08446

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

CONVECCION NATURAL EN CIRCUITOS ACOPLADOS.

TESINA QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO

EN INGENIERIA MECANICA TEORICA Y APLICADA

PRESENTA:

OCTAVIO RAMON SALAZAR SAN ANDRES.

CIUDAD UNIVERSITARIA D.F., MEXICO. DICIEMBRE 1984.

T. UNAM
1984
SAL

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

3 de agosto de 1984

A: Dr. Victor Muciño

DE: Dr. Mihir Sen

EXAMEN DE MAESTRIA.

ALUMNO: Octavio Ramón Salazar San Andrés

TEMA: Flujos convectivos en circuitos compuestos.

DESCRIPCION.

a) Estudio bibliográfico de modelos unidimensionales de circuitos de circulación natural en estado permanente.

b) Estudio de dos circuitos independientes acoplados únicamente en una región en la que se permite intercambio convectivo de energía.

DURACION.

Treinta días naturales.

Mihir Sen

DR. MIHIR SEN.

Aceptado
21/8/84

RESUMEN

El presente artículo muestra el análisis de dos circuitos en contacto térmico a lo largo de una cierta longitud, que se conocerá como longitud común ó zona común, a través de la cual pueden intercambiar energía calorífica. Los circuitos contienen en su interior un determinado fluído de trabajo(no necesariamente el mismo para ambos) y que es puesto en movimiento cuando el sistema por ellos formado es sometido a regímenes de calentamiento y enfriamiento a lo largo de sus zonas no comúnes. En principio, no hay restricción alguna en cuanto a la forma de los circuitos, solamente que la sección transversal de cada uno es constante.

Se lleva a cabo el desarrollo matemático para modelar el comportamiento del sistema antes descrito bajo régimen permanente y de dónde surgen cuatro resultados diferentes que un sistema con las características ya mencionadas debe poseer para alcanzar dicho estado permanente.

La teoría se ejemplifica por dos circuitos rectangulares acoplados, demostrando como los campos de velocidad y temperatura son independientes de la longitud de los brazos horizontales. También, se analiza en forma numérica el caso de dos circuitos cuadrados puestos en contacto a través de una pared conductora.

INDICE PAGINA

NOMENCLATURA

C ......Capacidad calorífica.

D ......Diámetro.

F_f ......Fuerza de fricción.

g ......Aceleración de la gravedad.

$\hat{g}$ ......Componente local de la aceleración de la gravedad definida por (II-10).

h ......Coeficiente de transferencia de calor por convección.

J ......Jacobiano.

L ......Longitud total del termosifón.

L' ......Longitud adimensional definida en la subsección III.1.

ℓ ......Longitud adimensional definida en la subsección II.1.

$\dot{m}$ ......Flujo másico.

p ......Presión.

Q ......Flujo de calor adimensional.

r ......Radio de un termosifón toroidal.

S ......Coordenada adimensional definida en la subsección II.3.

T ......Temperatura.

t ......Tiempo.

u ......Velocidad dimensional.

V ......Velocidad adimensional definida en II.3.

$\dot{V}$ ......Flujo volumétrico.

v ......Volumen específico ó velocidad en el apéndice A.

w ......Area transversal en el apéndice A.

x ......Coordenada longitudinal.

z......Coordenada de elevación.

SIMBOLOGIA GRIEGA

α ......Angulo de inclinación.

β ......Coeficiente de expansión volumétrico isobárico.

Γ ......Número de Grashof modificado y definido en la subsección II.3.

ΔT ......Cambio adimensional de la temperatura definido en la subsección II.3.

ΔX ......Cambio en la coordenada x.

δ ......Aceleración adimensional de la gravedad definida en la subsección II.3.

λ......Coeficiente de transferencia de calor por conducción.

μ......Viscosidad dinámica ó absoluta.

ν......Viscosidad cinemática.

ρ......Densidad.

Θ......Temperatura adimensional.

τ......Esfuerzo cortante.

SUBINDICES

0......Orígen del sistema coordenado, x=0.

L......Se refiere al termosifón uno.

W......Se refiere al termosifón dos.

1......Punto donde termina el termosifón.

2......Se refiere a la pared.

GRUPOS ADIMENSIONALES

$$G_r = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}$$ = Número de Grashof.

$$G_z = \frac{\dot{m} C}{\lambda L}$$ = Número de Graetz.

$$N_u = \frac{hD}{K}$$ = Número de Nusselt.

$$P_r = \frac{\mu C}{\lambda}$$ = Número de Prandtl.

$$R_e = \frac{v D \rho}{\mu}$$ = Número de Reynolds.

INTRODUCCION

Los sistemas convectivos de circulación natural donde el movimiento se produce a consecuencia de un cambio en la densidad del fluído, conocido como efecto termosifónico, poseen amplia aplicación en sistemas de enfriamiento de emergencia para reactores nucleares debido a que, su funcionamiento es seguro y no requieren de equipo de bombeo, pues el calor necesario para provocar el cambio de densidad lo puede proveer el mismo reactor. Este tipo de equipo es muy empleado sobre todo en reactores de recría rápida de metal líquido.

Una aplicación importante la constituye el hecho de que, según estudios efectuados, el 30% de la energía empleada en cualquier comunidad podría obtenerse del sol. Como ejemplo, los calentadores domésticos de agua que funcionan a base de energía solar emplean el fenómeno termosifón con unas u otras variantes, cuyo objetivo es alcanzar la mayor eficiencia del sistema de captación

La geotermia tampoco pude sustraerse al empleo del efecto termosifónico, ya que de por sí, el movimiento del fluído en un pozo geotérmico es provocado a través de un cambio en su densidad. En la actualidad, éste campo ha adquirido una gran importancia debido a la posibilidad de extraer considerables cantidades de energía del mismo. En México, se está tratando de localizar yacimientos geotérmicos a lo largo del territorio, pero hasta ahora, solamente Michoacán y Baja California resultan ser las zonas más importantes.

Durante el presente estudio se analizará un sistema compuesto por dos circuitos acoplados y de cualquier geometría que interactúan a través de una pared conductora. Este tipo de configuraciones es muy usual en las plantas nucleoeléctricas, donde para evitar problemas de contaminación por radiación se unen dos circuitos con un cambiador de calor, en que uno de ellos extrae la energía del reactor y después la transfiere al otro para su aprovechamiento. Esta clase de sistemas se conoce como binario.

El presente artículo consta de cuatro secciones. La primera, muestra una revisión de las principales investigaciones que hasta el momento existen sobre convección natural en circuitos cerrados y abiertos, operando en estado permanente, así como sus principales aplicaciones. La segunda, presenta el desarrollo matemático de un sistema formado por dos circuitos acoplados donde la sección transversal se considera constante y la geometría arbitraria. En la tercera sección se analiza el caso de dos circuitos rectangulares acoplados, lo que se ejemplifica al estudiar en forma numérica el comportamiento de un par de circuitos cuadrados acoplados a régimen permanente. Finalmente, la cuarta sección y última, está dedicada a la recopilación de conclusiones.

SECCION I

REVISION BIBLIOGRAFICA

El advenimiento de estudios sobre convección natural en circuitos cerrados en los últimos años, se debe principalmente a su aplicación en sistemas de enfriamiento de emergencia para reactores nucleares y en la extracción de potencia a base de energías solar y geotérmica. Por otra parte, los circuitos termosifónicos que trabajan con convección natural poseen un amplio campo de acción en la industria debido a su sencillez y facilidad de manejo. En principio, no hay límite respecto a consideraciones geométricas y técnicas durante la construcción.

Un termosifón lo constituye un circuito ya sea abierto ó cerrado donde el movimiento del fluído contenido en su interior se debe a un cambio en la densidad del mismo, consecuencia de regímenes de calentamiento y/o enfriamiento a los cuales es sometido, tal y como muestran las figuras I.1 Y I.2.

Durante la presente sección será analizado el estado actual que guarda la investigación en el campo de la convección natural aplicada al estudio de termosifones a través de las principales publicaciones referentes a este tema. Por otro lado, ya que el análisis aqui expuesto se dirige hacia los sistemas termosifónicos en estado permanente, la revisión contendrá tópicos sobre dicho punto única y exclusivamente, a menos que, el estado transitorio guarde alguna relación con éste en forma muy directa.

La persona interesada en una revisión bibliográfica que no solamente abarque circuitos termosifónicos a régimen permanente, sino también incluya régimen transitorio y cierto tipo de aplicaciones algo especiales, puede recurrir al artículo de Japikse[1] donde se encuentra información bastante actualizada sobre el tema hasta el año de 1973. Más tarde, Mertol y Greif[2] presentan otra revisión en que además están incluídas investigaciones subsecuentes de los siguientes once años. Finalmente, Zvirin[3] efectúa la más reciente revisión bilbiográfica sobre convección natural en circuitos cerrados. Comparándola con la llevada a cabo por Mertol y Greif[2], se infiere que aquella es más completa desde un punto de vista técnico, mientras ésta es más abundante en referencias.

En primera instancia, Keller[4] analiza en forma teórica el comportamiento de un termosifón rectangular donde el calentamiento se efectúa en la parte inferior y el enfriamiento en la superior. Las ecuaciones de balance son resueltas por medio de diferencias finitas y su solución conduce a cierto parámetro de control que cuando excede el valor unitario genera un movimiento periódico oscilatorio, que no afecta el sentido de la circulación del fluído en su interior. Se concluye que este movimiento es independiente de las fuerzas inerciales pero no de las viscosas y mucho menos de las de flotación. Al principio se pensó que el movimiento oscilatorio dependía del método numérico empleado, pero finalmente demostró ser inherente al sistema.

