamos estudiar algunas de las propiedades topológicas generales del hiperespacio $M(X)$, vamos a discutir diversos ejemplos interesantes y mencionaremos algunos problemas relacionados con este hiperespacio.

3.2. Propiedades de $M(X)$

Para abordar la conexidad de $M(X)$, recordemos que si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, un arco ordenado de A a B es una fución continua $\alpha : [0, 1] \mapsto C(X)$, que cumple las siguientes condiciones:

(a) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,

(b) si $t < s$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(s)$.

Teorema 3.1 *Si X es un continuo, entonces $M(X)$ es conexo.*

Demostración. Sea X un coninuo y A un elemento en $M(X)$. Sea p un punto en A, por el Teorema 1.44 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \mapsto M(X)$ de $\{p\}$ a A. Notemos que para toda $t \in [0,1]$, se tiene que $\alpha(t) \subset A$; así $int(\alpha(t)) \subset int(A) = \emptyset$, para todo $t \in [0,1]$.

Lo anterior demuestra que todo elemento en $M(X)$ se puede unir por un arco en $M(X)$, al hiperespacio $F_1(X)$. Como $F_1(X)$ es un subconjunto conexo de $M(X)$, concluimos que $M(X)$ es conexo. ■

Ejemplo 3.2 *(a) Sea X un continuo indescomponible. Por el Teorema 1.27, tenemos que todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío, así obtenemos que:*

$$M(X) = C(X) - \{X\}.$$

(b) Sea $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$ y consideremos un subconjunto denso $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ de I^2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, denotemos por J_n el segmento convexo en I^2 del punto a_1 al punto a_n.

Para toda $m \in \mathbb{N}$, sea $B_m = \cup\{J_n : n \in \{1, \ldots, m\}\}$. Como B_m es la unión finita de subcontinuos magros que se intersectan en un punto, por el Lema 1.11 tenemos que $B_m \in M(X)$. Además se cumple que $B_m \subset B_{m+1}$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Como $B \subset \cup\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$, obtenemos que $I^2 = \overline{B} \subset \overline{\cup\{B_m : m \in \mathbb{N}\}} \subset I^2$, lo que muestra que $\lim B_m = \overline{\cup\{B_m : m \in \mathbb{N}\}} = I^2$.

Los espacios que ilustramos en (a) y (b) del Ejemplo 3.2, muestran que el hiperespacio $M(X)$ no siempre es cerrado, ni siquiera cuando el espacio es localmente conexo, que es el caso de I^2. Así, un problema interesante en este sentido es el siguiente:

Problema 3.3 *¿Para qué familias de continuos se cumple que el hiperespacio $M(X)$ es cerrado?*

En la siguiente sección, nos daremos a la tarea de caracterizar algunas familias de continuos para los cuales el hiperespacio $M(X)$ es cerrado.

3.3. Compacidad de $M(X)$

Definición 3.4 *Sean X un continuo y pq un arco no degenerado en X con extremos p y q. Decimos que pq es un **arco libre**, si $pq - \{p, q\}$ es un subconjunto abierto de X.*

Proposición 3.5 *Si $A \in C(X)$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $M(X)$, tal que $\lim A_n = A$, entonces A no contiene arcos libres.*

Demostración. Supongamos que existe un arco libre pq con extremos p y q, contenido en A.

Sea $r \in pq - \{p, q\}$ y tomemos $\varepsilon > 0$ de tal forma que $B_\varepsilon(r) \subset pq - \{p, q\}$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_N, A) < \varepsilon$.

Por el Lema 1.32, tenemos que $pq \subset A \subset N(\varepsilon, A_N)$, así existe $a \in A_N$ tal que $d(r, a) < \varepsilon$. Por la elección de ε, tenemos que $a \in pq - \{p, q\}$.

Sea C_a la componente $A_N \cap B_\varepsilon(r)$ que tiene a a, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C_a}$ es un subarco no degenerado de pq, supongamos que $s, t \in pq$ son dos puntos diferentes tales que $\overline{C_a} = st$.

Como $st - \{s, t\}$ es abierto en pq, existe un abierto U de X tal que $U \cap pq = st - \{s, t\}$. Entonces $st - \{s, t\} = U \cap (pq - \{p, q\})$ es un abierto no vacío de X contenido en el $int(A_N)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto A no contiene arcos libres. ■

Notación 3.6 *Si X es un continuo, denotaremos por $\mathcal{A}_X$ a la unión de todos los arcos libres de X.*

Teorema 3.7 *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}_X$ es denso en X, entonces $M(X)$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que $M(X)$ no es compacto, entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $M(X)$ tal que $\lim B_n = B$, para algún $B \in C(X)$ con $int(B) \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{A}_X$ es denso en X, existe un arco libre pq con extremos p y q tal que $pq \subset int(B)$, lo que es una contradicción a la Proposición 3.5.

Por lo tanto $M(X)$ es compacto. ■

Corolario 3.8 *Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}_X$ es denso en X, entonces $M(X)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 3.1, tenemos que $M(X)$ es conexo, por el Teorema 3.7, tenemos que $M(X)$ es compacto; por lo tanto $M(X)$ es un continuo. ■

El Teorema 3.7 es muy práctico en el sentido que, si nuestro espacio favorito se puede visualizar geométricamente, a veces podemos intuir de forma casi inmediata si el hiperespacio $M(X)$ es compacto; pues los arcos libres en un continuo son "fáciles"de identificar desde un punto de vista geométrico.

Con el siguiente ejemplo ilustro la utilidad de este resultado.

Definición 3.9 *Sea X un continuo. Una **compactación del rayo con residuo** X, es un continuo Y para el cual existe un encaje $h : [0,1) \to Y$ tal que:*

1. *$h([0,1))$ es denso en Y,*
2. *$Y - h([0,1))$ es homeomorfo a X.*

Definición 3.10 *Sea X un continuo, decimos que A un subcontinuo de X es **terminal**, si para todo subcontinuo B de X tal que $A \cap B \neq \emptyset$; se cumple que $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Lema 3.11 *Si Y es una compactación del rayo con residuo X, entonces X es terminal.*

Demostración. Sea $h : [0,1) \to Y$ un encaje tal que $h([0,1))$ es denso en Y y $X = Y - h([0,1))$. Notemos que, para toda $s \in (0,1)$, $h(s)$ es un punto de corte, ya que los conjuntos $h([0,s))$ y $h((s,1)) \cup X$ son abiertos y cerrados en $Y - \{h(s)\}$.

Demostremos que X es terminal, para esto sea A un subcontinuo propio de X tal que $A \cap X \neq \emptyset$.

Si $A \not\subset X$, existe $t > 0$ tal que $h(t) \in A$. Como A es conexo, se cumple que para toda $s > t$, $h(s) \in A$, pues de lo contrario tendríamos que $A \subset Y -$

$\{h(s)\}$ y así, los conjuntos $h([0,s))$ y $h((s,1)) \cup X$ formarían una separación de A.

Lo anterior demuestra que $h([t,1)) \subset A$ y como $X \subset \overline{h([t,1))}$, concluimos que $X \subset A$. Por lo tanto X es terminal. ■

Afirmación 3.12 *Si Y es una compactación del rayo con residuo X, entonces $M(Y)$ es compacto, más aún, se cumple la siguiente igualdad:*

$$M(Y) = F_1(Y) \cup C(X).$$

Demostración. Sea $h : [0,1) \to Y$ un encaje como en la definición de compactación. Para cualesquiera $t, s \in [0,1)$ con $s < t$, por ser h un homeomorfismo en su imagen, tenemos que $h((s,t)) = (Y - X) \cap h((s,t))$ es un abierto en Y, lo que implica que $h([s,t])$ es un arco libre. Como $h([0,1))$ es denso, obtenemos que $\mathcal{A}_Y$ es denso en Y. Por el Teorema 3.7, concluimos que $M(Y)$ es compacto.

Para concluir la demostración de esta afirmación, demostremos que $M(Y) = F_1(Y) \cup C(X)$; para esto verifiquemos ambas contenciones.

Como $Y - X = h([0,1))$ es denso, tenemos que $int(X) = \emptyset$. Por lo tanto, si $A \in C(X)$, entonces $int(A) = \emptyset$. Esto demuestra que:

$$F_1(Y) \cup C(X) \subset M(Y).$$

Para demostrar la otra contención, tomemos $A \in M(Y)$. Por ser X terminal, debemos analizar los siguientes casos:

Caso 1. $A \cap X \neq \emptyset$ y $A \subset X$.

En este caso tenemos que $A \in C(X)$.

Caso 2. $A \cap X \neq \emptyset$ y $X \not\subset A$.

En este caso, existe $t \in [0,1)$ tal que $A = X \cup h([t,1))$, lo que implica que $int(A) \neq \emptyset$, lo cual no puede suceder.

Caso 3. $A \cap X = \emptyset$.

En este caso existen $t, s \in [0, \infty)$ tales que $s \leqslant t$ y $A = h([s,t])$. Si $s < t$, entonces $int(A) \neq \emptyset$, lo cual no puede ser, por lo tanto $s = t$ y tenemos que $A = h(t) \in F_1(Y)$.

Con los Casos 1, 2 y 3, hemos demostrado que

$M(Y) \subset F_1(Y) \cup C(X)$.

Así concluimos la demostración de esta afirmación. ■

Corolario 3.13 *Si Y es una compactación del rayo, entonces $M(Y)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 3.1, tenemos que $M(Y)$ es conexo y por el Teorema 3.12, tenemos que $M(Y)$ es compacto; por lo tanto $M(Y)$ es un continuo. ■

A continuación mostraremos que, cuando nos enfocamos al estudio de algunas familias particulares de continuos, podemos obtener condiciones necesarias y suficientes para la compacidad del hiperespacio $M(X)$. Como podremos observar, estos resultados están ligados, en cierta forma, a la estructura geométrica de los espacios que consideramos, en el sentido de los arcos libres.

Teorema 3.14 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces $M(X)$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{A}_X$ es denso en X.*

Demostración. Supongamos que $M(X)$ es cerrado, demostremos que $\mathcal{A}_X$ es denso.

Si suponemos lo contrario, existe un punto $x \in X - \overline{\mathcal{A}_X}$ y U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $x \in U$ y $\overline{U} \cap \overline{\mathcal{A}_X} = \emptyset$.

Observemos que si L es un arco contenido en U, por ser U ajeno a $\mathcal{A}_X$, entonces $int(L) = \emptyset$.

Vamos a construir una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $M(X)$ con la propiedad que $\lim B_n = \overline{U}$.

Sea $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de U, tal que $\overline{B} = \overline{U}$. Como U es un abierto conexo en un continuo localmente conexo; por el Teorema 1.20 tenemos que U es arco conexo, por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un arco J_n contenido en U que une al punto a_1 con el punto a_n. Dado $m \in \mathbb{N}$, sea

$$B_m = \cup\{J_n : n \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Notemos que $B_m \subset B_{m+1}$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y que además $B \subset \cup\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$, lo que implica que:

$$\overline{U} = \overline{B} \subset \overline{\cup\{B_m : m \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{U}.$$

De donde, por el Lema 1.35 concluimos que $\lim B_m = \overline{U}$. Como B_m es la unión finita de subcontinuos magros con un punto en común, por el Lema 1.11, tenemos que $B_m \in M(X)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Por ser $M(X)$ cerrado, tenemos que $\overline{U} \in M(X)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{A}_X$ es denso en X.

La otra implicación de este teorema, la obtenemos gracias al Teorema 3.7. ■

Corolario 3.15 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces $M(X)$ es un continuo si y sólo si $\mathcal{A}_X$ es denso en X.*

Demostración. Como $M(X)$ es compacto, tenemos que $M(X)$ es un subconjunto cerrado, por el Teorema 3.14, obtenemos que $\mathcal{A}_X$ es denso en X. Por otro lado, si $\mathcal{A}_X$ es denso en X, por los Teoremas 3.14 y 3.1 concluimos que $M(X)$ es compacto y conexo, respectivamente, por lo tanto $M(X)$ es un continuo. ■

La caracterización de la compacidad del hiperespacio de subcontinuos magros que nos proporciona el Teorema 3.14, intuitivamente nos sugiere que basta con tener densidad de arcos libres para poder caracterizar dicha propiedad. Los siguientes ejemplos y observaciones muestran que ésta es una idea errónea y que desgraciadamente, esta propiedad topológica es difícil de acotar en forma general.

Ejemplo 3.16 *Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de Cantor canónico contenido en el intervalo $[0,1]$. El **Peine de Cantor** es el dendroide determinado por el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (Figura 3.1):*

$$\mathcal{P} = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\mathcal{C} \times [0,1]).$$

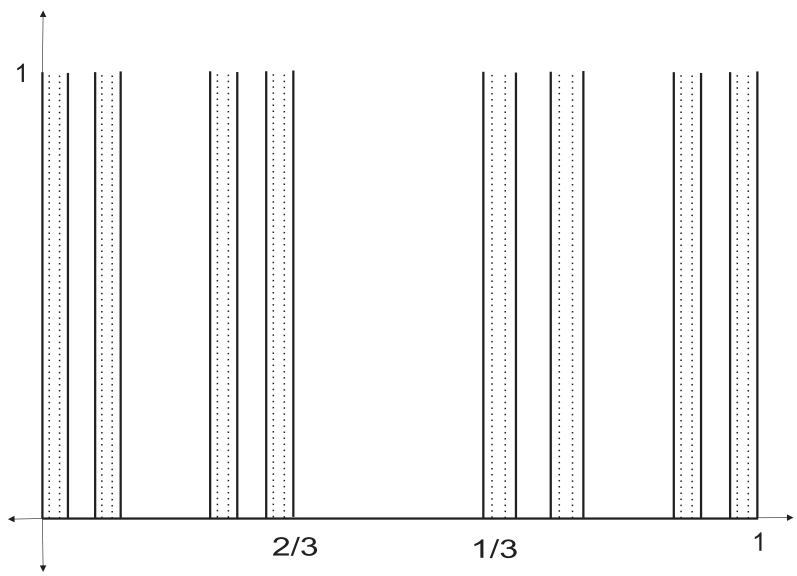

Figura 3.1: El Peine de Cantor.

Afirmación 3.17 *Si $\mathcal{P}$ es el peine de Cantor, entonces:*

(1) $M(\mathcal{P}) = F_1([0,1] \times \{0\}) \cup (\{A \in C(\mathcal{P}) : A \subset \{c\} \times [0,1]$ para algún $c \in \mathcal{C}\})$.

(2) El hiperespacio $M(\mathcal{P})$ es cerrado.

(3) $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ no es denso en $\mathcal{P}$.

Demostración. Para demostrar (1), verifiquemos que se cumplen ambas contenciones.

Dado que $int(\{c\} \times [0,1]) = \emptyset$, para toda $c \in \mathcal{C}$; podemos concluir que, si $A \in C(\mathcal{P})$ es tal que $A \subset \{c\} \times [0,1]$ para algún $c \in \mathcal{C}$, entonces $int(A) = \emptyset$. Esto demuestra que:

$$F_1([0,1] \times \{0\}) \cup (\{A \in C(\mathcal{P}) : A \subset \{c\} \times [0,1] \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}) \subset M(\mathcal{P}).$$

Para demostrar la otra contención, sea A un subcontinuo de $\mathcal{P}$ y analicemos los siguientes casos.

Caso 1. $A \cap ([0,1] \times \{0\}) = \emptyset$.

En este caso, tenemos que $A \subset \mathcal{C} \times [0,1]$, para algún $c \in \mathcal{C}$.

Caso 2. $A \cap ([0,1] \times \{0\}) \neq \emptyset$.

Por ser $\mathcal{P}$ hereditariamente unicoherente, tenemos que $A \cap ([0,1] \times \{0\})$ es un subcontinuo, más aún, podemos suponer que dicha intersección es de la forma $[s,t] \times \{0\}$, con $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

Si $s < t$, por ser $\mathcal{C}$ denso en ninguna parte en $[0,1]$, concluimos que $int([s,t] \times \{0\})$ es no vacío, lo cual es una contradición.

Lo anterior demuestra que $s = t$, así obtenemos que $A \subset \{c\} \times [0,1]$ para algún $c \in \mathcal{C}$ o que $A = \{(t,0)\}$ para algún $t \in [0,1]$. Entonces

$$M(\mathcal{P}) \subset F_1([0,1] \times \{0\}) \cup (\{A \in C(\mathcal{P}) : A \subset \{c\} \times [0,1] \text{ para algún } c \in \mathcal{C}\}).$$

Con esto terminamos la demostración de (1).

Demostremos (2). Para verificar que $M(\mathcal{P})$ es cerrado, sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $M(\mathcal{P})$ tal que $\lim A_n = A$, para algún $A \in C(\mathcal{P})$.

Por la igualdad del inciso (1), sin pérdida de generalidad, basta con verificar los siguientes casos:

Caso 1. $A_n = \{c_n\} \times [s_n, t_n]$, donde $0 \leqslant s_n \leqslant t_n \leqslant 1$ y $c_n \in \mathcal{C}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso, como $\mathcal{C}$ y $C([0,1])$ son cerrados, existen $c \in C$ y $[s,t] \in C([0,1])$ tales que $c = \lim c_n \in C$ y $[s,t] = \lim [s_n, t_n]$. Entonces $A = \lim A_n = \lim \{c_n\} \times [s_n, t_n] = \{c\} \times [s,t]$, que es un elemento en $M(\mathcal{P})$.

Caso 2. $A_n = \{(t_n, 0)\}$ y $t_n \in [0,1]$, para toda $n \in \mathbb{N}$

En este caso existe $t \in [0,1]$, tal que $t = \lim t_n$. Así $A = \lim \{(t_n, 0)\} = \{(t, , 0)\}$ es un elemento en $M(\mathcal{P})$.

Por los Casos *1* y *2*, podemos concluir que $M(\mathcal{P})$ es cerrado.

Para tener (3), notemos que los arcos libres de $\mathcal{P}$, están contenidos en la base $[0,1] \times \{0\}$; lo que implica que $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ no es denso. ■

Observación 3.18 *El peine de Cantor es un espacio que no es localmente conexo y que, por ser un dendriode, es hereditariamente arco conexo, que satisface que su hiperespacio de subcontinuos magros es cerrado, pero la unión de los arcos libres no es denso.*

Así tenemos que la condición de ser localmente conexo en el Teorema 3.14, no se puede eliminar de las hipótesis, más aún, tenemos que este resultado no se puede extender a la familia de continuos hereditariamente arco conexos.

Definición 3.19 *Decimos que un continuo X es* ***aproximable por arcos****, si para todo subcontinuo A de X y para toda $\varepsilon > 0$, existe un arco L en X, tal que $H(A, L) < \varepsilon$.*

Ejemplo 3.20 *Consideremos a $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Notemos que I^2 es un espacio localmente conexo, que es aproxímable por arcos; pero que satisfaces que $\mathcal{A}_{I^2} = \emptyset$ ya que todo arco en I^2 tiene interior vacío.

Por (b) del Ejemplo 3.1, tenemos que el hiperespacio $M(I^2)$ no es cerrado. Por lo tanto el Teorema 3.14 no se puede extender a la familia de espacios aproximables por arcos.

3.4. Densidad de $M(X)$

En esta sección estudiaremos las condiciones bajo las cuales el hiperespacio M(X) es denso en el hiperespacio C(X).

El motivo por el cual ponemos esta propiedad en esta parte del trabajo, es debido a que esta condición esta fuertemente ligada a la estructura de los arcos libres que tiene un continuo X.

Afirmación 3.21 *Sea X un continuo. Si $M(X)$ es denso en $C(X)$, entonces $\mathcal{A}_X = \emptyset$; en otras palabras, X no contiene arcos libres.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$, entonces existe un arco libre pq con extremos p y q. Como $M(X)$ es denso en $C(X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos en $M(X)$ tal que $\lim A_n = pq$, lo que es una contradicción a la Proposición 3.5.

Por lo tanto $\mathcal{A}_X = \emptyset$. ■

Teorema 3.22 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$ si y sólo si $\mathcal{A}_X = \emptyset$.*

Demostración. Por la Afirmación 3.21, sólo necesitamos demostrar que, si $\mathcal{A}_X = \emptyset$, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$.

Sean $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$; vamos a construir un elemento $C \in M(X)$ tal que $H(A, C) < \varepsilon$.

Sea U un abierto conexo en X tal que $H(\overline{U}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos un subconjunto $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de U tal que $H(B, \overline{U}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como U es abierto y conexo, entonces U es arco conexo, así para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un arco L_i que une a u_1 con u_i y está contenido en U. Sea

$$C = \bigcup\{L_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Dado que $\mathcal{A}_X = \emptyset$, tenemos que $L_i \in M(X)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$; de esta forma, al ser C la unión finita de subcontinuos magros con un punto en común, por el Lema 1.11, obtenemos que $C \in M(X)$.

Como $C \subset U$, entonces $C \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, \overline{U})$. Por otro lado, como $H(B, \overline{U}) < \frac{\varepsilon}{2}$, por el Lema 1.32 tenemos que $\overline{U} \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, y como $B \subset C$, podemos concluir que $\overline{U} \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, C)$, aplicando de nuevo el Lema 1.32, concluimos que $H(\overline{U}, C) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Así, por la desigualdad del triángulo, tenemos que $H(A, C) \leqslant H(A, \overline{U}) + H(\overline{U}, C) < \varepsilon$; esto termina la demostración de este teorema. ■

Teorema 3.23 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$ si y sólo si $\mathcal{A}_X = \emptyset$.*

Demostración. Por la Afirmación 3.21, sólo necesitamos demostrar que, si X no tiene arcos libres, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$.

Sean $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$; consideremos un subconjunto $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de A tal que $H(A, B) < \varepsilon$.

Como A es arco conexo, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un arco L_i que une a_1 con a_i y está contenido en A. Sea

$$C = \bigcup\{L_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Como $C \subset A$, entonces $C \subset N(\varepsilon, A)$. Por otro lado, como $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset C$, concluimos que $A \subset N(\varepsilon, C)$. Por el Lema 1.32, obtenemos que $H(A, C) < \varepsilon$.

Como $\mathcal{A}_X = \emptyset$, tenemos que todo arco en X tiene interior vacío; al ser C la unión finita de subcontinuos magros que tienen un punto en común, por el Lema 1.11, concluimos que $C \in M(X)$. Esto muestra que $M(X)$ es denso en $C(X)$. ■

Teorema 3.24 *Si X es un continuo aproximable por arcos, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$ si y sólo si $\mathcal{A}_X = \emptyset$.*

Demostración. Por la Afirmación 3.21, sólo necesitamos demostrar que si X no tiene arcos libres, entonces $M(X)$ es denso en $C(X)$.

Sean A un subcontinuo de X y $\varepsilon > 0$. Como X es aproximable por arcos, existe un arco L tal que $H(A, L) < \varepsilon$. Como $\mathcal{A}_X = \emptyset$, tenemos que $int(L) = \emptyset$, lo que implica que L es un elemento en $M(X)$. Esto demuestra que $M(X)$ es denso en $C(X)$. ■

Como podemos apreciar, la densidad del hiperespacio $M(X)$ en $C(X)$, está en el polo opuesto de la compacidad del hiperespacio $M(X)$; ya que como vimos en la sección anterior, para que $M(X)$ sea cerrado necesitamos la condición que $\mathcal{A}_X$ sea denso en X; y por el contrario, para que $M(X)$ sea denso, necesitamos $\mathcal{A}_X = \emptyset$.

3.5. Arco Conexidad de $M(X)$

En esta sección vamos a estudiar bajo qué condiciones el hiperespacio $M(X)$ es arco conexo. En este sentindo, la primer propiedad que podemos apreciar es la siguiente.

Teorema 3.25 *Si X es un continuo arco conexo, entonces el hiperespacio $M(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sean A y B dos elementos diferentes en $M(X)$, analicemos los siguientes casos.

Caso 1. $A, B \in F_1(X)$.

Como X es homeomorfo a $F_1(X)$ y X es arco conexo, existe un encaje $\alpha : [0,1] \to F_1(X)$ tal que $\alpha([0,1])$ es un arco de A a B.

Caso 2. $A \in F_1(X)$ y $B \notin F_1(X)$.

Sea b un punto en B tal que $b \notin A$. Sean $\alpha_1 : [0, \frac{1}{2}] \to F_1(X)$ un encaje tal que $\alpha_1(0) = \{a\}$ y $\alpha_1(\frac{1}{2}) = \{b\}$, y sea $\alpha_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to M(X)$ un arco ordenado de b a B. Sea $\alpha : [0,1] \to M(X)$ definida por:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha_2(t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como α es una función que está definida en dos subconjuntos cerrados en los cuales es continua, al tener que $\alpha_1(\frac{1}{2}) = \{b\} = \alpha_2(\frac{1}{2})$, podemos concluir que α es continua.

Como $\alpha(0) = \alpha_1(0) = \{a\} = A$ y $\alpha(1) = \alpha_2(1) = B$, tenemos que $\alpha([0,1])$ es una trayectoria en $M(X)$ de A a B, por lo tanto existe un arco β en $M(X)$ de A a B.

Por los Casos 1 y 2 obtenemos que cualquier elemento en $M(X)$ se puede conectar con un elemento de $F_1(X)$ por un arco y como $F_1(X)$ es arco conexo, concluimos que $M(X)$ es arco conexo. ■

Con la finalidad de verificar que las condicones del Teorema 3.25 no son suficientes, en la siguiente sección estudiaremos las propiedades de un continuo, que recibe por nombre el **Tendedero de Pseudo Arcos**, así como las propiedades de su hiperespacio de subcontinuos magros, para mostrar un ejemplo de un continuo que no es arco conexo, pero que su hiperespacio $M(X)$ si lo es.

3.5.1. El Tendedero de Seudoarcos

Si X es un continuo, recordemos que $A \in C(X)$ es terminal, si para todo $B \in C(X)$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$, se cumple que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Definición 3.26 *Sea X un continuo y D una descomposición de X en subcontinuos. Decimos que D es una* ***descomposición continua*** *si la función natural $\pi : X \to C(X)$, definida para un elemento $x \in X$ como $\pi(x) = B$, donde B es el único elemento en D tal que $x \in B$; es continua.*

Ejemplo 3.27 *El Tendedero de Seudoarcos.*

El tendedero de seudoarcos es un continuo $\boldsymbol{T}$, para el cual existe una función continua $f : \boldsymbol{T} \to [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades:

1. *$f^{-1}(t)$ es homeomorfo al seudoarco para toda $t \in [0,1]$,*
2. *$f^{-1}(t)$ es terminal para toda $t \in [0,1]$,*
3. *$D = \{f^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ es una descomposición continua de $\boldsymbol{T}$.*

Observación 3.28 *La existencia del tendedero de seudoarcos lo garantiza la Proposición 3.1 de [9].*

Observación 3.29 *(1) Si $\boldsymbol{T}$ es el tendedero de seudoarcos y f la función asociada a $\boldsymbol{T}$, como $f^{-1}(t)$ es homeomorfo al seudoarco para toda $t \in [0,1]$, obtenemos que f es una función monótona.*

(2) Si $\boldsymbol{T}$ es el tendedero de seudoarcos, entonces la proyección natural $\pi : \boldsymbol{T} \to C(T)$, está definida para un elemento $x \in \boldsymbol{T}$ por $\pi(x) = f^{-1}(f(x))$.

El siguiente resultado nos dice que el tendedero de seudoarcos no es arco conexo.

Proposición 3.30 *El tendedero de seudoarcos no es arco conexo.*

Demostración. Supongamos que X es arco conexo. Sean a y b dos puntos en $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$, respectivamente; y sea $\alpha : [0,1] \to X$ un encaje tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Como $f^{-1}(0)$ es compacto existe $t = \text{máx}\{s \in [0,1] : \alpha(s) \in f^{-1}(0)\}$.

Notemos que $\alpha([t,1])$ es un subcontinuo de X tal que $\alpha([t,1]) \cap f^{-1}(0) \neq \emptyset$; pero $\alpha([t,1]) \nsubseteq f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(0) \nsubseteq \alpha([t,1])$. Lo que es una contradicción, ya que $f^{-1}(0)$ es terminal. ■

Los siguientes enunciados y propiedades nos van a ayudar a verificar que el hiperespacio de subcontinuos magros del tendedero de seudoarcos es arco conexo.

Lema 3.31 *Si $\boldsymbol{T}$ es el tendedero de seudoarcos, entonces $f^{-1}(t) \in M(X)$ para toda $t \in [0,1]$.*

Demostración. Supongamos que existe $t \in [0,1]$ de tal forma que $int(f^{-1}(t)) \neq \emptyset$; podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t > 0$.

Como f es monótona (Observación 3.29), tenemos que $A = \overline{f^{-1}([0,t))}$ es un subcontinuo de X. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,t)$ tal que $\text{lím}\, t_n = t$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in f^{-1}(t_n)$ de tal forma que $\text{lím}\, a_n = a$, para algún $a \in \mathbf{T}$. Como $D = \{f^{-1}(t) : t \in [0,1]\}$ es una descomposición continua, tenemos que $\text{lím}\, f^{-1}(t_n) = f^{-1}(t)$. Así, por el Lema 1.34, concluimos que $\text{lím}\, a_n = a \in f^{-1}(t)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $A \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset$. Sea U un abierto no vacío en X, tal que $U \subset f^{-1}(t)$. Si x es un punto en U, entonces $x \notin A$. Como $f^{-1}(0) \subset A - f^{-1}(t)$, obtenemos que $A \nsubseteq f^{-1}(t)$ y $f^{-1}(t) \nsubseteq A$, lo que es una contradicción ya que $f^{-1}(t)$ es terminal. ■

Proposición 3.32 *Si $\boldsymbol{T}$ es el tendedero de seudoarcos, entonces*

$$M(\boldsymbol{T}) = \{A \in C(\boldsymbol{T}) : f(A) \in M([0,1])\}.$$

Demostración. Demostraremos las dos contenciones.

Sea $A \in C(\mathbf{T})$ tal que $f(A) \in M([0,1])$, entonces existe $t \in [0,1]$ para el cual $A \subset f^{-1}(t)$. Así, por el Lema 3.31, tenemos que $int(A) \subset int(f^{-1}(t)) = \emptyset$, lo que implica que $A \in M(\mathbf{T})$. Por lo tanto,

$$\{A \in C(\mathbf{T}) : f(A) \in M([0,1])\} \subset M(\mathbf{T}).$$

Sea $A \in M(\mathbf{T})$ y supongamos que $f(A) = [a,b]$ con $a < b$. Notemos que si $t \in [a,b]$, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = t$, lo que implica que $f^{-1}(t) \cap A \neq \emptyset$.

Si $t \in [a,b]$, como $f^{-1}(t)$ es terminal y $A \not\subset f^{-1}(t)$, obtenemos que $f^{-1}(t) \subset A$; por lo tanto $f^{-1}([a,b]) \subset A$, pero esto es una contradicción ya que $\emptyset \neq f^{-1}((a,b)) \subset int(f^{-1}([a,b]))$, así tenemos que

$$M(\mathbf{T}) \subset \{A \in C(\mathbf{T}) : f(A) \in M([0,1])\}.$$

Con esto terminamos la demostración de esta proposición. ■

Lema 3.33 *Si f es la función asociada a $\boldsymbol{T}$, entonces la función $g : [0,1] \to C(\boldsymbol{T})$ definida para un elemento $t \in [0,1]$ por $g(t) = f^{-1}(t)$, es un homeomorfismo en su imagen.*

Demostración. Notemos que g está bien definida porque f es monótona. Como el dominio y el contradominio de g son compactos y métricos, sólo es necesario demostrar que h es continua e inyectiva.

Para demostrar la continuidad de g, sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$ de tal forma que $\lim t_n = t$, para algún $t \in [0,1]$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, tomamos un punto $x_n \in f^{-1}(t_n)$. Como X es compacto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. De esta forma, por la continuidad de f, se cumple que $t = \lim t_n = \lim f(x_n) = f(x)$. Así obtenemos que $x \in f^{-1}(t)$.

Por la continuidad de $\pi : \mathbf{T} \to C(\mathbf{T})$, la proyección natural sobre la descomposición, tenemos que $\lim f^{-1}(t_n) = \lim \pi(x_n) = \pi(x) = f^{-1}(t)$. Como $x \in f^{-1}(t)$, por la definición de π, se concluye que $\pi(x) = f^{-1}(t)$. Por lo tanto $\lim f^{-1}(t_n) = f^{-1}(t)$; lo que demuestra que g es continua.

Para demostrar la inyectividad de f, si t y s son dos elementos en $[0,1]$ tales que $f^{-1}(s) = g(s) = g(t) = f^{-1}(t)$, si tomamos $x \in f^{-1}(s) = f^{-1}(t)$, tenemos que $s = f(x) = t$.

Con esto terminamos la demostración de este lema. ■

Proposición 3.34 *Si $\boldsymbol{T}$ es el tendedero de seudoarcos, entonces $M(\boldsymbol{T})$ es arco conexo.*

Demostración. Sean A y B dos elementos diferentes en $M(\mathbf{T})$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. Existe $t \in [0,1]$ tal que $A, B \subset f^{-1}(t)$.

En este caso $A, B \in C(f^{-1}(t))$, como $C(f^{-1}(t))$ es arco conexo (Teorema 1.37), concluimos que existe un encaje $\alpha : [0,1] \to C(f^{-1}(t)) \subset M(\mathbf{T})$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, así $\alpha([0,1])$ es un arco que une A con B.

Caso 2. Existen $t, s \in [0,1]$ con $s < t$, tales que $A \subset f^{-1}(s)$ y $B \subset f^{-1}(t)$.

Como $C(f^{-1}(s))$ y $C(f^{-1}(t))$ son arco conexos (Teorema 1.37), existen dos funciones continuas $\alpha_1 : [0,1] \to C(f^{-1}(t)) \subset M(\mathbf{T})$ y $\alpha_2 : [0,1] \to C(f^{-1}(t)) \subset M(\mathbf{T})$ tales que $\alpha_1(0) = A$, $\alpha_1(1) = f^{-1}(s)$, $\alpha_2(0) = B$ y $\alpha_2(1) = f^{-1}(t)$.

Por el Lema 3.33, tenemos que $g\,|_{[s,t]}\colon [s,t] \to C(\mathbf{T})$, es un encaje tal que $g(0) = f^{-1}(s)$ y $g(1) = f^{-1}(t)$ en $M(\mathbf{T})$, ya que para toda $r \in [s,t]$ se cumple que $g\,|_{[s,t]}\,(r) = f^{-1}(r) \in M(\mathbf{T})$.

Así, $\gamma = \alpha_1([0,1]) \cup g\,|_{[s,t]}\,([s,t]) \cup \alpha_2([0,1])$, es una trayectoria que une a A con B en $M(\mathbf{T})$, y de esta forma, existe un encaje $\alpha : [0,1] \to \gamma \subset M(\mathbf{T})$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Con esto concluimos que $M(\mathbf{T})$ es arco conexo. ■

Observación 3.35 *Al ser el tendedero de seudoarcos, la imagen inversa de una función monótona del intervalo $[0,1]$, tenemos que $\boldsymbol{T}$ es un continuo que además, por la Proposición 3.30, no es arco conexo. Pero por la Proposición 3.34, tenemos que $M(\boldsymbol{T})$ es arco conexo.*

Así, la condición del Teorema 3.25 no es suficiente.

En la siguiente sección mostraremos una serie de resultados con la finalidad de dar condiciones necesarias y suficientes para la arco conexidad del hiperespacio $M(X)$.

3.5.2. Una Caracterización

Es muy importante resaltar que los resultados obtenidos para caracterizar la arco conexidad de $M(X)$, están fuertemente inspirados en la estructura del hiperespacio de subcontinuos magros que apreciamos para el tendedero de seudoarcos.

Notación 3.36 *Sea X un continuo, denotaremos por $\mathcal{D}_X$ a la colección de todos los subcontinuos terminales maximales propios de X, es decir:*

$$\mathcal{D}_X = \{A \in C(X) - \{X\} : A \textit{ es terminal maximal en } X\}.$$

Lema 3.37 *Sea X un continuo, si A es un subcontinuo terminal propio de X, entonces $A \in M(X)$.*

Demostración. Supongamos que existe un subcontinuo terminal propio A de X, tal que $int(A) \neq \emptyset$.

Como A es un subconjunto propio, existe un punto $x \in X - A$. Sea C_x la componente de $X - A$ que tiene a x, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C}_x$ es un subcontinuo no degenerado tal que $\overline{C}_x \cap A \neq \emptyset$, más aún, se cumple que $\overline{C}_x \cap A \subset Fr(A)$.

Notemos que $\overline{C}_x \not\subset A$, pues $x \in \overline{C}_x - A$; y que además $A \not\subset \overline{C}_x$, pues $int(A) \subset A - \overline{C}_x$; lo que es una contradicción ya que A es terminal. ■

Corolario 3.38 *Si X es un continuo, entonces $\mathcal{D}_X$ es un subconjunto de $M(X)$.*

Demostración. Sea A un elemento de $\mathcal{D}_X$, como A es terminal, por el Lema 3.37, tenemos que $A \in M(X)$. ■

Teorema 3.39 *Sea X un continuo tal que:*

1. *Para toda $A \in M(X)$, existe $C \in \mathcal{D}_X$ tal que $A \subset C$,*
2. *$\mathcal{D}_X$ es una descomposición continua de X.*

Entonces, $M(X)$ es arco conexo si y sólo si $\mathcal{D}_X$ es arco conexo.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}_X$ es arco conexo, demostremos que $M(X)$ es arco conexo.

Sean A_1 y A_2 dos elementos diferentes en $M(X)$, por la condición 2, existen E_1 y E_2 en $\mathcal{D}_X$ tales que $A_i \subset E_i$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $E_1 = E_2$.

Como $C(E_1)$ es arco conexo (Teorema 1.37), existe un encaje $\alpha : [0, 1] \mapsto C(E_1)$ tal que $\alpha(0) = A_1$ y $\alpha(1) = A_2$. Por el Lema 3.37, si $t \in [0, 1]$ tenemos que $int(\alpha(t)) \subset int(E_1) = \emptyset$, lo que demuestra que $\alpha([0, 1])$ es un arco de A_1 a A_2 contenido en $M(X)$.

Caso 2. E_1 y E_2 son ajenos.

Como $C(E_i)$ es arco conexo, para cada $i \in \{1, 2\}$, existen

(a) Una función continua $\alpha_1 : [0, \frac{1}{3}] \mapsto C(E_1)$, tal que $\alpha_1(0) = A_1$ y $\alpha_1(\frac{1}{3}) = E_1$; es decir $\alpha_1([0, \frac{1}{3}])$ es una trayectoria de A_1 a E_1.

(b) Una función continua $\alpha_2 : [\frac{2}{3}, 1] \mapsto C(E_2)$, tal que $\alpha_2(1) = E_2$ y $\alpha_2(\frac{2}{3}) = A_2$; es decir $\alpha_2([\frac{2}{3}, 1])$ es una trayectoria de E_2 a A_2.

Por el Lema 3.37, tenemos que para toda $i \in \{1, 2\}$ y toda $B \in C(E_i)$, se cumple que $int(B) \subset int(E_i) = \emptyset$. Así, $Im(\alpha_i) \subset M(X)$.

Como $\mathcal{D}_X$ es arco conexo, sea $\alpha_3 : [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \mapsto \mathcal{D}_X$ un encaje tal que $\alpha_3(\frac{1}{3}) = E_1$ y $\alpha(\frac{2}{3}) = E_2$, es decir $\alpha_3([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$ es un arco de E_1 a E_2; que por el Lema 3.37, tenemos que $\alpha_3([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \subset M(X)$.

Sea $\alpha : [0, 1] \mapsto M(X)$, definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}], \\ \alpha_2(t) & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \alpha_3(t) & \text{si } t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Sabemos que α está definida en tres subconjuntos cerrados de $[0, 1]$, en los cuales es continua, como se cumple que $\alpha_1(\frac{1}{3}) = E_1 = \alpha_3(\frac{1}{3})$ y $\alpha_2(\frac{2}{3}) = E_2 = \alpha_3(\frac{2}{3})$, concluimos que α está bien definida y es continua.

Como $\alpha(0) = \alpha_1(0) = A_1$ y $\alpha(1) = \alpha_2(1) = A_2$, concluimos que $\alpha([0,1])$ es una trayectoria de A_1 a A_2 en $M(X)$, por lo tanto existe un arco $\gamma \subset \alpha([0,1])$ que une a A_1 con A_2.