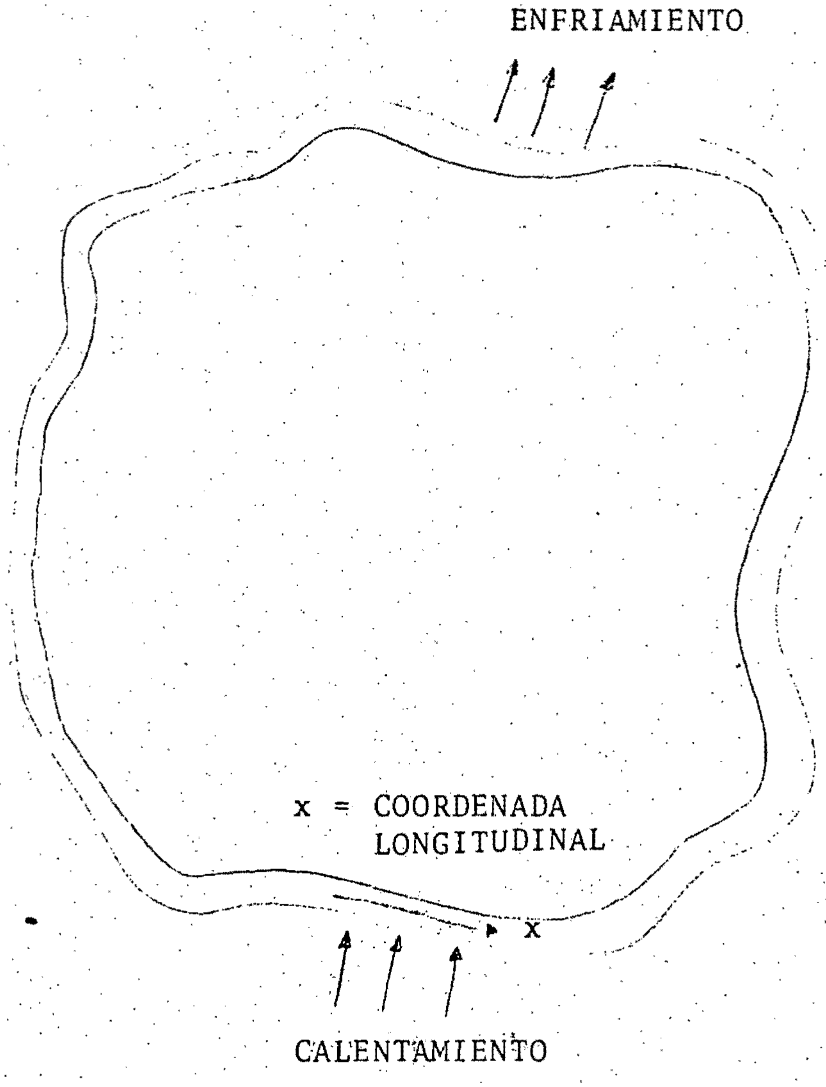


Figura I.1.Termosifón cerrado sometido a cierto régimen de calentamiento y enfriamiento.

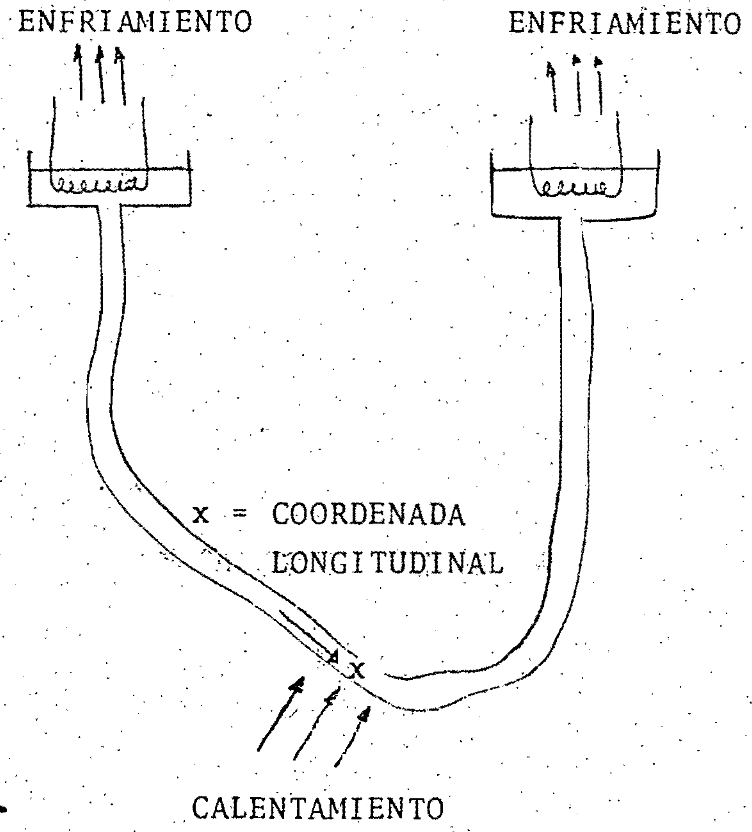


Figura I.2. Termosifón abierto sometido a un régimen de calentamiento-enfriamiento. En la naturaleza se puede encontrar un claro ejemplo de ésto en los geisers.

Welander[5] estudia en forma teórica un termosifón cerrado con dos brazos paralelos y secciones semicirculares tanto en su parte superior como inferior en donde se realiza el calentamiento y enfriamiento respectivamente. Es utilizado el esquema de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de balance y la solución demuestra que al introducir una pequeña inestabilidad en el sistema, ésta redunda en un movimiento oscilatorio que el autor trata de explicar a través de una formación de paquetes calientes,los cuales no alcanzan a ser enfriados en la parte superior debido a su velocidad y en cambio pueden seguir calentándose en la inferior.

Sen y Treviño[6] comprueban la multiplicidad de soluciones en circuitos con forma indeterminada donde las condiciones iniciales son factor determinante en el sentido que adquiera la velocidad. Demuestran además en forma teórica la presencia de oscilaciones suponiendo el factor de fricción función del número de Reynolds y de la Ley de la Potencia.

Creveling et al.[6] examinan el comportamiento de un termosifón toroidal(circular), tanto en forma teórica como experimental, sometido en su parte media inferior a un calentamiento con flujo de calor constante, mientras en la superior ocurre un enfriamiento por medio de un cambiador de calor. Los autores encontraron que la velocidad en el interior es posible que oscile en forma periódica ó aperiódica con cambios en el sentido. Esto sucede cuando el flujo de calor no es muy grande ó muy pequeño en cuyo caso la velocidad tiende a un valor constante. Demuestran además, que el estado permanente se alcanza después de que el sistema haya trabajado por largo tiempo.

Por su parte, Damerell y Schoenhals[8] analizan el estado permanente en un termosifón toroidal cuyas secciones de calentamiento y enfriamiento se giran un cierto ángulo como muestra la figura I.3, obteniendo los resultados siguientes:

a) El flujo máximo ocurre cuando se calienta en la parte más baja y se enfría en la parte más elevada.

b) Las predicciones para el flujo en estado permanente basadas en un factor de fricción estándar a régimen laminar totalmente desarrollado, exceden los valores experimentales cuando el ángulo de desplazamiento se encuentra entre 0° y 60° , debido al efecto de reversibilidad en el flujo. Este es de gran magnitud cuando $\Theta_o = 0°$ y se desprecia si $\Theta_o = 60°$.

c) En cambio, las correlaciones para el factor de fricción estándar en flujo laminar totalmente desarrollado poseen una aceptación razonable cuando $60° \leq \Theta_o \leq 140°$.

d) Se encuentra en forma experimental, que el termosifón puede generar tres soluciones para la velocidad. Una en sentido dextrógiro , otra en sentido levógiro, o tal vez ninguna, ó las tres juntas. Esto demuestra la multiplicidad de soluciones en este tipo de sistemas.

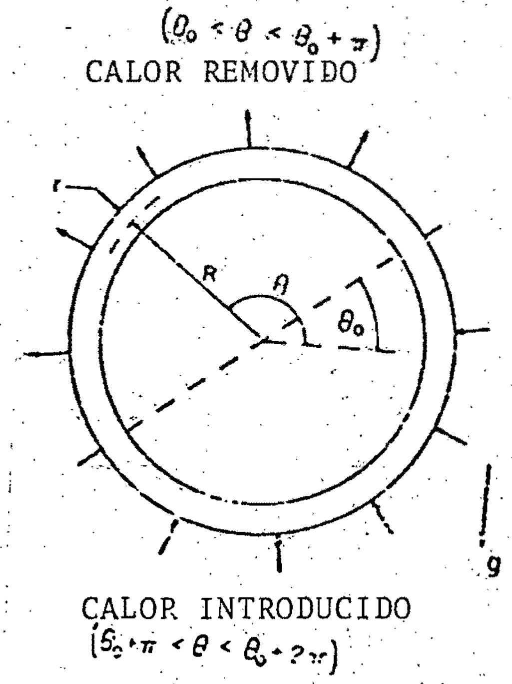


Figura I.3. Termosifón toroidal con calentamiento y enfriamiento sujeto a cierta inclinación.

d) Cuando al estado permanente se le perturba con una cierta inclinación, el sistema puede llegar a oscilar provocando inversión en el flujo. Dicho estado permanente se alcanza de nuevo si el termosifón se gira 6° hacia su posición de equilibrio.

Sen, Ramos y Treviño[9] demuestran que en efecto, dentro de un termosifón toroidal inclinado como el de la figura I.3, se puede tener 0,1,2 y 3 velocidades, comprobando con ello la multiplicidad de soluciones propuesta anteriormente por Damerell y Schoenhals[8]. Los autores, también encontraron que la máxima velocidad del fluído en el circuito no siempre ocurre cuando se calienta y enfría a un ángulo de inclinación a cero grados, tal como éstos lo habían establecido. Además, comprueban que la solución aproximada es prácticamente indistinguible de la exacta para un valor pequeño de la relación D/W, pero diferente para valores grandes, donde W es la velocidad adimensional y D definida como:

$$D=2\pi Rh/CrV\rho_w \qquad \text{(I-1)}$$

Donde R es el radio medio, h el coeficiente de transferencia de calor por unidad de longitud, C la capacidad calorífica, r el radio del toroide, ρ_w la densidad del fluído a la temperatura de pared y V una velocidad característica:

$$V=(g\beta Rrq/2\pi C\mu)^{0.5} \qquad \text{(I-2)}$$

Siendo g la aceleración de la gravedad, β el coeficiente de expansión volumétrico a presión constante, q el flujo de calor y μ la viscosidad dinámica ó absoluta. Además, con ciertos ángulos de inclinación hay más de una solución en estado permanente para la velocidad como muestra la figura I.4, donde Θ_0 es el ángulo de inclinación. La figura I.5 enseña claramente como existen soluciones en estado permanente para cada cuadrante.

Acosta y Manero[10] concluyen que para cualquier termosifón en general el valor de la velocidad en estado permanente depende de tres parámetros: el flujo de calor, inclinación del termosifón y modo de calentamiento. El sistema puede tener 0,1,2 ó 3 velocidades en estado permanente. Pruebas llevadas a cabo por los autores confirman la existencia de soluciones múltiples. Además, que la velocidad en estado permanente es proporcional a la cantidad de calor suministrada y la existencia de dos ángulos independientes de las condiciones de trabajo que los autores llaman γ_0 , para los cuales la velocidad se anula:

$$\gamma_{01}=116^\circ\ 33'\ 54''$$
$$\gamma_{02}=-63^\circ\ 26'\ 6''$$

Como contraste a lo dicho anteriormente, Rojas[11] muestra que el cambio en las dimensiones geométricas donde se suministra ó extrae calor no afecta la velocidad en estado transitorio.

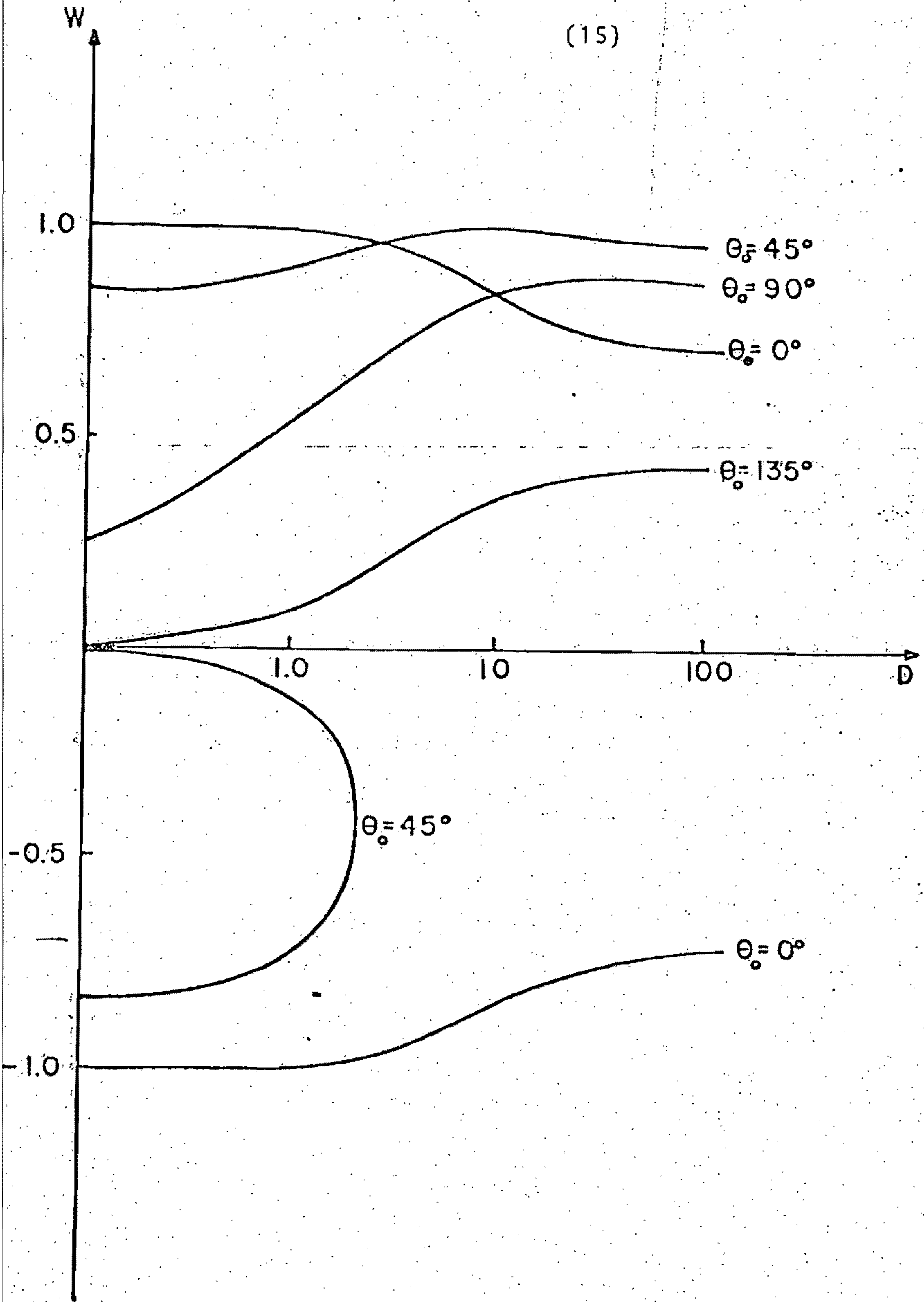


Figura I.4. Velocidad adimensional W contra parámetro de control D.

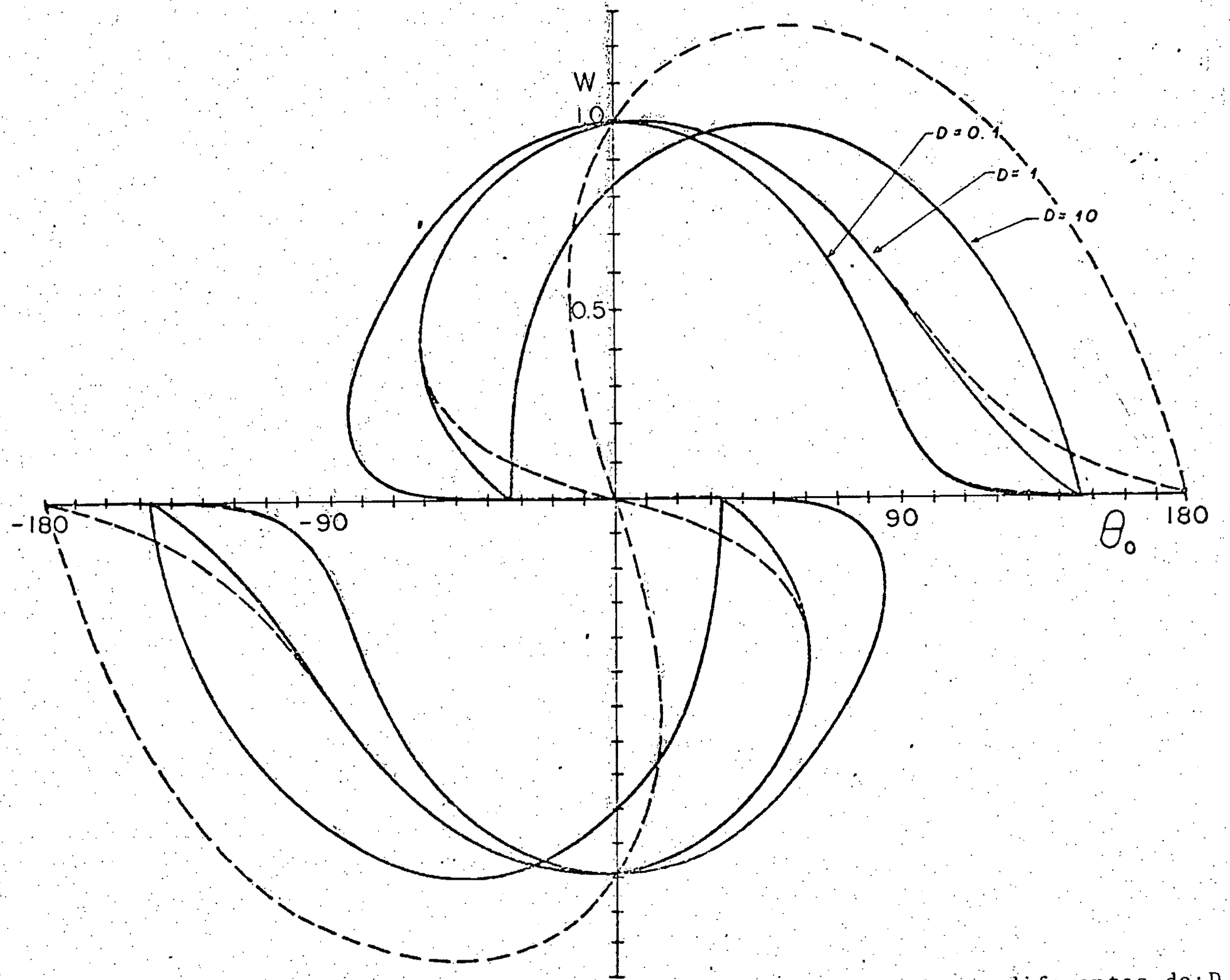


Figura I.5. Velocidad W contra inclinación Θ_o, para valores diferentes de D.

Sen, Ramos y Treviño[12] estudian el termosifón toroidal con flujo de calor conocido encontrando que, para alcanzar el estado permanente es necesario cumplir con:

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \left\{ \int_0^{\theta} Q(\theta')\, d\theta' \right\} d\theta \geq 0 \qquad \text{(I-3)}$$

Donde θ es la coordenada y Q el calor agregado al sistema. Los autores suponen que $Q(\theta)$ es periódico y por tanto, expandible en serie de Fourier:

$$Q(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q_n^c \cos(n\theta) + Q_n^s \operatorname{sen}(n\theta)\right) \qquad \text{(I-4)}$$

Conduciendo a una condición adicional para la existencia del estado permanente:

$$Q_1^s \leq 0 \qquad \text{(I-5)}$$

Hart[13] demuestra que cuando un termosifón toroidal sufre calentamiento a ángulos azimutales pequeños se presenta una multitud de estados permanentes bajo consideraciones tales como: análisis unidimensional y aproximación de Boussinesq(todas las propiedades se mantienen constantes a excepción de la densidad en el término de flotación en la ecuación de la energía).

Zvirin[14] estudia el efecto de la disipación viscosa en circuitos cerrados con convección libre calentados por abajo y enfriados por arriba. El autor hace uso de dos modelos en su análisis según indica la figura I.6. En el primer caso encontró que los efectos disipativos afectaban la distribución de temperatura en régimen laminar. Para el segundo termosifón halló que las velocidades incrementan su valor con el aumento de disipación viscosa tanto para régimen laminar como turbulento. Por otra parte, Bau y Torrance[15] estudian los efectos de la disipación viscosa y la presión dentro de circuitos cerrados a régimen laminar y muestran que ambos son de magnitud comparable. Se presentan soluciones numéricas tanto para termosifones abiertos como cerrados. Temperatura de pared constante y flujo de calor constante son las dos condiciones bajo las cuales el estudio es conducido, para finalmente concluir que la disipación viscosa en efecto aumenta la velocidad como Zvirin[14] lo propone, pero la presión la reduce y adquiere entonces un carácter predominante, punto que éste último no consideró durante su estudio. Mertol, Lavine y Greif[16] también comprueban estos resultados.