Lo anterior demuestra que $M(X)$ es arco conexo.

Ahora supongamos que $M(X)$ es arco conexo y demostremos que $\mathcal{D}_X$ es arco conexo.

Sean A y B dos elementos diferentes en $\mathcal{D}_X$. Por el Lema 3.37, tenemos que A y B son dos elementos en $M(X)$. Como $M(X)$ es arco conexo, existe un encaje $\alpha : [0,1] \mapsto M(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Para cada $t \in [0,1]$, por la propiedad 1, existe un único $D_t \in \mathcal{D}_X$ tal que $\alpha(t) \subset D_t$. Definimos

$$\gamma : [0,1] \mapsto \mathcal{D}_X; \text{ por } \gamma(t) = D_t.$$

Notemos que $\gamma(0) = A$ y $\gamma(1) = B$.

Afirmación. γ está bien definida y es continua.

Demostración. γ está bien definda ya que si $t \in [0,1]$, entonces $\gamma(t) = D_t \in \mathcal{D}_X$.

Para demostrar la continuidad de γ, sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1]$, tal que $\lim t_n = t$, para algún $t \in [0,1]$.

Como α es una función continua, tenemos que $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t)$. Sea $x \in \alpha(t)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in \alpha(t_n)$, tal que $\lim x_n = x$. Por la continuidad de la proyección natural $\pi : X \mapsto D_X$, tenemos que $\lim D_{t_n} = \lim \pi(x_n) = \pi(x) = D_t$. Esto demuestra la continuidad de γ y termina la demostración de esta afirmación.

Para concluir la demostración de esta implicación, notemos que $\gamma([0,1])$ es una trayectoria de A a B en $\mathcal{D}_X$. Por lo tanto existe un arco $\beta \subset \gamma([0,1])$ que une a A con B. $\blacksquare$

A continuación mostraremos que el Teorema 3.39 es una generalización del Teorema 3.25. Posteriormente estudiaremos dos ejemplos en los cuales se aprecia que las condiciones 1 y 2 del Teorema 3.39 no se pueden eliminar de las hipótesis.

Lema 3.40 *Si X es un continuo arco conexo, entonces $\mathcal{D}_X = F_1(X)$.*

Demostración. Demostremos ambas contenciones.

Supongamos que $A \in \mathcal{D}_X$ y que A tiene más de un punto. Sea $a \in A$.

Sean $x \in X - A$ y $\alpha : [0,1] \mapsto X$ un encaje tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = a$. Sea $t = \min\{s \in [0,1] : \alpha(s) \in A\}$. Como $x \in X - A$, tenemos que $t > 0$. Por la elección de t, obtenemos que $\alpha([0,t]) \cap A = \{\alpha(t)\}$.

Por lo tanto $\alpha([0,t])$ es un subcontinuo de X tal que $\alpha([0,t]) \cap A \neq \emptyset$, $\alpha([0,t]) \not\subset A$ y $A \not\subset \alpha([0,t])$, lo que demuestra que A no es terminal.

Por lo tanto $\mathcal{D}_X \subset F_1(X)$.

Para la otra contención, sea $x \in X$, notemos que $\{x\}$ es un subcontinuo terminal. Supongamos que existe un subcontinuo propio y no degenerado A en X tal que $x \in A$, procediendo como antes, concluimos que A no es terminal, con esto tenemos que $\{x\} \in \mathcal{D}_X$.

Por lo tanto $F_1(X) \subset \mathcal{D}_X$. ■

Corolario 3.41 *Si X es un continuo arco conexo, entonces $M(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Por el Lema 3.40, tenemos que $\mathcal{D}_X = F_1(X)$, al ser $\mathcal{D}_X$ arco conexo ya que es homeomorfo a X, por el Teorema 3.39, concluimos que $M(X)$ es arco conexo. ■

Afirmación 3.42 *Sea Y una compactación del rayo con residuo X. Si $h : [0,1) \mapsto Y$ es la función asociada a Y y $R = h([0,1))$, entonces*

(1) $\mathcal{D}_Y = \{X\} \cup F_1(R)$.

(2) $M(Y) = C(X) \cup F_1(Y)$.

(3) $\mathcal{D}_Y$ es una descomposición semicontinua superiormente.

(4) Para todo $A \in M(Y)$, existe $B \in \mathcal{D}_Y$ tal que $A \subset B$.

(5) $\mathcal{D}_Y$ no es una descomposición continua (cuando X no es degenerado).

Demostración. (1) Demostremos ambas contenciones.

Sea $A \in \mathcal{D}_Y$. Como Y, es una compactación del rayo con residuo X, por la Afirmación 3.11, tenemos que X es terminal, analicemos los siguientes casos.

Caso 1. $A \cap X = \emptyset$.

En este caso $A \subset R$, si A es no degenerado, existen $t, s \in [0,1)$ con $t < s$, tales que $A = h([s,t])$. Por lo tanto $B = X \cup h([t,1))$, es un subcontinuo no degenerado tal que $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Así, A no es terminal. Esta contradición muestra que $A \in F_1(R)$.

Caso 2. $A \cap X \neq \emptyset$ y $X \subset A$.

Como A es un subcontinuo propio de X, existe $t \in [0,1)$ tal que $t > 0$ y $A = X \cup h([t,1))$. Por lo tanto $B = h([0,t])$, es un subcontinuo no degenerado tal que $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Así, A no es terminal.

Caso 3. $A \cap X \neq \emptyset$ y $A \subset X$.

Si A está contenido propiamente en X, al ser X terminal en Y, tenemos que A no es maximal, lo que es una contradicción.

Con los Casos 1, 2 y 3, hemos mostrado que

$$\mathcal{D}_Y \subset \{X\} \cup F_1(R).$$

Verifiquemos la otra contención.

Como X es terminal, si A un subcontinuo de X tal que $X \subset A$ y $X \neq A$, por el Caso 2 de la contención anterior, tenemos que A no es terminal, esto demuestra que X es maximal, es decir, hemos demostrado que $X \in \mathcal{D}_Y$.

Por otro lado, si $B \in F_1(R)$, como B es terminal, para verificar que $B \in \mathcal{D}_Y$, sólo debemos ver que B es maximal.

Supongamos que A es un subcontinuo propio terminal tal que $B \subset A$. Analicemos las siguientes posibilidades.

Si $A \cap X = \emptyset$, el Caso 1 de la contención anterior, nos dice que A es degenerado, como $B \subset A$, concluimos que $A = B$.

Si $A \cap X \neq \emptyset$, en este caso tenemos que $X \subset A$, ya que X es terminal. En esta situación, el Caso 2 de la contención anterior nos dice que A no es terminal.

Con esto hemos demostrado que:

$$\{X\} \cup F_1(R) \subset \mathcal{D}_Y.$$

(2) Como Y es una compactación del rayo con residuo Y, por la Afirmación 3.12, tenemos que

$$M(Y) = C(X) \cup F_1(Y).$$

(3) Sean $D \in \mathcal{D}_Y$ y U un abierto en Y tales que $D \subset U$, vamos a demostrar que existe un abierto $\mathcal{D}_Y$-saturado V tal que $A \subset V \subset U$.

Caso 1. $D = X$.

Como la función h es continua, existe $t \in [0,1)$ tal que $V = X \cup \{h(s) : s \in (t,1)\}$ es un abierto de Y y que además $X \subset V \subset U$. Como $V = \{X\} \cup (\cup\{\{h(s))\} : s \in (t,1)\})$ es la unión de elementos de $\mathcal{D}_Y$, obtenemos que V es $\mathcal{D}_Y$-saturado.

Caso 2. $D = \{r\}$, para algún $r \in R$.

Por la continuidad de la función h, existe un abierto W en $[0,1)$ tal que $r \in W$. Entonces $V = \{h(x) : x \in W\}$ es un abierto en Y, con $r \in V \subset U$. Como $V = \cup\{\{h(s)\} : s \in W\}$ es la unión de elementos de $\mathcal{D}_Y$, obtenemos que V es $\mathcal{D}_Y$-saturado.

Por lo anterior y por la Poposición 3.7 de [10], concluimos que $\mathcal{D}_Y$ es una descomposición semicontinua superiormente.

(4) Sea $A \in M(X)$.

Por (2) tenemos dos posibilidades, la primera es que $A \in C(X)$, lo que implica que $A \subset X$, como $X \in \mathcal{D}_Y$, entonces A cumple la propiedad deseada. La otra posibilidad es que $A = \{r\}$ para algún $r \in R$, entonces por el Inciso (1), tenemos que $A \in \mathcal{D}_Y$.

(5) Sea $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en R tal que $\lim x_n = x$. Si $\pi : Y \mapsto \mathcal{D}_X$ es la proyección natural, por (1), tenemos que $\pi(x) = X$ y que $\pi(x_n) = \{x_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, como $\lim \{x_n\} = \{x\} \neq X$, tenemos que π no es continua.

Con esto concluimos que $\mathcal{D}_Y$ no es una descomposición continua. ∎

Afirmación 3.43 *Si Y es una compactación del rayo con residuo no degenerado X, entonces:*

(i) $\mathcal{D}_Y$ es un arco.

(ii) $M(Y)$ no es arco conexo.

Demostración. (i) Para demostrar este inciso, recordemos que $\mathcal{D}$ recibe la topología cociente. Como $\mathcal{D}_Y$ es una descomposición semicontinua superiormente, tenemos que $\mathcal{D}_Y$ es un continuo, más aún, obtenemos que $f : [0,1] \mapsto \mathcal{D}_Y$, definida por:

$$f(t) = \begin{cases} \{h(t)\}, & \text{si } t < 1, \\ X, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Es una función continua y biyectiva, lo que implica que $\mathcal{D}_Y$ es un arco.

(ii) Supongamos que $M(Y)$ es arco conexo. Sea $A \in C(Y)$ y supongamos que existe un encaje $\alpha : [0,1] \mapsto M(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = \{h(0)\}$. Sea $t_0 = \max\{t \in [0,1] : \alpha(t) \cap X \neq \emptyset\}$.

Si $t > t_0$, entonces $\alpha(t) \cap X = \emptyset$, como además $\alpha(t) \in M(Y)$, por (2) de la Afirmación 3.42, tenemos que $\alpha(t) \in F_1(Y)$.

Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(t_0, 1]$ tal que $\lim t_n = t_0$, como α es un homeomorfismo, tenemos que $\lim \alpha(t_n) = \alpha(t_0)$, lo que demuestra que $\alpha(t_0) \in F_1(X)$.

Con esto tenemos que $\alpha\ |_{[t_0,1]}$: $[t_{0,1}, 1] \mapsto F_1(Y)$ es un homeomorfismo que une a un elemento de $F_1(X)$ con $\{h(0)\} \in F_1(Y) - F_1(X)$, lo que es una contradicción ya que $F_1(Y)$ no es arco conexo y $F_1(Y) - F_1(X)$ es una componente arco conexa de $F_1(X)$.

Como esta contradicción nació de suponer que $M(Y)$ es arco conexo; hemos terminado la demostración de esta afirmación. ∎

Observación 3.44 *Si Y es una compactación del rayo con residuo no degenerado X, por (4) y (5) de la Afirmación 3.42, tenemos que:*

1. *Para toda $A \in M(X)$, existe $D \in \mathcal{D}_Y$ tal que $A \subset D$,*

2. *$\mathcal{D}_Y$ no es una descomposición continua.*

Pero, por la Afirmación 3.43, se cumple que $\mathcal{D}_Y$ es arco conexo y $M(X)$ no es arco conexo.

Esto muestra que la condición 2. del Teorema 3.39, no se puede eliminar de las hipótesis.

Ejemplo 3.45 *En $\mathbb{R}^2$ consideremos el continuo $\overline{sen(\frac{1}{x})}$, definido por:*

$$\overline{sen(\tfrac{1}{x})} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}.$$

Hacemos $L = \{0\} \times [-1, 1]$ y $R = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$.

Sea $h : [0, 1) \mapsto \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$ un encaje con las siguientes propiedades:

(a) $h(0) = (0, -2)$,

(b) $h(t) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, *para toda* $t > 0$,

(c) $Y = \overline{h([0, 1))}$ *es una compactación del rayo con residuo* $X = \overline{sen(\frac{1}{x})}$.

Con la notación de este ejemplo, consideremos el siguiente continuo en $\mathbb{R}^2$ (Figura 3.2).

$$Z = \overline{h([0, 1)} \cup (\{0\} \times [-2, -1]).$$

Notemos que $J = \{0\} \times [-2, -1]$ es un arco libre en Z tal que $\overline{h([0, 1))} \cap J = \{(-1, 0), (-2, 0)\}$.

Afirmación 3.46 *Si Z es el continuo definido en el Ejemplo 3.45, entonces:*

(1) $\mathcal{D}_Z = F_1(Z)$,

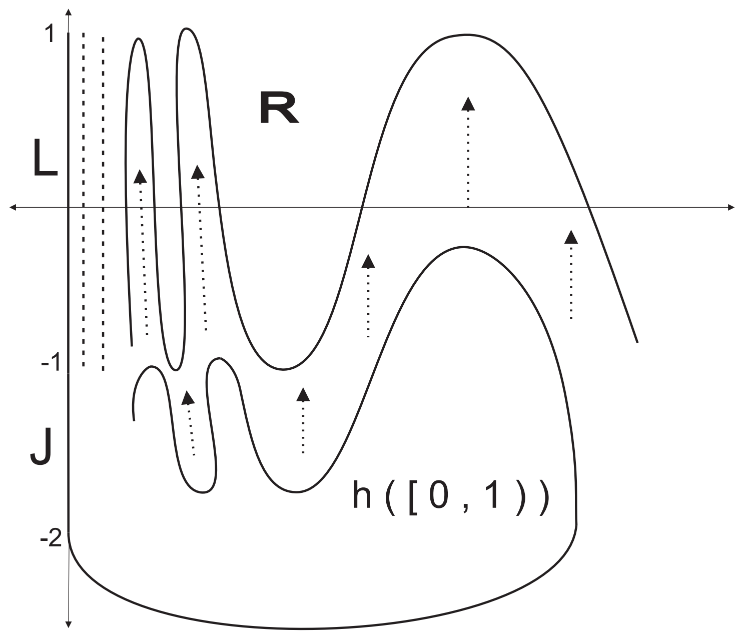

Figura 3.2: Una Compactación de $\mathbb{R}$ con Residuo $\overline{sen(\frac{1}{x})}$.

(2) $\mathcal{D}_Z$ es una descomposición continua,

(3) $M(Z) = C(\overline{sen(\frac{1}{x})}) \cup F_1(Z)$.

(4) Existe $A \in M(Z)$, para el cual no existe $D \in \mathcal{D}_Z$, tal que $A \subset D$.

Demostración. (1) Como todo elemento en $F_1(Z)$ es terminal, para demostrar este inciso, basta demostrar que si A es un subcontinuo propio terminal, entonces A es degenerado.

Supongamos que A es no degenerado.

Sea $A \in C(Z)$, a continuación analizaremos los diferentes tipos de subcontinuos en Z, y en cada caso describiremos un subcontinuo B_A que cumple que $A \cap B_A \neq \emptyset$, pero que $A \not\subset B_A$ y $B_A \not\subset A$.

Caso 1. A es un subcarco de la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x})$ o A es un subarco de $L \cup J \cup h([0, 1))$.

Como la gráfica de $sen(\frac{1}{x})$ es un rayo y lo mismo ocurre con $L \cup J \cup h([0,1))$, A puede ser extendido a un arco I en Z de tal manera que $A \subsetneq I$ e $I = A \cup B$, donde B es un arco y $A \cap B$ consta sólo de un extremo de A. Entonces $B_A = B$ cumple lo requerido.

Caso 2. A no está contenido en la gráfica de $sen(\frac{1}{x})$ ni en $L \cup J \cup h([0,1))$.

Sea T la gráfica de $sen(\frac{1}{x})$ y sea $S = L \cup J \cup h([0,1))$. Notemos que T y S son arco conexos. En este caso A intersecta tanto a T como a S. Como $A \neq Z$, podemos tomar un punto $p \in Z - A$. Si $p \in T$, como A es cerrado y $T \subset \overline{S}$, existe $q \in T$ tal que $q \notin A$. Si $p \in T$, hacemos $q = p$. De cualquier manera, tenemos un punto $q \in T - A$.

Sea $a \in A \cap T$ y sea α un arco en T que une a q con a. Podemos suponer que a es el primer punto de α en A, yendo de q hacia a. Entonces $B_A = \alpha$ satisface las propiedades requeridas.

Esto termina la demostración de este inciso.

(2) Como $\mathcal{D}_Z = F_1(Z)$ tenemos que $\pi : Z \mapsto F_1(Z)$ es un homeomorfismo, lo que demuestra que $\mathcal{D}_Z$ es continua.

(3) Como $int_{\overline{h([0,1))}}(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = \emptyset$, tenemos que $int_Z(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = \emptyset$, lo que demuestra que

$$C(\overline{sen\tfrac{1}{x}}) \cup F_1(Z) \subset M(Z).$$

Demostremos la otra contención. Sea $A \in M(Z)$ y supongamos que $A \not\subset \overline{sen(\frac{1}{x})}$, analicemos dos casos.

Caso 1. $A \cap \overline{sen(\frac{1}{x})} \neq \emptyset$.

En este caso existe una componente C de $A \cap J \cup h([0,1))$ que no es degenerada, y por lo tanto existe un arco no degenerado F tal que $F \subset C$, así $\emptyset \neq int(F) \subset A$, lo que no puede ser.

Caso 2. $A \cap \overline{sen(\frac{1}{x})} = \emptyset$.

En este caso $A \subset J \cup h([0,1))$, lo que implica que A es un subarco en $J \cup h([0,1))$ y si A es no degenerada, entonces $int(A) \neq \emptyset$, lo que no puede ser. Por lo tanto $A \in F_1(Z)$.

Con los Casos 1 y 2 hemos mostrado que

$$M(Z) \subset C(\overline{sen\tfrac{1}{x}}) \cup F_1(Z).$$

Con esto terminamos la demostración de este inciso.

(4) Sea $A \in C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ tal que A no es degenerado, como $A \in M(X)$ y $\mathcal{D}_Z = F_1(Z)$, no existe $B \in \mathcal{D}_Z$ tal que $A \subset B$. ■

Afirmación 3.47 *Si Z es el continuo definido en el Ejemplo 3.45, entonces:*

(i) D_Z no es arco conexo,

(ii) $M(Z)$ es arco conexo.

Demostración. (i) Por el Inciso (1) de la Afirmación 3.46, tenemos que $\mathcal{D}_Z = F_1(Z)$. Como $F_1(Z)$ no es arco conexo, terminamos la demostración de este inciso.

(ii) Vamos a verificar que todo elemento en $M(Z)$ se puede conectar por un arco con el elemento $\{(0,-1)\}$. Para esto recordemos que, por el Inciso (3) del la Afirmación 3.46, se cumple que

$$M(X) = C(\overline{sen(\tfrac{1}{x})}) \cup F_1(Z).$$

Caso 1. $A \in C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ y $A \neq \{(0,-1)\}$.

Como $C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ es arco conexo (Teorema 1.37), existe un arco $\alpha : [0,1] \mapsto C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = \{(0,-1)\}$.

Caso 2. $A \in F_1(Z)$ y $A \notin C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$.

En este caso existe $a \in J \cup h([0,1))$ tal que $A = \{a\}$. Como $J \cup h([0,1))$ es arco conexo, existe un encaje $\alpha_1 : [0,1] \mapsto J \cup h([0,1))$ tal que $\alpha_1(0) = a$ y $\alpha_1(1) = (0,-1)$. Por lo tanto $\alpha : [0,1] \mapsto F_1(Z)$, definida por $\alpha(t) = \{\alpha_1(t)\}$ es un encaje tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = \{(0,-1)\}$.

Con los Casos 1 y 2, terminamos la demostración de este inciso. ■

Observación 3.48 *Si Z es el continuo del Ejemplo 3.45, por la Afirmación 3.46, tenemos que:*

1. *$\mathcal{D}_Z$ es una descomposición continua,*
2. *Existe $A \in M(Z)$ para el cual no existe $B \in \mathcal{D}_Z$, tal que $A \subset B$.*

Además, por la Afirmación 3.47, se satisface que $M(Z)$ es arco conexo pero $\mathcal{D}_Z$ no lo es.

Este espacio muestra que la condición 1 *del Teorema 3.39, no se puede eliminar de las hipótesis.*

3.6. $M(X)$ es G_δ

En esta sección vamos a mostrar que el hiperespacio $M(X)$ es un conjunto G_δ en $C(X)$.

Definición 3.49 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, decimos que:*

1. *A es un subconjunto F_σ de X, si A es una unión numerable de subconjuntos cerrados de X.*
2. *A es un subconjunto G_δ de X, si A es una intersección numerable de subconjuntos abiertos de X.*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la definición anterior.

Teorema 3.50 *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X, entonces A es un subconjunto G_δ de X si y sólo si $X - A$ es un subconjunto F_σ de X.*

Teorema 3.51 *Si X es un continuo, entonces $M(X)$ es un subconjunto G_δ de $C(X)$.*

Demostración. Demostremos que $C(X) - M(X)$ es un subconjunto F_σ de $C(X)$.

Sea $\mathcal{W} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de abiertos no vacíos para X. Para toda $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{U}_n = \{A \in C(X) : \overline{U}_n \subset A\}.$$

Como $\overline{U}_n$ es un subconjunto cerrado, tenemos que $\mathcal{U}_n$ es un subconjunto cerrado en $C(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ ([5, Ejercicio 2.7, Inciso (b)]). Vamos a demostrar la siguiente igualdad:

$$C(X) - M(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n.$$

Verifiquemos ambas contenciones.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{U}_n$, entonces $\overline{U}_n \subset A$, lo que implica que $int(A) \neq \emptyset$. Así $A \in C(X) - M(X)$, de esta forma obtenemos que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n \subset C(X) - M(X).$$

Demostremos la otra contención. Si $A \in C(X)-M(X)$, entonces $int(A) \neq \emptyset$, como $\mathcal{W}$ es una base de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset A$, de donde $\overline{U}_n \subset A$. Esto demuestra que $A \in \mathcal{U}_n$ y tenemos que

$$C(X) - M(X) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n.$$

Lo que hemos demostrado es que $C(X) - M(X)$ es un subconjunto F_σ de $C(X)$, y por el Teorema 3.50, concluimos que $M(X)$ es un subconjunto G_δ. ■

En general no sabemos si el hiperespacio $M(X)$ es un subconjunto F_σ de $C(X)$; en este sentido sólo podemos decir lo siguiente.

Teorema 3.52 *Sea X un continuo tal que $C(X)-M(X)$ es denso en $C(X)$. Si $M(X)$ es un subconjunto F_σ, entonces:*

(a) $M(X)$ es de la primera categoría,

(b) $M(X)$ tiene interior vacío.

Demostración. (a) Como $M(X)$ es un subconjunto F_σ, existe $\mathcal{F}$ una familia numerable de subconjuntos cerrados tales que $M(X) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$.

Entonces $C(X) - M(X) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}(C(X) - F)$. Como $C(X) - M(X)$ es denso, tenemos que $C(X) - F$ es un conjunto abierto y denso, para toda $F \in \mathcal{F}$. Esto demuesta que F es un conjunto denso en ninguna parte, para toda $F \in \mathcal{F}$ y termina la demostración de este inciso.

(b) Como $C(X)-M(X)$ es denso, tenemos que $M(X)$ tiene interior vacío. ■

Lema 3.53 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $C(X)-M(X)$ es denso en $C(X)$.*

Demostración. Sean $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $a \in A$ y U un abierto conexo tal que $a \in \overline{U} \subset B_\varepsilon(a)$. Como $\overline{U} \in C(X)$, tenemos que $A \cup \overline{U} \in C(X)$.

Como $A \subset N(\varepsilon, A \cup \overline{U})$ y $A \cup \overline{U} \subset N(\varepsilon, A)$, por el Lema 1.32 tenemos que $H(A, A \cup \overline{U}) < \varepsilon$, lo que demuestra que $C(X) - M(X)$ es denso en $C(X)$. ■

Corolario 3.54 *Sea X un continuo localmente conexo. Si $M(X)$ es un conjunto F_σ, entonces:*

(a) $M(X)$ es de la primera categoría,

(b) $M(X)$ tiene interior vacío.

Demostración. Por el Lema 3.53, tenemos que $C(X) - M(X)$ es denso, así el resultado se sigue por el Teorema 3.52. ■

Capítulo 4

Contractibilidad y $M(X)$

4.1. Introducción

En este capítulo mostraremos los resultados que obtuvimos en relación a la contractibilidad del hiperespacio $M(X)$.

Es importante mencionar que en general tenemos la siguiente conjetura.

Conjetura 4.1 *Si X es un continuo contráctil, entonces $M(X)$ es contráctil.*

Desgraciadamente sólo logramos resolver este problema en la clase de los dendroides suaves.

En las siguientes dos secciones voy a enunciar y demostrar diversos resultados, que ya son conocidos, pero que es muy importante recordar ya que nos ayudarán a definir una buena contracción en $M(X)$.

4.2. Suavidad

Definición 4.2 *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que X es* ***suave por arcos en p****, si existe una función continua $\alpha : X \mapsto C(X)$ tal que:*

(a) $\alpha(p) = \{p\}$,

(b) $\alpha(x)$ *es un arco de p a x, para todo $x \in X - \{p\}$,*

(c) $\alpha(x) \subset \alpha(y)$ *para todo* $x \in \alpha(y)$.

Definición 4.3 *Sea* X *un continuo. Decimos que* X *es* ***suave por arcos****, si existe* $p \in X$ *tal que* X *es suave por arcos en* p.

Notación 4.4 *En adelante* μ *va a denotar una función de Whitney para* $C(X)$ *tal que* $\mu(X) = 1$.

Sea μ *un función de Whitney. Si* pq *es un arco de* p *a* q*, para toda* $t \leqslant \mu(pq)$*, vamos a denotar por* x_t *al único punto en* pq *tal que el subarco* px_t *contenido en* pq*, satisface que* $\mu(px_t) = t$.

Definición 4.5 *Sea* X *un continuo suave por arcos en* p*, con* α *la función de suavidad y* μ *una función de Whitney. Para* $(x,t) \in X \times [0,1]$ *definimos* $f : X \times [0,1] \mapsto X$ *por*

$$f((x,t)) = \begin{cases} x, & si\ \mu(\alpha(x)) \leqslant t, \\ x_t, & si\ \mu(\alpha(x)) \geqslant t. \end{cases}$$

Observación 4.6 *Si* X *es un continuo suave por arcos en* p*,* α *es la función de suavidad y* μ *una función de Whitney, entonces*

(a) *Como* $\{p\}$ *es el único subarco (en este caso degenerado) en* $\alpha(x)$ *que cumple que* $\mu(\{p\}) = 0$*, para toda* $x \in X$*, tenemos que* $f((x,0)) = p$ *para toda* $x \in X$.

   Es decir f *coincide con la función constante* p*, cuando se restringe al conjunto* $X \times \{0\}$.

(b) *Como* $\mu(\alpha(x)) \leq 1$*, para toda* $x \in X$*, tenemos que* $f((x,1)) = x$*, para toda* $x \in X$.

   Es decir f *coincide con la función identidad en* X*, cuando se restringe al conjunto* $X \times \{1\}$.

Teorema 4.7 *Si* X *es un continuo suave por arcos en* p*,* α *es la función de suavidad y* μ *es una función de Whitney, entonces la función* $f : X \times [0,1] \mapsto X$ *está bien definida y es continua.*

Demostración. Para verificar que f está bien definida, sea $(x,t) \in X \times [0,1]$ y supongamos que $\mu(\alpha(x)) = t$. Notemos que si $x_t \neq x$, entonces $\alpha(x_t) \subsetneq \alpha(x)$, lo que implica que $\mu(\alpha(x_t)) < \mu(\alpha(x)) = t$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $x = x_t$, lo que demuestra que f está bien definida.

Demostremos que f es continua. Sea $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \times [0,1]$ tal que $\lim(x_n,t_n) = (x,t)$ para algún $(x,t) \in X \times [0,1]$. Notemos que se sumplen las siguientes condiciones.

Como $\lim(x_n,t_n) = (x,t)$, entonces $\lim x_n = x$ y $\lim t_n = t$.

Como α es continua y $\lim x_n = x$, tenemos que $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$.

Como μ es continua, tenemos que $\lim \mu(\alpha(x_n)) = \mu(\alpha(x))$.

Consideremos tres casos.

Caso 1. $\mu(\alpha(x)) < t$.

En este caso $f((x,t)) = x$. Como μ es continua y $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\alpha(x_n)) < \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2}$, para toda $n \geqslant N$. Como además $\lim t_n = t$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_n > \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2}$ para toda $n \geqslant N$.

Por lo tanto, para toda $n \geqslant N$, se cumple que $\mu(\alpha(x_n)) < \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2} < t_n$. Lo que implica que $f((x_n,t_n)) = x_n$, y obtenemos que $\lim f((x_n,t_n)) = \lim x_n = x = f((x,t))$.

Caso 2. $\mu(\alpha(x)) > t$.

En este caso $f_t(x) = x_t$. Como μ es continua y $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\alpha(x_n)) > \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2}$, para toda $n \geqslant N$. Como además $\lim t_n = t$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_n < \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2}$ para toda $n \geqslant N$.

Entonces para toda $n \geqslant N$, se cumple que $\mu(\alpha(x_n)) > \frac{\mu(\alpha(x))+t}{2} > t_n$. Lo que implica que $f((x_n,t_n)) = (x_n)_{t_n}$, donde $(x_n)_{t_n}$ es el único punto en $\alpha(x_n)$ tal que $\mu(\alpha((x_n)_{t_n})) = t_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim\,(x_n)_{t_n} = y \in \alpha(x)$.

Por la continuidad de α y μ, tenemos que $t = \lim t_n = \lim \mu(\alpha((x)_{t_n})) = \mu(\alpha(y))$, pero x_t es el único punto en $\alpha(x)$ tal que $\mu(\alpha(x_t)) = t$, lo que implica que $y = x_t$ y demuestra que $\lim f((x_n, t_n)) = f((x, t))$.

Caso 3. $\mu(\alpha(x)) = t$.

En este caso $f_t(x) = x = x_t$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\alpha(x_n)) \leqslant t_n$ o $\mu(\alpha(x_n)) > t_n$, es suficiente con que consideremos dos subcasos.

Caso 3.1. $\mu(\alpha(x_n)) \leqslant t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este subcaso tenemos que $f((x_n, t_n)) = x_n$. Lo que implica $\lim f((x_n, t_n)) = \lim x_n = x = f((x, t))$.

Caso 3.2. $\mu(\alpha(x_n)) > t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este subcaso $f((x_n, t_n)) = (x_n)_{t_n}$, donde $(x_n)_{t_n}$ es el único punto en $\alpha(x_n)$ tal que $\mu(\alpha((x_n)_{t_n})) = t_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim (x_n)_{t_n} = y$ para algún $y \in \alpha(x)$.

Por la continuidad de α y μ, tenemos que $\mu(\alpha(y)) = \lim \mu(\alpha((x_n)_{t_n})) = \lim t_n = t$, pero x_t es el único punto en $\alpha(x)$ tal que $\mu(\alpha(x_t)) = t$, lo que implica que $y = x_t$ y demuestra que $\lim f((x_n, t_n)) = f((x, t))$.

Con esto finalizamos la demostración de la continuidad de f. ■

Corolario 4.8 *Si X es un continuo suave por arcos, entonces X es contráctil.*

Demostración. Sean $p \in X$ el punto de suavidad de X, α la función de suavidad y μ una función de Whitney. Por el Teorema 4.7 tenemos que la función $f : X \times [0,1] \mapsto X$ de la Definición 4.5 está bien definida y es continua.

Notemos que, por la Observación 4.6, se cumple que:

1. $f((x, 0)) = p$, para toda $x \in X$,
2. $f((x, 1)) = x$, para toda $x \in X$.

Lo que demuestra que f es una contracción de X al punto p. ■

Definición 4.9 *Sean X un continuo suave por arcos en p, α su función de suavidad y μ una función de Whitney. Sea $F : C(X)\times[0,1] \mapsto C(X)$ definida por*

$$F((A,t)) = f(A \times \{t\}).$$

Teorema 4.10 *Sean X un continuo suave por arcos en p, α su función de suavidad y μ una función de Whitney. Si $F : C(X) \times [0,1] \mapsto C(X)$ es la función de la Definición 4.9, entonces F está bien definida y es continua.*

Además se cumple que:

1. *$F((A,0)) = \{p\}$ para todo $A \in C(X)$.*
2. *$F((A,1)) = A$ para todo $A \in C(X)$.*

Demostración. Verifiquemos que F está bien definida.

Sea $(A,t) \in C(X) \times [0,1]$. Por el lema 4.7, tenemos que la función $f : X \times [0,1] \mapsto X$ es continua. Como $A \times \{t\}$ es un subconjunto cerrado y conexo de $X \times [0,1]$, obtenemos que $f(A \times \{t\})$ es un subcontinuo de X. Lo que demuestra que F está bien definida.

Verifiquemos que F es continua.

Sea $\{(A_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)\times[0,1]$ tal que $\lim(A_n,t_n) = (A,t)$ para algún $(A,t) \in C(X) \times [0,1]$.

Notemos que $\lim A_n = A$ y $\lim t_n = t$.

Como $F((A_n,t_n)) \in C(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim F((A_n,t_n)) = B$ para algún $B \in C(X)$. Demostremos que $B = F((A,t)) = f(A \times \{t\})$, para esto mostraremos ambas contenciones.

Sea $x \in f(A \times \{t\})$. Entonces existe $a \in A$ tal que $f((a,t)) = x$, como $\lim A_n = A$, por el Lema 1.34, tenemos que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $\lim a_n = a$.

Así tenemos que $\lim(a_n,t_n) = (a,t)$. Por la continuidad de la función f, concluimos que $\lim f((a_n,t_n)) = f((a,t))$. Notemos que $(a_n,t_n) \in A_n \times \{t_n\}$

para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f((a_n, t_n)) \in f(A_n \times \{t_n\}) = F((A_n, t_n))$. Por lo tanto, por el Lema 1.34, concluimos que $x = f((a, t)) \in B$.

Con esto hemos demostrado que $F((A, t)) \subset B$. Demostremos la otra contención.

Sea $x \in B$. Por el Lema 1.34 existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \in F((A_n, t_n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $\lim x_n = x$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A_n$ tal que $f((a_n, t_n)) = x_n$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lim a_n = a$, entonces $\lim (a_n, t_n) = (a, t)$. Por la continuidad de f y el Lema 1.34, tenemos que $x = \lim x_n = \lim f((a_n, t_n)) = f((a, t)) \in f(A \times \{t\}) \in F((A, t))$.

Con esto hemos probado que $B \subset F((A, t))$.

Por lo tanto $F((A, t)) = B = \lim F((A_n, t_n))$ y concluimos la demostración de la continuidad de F.

Por la Observación 4.6, tenemos que f coincide con la función constante p cuando la restringimos a $X \times \{0\}$ y coincide con la función identidad cuando la restringimos a $X \times \{1\}$. Por lo tanto se cumple que:

1. $F((A, 0)) = \{p\}$ para todo $A \in C(X)$.
2. $F((A, 1)) = A$ para todo $A \in C(X)$.

Con esto finalizamos la demostración de este teorema. ■

Corolario 4.11 *Si X es un continuo suave por arcos, entonces $C(X)$ es contráctil.*

Demostración. Sean p el punto de suavidad, α la función de suavidad y μ una función de Whitney. Por el Teorema 4.10 tenemos que la función $F : C(X) \times [0, 1] \mapsto C(X)$ definida por $F((A, t)) = f(A \times \{t\})$, es una función continua. Adicionalmente se cumple que:

1. $F((A, 0)) = \{p\}$ para todo $A \in C(X)$.
2. $F((A, 1)) = A$ para todo $A \in C(X)$.

Lo que demuestra que F es una contracción de $C(X)$ al punto $\{p\}$. ■

4.3. Selecciones

Definición 4.12 *Sean X un continuo y Γ una familia de subconjuntos de 2^X. Una **selección** para Γ es una función continua $s : \Gamma \mapsto X$, tal que $s(A) \in A$ para todo $A \in \Gamma$.*

*Decimos que X **admite selecciones**, si existe una selección para $C(X)$.*

Lema 4.13 *Si X es un dendroide suave por arcos en p y α es la función de suavidad, entonces para toda $A \in C(X)$ existe un único $a_A \in A$ tal que $\alpha(a_A) \cap A = \{a_A\}$.*

Demostración. Sean $A \in C(X)$ y $x \in A$. Como $\alpha(x)$ es un arco que une a p con $x \in A$, existe un primer punto en $\alpha(x)$ yendo de p a x, al que llamaremos a_A. Ya que $\alpha(a_A)$ es el subarco de $\alpha(x)$, que une a p con a_A, tenemos que $\alpha(a_A) \cap A = \{a_A\}$.

Verifiquemos que a_A es único. Sea $a \in A$ tal que $\alpha(a) \cap A = \{a\}$. Por ser A arco conexo, existe un arco $a_A a$ contenido en A que une a a_A con a.

Como $\alpha(a_A) \cap a_A a = \{a_A\}$, tenemos que $\alpha(a_A) \cup a_A a$ es un arco de p al punto a, al ser X únicamente arco conexo, concluimos que $\alpha(a_A) \cup a_A a = \alpha(a)$.

Por lo tanto $\{a\} = \alpha(a) \cap A = (\alpha(a_A) \cup a_A a) \cap A = a_A a$, lo que demuestra que $\{a\} = a_A a$. De donde concluimos que $a = a_A$. ■

Teorema 4.14 *Si X es un dendroide suave por arcos en p y α es la función de suavidad, entonces la función $s : C(X) \mapsto X$, definida por $s(A) = a_A$, está bien definida y es continua.*

Demostración. Por el Lema 4.13 tenemos que s está bien definida.

Demostremos que s es continua. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$, para algún $A \in C(X)$.

Para simplificar la notación de esta demostración, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotemos por a_n al punto $a_{A_n} = s(A_n)$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim a_n = a$, para algún $a \in X$, como $\lim A_n = A$, por el Lema 1.34, tenemos que $a \in A$.

Como α es una función continua, tenemos que $\lim \alpha(a_n) = \alpha(a)$. Como $a \in \alpha(a) \cap A$, lo único que tenemos que verificar es que $\alpha(a) \cap A = \{a\}$.

Supongamos que existe $x \in \alpha(a) \cap A$ tal que $x \neq a$. Entonces $\alpha(x) \subsetneq \alpha(a)$. Como $x \in A$, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A_n$, tal que $\lim x_n = x$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, dado que $\alpha(x_n) \cap A_n \neq \emptyset$, existe $y_n \in \alpha(x_n)$ tal que $\{y_n\} = \alpha(y_n) \cap \alpha(A)$. Pero a_n es el único punto que cumple esta condición, así tenemos que $a_n = y_n \in \alpha(x_n)$. Por lo tanto, se cumple que $\alpha(a_n) \subset \alpha(x_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\alpha(a) = \lim \alpha(a_n) \subset \lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$, lo que es una contradicción.

Así concluimos que $\{a\} = \lim s(A_n) = s(A)$, y obtenemos que s es una función continua. ■

Corolario 4.15 *Si X es un dendroide suave por arcos, entonces X admite selecciones.*

Demostración. Sea p el punto de suavidad de X, por el Teorema 4.14, tenemos que la función $s : C(X) \mapsto X$, definida por $s(A) = x_A$, para todo $A \in C(X)$, es una función continua. Como $x_A \in A$, para todo $A \in C(X)$, tenemos que s es una selección para $C(X)$. ■

Notación 4.16 *Sean X un dendroide suave por arcos en p y α su función de suavidad. A la selección $s : C(X) \mapsto X$, que a un elemento $A \in C(X)$ le asocia el único elemento a en A tal que $\alpha(a_A) \cap A = \{a_A\}$, la vamos a llamar la selección natural de X.*

Teorema 4.17 *Sea X un dendroide suave por arcos en p y α su función de suavidad. Si s es la selección natural para X y $A \in C(X)$, entonces A es suave por arcos en $s(A)$*

Demostración. Sea $A \in C(X)$, consideremos la función

$$\alpha_A : A \mapsto C(A).$$

Definida por

$$\alpha_A(x) = \alpha(x) \cap A.$$

Como X es hereditariamente unicoherente y $\alpha(x), A \in C(X)$, tenemos que $\alpha_A(x) = \alpha(x) \cap A \in C(A)$, lo que demuestra que α_A está bien definida.