Mertol,Lavine y Greif[16] llevan a cabo un estudio donde se toma en cuenta la variación de la presión en un termosifón toroidal cerrado. El calentamiento es transmitido por la parte inferior y el enfriamiento por la superior. Demuestran a través de un procedimiento analítico que la pérdida de calor en el termosifón es proporcional a la diferencia de temperatura entre el fluído y la pared. Se define un parámetro D por medio de la expresión (I-1), que es determinante

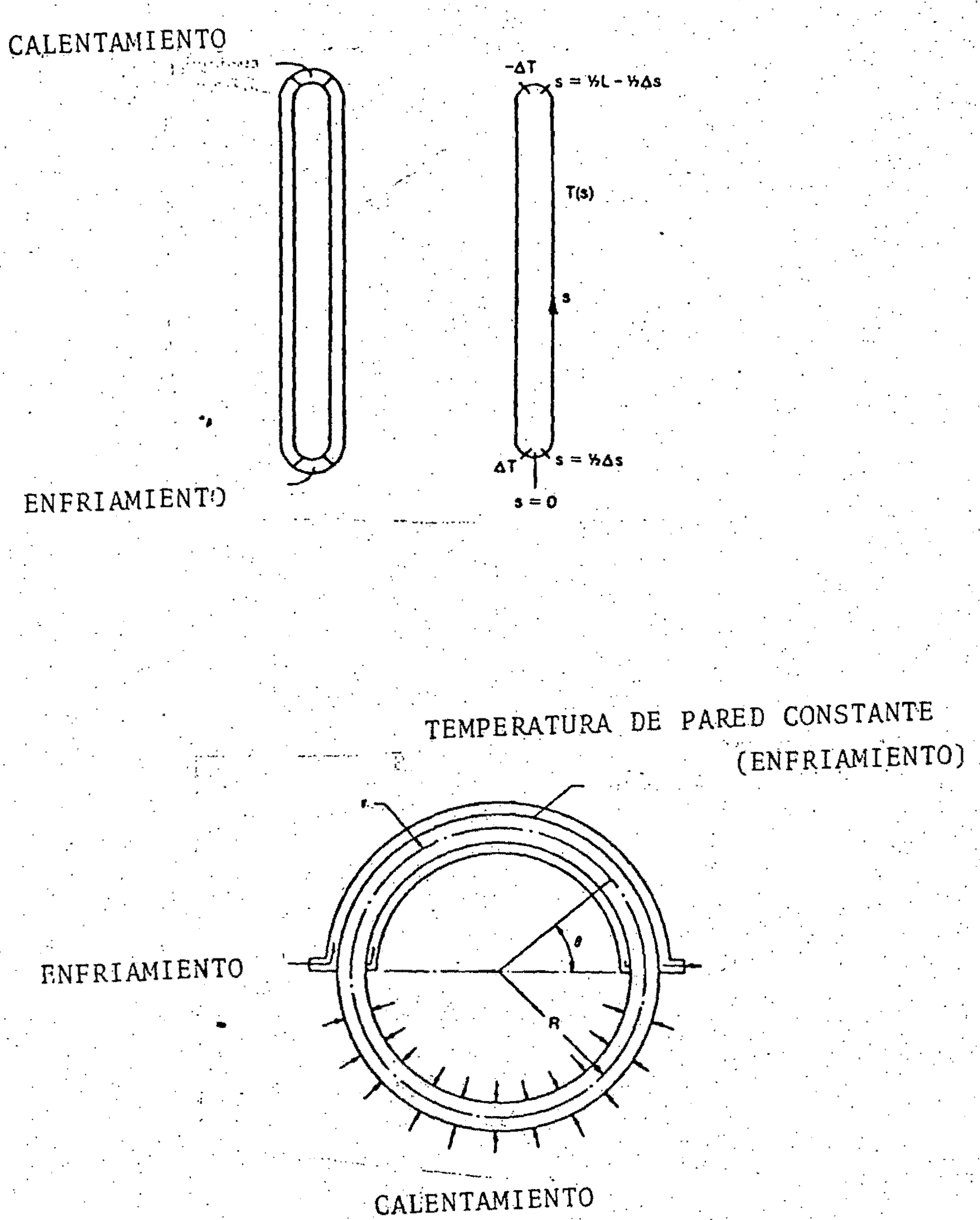


Figura I.6. Termosifones empleados por Y. Zvirin para analizar la influencia de la disipación viscosa.

en la evaluación de la distribución de la presión en estado permanente. Al crecer su valor, la caída de presión se vuelve más brusca a lo largo del circuito.

Bau y Torrance[17] demuestran la existencia de un flujo secundario dentro del termosifón abierto de la figura I.7, cuya importancia crece si el fluído es agua. Estos flujos secundarios incrementan el valor del factor de fricción arriba de lo especificado en las correlaciones más empleadas y por ende la transferencia de calor. Sen y Treviño[18] se cuestionan si el análisis unidimensional para un circuito termosifónico es válido ya que efectos como separación y flujo secundario son despreciados. Por tanto, suponer flujo de Poiseuille, laminar y totalmente desarrollado no es válido. Por ejemplo Creveling et al.[7] encontraron que para un circuito toroidal el factor de fricción por ellos deducido era demasiado elevado. Sin embargo, Sen y Treviño[18] finalmente concluyeron que las características cualitativas de los perfiles de velocidad y temperatura son hasta cierto punto independientes de ésto. También, encontraron que el alto arrastre viscoso del fluído turbulento tendería a reducir su velocidad y conducir a un régimen laminar.

Mertol, Greif y Zvirin[19] comprueban que para un termosifón toroidal con flujo inducido como muestra la figura I.8, la distribución de temperatura en estado permanente se apega al transitorio de mayor tiempo adimensional τ según puede observarse en la figura I.9 donde ϕ es la temperatura adimensional,

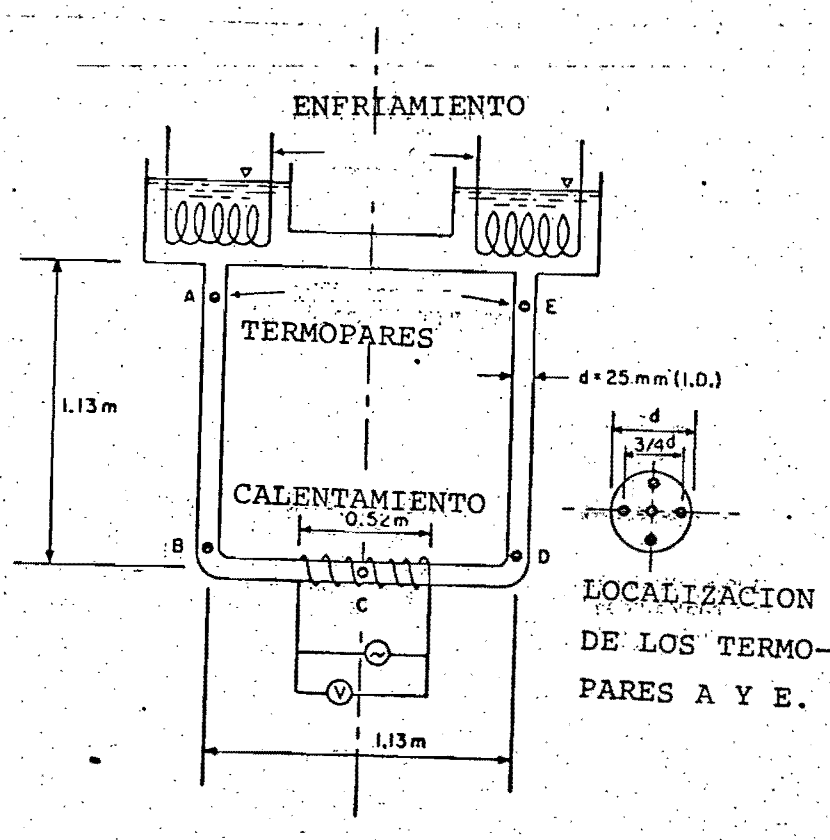


Figura I.7. Equipo experimental de un termosifón abierto, empleado por Bau y Torrance.

θ la coordenada espacial y el resto parámetros geométricos del sistema. También, demuestran la multiplicidad de soluciones para el estado permanente. Una vez más se utiliza el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de balance.

Mertol, Greif y Giz[20] estudian el fenómeno permanante en un termosifón toroidal con flujo inducido, calentado por abajo y enfriado por arriba con un cambiador de calor de flujo paralelo como muestra la figura I.10. Se considera un coeficiente de transferencia de calor constante entre el fluído que circula por el termosifón y el del cambiador de calor. Las ecuaciones de balance se resuélven simultáneamente a través de diferencias finitas y las integrales involucradas en ellas por la regla trapezoidal. Los resultados incluyen la eficiencia del cambiador y la caída de presión en su interior al igual que los perfiles de velocidad y temperatura del termosifón y cambiador de calor. La temperatura de pared en la región de enfriamiento se considera constante. La tabla I.1 muestra los resultados en estado permanente para una relación de diámetros igual a dos entre el diámetro del toroide y el de la sección del cambiador de calor, donde D es un parámetro adimensional que compara la tarnsferencia de calor entre el termosifón y el cambiador con las fuerzas de flotación, V_{he} la velocidad en éste, W_{ss} la velocidad que circula por el termosifón en estado permanente, ϕ_{in} la temperatura del fluído que entra al toroide, ϕ_{ss} la temperatura en estado permanente dentro del termosifón, $\phi_{\infty ss}$ lo mismo pero para el cambiador de calor, θ la coordenada y ΔP_{ss} la caída de presión a lo largo de él. Después de observar la tabla I.1, se aprecia como aumenta la temperatura tanto en el toro como en el cambiador al

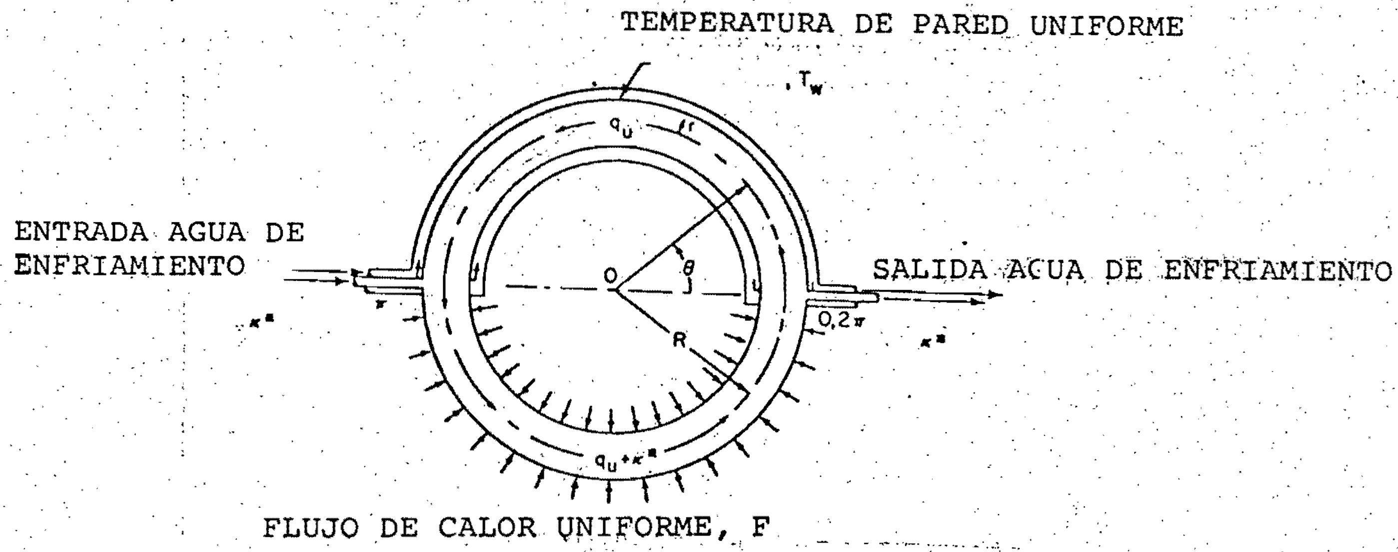


Figura I.8. Termosifón toroidal abierto.

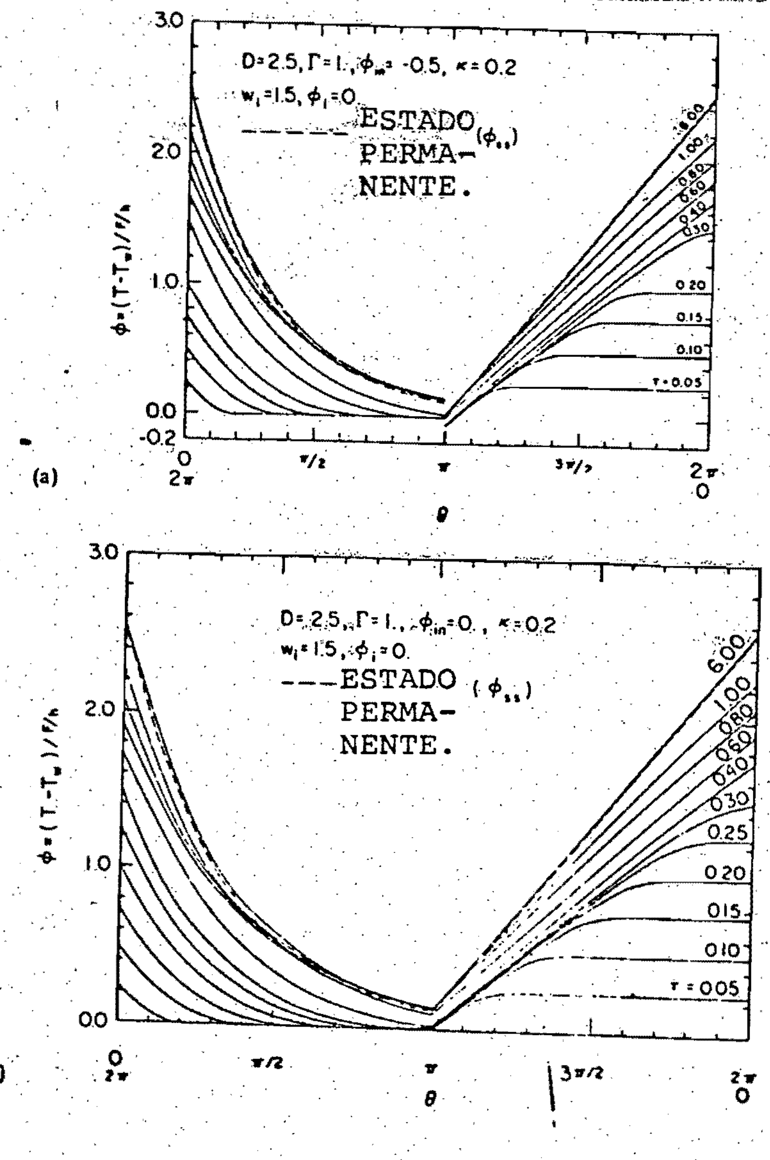


Figura I.9. Distribución de temperatura para condi-

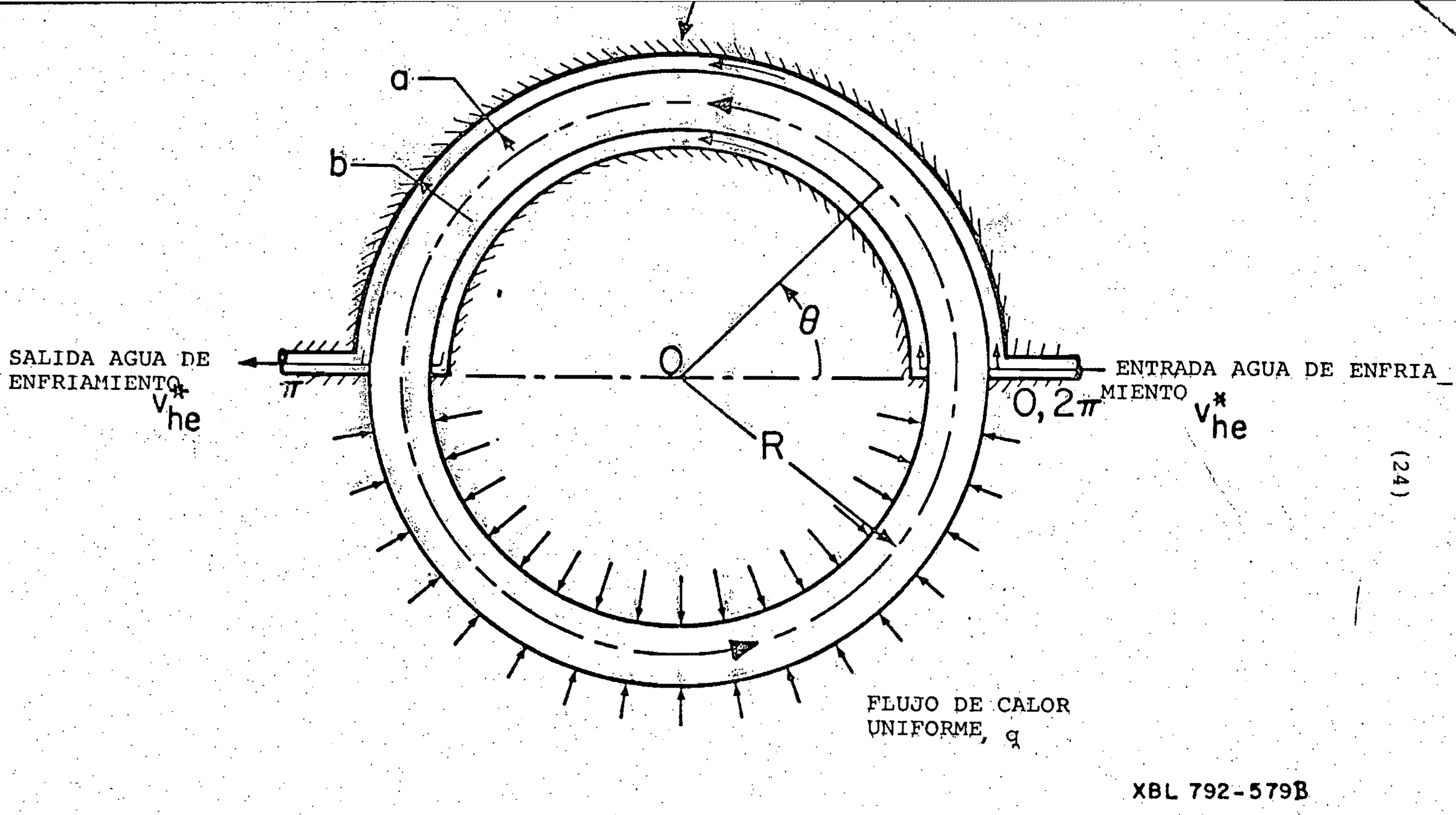


Figura I.10. Termosifón toroidal con cambiador de calor de flujo paralelo.

TABLA 1. RESULTADOS EN ESTADO PERMANENTE (b/a = 2)

				$\phi_{ss}(\theta)$				$\phi_{\infty_{ss}}(\theta)$		
D	v_{he}	w_{ss}	ϕ_{in}	$\theta=0,2\pi$	$\theta=\pi/2$	$\theta=\pi$	$\theta=3\pi/2$	$\theta=\pi/2$	$\theta=\pi$	Δp_{ss}
			-0.5	0.732	0.677	0.632	0.682	-0.315	-0.167	
	0.1	0.999	0.0	1.232	1.177	1.132	1.182	0.185	0.333	-3.422
			0.5	1.732	1.677	1.632	1.682	0.685	0.833	
			-0.5	0.586	0.534	0.486	0.536	-0.465	-0.433	
0.1	0.5	1.000	0.0	1.086	1.034	0.986	1.036	0.035	0.067	-1.166
			0.5	1.586	1.534	1.486	1.536	0.535	0.567	
			-0.5	0.568	0.516	0.468	0.518	-0.483	-0.467	
	1.0	1.000	0.0	1.068	1.016	0.968	1.018	0.017	0.033	-1.333
			0.5	1.568	1.516	1.468	1.518	0.517	0.533	
			-0.5	3.954	2.994	2.888	3.421	2.501	2.833	
	0.1	0.938	0.0	4.454	3.494	3.388	3.921	3.001	3.333	-2.638
			0.5	4.954	3.994	3.888	4.421	3.501	3.833	
			-0.5	1.564	0.857	0.552	1.058	-0.034	0.167	
1.0	0.5	0.988	0.0	2.064	1.357	1.052	1.558	0.466	0.667	-1.135
			0.5	2.564	1.857	1.552	2.058	0.966	1.167	
			-0.5	1.316	0.649	0.308	0.812	-0.279	-0.167	
	1.0	0.992	0.0	1.816	1.149	0.808	1.312	0.221	0.333	-1.323
			0.5	2.316	1.649	1.308	1.812	0.721	0.833	
			-0.5	10.816	7.844	7.833	9.325	7.804	7.833	
	0.1	0.838	0.0	11.316	8.344	8.333	9.825	8.304	8.333	-1.450
			0.5	11.816	8.844	8.833	10.325	8.804	8.833	
			-0.5	3.884	1.499	1.225	2.555	0.995	1.167	
2.5	0.5	0.940	0.0	4.384	1.999	1.725	3.055	1.495	1.667	-1.011
			0.5	4.884	2.499	2.225	3.555	1.995	2.167	
			-0.5	3.058	0.843	0.447	1.752	0.207	0.333	
	1.0	0.958	0.0	3.558	1.343	0.947	2.252	0.707	0.833	-1.278
			0.5	4.058	1.843	1.447	2.752	1.207	1.333	

hacerlo la temperatura de entrada. Una situación opuesta sucede cuando crece la velocidad W_{ss}. Todos los parámetros anteriores están puestos en forma adimensional. Mertol y Greif[21] al llevar a cabo un estudio del mismo termosifón pero ahora con un cambiador de calor a contraflujo(ver figura I.11), demuestran como en este caso disminuye la transferencia de calor para las mismas condiciones de la situación precedente, según se muestra en la figura I.12.