Demostremos que α_A es una función continua.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A, tal que $\lim x_n = a$, para algún $a \in A$.

Como α es continua y X es hereditariamente unicoherente, tenemos que $\lim \alpha(x_n) = \alpha(a)$, $\alpha(a) \cap A \in C(A)$ y $\alpha(x_n) \cap A \in C(A)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lim \alpha_A(x_n) = B$, para algún $B \in C(X)$. Demostremos que $B = \alpha(a) \cap A$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, como $x_n \in A$, tenemos que $\alpha(x_n) \cap A \neq \emptyset$. Como antes, existe $y \in \alpha(x_n)$ tal que $\alpha(y) \cap A = \{y\}$, pero $s(A)$ es el único con esta propiedad, lo que implica que $s(A) = y \in \alpha(x_n)$

Por lo tanto $s(A), x_n \in \alpha(x_n) \cap A$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $s(A), a \in B$. Por ser X hereditariamente arco conexo, existe un arco $s(A)a$ que une al punto $s(A)$ con a contenido en B. Como X es únicamente arco conexo, se tiene que $\alpha(a) = \alpha(s(A)) \cup s(A)a$. Como todo punto $x \in \alpha(s(A)) - \{s(A)\}$ cumple que $x \notin A$, concluimos que $\alpha(a) \cap A = s(A)a \subset B$.

Demostremos que $B \subset \alpha(a) \cap A$.

Si $y \in B$, por el Lema 1.34, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in \alpha(x_n) \cap A$, tal que $\lim y_n = y$. Así $y \in \alpha(a) \cap A$, lo que demuestra que $B \subset \alpha(a) \cap A$.

Por lo tanto $\lim \alpha_A(x_n) = \alpha_A(a)$ y obtenemos que α_A es continua.

Verifiquemos que α_A satisface las tres condiciones de la Definición 4.2.

(a) Por definición $s(A)$ es el único punto en A tal que $\alpha(s(A)) \cap A = \{s(A)\}$, lo que implica que $\alpha_A(s(A)) = \alpha(s(A)) \cap A = \{s(A)\}$.

(b) Sea $x \in A - \{s(A)\}$.

Sea $\gamma : [0,1] \mapsto \alpha(x)$ un homeomorfismo tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = x$ y sea $t_0 = \min\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in A\}$. Como $\gamma([0,t_0]) \cap A = \{\gamma(t_0)\}$, por el Lema 4.13, tenemos que $\gamma(t_0) = s(A)$.

Por ser X hereditariamente unicoherente, tenemos que $\alpha_A(x) = \gamma([0,1]) \cap A = \gamma([t_0, 1])$. Concluimos que $\alpha_A(x)$ es el arco que une a $s(A)$ con el punto x.

(c) Sean $y \in A$ y $x \in \alpha_A(y)$, entonces $x \in \alpha(y) \cap A$, lo que implica que $\alpha(x) \subset \alpha(y)$, por lo tanto $\alpha_A(x) = \alpha(x) \cap A \subset \alpha(y) \cap A = \alpha_A(y)$.

Con esto concluimos que A es suave en $s(A)$, donde α_A es la función de suavidad. ■

Lema 4.18 *Sea X un dendroide suave por arcos en p tal que:*

1. *α es la función de suavidad de X,*
2. *s es la selección natural para X,*
3. *α_A es la función inducida por α, que hace que A sea suave en $s(A)$, para todo $A \in C(X)$.*

Sean $A \in C(X)$ y $a \in A$ tales que existen una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ y una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con las siguientes propiedades:

(i) $a_n \in A_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim A_n = A$ *y* $\lim a_n = a$.

Entonces $\lim \alpha_{A_n}(a_n) = \alpha_A(a)$.

Demostración. Recordemos que por el Teorema 4.17, si $Y \in C(X)$, entonces la función de suavidad para Y, $\alpha_Y : Y \mapsto C(Y)$, en $s(Y)$, está definida por

$$\alpha_Y(y) = \alpha(y) \cap Y.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lim \alpha_{A_n}(a_n) = B$, para algún $B \in C(X)$.

Como X es únicamente arco conexo, tenemos que $\alpha(a) = \alpha(s(A)) \cup \alpha_A(a)$ y también $\alpha(a_n) = \alpha(s(A_n)) \cup \alpha_{A_n}(a_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por ser α continua, tenemos que $\lim \alpha(a_n) = \alpha(a)$.

Como $\alpha_{A_n}(a_n) \subset \alpha(a_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 1.35 obtenemos que $B \subset \alpha(a)$. Más aún, como $s(A_n), a_n \in \alpha_{A_n}(a_n) = \alpha(a_n) \cap A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $s(A), a \in B$.

Por ser B arco conexo, existe un arco $s(A)a$ contenido en B que une al punto $s(A)$ con a. Como X es únicamente arco conexo, tenemos que $\alpha(a) = \alpha(s(A)) \cup s(A)a$. Así obtenemos que $\alpha_A(a) = \alpha(a) \cap B = s(A)a \subset B$.

Demostremos que $B \subset \alpha_A(a)$.

Si $x \in B$, por el Lema 1.34 existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \in \alpha_{A_n}(a_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, con la propiedad de que $\lim x_n = x$. Como $\alpha_{A_n}(a_n) = \alpha(a_n) \cap A_n$, tenemos que $x = \lim x_n \in \alpha(a) \cap A \in \alpha_A(a)$. Por lo tanto $B \subset \alpha_A(a)$.

Así concluimos que $\lim \alpha_{A_n}(a_n) = \alpha_A(a)$. ■

4.4. La Contracción de $M(X)$

Sean X un dendroide suave por arcos en p, α la función de suavidad, s la selección natural de X y μ una función de Whitney.

Sea $Y \in C(X)$.

Por el Teorema 4.17, Y es suave en $s(Y)$ y la función de suavidad $\alpha_Y : Y \mapsto C(Y)$ está definida por $\alpha_Y(x) = \alpha(x) \cap Y$.

Por el Teorema 4.6, tenemos que la función $f_Y : Y \times [0,1] \mapsto Y$ definida por

$$f_Y((x,t)) = \begin{cases} x, & \text{si } \mu(\alpha_Y(x)) \leqslant t, \\ x_t, & \text{si } \mu(\alpha_Y(x)) \geqslant t. \end{cases}$$

Está bien definida y es continua.

Por el Teorema 4.10, tenemos que la función $F_Y : C(Y) \times [0,1] \mapsto C(Y)$ definida por $F_Y((A,t)) = f_Y(A \times \{t\})$, está bien definida y es continua; y que además, al ser $s(Y)$ el punto de suavidad de Y, se cumple que:

1. $F_Y((A,0)) = \{s(Y)\}$ para todo $A \in C(X)$.

2. $F_Y((A,1)) = A$ para todo $A \in C(X)$.

Con todo lo anterior, podemos construir la función

$$E : C(X) \times [0,1] \mapsto C(X).$$

Definida por

$$E((Y,t)) = F_Y((Y,t)) = f_Y(Y \times \{t\}).$$

Observación 4.19 *Si $Y \in C(X)$, entonces $E((Y,t)) \subset Y$ para todo $t \in [0,1]$.*

Teorema 4.20 *La función $E : C(X) \times [0,1] \mapsto C(X)$, está bien definida, es continua y además se cumple que:*

1. *$E((Y,0)) = \{s(Y)\}$ para toda $Y \in C(X)$.*
2. *$E((Y,1)) = Y$ para toda $Y \in C(X)$.*

Demostración. Verifiquemos que E está bien definida.

Sea $(Y,t) \in C(X) \times [0,1]$. Por el Teorema 4.10, tenemos que $E((Y,t)) = F_Y((Y,t)) \in C(Y) \subset C(X)$. Por lo tanto E está bien definida.

Verifiquemos que E es una función continua.

Sea $\{(Y_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $C(X)\times[0,1]$ tal que $\lim (Y_n,t_n) = (Y,t)$ para algún $(Y,t) \in C(X)\times[0,1]$. Notemos que se cumple que $\lim Y_n = Y$ y $\lim t_n = t$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lim F_{Y_n}((Y_n,t_n)) = Z$, para algún $Z \in C(X)$. Demostremos que $Z = F_Y((Y,t))$, para esto demostremos ambas contenciones.

Notemos que $F_Y((Y,t)) = f_Y(Y \times \{t\})$ y $F_{Y_n}((Y_n,t_n)) = f_{Y_n}(Y_n \times \{t_n\})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostremos que $Z \subset f_Y(Y \times \{t\})$.

Por la Observación 4.19, tenemos que $f_Y(Y\times\{t\})\subset Y$ y además $f_{Y_n}(Y_n\times\{t_n\})\subset Y_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$, lo que implica que $Z=\lim f_{Y_n}(Y_n\times\{t_n\})\subset\lim Y_n\subset Y$.

Sea $z\in Z$. Entonces para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $z_n\in f_{Y_n}(Y_n\times\{t_n\})$ tal que $\lim z_n=z$. Así, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $y_n\in\mathbb{N}$ tal que $f_{Y_n}((y_n,t_n))=z_n$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lim y_n=y$ para algún $y\in Y$. Por el Lema 4.18 tenemos que $\lim\alpha_{Y_n}(y_n)=\alpha_Y(y)$

Por definición de la función f_{Y_n}, tenemos que $f_{Y_n}((y_n,t_n))\in\alpha_{Y_n}(y_n)$, para toda $n\in\mathbb{N}$; así concluimos que $z=\lim f_{Y_n}((y_n,t_n))\in\alpha_Y(y)$.

Como para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mu(\alpha_{Y_n}((y_n)))\leqslant t_n$ o $\mu(\alpha_{Y_n}((y_n)))>t_n$, es suficiente con que consideremos dos casos.

Caso 1. $\mu(\alpha_{Y_n}(y_n))\leq t_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

En este caso tenemos que $f_{Y_n}((y_n,t_n))=y_n$, para toda $n\in\mathbb{N}$.

Por la cotinuidad de μ, tenemos que $\mu(\alpha_Y(y))\leq t$, lo que implica que $f_Y((y,t))=y$.

Como $z=\lim f_{Y_n}((y_n,t_n))=\lim y_n=y$ y $y=f_Y((y,t))\in f_Y(Y\times\{t\})$, obtenemos que $z\in f_Y(Y\times\{t\})$.

Caso 2. $\mu(\alpha_{Y_n}(y_n))>t_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

En este caso $f_{Y_n}((y_n,t_n))=(y_n)_{t_n}$, donde recordemos que $(y_n)_{t_n}$ es el único punto en $\alpha_{Y_n}(y_n)$ que cumple que $\mu(\alpha_{Y_n}((y_n)_{t_n}))=t_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por la continuidad de μ, tenemos que $\mu(\alpha_Y(y))>t$, lo que implica que $f_Y((y,t))=y_t$.

Como $\lim y_{n_{t_n}}=\lim f_{Y_n}((y_n,t_n))=z$, por el Lema 4.18, tenemos que $\lim\alpha_{Y_n}(y_{n_{t_n}})=\alpha_Y(z)$ y por la continuidad de μ, obtenemos que $t=\lim t_n=\lim\mu(\alpha_{Y_n}(y_{n_{t_n}}))=\mu(\alpha_Y(z))$.

Pero $z\in\alpha_Y(y)$ y y_t es el único punto en $\alpha_Y(y)$ con esta propiedad, por lo tanto $z=f_t^Y(y)\in f_t^Y(Z)$.

Por los Casos 1 y 2 obtenemos que $Z \subset f_Y(Y \times \{t\})$.

Demostremos que $f_Y(Y \times \{t\}) \subset Z$.

Sea $x \in f_Y(Y \times \{t\})$. Entonces existe $y \in Y$ tal que $f_Y((y,t)) = x$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n \in Y_n$ tal que $\lim y_n = y$. Así $\lim(y_n, t_n) = (y,t)$.

Por el Lema 4.18, tenemos que $\lim \alpha_{Y_n}(y_n) = \alpha_Y(y)$.

Como $f_{Y_n}((y_n,t_n)) \in f_{Y_n}(Y_n \times \{t_n\})$ para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim f_{Y_n}((y_n,t_n)) = z$ para algún $z \in Z$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\alpha_{Y_n}(y_n)) \leqslant t_n$ o $\mu(\alpha_{Y_n}((y_n))) > t_n$, es suficiente con que consideremos dos casos.

Caso 1. $\mu(\alpha_{Y_n}(y_n)) \leq t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso tenemos que $f_Y((y_n,t_n)) = y_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la cotinuidad de μ, tenemos que $\mu(\alpha_Y(y)) \leq t$, lo que implica que $f_Y((y,t)) = y$.

Como $z = \lim f_{Y_n}((y_n,t_n)) = \lim y_n = y$ y $x = f_Y((y,t)) = z$, obtenemos que $x \in Z$.

Caso 2. $\mu(\alpha_{Y_n}(y_n)) > t$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

En este caso tenemos que $f_{Y_n}((y_n,t_n)) = (y_n)_{t_n}$, donde $(y_n)_{t_n}$ es el único punto en $\alpha_{Y_n}(y_n)$ que satisface que $\mu(\alpha_{Y_n}((y_n)_{t_n})) = t_n$.

Por la continuidad de μ, tenemos que $\mu(\alpha_Y(y)) > t$, lo que implica que $f_Y((y,t)) = y_t$.

Como $\lim\,(y_n)_{t_n} = \lim f^{Y_n}((y_n,t_n)) = z$, por el Lema 4.18, tenemos que $t = \lim t_n = \mu(\alpha_{Y_n}((y_n)_{t_n})) = \mu(\alpha_Y(z))$.

Como $z \in \alpha_Y(y)$ y y_t es el único punto en $\alpha_Y(y)$ con esta propiedad, obtenemos que $z = y_t$. Pero $y_t = f_Y((y,t)) = x$, por lo tanto $x \in Z$.

Con esto hemos probado que $f_Y(Y \times \{t\}) \subset Z$.

Por lo tanto podemos concluir que $\lim E((A_n,t_n)) = \lim f_{Y_n}(Y_n \times \{t_n\}) = f_Y(Y \times \{t\}) = E((A,t))$ y obtenemos que E es una función continua.

Ahora demostremos que se cumplen las condiciones 1 y 2 del enunciado.

Verifiquemos 1.

Sea $Y \in C(Y)$. Por la propiedad 1 del Teorema 4.10, tenemos que la función $F_Y : C(Y) \times \{0\} \mapsto Y$ se comporta como una función constante, donde dicha constante es el punto de suavidad por el cual se definió. De esta forma tenemos que $F_Y((Y,0)) = s(Y)$, para todo $Y \in C(Y)$, lo que demuestra que $E((Y,0)) = \{s(Y)\}$.

Verifiquemos 2.

Sea $Y \in C(Y)$. Por la propiedad 2 del Teorema 4.10, tenemos que la función $F_Y : C(Y) \times \{1\} \mapsto Y$ se comporta como la función identidad. De esta forma tenemos que $F_Y((Y,1)) = Y$, para todo $Y \in C(X)$, lo que demuestra que $E((Y,0)) = Y$.

Con esto terminamos la demostración de este teorema. ■

Lema 4.21 *La función $G = E\mid_{M(X)}: M(X) \times [0,1] \mapsto M(X)$ está bien definida y es continua. Además se cumple que:*

(i) $G((A,0)) = \{s(A)\}$ *para toda* $A \in M(X)$,

(ii) $G((A,1)) = A$ *para toda* $A \in M(X)$.

Demostración. Verifiquemos que G está bien definida.

Sea $(A,t) \in M(X) \times [0,1]$, como $H((A,t)) = E((A,t))$, tenemos que $G((A,t)) \in C(X)$. Por el Lema 4.19, tenemos que $E((A,t)) \subset A$, como $int(A) = \emptyset$, concluimos que $G((A,t)) \in M(X)$. Por lo tanto G está bien definida.

Por el Teorema 4.20, tenemos que G es continua, ya que es la restricción de una función continua; por último notemos que las condiciones (i) y (ii) se satisfacen por la Propiedades 1 y 2 del Teorema 4.20. ■

Teorema 4.22 *Si X es un dendroide suave por arcos, entonces $M(X)$ es contráctil.*

Demostración. Sea p el punto de suavidad de X, por el Corolario 4.11, existe una función continua $G_1 : X \times [0,1] \mapsto X$ tal que:

(1) $G_1((x,1)) = x$ para toda $x \in X$,

(2) $G_1((x,0)) = p$ para toda $x \in X$.

De donde la función $G_2 : F_1(X) \times [0,1] \mapsto F_1(X)$, definida por $G_2((\{x\},t)) = \{G_1((x,t))\}$, es una función continua tal que:

(1) $G_2((\{x\},1)) = \{x\}$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$,

(2) $G_2((\{x\},0)) = \{p\}$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$.

Si s es la selección natural, por el Lema 4.21, existe una función continua $G : M(X) \times [0,1] \mapsto M(X)$, tal que:

(i) $G((A,0)) = \{s(A)\}$ para toda $A \in M(X)$,

(ii) $G((A,1)) = A$ para toda $A \in M(X)$.

Definimos $K : M(X) \times [0,1] \mapsto M(X)$ por

$$K((A,t)) = \begin{cases} G_2((G((A,0)),2t)), & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ G((A,2t-1)), & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Verifiquemos que K está bien definida.

Si $A \in M(X)$, con la primera definición, tenemos que

$K(A,\frac{1}{2}) = G_2(G((A,0)),2(\frac{1}{2})) = G_2(\{s(A)\},1) = \{s(A)\}$.

Con la segunda definición, tenemos que

$K(A,\frac{1}{2}) = G(A,2(\frac{1}{2})-1)) = G(A,0) = \{s(A)\}$.

Lo que demuestra que K, está bien definida.

Como K está definida en dos cerrados, a saber $M(X) \times [0,\frac{1}{2}]$ y $M(X) \times [\frac{1}{2},1]$, en los cuales es continua; concluimos que K es una función continua.

Por último notemos que:

1. $K((A,0)) = G_2(G(A,0), 2(0))) = G_2((\{s(A)\}, 0)) = \{p\}$.
2. $K((A,1)) = G((A, 2(1) - 1)) = G((A,1)) = A$.

Lo que demuestra que K es una contracción de $M(X)$. ∎

Capítulo 5

La no Compacidad de $D(X)$

5.1. Introducción

En este capítulo vamos a retomar la problemática de determinar cuándo el hiperespacio de subcontinuos regulares es cerrado.

Recordemos que en la Sección 3.3 del Capítulo 3, abordamos este problema y mostramos algunos espacios, construidos mediante la unión apropiada de continuos indescomponibles, que nos proporcionan ejemplos de continuos para los cuales su hiperespacio $D(X)$, resultó cerrado pero no conexo.

Es importante señalar que el problema de determinar si el hiperespacio de subcontinuos regulares podía ser un continuo no degenerado, o más concretamente, el problema de construir un ejemplo para el cual su hiperespacio de subcontinuos regulares resultara ser un cerrado no finito, nos quitó el sueño durante mucho tiempo, sin obtener ningún avance significativo en este sentido, sin embargo dichas desveladas nos proporcionaron una gran cantidad de espacios fascinantes.

Finalmente, al presentar una plática en el "V International Conference Japan-México on Topology and its Applications" que se celebró en septiembre de 2010 en la ciudad de Colima, donde presenté éste y otros problemas relacionados con mi investigación de doctorado, el Dr. Christopher Mouron del *Rhodes College*, Memphis, Tennessee, me proporcionó las herramientas necesarias para demostrar que este hiperespacio nunca puede ser un subconjunto cerrado e infinito. Por su interés y su paciencia para explicarme en varias ocasiones sus ideas, le estoy muy agradecido.

Así, en lo que resta de este capítulo nos vamos a dedicar a desarrollar todo lo necesario para demostrar que el hiperespacio de subcontinuos regulares nunca puede ser un cerrado infinito.

5.2. Subconjuntos Regulares

Definición 5.1 *Sea X un continuo.*

1. *Decimos que un subconjunto cerrado Y de X es un **cerrado regular**, si $\overline{int(Y)} = Y$.*

2. *Decimos que un subconjunto Y de X es **regular**, si $\overline{Y}$ es un cerrado regular.*

Proposición 5.2 *Un subconjunto Y de X es regular si y sólo si $\overline{Y}$ es un conjunto regular.*

Demostración. Supongamos que Y es un conjunto regular y demostremos que $\overline{Y}$ es un conjunto regular.

Como $\overline{Y}$ es cerrado, tenemos que $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$. Dado que Y es un conjunto regular, se cumple que $\overline{int(\overline{Y})} = \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$. Lo que demuestra que $\overline{Y}$ es un conjunto regular de X.

Ahora supongamos que $\overline{Y}$ es un subconjunto regular de X, entonces por definición Y es un subconjunto regular. ■

Proposición 5.3 *Si A y B son cerrados regulares en X, entonces $A \cup B$ es un cerrado regular.*

Demostración. Como $A \cup B$ es cerrado en X, tenemos que verificar que se cumple la igualdad $\overline{int(A \cup B)} = A \cup B$. Para esto demostremos ambas contenciones.

Como $int(A) \subset int(A \cup B)$ e $int(B) \subset int(A \cup B)$, tenemos que $A = \overline{int(A)} \subset \overline{int(A \cup B)}$ y $B = \overline{int(B)} \subset \overline{int(A \cup B)}$, lo que demuestra que $A \cup B \subset \overline{int(A \cup B)}$.

Por otro lado, como $int(A \cup B) \subset A \cup B$, al ser $A \cup B$ cerrado, tenemos que $\overline{int(A \cup B)} \subset A \cup B$. Con esto terminamos la demostración de esta proposición. ■

Proposición 5.4 *Sea Y un subconjunto no vacío y cerrado de X, si $\{Y\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos de X tales $Y_n \cap int(Y) = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim Y_n = Y$, entonces Y no es regular, más aún $int(Y) = \emptyset$.*

Demostración. Basta demostrar que $int(Y) = \emptyset$.

Supongamos que existen un punto $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(y) \subset Y$. Como $\lim Y_n = Y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(Y_N, Y) < \varepsilon$. Por el Lema 1.32 tenemos que $Y \subset N(\varepsilon, Y_N)$, así existe $y_N \in Y_N$ tal que $d(y_N, y) < \varepsilon$. Por lo tanto $Y_N \cap int(Y) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Esto demuestra que $int(Y) = \emptyset$, y termina la demostración de esta proposición. ■

Proposición 5.5 *Sean A y B subconjuntos de X. Si A es cerrado, entonces $int(B - A) = int(B) - A$.*

Demostración. Demostremos ambas contenciones.

Sea $x \in int(B-A)$. Entonces existe un abierto U tal que $x \in U \subset B-A$, como $B - A \subset B$, tenemos que $x \in int(B)$, por lo tanto $x \in int(B) - A$ y concluimos que $int(B - A) \subset int(B) - A$.

Para la otra contención, como A es cerrado, entonces $X - A$ es abierto, lo que implica que $int(B) \cap (X - A) = int(B) - A$ es un abierto contenido en $B - A$, lo que demuestra que $int(B) - A \subset int(B - A)$. ■

Proposición 5.6 *Sea B un conjunto regular de X. Si A es un subconjunto cerrado, entonces $B - A$ es un conjunto regular de X.*

Demostración. Podemos suponer que $B - A$ es no vacío. Para demostrar que $B - A$ es regular debemos demostrar la igualdad $\overline{int(\overline{B - A})} = \overline{B - A}$; para esto vamos a verificar ambas contenciones.

Sean $x \in \overline{B-A}$ y U un abierto en X tales que $x \in U$, entonces existe $b \in U$ tal que $b \in B$ y $b \notin A$. Como A es cerrado, tenemos que $X - A$ es abierto, así $W = U \cap (X - A)$ es un abierto tal que $b \in W \cap B - A$. Como $b \in B \subset \overline{B} = \overline{int(\overline{B})}$, tenemos que $W \cap int(\overline{B}) \neq \emptyset$.

Entonces existen $b_1 \in W \cap int(\overline{B})$ y $b_1 \notin A$. Por la Proposición 5.5, $b_1 \in int(\overline{B} - A) \subset int(\overline{B-A})$. Esto demuestra que $W \cap (int(\overline{B-A})) \neq \emptyset$.

Por lo tanto $U \cap int(\overline{B-A}) \neq \emptyset$ y obtenemos que $x \in \overline{int(\overline{B-A})}$. Así concluimos que $\overline{B-A} \subset \overline{int(\overline{B-A})}$

Para demostrar la otra contención, sólo es necesario observar que $int(\overline{B-A}) \subset \overline{B-A}$, lo que implica que $\overline{int(\overline{B-A})} \subset \overline{B-A}$. ■

Corolario 5.7 *Si B es un subconjunto regular de X y V es un abierto, entonces $B \cap V$ es un subconjunto regular de X.*

Demostración. Como $X - V$ es cerrado en X, por la Proposición 5.6, obtenemos que $B - (X - V) = B \cap V$ es regular. ■

Proposición 5.8 *Si Y y C son dos subconjuntos de X y Y es cerrado, entonces $int(Y \cup C) \subset Y \cup int(C)$.*

Demostración. Si $x \notin Y \cup int(C)$ y W es un abierto en X tal que $x \in W$, entonces definimos $U = W - Y$. Tenemos que U es un abierto, $x \in U$ y $U \cap Y = \emptyset$. Como $x \notin int(C)$, tenemos que $U \not\subseteq C$, por lo tanto $U \not\subseteq Y \cup C$, lo que demuestra que $W \not\subset Y \cup C$. De manera que $x \notin int(Y \cup C)$. Así concluimos que $int(Y \cup C) \subset Y \cup int(C)$. ■

5.3. Regularidad y Componentes

Definición 5.9 *(1) Si A es un subconjunto de X, definimos*

$$\boldsymbol{Com(A)} = \{C \subset A : C \text{ es componente conexa de } A\}.$$

(2) Si $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de X, definimos

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Lema 5.10 *Sea X un continuo. Si A es un subconjunto no conexo de X y $A = U' \cup V'$ es una separación de A, entonces existen dos subconjuntos no vacíos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $Com(A)$; y dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V de X tales que:*

(1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$,

(2) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = Com(A)$,

(3) $\mathcal{A}^* \subset U$ *y* $\mathcal{B}^* \subset V$,

(4) $U' \subset U$ *y* $V' \subset V$.

Demostración. Como $A = U' \cup V'$ es una separación de A, tenemos que

1. $\overline{U'} \cap V' = \emptyset$ y $\overline{V'} \cap U' = \emptyset$.
2. $U' \neq \emptyset$ y $V' \neq \emptyset$.
3. $A = U' \cup V'$.

Por ser X completamente normal existen dos abiertos ajenos U y V tales que $U' \subset U$ y $V' \subset V$. Sean $\mathcal{A} = \{C \in Com(A) : C \subset U\}$ y $\mathcal{B} = \{C \in Com(A) : C \subset V\}$. Notemos que, por 2, existe un punto $x \in U'$, de donde la componente C_x de A que tiene a x, es un elemento de $\mathcal{A}$. De forma análoga podemos ver que $\mathcal{B}$ es diferente del vacío.

Demostremos que los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y los abiertos U y V cumplen las condiciones que deseamos.

(1) Como U y V son ajenos y $\mathcal{A}^* \subset U$ y $\mathcal{B}^* \subset V$, obtenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

(2) Por construcción tenemos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset Com(A)$. Por otro lado, si $C \in Com(A)$, entonces $C \subset A \subset U \cup V$, lo que implica que $C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Por lo tanto $Com(A) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

(3) y (4) se cumplen por construcción. ■

Proposición 5.11 *Sea A un subconjunto regular de X y sea $A = U' \cup V'$ una separación de A. Si $C \in Com(A)$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $Com(A)$ tal que:*

(1) $C \in \mathcal{A}$,

(2) $\mathcal{A}^* \cap U' \neq \emptyset$ *y* $\mathcal{A}^* \cap V' \neq \emptyset$,

(3) $\mathcal{A}^*$ *es cerrado en* A,

(4) $\mathcal{A}^*$ *es regular.*

Entonces existe un subconjunto $\mathcal{A}_1$ *de* $\mathcal{A}$ *tal que:*

(a) $C \in \mathcal{A}_1$ *y* $\mathcal{A}_1$ *es un subconjunto propio de* $\mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A}_1^*$ *es cerrado en* A,

(c) $\mathcal{A}_1^*$ *es regular.*

Demostración. Dado que $|\mathcal{A}| \geqslant 2$, $\mathcal{A}^*$ no es conexo, por el Lema 5.10, existen dos subconjuntos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$ de $Com(\mathcal{A}^*) = \mathcal{A}$ y dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V de X tales que:

1. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$,
2. $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$,
3. $\mathcal{A}_1^* \subset U$ y $\mathcal{B}_1^* \subset V$.

Como $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$, podemos suponer que $C \in \mathcal{A}_1$. Verifiquemos que $\mathcal{A}_1$ satisface las condiciones que necesitamos.

(a) Por construcción, tenemos que $C \in \mathcal{A}_1$. Como $\mathcal{B}_1$ es no vacío y $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{A}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}$.

(b) Como $X - V$ es cerrado en X y $\mathcal{A}^*$ es cerrado en A, tenemos que $\mathcal{A}_1^* = A \cap \mathcal{A}^* \cap (X - V)$ es cerrado en A.

(c) Como $\mathcal{A}_1^*$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}^*$ y U es un abierto, por el Corolario 5.7, tenemos que $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}^* \cap U$ es un subconjunto regular. ■

A continuación demostraremos un resultado, que es una variación del *Teorema de Reducción de Brouwer*, que nos ayudará a demostrar dos resultados fundamentales de este capítulo.

Teorema 5.12 *Sean Y un espacio topológico segundo numerable y $\mathcal{Z}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de Y. Si para cualquier sucesión decreciente de elementos en $\mathcal{Z}$ cumple que su intersección está en $\mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{Z}$ tiene elementos minimales.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de abiertos no vacíos para Y.

Si ningún elemento de $\mathcal{Z}$ es un subconjunto propio de Y, tenemos que $\mathcal{Z} = \{Y\}$, y en este caso, Y es el elemento minimal que buscamos. Por lo tanto, podemos suponer que existe $G_1 \in \mathcal{Z}$ tal que G_1 es un subconjunto propio de Y.

Sea $y_1 \in Y - G_1$. Como G_1 es un subconjunto cerrado en Y, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 \in U_n$ y $U_n \cap G_1 = \emptyset$. Por lo tanto el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq Y \text{ y } F \cap U_n = \emptyset\}$ es diferente del vacío. Por el principio del buen orden, existe

$$n_1 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq Y \text{ y } F \cap U_n = \emptyset\}.$$

Sea $F_1 \in \mathcal{Z}$ tal que $F_1 \subsetneq Y$ y $F_1 \cap U_{n_1} = \emptyset$. Si F_1 es un elemento minimal para $\mathcal{Z}$, hemos terminado la demostración de este teorema. De lo contrario, existe un elemento $G_2 \in \mathcal{Z}$ tal que $G_2 \subsetneq F_1$.

Sea $y_2 \in F_1 - G_2$. Como G_2 es un subconjunto cerrado en Y y como $\mathcal{U}$ es una base numerable, existe $n > n_1$ tal que $y_2 \in U_n$ y $U_n \cap G_2 = \emptyset$. Por lo tanto el conjunto $\{n > n_1 : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq F_1 \text{ y } F \cap U_n = \emptyset\}$ es diferente del vacío. Por el principio del buen orden, existe

$$n_2 = \text{mín}\{n > n_1 : n \in \mathbb{N} : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq F_1 \text{ y } F \cap U_n = \emptyset\}.$$

Sea $F_2 \in \mathcal{Z}$ tal que $F_2 \subsetneq F_1$ y $F_2 \cap U_{n_2} = \emptyset$.

Continuando con este proceso, tenemos dos casos.

Caso 1. El proceso es finito.

Sea $k \in \mathbb{N}$ la última vez que podemos realizar este proceso. Entonces existen $\{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ y $\{F_1, \dots, F_k\} \subset \mathcal{Z}$, tales que:

(a) $n_j < n_{j+1}$ para toda $j \in \{1, \ldots, k-1\}$,

(b) $n_j = \text{mín}\{n > n_{j-1} : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq F_{n_{j-1}} \text{ y } F \cap U_{n_{j-1}} = \emptyset\}$ para toda $j \in \{1, \ldots, k-1\}$,

(c) $F_{j+1} \subsetneq F_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, k-1\}$,

(d) $F_j \cap U_{n_j} = \emptyset$ para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Si F_k no es minimal, entonces existe un elemento $G_{k+1} \in \mathcal{Z}$ tal que $G_{k+1} \subsetneq F_k$.

Sea $y_{k+1} \in F_k - G_{k+1}$. Como G_{k+1} es un subconjunto cerrado en Y y como $\mathcal{U}$ es una base numerable, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $y_2 \in U_{n_{k+1}}$ y $U_{n_{k+1}} \cap G_{k+1} = \emptyset$. Por lo tanto el conjunto $\{n > n_k : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \subsetneq F_k \text{ y } F \cap U_{n_{k+1}} = \emptyset\}$ es diferente del vacío. Por el principio del buen orden, existe

$$n_{k+1} = \text{mín}\{n > n_k : \text{existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \subsetneq F_k \text{ y } F \cap U_{n_{k+1}} = \emptyset\}.$$

Sea $F_{k+1} \in \mathcal{Z}$ tal que $F_{k+1} \subsetneq F_k$ y $F_{k+1} \cap U_{n_{k+1}} = \emptyset$. Pero esto es una contradiccón, ya que este proceso sólo lo podíamos realizar en k ocasiones. Por lo tanto F_k es el elemento minimal de $\mathcal{Z}$ que buscamos.

Caso 2. El proceso descrito es infinito.

En este caso existen una sucesión $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos en $\mathcal{Z}$, tales que:

(a) $n_j < n_{j+1}$ para toda $j \in \mathbb{N}$,

(b) $n_j = \text{mín}\{n > n_{j-1} : \text{existe } F \in \mathcal{Z} \text{ tal que } F \cap U_{n_{j-1}} = \emptyset\}$,

(c) $F_{j+1} \subsetneq F_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$,

(d) $F_j \cap U_{n_j} = \emptyset$.

Sea $F = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$. Por hipótesis tenemos que $F \in \mathcal{Z}$.

Verifiquemos que F es un elemento minimal para $\mathcal{Z}$.

Supongamos que F no es minimal para $\mathcal{Z}$. Entonces existe $G \in \mathcal{Z}$ tal que $G \subsetneq F$.

Sea $y \in F - G$. Como G es un subconjunto cerrado en Y, $Y - G$ es abierto, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G \cap U_n = \emptyset$. Por el principio del buen orden, existe

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : G \cap U_n = \emptyset\}.$$

Como $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j > n_0$. Sea $e = \min\{j \in \mathbb{N} : n_j > n_0\}$.

Recordemos que por definición tenemos que $n_e = \min\{n > n_{e-1}$: existe $F \in \mathcal{Z}$ tal que $F \subsetneq F_{n_{e-1}}$ y $F \cap U_{n_{e-1}} = \emptyset\}$.

Pero $n_0 < n_e$ y $G \in \mathcal{Z}$ es tal que $G \cap U_{n_0} = \emptyset$ y $G \subsetneq F = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j \subset F_{n_{e-1}}$, lo que es una contradicción a la elección de n_e. Por lo tanto F es minimal, y terminamos la demostración de este teorema. ■

Teorema 5.13 *Sea A un subconjunto regular diferente del vacío y C una componente de A. Si C no es regular, entonces existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos en $Com(A)$ tal que:*

(1) $C \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\mathcal{B}_{n+1} \subsetneq \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\mathcal{B}_n^*$ es regular para toda $n \in \mathbb{N}$,

(4) $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en A para toda $n \in \mathbb{N}$,

(5) $\mathcal{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es un subconjunto de $Com(A)$ con la propiedad que $\mathcal{B}^*$ es cerrado en A pero no es regular.

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto.

$$\mathcal{Z} = \{\mathcal{B}^* \subset A : C \in \mathcal{B} \subset Com(A), \mathcal{B}^* \text{ es cerrado en } A \text{ y regular en } X\}.$$

Analicemos dos casos.

Caso 1. Para toda sucesión decreciente $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{Z}$ se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* \in \mathcal{Z}$.

En este caso tenemos que la familia $\mathcal{Z}$ cumple las hipótesis del Teorema 5.12, así $\mathcal{Z}$ tiene elementos minimales.

Sea $\mathcal{B}^*$ un elemento minimal en $\mathcal{Z}$. Entonces tenemos que $\mathcal{B}^*$ es un subconjunto regular de X tal que:

(1) $C \in Com(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}$,

(2) $\mathcal{B}^*$ es cerrado en A,

(3) $\mathcal{B}^*$ es un subconjunto regular.

Como $C \in Com(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}$, al ser $\mathcal{B}^*$ regular, tenemos que $\mathcal{B}$ tiene al menos dos elementos, lo que muestra que $\mathcal{B}^*$ no es conexo, por lo tanto existen dos subconjuntos no vacios U' y V' de $\mathcal{B}^*$ tales que $\mathcal{B}^* = U' \cup V'$ forman una separación de $\mathcal{B}^*$. Por lo tanto, por la Proposición 5.11, existe un subconjunto propio $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}$ tal que:

(a) $C \in \mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$,

(b) $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en $\mathcal{B}^*$,

(c) $\mathcal{B}_1^*$ es regular.

Notemos que, por (a), tenemos que $C \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B} \subset Com(A)$. Por (b), tenemos que $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en $\mathcal{B}^*$, pero por ser $\mathcal{B}^*$ cerrado en A, concluimos que $\mathcal{B}_1^*$ es cerrado en A. Por (c), tenemos que $\mathcal{B}_1^*$ es regular. Con esto hemos demostrado que $\mathcal{B}_1^* \in \mathcal{Z}$.

Pero por la condición (a), tenemos que $\mathcal{B}_1$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$, lo que implica que $\mathcal{B}_1^*$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}^*$, lo que es una contradicón, ya que $\mathcal{B}^*$ es un elemento minimal de $\mathcal{Z}$.

Caso 2. Existe una sucesión decreciente $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{Z}$, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* \notin \mathcal{Z}$.

Si la sucesión $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un número finito de elementos, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_n^* = \mathcal{B}_N^*$ para toda $n \geqslant N$. Lo que implica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* = \mathcal{B}_N^* \in \mathcal{Z}$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente, es decir, $\mathcal{B}_{n+1}^* \subsetneq \mathcal{B}_n^*$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Com(A)$ inducida por la sucesión $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. Demostremos que la sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple las condiciones que necesitamos.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_n^* \in \mathcal{Z}$, tenemos que $C \in \mathcal{B}_n \subset Com(A)$, $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en A y regular en X. Por lo tanto la sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple las condiciones (1), (3) y (4).

Verifiquemos (2).

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}_{n+1}^* \subsetneq \mathcal{B}_n^*$, existe $y \in \mathcal{B}_n^* - \mathcal{B}_{n+1}^*$. Sea F la componente de A que tiene a y. Entonces $F \in \mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n+1}$, lo que demuestra este inciso.

Verfiquemos (5).

Sea $\mathcal{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Demostremos que $\mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$, para esto vamos a demostrar ambas contenciones.

Sea $x \in \mathcal{B}^*$. Como $\mathcal{B} \subset Com(A)$ tenemos que la componente F de A que tiene a x, cumple que $F \in \mathcal{B}$, lo que implica que $F \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta forma $x \in F \subset \mathcal{B}_n^*$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$.

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$. Entonces $x \in \mathcal{B}_n^*$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica la componente F de A que tiene a x, cumple que $F \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $F \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, lo que implica que $x \in F \subset \mathcal{B}^*$.

Con esto hemos mostrado que $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n)^* = \mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$.

Notemos que $C \in \mathcal{B}$, ya que $C \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. También $\mathcal{B}^*$ es un subconjunto cerrado de A, ya que es la intersección de los subconjuntos $\mathcal{B}_n^*$ y $\mathcal{B}_n^*$ es un subconjunto cerrado de A para toda $n \in \mathbb{N}$.