Sen y Treviño[22] estudian el efecto de la conducción longitudinal de calor en estado permanente para un termosifón solar y donde se define el siguiente grupo adimensional:

$$\gamma = \left(\frac{\beta g L^3 Q \rho_o C}{8\pi \lambda^2 \nu}\right)^{0.5} \qquad \text{(I-6)}$$

Siendo β el coeficiente de expansión volumétrico isobárico, L la longitud total del termosifón, Q el calor agregado, C la capacidad calorífica, ν la viscosidad cinemática, λ el coeficiente de conductividad térmica del fluído y ρ_o la densidad en el orígen del sistema x=0. Entonces, los autores demuestran que cuando $\gamma \to \infty$ la conducción longitudinal puede despreciarse.

Un estudio de gran interés presenta Chen[23] donde se analiza hasta que punto la configuración geométrica influye en el funcionamiento de un termosifón rectangular como el representado en la figura I.13 y define la expresión:

$$P^{\circ} = C_3 (1+A) (W/rPr) C_4 / Gr_r \qquad \text{(I-7)}$$

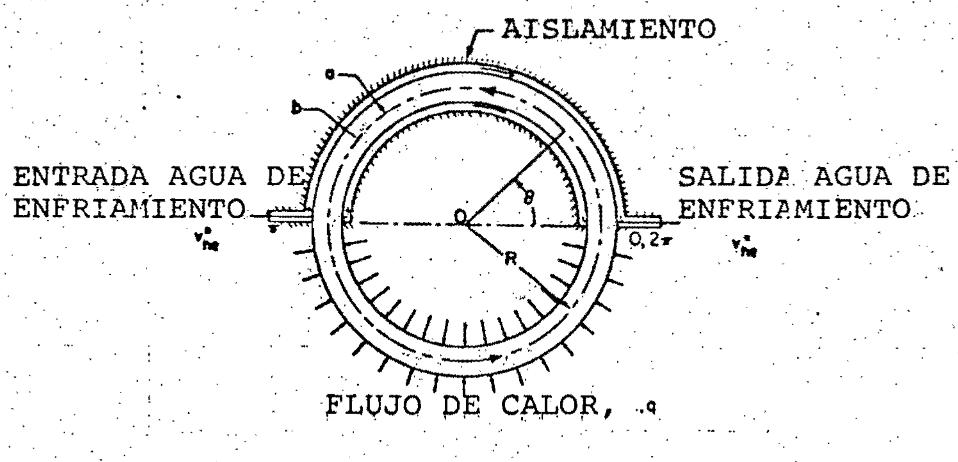


Figura I.11. Termosifón con circulación natural con cambiador de calor a contra-flujo.

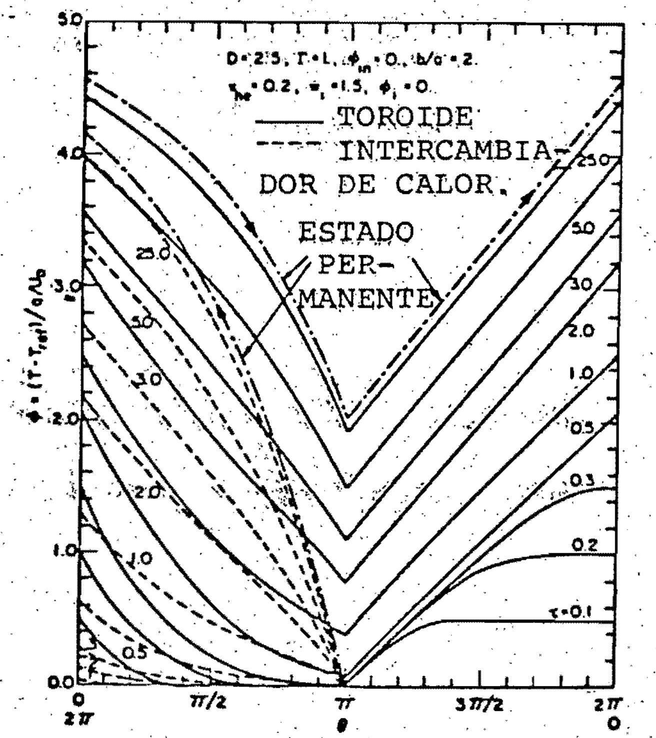


Figura I.12. Distribución de temperatura respecto a la coordenada.

Donde Pr es el número de Prandtl, Gr_r el número de Grashof con base en r, A=W/H, r el radio de los brazos, W la longitud de las secciones de calentamiento y enfriamiento, C_3 y C_4 constantes. De igual forma define un número crítico:

$$P_c^{\circ}=2^{(n-b+1)/(1-n)} \tag{I-8}$$

Siendo para flujo laminar n=0, b=1 y para turbulento n=0.8, b=0. Entonces, se establece que si $P^{\circ} > P_c^{\circ}$, la temperatura del fluído contenido en el circuito alcanza a la de las secciones de calentamiento y enfriamiento al pasar por ellas. Además, un incremento en las longitudes del sistema, redunda en una disminución de la transferencia de calor. Por otra parte, si $P^{\circ} < P_c^{\circ}$, la transferencia de calor se incrementa al hacerlo las dimensiones del circuito.

Kaizerman, Wacholder y Elías[24] al igual que Keller[3], Sen y Treviño[6], Acosta y Manero[9] muestran como para circuitos toroidales que trabajen en estado permanente, una perturbación de éste conduce a oscilaciones e inversión de flujo. La figura I.14 enseña el circuito por ellos analizado y donde puede observarse como existe una presurización para evitar cualquier expansión por parte del agua contenida en su interior y que afectara el experimento. En casi todos los artículos a excepción de éste, las propiedades termodinámicas se suponen constantes, por tanto, el coeficiente de fricción es función de la coordenada longitudinal, lo mismo los coeficientes de transferencia de calor, etc. Se presenta una solución numérica de las tres ecuaciones

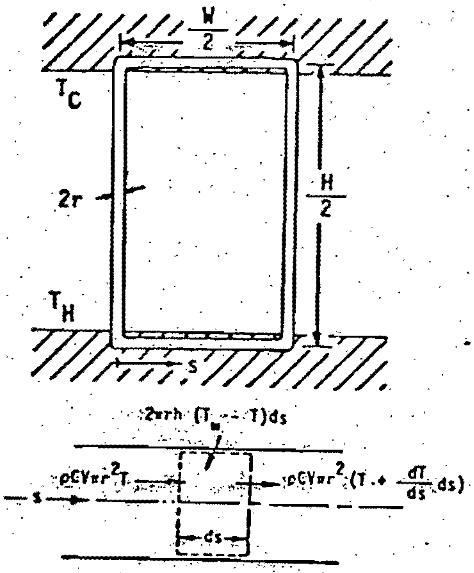


Figura I.13. Termosifón rectangular considerado en el análisis geométrico de k. Chen.

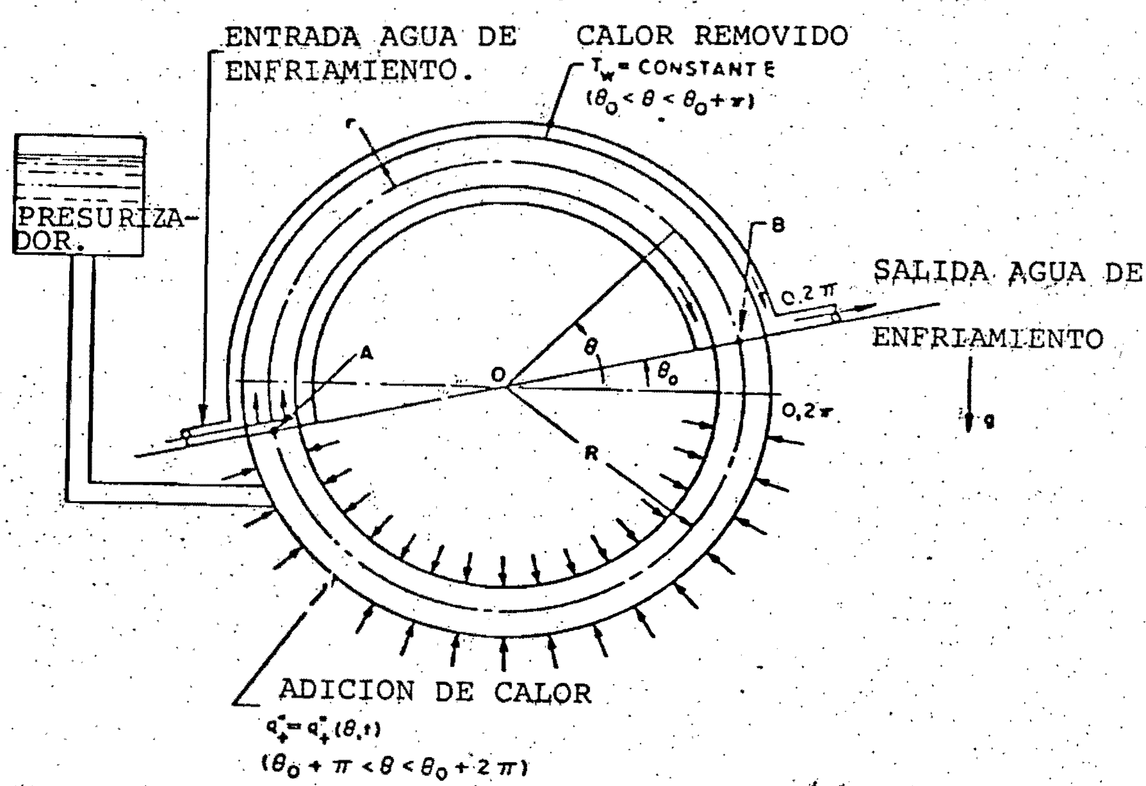


Figura I.14. Toroide con circulación natural y pequeño ángulo de inclinación, sujeto a un presurizador.

básicas de conservación tanto para el sistema como para el tanque presurizador. Los autores demuestran que cuando no hay tanque presurizador aparecen grandes oscilaciones.

Ramos, Sen y Treviño[25] reducen las ecuaciones de balance a un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias a través de las técnicas de Fourier, donde los factores de fricción y números de Nusselt son función de la Ley de la Potencia del número de Reynolds. Hart[13] también adopta el mismo procedimiento en su artículo. Además, los autores demuestran como los casos de flujo de calor constante y temperatura de pared conocida se desacoplan perfectamente. Esto significa, que las tres ecuaciones diferenciales ordinarias son independientes.