Pero $\{\mathcal{B}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{Z}$ tal que $\mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^* \notin \mathcal{Z}$, lo que demuestra que $\mathcal{B}^*$ no es un subconjunto regular de X.

Con esto concluimos la demostración de este teorema. ■

5.4. $D(X)$ no es Compacto

En esta sección aplicaremos los resultados de las secciones anteriores para demostrar que el hiperespacio de subcontinuos regulares no puede ser cerrado, si tiene una cantidad infinita de elementos.

Proposición 5.14 *Sean Y y C dos subconjuntos de X tales que:*

1. *Y y $Y \cup C$ son cerrados,*
2. *$Y \cap C = \emptyset$,*
3. *C no es regular.*

Entonces $Y \cup C$ no es regular.

Demostración. Como C no es regular, tenemos que $\overline{C}$ contiene propiamente a $\overline{int(\overline{C})}$, de esta forma podemos tomar un punto $x \in \overline{C} - \overline{int(\overline{C})}$ y un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$ y $U \cap \overline{int(\overline{C})} = \emptyset$.

Sea $y \in C \cap U$. Como $Y \cap C = \emptyset$, tenemos que $y \notin Y$ y además $y \notin \overline{int(\overline{C})}$.

Notemos que $y \in Y \cup C$. Como $Y \cup C$ es cerrado, tenemos que $Y \cup C = Y \cup \overline{C}$. Por la Proposición 5.8, obtenemos que $\overline{int(Y \cup \overline{C})} \subset \overline{Y \cup int(\overline{C})} = Y \cup \overline{int(\overline{C})}$.

Como $y \notin Y$ y $y \notin \overline{int(\overline{C})}$, tenemos que $y \notin \overline{int(Y \cup \overline{C})}$, lo que demuestra que $\overline{int(Y \cup \overline{C})} \subsetneq Y \cup \overline{C}$. Por lo tanto $Y \cup C$ no es regular. ■

Lema 5.15 *Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Si C es un subconjunto cerrado de $B - A$, entonces $A \cup C$ es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Como C es un subconjunto cerrado de $B-A$, existe un subconjunto cerrado D de X tal que $C = D \cap (B-A)$. De donde $A \cup C = A \cup [D \cap (B \cap (X-A))]$, lo que implica que $X - (A \cup C) = (X-A) \cap [(X-B) \cup (X-D) \cup A] = (X-A) \cap [(X-B) \cup (X-D)]$, que es un abierto en X. Esto demuestra que $A \cup C$ es un subconjunto cerrado. ■

Proposición 5.16 *Sean A y B dos elementos de $D(X)$. Si $B-A$ tiene una componente que es no regular, entonces $D(X)$ no es cerrado.*

Demostración. Sea C una componente en $B-A$ que no sea regular. Por ser B regular, por el Corolario 5.7, tenemos que $B - A = B \cap (X-A)$ es regular en X. Así, por el Teorema 5.13, existe una sucesión $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $Com(B-A)$ tal que:

1. $C \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
2. $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
3. $\mathcal{B}_n^*$ es regular para toda $n \in \mathbb{N}$,
4. $\mathcal{B}_n^*$ es cerrado en $B-A$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
5. $\mathcal{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ es un subconjunto de $Com(B-A)$ con la propiedad que $\mathcal{B}^*$ es cerrado en $B-A$ pero no es regular.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $K_n = A \cup \mathcal{B}_n^*$ y $K = A \cup \mathcal{B}^*$. Por el Lema 1.6, tenemos que K y K_n son conexos, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}_n^*$ son cerrados en $B-A$, para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 5.15, tenemos que K y K_n son cerrados en X.

Sea $n \in \mathbb{N}$, como B_n^* es regular, tenemos que $\overline{\mathcal{B}_n^*}$ es un subconjunto cerrado regular, así por la Proposición 5.3, tenemos que $K_n = A \cup \mathcal{B}_n^* = A \cup \overline{\mathcal{B}_n^*}$ es regular, pero por la Proposición 5.14 tenemos que K no es regular. Como $\mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n^*$, tenemos que $A \cup \mathcal{B}^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A \cup \mathcal{B}_n^*$, entonces $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Por lo tanto $\lim K_n = K$.

Lo que hemos demostrado es que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $D(X)$ tal que $\lim K_n = K$, pero $K \notin D(X)$, lo que prueba que $D(X)$ no es cerrado. ■

Definición 5.17 *Un elemento $B \in C(X)$ es **un elemento límite minimal** de $D(X)$, si B es un punto de acumulación de $D(X)$ y siempre que $A \in C(X)$ con $A \subset B$ y que A sea punto de acumulación de $D(X)$, se cumple que $A = B$.*

Lema 5.18 *Sea X un continuo tal que $D(X)$ es un subconjunto cerrado. Si $A \in D(X)$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $D(X)$ tal que:*

1. *A_n es un subconjunto propio de A, para toda $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\lim A_n = A$.*

Entonces A no es un elemento límite minimal de $D(X)$.

Demostración. Como $A_1 \in D(X)$, tenemos que $int(A_1)$ es un abierto de X diferente del vacío contenido en A. Dado que $\lim A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \cap U \neq \emptyset$ para toda $m \geq N_1$. De esta forma podemos concluir que $A_m \cap A_1 \neq \emptyset$ para toda $m \geq N_1$. Consideremos tres casos.

Caso 1. $A_1 \cup A_m$ es un subconjunto propio de A para toda $m \geq N_1$.

Sea K_{N_1} una componente de $A - (A_1 \cup A_{N_1})$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_1} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_1}$ es regular.

Afirmación 1. Existe $N_2 > N_1$ tal que $int(A_{N_2}) \cap int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto no vacío de X.

Demostración. Como $\overline{K}_{N_1}$ es regular, tenemos que $int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto no vacío de X contenido en A. Dado que $\lim A_n = A$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \cap int(\overline{K}_{N_1}) \neq \emptyset$ para toda $m \geq N_2$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N_2 > N_1$.

Consideremos $x \in A_{N_2} \cap int(\overline{K}_{N_1})$, como A_{N_2} es regular y el $int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto diferente del vacío de X que tiene al punto $x \in A_{N_2} = \overline{int(A_{N_2})}$, tenemos que $int(A_{N_2}) \cap int(\overline{K}_{N_1}) \neq \emptyset$. Esto termina la demostración de la Afirmación 1.

Como $A_1 \cup A_{N_2}$ es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_2} de $A - (A_1 \cup A_{N_2})$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_2} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_2}$ es regular.

Afirmación 2. $\overline{K}_{N_2} \neq \overline{K}_{N_1}$.

Demostración. Como $K_{N_2} \subset A - (A_1 \cup A_{N_2})$, tenemos que $K_{N_2} \subset A - int(A_{N_2})$. Como $A - int(A_{N_2})$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_2} \subset A - int(A_{N_2})$. Por la Afirmación 1, tenemos que $U_1 = int(A_{N_2}) \cap int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto no vacío de X tal que $U_1 \cap \overline{K}_{N_2} = \emptyset$. Como $U_1 \subset \overline{K}_{N_1}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_2} \neq \overline{K}_{N_1}$ y concluimos la demostración de esta afirmación.

Supongamos que existen números naturales $N_1, N_2, \ldots, N_{t-1}$ de $\mathbb{N}$ tales que $N_i < N_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-2\}$, con la propiedad que para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ existe una componente K_{N_i} de $A - (A_1 \cup A_{N_i})$, tal que $\overline{K}_{N_i}$ es regular y que además $\overline{K}_{N_i} \neq \overline{K}_{N_j}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, t-1\}$ con $i \neq j$.

Afirmación 3. Existe $N_t > N_{t-1}$ tal que $int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto no vacío de X para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Demostración. Como $\overline{K}_{N_i}$ es regular, tenemos $int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto diferente del vacío de X para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Como $\lim A_n = A$, existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para toda $n \geq M_i$.

Sea $N_t = \max\{M_i : i \in \{1, \ldots, t-1\}\}$. Podemos suponer además que $N_t > N_{t-1}$. Notemos que si $n \geq N_t$, entonces $A_n \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Verifiquemos que N_t cumple lo que deseamos.

Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Consideremos $x \in A_{N_t} \cap int(\overline{K}_{N_i})$, como A_{N_t} es regular y el $int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto diferente del vacío de X que tiene al punto $x \in A_{N_t} = \overline{int(A_{N_t})}$, tenemos que $int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$. Así terminamos la demostración de esta afirmación.

Como $A_1 \cup A_{N_t}$ es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_t} de $A - (A_1 \cup A_{N_t})$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_t} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_t}$ es regular.

Afirmación 4. $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Como $K_{N_t} \subset A-(A_1 \cup A_{N_t})$, tenemos que $K_{N_t} \subset A - int(A_{N_t})$. Como $A - int(A_{N_t})$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_t} \subset A - int(A_{N_t})$. Por la Afirmación 3, tenemos que $U_i = int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto no vacío de X tal que $U_i \cap \overline{K}_{N_t} = \emptyset$. Como $U_i \subset \overline{K}_{N_i}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$. Así concluimos la demostración de esta afirmación.

De forma inductiva hemos demostrado que existe una sucesión $\{\overline{K}_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos regulares y diferentes dos a dos tales que K_{N_i} es una componente de $A - (A_1 \cup A_{N_i})$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por ser $D(X)$ cerrado podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim \overline{K}_{N_i} = K$ para algún $K \in D(X)$. Más aún, como $\overline{K}_{N_i} \neq \overline{K}_{N_j}$ para cualesquiera $i \neq j$, tenemos que K es un elemento de acumulación de $D(X)$.

Como $K_{N_i} \subset A - (A_1 \cup A_{N_i})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, por ser A un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_i} \subset A$, lo que implica que $K = \lim \overline{K}_{N_i} \subset A$.

Como $K_{N_i} \subset A - (A_1 \cup A_{N_i}) \subset A - int(A_1)$, por ser $A - int(A_1)$ un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_i} \subset A - int(A_1)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $K = \lim \overline{K}_{N_i} \subset A - int(A_1)$, lo que demuestra que $K \cap int(A_1) = \emptyset$.

Como A_1 es un cerrado regular, tenemos que $int(A_1) \neq \emptyset$. Esto demuestra que K es un subconjunto propio de A, lo que prueba que A no puede ser un elemento límite minimal de $D(X)$.

Caso 2. $A_1 \cup A_k = A$, para una cantidad finita de elementos en $\{m \in \mathbb{N} : m \geq K\}$.

Sea $N_1 = \max\{m \in \mathbb{N} : A_1 \cup A_m = A\}$. Entonces $A_1 \cup A_m$ es un subconjunto propio de A para toda $m \geq N_1$, y podemos aplicar el Caso 1.

Caso 3. $A_1 \cup A_{m_i} = A$ para una subsucesión $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{m\}_{m=N}^{\infty}$.

Para no hacer más complicada la notación, en este caso vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $A_1 \cup A_m = A$ para toda $m \geqslant N_1$.

Como A_{N_1} es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_1} de $A - A_{N_1} \subset A_1$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_1} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_1}$ es regular.

Afirmación 5. Existe $N_2 > N_1$ tal que $int(A_{N_2}) \cap int(K_{N_1})$ es un abierto no vacío de X.

Demostración. Como K_{N_1} es regular, tenemos que $int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto no vacío de X. Dado que $\lim A_n = A$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \cap int(\overline{K}_{N_1}) \neq \emptyset$ para toda $m \geq N_2$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N_2 > N_1$.

Consideremos $x \in A_{N_2} \cap int(\overline{K}_{N_1})$, como A_{N_2} es regular y el $int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto diferente del vacío de X que tiene al punto $x \in A_{N_2} = \overline{int(A_{N_2})}$, tenemos que $int(A_{N_2}) \cap int(\overline{K}_{N_1}) \neq \emptyset$. Esto termina la demostración de la Afirmación 1.

Como A_{N_2} es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_2} de $A - A_{N_2} \subset A_1$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_2} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_2}$ es regular.

Afirmación 6. $\overline{K}_{N_2} \neq \overline{K}_{N_1}$.

Demostración. Como $K_{N_2} \subset A - A_{N_2}$, tenemos que $K_{N_2} \subset A - int(A_{N_2})$. Como $A - int(A_{N_2})$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_2} \subset A - int(A_{N_2})$. Por la Afirmación 5, tenemos que $U_1 = int(A_{N_2}) \cap int(\overline{K}_{N_1})$ es un abierto no vacío tal que $U_1 \cap \overline{K_{N_2}} = \emptyset$. Como $U_1 \subset \overline{K}_{N_1}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_2} \neq \overline{K}_{N_1}$ y concluimos la demostración de esta afirmación.

Supongamos que existen números naturales $N_1, N_2, \ldots, N_{t-1}$ de $\mathbb{N}$ tales que $N_i < N_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-2\}$, con la propiedad que para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ existe una componente K_{N_i} de $A - A_{N_i}$, tal que $\overline{K}_{N_i}$ es regular y que además $\overline{K}_{N_i} \neq \overline{K}_{N_j}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, t-1\}$ con $i \neq j$.

Afirmación 7. Existe $N_t > N_{t-1}$ tal que $int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto no vacío de X para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Demostración. Como $\overline{K}_{N_i}$ es regular, tenemos que $int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto diferente del vacío de X para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Como $\lim A_n = A$, existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para toda $n \geq M_i$.

Sea $N_t = \max\{M_i : i \in \{1, \ldots, t-1\}\}$. Podemos suponer además que $N_t > N_{t-1}$. Notemos que si $n \geq N_t$, entonces $A_n \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Verifiquemos que N_t cumple lo que deseamos.

Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Consideremos $x \in A_{N_t} \cap int(\overline{K}_{N_i})$, como A_{N_t} es regular y el $int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto diferente del vacío de X que tiene al punto $x \in A_{N_t} = \overline{int(A_{N_t})}$, tenemos que $int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i}) \neq \emptyset$. Así terminamos la demostración de esta afirmación.

Como A_{N_t} es un subconjunto propio de A, existe una componente K_{N_t} de $A - A_{N_t}$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_{N_t} es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_{N_t}$ es regular.

Afirmación 8. $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, t-1\}$. Como $K_{N_t} \subset A - A_{N_t}$, tenemos que $K_{N_t} \subset A - int(A_{N_t})$. Como $A - int(A_{N_t})$ es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_{N_t} \subset A - int(A_{N_t})$. Por la Afirmación 7, tenemos que $U_i = int(A_{N_t}) \cap int(\overline{K}_{N_i})$ es un abierto no vacío de X tal que $U_i \cap \overline{K_{N_t}} = \emptyset$. Como $U_i \subset \overline{K}_{N_i}$, obtenemos que $\overline{K}_{N_t} \neq \overline{K}_{N_i}$. Así concluimos la demostración de esta afirmación.

De forma inductiva hemos demostrado es que existe una sucesión $\{\overline{K}_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de subconjuntos regulares y diferentes dos a dos, tales que K_{N_i} es una componente de $A - A_{N_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea $i \in \mathbb{N}$. Como $K_{N_i} \subset A - A_{N_i}$ y $A_1 \cup A_{N_i} = A$, tenemos que $K_{N_i} \subset A_1$. Como A_1 es un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K_{N_i}} \subset A_1$.

Como $D(X)$ es cerrado podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim \overline{K}_{N_i} = K$ para algún $K \in D(X)$. Como $\overline{K}_{N_i} \subset A_1$ para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $K \subset A_1$.

Dado que $\{\overline{K}_{N_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos regulares y diferentes dos a dos, tenemos que K es elemento de acumulación de $D(X)$, como además $K \subset A_1 \subsetneq A$, tenemos que K es un subconjunto propio de A.

Por lo tanto A no es elemento límite minimal de $D(X)$.

Con esto terminamos la demostración de este lema. $\blacksquare$

Lema 5.19 *Si $D(X)$ es infinito, entonces existe un elemento límite minimal de $D(X)$.*

Demostración. Como $D(X)$ es infinito y $C(X)$ es compacto, existe un elemento de acumulación A de $D(X)$, en $C(X)$.

Sea $\mathcal{Z} = \{B \in C(X) : B \subset A$ y B es un elemento de acumulación de $D(X)\}$. Como $A \in \mathcal{Z}$, tenemos que $\mathcal{Z}$ es no vacío.

Vamos a demostrar que la familia $\mathcal{Z}$ tiene elementos minimales. Para esto, usaremos el Teorema 5.12. Demostremos entonces que toda sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$ cumple que su interseción pertenece a $\mathcal{Z}$.

Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ unu sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$. Analicemos dos casos.

Caso 1. $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ tiene un número finito de elementos.

Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $A_m = A_M$ para toda $m \geqslant M$. Así $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = A_M \in \mathcal{Z}$.

Caso 1. $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ tiene un número infinito de elementos.

En este caso existe una subsucesión estrictamente decreciente de $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ que, sin pérdida de generalidad podemos suponer que coincide con $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Para toda $m \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ en $D(X)$, formada por elementos diferentes, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^m = A_m$.

Sea $A_{N_1}^1$ un elemento de la sucesión $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H(A_1, A_{N_1}^1) < 1$.

Sea $A_{N_2}^2$ un elemento de la sucesión $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H(A_2, A_{N_2}^2) < \frac{1}{2}$. Como los elementos que forman la sucesión $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ son diferentes dos a dos, podemos suponer que $A_{N_2}^2 \neq A_{N_1}^1$.

Supongamos que para toda $i \in \{1,\ldots,m\}$ existe un elemento $A^i_{N_i}$ de la sucesión $\{A^i_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad que $H(A_i, A^i_{N_i}) < \frac{1}{i}$ y que además $A^j_{N_j} \neq A^k_{N_k}$, para cualesquiera $j,k \in \{1,\ldots,m\}$ tales que $j \neq k$.

Sea $A^{m+1}_{N_{m+1}}$ un elemento de la sucesión $\{A^{m+1}_n\}_{n=1}^{\infty}$ con la propiedad que $H(A_{m+1}, A^{m+1}_{N_{m+1}}) < \frac{1}{m+1}$. Como los elementos que forman la sucesión $\{A^{m+1}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son diferentes dos a dos, podemos suponer que $A^{m+1}_{N_{m+1}} \neq A^i_{N_i}$, para toda $i \in \{1,\ldots,m\}$.

De esta forma podemos construir una sucesión $\{A^m_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$ formada por elementos diferentes dos a dos, tales que $H(A_m, A^m_{N_m}) < \frac{1}{m}$.

Sea $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, como $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente, tenemos que $\lim A_m = B$. De esta forma, si $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geqslant M$, se cumple que $H(B, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, si $m > M$, entonces $H(B, A^m_{N_m}) \leqslant H(B, A_m) + H(A_m, A^m_{N_m}) < \varepsilon$. Lo que demuestra que $\lim A^m_{N_m} = B$.

Lo que hemos demostrado es que A es un elemento de acumulación para $D(X)$ y concluimos que toda sucesión decreciente en $\mathcal{Z}$ cumple que su intersección pertenece a $\mathcal{Z}$. Así, por el Teorema 5.12, concluimos que $\mathcal{Z}$ tiene elementos minimales.

Si D es un elemento minimal de $\mathcal{Z}$, entonces D es un elemento de acumulación de $D(X)$ que no contiene subcontinuos propios de acumulación de $D(X)$, lo que demuestra que D es un elemento límite minimal de $D(X)$.

Con esto concluimos la demostración de este lema. ■

Teorema 5.20 *Si $D(X)$ es infinito, entonces $D(X)$ no es cerrado.*

Demostración. Supongamos que $D(X)$ es cerrado, entonces por el Lema 5.19, existe un elemento límite minimal $Y \in C(X)$, de $D(X)$. Notemos que $D(X)$ cerrado, implica que $Y \in D(X)$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D(X) - Y$ tal que $\lim A_n = Y$, por el Lema 5.18, podemos suponer que A_n no está contenido en Y para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Más aún, como $int(Y) \neq \emptyset$ por la Proposición 5.4, podemos suponer que $A_n \cap Y \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea K_1 una componente de $A_1 - Y$. Como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_1 es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_1$ es regular. Como K_1 una componente de $A_1 - Y$, tenemos que $\overline{K}_1 \subset K_1 \cup Fr(Y)$. Así concluimos que $\overline{K}_1 \cap int(Y) = \emptyset$.

Afirmación 1. Existen $n_2 > 1$ y una componente K_{n_2} de $A_{n_2} - Y$ tales que

(i) $\overline{K}_{n_2}$ es regular,

(ii) $\overline{K}_{n_2} \cap int(Y) = \emptyset$, y

(iii) $\overline{K}_{n_2} \neq \overline{K}_1$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces para toda $n > 1$, la cerradura de toda componente de $A_n - Y$ no satisface alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii). Analicemos lo siguiente.

Si $n > 1$ y K es una componente de $A_n - Y$, como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_n es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_n$ es regular. Es decir, K_n cumple (i).

Como $K_n \subset A_n - Y$, tenemos que $K_n \subset A_n - int(Y_n)$, que por ser $A_n - int(Y_n)$ un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_n \subset A_n - int(Y)$. Lo que demuestra que $\overline{K}_n$ cumple (ii).

Por lo anterior podemos concluir que no se cumple la Condición (iii) para toda $n > 1$, por lo tanto para toda $n > 1$, la cerradura de toda componente de $A_n - Y$ coincide con $\overline{K}_1$.

Entonces $\overline{K}_1 \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por (b) del Lema 1.35, tenemos que $\overline{K}_1 \subset \lim A_n = Y$, lo que es una contradicción ya que $\overline{K}_1$ es un subconjunto no vacío de X y $K_1 \subset X - Y$.

Esto termina la demostración de esta afirmación.

Por lo tanto existen $n_2 > 1$ y una componente K_{n_2} de $A_{n_2} - Y$ tal $\overline{K}_{n_2}$ es regular, $K_{n_2} \cap int(Y) = \emptyset$ y $\overline{K}_{n_2} \neq \overline{K}_1$.

Inductivamente, supongamos que para toda $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ existe una componente K_{n_i} de $A_{n_1} - Y$ tal que $\overline{K}_{n_i}$ es regular, $\overline{K}_{n_i} \cap int(Y) = \emptyset$ y que además $\overline{K}_{n_i} \neq \overline{K}_{n_j}$, para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, t-1\}$ tales que $i \neq j$.

Afirmación 2. Existen $n_t > n_{t-1}$ y una componente K_{n_t} de $A_{n_t} - Y$ tales que

(i) $\overline{K}_{n_t}$ es regular,

(ii) $\overline{K}_{n_t} \cap int(Y) = \emptyset$, y

(iii) $\overline{K}_{n_t} \neq \overline{K}_{n_i}$ para toda $i \in \{i, \ldots, t-1\}$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces para toda $n > n_{t-1}$, la cerradura de toda componente de $A_n - Y$ no satisface alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii). Analicemos lo siguiente.

Si $n > n_{t-1}$ y K_n es una componente de $A_n - Y$, como $D(X)$ es cerrado, por la Proposición 5.16, tenemos que K_n es regular y por la Proposición 5.2, tenemos que $\overline{K}_n$ es regular. Es decir, K_n cumple (i).

Como $K_n \subset A_n - Y$, tenemos que $K_n \subset A_n - int(Y_n)$, que por ser $A_n - int(Y_n)$ un subconjunto cerrado de X, tenemos que $\overline{K}_n \subset A_n - int(Y)$. Lo que demuestra que $\overline{K}_n$ cumple (ii).

Por lo anterior podemos concluir que no se cumple la Condición (iii), por lo tanto para toda $n > n_{t-1}$, la cerradura de toda componente de $A_n - Y$ coincide con $\overline{K}_i$, para algún $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que para toda $n > n_{t-1}$, la cerradura de toda componente de $A_n - Y$ coincide con $\overline{K}_1$, lo que implica que $\overline{K}_1 \subset A_n$ para toda $n < n_{t-1}$.

Por (b) del Lema 1.35, tenemos que $\overline{K}_1 \subset \lim A_n = Y$, lo que es una contradicción ya que $\overline{K}_1$ es un subconjunto no vacío de X y $K_1 \subset X - Y$.

Esto termina la demostración de esta afirmación.

Lo que hemos demostrado es que existe una sucesión $\{\overline{K}_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $D(X)$ tal que $\overline{K}_{n_i} \neq \overline{K}_{n_j}$ para toda $i \neq j$. Como $D(X)$ es cerrado podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lim \overline{K}_{n_i} = K$ para algún $K \in D(X)$. Así tenemos que K es un elemento de acumulación de $D(X)$.

Como $\overline{K}_{n_i} \subset A_{n_i}$ y $\lim A_{n_1} = Y$, tenemos que $K \subset Y$. Como Y es un elemento límite minimal de $D(X)$, tenemos que $K = Y$.

Por lo tanto $\lim \overline{K}_{n_i} = Y$, como además $\overline{K}_{n_i} \cap int(Y) = \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$, por la Proposición 5.4, tenemos que Y no es regular, lo que es una contradicción.

Esto demuestra que $D(X)$ no es cerrado. ■

5.5. Un Ejemplo Fuera de Lugar

Como mencionamos en algún momento de este trabajo el hiperespacio de subcontinuos magros juega un papel complementario para el hiperespacio de subcontinuos regulares, ya que mientras los subcontinuos regulares son los elementos en $C(X)$ que se pueden recuperar de su interior, los subcontinuos magros son, por el contrario, los elementos en $C(X)$ que no proporcionan ninguna información cuando consideramos su interior.

Pensando en esa dualidad por algún tiempo creimos cierta la siguiente conjetura.

- X es indescomponible si y sólo si $M(X)$ es abierto.

Como podemos apreciar una de las implicaciones es inmediata, ya que si X es un continuo indescomponible, por el Teorema 1.27, tenemos que todo subcontinuo propio tiene interior vacío, lo que implica que $M(X) = C(X) - \{X\}$, que es un abierto.

Sin embargo la otra implicación no es verdadera y el propósito de esta sección es el de mostrar un ejemplo que lo ilustre.

Proposición 5.21 *Si $X = Y_1 \cup Y_2$ es un continuo tal que:*

1. *Y_1 y Y_2 son indescomponibles,*

2. *$Y_1 \cap Y_2 = \{y_0\}$.*

Entonces $M(X)$ es abierto.

Demostración. Para demostrar esta proposición, vamos a ver que el complemento de $M(X)$ es cerrado.

Verifiquemos que se cumple la siguiente igualdad

$$C(X) - M(X) = \{A \in C(X) : Y_i \subset A \text{ para algún } i \in \{1,2\}\}$$

Sea $A \in C(X)$ tal que $Y_i \subset A$ para alguna $i \in \{1,2\}$, como $\emptyset \neq int(Y_i) \subset A$, tenemos que $A \in C(X) - M(X)$. Por lo tanto $\{A \in C(X) : Y_i \subset A$ para algún $i \in \{1,2\}\} \subset C(X) - M(X)$.

Para demostrar la otra contención, sea $A \in C(X) - M(X)$ y supongamos que $Y_i \not\subset A$ para ninguna $i \in \{1,2\}$. Consideremos dos casos.

Caso 1. $y_0 \notin A$.

En este caso, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A es un subcontinuo propio de Y_1, que al ser indescomponible, por el Teorema 1.27 obtenemos que $int(A) = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Caso 2. $y_0 \in A$.

Como y_0 es un punto de corte de X, tenemos que $A \cap Y_1$ y $A \cap Y_2$ son subcontinuos propios de Y_1 y Y_2, respectivamente, y además $A = (A \cap Y_1) \cup (A \cap Y_2)$. De esta forma, $int(A) \subset int_{Y_1}(A \cap Y_1) \cup int_{Y_2}(A \cap Y_2) = \emptyset$, ya que Y_1 y Y_2 son indescomponibles. Por lo tanto $int(A) = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Con los Casos 1 y 2, hemos mostrado que $C(X) - M(X) \subset \{A \in C(X) : Y_i \subset A$ para algún $i \in \{1,2\}\}$; y obtenemos la igualdad deseada.

Para demostrar que $C(X) - M(X)$ es cerrado, consideramos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X) - M(X)$ de tal forma que $\lim A_n = A$ para algún $A \in C(X)$.

Por lo anterior podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $Y_1 \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, por el Lema 1.35, tenemos que $Y_1 \subset A$, lo que implica que $A \in C(X) - M(X)$, y concluimos que $C(X) - M(X)$ es cerrado.

Por lo tanto $M(X)$ es abierto. ■

Observación 5.22 *Si* $X = Y_1 \cup Y_2$ *es un continuo tal que:*

1. Y_1 *y* Y_2 *son indescomponibles,*
2. $Y_1 \cap Y_2 = \{y_0\}$.

Entonces, $M(X)$ *es abierto y* X *es descomponible.*

Capítulo 6

$D(X)$, $M(X)$ y otros Hiperespacios

6.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar las relaciones conjuntistas que existen entre los hiperespacios de subcontinuos regulares y magros; con los hiperespacios de subcontinuos y el de singulares de un continuo.

Para motivar los problemas que abordaremos en las siguientes secciones, mostraremos el comportamiento de los hiperespacios $D(X)$ y $M(X)$ en algunos espacios con estructura sencilla.

Definición 6.1 *Una **gráfica finita** es un continuo que se puede ver como una unión finita de arcos, los cuales dos a dos, se intersectan en un conjunto finito.*

Observación 6.2 *Si G una gráfica finita, entonces existen arcos $a_1b_1, \ldots, a_nb_n$, contenidos en G, tales que*

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Y que además a_ib_i es un arco libre en G para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, si ab es un arco no degenerado contenido en a_ib_i para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, y a_ia y bb_i son las componentes de $a_ib_i - (ab - \{a, b\})$, entonces

$$G - (ab - \{a, b\}) = (\bigcup_{j \neq i} a_j b_j) \cup a_i a \cup b b_i.$$

Que al ser la unión finita de subconjuntos cerrados, obtenemos que ab es un arco libre en G; más aún, tenemos que $ab \in D(X)$.

Proposición 6.3 *Si G es una gráfica finita, entonces $M(G) = F_1(G)$,*

Demostración. Como $F_1(G) \subset M(G)$, sólo es necesario demostrar que $M(G) \subset F_1(G)$.

Supongamos que $G = \bigcup_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Sea $A \in M(X)$, si A es no degenerado, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i b_i \cap A$ es no degenerado. Sea ab un subarco de $a_i b_i$ tal que $ab \subset A$; como ab es un arco libre en G, tenemos que $\emptyset \neq int(ab) \subset A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $A \in F_1(X)$. ■

Proposición 6.4 *Si G es una gráfica finita, entonces $D(G) = C(G) - F_1(G)$.*

Demostración. Como $D(G) \subset C(G) - F_1(G)$, sólo es necesario demostrar que $C(G) - F_1(G) \subset D(G)$.

Sean $A \in C(G) - F_1(G)$ y $x \in A$. Si U es un abierto en G tal que $x \in U$, como A es no degenerada, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in a_i b_i$ y existe un subarco ab de $a_i b_i$ con extremos a y b, tal que $ab \subset A$. Como $x \in U$ y $ab \in D(G)$, tenemos que $U \cap int(ab) \neq \emptyset$, pero $int(ab) \subset int(A)$, lo que demuestra que $U \cap int(A) \neq \emptyset$.

Lo anterior demuestra que $A \subset \overline{int(A)}$, como $\overline{int(A)} \subset A$, concluimos que $A = \overline{int(A)}$. Por lo tanto $A \in D(G)$ y $D(G) = C(X) - F_1(G)$. ■

Observación 6.5 *Si G es una gŕafica finita, por las Proposiciones 6.3 y 6.4, tenemos que:*

(a) $M(G) = F_1(G)$,

(b) $D(G) = C(G) - F_1(G) = C(G) - M(G)$.

Más aún, notemos que el hiperespacio de subcontinuos de G se puede describir como:

$$C(G) = D(G) \cup M(G).$$

Ejemplo 6.6 *Sea X un continuo indescomponible.*

Por el Teorema 1.27 tenemos que un continuo es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio tiene interior vacío, así tenemos las siguientes igualdades:

$$M(X) = C(X) - \{X\},$$

y

$$D(X) = \{X\}.$$

En este ejemplo también podemos expresar al hiperespacio de subcontinuos de X mediante los hiperespacios de subcontinuos regulares y magros, de la siguientes forma:

$$C(X) = D(X) \cup M(X).$$

Los ejemplos anteriores motivan a pensar en el siguiente problema

Problema 6.7 *¿Para qué familias de continuos se cumple alguna de las siguientes relaciones:*

(a) $M(X) = F_1(X)$,

(b) $D(X) = C(X) - F_1(X)$,

(c) $D(X) = C(X) - M(X)$,

(d) $C(X) = D(X) \cup M(X)$*?*

En las siguientes secciones mostraremos los resultados que obtuvimos en relación el Problema 6.7.

6.2. Una Dendrita Especial

En esta sección estudiaremos los subcontinuos regulares y magros de una dendrita muy particular, que posteriormente jugará un papel muy importante para dar algunas soluciones al Problema 6.7.

Definición 6.8 *En* $\mathbb{R}^2$ *sea* $L = [0,1] \times \{0\}$ *y para toda* $n \in \mathbb{N}$*, si* $m \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$ *definimos:*

$$L_m = \{\tfrac{m}{2^n}\} \times [0, \tfrac{1}{n}].$$

La dendrita $\mathcal{D}_1$ *es el continuo localmente conexo determinado por (Figura 6.1):*

$$\mathcal{D}_1 = L \cup \Big[\bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{L_m : m \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}\big\}\Big].$$

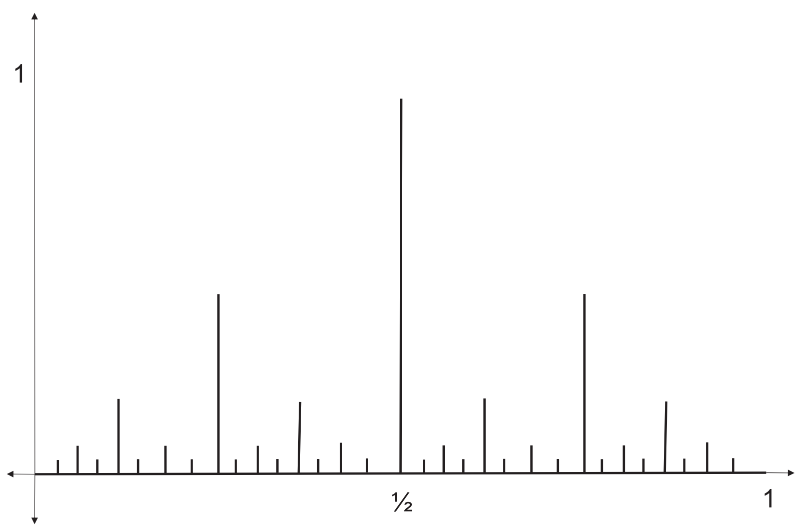

Figura 6.1: La Dendrita $\mathcal{D}_1$.

A continuación describimos a la dendrita $\mathcal{D}_1$ de una forma más general, que hace más fácil identificarla como subespacio de un continuo cualquiera.

Definición 6.9 *Un continuo Y es una dendrita $\mathcal{D}_1$, si existen:*

(a) *Un arco pq contenido en Y con extremos p y q.*

(b) *Un conjunto denso y numerable $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $pq - \{p, q\}$.*

(c) *Un conjunto numerable $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $Y - pq$.*

(d) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, un arco $x_n y_n$ con extremos x_n y y_n.*

Que satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $x_n y_n \cap pq = \{x_n\}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(2) $x_n y_n \cap x_m y_m = \emptyset$ *para cualesquiera* $n \neq m$.

(3) *diám*$(x_n y_n)$ *es menor que* $\frac{1}{n}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $Y = pq \cup [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n]$.

Observación 6.10 *Si $Y = pq \cup [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n]$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$, siguiendo la notación de la Definición 6.9, $x_n y_n$ es un arco libre, para toda $n \in \mathbb{N}$, pues:*

$$X - (x_n y_n - \{x_n, y_n\}) = pq \cup [\bigcup_{m \neq n} x_n y_n] \cup \{y_n\}$$

El complemento de $x_n y_n - \{x_n, y_n\}$ en X, es un subconjunto cerrado.

Como una aplicación de algunos resultados que obtuvimos en el Capítulo 3, demostremos que el hiperespacios de subcontinuos magros es un continuo para toda dendrita $\mathcal{D}_1$.

Proposición 6.11 *Si $Y = pq \cup [\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n]$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$, entonces $M(Y)$ es un continuo.*

Demostración. Por el Corolario 3.15, basta demostrar que $\mathcal{A}_Y$, la unión de los arcos libres de Y, es denso en Y.

Por la Observación 6.10 tenemos que $x_n y_n$ es un arco libre, así tenemos que $x_n y_n \subset \mathcal{A}_Y$, para toda $n \in \mathbb{N}$, como además $\{x_n \in pq : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en pq, concluimos que:

$$Y \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n} \subset \overline{\mathcal{A}_Y} \subset Y.$$

Lo que demuestra que $\mathcal{A}_Y$ es denso en Y y concluimos que $M(Y)$ es un continuo. ■

Lema 6.12 *Si X es un continuo y $Y = pq \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n]$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$ contenida en X, entonces $pq \in M(X)$*

Demostración. Sean $z \in pq$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n \in pq : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en pq, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ y que además diám$(x_N y_N) < \frac{\varepsilon}{2}$, lo que implica que $x_N y_N \subset B_\varepsilon(z)$.

Como $y_N \notin pq$, concluimos que $B_\varepsilon(z) \cap (X - pq) \neq \emptyset$, lo que demuestra que $int(pq) = \emptyset$. ■

6.3. Hereditariamente Localmente Conexos

6.3.1. Sobre $M(X) = F_1(X)$

En esta sección clasificaremos a la familia de los continuos que cumplen que su hiperespacio de subcontinuos magros coincide con su hiperespacio de singulares.

Lema 6.13 *Sea X un continuo que no es localmente conexo. Entonces existe un subcontinuo A no degenerado tal que $A \in M(X)$.*

Demostración. Como X no es localmente conexo, entonces X contiene un subcontinuo de convergencia [10, Teorema 5.12]; es decir, existe un subcontinuo no degenerado A de X y existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$, tal que $\lim A_n = A$ y $A_n \cap A = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Verifiquemos que $A \in M(X)$.

Supongamos que $int(A) \neq \emptyset$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $x \in A$ tales que $x \in B_\varepsilon(x) \subset A$. Como $\lim A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_N) < \varepsilon$.

Por el Lema 1.32, tenemos que $A \subset N(\varepsilon, A_N)$, lo que implica que podemos tomar $a \in A_N$, tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Por lo tanto $a \in B_\varepsilon(x) \subset A$, lo que demuestra que $A \cap A_N \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $int(A) = \emptyset$. ■

Teorema 6.14 *Sea X un continuo. Si $M(X) = F_1(X)$, entonces X es hereditariamente localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es hereditariamente localmente conexo, entonces existe un subcontinuo no degenerado Y de X que no es localmente conexo.

Por el Lema 6.13, existe un subcontinuo no degenerado A de Y tal que $A \in M(Y)$. Como $int_Y(A) = \emptyset$, tenemos que $int_X(A) = \emptyset$; así $A \in M(X)$, lo que es una contradicción ya que A es no degenerado y $M(X) = F_1(X)$. ■

El Teorema 6.14 nos indica que la propiedad de que el hiperespacio de subcontinuos magros coincida con el hiperespacios de singulares, sólo tiene sentido en la familia de los continuos hereditariamente localmente conexos.

A continuación enunciaremos algunos resultados agradables en relación al Problema 6.7 y que involucran a la familia de los continuos hereditariamente localmente conexos.

Afirmación 6.15 *Sea X un continuo. Si $M(X) = F_1(X)$, entonces X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Supongamos que $Y = pq \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n]$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$ contenida en X, por el Lema 6.12, tenemos que el arco pq es un subcontinuo no degenerado de X con interior vacío, lo que es una contradicción. Por lo tanto X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$ ■

Lema 6.16 *Sea X un continuo localmente conexo. Si existe un arco $L \in M(X)$, entonces X contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Por el Teorema 1.19, podemos suponer que la métrica d de X es convexa. Sea $L \in M(X)$ un arco con extremos pq. Consideremos una colección de subconjuntos abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X, tales que $\{U_n \cap pq : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para el arco pq y que además diám$(\overline{U_n}) < \frac{1}{n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a demostrar por inducción que, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un arco $x_n y_n$, de tal forma que los arcos $x_1 y_n, \ldots, x_n y_n$ cumplen las siguientes propiedades:

1. $x_iy_i \cap pq = \{x_i\}$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $x_iy_i \cap x_jy_j = \emptyset$, para cualesquiera $i \neq j$,
3. $x_iy_i \subset U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
4. $\text{diám}(x_iy_i) < \frac{1}{i}$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostremos la base de inducción para $n = 1$.