Ramos, Sen y Treviño[26] estudian el estado permanente en un circuito con área variable y donde concluyen que para alcanzar el estado permanente es necesario cumplir con:

$$\int_0^L \hat{g}(x) \left\{ \int_0^x q(x')\,dx' \right\} dx > 0 \qquad \text{(I-9)}$$

Donde $\hat{g}$ es la componente local de la aceleración de la gravedad, q el calor agregado y x la coordenada longitudinal. Análogamente, también se comprueba la multiplicidad de soluciones. Esto induce que dicha multiplicidad es independiente de si el área transversal varía o no.

Lapin[27] llevó a cabo un análisis para flujo de calor constante tanto al calentar como enfriar las paredes laterales de un circuito rectangular, encontrando excelente acuerdo entre sus resultados teóricos y experimentales tal como muestra la figura I.15. El estudio incluyó regímenes laminar, transicional y turbulento. Precisamente en este último fué donde se alcanzó la mejor aproximación teórico-experimental.

Morris[28] condujo experimentos con un circuito simple que se muestra en la figura I.16, haciéndolo girar sobre un eje con velocidades que oscilaban entre 0 y 300 RPM. El calentamiento era efectuado en el brazo de menor diámetro y el enfriamiento a lo largo del restante. Utilizó como fluídos de trabajo agua y glicerina, encontrando las correlaciones siguientes:

$$\frac{Nu\,Ra\,d}{Pr^2}=0.15A_c^{0.735}\,Re^{2.45} \quad \text{(para agua)} \qquad \text{(I-9)}$$

$$\frac{Nu\,Ra\,d}{Pr^2}=0.082A_c^{0.685}\,Re^{3.55} \quad \text{(para glicerina)} \qquad \text{(I-10)}$$

Donde $A_c=Rw^2/g$, $Ra=(Rw^2\beta d^3\,\Delta T\;/\nu^2\,)Pr$. El número de Reynolds debe ser calculado de un simple análisis sobre la cantidad de movimiento.

Sen y Fernández[29] estudian un modelo de termosifón muy utilizado en la industria nuclear para enfriar el reactor de una planta a base de convección natural, con-

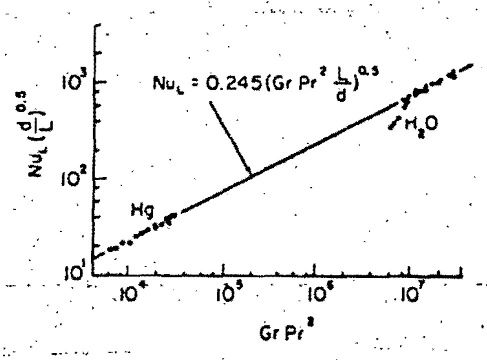


Figura I.15. Resultados del experimento llevado a cabo por Lapin. Donde Nu es el número de Nusselt, Pr es el número de Prandtl, Gr el número de Grashof, L la longitud del termosifón y d el diámetro de los brazos.

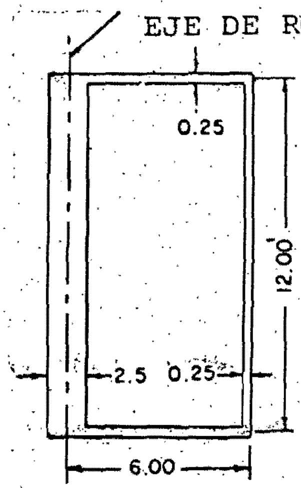
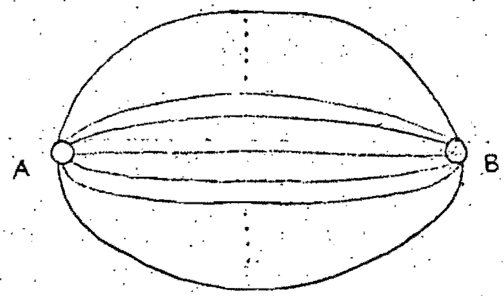


Figura I.16. Termosifón rotatorio empleado por Morris donde las dimensiones están en pulgadas.

sistente en un punto llamado A desde donde parten N ramas que después se juntan en B, tal como se muestra a continuación:



Las formas de calentamiento consideradas son: flujo de calor constante y temperatura de pared también constante. Además, analizan dos casos: cuando la conducción axial no es importante (caso no conductivo) y cuando si lo es (caso conductivo). Demuestran que para el caso no conductivo, las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento no constituyen un sistema consistente.

Por otra parte, hacen resaltar que el análisis del término:

$$\lambda \frac{d^2 T_i}{dx_i^2} \qquad (I-11)$$

(Donde λ es el coeficiente de conductividad térmica), en la ecuación de la energía es un problema muy interesante que corresponde al campo de las perturbaciones ya que en los puntos A y B debe haber un fuerte gradiente de temperatura pues en ellos λ disminuye notablemente. La mezcla en dichos puntos es responsable de la alta transferencia de calor debido a la turbulencia ahí reinante y por consiguiente, a que las terminales del punto B posean todas la misma temperatura. Los autores comprueban la multiplicidad de soluciones tanto en el caso de flujo de calor constante como temperatura de pared también constante e inclusive en un sistema que tenga, las dos condiciones mezcladas como por ejemplo un termosifón toroidal en donde la parte inferior posee calentamiento con flujo de calor constante y un enfriamiento en la superior con temperatura de pared constante. De igual forma, hacen notar que las condiciones iniciales afectan grandemente la selección del estado permanente sobre el cual caerá la solución.

En el campo de los termosifones abiertos, existen ciertos trabajos interesantes que complementan la teoría de los cerrados. Como Leslie[30], que analiza el efecto de la aceleración de Coriolis en un sistema de enfriamiento para álabes de turbina a base del fenómeno termosifón. Dicho estudio es únicamente teórico. Por su parte, Martin y Lockwood[31] comprueban que la entrada del fluído al circuito proveniente de un tanque de abastecimiento es determinante en la transferencia de calor, concluyendo que un perímetro a base de ángulos rectos es lo más eficiente. Y Torrance[32] estudia el comportamiento de un geiser, donde llega a definir claramente la estructura óptima para alcanzar la mayor temperatura del fluído a la salida de éste. La estructura geométrica corresponde a una elipse. Bau y Torrance[33] estudian un termosifón semejante al de la figura I.7 en forma teórico-experimental. En este caso el calentamiento se realiza según muestra la figura pero agregando otro a uno de los brazos verticales. Determinan que existen ciertos pares de valores para el calentamiento con los cuales se alcanza el estado permanente.

El efecto termosifón posee amplia aplicación en ramas tales como la energía solar y esto puede verse a través de los artículos [34] al [43]. Por ejemplo Zvirin, Shitzer y Grossman[44] propusieron una distribución lineal de la temperatura tanto en el colector como en el tanque contenedor con el propósito de resolver las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento en estado permanente para un sistema de captación y aprovechamiento de energía solar como el de la figura I.17. Este modelo lineal únicamente tuvo éxito cuando se poseía la irradiación del mediodía. Además, las temperaturas medias del tanque y el colector se supusieron iguales. Más tarde Shitzer, Kalmanoviz, Zvirin y Grossman[45] comprobaron experimentalmente que la suposición lineal de temperatura tanto en el tanque contenedor como en el colector tenía validez cuando la radiación era máxima.

Una aplicación interesante es encontrada por Gruszczynski y Viskanta[46] quienes emplean el efecto termosifónico para medir los coeficientes medios de transferencia de calor por convección del agua. El equipo consiste en un circuito rectangular, cuyos brazos verticales poseen en su interior un juego de siete tubos conectados al exterior a través de los cuales se suministra agua caliente y agua fría respectivamente, generando con ésto, un movimiento en el interior del circuito. Las mediciones se llevan a cabo cuando este alcanzó el estado permanente.

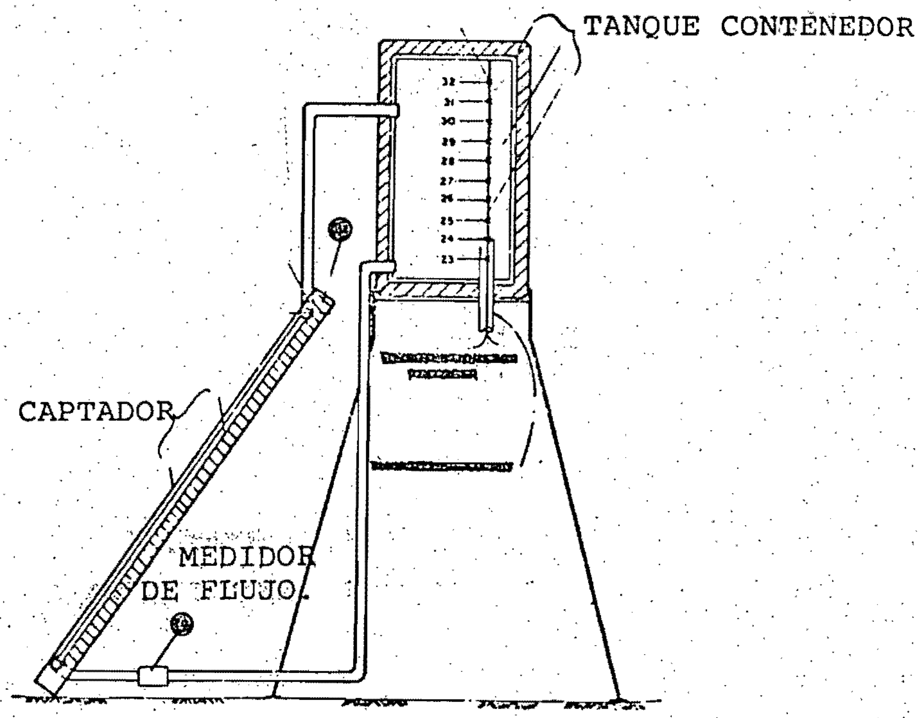
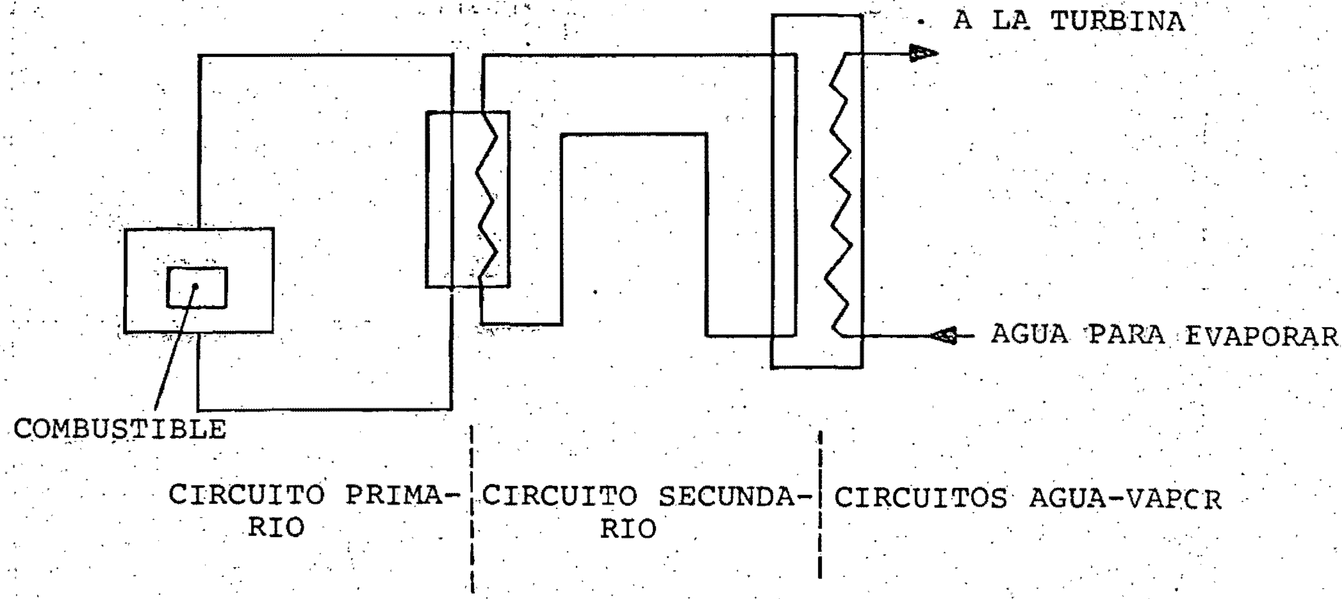