Sea $z_1 \in U_1 \cap (pq - \{p, q\})$ y consideremos un abierto conexo V_1 en X tal que $z_1 \in V_1 \subset U_1$ y $\overline{V}_1 \cap \{p, q\} = \emptyset$. Como $pq \in M(X)$, existe $y_1 \in V_1 - pq$.

Por ser X localmente conexo y ser V_1 un abierto conexo, por el Lema 1.20 tenemos que V_1 es arco conexo. Sea z_1y_1 un arco contenido en V_1 de z_1 a y_1 y consideremos x_1 el punto en el arco z_1y_1 de tal forma que el subarco x_1y_1 contenido en z_1y_1 y con extremos x_1 y y_1, cumple que $x_1y_1 \cap pq = \{x_1\}$.

Como $x_1y_1 \subset \overline{U}_1$ y $\text{diám}(\overline{U_1}) < 1$, al tener X métrica convexa, tenemos que $\text{diám}(x_ny_n) < 1$. Por lo tanto el arco x_1y_1, cumple las condiciones 1, 2, y 3.

Supongamos que el resultado es válido para una $n \geq 1$, es decir, existen $x_1y_1, \ldots, x_ny_n$, arcos no degenerados en X, tales que:

1. $x_iy_i \cap pq = \{x_i\}$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $x_iy_i \cap x_jy_j = \emptyset$, para cualesquiera $i \neq j$,
3. $x_iy_i \subset U_i$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
4. $\text{diám}(x_iy_i) < \frac{1}{i}$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Verifiquemos que el resultado es válido para $n + 1$.

Sean $z_{n+1} \in U_{n+1} \cap (pq - \{p, q, x_1, \ldots, x_n\})$ y V_{n+1} un abierto conexo en X tales que $z_{n+1} \in V_{n+1} \subset U_{n+1}$, $\overline{V_{n+1}} \cap \{p, q\} = \emptyset$ y $\overline{V_{n+1}} \cap x_iy_i = \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como $pq \in M(X)$, existe $y_{n+1} \in V_{n+1} - pq$.

Por ser X localmente conexo y ser V_{n+1} un abierto conexo, tenemos que V_{n+1} es arco conexo. Sea $z_{n+1}y_{n+1}$ un arco contenido en V_{n+1} de z_{n+1} a y_{n+1} y consideremos x_{n+1} el punto en el arco $z_{n+1}y_{n+1}$, de tal forma que el subarco $x_{n+1}y_{n+1}$, contenido en $z_{n+1}y_{n+1}$, cumple que $x_{n+1}y_{n+1} \cap pq = \{x_{n+1}\}$ (Figura 6.2).

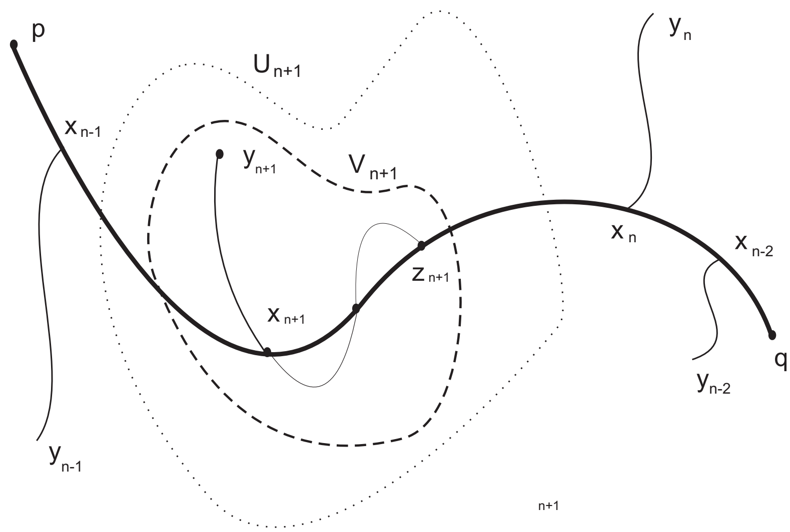

Figura 6.2: Construcción de la Dendrita $\mathcal{D}_1$.

Por construcción, tenemos que $x_{n+1}y_{n+1} \cap pq = \{x_{n+1}\}$ y $x_{n+1}y_{n+1} \subset U_n$

Como $y_{n+1}x_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1}$ y diá$m(\overline{U_{n+1}}) < \frac{1}{n+1}$, al tener X métrica convexa, concluimos que diám$(y_{n+1}x_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$.

Dado que $\overline{V}_{n+1} \cap x_iy_i = \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_{n+1}y_{n+1} \subset V_{n+1}$, tenemos que $x_{n+1}y_{n+1} \cap x_iy_i = \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lo anterior demuestra que los arcos $x_1y_1, \ldots, x_{n+1}y_{n+1}$ cumplen las condiciones 1, 2, 3 y 4.

Esto completa la construcción inductiva y prueba la existencia de una sucesión de arcos $\{x_ny_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface las propiedades requeridas.

Notemos que si z es un punto cualquiera en el arco pq y W es un abierto tal que $z \in W$, al ser $\{U_n \cap pq : n \in \mathbb{N}\}$ una base para pq, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{N_0} \cap pq \subset W$. Por las propiedades 1 y 3, tenemos que $x_{N_0} \in x_{N_0}y_{N_0} \cap pq \subset U_{N_0} \cap pq \subset W$. Esto demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en pq.

Por la propiedad 1, tenemos que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión contenida en $X - pq$.

Con lo anterior tenemos que, para el conjunto:

$$Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right] \cup pq$$

Existen:

(a) Un arco pq contenido en Y con extremos p y q,

(b) Un conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en pq,

(c) Un conjunto numerable $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ contenido $Y - pq$,

(d) Un arco $x_n y_n$ con extremos x_n y y_n contenido en Y.

Y que por las condiciones 1, 2, 3 y 4, se cumple que:

(1) $x_n y_n \cap pq = \{x_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

(2) $x_n y_n \cap x_m y_m = \emptyset$ para cualesquiera $n \neq m$,

(3) $\text{diám}(x_n y_n) < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

(4) $Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right] \cup pq$.

Lo que demuestra que Y es una dendrita $\mathcal{D}_1$. ■

Teorema 6.17 *Sea X es un continuo hereditariamente localmente conexo, entonces $M(X) = F_1(X)$ si y sólo si X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Supongamos que X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.

Si $F_1(X)$ es un subconjunto propio de $M(X)$, tenemos que existe $A \in M(X)$ tal que A es no degenerado.

Por ser X hereditariamente localmente conexo, tenemos que A es arco conexo, lo que implica que existe un arco no degenerado L contenido en A. Como $int(A) = \emptyset$ y $L \subset A$, tenemos que $L \in M(X)$, por el Lema 6.16, tenemos que X contiene una dendrita $\mathcal{D}_1$; lo que es una contradicción.

Por lo tanto $M(X) = F_1(X)$.

La otra implicación la obtenemos gracias a la Afirmación 6.15, que dice que, para cualquier continuo X tal que $M(X) = F_1(X)$, se tiene que X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.

Esto termina la demostración de este teorema. ■

El siguiente espacio muestra el ejemplo de un continuo que ilustra que la condición de ser hereditariamente localmente conexo no se puede eliminar de las hipótesis en el Teorema 6.17.

Definición 6.18 *Sean X y Y dos espacios topológicos ajenos, entonces:*

(a) *La **unión libre** de X y Y, que denotamos por $X + Y$, es el conjunto $X \cup Y$ con la topología determinada por: $U \subset X + Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y.*

(b) *Si $A \subset X$ es cerrado y $f : A \mapsto Y$ es una función continua, la **adjunción de X con Y por la función** f, que denotamos por $X \cup_f Y$, es el espacio que resulta de $X + Y$ al identificar a con $f(a)$, para toda $a \in A$.*

Ejemplo 6.19 *Denotemos por $\mathcal{G}$ a la* Dendrita de Gehman *y sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor formado por los puntos extremos de $\mathcal{G}$. Si $\boldsymbol{P}$ es un continuo hereditariamante indescomponible, por [10, Teorema 7.7], existe una función continua y suprayectiva $f : \mathcal{C} \mapsto \boldsymbol{P}$. Denotemos por Z el espacio adjunción de $\mathcal{G}$ con $\boldsymbol{P}$ por la función f (Figura 6.3):*

$$Z = \mathcal{G} \cup_f \boldsymbol{P}.$$

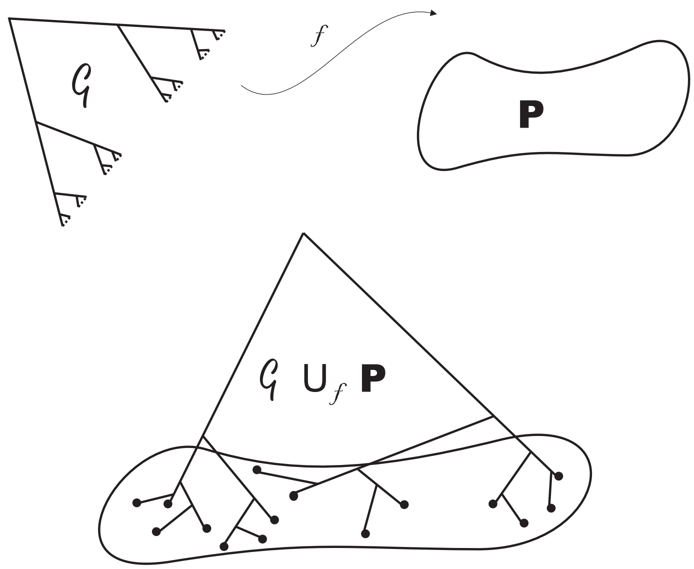

Figura 6.3: El Espacio Adjunción de $\mathcal{G}$ con $\mathbf{P}$.

Afirmación 6.20 *Sea $Z = \mathcal{G} \cup_f \boldsymbol{P}$ el espacio adjunción de $\mathcal{G}$ con $\boldsymbol{P}$ por la función f, entonces:*

(a) Z es localmente conexo,

(b) Z no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$,

(c) $F_1(Z) \subsetneq M(Z)$,

(d) Z no es hereditariamente localmente conexo.

Demostración. Sean $i : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G} + \mathbf{P}$ la inclusión y $\pi : \mathcal{G} + \mathbf{P} \mapsto Z$ la proyección natural.

(a) Como $\pi \circ i : \mathcal{G} \mapsto Z$ es continua y suprayectiva, como $\mathcal{G}$ es un continuo localmente conexo, obtenemos que Z es un continuo localmente conexo.

(b) Supongamos que $Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right] \cup pq$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$ contenida en Z; por el Lema 6.12, tenemos que $pq \in M(Z)$.

Notemos que $pq \subsetneq \pi(\mathbf{P})$, ya que al ser $\pi(\mathbf{P})$ hereditariamente indescomponible, no contiene arcos. Sean $y \in pq - \pi(\mathbf{P})$ y C_y la componente de $\pi(\mathcal{G}) - \pi(\mathbf{P})$ que tiene a y. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C_y}$ es un subcontinuo no degenerado de Z.

Por lo tanto $i^{-1}(\pi^{-1}(\overline{C}_y))$ es un subcontinuo no degenerado de $\mathcal{G}$. Si observamos la dendrita de Gehman, notaremos que todos sus subcontinuos no degenerados tienen interior diferente del vacío. Entonces existe un abierto no vacío U en $\mathcal{G}$ tal que $U \subset i^{-1}(\pi^{-1}(\overline{C}_y)) - \mathcal{C}$, lo que implica que $\pi(i(U))$ es un abierto no vacío contenido en pq, lo que es una contradicción.

Así concluimos la demostración de este inciso.

(c) Si A es un subcontinuo propio y no degenerado de $\mathbf{P}$, entonces $A \subset \mathcal{G} + \mathbf{P}$ tiene interior vacío, lo que implica que $\pi(A)$ es un subcontinuo no degenerado de Z con interior vacío, lo que demuestra que $F_1(Z) \subsetneq M(Z)$.

(d) Notemos que $\pi(\mathbf{P}) \subset Z$ es un subcontinuo de Z que no es localmente conexo. ■

6.3.2. Sobre $D(X) = C(X) - F_1(X)$

En esta sección clasificaremos a la familia de continuos que cumple que su hiperespacio de subcontinuos regulares coincide con sus subcontinuos no degenerados y estudiaremos algunas otras relaciones entre los hiperespacios de los continuos hereditariamente localmente conexos.

Teorema 6.21 *Sea X un continuo. Si $D(X) = C(X) - F_1(X)$, entonces X es hereditariamente localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es hereditariamente localmente conexo, entonces existe un subcontinuo Y de X que no es localmente conexo.

Como Y no es localmente conexo, por el Lema 6.13, existe un subcontinuo no degenerado A de Y tal que $int_Y(A) = \emptyset$, lo que implica que $A \in M(X)$; así $D(X) \neq C(X) - F_1(X)$.

Por lo tanto X es hereditariamente localmente conexo. ■

El Teorema 6.21 nos indica que la propiedad de que el hiperespacio de subcontinuos regulares coincida con los subcontinuos no degenerados, sólo tiene sentido en la familia de los continuos hereditariamente localmente conexos.

Afirmación 6.22 *Sea X un continuo. Si $D(X) = C(X) - F_1(X)$, entonces X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Supongamos que $Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right] \cup pq$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$ contenida en X. Por el Lema 6.12, tenemos que $pq \in M(X)$, lo que implica que $pq \notin D(X)$. Como pq es un subcontinuo no degenerado, obtenemos que $D(X) \neq C(X) - F_1(X)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$. ■

Lema 6.23 *Sea X un continuo, si A es un subcontinuo no degenerado de X que no es regular, entonces existe $B \in M(X) - F_1(X)$.*

Demostración. Sea $A \in C(X) - F_1(X)$ y tal que A no es regular, entonces $A - \overline{int(A)}$ es diferente del vacío. Sea $a \in A - \overline{int(A)}$ y denotemos por C_a a la componente de $A - \overline{int(A)}$ que tiene a a.

Por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C}_A$ es un subcontinuo no degenerado de X. Verifiquemos que $\overline{C}_a \in M(X)$.

Supongamos que existen $x \in \overline{C}_a$ y un abierto U en X tales que $x \in U \subset \overline{C}_a$. Sea $z \in U \cap C_a$, como $X - \overline{int(A)}$ es un abierto en X, obtenemos que $U \cap (X - \overline{int(A)})$ es un abierto en X tal que:

$$z \in U \cap (X - \overline{int(A)}) \subset \overline{C}_a \cap (X - \overline{int(A)}) \subset A - \overline{int(A)}.$$

Por lo tanto z es un punto interior de A que no pertenece a $\overline{int(A)}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\overline{C}_a \in M(X)$ y terminamos la demostración de este lema. ■

Teorema 6.24 *Si X es un continuo hereditariamente localmente conexo, entonces $D(X) = C(X) - F_1(X)$ si y sólo si X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.*

Demostración. Supongamos que X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$.

Como todo elemento en $D(X)$ es no degenerado, tenemos que $D(X) \subset C(X) - F_1(X)$. Demostremos la otra contención.

Supongamos que existe $A \in C(X) - F_1(X)$ tal que A no es regular, por el Lema 6.23, existe $B \in M(X)$ que no es degenerado.

Como X es hereditariamente localmente conexo, por el Teorema 1.13 tenemos que B es un subcontinuo arco conexo, así existe un arco no degenerado L contenido en B. Como $B \in M(X)$, tenemos que $L \in M(X)$, y por el Lema 6.16, X contiene una dendrita $\mathcal{D}_1$, lo que es una contradicción.

Lo anterior demuestra que todo subcontinuo no degenerado de X es regular, y termina la demostración de esta implicación.

Para demostrar la otra implicación de este teorema, recordemos que la Afirmación 6.22, nos garantiza que si un continuo cumple que $D(X) = C(X) - F_1(X)$, entonces X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$. ■

Observación 6.25 *Sea $Z = \mathcal{G} \cup_f \boldsymbol{P}$ la adjunción de la dendrita de Gehman $\mathcal{G}$ con un continuo hereditariamente indescomponible $\boldsymbol{P}$ como en el Ejemplo 6.19.*

Por la Afirmación 6.20 tenemos que:

(a) Z es localmente conexo,

(b) Z no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$,

(c) $F_1(Z) \subsetneq M(Z)$,

(d) Z no es hereditariamente localmente conexo.

De esta forma, si $A \in M(Z)$ es no degenerado, entonces $A \in C(Z) - F_1(Z)$, lo que implica que $D(Z) \neq C(Z) - F_1(Z)$.

Por lo tanto la hipótesis de ser hereditariamente localmente conexo no se puede eliminar del Teorema 6.24.

Corolario 6.26 *Si X es un continuo hereditariamente localmente conexo y X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$, entonces $D(X) = C(X) - M(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 6.17 tenemos que $F_1(X) = M(X)$; y por el Teorema 6.24 tenemos que $D(X) = C(X) - F_1(X)$, lo que implica que $D(X) = C(X) - M(X)$. ■

Los siguientes resultados nos ayudan a proporcionar una mejor caracterización para los continuos hereditariamente localmente conexos, con relación al Problema 6.7.

Lema 6.27 *Sea X un continuo localmente conexo. Si $D(X) = C(X) - M(X)$, entonces $M(X) = F_1(X)$.*

Demostración. Como $F_1(X) \subset M(X)$, sólo tenemos que demostrar la otra contención.

Supongamos que existe un subcontinuo no degenerado A de X tal que $A \in M(X)$. Sean p y q dos puntos diferentes de A y U un abierto conexo en X, tal que $p \in U$, pero $q \notin \overline{U}$. Sea $B = A \cup \overline{U}$.

Verifiquemos que $q \notin \overline{int(B)}$.

Supongamos lo contrario. Como $V = X - \overline{U}$ es un abierto en X tal que $q \in V$, entonces $int(B) \cap V$ es un abierto no vacío. Pero $int(B) \cap V \subset B - U \subset A$, lo que implica que $int(B) \cap V \subset A$, lo que es una contradicción ya que $A \in M(X)$.

Por lo tanto $B \in C(X) - M(X)$ es tal que $B \notin D(X)$, lo que es una contradiccón. Por lo tanto $M(X) = F_1(X)$. ■

Teorema 6.28 *Si X es un continuo, entonces las siguentes condiciones son equivalentes:*

1. *$D(X) = C(X) - M(X)$,*
2. *$C(X) = D(X) \cup M(X)$.*

Demostración. Supongamos que $D(X) = C(X) - M(X)$. Entonces $D(X)$ es el complemento de $M(X)$. De modo que $C(X) = D(X) \cup M(X)$.

Supongamos ahora que $C(X) = D(X) \cup M(X)$. Claramente $C(X) - M(X) \subset D(X)$.

Como $D(X)$ es ajeno a $M(X)$, podemos concluir que $D(X) = C(X) - M(X)$. ■

Corolario 6.29 *Si X es un continuo hereditariamente localmente conexo, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) X no contiene dendritas $\mathcal{D}_1$,

(ii) $M(X) = F_1(X)$,

(iii) $D(X) = C(X) - F_1(X)$,

(iv) $D(X) = C(X) - M(X)$,

(v) $C(X) = D(X) \cup M(X)$.

Demostración. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Se cumple por el Teorema 6.17.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Se cumple por el Teorema 6.24.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Si $M(X) = F_1(X)$, entonces $D(X) = C(X) - F_1(X) = C(X) - M(X)$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ Se cumple por el Lema 6.27.

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ Se cumple por el Teorema 6.28. ■

A continuación enunciaremos algunas definiciones y resultados que nos permitirán extender las equivalencias del Corolario 6.29 y podremos clasificar algunas familias más específicas de continuos con relación al Problema 6.7.

Lema 6.30 *Sea X un continuo. Si $L \in C(X) - M(X)$ es un arco, entonces L contiene un subarco libre.*

Demostración. Sea $L \in C(X) - M(X)$ un arco con extremos p y q.

Como $int(L) \neq \emptyset$, existen un abierto U en X y un punto $a \in L$, tales que $a \in U \subset L$. Sea $\beta : [0,1] \mapsto L$ un homeomorfismo con $\beta(0) = p$ y $\beta(1) = q$. Cosideremos $x_a \in (0,1)$, tal que $\beta(x_a) = a$. Por la continuidad de β, existe $y_a \in (x_a, 1)$ tal que $\beta([x_a, y_a]) \subset U$.

Por último notemos que, por ser β un encaje, se tiene que $\beta([x_a, y_a]) - \{\beta(x_a), \beta(y_a)\} = U \cap [X - (\beta([0, x_a]) \cup \beta([y_a, 1]))]$ es un abierto en X. ■

Dados un continuo X y un subcontinuo Y de X, definimos $\mathcal{B}_Y = \bigcup\{\alpha \subset X : \alpha \text{ es un arco libre en } X \text{ y } \alpha \subset Y\}$.

Teorema 6.31 *Sea X un continuo, entonces $D(X) = C(X) - F_1(X)$ si y sólo si para todo $Y \in C(X) - F_1(X)$, se cumple que $\overline{\mathcal{B}}_Y = Y$.*

Demostración. Supongamos que $D(X) = C(X) - F_1(X)$, por el Teorema 6.21, tenemos que X es hereditariamente localmente conexo.

Sea $Y \in C(X) - F_1(X)$. Como $\mathcal{B}_Y \subset Y$, entonces $\overline{\mathcal{B}}_Y \subset Y$. Demostremos la otra contención.

Sean $x \in Y$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Sea yx un arco en Y que una al punto x con el punto y tal que $xy \subset U$. Como $xy \in C(X) - F_1(X) = D(X)$, por el Lema 6.30, existe un arco libre J de X contenido en xy. Por lo tanto $x \in \overline{\mathcal{B}}_Y \subset Y$.

Lo anterior demuestra que $Y = \overline{\mathcal{B}}_Y$.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que para todo $Y \in C(X) - F_1(X)$, se cumple que $\overline{\mathcal{B}}_Y = Y$.

Como $D(X) \subset C(X) - F_1(X)$, sólo es necesario demostrar la otra contención.

Sea $Y \in C(X) - F_1(X)$. Verifiquemos que $int(\mathcal{B}_Y)$ es denso en Y.

Sean $x \in Y$ y U un abierto en X tales que $x \in U$, como $\mathcal{B}_Y$ es denso en Y, existe un arco libre pq en X tal que $pq \cap U \neq \emptyset$, así $U \cap (pq - \{pq\}) \neq \emptyset$. Como $(pq - \{pq\}) \subset int(\mathcal{B}_Y)$ concluimos que $x \in \overline{int(\mathcal{B}_Y)}$. Lo que demuestra que $Y = \overline{int(\mathcal{B}_Y)}$.

Para concluir la demostración de esta implicación, notemos que $int(\mathcal{B}_Y) \subset int(Y)$, de donde tenemos que $Y = \overline{int(\mathcal{B}_Y)} \subset \overline{int(Y)} \subset Y$; por lo tanto $\overline{int(Y)} = Y$.

Lo anterior demuestra que $D(X) = C(X) - F_1(X)$. ■

Definición 6.32 *Un continuo A es un n-odo simple con vértice p, si A es la unión de n arcos no degenerados $pq_1, \ldots, pq_n$ con extremos p y q_i para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que para cualesquiera $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ con $j \neq k$, se tiene que $pq_j \cap pq_k = \{p\}$.*

Definición 6.33 *Sean X un continuo localmente conexo y p un punto en X.*

(a) *Decimos que el* ***orden de*** *p en X es mayor o igual que n, si existe un n-odo con vertice en p.*

(b) *Decimos que el orden p en X es igual a n, si el orden de p en X es mayor o igual que n y el orden de p en X no es mayor o igual que $n+1$. Es decir, existe un n-odo con vertice en p pero no existe ningún $(n+1)$-odo con vértice en p.*

(c) *Si el orden de p en X es mayor o igual que n para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que el orden de p en X es infinito.*

(d) *Si $p \in X$ vamos a denotar al orden de p en X por $Ord_X(p)$.*

Observación 6.34 *Si pq es un arco libre en X, entonces para todo $x \in pq - \{p, q\}$ se cumple que $Ord_X(x) = 2$.*

Lema 6.35 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Todo arco contiene un subarco libre,*

(b) *Todo arco J en X satisface que $J = \overline{\mathcal{B}_J}$,*

(c) *Todo arco J en X cumple que $\{x \in J : Ord_X(x) > 2\}$ no es denso en J.*

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b).

Sea J un arco en X. Si $x \in J$ y U es un abierto en X tal que $x \in U$, existe un punto $z \in J - \{x\}$, tal que el subarco xz de J cumple que $xz \subset U$. Por hipótesis, existe un arco libre L de X contenido en xz. Por lo tanto $U \cap \mathcal{B}_J \neq \emptyset$.

Lo anterior demuestra que $J \subset \overline{\mathcal{B}_J}$, como $\overline{\mathcal{B}_J} \subset J$, concluimos que $J = \overline{\mathcal{B}_J}$.

Supongamos (b) y demostremos (c).

Sea J un arco en X. Por hipótesis existe un subarco libre pq de J en X, de donde para todo $x \in pq - \{p, q\}$, se cumple que $Ord_X(x) = 2$. Por lo tanto $\{x \in J : Ord_X(x) > 2\}$ no es denso en J.

Supongamos (c) y demostremos (a).

Sea J un arco en X con extremos p y q, como $\{x \in pq : Ord_X(x) > 2\}$ no es denso en pq, existe $x \in J - \overline{\{x \in pq : Ord_X(x) > 2\}}$ tal que $x \notin \{p, q\}$. Sea U un abierto conexo de X tal que $x \in U \subset J - (\overline{\{x \in pq : Ord_X(x) > 2\}} \cup \{p, q\})$.

Demostremos que $U \subset pq$.

Supongamos lo contrario, entonces existe $y \in U - pq$, como U es un abierto conexo en un continuo localmente conexo, por el Teorema 1.20 tenemos que U es arco conexo, de donde existe un arco yx que une a y con x y que está contenido en U.

Sea $r \in yx$ tal que el subarco yr de yx, satisface que $yr \cap pq = \{r\}$; de esta forma el orden de r es mayor que 2, lo que es una contradicción. Por lo tanto $U \subset pq$.

Como U es un abierto conexo de X contenido en arco pq, existen dos puntos diferentes $a, b \in pq$ tales que, al considerar el subarco ab de pq que une a con b, se cumple que $\overline{U} = ab$. Esto demuestra que ab es un arco libre contenido en J. ■

Corolario 6.36 *Sea X un continuo hereditariamente localmente conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *no contiene dendritas* $\mathcal{D}_1$*,*

(ii) $M(X) = F_1(X)$*,*

(iii) $D(X) = C(X) - F_1(X)$*,*

(iv) $D(X) = C(X) - M(X)$*,*

(v) $C(X) = D(X) \cup M(X)$

(vi) Para todo $Y \in C(X) - F_1(X)$*, se cumple que* $\overline{\mathcal{B}}_Y = Y$

(vii) *Todo arco J en X satisface que $J = \overline{\mathcal{B}_J}$,*

(viii) *Todo arco en X contiene un subarco libre,*

(ix) *Todo arco J en X cumple que $\{x \in J : Ord_X(x) > 2\}$ no es denso en J.*

Demostración. (i), (ii), (iii), (iv) y (v) son equivalentes por el Corolario 6.29.

$(iii) \Leftrightarrow (vi)$. Se cumple por el Teorema 6.31.

$(vi) \Rightarrow (vii)$. Si J es un arco en X, por hipótesis obtenemos que $J = \overline{\mathcal{B}}_J$.

$(vii) \Rightarrow (vi)$. Sea Y un subcontinuo de X, como X es hereditariamente localmente conexo, tenemos que Y es arco conexo, lo que implica que

$$Y = \bigcup\{J \subset Y : J \text{ es un arco}\} = \bigcup\{\overline{\mathcal{B}}_J : J \text{ es subarco de } Y\} \subset \overline{\mathcal{B}}_Y \subset Y.$$

Por lo tanto $Y = \overline{\mathcal{B}_Y}$.

(vii), $(viii)$ y (ix) son equivalentes por el Lema 6.35. ■

6.4. Continuos Localmente Conexos

Definición 6.37 *Sea X un continuo, decimos que un subcontinuo no degenerado A de X es* ***peludo*** *si existe una colección de arcos $\{a_nb_n : n \in \mathbb{N}\}$, con extremos a_n y b_n, tales que:*

(a) *$a_nb_n \cap a_mb_m = \emptyset$, para toda $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$,*

(b) *$a_nb_n \cap A = \{a_n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$,*

(c) *El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A.*

Observación 6.38 *Notemos que si X es un continuo y $Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} x_ny_n\right] \cup pq$ es una dendrita $\mathcal{D}_1$ contenida en X, entonces pq es un subcontinuo peludo de X.*

Lema 6.39 *Sea X un continuo localmente conexo. Si $A \in M(X) - F_1(X)$, entonces A es peludo.*

Demostración. Por el Teorema 1.19 podemos suponer que la métrica d de X es convexa. Consideremos una colección de subconjuntos abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X, tales que $\{U_n \cap A : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base para A.

Vamos a demostrar por inducción que, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un arco $a_n b_n$, tal que los arcos $a_1 b_1, \ldots, a_n b_n$, cumplen las siguientes propiedades:

1. $a_i b_i \cap A = \{a_i\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $a_i b_i \cap a_j b_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$,
3. $a_i b_i \subset U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,

Demostremos la base de inducción para $n = 1$.

Sea $z_1 \in U_1 \cap A$ y consideremos un abierto conexo V_1 en X tal que $z_1 \in V_1 \subset U_1$. Como $A \in M(X)$, existe $b_1 \in V_1 - A$.

Por ser X localmente conexo y ser V_1 un abierto conexo en X, por el Teorema 1.20 tenemos que V_1 es arco conexo. Sea $z_1 b_1$ un arco contenido en V_1 que une a z_1 con b_1 y consideremos el punto a_1 en el arco $z_1 b_1$ de tal forma que el subarco $a_1 b_1$, contenido en $z_1 b_1$, cumple que $a_1 b_1 \cap A = \{a_1\}$. Esto demuestra la base de inducción.

Supongamos que el resultado es válido para una $n \geq 1$, entonces tenemos que existen arcos no degenerados $a_1 b_1, \ldots, a_n b_n$ en X, tales que:

1. $a_i b_i \cap A = \{a_i\}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,
2. $a_i b_i \cap a_j b_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$,
3. $a_i b_i \subset U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$,

Verifiquemos que el resultado es válido para $n + 1$.

Sean $z_{n+1} \in U_{n+1} \cap (A - \{a_1, \ldots, a_n\})$ y V_{n+1} un abierto conexo en X tal que $z_{n+1} \in V_{n+1} \subset U_{n+1}$ y que además $\overline{V_{n+1}} \cap a_i b_i = \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Como $A \in M(X)$, existe $b_{n+1} \in V_{n+1} - A$.

Por ser X localmente conexo y ser V_{n+1} un abierto conexo, por el Teorema 1.20, tenemos que V_{n+1} es arco conexo. Sea $z_{n+1}b_{n+1}$ un arco contenido en V_{n+1} que une a z_{n+1} con b_{n+1} y consideremos el punto a_{n+1} en el arco $z_{n+1}b_{n+1}$, de tal forma que el subarco $a_{n+1}b_{n+1}$ de $z_{n+1}b_{n+1}$, cumple que $a_{n+1}b_{n+1} \cap A = \{a_{n+1}\}$.

Por construcción, tenemos que $a_{n+1}b_{n+1} \cap A = \{a_{n+1}\}$ y $a_{n+1}b_{n+1} \subset U_{n+1}$.

Como $a_{n+1}b_{n+1} \subset \overline{V}_{n+1}$ y $\overline{V}_{n+1} \cap a_ib_i = \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, concluimos que $a_{n+1}b_{n+1} \cap a_ib_i = \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Esto completa la construcción inductiva. Por lo tanto existe la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con las propiedades mencionadas.

Notemos que si z es un punto cualquiera en A y W es un abierto tal que $z \in W$, al ser $\{U_n \cap A : n \in \mathbb{N}\}$ una base para A, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{N_0} \cap A \subset W$. Por las propiedades 1 y 3 de la inducción, tenemos que $a_{N_0} \in a_{N_0}b_{N_0} \cap A \subset U_{N_0} \cap A \subset W$. Esto demuestra que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A.

Con lo anterior tenemos que $\{a_nb_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de arcos con extremos a_n y b_n tales que:

(a) $a_nb_n \cap A = \{a_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$,

(b) $a_nb_n \cap a_mb_m = \emptyset$ para cualesquiera $n \neq m$,

(c) El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en A.

Esto demuestra que A es peludo. ■

Teorema 6.40 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces $D(X) = C(X) - M(X)$ si y sólo si X no contiene subcontinuos peludos.*

Demostración. Supongamos que $D(X) = C(X) - M(X)$.

Si existe un continuo peludo A en X, entonces $int(A) = \emptyset$. Sean p y q dos puntos diferentes en A y tomemos un abierto conexo U de X tal que $p \in U$

pero $q \notin \overline{U}$. Notemos que $B = A \cup \overline{U}$ es un subcontinuo de X con interior diferente del vacío.

Como $B \in C(X) - M(X) = D(X)$, tenemos que $B = \overline{int(B)}$. Como $q \in B$, al ser $V = X - \overline{U}$ un abierto tal que $q \in V$, se cumple que $V \cap int(B)$ es un abierto diferente del vacío. Como $V \subset A - U$ tenemos que $V \cap int(B) \subset A$ lo que es una contradicción.

Como la contradiccón nació de suponer que X contiene subcontinuos peludos, terminamos la demostración de esta implicación.

Para demostrar la otra implicación, supongamos que X no contiene subcontinuos peludos.

Si $A \in C(X)$ es no degenerado y A no es regular, por el Lema 6.23, tenemos que existe $B \in M(X) - F_1(X)$; y por el Lema 6.39 obtenemos que B es un subcontinuo peludo, lo que es una contradicción. Por lo tanto $C(X) - F_1(X) \subset D(X)$.

Por lo tanto $C(X) - M(X) \subset D(X)$ y como $D(X) \subset C(X) - M(X)$, concluimos que $D(X) = C(X) - M(X)$. ■

Teorema 6.41 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces $M(X) = F_1(X)$ si y sólo si X no contiene subcontinuos peludos.*

Demostración. Supongamos que $M(X) = F_1(X)$.

Si A es un subcontinuo peludo de X, entonces A es no degenerado y $int(A) = \emptyset$, lo que implica que $A \in M(X) - F_1(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto X no contiene subcontinuos peludos.

Supongamos que X no contiene subcontinuos peludos.

Si $F_1(X) \subsetneq M(X)$, entonces existe $A \in M(X) - F_1(X)$ y por el Lema 6.39, A es peludo, lo que es una contradicción. Por lo tanto $M(X) = F_1(X)$. ■

Corolario 6.42 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X *no contiene subcontinuos peludos,*

(b) $M(X) = F_1(X)$*,*

(c) $D(X) = C(X) - M(X)$*,*

(d) $C(X) = D(X) \cup M(X)$*.*

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (c)$. Se cumple por el Teorema 6.40.

$(a) \Leftrightarrow (b)$. Se cumple por el Teorema 6.41.

$(c) \Leftrightarrow (d)$. Se cumple por el Teorema 6.28. ■

Para finalizar este capítulo describiremos las relaciones que existen entre los subcontinuos regulares y magros con los subcontinuos y los singulares de una familia particular de continuos.

Observación 6.43 *Recordemos que si* Y *es una compactación del rayo con residuo* X*, entonces existe un encaje* $h : [0,1) \mapsto Y$ *tal que* $\overline{h([0,0))} = Y$ *y* $Y - h([0,\infty)) = X$*.*

Por el Lema 3.12, tenemos que:

$$M(Y) = F_1(Y) \cup C(X).$$

Afirmación 6.44 *Si* Y *es una compactación del rayo con residuo* X*, entonces:*

$$D(Y) = C(Y) - M(Y).$$

Demostración. Como $D(Y) \subset C(Y) - M(Y)$, sólo es necesario demostrar que $C(Y) - M(Y) \subset D(Y)$.

Sea $h : [0,1) \mapsto Y$ la función asociada a Y, y recordemos que, por el Lema 3.11, X es terminal.

Sea $A \in C(Y) - M(Y)$. Analicemos los siguientes casos:

Caso 1. $A \cap X \neq \emptyset$.

Por ser X terminal, tenemos que $A \subset X$ o $X \subsetneq A$. Como $A \notin M(X)$, por la igualdad de la Observación 6.43, obtenemos que $X \subsetneq A$.

Por lo tanto existe $t \in [0,1)$ tal que $A = \overline{h([t,1))}$, de donde $h((t,1)) \subset int(A)$, lo que implica que $A = \overline{h((t,1))} \subset \overline{int(A)} \subset A$. Esto demuestra que $A \in D(Y)$.

Caso 2. $A \cap X = \emptyset$.

Por la igualdad de la Observación 6.43, tenemos que A es un subcontinuo no degenerado en $h([0,1))$. Como h es un homeomorfismo en su imagen, existen $t, s \in [0,1)$ tales que $t < s$ y $h([t,s]) = A$.

Por lo tanto $A = \overline{h((s,t))} \subset \overline{int(A)} \subset A$. Esto demuestra que $A \in D(X)$.

Por los Casos 1 y 2 concluimos que $D(Y) = C(X) - M(X)$. ■

Corolario 6.45 *Si Y es una compactación del rayo con residuo X, entonces:*

1. $D(Y) = C(Y) - M(Y)$,
2. $C(Y) = D(Y) \cup M(Y)$.

Demostración. La igualdad 1., se cumple por la Afirmación 6.44.

La igualdad 2., se tiene por el Teorema 6.28. ■

Es importante mencionar que las relaciones conjuntistas que planteamos en el Problema 6.7, son algo complicadas de estudiar de forma general, ya que éstas dependen mucho de la estructura de los espacios.

Capítulo 7

Funciones entre Continuos

7.1. Introducción

Uno de los principales problemas de la topología, es estudiar qué propiedades topológicas se preservan bajo alguna clase particular de funciones, como por ejemplo, las funciones continuas, monótonas, etc.

En este capítulo, vamos a estudiar el comportamiento que existe entre los hiperespacios de subcontinuos regulares y magros, entre dos continuos, cuando están relacionados por una función. También caracterizaremos algunas condiciones topológicas usando únicamente la estructura de los hiperespacios de subcontinuos regulares y magros.

Para introducir uno de los problemas que estudiaremos, comenzaré analizando un ejemplo particular y sencillo.

Recordemos que el continuo $\overline{sen(\frac{1}{x})}$, es el conjunto en $\mathbb{R}^2$ determinado por:

$$\overline{sen(\tfrac{1}{x})} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) : x \in (0,1]\}.$$

Que cumple las siguientes condiciones (Figura 7.1):

- $\overline{sen(\frac{1}{x})}$ es irreducible,
- $\pi : \overline{sen(\frac{1}{x})} \mapsto [0,1]$, la proyección en la primera coordenada, es una función continua, monótona y suprayectiva.

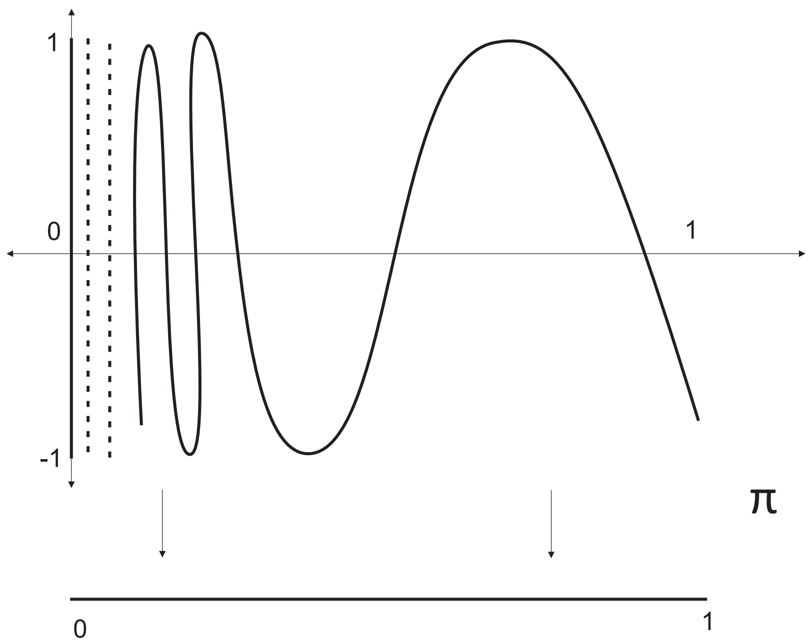

Figura 7.1: El $\overline{sen(\frac{1}{x})}$.

- $\pi^{-1}(t) \in M(X)$, para todo $t \in [0,1]$.

Como $\overline{sen(\frac{1}{x})}$ es una compactación del rayo, por el Lema 3.12 y la Afirmación 6.44, tenemos que:

- $M(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = C(\{0\} \times [-1,1]) \cup F_1(\overline{sen(\frac{1}{x})})$,
- $D(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = C(\overline{sen(\frac{1}{x})}) - M(\overline{sen(\frac{1}{x})})$.

Como $\{0\} \times [-1,1] = \pi^{-1}(0)$, obtenemos que:

$$M(\overline{sen(\tfrac{1}{x})}) = \{A \in C(\overline{sen(\tfrac{1}{x})}) : \pi(A) \in M([0,1])\}.$$

Analicemos qué relación existe entre $D(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ y $D([0,1])$.

Tomemos $A \in D(X)$ y consideremos dos casos.

Caso 1. $\{0\} \times [-1,1] \subsetneq A$.

En este caso existe $t \in [0,1]$ tal que $t < 0$ y $A = \pi^{-1}([0,t])$. Por lo tanto $\pi(A) = [a,b] \in D([0,1])$.

Caso 2. $\{0\} \times [-1,1] \cap A = \emptyset$.

En este caso existen $t, s \in [0,1]$ tales que $1 < t < s$ y $A = \pi^{-1}([t,s])$. Por lo tanto $\pi(A) = [a,b] \in D([0,1])$

Con lo que obtenemos que:

$$D(X) \subset \{A \in \overline{sen(\tfrac{1}{x})} : \pi(A) \in D([0,1])\}.$$

Por otro lado, si $A \in C(\overline{sen(\frac{1}{x})})$ y es tal que $\pi(A) \in D([0,1])$, entonces existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $\pi(A) = [a,b]$. Así:

$$A = \overline{\pi^{-1}((a,b))} \subset \overline{int(\pi^{-1}([a,b]))} \subset \overline{int(A)} \subset A.$$

Con lo que obtenemos que:

$$\{A \in \overline{sen(\tfrac{1}{x})} : \pi(A) \in D([0,1])\} \subset D(\overline{sen(\tfrac{1}{x})}).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

1. $D(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = \{A \in C(\overline{sen(\frac{1}{x})}) : \pi(A) \in D([0,1])\}$,
2. $M(\overline{sen(\frac{1}{x})}) = \{A \in C(\overline{sen(\frac{1}{x})}) : \pi(A) \in M([0,1])\}$.

Como podemos observar, existe una importante relación entre los subcontinuos regulares y magros del $\overline{sen(\frac{1}{x})}$ y los del intervalo $[0,1]$. Ya que mediante una función continua y suprayectiva, podemos determinar a unos en términos de los otros.

Así, es natural pensar en el siguiente problema.

Problema 7.1 *Sea X un continuo y $f : X \mapsto [0,1]$ una función continua, monótona y suprayectiva, entonces ¿bajo qué condiciones se cumple alguna de las siguientes relaciones?*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$,

(ii) $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$.

Como mostraremos a lo largo de las siguientes secciones, la estructura del $\overline{sen(\frac{1}{x})}$, es fundamental para obtener relaciones tan agradables como las que se enuncian en el Problema 7.1.

7.2. Continuos Tipo λ

Definición 7.2 *Sea X un continuo, decimos que X **es tipo** λ, si X es irreducible y existe una función continua monótona y suprayectiva $f : X \mapsto [0,1]$ tal que $f^{-1}(t) \in M(X)$, para todo $t \in [0,1]$.*

Notación 7.3 *Sea X un continuo. Diremos que $f : X \mapsto [0,1]$ es una función canónica para X, si f es continua, monótona y suprayectiva.*

En esta sección clasificaremos a los continuos tipo λ con relación al Problema 7.1

Lema 7.4 *Sea X un continuo. Si $B \in M(X)$ y $A \in C(X)$, entonces $int(A \cup B) = int(A)$.*

Demostración. Sea $x \in int(A \cup B)$, entonces existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset A \cup B$. Supongamos que existe $y \in U$ tal que $y \in B - A$, entonces $U \cap (X - A)$ es un abierto en X tal que $y \in U \cap (X - A) \subset B$, lo que es una contradicción porque $B \in M(X)$. Por lo tanto $U \subset A$, lo que demuestra que $int(A \cup B) \subset A$.

Como $int(A) \subset int(A \cup B)$, concluimos que $int(A \cup B) = int(A)$. ■

Lema 7.5 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Si $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$, entonces $f^{-1}(t) \in M(X)$ para toda $t \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $t \in [0,1]$, como f es monótona, tenemos que $f^{-1}(t) \in C(X)$.

Por otro lado, como $f(f^{-1}(t)) = \{t\} \in M([0,1])$, tenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$. ■

Ejemplo 7.6 *En $\mathbb{R}^2$, consideremos $I^2 = [0,1] \times [0,1]$. Notemos que I^2 tiene las siguientes propiedades:*

1. *La proyección en la primera coordenada $\pi : I^2 \mapsto [0,1]$, es una función continua, monótona y suprayectiva.*

2. *$\pi^{-1}(t) = \{t\} \times [0,1] \in M(I^2)$, para toda $t \in [0,1]$.*

3. $A_t = [0,1] \times \{t\} \in M(I^2)$ *para toda* $t \in [0,1]$, *pero* $\pi([A_t]) = [0,1]$.

Por 1 *y por* 2 *tenemos* π *es una función canónica de* I^2 *tal que* $f^{-1}(t) \in M(X)$, *para todo* $t \in [0,1]$. *Pero por* 3, *tenemos que* $M(X) \neq \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$.

Por lo tanto, el reverso del Lema 7.5 no siempre es verdad.

Teorema 7.7 *Sean* X *un continuo y* f *una función canónica de* X. *Si*

(1) $f^{-1}(t) \in M(X)$ *para toda* $t \in [0,1]$, *y*

(2) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$.

Entonces X *es tipo* λ.

Demostración. Como f es una función canónica para X tal que $f^{-1}(t) \in M(X)$, para todo $t \in [0,1]$, sólo es necesario demostrar que X es irreducible.

Sean $x_0 \in f^{-1}(0)$ y $x_1 \in f^{-1}(1)$, demostremos que X es irreducible entre x_0 y x_1.

Sea $A \in C(X)$ tal que $x_0, x_1 \in A$. Como $0, 1 \in f(A)$, al ser $[0,1]$ irreducible entre 0 y 1, tenemos que $f(A) = [0,1] \in D([0,1])$, lo que demuestra que $A \in D(X)$.

Si $a \in X$, entonces $A \cup f^{-1}(f(a)) \in C(X)$. Como $[0,1] = f(A) \subset f(A \cup f^{-1}(f(a)))$, obtenemos que $f(A \cup f^{-1}(f(a))) = [0,1] \in D([0,1])$, lo que implica que $A \cup f^{-1}(f(a)) \in D(X)$.

Como $f^{-1}(f(a)) \in M(X)$, por el Lema 7.4, tenemos que $\overline{int(A \cup f^{-1}(f(a)))} = \overline{int(A)}$, por lo tanto $a \in A \cup f^{-1}(f(a)) = \overline{int(A \cup f^{-1}(f(a)))} = \overline{int(A)} = A$.

Lo anterior prueba que $X \subset A$. Como $A \subset X$, concluimos que $A = X$.

Por lo tanto X irreducible. ■

Ejemplo 7.8 *En* $\mathbb{R}^2$, *consideremos (Figura 7.2) el continuo*

$$X = \Big([-1,0] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}\Big).$$

Notemos que X tiene las siguientes propiedades:

1. *La proyección sobre la primera coordenada $\pi : X \mapsto [-1,1]$, es una función continua, monótona y suprayectiva.*

2. *$\pi^{-1}(t) \in M(X)$ para todo $t \in [-1,1]$.*

3. *X es irreducible entre $(-1,0)$ y $(1, \sin(1))$.*

4. *$A = ([-1,0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1]) = \pi^{-1}([-1,0])$, cumple que $\pi(A) = [-1,0] \in D([-1,1])$, pero $A \notin D(X)$.*

Por 1, 2 y 3 tenemos que X es un continuo tipo λ, con función canónica π.

Por 4, tenemos que X no satisface $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$.

Por lo tanto, el reverso del Teorema 7.7 no siempre es verdad.

La intuición nos dice que, si X es un continuo y f es una función canónica para X, tal que $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$, entonces se debe cumplir que $f^{-1}(t) \in M(X)$, para toda $t \in [0,1]$. Lo que implicaría, por el Teorema 7.7, que X es tipo λ.

Desgraciadamente sólo lo puedo establecer como conjetura.

Conjetura 7.9 *Sea X un continuo y f es una función canónica para X. Si $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$, entonces X es tipo λ.*

Corolario 7.10 *Sea X un continuo y f una función canónica para X. Si se cumplen las siguientes igualdades:*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$,

(ii) $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$.

Entonces X es un continuo tipo λ.

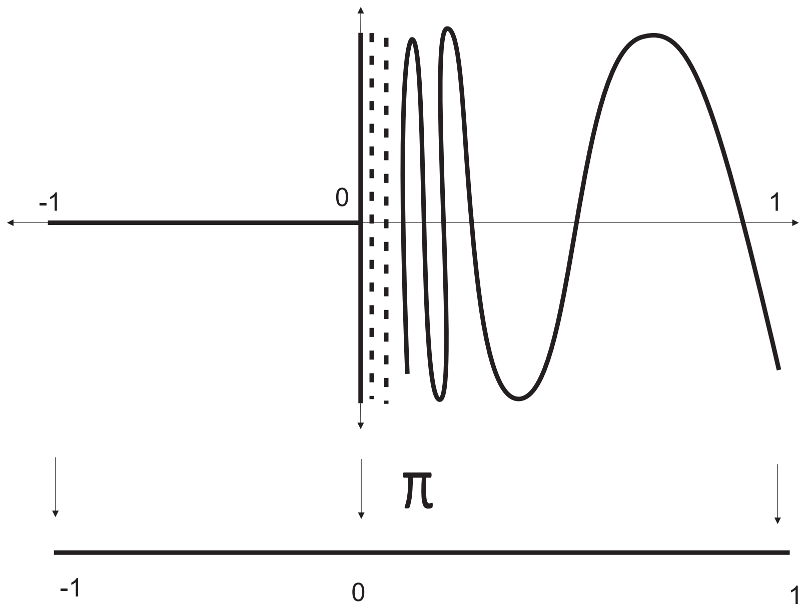

Figura 7.2: Un Continuo Tipo λ.

Demostración. Por el Lema 7.5, tenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$, para todo $t \in [0,1]$; y por el Teorema 7.7, obtenemos que X es tipo λ. ■

Como podemos apreciar en el Corolario 7.10, cuando existe una relación entre los subcontinuos regulares y magros del intervalo y los de un continuo X, mediante una función continua y monótona, entonces el espacio X hereda una propiedad muy importante del intervalo, el ser irreducible.

El Ejemplo 7.8, muestra que el recíproco del Corolario 7.10 no es verdad. A continuación mostraremos una serie de resultados para obtener una caracterización de las igualdades (i) y (ii).

Observación 7.11 *Sean X un continuo tipo λ y f una función canónica para X. Si X es irreducible entre x_0 y x_1, entonces* $\{f(x_0), f(x_1)\} = \{0, 1\}$.

Supongamos por el contrario que, por ejemplo $0 < f(x_0) < f(x_1) \leq 1$, entonces $A = f^{-1}([f(x_0), f(x_1)])$ es un subcontinuo de X tal que $x_0, x_1 \in A$, pero A es un subcontinuo propio de X ya que $A \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $\{0,1\} = \{f(x_0), f(x_1)\}$.

Lema 7.12 *Sean X un continuo tipo λ y f una función canónica de X. Entonces para todo $A \in C(X)$ tal que $f(A) = [a,b] \in D([0,1])$, se cumple que $f^{-1}((a,b)) \subset A$.*

Demostración. Sean x_0 y x_1 dos puntos en X, tal que X sea irreducible entre x_0 y x_1.

Por la Observación 7.11, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$.

Sea $A \in C(X)$ tal que $f(A) \in D([0,1])$, entonces existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $f(A) = [a,b]$. Supongamos que existe $c \in f^{-1}((a,b))$ tal que $c \notin A$. Sea

$$D = f^{-1}([0,a]) \cup A \cup f^{-1}([b,1]).$$

Como $A \cap f^{-1}([0,a]) \neq \emptyset$ y $A \cap f^{-1}([b,1]) \neq \emptyset$, al ser f monótona, tenemos que $D \in C(X)$.

Notemos que $x_0, x_1 \in D$, pero $c \in X - D$, lo que es una contradicción pues X es irreducible entre x_0 y x_1. Esto demuestra que $c \in f^{-1}((a,b))$.

Por lo tanto $f^{-1}((a,b)) \subset A$. ■

Lema 7.13 *Si X es un continuo tipo λ y f es una función canónica de X, entonces:*

$$M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}.$$

Demostración. Demostremos ambas contenciones.

Sea $A \in M(X)$. Supongamos que $f(A) \notin M([0,1])$, entonces $f(A) = [a,b]$ para algunos $a < b$.

Por el Lema 7.12, tenemos que $f^{-1}((a,b)) \subset A$. Pero f es una función continua y (a,b) es abierto en $[0,1]$, lo que implica que $f^{-1}((a,b))$ es un abierto en X contenido en A, lo que es una contradicción ya que $A \in M(X)$. Esto demuestra que $f(A) \in M([0,1])$ y concluimos que

$$M(X) \subset \{A \in C(X) : f(A) \in M(X)\}.$$

Sea $B \in \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$, entonces $f(B) = \{t\}$, para algún $t \in [0,1]$, lo que implica que $B \subset f^{-1}(t)$. Como f es tipo λ, tenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$, y obtenemos que $B \in M(X)$; así concluimos que

$$\{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\} \subset M(X).$$

Esto termina la demostración de este lema. ■

Teorema 7.14 *Si X es un continuo tipo λ y f es una función canónica de X, entonces se cumple que*

$$D(X) = \{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\}.$$

Demostración. Demostremos ambas contenciones.

Sea $A \in D(X)$. Por el Lema 7.13, tenemos que $f(A) \notin M([0,1])$. Por lo tanto existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $f(A) = [a,b]$. Por el Lema 7.12, se cumple que $\overline{f^{-1}((a,b))} \subset A$. Verifiquemos que $\overline{int(A)} \subset \overline{f^{-1}((a,b))}$.

Como $A \subset f^{-1}([a,b]) = f^{-1}(a) \cup \overline{f^{-1}((a,b))} \cup f^{-1}(b)$, al ser X tipo λ, tenemos que $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in M(X)$, así por el Lema 7.4, obtenemos

$$int(A) \subset int(f^{-1}(a) \cup \overline{f^{-1}((a,b))} \cup f^{-1}(b)) = int(\overline{f^{-1}((a,b))}) \subset \overline{f^{-1}((a,b))}.$$

Lo que demuestra que $A = \overline{int(A)} \subset \overline{f^{-1}((a,b))}$. Pero $\overline{f^{-1}((a,b))} \subset A$, así concluimos que $A = \overline{f^{-1}((a,b))}$. Por lo tanto

$$D(X) \subset \{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\}.$$

Demostremos la otra contención.

Sea $[a,b] \in D([0,1])$, entonces (a,b) es un abierto de $[0,1]$, lo que implica que $f^{-1}((a,b)) \subset int(\overline{f^{-1}((a,b))})$. Por lo tanto $\overline{f^{-1}((a,b))} \subset \overline{int(\overline{f^{-1}((a,b))})} \subset \overline{f^{-1}((a,b))}$, esto demuestra que $\overline{f^{-1}((a,b))} \in D(X)$. Con esto tenemos que

$$\{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\} \subset D(X).$$

Lo que termina la demostración de este teorema. ■

Corolario 7.15 *Si X es un continuo tipo λ y f es una función canónica de X, entonces*

1. $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$.
2. $D(X) = \{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\}$,

Demostración. Los incisos *1* y *2* se cumplen por el Lema 7.13 y por el Teorema 7.14, respectivamente. ■

El reverso del Corolario 7.15, sería una buena caracterización de los continuos tipo λ. Desafortunadamente, no hemos logrado demostrar dicho enunciado y tampoco tenemos un ejemplo que muestre que el reverso de este resultado sea falso.

Si se analiza con un poco de calma, dicha condición es casi una realidad, así surge la siguiente conjetura.

Conjetura 7.16 *Sean X un continuo y f una función canónica para X. Entonces X es un continuo tipo λ si y sólo si se satisfacen las siguientes igualdades*

1. $D(X) = \{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\}$,
2. $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$.

Al intentar dar una condición necesaria y suficiente para que un continuo sea tipo λ, pensamos en la siguiente contención:

$$\{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([0,1])\} \subset \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}.$$

Con lo que viene a la mente sustituir la condición 2 del Corolario 7.15, por la condición

$$2\text{'}.\ D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}.$$

Pero desgraciadamente, cuando se hace esta sustitución se pierde más información de la que se pensaría, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.17 *En $\mathbb{R}^2$, consideremos (Figura 7.2) el continuo*

$$X = \Big([-1,0] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}\Big).$$

Recordemos que, por el Ejemplo 7.8, se cumple que X es un continuo tipo λ, donde una función canónica es la proyección sobre la primera coordenada.

Así, por el Corolario 7.15, se cumple que

$$D(X) = \{\overline{f^{-1}((a,b))} : [a,b] \in D([-1,1])\},$$

En este espacio se tiene que $D(X) \neq \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$; pues $A = (\{[-1,0]\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$ no es un elemento en $D(X)$, pero $\pi(A) = [-1,0] \in D([0,1])$.

Este espacio muestra que cuando sustituimos la condicion *2* del Corolario 7.15, por la condición *2'*. $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$, no se puede demostrar un enunciado similar.

Teniendo en mente la igualdad $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$, la siguiente definición nos va a ayudar a obtener resultados más completos y agradables.

Definición 7.18 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Decimos que un punto $t \in [0,1]$ es de* ***cohesión*** *si se cumplen las siguientes contenciones:*

- $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((0,t))}$ *(siempre que $t > 0$), y*
- $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((t,1))}$ *(siempre que $t < 1$).*

Observación 7.19 *En $\mathbb{R}^2$, sea*

$$X = \Big([-1,0] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup \{(x, sen(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}\Big).$$

X es el continuo definido en el Ejemplo 7.8 e ilustrado en la Figura 7.2.

Notemos que el punto $0 \in [-1,1]$, cumple que $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times [-1,1]$ pero

$$\overline{\pi^{-1}((-1,0))} = [-1,0] \times \{0\}.$$

Lo que implica que $\pi^{-1}(0) \not\subset \overline{\pi^{-1}((-1,0))}$. Por lo tanto el punto $0 \in [-1,1]$ no es de cohesión para π.

Observación 7.20 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Si $t \in (0,1)$ es de cohesión, entonces*

$$f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}([0,t)} \cap \overline{f^{-1}((t,1])}.$$

Observación 7.21 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Supongamos que $t \in [0,1]$ es de cohesión y que $t > 0$. Sea $a \in [0,t]$ tal que $a < t$.*

Como $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}([0,t))} = \overline{f^{-1}([0,a])} \cup \overline{f^{-1}([a,t))}$ y $f^{-1}(t) \cap f^{-1}([0,a]) = \emptyset$, tenemos que $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((a,t))}$.

De forma análoga se demuestra que si $t < 1$ y $b > t$, entonces $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((t,b))}$.

Lema 7.22 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Si $t \in [0,1]$ es de cohesión, entonces $f^{-1}(t) \in M(X)$.*

Demostración. Sea $t \in [0,1]$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t > 0$.

Sea $x \in f^{-1}(t)$ y U un abierto tal que $x \in U$.

Como t es de cohesión, se cumple que $f^{-1}((0,1)) \cap U \neq \emptyset$, así existe $s \in (0,t)$, tal que $f^{-1}(s) \cap U \neq \emptyset$.

Por lo tanto $U \not\subset f^{-1}(t)$, lo que demuestra que $int(f^{-1}(t)) = \emptyset$. ■

Teorema 7.23 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Entonces las siguientes condiciones*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$,

(ii) $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$,

son equivalentes a

(a) X *es irreducible,*

(b) *todo* $t \in [0,1]$ *es de cohesión.*

Demostración. Supongamos (a) y (b).

Como todo $t \in [0,1]$ es de cohesión, por el Lema 7.22, tenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$. Por lo tanto X es un continuo tipo λ

Así, por el Lema 7.13, se cumple que:

$$M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}.$$

Demostremos que $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$.

Verifiquemos ambas contenciones.

Sea $B \in D(X)$, si $f(B) \notin D([0,1])$. Como $C([0,1]) = D([0,1]) \cup M([0,1])$, entonces $f(B) \in M([0,1]) = F_1([0,1])$. Así $A \subset f^{-1}(t)$ para algún $t \in [0,1]$, pero $f^{-1}(t) \in M(X)$ lo que implica que $B \in M(X)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $B \in \{A \in C(X) : f(A) \in D(X)\}$.

Sea $B \in \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$.

Entonces existen $a, b \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $f(B) = [a,b]$. Por el Lema 7.12, tenemos que $f^{-1}((a,b)) \subset B$, lo que implica que $\overline{f^{-1}((a,b))} \subset \overline{int(B)} \subset B$.

Como a y b son de cohesión, por la Observación 7.21, tenemos que $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \subset \overline{f^{-1}((a,b))}$, por lo tanto

$$B \subset f^{-1}([a,b]) = f^{-1}(a) \cup \overline{f^{-1}(a,b)} \cup f^{-1}(b) \subset \overline{f^{-1}((a,b))} \subset \overline{int(B)} \subset B.$$

Lo que demuestra que $B \in D(X)$.

Esto termina la demostración de (i).

Demostremos la otra implicación de este teorema.

Supongamos que se cumplen las igualdades (i) y (ii).

Por el Corolario 7.10, tenemos que X es un continuo tipo λ. Esto demuestra el inciso (a).

Sólo falta probar (b).

Sea $t \in [0,1]$ y supongamos, si pérdida de generalidad, que $t > 0$. Notemos que

$$f^{-1}([0,t]) = f^{-1}(0) \cup \overline{f^{-1}((0,t))} \cup f^{-1}(t).$$

Aplicando el Lema 7.4, obtenemos que

$$int(f^{-1}([0,t])) = int(\overline{f^{-1}((0,t))}) \subset \overline{f^{-1}((0,t))}.$$

Como $f(f^{-1}([0,t])) = [0,t] \in D([0,1])$, por (i), tenemos que $\overline{f^{-1}([0,t])} \in D(X)$, lo que implica que

$$f^{-1}([0,t]) = \overline{int(f^{-1}([0,t]))} \subset \overline{f^{-1}((0,t))}.$$

Por lo tanto $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((0,t))}$.

Si $t < 1$, de forma análoga se demuestra que $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((t,1))}$.

Esto demuestra que t es de cohesión y termina la prueba de (b). ■

Corolario 7.24 *Sean X un continuo y f una función canónica de X. Entonces X es tipo λ y todo $t \in [0,1]$ es de cohesión si y sólo si se satisfacen las sigueintes igualdades:*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D([0,1])\}$,

(ii) $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$,

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa del Teorema 7.23. ■

Notemos que en algún sentido, lo que nos permite demostrar el Teorema 7.23, es la estructura que tiene el intervalo. De esta forma, surge la idea de estudiar propiedades similares con espacios que están relacionados con continuos que tienen alguna estructura muy parecida a la del arco.

En la siguiente sección, vamos a demostrar resultados similares al Teorema 7.23, pero sustituyendo al intervalo por otros continuos.

7.3. Entre Continuos Grandes

Para hacer mas fácil la escritura de los siguientes resultados, voy a introducir una notación que podría ser grotesca y que no concuerda con la que he manejado en secciones anteriores, pero que realmente ayuda.

Notación 7.25

- *Sean p y q dos puntos en X, a un arco que une a p con q lo denotaremos por $[p,q]$.*
- *Si $[p,q]$ es un arco no degenerado, entonces denotaremos por (p,q) al conjunto $[p,q]-\{p,q\}$.*

Definición 7.26 *Sean X y Y continuos y $f: X \mapsto Y$ una función continua, monótona y suprayectiva. Decimos que un punto $p \in Y$ es de cohesión si*

1. *Existe un arco libre no degenerado $[p,q]$ en Y,*
2. *$f^{-1}(p) \subset \overline{f^{-1}((p,q))}$, para todo arco libre no degenerado $[p,q]$.*

Lema 7.27 *Sean X y Y continuos y $f: X \mapsto Y$ una función continua, monótona y suprayectiva. Si $p \in Y$ es de cohesión, entonces $f^{-1}(p) \in M(X)$.*

Demostración. Como p es de cohesión, existe un arco libre $[p,q]$ en Y tal que $f^{-1}(p) \subset \overline{f^{-1}((p,q))}$.

Como f es monótona, tenemos que $f^{-1}(p) \in C(X)$. Verifiquemos que $int(f^{-1}(p)) = \emptyset$.

Sea $x \in f^{-1}(p)$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Como $x \in \overline{f^{-1}((p,q))}$, existe $t \in (p,q)$ tal que $f^{-1}(p) \cap U \neq \emptyset$. Así $U \subsetneq f^{-1}(p)$, lo que demuestra que $f^{-1}(p) \in M(X)$. ■

Lema 7.28 *Sean X y Y continuos y $f: X \mapsto Y$ una función continua, monótona y suprayectiva tales que*

(a) Para todo $A \in D(X)$, si $f(A)$ es irreducible en Y, entonces A es irreducible en X.

(b) Todo punto $p \in Y$ es de cohesión.

Si $A \in C(X)$ *y* $f(A) = [p,q]$ *es un arco libre en* Y*, entonces* $f^{-1}([p,q]) = A$.

Demostración. Sea $A \in C(X)$ tal que $f(A) = [p,q]$ es un arco libre.

Afirmación 1. $f^{-1}([p,q]) \in D(X)$.

Demostración. Como todo punto en Y es de cohesión, al ser $[p,q]$ un arco libre, tenemos que $f^{-1}(p) \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p,q))}$.

Como $f^{-1}((p,q)) \subset int(f^{-1}([p,q]))$, obtenemos que:

$$f^{-1}([p,q]) = f^{-1}(p) \cup \overline{f^{-1}((p,q))} \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p,q))} \subset \overline{int(f^{-1}([p,q]))} \subset f^{-1}([p,q]).$$

Lo que demuestra que $f^{-1}([p,q]) \in D(X)$ y concluye la demostración de la Afirmación 1.

Como $f(f^{-1}([p,q])) = [p,q]$ y $[p,q]$ es irreducible, por (a), existen dos puntos $a, b \in f^{-1}([p,q])$, tales que $f^{-1}([p,q])$ es irreducible entre a y b. Por la Observación 7.11, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $f(a) = p$ y $f(b) = q$.

Afirmación 2. $f^{-1}((p,q)) \subset A$.

Demostración. Sea $t \in (p,q)$ y supongamos que existe $x \in f^{-1}(t)$ tal que $x \notin A$. Entonces $D = f^{-1}(p) \cup A \cup f^{-1}(q)$, es un subcontinuo propio de $f^{-1}([p,q])$ tal que $a, b \in D$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $f^{-1}((p,q)) \subset A$ y concluimos la demostración de la Afirmación 2.

De la Afirmación 2 y del hecho que p y q son de cohesión, al ser $[p,q]$ un arco libre, concluimos que

$$f^{-1}(p) \cup \overline{f^{-1}((p,q))} \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p,q))} \subset A \subset f^{-1}([p,q]).$$

Lo que demuestra que $f^{-1}([p,q]) = A$. ■

Teorema 7.29 *Sean* X *y* Y *continuos y* $f : X \mapsto Y$ *una función continua, monótona y suprayectiva, tales que* *(i)* $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \notin F_1(Y)\}$,

(ii) $f^{-1}(y) \in M(X)$, *para todo* $y \in Y$.

Si $A \in D(X)$ *y* $f(A)$ *es irreducible con respecto a un conjunto* $I \subset f(A)$, *entonces* A *es irreducible con respecto a un conjunto* $J \subset A$, *con la misma cantidad de elementos que* I, *tal que* $f(J) = I$.

Demostración. Para todo $i \in I$, elegimos $x_i \in f^{-1}(i) \cap A$. Tomemos

$$J = \{x_i : i \in I\}.$$

Por construcción tenemos que $f(J) = I$ y que J tiene la misma cantidad de elementos que I. Demostremos que A es irreducible con respecto a J.

Sea $B \in C(A)$ tal que $J \subset B$, como $I = f(J) \subset f(B)$, al ser $f(A)$ irreducible con respecto a I, obtenemos que $f(B) = f(A) \notin F_1(Y)$. Por (i), concluimos que $B \in D(X)$.

Si $x \in A$, como $f(B) = f(A)$, tenemos que $f^{-1}(f(x)) \cup B \in C(X)$. Como además $f(B) \subset f(f^{-1}(f(x)) \cup B)$, tenemos que $f(f^{-1}(f(x)) \cup B) \notin F_1(Y)$, de esta forma $f^{-1}(f(x)) \cup B \in D(X)$.

Como $f^{-1}(f(x)) \in M(X)$, por el Lema 7.4, tenemos que $int(f^{-1}(f(x)) \cup B) = int(B)$, así

$$x \in f^{-1}(f(x)) \cup B = \overline{int(f^{-1}(f(x)) \cup B)} = \overline{int(B)} = B.$$

Esto prueba que $A \subset B$ y como $B \subset A$, obtenemos que $B = A$. Por lo tanto A es irreducible con respecto a J. ■

Lema 7.30 *Sean* X *y* Y *continuos y* $f : X \mapsto Y$ *una función continua, monótona y suprayectiva tales que*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \notin F_1(Y)\}$,

(ii) $f^{-1}(y) \in M(X)$, *para todo* $y \in Y$.

Si $t \in Y$ *y existe un arco libre* $[t, q]$ *en* Y, *entonces*

$$f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((t, q))}.$$

Demostración. Sea $t \in Y$ y consideremos un arco libre $[t,q]$ en Y.

Sea $x \in f^{-1}(t)$. Como $f^{-1}([t,q])$ es conexo y $f^{-1}([t,q]) = f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))} \cup f^{-1}(q)$, tenemos que $f^{-1}(t) \cap \overline{f^{-1}((t,q))} \neq \emptyset$, así que $f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))} \in C(X)$ y como $(t,q) \subset f(f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))})$, entonces $f(f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))}) \notin F_1(Y)$, lo que implica que $f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))} \in D(X)$.

Así $f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))} = \overline{int(f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))})}$. Como $f^{-1}(t) \in M(X)$, por el Lema 7.4, tenemos que $int(f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))}) = int(\overline{f^{-1}((t,q))})$, de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))} &= \overline{int(f^{-1}(t) \cup \overline{f^{-1}((t,q))})} \\
&\subset \overline{int(\overline{f^{-1}((t,q))})} \subset \overline{f^{-1}((t,q))}.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((t,q))}$. ■

7.3.1. Funciones a la Circunferencia

Con los resultados que probamos en la sección anterior, estamos listos para extender los resultados que obtuvimos en el el Teorema 7.23 a otro tipo de continuos diferentes del arco.

Notación 7.31 *Denotemos por S^1 a cualquier continuo que sea homeomorfo a la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$.*

Teorema 7.32 *Sean X un continuo y $f : X \mapsto S^1$ una función continua, monótona y suprayectiva, entonces las siguientes condiciones*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D(S^1)\}$, *y*

(ii) $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M(S^1)\}$.

Son equivalentes a

(a) Todo subcontinuo regular y propio de X es irreducible, y

(b) Todo $t \in S^1$ es de cohesión.

Demostración. Recordemos que, por el Corolario 6.29, se cumple que

- $C(S^1) = D(S^1) \cup M(S^1)$,
- $D(S^1) = C(S^1) - M(S^1)$,
- $M(S^1) = F_1(S^1)$.

Supongamos (a) y (b).

Demostremos que $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D(S^1)\}$.

Verifiquemos que se cumplen ambas contenciones.

Sea $A \in D(X)$. Supongamos que $f(A) \notin D(S^1)$, entonces $f(A) \in M(S^1)$. Así $f(A) = \{t\}$, para algún $t \in S^1$.

Como t es de cohesión, por el Lema 7.27, tenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$. De esta forma $A \in M(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(A) \in D(S^1)$ y obtenemos que

$$D(X) \subset \{A \in C(X) : f(A) \in D(S^1)\}$$

Demostremos la otra contención. Sea $A \in C(X)$ tal que $f(A) \in D(S^1)$. Analicemos dos casos.

Caso 1. $f(A) \subsetneq S^1$.

En este caso $f(A) = [p, q]$ es un arco libre en S^1. Por el Lema 7.28, tenemos que $f^{-1}([p, q]) = A$. Como p y q son de cohesión, se cumple que $f^{-1}(p) \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p, q))}$. Por lo tanto

$$A = f^{-1}([p, q]) = f^{-1}(p) \cup \overline{f^{-1}((p, q))} \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p, q))} \subset \overline{int(A)} \subset A.$$

Esto demuestra que $A \in D(X)$.

Caso 2. $f(A) = S^1$.

Sean $a \in A$ y $\alpha : [0, 1] \mapsto C(X)$ un arco ordenado de $\{a\}$ a A. Por ser f continua, existe $t_0 = \text{mín}\{t \in [0, 1] : f(\alpha(t)) = S^1\}$. Consideremos $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente en $(0, t_0]$ tal que $\text{lím}\, t_n = t_0$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \alpha(t_n)$. Como $\lim B_n = \alpha(t_0)$ y $f(\alpha(t_0)) = S^1$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(B_n) = [p_n, q_n]$ es un arco no degenerado para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como α es un arco ordenado y $t_n < t_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B_n \subsetneq B_{n+1}$, lo que implica que $[p_n, q_n] = f(B_n) \subsetneq f(B_{n+1}) = [p_{n+1}, q_{n+q}]$. Por lo tanto $\{[p_n, q_n]\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos en S^1 tales que $[p_n, q_n] \subsetneq [p_{n+1}, q_{n+1}]$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $\lim [p_n, q_n] = S^1$.

Por el Lema 7.28, tenemos que $f^{-1}([p_n, q_n]) = B_n \subset A$ y como f es una función monótona, obtenemos que $f^{-1}([p_n, q_n]) \in C(X)$. Por lo tanto $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(A)$, tal que

1. $B_n \subsetneq B_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$,
2. $f(B_n) = [p_n, q_n]$ es un arco, para toda $n \in \mathbb{N}$,
3. $\lim[p_n, q_n] = S^1$,
4. $\lim B_n = B$, para algún $B \in C(A)$.

Vamos a demostrar que $X = A$.

Sea $x \in X$.

Si $f(x) \in [p_n, q_n]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in f^{-1}([p_n, q_n]) \subset A$.

Si $f(x) \notin [p_n, q_n]$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por la condición 3, tenemos que $f(x) = \lim p_n = \lim q_n$.

Sea U un abierto en X tal que $x \in U$. Como $f(x)$ es de cohesión, por el Lema 7.27, tenemos que $f^{-1}(f(x)) \in M(X)$. Lo que implica que existe $y \in U - f^{-1}(f(x))$, así $f(y) \in [p_N, q_N]$ para alguna $N \in \mathbb{N}$.

Entonces $y \in f^{-1}([p_n, q_n]) = B_n$ para toda $n \geq N$, lo que demuestra que $x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} \subset B$. Por lo tanto $x \in A$ y hemos probado que $X \subset A$.

Por lo tanto $A = X \in D(X)$

Con los Casos 1 y 2, hemos demostrado que

$$\{A \in C(X) : f(A) \in D(S^1)\} \subset D(X).$$

Y terminamos la demostración de (i)

Ahora demostremos que $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M(S^1)\}$.

Verifiquemos ambas contenciones.

Sea $A \in M(X)$. Si $f(A) \notin M(S^1)$, entonces existe un subcontinuo B de A, tal que $f(B) = [p, q]$ es un arco (libre). Por el Lema 7.28, tenemos que $f^{-1}([p, q]) = B \subset A$, lo que es una contradicción, pues $int(f^{-1}([p, q])) \neq \emptyset$. Por lo tanto $f(A) \in M(S^1)$ y obtenemos que

$$M(X) \subset \{A \in C(X) : f(A) \in M(S^1)\}$$

Para probar la otra contención, sea $A \in C(X)$, tal que $f(A) \in M(S^1)$. Como $M(S^1) = F_1(S^1)$, tenemos que $f(A) = \{t\}$, para algún $t \in S^1$. Como t es de cohesión, por el Lema 7.27, obtenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$, lo que implica que $A \in M(X)$. Esto demuestra que

$$\{A \in C(X) : f(A) \in M(S^1)\} \subset M(X).$$

Así concluimos la demostración de (ii).

Demostremos la otra implicación de este teorema. Supongamos que se cumplen (i) y (ii).

Primero demostremos (b).

Sea $p \in S^1$, si $q \in S^1$ con $p \neq q$, entonces existe un arco $[p, q]$ en S^1 de p a q que además es libre.

Como $[p, q]$ es un arco libre en S^1, por el Lema 7.30, obtenemos que $f^{-1}(t) \subset \overline{f^{-1}((p, q))}$, lo que demuestra que p es de cohesión.

Demostremos (a).

Si $A \in D(X) - \{X\}$, entonces $f(A) \in D(S^1)$.

Si $f(A) = S^1$. Sean $a \in A$ y $\alpha : [0, 1] \mapsto C(X)$ un arco ordenado de $\{a\}$ a A. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente en $[0, 1]$ tal que $\lim t_n = 1$. Entonces que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $A_n = f^{-1}(t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, cumple que

1. $f(A_n) = [p_n, q_n]$ es un arco (libre) en S^1, para toda $n \in \mathbb{N}$,
2. $f(A_n) \subsetneq f(A_{n+1})$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
3. $\lim f(A_n) = S^1$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $f(A_n)$ es ireducible (por ser un arco en S^1) y $A_n \in \{B \in C(X) : f(B) \in D(S^1)\} = D(X)$, por el Teorema 7.29, se cumple que A_n es irreducible. Como además todo punto en S^1 es de cohesión (inciso (b)), por el Lema 7.28, se cumple que $f^{-1}([p_n, q_n]) \subset A_n \subset A$.

Lo que hemos demostrado es que $f^{-1}([p_n, q_n]) \subset A$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Verifiquemos que $X = A$.

Sea $x \in X$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in [p_n, q_n]$, entonces $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}([p_n, q_n]) \subset A$.

Si $f(x) \notin [p_n, q_n]$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces, $\lim p_n = \lim q_n = f(x)$. Sea U un abierto tal que $x \in U$. Como $int(f^{-1}(f(x))) = \emptyset$, existe $y \in U$ tal que $f(y) \neq f(y)$. Así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) \in [p_N, q_N]$ lo que implica que $U \cap f^{-1}([p_N, q_N]) \neq \emptyset$. Como $f^{-1}([p_N, q_N]) \subset A$, hemos mostrado es que x es un punto de acumulación de A.

Como A es cerrado, tenemos que que $x \in A$. Por lo tanto $X \subset A$, así concluimos que $X = A$.

Pero esto es absurdo ya que teníamos que $A \in D(X) - \{X\}$. Como esta contradicción nació de suponer que $f(A) = S^1$, obtenemos que $f(A) = [p, q]$ es un arco (libre) de S^1. Como $[p, q]$ es irreducible, por el Teorema 7.29, tenemos que A es irreducible.

Con esto concluimos la demostración de este teorema. ■

7.3.2. Funciones a un Árbol

Definición 7.33 *Un árbol es una gráfica finita que no contiene circunferencias.*

Observación 7.34 *Si $t_1, \ldots, t_n$ son los puntos extremos de un árbol T, entonces T es irreducible con respecto al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$.*

Teorema 7.35 *Sean X un continuo y $f : X \mapsto T$ una función continua, monótona y suprayectiva; donde T es un árbol con puntos extremos $t_1, \ldots, t_n$. Entonces las siguientes condiciones:*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D(T)\}$, *y*

(ii) $M(X) = \{A \in M(X) : f(A) \in M(T)\}$.

Son equivalentes a

(a) *X es irreducible con respecto un conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$, tal que $f(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{t_1, \ldots, t_n\}$, y*

(b) *Todo punto $p \in T$ es de cohesión.*

Demostración. Recordemos que por el Corolario 6.29, se cumple que:

1. $C(T) = D(T) \cup M(T)$,
2. $D(T) = C(T) - M(T)$,
3. $M(T) = F_1(T)$.

Supongamos (a) y (b).

Demostremos que $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D(T)\}$.

Verifiquemos ambas contenciones.

Sea $A \in D(X)$. Si $f(A) \notin D(T)$, entonces $f(A) \in F_1(T)$, así existe $p \in T$ tal que $A \subset f^{-1}(p)$. Como T es un árbol, existe un arco libre $[p, q]$ en T. Por el Lema 7.27, tenemos que $f^{-1}(p) \in M(X)$, lo que implica que $A \in M(X)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $A \in D(T)$ y obtenemos que:

$$D(X) \subset \{A \in C(X) : f(A) \in D(T)\}.$$

Sea $A \in C(X)$ tal que $f(A) \in D(T)$.

Afirmación 1. Si $[p, q]$ es un arco libre de T contenido en $f(A)$, entonces $f^{-1}([p, q]) \subset \overline{int(A)}$.

Demostración. Denotemos por C_1 y C_2 las componentes de $T - (p, q)$. Supongamos que existe $x \in f^{-1}((p, q))$ tal que $x \notin f^{-1}(A)$, sea

$$D = A \cup f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2).$$

Notemos que D es un subcontinuo propio de X tal que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset D$, lo que es una contradicción pues X es irreducible con respecto a $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Así tenemos que $f^{-1}((p,q)) \subset A$, al ser $f^{-1}((p,q))$ un subconjunto abierto en X, tenemos que $f^{-1}((p,q)) \subset int(A)$.

Por ser p y q de cohesión, tenemos que $f^{-1}(p) \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p,q))}$. Lo que implica que

$$f^{-1}([p,q]) = f^{-1}(p) \cup \overline{f^{-1}((p,q))} \cup f^{-1}(q) \subset \overline{f^{-1}((p,q))} \subset \overline{int(A)}.$$

Lo que termina la demostración de esta afirmación.

Como T es un árbol y $f(A) \notin F_1(T)$, existen arcos libres $[p_1, q_1], \ldots, [p_k, q_k]$ en X, tales que $f(A) = \bigcup_{i=1}^{k} [p_i, q_i]$. Por la Afirmación 1, obtenemos que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}[p_i, q_i] \subset \overline{int(A)} \subset A.$$

Lo que demuestra que $A = \overline{int(A)}$. Por lo tanto $A \in D(X)$ y tenemos que

$$\{A \in C(X) : f(A) \in D(T)\} \subset D(X).$$

Esto finaliza la demostración de la igualdad (i).

Ahora demostremos que $M(X) = \{A \in M(T) : f(A) \in M(T)\}$.

Verifiquemos ambas contenciones.

Sea $A \in M(X)$. Si $f(A) \notin M(T)$, entonces existe un arco libre $[p,q]$ en T tal que $[p,q] \subset A$. Por la Afirmación 1 de esta demostración, tenemos que $f^{-1}([p,q]) \subset A$, lo que es una contradicción, pues $int(f^{-1}([p,q])) \neq \emptyset$. Por lo tanto $f(A) \in M(T)$ y obtenemos que

$$M(X) \subset \{A \in M(T) : f(A) \in M(T)\}.$$

Sea $A \in C(X)$ tal que $f(A) \in M(T)$. Entonces $f(A) = \{p\}$, para algún $p \in T$. Consideremos un arco libre $[p, q]$ en T, por ser p de cohesión, por el Lema 7.27, obtenemos que $f^{-1}(t) \in M(X)$, lo que implica que $A \in M(X)$. Esto demuestra que

$$\{A \in M(T) : f(A) \in M(T)\} \subset M(X).$$

Con esto terminamos la demostración de (ii).

Para demostrar la otra implicación de este teorema, supongamos que se cumplen (i) y (ii).

Demostremos (a).

Como T es irreducible con respecto a $\{t_1, \ldots, t_n\}$, por el Teorema 7.29, existe $J = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$ tal que X es irreducible con respecto a J y que además $f(J) = I$.

Demostremos (b).

Sea $p \in T$. Como T es un árbol, existe un arco libre $[p, q]$ en T.

Ahora, si $[p, q]$ es un arco libre, por el Lema 7.30, tenemos que $f^{-1}(p) \subset \overline{f^{-1}((p, q))}$. Lo que demuestra que p es de cohesión.

Con esto finalizamos la demostración de este teorema. ■

Una conjetura que de ser cierta generalizaría los Teoremas 7.32 y 7.35, que además resulta muy natural, pero que ha mostrado un poco de resistencia, es la siguiente.

Conjetura 7.36 *Sean X un continuo y $f : X \mapsto G$ una función continua, monótona y suprayectiva, donde G es una gráfica finita. Entonces las siguientes condiciones:*

(i) $D(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in D(G)\}$, *y*

(ii) $M(X) = \{A \in M(X) : f(A) \in M(G)\}$.

Son equivalentes a:

(a) Para todo $A \in D(X)$ tal que $f(A) = [p, q]$ es un arco en G, se cumple que A es irreducible, y

(b) Todo punto en G es de cohesión.

Observemos que si se cumplen las propiedades (i) y (ii), entonces las condiciones (a) y (b) se cumplen de forma inmediata por los Teoremas 7.29 y 7.30, respectivamente. El regreso de este enunciado es el que muestra un poco de dificultades.

7.4. Algunas Condiciones Extras

En general, si $f : X \mapsto Y$ es una función, algunas de las relaciones que nos interesan que se preserven son:

1. $f(A) \in M(Y)$ para todo $A \in M(X)$,
2. $f(A) \in D(Y)$ para todo $A \in D(X)$,
3. $A \in f^{-1}(M(Y))$ para todo $A \in M(X)$,
4. $A \in f^{-1}(D(Y))$ para todo $A \in D(X)$.

A continuación menciono algunos de los resultados más sobresalientes en relación a las condiciones anteriores.

Teorema 7.37 *Sean X y Y continuos, con Y localmente conexo y sea $f : X \mapsto Y$ una función. Si $f^{-1}(D(Y)) \subset 2^X$, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim x_n = x$, para algún $x \in X$. Podemos, suponer sin pérdida de generalidad, que $\lim f(x_n) = y$, para algún $y \in Y$.

Como Y es localmente conexo, existe una sucesión de conjuntos abiertos y conexos $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ tales que $\{y\} = \bigcap U_n = \bigcap \overline{U_n}$. Por el Lema 2.5, tenemos que $\{\overline{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión en $D(Y)$, tal que $\bigcap \overline{U}_m = \{y\}$.

Para toda $m \in \mathbb{N}$, sea $N_m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_m$, entonces $f(x_n) \in U_m \subset \overline{U}_m$. Lo que implica que $x_n \in f^{-1}(\overline{U}_m)$ para toda $n \geq N_m$. Por ser $f^{-1}(\overline{U}_m)$ cerrado, concluimos que $\lim x_n = x \in f^{-1}(\overline{U}_m)$, para toda $m \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $f(x) \in \overline{U}_m$, para toda $m \in \mathbb{N}$; lo que implica que $f(x) \in \bigcap \overline{U}_m = \{y\}$. Así obtenemos que $f(x) = y = \lim f(x_m)$, lo que demuestra que f es continua. ■

Lema 7.38 *Sean X y Y continuos, donde X es localmente conexo y sea $f : X \mapsto Y$ una función. Si $D(X) \subset f^{-1}(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos cerrados en Y, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sean x y y dos puntos en X tales que $f(x) = f(y)$. Supongamos que $x \neq y$, por ser X localmente conexo, existen dos abiertos conexos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Por el Lema 2.5, tenemos que $\overline{U}, \overline{V} \in D(X)$.

Como $D(X) \subset f^{-1}(\mathcal{A})$, existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $\overline{U} = f^{-1}(A)$ y $\overline{V} = f^{-1}(B)$.

Como $x \in f^{-1}(A)$ y $y \in f^{-1}(B)$, entonces $f(x) = f(y) \in A \cap B$, lo que implica que, en particular $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $x = y$, y obtenemos que f es inyectiva. ■

Lema 7.39 *Sean X y Y continuos, donde Y es localmente conexo y sea $f : X \mapsto Y$ una función. Si $f^{-1}(D(Y)) \subset D(X)$, entonces f es suprayectiva.*

Demostración. Supongamos que existe $y \in Y - f(X)$. Sea U un abierto conexo de Y tal que $y \in U$ y $\overline{U} \cap f(X) = \emptyset$. Por el Lema 2.5, tenemos que $\overline{U} \in D(Y)$, pero $\emptyset = f^{-1}(\overline{U}) \in D(X)$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto $f(X) = Y$, lo que demuestra que f es suprayectiva. ■

Corolario 7.40 *Sean X y Y continuos localmente conexos y $f : X \mapsto Y$ una función. Si $f^{-1}(D(Y)) = D(X)$, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 7.37, tenemos que f es continua, lo que implica que f es cerrada, ya que X y Y son compactos. Por el Lema 7.38, tenemos que f es inyectiva; y por el Lema 7.39, obtenemos que f es suprayectiva.

Por lo tanto f es una función continua, biyectiva y cerrada, lo que implica que f es un homeomorfismo. ■

Afirmación 7.41 *Sean X y Y continuos y $f : X \mapsto Y$ una función. Si $F_1(X) \subset f^{-1}(M(Y))$, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Sean x y y dos puntos en X tales que $f(x) = f(y)$. Como $F_1(X) \subset f^{-1}(M(Y))$, existe $A \in M(Y)$ tal que $f^{-1}(A) = \{x\}$. Pero $f(y) = f(x) \in A$, de esta forma $y \in f^{-1}(A) = \{x\}$. Por lo tanto $x = y$, lo que demuestra que f es inyectiva. ■

Teorema 7.42 *Sean X y Y localmente conexos y $f : X \mapsto Y$ una función. Si se cumple que:*

(a) $f^{-1}(D(Y)) \subset D(X)$, *y*

(b) $F_1(X) \subset f^{-1}(M(Y))$.

Entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Por la condición (a) y el Teorema 7.37, tenemos que f es continua, lo que implica que f es cerrada, ya que X y Y son compactos.

Por la condición (a) y el Lema 7.39, tenemos que f es suprayectiva. Por la condición (b) y la Afirmación 7.41, tenemos que f es inyectiva.

Por lo tanto f es una función continua, biyectiva y cerrada, lo que implica que f es un homeomorfismo. ■

Corolario 7.43 *Sean X y Y localmente conexos y $f : X \mapsto Y$ una función. Si se cumple que:*

(a) $f^{-1}(D(Y)) \subset D(X)$, *y*

(b) $M(X) \subset f^{-1}(M(Y))$.

Entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Como $F_1(X) \subset M(X)$ y $M(X) \subset f^{-1}(Y)$, obtenemos las condiciones (a) y (b) del Teorema 7.42. Lo que implica que f es un homeomorfismo. ■

Teorema 7.44 *Sea X y Y continuos, donde Y es localmente conexo y sea $f : X \mapsto Y$ una función. Si $f^{-1}(D(Y)) \subset C(X)$, entonces f es monótona.*

Demostración. Por el Teorema 7.37, tenemos que f es una función continua.

Sea $y \in Y$, por ser Y localmente conexo, existe una sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $D(Y)$ tal que $D_{n+1} \subset D_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$; y que además:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{y\}.$$

Como $D_{n+1} \subset D_n$, se cumple que $f^{-1}(D_{n+1}) \subset f^{-1}(D_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\{f^{-1}(D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección anidada de subcontinuos de X, por el Lema 1.3, tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n)$, es un subcontinuo de X. Vamos a demostrar que:

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n) = f^{-1}(y).$$

Sea $x \in f^{-1}(y)$, entonces $f(x) = y$, como $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{y\}$, tenemos que $f(x) \in D_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que $x \in D$.

Demostremos la otra contención. Sea $x \in D$, entonces $x \in f^{-1}(D_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así $f(x) \in D_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{y\}$. De esta forma $f(x) = y$, lo que demuestra que $x \in f^{-1}(y)$.

Con esto obtenemos que $f^{-1}(y) = D \in C(X)$, lo que prueba que f es monótona. ■

Como podemos apreciar, cuando se preserva la estructura de los hiperespacios de subcontinuos regulares y magros, bajo la imagen inversa de una función, podemos concluir algunas condiciones muy interesantes sobre la función que relaciona a los espacios en cuestión.

Desafortunadamente, cuando esta estructura se preserva bajo la imagen directa, no se puede concluir nada particular. En este sentido quiero mencionar que en algún momento pensé que, cuando se preserva la imagen de los hiperespacios de subcontinuos regulares o magros se iban a poder obtener condiciones más interesantes sobre la función que relaciona los espacios.

Por ejemplo, una condición que parece muy natural de verificar, en la familia de los espacios localmente conexos, es que si $f : X \mapsto Y$ es una función continua y se cumple que $f(D(X)) \subset D(Y)$, entonces f es abierta, debido a que en los continuos localmente conexos, los subcontinuos regulares forman parte importante de la estructura de los subcontinuos del espacio.

Sin embargo, si consideramos X como el subcontinuo de $\mathbb{R}^2$, determinado por:

$$X = \big([-1,0] \times \{\tfrac{1}{2}\}\big) \cup \big([0,1] \times [0,1]\big).$$

Podemos observar que X es un continuo localmente conexo para el la proyección sobre la pimera coordenada cual $\pi : X \mapsto [-1,1]$, es una función contina tal que $\pi(A) \in D([0,1])$ para todo $A \in D(X)$, pero que no es abierta, ya que en particular:

$$\pi([0,\tfrac{1}{2}) \times [0,\tfrac{1}{2})) = [0,\tfrac{1}{2}).$$

Ejemplos como el anterior, derrumban casi cualquier propiedad que deseemos estudiar en relación a las imágenes directas de los subcontinos regulares y magros. Lo cual complica demasiado las ideas que surgieron en esa línea de estudio.

Capítulo 8

Composantes Magras

8.1. Introducción

Si X es un continuo y $p \in X$, definimos la **composante magra de** p como la unión de todos los subcontinuos con interior vacío que tienen al punto p. El propósito de este capítulo es estudiar este concepto, que fue inspirado en las **composantes filamentosas** que se introducen en [11, Definición 1].

Deseo plasmar el camino y el orden que siguió la investigación y que motivaron el estudio de este concepto. Por tal motivo he dividido esta parte del trabajo en cuatro partes.

En la primera parte voy a introducir las definiciones y resultados de [11] con los cuales nos inspiramos para definir la composante magra de un punto en un continuo.

En la segunda parte, vamos a estudiar algunas de las propiedades generales de las composantes magras de un continuo y posteriormente enunciaremos algunos problemas y conjeturas que obtuvimos en el transcurso de nuestra investigación.

En la tercera parte, vamos a relacionar los conceptos y resultados obtenidos en las secciones anteriores con un concepto definido por David P. Bellamy en [1] que, como veremos, coincide con el de las composantes magras de un continuo. En la cuarta parte enunciaremos dos preguntas planteadas en [1, Problemas 24 y 25], y mencionaremos los avances que obtuvimos.

8.2. Un Poco Sobre los Filamentosos

Recordemos que una vecindad de un subcontinuo $F \in C(X)$, es un subconjunto W de X, tal que $F \subset int(W)$.

En el artículo [11, Definición 1], encontramos las siguientes definiciones:

Definición 8.1 *1. Sea X un continuo, un subcontinuo de K es llamado* ***Filamentoso****, si existe una vecindad N de K tal que $C_N(K)$, la componente de N que contiene a K, tiene interior vacío.*

2. Un subconjunto S de X es llamado filamentoso, si todo subcontinuo contenido en S es filamentoso.

3. El complemento de un conjunto filamentoso es llamado conjunto ***cofilamentoso****.*

Definición 8.2 *Sea $p \in X$, la* ***Composante Filamentosa*** *de p, denotada por* ***Fcs(p)****, es la unión de todos los subcontinuos filamentosos que tienen a p, es decir*

$$Fcs(p) = \bigcup\{A \in C(X) : A \text{ es filamentoso y } p \in A\}$$

Algunos resultados que demuestran los autores en [11], relacionados con estos conceptos son los siguientes.

Proposición 8.3 *Sea X un continuo:*

1. *[11, Proposición 1.4] Si F es un subcontinuo filamentoso, entonces X no es localmente conexo en ningún punto de F.*

2. *[11, Proposición 1.8] Si $p \in X$ y $Fcs(p)$ es no vacío, entonces $Fcs(p)$ es un conjunto F_σ.*

También enuncian y demuestran el siguiente resultado que caracteriza a los continuos indescomponibles en términos de subcontinuos filamentosos.

Teorema 8.4 *[11, Teorema 1.9] Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier continuo X:*

1. *X es indescomponible.*

2. *El único subcontinuo no filamentoso es el total.*

3. *Un subcontinuo es filamentoso si y sólo si es un subconjunto propio de X.*

4. *Todo singular es un subconjunto (minimal) co-filamentoso.*

5. *No hay distinción entre composantes y composantes filamentosas.*

Proposición 8.5 *Sea X un continuo, si K es un subcontinuo filamentoso, entonces $K \in M(X)$*

Demostración. Sea K un subcontinuo filamentoso, entonces existe una vecindad N de K de tal forma que C_K tiene interior vacío. Como $K \subset C_K$, tenemos que $int(K) = \emptyset$, lo que demuestra que $K \in M(X)$. ■

El Teorema 8.4 y la Proposición 8.5, nos incitó a pensar que la teoría que se desarrolla con la estructura de los continuos filamentosos, no está muy lejos la estructura que se tiene el hiperespacio de subcontinuos magros.

De esta forma, inspirados en estos resultados y la relación que existe entre los subcontinuos filamentosos y los subcontinuos magros, definimos el siguientes conjunto.

Definición 8.6 *Sean X un continuo y $p \in X$, definimos la **Composante Magra** de p, como la unión de todos los subcontinuos magros que tienen a p. Si denotamos a la composante magra de p por M_p, entonces:*

$$M_p = \bigcup\{A \in M(X) : p \in A\}.$$

Proposición 8.7 *Sea X un continuo, si $p \in X$ entonces:*

1. $p \in M_p$.

2. $Fcs(p) \subset M_p$.

Demostración. Como $\{p\}$ es un subcontinuo con interior vacío tal que $p \in \{p\}$, obtenemos la propiedad 1.

Verifiquemos 2. Si $x \in Fcs(p)$, existe un subcontinuo filamentoso K de tal forma que $p, x \in K$, por la Proposición 8.5 tenemos que $K \in M(X)$, lo que implica que $x \in M_p$. ■

La finalidad de los siguientes ejemplos es mostrar que las composantes magras no siempre coinciden con las composantes filamemtosas.

Ejemplo 8.8 *(a) Sea X un continuo localmente conexo.*

Si $p \in X$, por 1 de la Proposición 8.7, tenemos que $p \in M_p$.

Sean $q \in X$ y K un subcontinuo de X tal que $q \in K$. Si N es una vecindad de K, por ser X localmente conexo, existe un abierto conexo U tal que $q \in U \subset int(N)$. De esta forma $U \subset C_N(K)$, lo que implica que K no puede ser filamentoso. Esto demuestra que $Fcs(q) = \emptyset$ para todo $q \in X$.

Por lo tanto, si X es localmente conexo, entonces $Fcs(p) \subsetneq M_p$ para toda $p \in X$.

(b) Para fines de este ejemplo vamos a describir el abanico de Cantor de la siguiente forma (Figura 8.1).

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor canónico contenido en el intervalo $[0,1]$; denotemos por X al abanico de Cantor que se obtiene al considerar el cono sobre el conjunto $\mathcal{C} \times \{0\}$ con vértice en el punto $v = (\frac{1}{2}, 1)$.

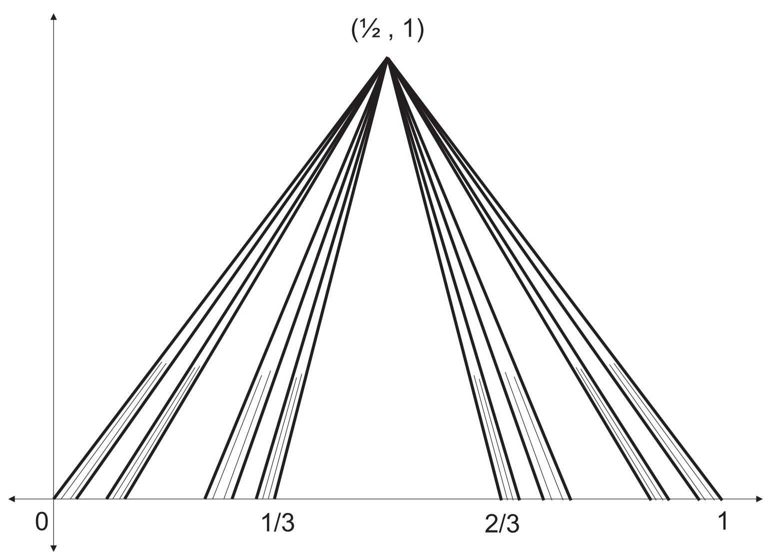

Figura 8.1: El Abanico de Cantor.

Sean $p \in X$ y x cualquier punto de X, consideremos el único arco px en X que une al punto p con x. Como $px \in M(X)$, concluimos que

$$M_p = X.$$

Sean $q \in X - \{v\}$ y $c_q \in \mathcal{C}$ tal que $q \in L(c_q)$, donde $L(c_q)$ denota el segmento convexo en X que une al punto v con $(c_q, 0)$. Si $K \in C(X)$ es tal que $q \in K$, analicemos dos casos.

Caso 1. $v \in K$.

Si W es una vecindad de K en X, entonces $v \in K \subset int(W)$. Como X es localmente conexo en v, existe un abierto conexo U tal que $v \in U \subset int(W)$. Así, $U \subset C_W(K)$, lo que implica que $int(C_W(K)) \neq \emptyset$. Por lo tanto K no es filamentoso.

Caso 2. $v \notin K$.

En este caso $K \subset L(c_q) - \{v\}$. Entonces $X - \{v\}$ es una vecindad de K tal que $C_{X-\{v\}}(K) = L(c_q) - \{v\}$. De manera que $int(C_{X-\{v\}}(K)) = \emptyset$, lo que implica que K es fialamentoso.

Por los Casos 1 y 2 tenemos la siguiente igualdad

$$Fcs(p) = \bigcup\{K \in C(X) : p \in K \text{ y } K \subset L(c_p) - \{v\}\} = L(c_p) - \{v\}.$$

Más aún, hemos demostrado que $Fcs(v) = \emptyset$. Por lo tanto $Fcs(p) \subsetneq M_p$ para todo $p \in X$.

Lema 8.9 *Si X es un continuo indescomponible, entonces no hay distinción entre subcontinuos magros y subcontinuos filamentosos.*

Demostración. Sea K un subcontinuo filamentoso de X, por 3 del Teorema 8.4, tenemos que K es un subcontinuo propio de X. Por ser X indescomponible, tenemos que todo subcontinuo propio tiene interior vacío, lo que implica que $K \in M(X)$.

Por otro lado, si $K \in M(X)$ y K no es filamentoso, por 2 del Teorema 8.4 tenemos que $K = X$, lo que es una contradicción. Por lo tanto K es filamentoso.

Esto demuestra que no hay distinción entre subcontinuos magros y filamentosos en continuos indescomponibles. ■

Afirmación 8.10 *Si X es un continuo indescomponible, entonces las composantes magras coinciden con las composantes filamentosas.*

Demostración. Sea $p \in X$, como no hay distinción entre subcontinuos magros y filamentosos, tenemos que $Fcs(p) = M_p$. ∎

Gracias a que no existe distinción entre subcontinuos magros y subcontinuos filamentosos en la clase de los continuos indescomponibles, podríamos pensar que en el Teorema 8.4, se puede intercambiar subcontinuos filamentosos por magros y obtener un resultado similar.

Desgraciadamente no es posible, pues si $X = [0,1] \times [0,1]$ y $p \in X$, es claro que $M_p = X$, lo que implica que en X las composantes coinciden con las composantes magras, pero X no es indescomponible.

Como podemos apreciar, las composantes magras y las composantes filamentosas, son dos conceptos muy semejantes, pero que no siempre coinciden. En las siguientes secciones de este capítulo, nos damos a la tarea de estudiar el comportamiento de las composantes magras de los continuos.

Para finalizar esta sección quiero mencionar que la teoría que desarrollan los autores en [11], con relación al concepto de subcontinuos filamentosos, está enfocada al estudio de los continuos homogéneos.

8.3. Propiedades de M_p

Recordemos que si X es un continuo y $p \in X$, la composante magra de p está definida por:

$$M_p = \{A \in M(X) : p \in A\}.$$

Dado que $p \in M_p$, para todo punto $p \in X$, es interesante preguntarse qué sucede cuando $M_p = \{p\}$. En este sentido tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.11 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $M_p = \{p\}$, entonces X es conexo en pequeño en p.*

Demostración. Si X no es conexo en pequeño en p, por [10, Teorema 5.12], existe $A \in C(X)$, no degenerado, y existe una sucesión $\{A_n\}_n^\infty$ en $C(X)$ tales que $p \in A$, $A \cap A_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que además $\lim A_n = A$.

Por el Lema 5.4, tenemos que $A \in M(X)$, lo que implica que $A \subset M_p$, lo que es una contradicción porque A es no degenerado. Por lo tanto X es conexo en pequeño en p. ■

Corolario 8.12 *Si X es un continuo tal que $M_p = \{p\}$ para todo $p \in X$, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Como $M_p = \{p\}$ para todo $p \in X$, por el Teorema 8.11, tenemos que X es conexo en pequeño en todos sus puntos, por lo tanto por el Teorema 1.17, obtenemos que X es localmente conexo. ■

A continuación enunciaré algunas de las propiedades básicas de las composantes magras para motivar un problema del cual surgen resultados interesantes y, por supuesto, nuevas preguntas que nos brindan diferentes caminos de investigación.

Afirmación 8.13 *Si X es un continuo, entonces la familia*

$$\mathcal{M}_X = \{M_p \subset X : p \in X\}$$

es una partición del espacio X.

Demostración. Si $p \in X$, entonces $p \in M_p$, lo que demuestra que toda composante magra es no vacía y también se obtiene la siguiente igualdad:

$$X = \bigcup_{p \in X} M_p$$

Sean $p, q \in X$, tales que $M_p \cap M_q \neq \emptyset$; verifiquemos que $M_p = M_q$.

Sea $r \in M_p \cap M_q$, entonces existen $A_p, A_q \in M(X)$ tales que $p, r \in A_p$ y $q, r \in A_q$.

Si $x \in M_p$, tenemos que existe $B \in M(X)$ tal que $p, x \in B$. Así, por el Lema 1.11, tenemos que $B \cup A_p \cup A_q$ es un subcontinuo magro que tiene a q y x. Esto prueba que $M_p \subset M_q$.

De forma análoga se demuestra que $M_q \subset M_p$. Por lo tanto si $M_p \cap M_q \neq \emptyset$, entonces $M_p = M_q$.

Con esto concluimos que $\mathcal{M}_X$ es una partición de X. ■

Afirmación 8.14 *Si X es un continuo y $p \in X$, entonces M_p es conexo.*

Demostración. Como M_p es la unión de conjuntos conexos que tiene al punto p, obtenemos que M_p es conexo. ■

Observación 8.15 *Sean X un continuo indescomponible y $p \in X$, por 5 del Teorema 8.4 y la Afirmación 8.10, tenemos que M_p es la composante de p en X.*

Esto muestra que, en los continuos indescomponibles, M_p no es cerrado, pero sí resulta ser un conjunto F_σ ya que las composantes de todo continuo indescomponibles son conjuntos F_σ.

De las observaciones anteriores, surge el siguiente problema.

Problema 8.16 *Sean X un continuo y $p \in X$, para qué clases de continuos se cumple que:*

1. *¿M_p es un subconjunto cerrado?*
2. *¿M_p es un subconjunto F_σ?*
3. *¿$\mathcal{M}_X$, la descomposición inducida por las composantes magras es semicontinua superiormente?*
4. *¿$\mathcal{M}_X$ es un continuo?*

8.3.1. La Cerradura de M_p

Lema 8.17 *Sean X un continuo localmente conexo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $M(X)$ tal que $\lim A_n = B$, para algún $B \in C(X)$. Si A es un subcontinuo irreducible de B, entonces $A \in M(X)$.*

Demostración. Supongamos que A es un subcontinuo de B que es irreducible entre dos puntos p y q. Si $int(A) \neq \emptyset$, entonces existen dos abiertos conexos V y W en X y un punto $x \in A$, tales que $x \in V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset A - \{p, q\}$.

Afirmación. $Fr(V)$ no es un subconjunto conexo.

Demostración. Supongamos que $Fr(V)$ es un subconjunto conexo. Sean C_p y C_q las componentes de $A - V$ que tienen a p y q, respectivamente. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $C_p \cap Fr(V) \neq \emptyset$ y $C_q \cap Fr(V) \neq \emptyset$. De esta forma obtenemos que $C_p \cup Fr(V) \cup C_q$ es un subcontinuo contenido en A que tiene a p y q. Por ser A irreducible entre p y q, concluimos que $A = C_p \cup Fr(V) \cup C_q$.

Pero V es un abierto no vacío tal que $V \subset A - (C_p \cup C_q) \subset Fr(V)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $Fr(V)$ no puede ser conexo. Lo que termina la demostración de la Afirmación.

Como la $Fr(V)$ es compacta y no conexa, existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos conexos $U_1, \ldots, U_n$ en X, tales que $Fr(V) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n \subset W$, $x \notin \overline{U_i}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y que además $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \emptyset$ para cualesquiera $i \neq j$.

Como V es un abierto conexo en un continuo localmente conexo, por el Teorema 1.20 tenemos que V es arco conexo. Podemos suponer que existe un arco $p_1q_1 \subset V$ tal que:

1. $p_1q_1 \cap \overline{U}_j = \emptyset$, para toda $j > 2$.
2. $p_1q_1 \cap \overline{U}_1 = \{p_1\}$ y
3. $p_1q_1 \cap \overline{U}_2 = \{q_1\}$.

Reenumerando los conjuntos U_i, si es necesario, también podemos suponer que existe un arco $p_2q_2 \subset V$ con las siguientes propiedades:

1. $p_2q_2 \cap \overline{U}_j = \emptyset$, para toda $j > 3$,
2. $p_2q_2 \cap \overline{U}_3 = \{p_2\}$ y
3. $p_2q_2 \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup p_1q_1) = \{q_2\}$.

De manera inductiva, para toda $i > 2$, podemos suponer que existe un arco $p_iq_i \subset V$ con las siguientes propiedades:

1. $p_iq_i \cap \overline{U}_{i+1} = \{p_i\}$
2. $p_iq_i \cap [(\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_i) \cup (p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{i-1}q_{i-1})] = \{q_i\}$,

3. $p_iq_i \cap p_jq_j$ es finito, para cualesquiera $i \neq j$.

Consideremos el conjunto

$$C = (A - V) \cup [(\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n) \cup (p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{n-1}q_{n-1})].$$

Verifiquemos que C es un subcontinuo de B que tiene a los puntos p y q.

Como $A - V$ es un subconjunto cerrado de X y $(\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n) \cup (p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{n-1}q_{n-1})$ es la unión finita de subconjuntos cerrados de X, contenidos en A, obtenemos que C es un subconjunto cerrado de X contenido en A.

Para ver que C es conexo, notemos que por la propiedad 3, tenemos que $(\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n) \cup (p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{n-1}q_{n-1})$ es un subconjunto conexo de A.

Si $y \in A - V$, por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $C_{A-V}(y) \cap Fr(V) \neq \emptyset$, como $Fr(V) \subset \overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n$, obtenemos que $C_{A-V}(y) \cup [(\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n) \cup (p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{n-1}q_{n-1})]$ es un subconjunto conexo. Esto demuestra que C es un subcontinuo de A que tiene a los puntos p y q. Por ser A irreducible entre p y q, concluimos que $A = C$.

Notemos que $x \in V - (\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n)$. Entonces $x \in A = C$ y $x \notin (A - V) \cup (\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_n)$. De modo que $x \in p_1q_1 \cup \ldots \cup p_{n-1}q_{n-1}$. Así que $x \in p_iq_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Como los arcos $p_1q_1, \ldots, p_{n-1}q_{n-1}$ se intersectan dos a dos en un conjunto finito de puntos, existe un abierto no vacío U de X tal que $U \subset p_iq_i$. Por lo tanto existe un subarco libre ab de X contenido en p_iq_i.

Así, lo que tenemos es una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $M(X)$ tal que $\lim A_n = B$, donde B contiene arcos libres, lo que es una contradicción a la Proposición 3.5.

Por lo tanto $A \in M(X)$. ■

Teorema 8.18 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces M_p es cerrado para todo $p \in X$.*

Demostración. Sean $p \in X$ y $q \in \overline{M}_p$. Entonces existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M_p tal que $\lim q_n = q$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \in M(X)$ tal que $p, q_n \in A_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $B \in C(X)$ tal que $\lim A_n = B$. De esta forma obtenemos que $p, q \in B$.

Por el Teorema 1.30 existe un subcontinuo $A \in C(B)$, irreducible entre p y q. Por el Lema 8.17, tenemos que $A \in M(X)$, así $q \in M_p$, lo que demuestra que $\overline{M}_p \subset M_p$.

Por lo tanto, M_p es cerrado. ■

Corolario 8.19 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces M_p es un conjunto F_σ de X, para todo $p \in X$.*

Demostración. Sea $p \in X$, por el Teorema 8.18, M_p es cerrado en X, lo que implica que M_p es un subconjunto F_σ de X. ■

Teorema 8.20 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces la descomposición inducida por las composanes magras,*

$$\mathcal{M}_X = \{M_p : p \in X\}$$

Es una descomposición semicontinua superiormente.

Demostración. Sean $p \in X$ y U un abierto en X tales que $M_p \subset U$. Sea

$$W = \{x \in X : M_x \subset U\}.$$

Notemos que W es un subconjunto saturado y que además cumple que $p \in M_p \subset W$, vamos a demostrar que W es un abierto.

Sean $q \in X$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - W$ tales que $\lim q_n = q$. Como $q_n \notin W$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $M_{q_n} \subsetneq U$, de esta forma podemos tomar un punto $x_n \in M_{q_n} - U$ y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $M(X)$, tal que $q_n, x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen $A \in C(X)$ y $x \in X$ tales que $limA_n = A$ y $\lim x_n = x$, así $q, x \in A$ y además $x \in X - U$.

Por el Teorema 1.30, existe un subcontinuo de B en A que es irreducible entre q y x; por el Lema 8.17, tenemos que $A \in M(X)$, lo que implica que $x \in M_q - U$, así $q \in X - W$ y concluimos que $X - W$ es un subconjunto cerrado.

Lo que hemos demostrado es que, para todo abierto U y todo elemento $M_p \in \mathcal{M}_X$, tal que $M_p \subset U$, existe un abierto saturado W tal que $M_p \subset W \subset U$, por la Proposición 3.7 de [10], tenemos que $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente. ■

Corolario 8.21 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $\mathcal{M}_X$ es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 8.20, tenemos que $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente, así por [10, Teorema 3.10], obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo.

Si $\pi : X \mapsto \mathcal{M}_X$, es la proyección natural; por ser X localmente conexo, obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es localmente conexo. ■

Afirmación 8.22 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces los únicos subcontinuos irreducibles de X son los arcos.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X irreducible entre p y q. Como A es arco conexo, existe un arco pq contenido en A que une al punto p con el punto q. Como A es irreducible entre p y q, concluimos que $A = pq$. ■

Lema 8.23 *Sea X un continuo hereditariamente arco conexo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $M(X)$ tal que $\lim A_n = B$, para algún $B \in C(X)$. Si A es un subcontinuo irreducible de B, entonces $A \in M(X)$.*

Demostración. Supongamos que A es un subcontinuo irreducible de B. Por la Afirmación 8.22, tenemos que A es un arco. Por lo tanto, por la Proposición 3.5, tenemos que $int(A) = \emptyset$. ■

Teorema 8.24 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces M_p es cerrado para todo $p \in X$.*

Demostración. Si $p \in X$ y $q \in \overline{M}_p$, entonces existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en M_p tal que $\lim q_n = q$.

Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in M(X)$ tal que $p, q_n \in A_n$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\lim A_n = B$, para algún $B \in C(X)$. Así tenemos que $p, q \in B$.

Sea A un subcontinuo de B tal que A es irreducible entre p y q. Por el Lema 8.23, tenemos que $A \in M(X)$. Esto demuestra que $q \in M_p$ y obtenemos que $\overline{M}_p \subset M_p$.

Por lo tanto M_p es cerrado. ■

Corolario 8.25 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces M_p es un conjunto F_σ para todo $p \in X$.*

Demostración. Sea $p \in X$, por el Teorema 8.24, M_p es cerrado en X, lo que implica que M_p es un subconjunto F_σ. ■

En el siguiente ejemplo mostramos un espacio que es arco conexo pero que no es hereditariamente arco conexo, para el cual no todas sus composantes magras son cerradas.

Ejemplo 8.26 *Denotemos por $\mathcal{K}$ al arcoiris de Knaster en $\mathbb{R}^2$, con base en el conjunto de Cantor canónico contenido en $[0,1] \times \{0\}$. Sea (Figura 8.2)*

$$X = \mathcal{K} \cup ([0,1] \times \{0\}).$$

Notemos que X es un continuo arco conexo que no es hereditariamente arco conexo.

Si $c \in \mathcal{C}$, entonces M_c coincide con la composante de c en $\mathcal{K}$, que es un conjunto F_σ que no es cerrado.

Teorema 8.27 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces la descomposición $\mathcal{M}_X$, inducida por las composantes magras, es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sean $p \in X$ y un abierto U en X tales que $M_p \subset U$. Sea

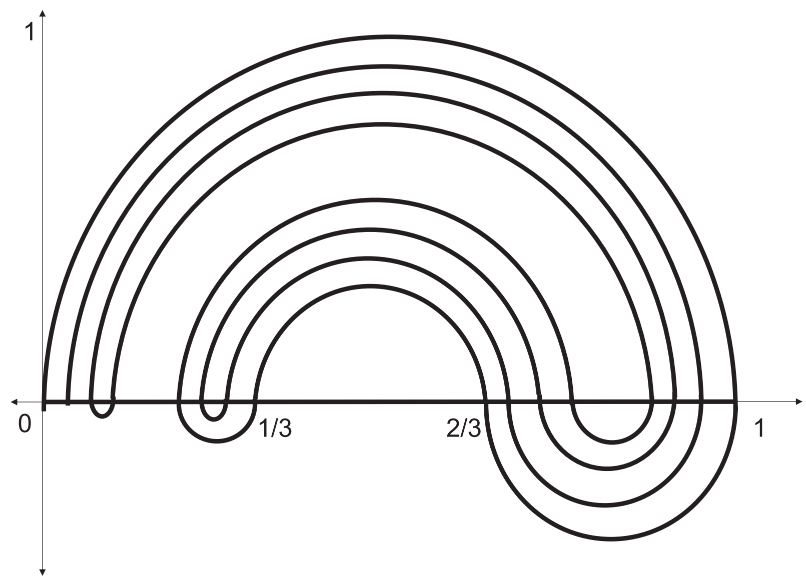

Figura 8.2: Un Continuo Arco Conexo con Composantes Magras no Cerradas.

$$W = \{x \in X : M_x \subset U\}.$$

Notemos que W es un subconjunto saturado que cumple que $p \in M_p \subset W \subset U$. Verifiquemos que W es un abierto en X.

Sean $q \in X$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - W$ tales que $\lim q_n = q$. Como $q_n \notin W$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $M_{q_n} \subsetneq U$. Entonces podemos tomar $x_n \in M_{q_n} - U$ y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $M(X)$ tal que $q_n, x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existen $A \in C(X)$ y $x \in X$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim x_n = x$, así $q, x \in A$ y además $x \in X - U$.

Sea B un subcontinuo de A tal que B es irreducible entre q y x. Por el Lema 8.23, tenemos que $A \in M(X)$, lo que implica que $x \in M_q - U$, así $q \in X - W$ y concluimos que $X - W$ es un subconjunto cerrado de X.

Lo que hemos demostrado es que, para todo abierto U de X y todo elemento $M_p \in \mathcal{M}_X$ tal que $M_p \subset U$, existe un abierto saturado W tal que

$M_p \subset W \subset U$. Por la Proposición 3.7 de [10], tenemos que $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente. ∎

Corolario 8.28 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces $\mathcal{M}_X$ es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 8.27, tenemos que $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente, así por [10, Teorema 3.10], obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo. ∎

Observación 8.29 *Sean X un continuo hereditariamente arco conexo y $\pi : X \mapsto \mathcal{M}_X$ la proyección natural, entonces*

1. *π es monótona, ya que $\pi^{-1}(M_p) = M_p$, el cual es un continuo (Teorema 8.24).*
2. *X es hereditariamente arco conexo, ya que si $\mathcal{A} \in C(\mathcal{M}_X)$, por 1, tenemos que $\pi^{-1}(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de X, que por ser X hereditariamente arco conexo, concluimos que $\mathcal{A}$ es la imagen de un continuo arco conexo.*

Teorema 8.30 *Si X es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces $\mathcal{M}_X$ es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Por el Corolario 8.28, tenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo.

Sea $\pi : X \mapsto \mathcal{M}_X$ la proyección natural. Un elemento en $\mathcal{M}_X$ es de la forma M_p, para algún $p \in X$, al traducir esta información en términos de la proyección π, tenemos que $\pi(p) = M_p$.

Para ver que $\mathcal{M}_X$ es localmente conexo, por el Corolario 8.12, sólo es necesario ver que la composante magra de todo elemento en $\mathcal{M}_X$ es degenerada; es decir tenemos que demostrar que $M_{M_p} = \{M_p\}$ para todo $M_p \in \mathcal{M}_X$.

Sean $M_p \in \mathcal{M}_X$ y $M_q \in M_{M_p}$. Entonces existe $\mathcal{A} \in M(\mathcal{M}_X)$ tal que $M_p, M_q \in \mathcal{A}$.

Notemos que $\pi^{-1}(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de X, porque π es monótona. Como $p, q \in \pi^{-1}(\mathcal{A})$, por ser $\pi^{-1}(\mathcal{A})$ arco conexo (inciso 2 de la Observación 8.29), existe un arco pq con extremos p y q contenido en $\pi^{-1}(\mathcal{A})$.

Afirmación 1. $pq \in M(X)$.

Para demostrar esta afirmación, recordemos que la topología en $\mathcal{M}_X$ esta dada por $\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_X : \cup\mathcal{U}$ es abierto en $X\}$, que es la topología más grande en $\mathcal{M}_X$ que hace continua π.

Supongamos que $int(pq) \neq \emptyset$, entonces existe un abierto U en X tal que $U \subset pq$. Sea rs un arco no degenerado contenido en U, notemos que el arco rs es libre en X.

Sean $x \in rs - \{r, s\}$ y B un subcontinuo no degenerado tal que $x \in B$. Si C_x es la componente de $B \cap rs$ que tiene a x, entonces C_x es un arco no degenerado en rs e $int(C_x) =\neq \emptyset$. Por lo tanto $M_x = \{x\}$.

Con esto hemos probado que $U = rs - \{r, s\}$ es un abierto en X tal que $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$, así $\pi(U)$ es un abierto no vacío en $\mathcal{M}_X$ tal que $\pi(U) \subset \mathcal{A}$. Pero esto es una contradicción, ya que $\mathcal{A} \in M(\mathcal{M}_{\mathcal{X}})$. Por lo tanto $pq \in M(X)$ y terminamos la demostración de esta afirmación.

Por la Afirmación 1, tenemos que pq es un subcontinuo con interior vacío tal que $p, q \in pq$, lo que demuestra que $q \in M_p$ y concluimos que $M_p = M_q$.

Por lo tanto $M_{M_p} = \{M_p\}$ y obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo localmente conexo. ■

Corolario 8.31 *Si X es un dendroide, entonces $\mathcal{M}_X$ es una dendrita.*

Demostración. Por el Teorema 8.30, tenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo localmente conexo, demostremos que no contiene curvas cerradas simples.

Supongamos que $\mathcal{S}$ es una circunferencia contenida en $\mathcal{M}_X$, entonces podemos tomar dos puntos $M_p, M_q \in \mathcal{S}$ y dos arcos no degenerados $\overleftarrow{M_pM_q}$ y $\overrightarrow{M_pM_q}$ tales que $\overleftarrow{M_pM_q} \cap \overrightarrow{M_pM_q} = \{M_p, M_q\}$ y $\overleftarrow{M_pM_q} \cup \overrightarrow{M_pM_q} = \mathcal{S}$.

Si $\pi : X \mapsto \mathcal{M}_X$, es la proyección natural, entonces $A = \pi^{-1}(\overleftarrow{M_pM_q})$ y $B = \pi^{-1}(\overrightarrow{M_pM_q})$ son dos subcontinuos en X, tales que $A \cap B = M_p \cup M_q$.

Como $M_p \neq M_q$, tenemos que $M_p \cap M_q = \emptyset$, así que $A \cap B$ es diconexo. Esto es absurdo pues X es hereditariamente unicoherente.

Esto demuestra que $\mathcal{M}_X$ es una dendrita. ■

Ejemplo 8.32 *Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea L_n el segmento convexo en $\mathbb{R}^2$ que une al punto $(0,0)$ con el punto $(1, \frac{1}{n})$.*

Sea Z el abanico armónico determinado por (Figura 8.3)

$$Z = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\Big) \cup ([0,1] \times \{0\}).$$

Notemos que para todo $p \in Z - ([0,1] \times \{0\})$, se cumple que $M_p = \{p\}$ y que si $p \in [0,1] \times \{0\}$, entonces $M_p = [0,1] \times \{0\}$.

Al considerar la descomposición $\mathcal{M}_Z$ inducida por las composantes magras, geométricamente lo que hacemos es identificar al segmento $[0,1] \times \{0\}$ en un punto. Dado que $\lim L_n = [0,1] \times \{0\}$, obtenemos a la dendrita F_ω.

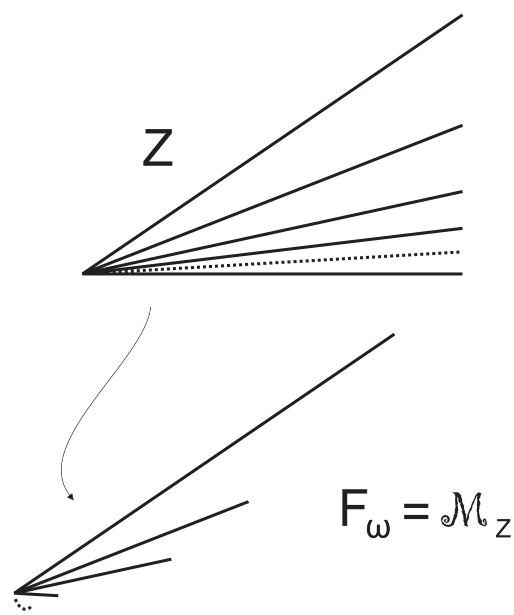

Figura 8.3: Las Composantes Magras Localizan Puntos de no Conexidad Local.

Como podemos apreciar, las composantes magras nos proporcionan una herramienta interesante. En algunas familias, como los dendroides, nos ayuda a identificar los puntos de no conexidad local.

8.3.2. Hereditariamente Descomponibles

Recordemos que un continuo es tipo λ, si X es irreducible y existe una función continua, monótona y suprayectiva $f : X \mapsto [0,1]$ tal que $f^{-1}(t) \in M(X)$ para toda $t \in [0,1]$.

Además, si X es un continuo y existe una función continua, monótona y suprayectiva $f : X \mapsto [0,1]$, a la función f la llamamos una función canónica de X.

En esta sección estudiaremos el Problema 8.3 en la familia de los continuos irreducibles que son hereditariamente descomponibles. Lo que nos motiva a seguir este camino son algunos resultados que tenemos para los continuos tipo λ.

El siguiente resultado nos brinda una caracterización de los continuos irreducibles que son hereditariamente indescomponibles, el cual nos proporciona una importante herramienta a lo largo de esta sección.

Teorema 8.33 *Si X es un continuo irreducible y hereditariamente descomponible, entonces X es tipo λ; es decir existe $f : X \mapsto [0,1]$ una función continua, monótona y suprayectiva tal que $f^{-1}(t) \in M(X)$, para toda $t \in [0,1]$.*

Como ya lo mencione, la clase de espacios tipo λ, ya fueron estudiadas en este trabajo cuando investigamos las relaciones que guardan los subcontinuos regulares y magros con diferentes propiedades de los espacios y las funciones que los relacionan.

Teorema 8.34 *Si X un continuo tipo λ con una función canónica f, entonces M_p es cerrado para toda $p \in X$, más aún, se cumple que:*

$$M_p = f^{-1}(f(p)).$$

Demostración. Como f es continua, basta demostrar que $M_p = f^{-1}(f(p))$ para toda $p \in X$.

Sea $p \in X$, como $p \in f^{-1}(f(p)) \in M(X)$, entonces $f^{-1}(f(p)) \subset M_p$.

Para demostrar la otra contención, por el Teorema 7.13, tenemos que $M(X) = \{A \in C(X) : f(A) \in M([0,1])\}$. De esta igualdad obtenemos que, si $A \in M(X)$ es tal que $p \in A$, entonces $A \subset f^{-1}(f(p))$.

Por lo tanto $M_p \subset f^{-1}(f(p))$ y concluimos que $M_p = f^{-1}(f(p))$ para todo $p \in X$. ■

Observación 8.35 *Sea $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, si $\pi : I^2 \mapsto [0,1]$ es la proyección sobre la primera coordenada, entonces:*

1. *π es una función continua, monótona y suprayectiva.*
2. *$\pi^{-1}(t) = \{t\} \times [0,1] \in M(I^2)$ para toda $t \in [0,1]$.*
3. *$M_p = I^2$.*

Este ejemplo muestra que la condición de ser irreducible, es fundamental para que se cumpla que $M_p = f^{-1}(f(p))$, para toda $p \in X$.

Teorema 8.36 *Si X es un continuo tipo λ, entonces $\mathcal{M}_X$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a usar el Teorema de la Transgresión (ver [2, Teorema 3.2]).

Necesitamos dos funciones.

1. Sea $\pi : X \mapsto \mathcal{M}_X$, la proyección natural.
2. Sea $f : X \mapsto [0,1]$ una función continua, monótona y suprayectiva tal que $f^{-1}(t) \in M(X)$ para toda $x \in [0,1]$. Esta función la tenemos gracias a que X es tipo λ.

Observemos que, por el Teorema 8.34, tenemos que $M_p = f^{-1}(f(p))$, lo que nos dice que el espacio $\mathcal{M}_X$ se puede pensar como identificar todas las fibras de f en un punto.

Verifiquemos que $f \circ \pi^{-1} : \mathcal{M}_X \mapsto [0,1]$ es univaluada.

Sea $M_p \in \mathcal{M}_X$. Entonces $\pi(M_p) = M_p$ que por el Teorema 8.34, tenemos que $M_p = f^{-1}(f(p))$. Entonces, si $x \in M_p = f^{-1}(f(p))$ tenemos que $f(x) = f(p)$, lo que demuestra que $f(\pi^{-1}(M_p)) = f(p)$.

Por lo tanto, por el Teorema de la Transgrsión, tenemos que $f \circ \pi^{-1} : \mathcal{M}_X \mapsto [0,1]$ es una función continua.

Verifiquemos que $\pi \circ f^{-1} : [0,1] \mapsto \mathcal{M}_X$ es univaluada.

Sea $t \in [0,1]$. Entonces $f^{-1}(t) \in M(X)$ y por el Teorema 8.34, tenemos que $f^{-1}(t) = M_p$ para algún $p \in M(X)$ tal que $f(p) = t$.

Así, $\pi(f^{-1}(t)) = \pi(M_p) = M_p$. Lo que demuestra que $\pi \circ f^{-1}$ es univaluada. Por lo tanto, por el Teorema de la Transgresión, tenemos que $\pi \circ f^{-1} : [0,1] \mapsto \mathcal{M}_X$ es una función continua.

Como $\pi \circ f^{-1}$ es la fucnión inversa de $f^{-1} \circ \pi$, obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. ■

Corolario 8.37 *Si X es un continuo tipo λ, entonces $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente.*

Demostración. Por el Teorema 8.36, tenemos que $\mathcal{M}_X$ es un continuo, así por [10, Teorema 3.10], obtenemos que $\mathcal{M}_X$ es una descomposición semicontinua superiormente. ■

Corolario 8.38 *Si X es un cotinuo irreducible y hereditariamente indescomponible, entonces:*

(a) M_p *es cerrado para todo* $p \in X$,

(b) $\mathcal{M}_X$ *es un continuo arco conexo,*

(c) $\mathcal{M}_X$ *es una descomposición semicontinua superiormente,*

(d) M_p *es un conjunto* F_σ, *para todo* $p \in X$.

Demostración. Como X es irreducible y hereditariamente indescomponible, por el Teorema 8.33, tenemos que X es tipo λ, así *(a)* se cumple por el Teorema 8.34, más aún, tenemos que $M_p = f^{-1}(p)$, para toda $p \in X$.

(b) se cumple por el Teorema 8.36.

(c) se cumple por el Corolario 8.37.

(d) se cumple por (a), ya que todo cerrado es un conjunto F_σ. ■

8.3.3. $\mathcal{S}$, un Ejemplo Complicado

En esta sección deseo mostrar un ejemplo que nos dice que el ser hereditariamente descomponible, no garantiza que las composantes magras sean cerradas.

Es importante señalar que, desgraciadamente, sólo doy la construcción del espacio en cuestión, y dejo simplemente una idea geométrica del porqué este espacio satisface lo que deseamos, ya que aún no he completado la prueba de que el espacio es hereditariamente descomponible.

Los Extremos de $\mathcal{C}$

Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de Cantor canónico del intervalo $[0, 1]$.

Para poder construir el espacio que deseamos, debemos introducir un poco de notación. Para esto vamos a recurrir a la construcción del conjunto de Cantor cuando lo obtenemos removiendo intervalos.

En el Paso 0 de la construcción de $\mathcal{C}$, tenemos el intervalo $C_0 = [0, 1]$.

En el Paso 1 de la construcción de $\mathcal{C}$, removemos el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ del conjunto C_0 y obtenemos

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Denotemos por E_1 al conjunto de puntos extremos que se originan, es decir $E_1 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

Notemos que E_1 tiene 2^1 elementos, los cuales inducen una pareja ordenada $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ que cumple que $\mid \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \mid = \frac{1}{3}$. Denotemos por $P_1 = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$.

En el Paso 2 de la construcción de $\mathcal{C}$, removemos los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ del conjunto C_1 y obtenemos

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Denotemos por E_2 al conjunto de puntos extremos que se originan, es decir $A_1 = \{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\}$.

Notemos que E_2 tiene 2^2 elementos, los cuales inducen 2 parejas ordenadas de la forma (a, b) donde $\mid a - b \mid = \frac{1}{3^2}$. Si denotamos por P_2 al conjunto de estas parejas ordenadas, tenemos

$$P_2 = \{(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}), (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\}.$$

Si continuamos recursivamente con este procedimiento, podemos dar la diguiente definición:

Definición 8.39 *Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean:*

- *E_n el conjunto de puntos extremos que se originan en el paso n de la construcción del conjunto de Cantor.*
- *P_n el ordenamiento en parejas ordenadas de los puntos de E_n, tales que $(a, b) \in P_n$ si y sólo si $\mid a - b \mid = \frac{1}{3^n}$.*

Notemos que por construcción se satisface que:

- E_n tiene 2^n elementos, para toda $n \in \mathbb{N}$,
- P_n tiene 2^{n-1} elementos, para toda $n \in \mathbb{N}$.

La Construcción

Denotemos por $\mathcal{K}$ el arcoiris de Knaster en $\mathbb{R}^2$ que se construye con base en el conjunto de Cantor $\mathcal{C} \times \{0\}$.

Consideremos $T : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R}^2$, definida por

$$T((x, y)) = \begin{cases} (x, y+1), & \text{si } y \geq 0 \\ (x, y-1), & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Notemos que geométricamente lo podemos pensar a $T(\mathcal{K})$ como la traslación de la parte superior de $\mathcal{K}$ una unidad hacia arriba y la parte inferior de $\mathcal{K}$ una unidad hacia abajo.

Denotemos por Z al cilindro del conjunto de Cantor en $\mathbb{R}^2$ determinado por

$$\{(c,t) \in \mathbb{R}^2 : c \in \mathcal{C} \text{ y } t \in [-1,1]\}.$$

Sea:

$$Y = T(\mathcal{K}) \cup Z.$$

Notemos que Y es de nueva cuenta una copia del arcoiris de Knaster, pero que contiene de manera natural al cilindro del conjunto de Cantor Z.

El continuo que nos interesa, lo vamos a construir por pasos, haciendo uso del continuo Y y del conjunto de parejas ordenadas P_n inducidas por los puntos extremos que se originan en la construcción del conjunto $\mathcal{C}$ (ver Definición 8.39).

Paso 1. Consideremos $P_1 = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$, el conjunto de parejas ordenadas inducidas por el conjunto de puntos extremos $E_1 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

Sea Y_1 el continuo que se obtiene de identificar en Y lo siguiente:

1. El punto $(\frac{1}{3}, 1)$ con el punto $(\frac{2}{3}, 1)$.

Paso 2. Consideremos $P_2 = \{(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\}$, el conjunto de parejas ordenadas inducidas el conjunto de los puntos extremos $E_2 = \{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\}$.

Sea Y_2 el continuo que se obtiene de identificar en Y_1 lo siguiente:

1. El punto $(\frac{1}{9}, -1)$ con el punto $(\frac{2}{9}, -1)$.
2. El punto $(\frac{7}{3}, -1)$ con el punto $(\frac{8}{3}, -1)$.

Continuando con este procedimiento podemos describir el paso n.

Paso n. Consideremos P_n, el conjunto de parejas ordenadas inducidas por el conjunto de puntos extremos E_n.

Sea Y_n el continuo que se obtiene de identificar en Y_{n-1}, los siguientes puntos:

- Para toda $(a,b) \in P_n$, identificamos el punto $(a,(-1)^{n+1})$ con el punto $(b,(-1)^{n+1})$.

Definición 8.40 *Sea $\mathcal{S}$ el continuo que resulta al final del proceso descrito anteriormente (Figura 8.4).*

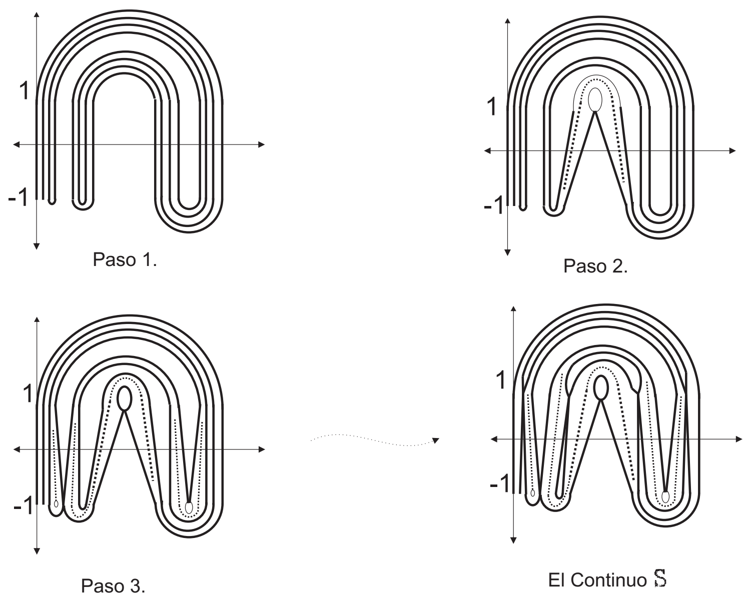

Figura 8.4: Construcción del Continuo $\mathcal{S}$.

Algunas Observaciones de $\mathcal{S}$

Sea $\pi : Z \mapsto \mathcal{S}$ la proyección natural.

Observación 8.41 *Por construcción $\pi(Z)$ es homeomorfo al ΛV- continuo (Figura 8.5), por lo que se cumple que:*

1. *$\pi(Z)$ es irreducible,*

2. *$\pi(Z)$ es hereditariamente descomponible,*

3. *Existe una función continua, monótona y suprayectiva $f : Z \mapsto [0,1]$, tal que $f^{-1}(t) \in M(Z)$, para toda $t \in [0,1]$.*

Una función $f : Z \mapsto [0,1]$, asociada al ΛV- continuo, la podemos pensar como una función que identifica a las composantes magras de este espacio en puntos (ver Teorema 8.36). No es difícil convencerse que en el ΛV- continuo, las composantes magras coinciden con una Λ o con una V o con un arco que priviene de una posición irracional del cilindro del conjunto de Cantor.

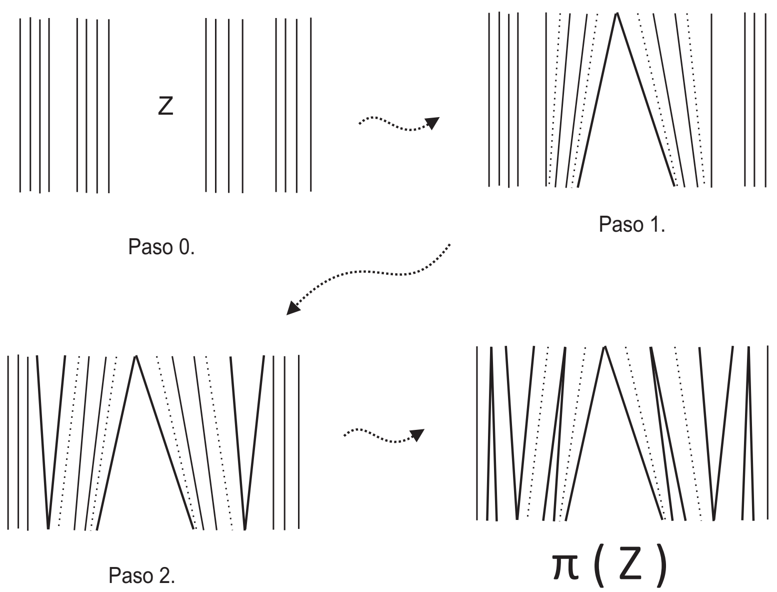

Figura 8.5: Construcción del ΛV-Continuo.

Observación 8.42 *$\pi(Z)$ es un subcontinuo propio de $\mathcal{S}$ con interior diferente del vacío, lo que demuestra que $\mathcal{S}$ es descomponible.*

Observación 8.43 *Sea $(x,y) \in Y$ tal que $| y |> 1$, si $C_{(x,y)}$ es la componente de $Y - Z$ que tiene a (x,y), entonces $\overline{C}_{(x,y)}$ es un arco, de esta forma $\pi(\overline{C}_{(x,y)})$ es un arco o una circunferencia en $\mathcal{S}$.*

Ahora notemos que si $s \in \mathcal{S} - \pi(Z)$, entonces existe $(x,y) \in Y - Z$ tal que $\pi((x,y)) = s$. Como $(x,y) \in Y - Z$, tenemos que $| y |> 1$, lo que implica *que, si C_s es la componente de $\mathcal{S} - \pi(Z)$ que tiene a $\mathcal{S}$, entonces $\overline{C}_s$ es una circunferencia a un arco.*

Afirmación 8.44 *El continuo $\mathcal{S}$ no es irreducible.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{S}$.

Consideremos tres casos.

Caso 1. $a, b \in \pi(Z)$.

En este caso $\pi(Z)$ es un subcontinuo propio de $\mathcal{S}$ que tiene a los puntos a y b.

Caso 2. $a \in \pi(Z)$ y $b \notin \pi(Z)$.

Sea C_b la componente de $\mathcal{S} - \pi(Z)$ que tiene a b, por la Observación 8.43 y por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C}_b$ es un arco o una circunferencia tal que $\pi(Z) \cap \overline{C}_b \neq \emptyset$.

Por lo tanto $\pi(Z) \cup \overline{C}_b$ es un subcontinuo propio que tiene a los puntos a y b.

Caso 3. $a \notin \pi(Z)$ y $b \notin \pi(Z)$.

Sean C_a y C_b las componentes de $\mathcal{S} - \pi(Z)$ que tienen a a y b, respectivamente, por la Observación 8.43 y por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C}_a$ y $\overline{C}_b$ son arcos o circunferencias tales que $\pi(Z) \cap \overline{C}_a \neq \emptyset$ y $\pi(Z) \cap \overline{C}_b \neq \emptyset$.

Por lo tanto $\overline{C}_a \cup \pi(Z) \cup \overline{C}_b$ es un subcontinuo propio que tiene a los puntos a y b.

Lo anterior demuestra que $\mathcal{S}$ no es irrecucible. ■

Denotemos por $\mathcal{C}^*$ al conjunto de puntos de $\mathcal{C}$ que no son extremos.

Si $c \in \mathcal{C}^*$, observemos que, en la construcción del continuo $\mathcal{S}$, no identificamos ningún punto de la composante magra M_c.

Observación 8.45 *Si $c \in \mathcal{C}^*$, entonces para todo $A \subset M_c$, se cumple que:*

$$\pi(\pi^{-1}(A)) = A.$$

Afirmación 8.46 *Si $c \in \mathcal{C}^*$, entonces $\pi(M_c) \subset M_{\pi(c)}$, donde M_c es la composante magra de c en Y y $M_{\pi(c)}$ es la composante magra de $\pi(c)$ en $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $x \in M_c$, entonces existe $A \in M(Y)$ tal que $c, x \in A$. Así $\pi(A)$ es un subcontinuo de $\mathcal{S}$ tal que $\pi(c), \pi(x) \in \pi(A)$. Como $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \in M(X)$, tenemos que $int(\pi(A)) = \emptyset$. Por lo tanto $\pi(x) \in M_{\pi(c)}$, para todo $x \in M_c$, lo que demuestra que:

$$\pi(M_c) \subset M_{\pi(c)}.$$

Esto termina la demostración de esta afirmación. ∎

Afirmación 8.47 *Si $c \in \mathcal{C}^*$, entonces $M_{\pi(c)}$ es densa en $\mathcal{S}$.*

Demostración. Como $\pi(M_c) \subset M_{\pi(c)}$, basta que demostremos que $\pi(M_c)$ es densa en $\mathcal{S}$.

Sea U un abierto en $\mathcal{S}$. Como $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en Y, al ser M_c densa en Y, tenemos que existe $y \in M_c \cap \pi^{-1}(U)$, lo que implica que $U \cap \pi(M_c) \neq \emptyset$. Por lo tanto $\pi(M_c)$ es densa en $\mathcal{S}$. ∎

Si $c \in \mathcal{C}^*$, observemos que, en la construcción del continuo $\mathcal{S}$, no identificamos ningún punto de la composante magra M_c.

Por otro lado, si $p \in \mathcal{S} - M_{\pi(c)}$ y $A \in M(\mathcal{S})$ son tales que $\pi(c), p \in A$, por construcción, se aprecia que la única posibilidad que A tiene de "escaparse" de $M_{\pi(c)}$, es que exista $a \in E_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tal que $(a, (-1)^{n+1}) \in M_c$, lo que implicaría que $M_c = M_{(a,(-1)^{n+1})}$, lo que no puede suceder.

Por lo tanto, todo parece indicar que la siguiente conjetura es verdadera.

Conjetura 8.48 *Si $c \in \mathcal{C}^*$, entonces $\pi(M_c) = M_{\pi(c)}$.*

Algo que es un poco más complicado de apreciar geométricamente, pero parece también cierto, es que el continuo $\mathcal{S}$ es hereditariamente descomponible.

En este sentido, enuncio la siguiente conjetura.

Conjetura 8.49 *$\mathcal{S}$ es hereditariamente descomponible.*

Si se da por verdadera la Conjetura 8.48 y $c \in \mathcal{C}^*$, entonces M_c es una composante magra en Y diferente a $M_{(0,0)}$, además:

- $M_{\pi(c)}$ es densa por la Afirmación 8.47,
- $M_{\pi(c)}$ es propia pues $\pi((0,0)) \notin \pi(M_c) = M_{\pi(c)}$.
- $M_{\pi(c)}$ no es cerrada, ya que $\pi((0,0)) \in \overline{M_{\pi(c)}}$ y $\pi((0,1)) \notin M_{\pi(c)}$.

Como existe una cantidad no numerable de puntos en $\mathcal{C}^*$, tales que su composante magra es diferente a $M_{(0,1)}$ en Y, por la Conjetura 8.49, obtenemos lo siguiente.

Afirmación 8.50 *$\mathcal{S}$ es un continuo con una cantidad no numerable de composantes magras densas que no son cerradas.*

8.4. Dos Problemas Importantes

Despues de trabajar el concepto de composante magra, encontramos que este conjunto lo había planteado David P. Bellamy en [1], con otra terminología. En [1, Página 262], se pueden encontrar la siguiente definición y los siguientes problemas.

Definición 8.51 *Si X es un continuo, entonces dos puntos $x, y \in X$ están en la misma **Clase de Sarcillo** (**Tendril Class**) si existe un subcontinuo denso en ninguna parte A de X, tal que $x, y \in A$.*

Problema 8.52 *(a) [1, Problema 24] ¿Existe un continuo X que contenga una clase de sarcillo propia, abierta y densa?*

(b) [1, Problema 25] ¿Si toda clase de sarcillo de un continuo X es densa y X tiene más de una clase de sarcillo, entonces X es indescomponible?

Observación 8.53 *Sean X un continuo y $p \in X$. Denotemos por S_p la clase de sarcillo de p. Si $x \in S_p$, entonces existe un subcontinuo denso en ninguna parte A de X tal que $p, x \in A$. Como A es denso en ninguna parte, tenemos que $int(A) = \emptyset$, así $A \in M(X)$, lo que implica que $x \in M_p$.*

Por otro lado, si $x \in M_p$, entonces existe $A \in M(X)$ tal que $p, x \in A$. Como A es denso en ninguna parte concluimos que $x \in S_p$.

Estas observaciones demuestran que no hay distinción entre composnates magras y clases de sarcillos.

Por la Observación 8.53, el Problema 8.52 se puede plantear en términos de composantes magras de la siguiente forma.

Problema 8.54 *(a) ¿Existe un continuo X que contenga una composante magra propia, abierta y densa?*

(b) ¿Si toda composante magra de un continuo X es densa y X tiene más de una composante magra, entonces X es indescomponible?

Lo que resta de este trabajo lo divido en dos partes. En la primera menciono algunas soluciones parciales del Inciso (a) del Problema 8.54 y muestro una simplificación que se le puede hacer a un espacio con las propiedades requeridas. En la última parte, damos solución al Inciso (b) del Problema 8.54.

8.4.1. Sobre el Problema 24 de [1]

En esta sección estamos interesados en la problemática de ver si existe un continuo que contenga una composante magra propia, abierta y densa.

Con el trabajo que hemos desarrollado a lo largo de las primeras secciones de este capítulo, tenemos que si un continuo pertenece a alguna de las siguientes familias:

1. Los continuos localmente conexos.

2. Los continuos hereditariamente arco conexos.

3. Los continuos tipo λ.

4. Los continuos irreducibles y hereditariamente descomponibles.

Entonces todas sus composantes magras, son subconjuntos cerrados (ver Teoremas 8.18, 8.24, 8.34 y *(a)* del Corolario 8.38, respectivamente).

Por lo tanto, si X es un continuo con una composante magra propia, abierta y densa, entonces X no puede pertenecer a ninguna familia de las que ya mencionamos.

La siguiente construcción nos indica que un ejemplo con las propiedades requeridas no tiene una estructura muy complicada.

Sea X un continuo y supongamos que existe un punto $p \in X$ tal que M_p es un subconjunto propio, abierto y denso en X. Denotemos por $\mathcal{B} = X - M_p$, como M_p es abierto, entonces $\mathcal{B}$ es cerrado.

Denotemos por $\mathcal{X}$ al continuo que resulta de identificar al conjunto en $\mathcal{B}$ en un punto y sea $\pi : X \mapsto \mathcal{X}$ la proyección natural.

Teorema 8.55 *Con la notación anterior, consideremos $p \in X - \mathcal{B}$ y $q \in \mathcal{B}$. Si $M_{\pi(p)}$ y $M_{\pi(q)}$ son las composantes magras de $\pi(p)$ y $\pi(q)$ en $\mathcal{X}$, respectivamente, entonces:*

(a) $M_{\pi(q)} = \{\pi(q)\}$,

(b) $\mathcal{X} = M_{\pi(p)} \cup M_{\pi(q)}$,

(c) $M_{\pi(p)}$ *es una composante magra propia, abierta y densa en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Para demostrar (a), es suficiente probar que $M_{\pi(q)} \subset \{\pi(q)\}$.

Supongamos que existe $r \in X - \mathcal{B}$, tal que $\pi(r) \in M_{\pi(q)}$. Como $M_p = M_r = X - \mathcal{B}$, si $A \in C(X)$ es tal que $r \in A$ y $A \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces $int(A) \neq \emptyset$.

Como $\pi(r) \in M_{\pi(p)}$, existe un subcontinuo con interior vacío $\mathcal{A}$ de $\mathcal{X}$ tal que $\pi(r), \pi(q) \in \mathcal{A}$.

Sea C_r la componente conexa de $\pi^{-1}(\mathcal{A})$ que tiene a r. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera, tenemos que $\overline{C_r} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, lo que implica que $\overline{C_r}$ es un subcontinuo con interior no vacío de X.

Sea W un abierto no vacío tal que $W \subset \overline{\mathcal{C}_r}$. Como $\mathcal{B}$ tiene interior vacío, existe $x \in W - \mathcal{B}$ y al ser $\mathcal{B}$ un conjunto cerrado, concluimos que $U = W - \mathcal{B}$ es un abierto no vacío ajeno a $\mathcal{B}$.

Por lo tanto U un abierto no vacío en X tal que $U \subset \overline{C_r} - \mathcal{B} \subset C_r \subset \pi^{-1}(\mathcal{A})$ y que además $U \cap (X - \mathcal{B}) = \emptyset$, así tenemos que $\pi(U)$ es un abierto de $\mathcal{X}$ contenido en $\mathcal{A}$, lo que es una contradicción ya que $\mathcal{A} \in M(\mathcal{X})$.

Con esto hemos demostrado que $M_{\pi(q)} = \{\pi(q)\}$.

Demostremos (b).

Si $s \in X$ es tal que $\pi(s) \neq \pi(q)$, entonces $s \in M_p$. Sea $A \in M(X)$ tal que $s, p \in A$, entonces $\pi(A)$ es un subcontinuo de $\mathcal{X}$. Como el $int(A) = \emptyset$, tenemos que $A \cap \mathcal{B} = \emptyset$, de esta forma $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$, lo que implica que $\pi(A)$ es un subcontinio de $\mathcal{X}$ con interior vacío tal que $\pi(s), \pi(p) \in \pi(A)$. Lo que demuestra que $\pi(s) \in M_{\pi(p)}$

Con esto tenemos que $\mathcal{X} \subset M_{\pi(p)} \cup M_{\pi(q)}$ y concluimos la prueba de (b).

Demostremos (c).

Por (b) tenemos que $M_{\pi(p)} = \mathcal{X} - M_{\pi(q)}$, lo que implica que $M_{\pi(p)}$ es propia. Por (a), tenemos que $M_{\pi(q)} = \{\pi(q)\}$, lo que implica que $M_{\pi(p)}$ es abierta y densa. ■

El Teorema 8.55 muestra que si existe un espacio que contiene una composante magra propia, abierta y densa, entonces se puede crear un espacio con una estructura muchísimo más sencilla, pues se puede construir un espacio con sólo dos composantes magras, en donde una de ellas es un punto y la otra es el complemento de dicho punto.

Por lo tanto, el Problema 8.54 inciso (a), se puede plantear de la siguiente forma.

Problema 8.56 *¿Existe un continuo X que tenga sólo dos composantes magras M_p y M_q con las siguientes propiedades:*

(a) $M_q = \{q\}$, *y*

(b) $X = M_p \cup M_q$*?*

8.4.2. Solución del Problema 24 de [1]

Recordemos que el Problema 24 de [1], en términos de composantes magras (Problema 8.54, Inciso (b)), dice lo siguiente:

- ¿Si toda composante magra de un continuo X es densa y X tiene más de una composante magra, entonces X es indescomponible?

La respuesta a esta pregunta es **NO** y a continuación construimos un ejemplo.

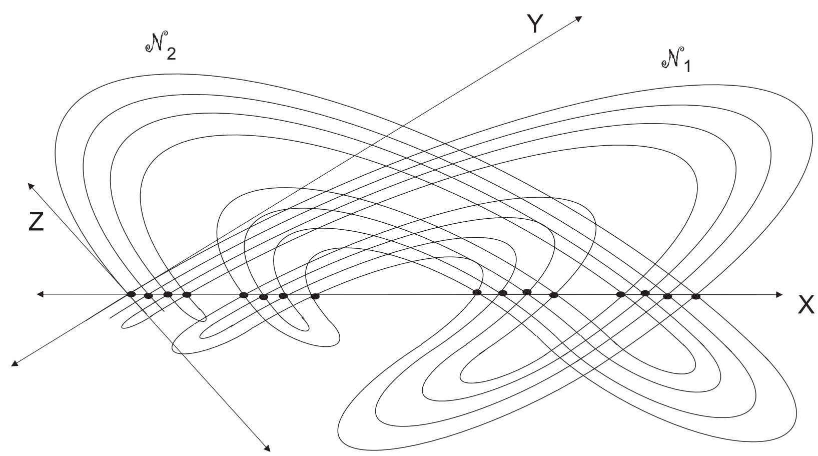

Figura 8.6: El Doble Arcoiris.

Ejemplo 8.57 *Sea* $\mathcal{N}_1 \subset \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$*, el arcoiris de Knaster anclado en el conjunto de Cantor canónico contenido en* $[0, 1] \times \{0\} \times \{0\}$.

Sea $\mathcal{N}_2 \subset \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}$*, el arcoiris de Knaster anclado en el conjunto de Cantor canónico contenido en* $[0, 1] \times \{0\} \times \{0\}$.

Sea (Figura 8.6)

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2.$$

Como $\mathcal{N}_1$ *es un subcontinuo propio con interior diferente del vacío, concluimos que* $\mathcal{N}$ *es descomponibe.*

Sea $p \in \mathcal{N}_1$*, si* C_p^1 *y* C_p^2 *son las composantes de* p *en contenidas en* $\mathcal{N}_1$ *y* $\mathcal{N}_2$*, respectivamente, entonces:*

$$C_p^1 \cup C_p^2 = M_p.$$

Esto implica que toda composante magra de $\mathcal{N}$ *es densa.*

Bibliografía

[1] D. P. Bellamy, *Questions In and Out of Context*, Open Problems in Topology II, Elsevier Science (2007), 259-262.

[2] J. Dugunji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1966.

[3] R. Escobedo, S. Macías y H. Méndez, editores, *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (31), Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[4] J. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961.

[5] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos (28), Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[6] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[7] K. Kuratowsky, *Topology*, Vol. 1, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.

[8] K. Kuratowsky, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.

[9] W. Lewis and J. J. Walsh, *A Continuous Decomposition of the Plane Into Pseudo-Arcs*, Houston J. Math., v. 4, No. 2, (1978), 209-221.

[10] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, an Introduction*, Pure and Applied Mathematics 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[11] J. R. Prajs and K. Whittington, *Filament Sets and Homogeneous Continua*, Topology Appl., 154 (2007), 1581-1591.

[12] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 28, Providence, RI, 1942, reprinted with corrections 1971.

[13] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc. Minoela and New York, 2004.

Índice alfabético