Figura I.17. Sistema de captación solar en [43].

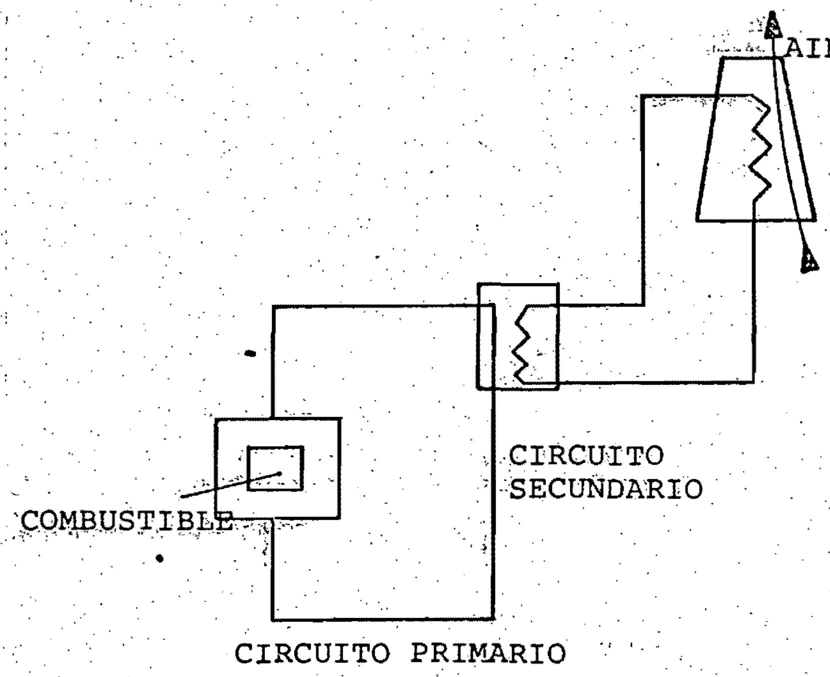
Orlando et al.[47] demuestran la utilidad y versatilidad de un sistema para calentar agua empleando la radiación solar. El sistema consiste de dos circuitos, el primero de los cuales posee captadores que calientan ya sea aceite o agua. Estos elementos interaccionan con los del segundo por medio de un cambiador de calor, que a su vez calienta el agua proveniente de la calle. Comprueban además el buen funcionamiento del efecto termosifónico en captadores con 20 M^2 de superficie y más.

Grand[48], estudia el fenómeno termosifón en sistemas empleados para enfriamiento de emergencia en reactores de recría rápida de metal líquido(LMFBR), como se muestra en la figura I.18. El objetivo de usar equipo que funcione a base de convección natural, es preveer cualquier falla en la corriente alterna suministrada al equipo de bombeo utilizado en el sistema principal. Aunque existe otro par de fuentes de las cuales dichas bombas pueden abastecerse de energía, como son: el emplear volantes de inercia que sigan proveyendo movimiento a las bombas y el utilizar un conjunto de baterías que puede aportar cierta cantidad de potencia, estos dos caminos son de corta duración en tiempo y por tanto poco seguros.

En el primer esquema de la figura I.18, esta ejemplificado como opera un sistema de dos termosifones unidos por un cambiador de calor y donde el segundo circuito entrega el calor necesario para producir energía en los turbogeneradores. Este caso es el proceso normal de un ciclo en las plantas nucleares. El segundo esquema presenta un sistema normal de enfriamiento de emergencia en este tipo de plantas, teniendo el segundo circuito un



CICLO BINARIO EN UNA PLANTA NUCLEAR



SISTEMA DE ENFRIAMIENTO PARA PLANTAS NUCLEARES.

Figura I.18. Ciclo binario y sistema de enfriamiento de emergencia en plantas nucleares con reactores de recría rápida.

enfriamiento a base de aire. Los fluídos de trabajo empleados por cada circuito son: sodio y sodio-potasio respectivamente.

El autor define un parámetro a través de:

$$\beta \stackrel{\Delta}{=} -\oint (\rho-\rho_c) g \, dz \qquad \text{(I-12)}$$

llamada altura de flotación ó altura térmica , y que en sí es el cambio de presión generado en un circuito como el de la figura I.19, debido al calentamiento(o sea el cambio en la densidad). Se considera que la densidad varía en forma lineal con la temperatura:

$$\rho - \rho_c = -\rho_c \beta (T-T_c) \qquad \text{(I-13)}$$

En que $(\rho-\rho_c)$ es la diferencia entre las densidades local y de referencia. β es el coeficiente de expansión volumétrico e isobárico y T_c una temperatura de referencia. Al sustituir (I-13) en (I-12) e integrar a lo largo del circuito:

$$B = g \beta \rho_c (T_H - T_c)(Z_x - Z_f) \qquad \text{(I-14)}$$

Por tanto, la altura de flotación es proporcional a la diferencia de altura y temperatura entre los centros del cambiador de calor y la región de combustible.

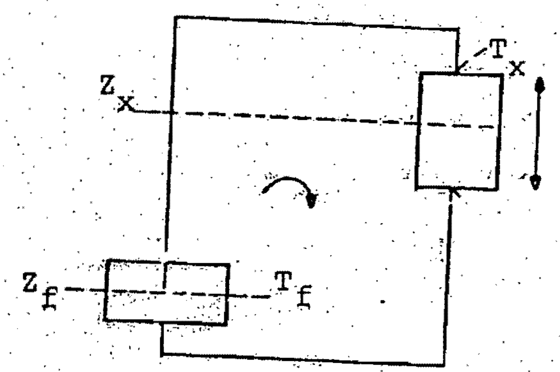


Figura I.19. Circuito Termosifónico empleado por Grand en su análisis.

Después de revisar los artículos referentes a la convección natural en circuitos cerrados y abiertos para régimen permanente, es posible efectuar un resúmen de las tendencias que al respecto muestran las investigaciones. En primer lugar, las geometrías más empleadas son la rectangular y la circular ó toroidal con sección transversal constante, a excepción , del trabajo de Ramos, Sen y Treviño[24]. Las restricciones empleadas en estos estudios se reducen a:

a) Flujo laminar y totalmente desarrollado.
b) Análisis unidimensional.
c) Aproximación de Boussinesq. Donde todas las propiedades se mantienen constantes a excepción de la densidad en el término de flotación en la ecuación de la energía. Kaizerman et al.[23], conducen un estudio con características varibles. Este es un artículo único en este campo.
d) Se desprecian los flujos secundarios ya que cualitativamente no afectan el comportamiento del sistema.
e) Proponen a la densidad como función lineal de la temperatura a través del coeficiente de expansión volumétrico isobárico.
f) El fluído contenido en el interior del circuito se considera incompresible.

Las conclusiones teórico-experimentales que se desprenden de éstos trabajos son las siguientes:

a) Se comprueba la multiplicidad de soluciones.
b) Una perturbación del estado permanente, conduce a oscilaciones e inversión del flujo
c) El estado permanente depende de la geometría del sistema, cantidad de energía agregada y modo en que se llevó a efecto(ángulo, posición, etc.).
d) La conducción axial de calor disminuye la velocidad del fluído en el interior del circuito. Este fenómeno es despreciable en líquidos y gases. Solamente es importante en metales líquidos, o sea, aquellos con pequeño número de Prandtl.
e) En forma práctica se observa que cuando un circuito es sometido a calentamiento el fluído contenido en su interior no se pone en movimiento ipso facto, sino después de cierto tiempo. Esto, es consecuencia de que el fluído en primera instancia trata de conducir el flujo de calor, pero al no conseguirlo adquiere movimiento.

SECCION II. MODELO MATEMATICO

II.1 Circuito Sencillo

Un par de termosifones cerrados, con sección circular constante y cierto fluído de trabajo en su interior (no necesariamente el mismo para ambos), están acoplados a lo largo de cierta longitud que de ahora en adelante se conocerá como "longitud común" ó "zona común", según muestra la figura II.1. Cada uno de ellos puede recibir y/o entregar energía calorífica a través de su frontera al medio ambiente. Además, se establece un flujo de calor de un circuito a otro sobre la zona común.

Para obtener las expresiones que describen el fenómeno antes expuesto, es necesario partir de las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y energía, que a continuación se deducen. Dichas ecuaciones son obtenidas para un circuito sencillo y el análisis se reduce a estado permanente. La cantidad de materia contenida en cada uno de los circuitos es constante y se supone que ni aumenta ni disminuye durante el funcionamiento.

Balance De Cantidad De Movimiento

Al efectuar un balance de fuerzas unidimensional en el sistema de la figura II.2, se llega a:

$$[p-(p+dp)]\frac{\pi D^2}{4} - dF_f - \rho g\frac{\pi D^2}{4}\,dx\ \mathrm{Sen}\alpha = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{(II-1)}$$

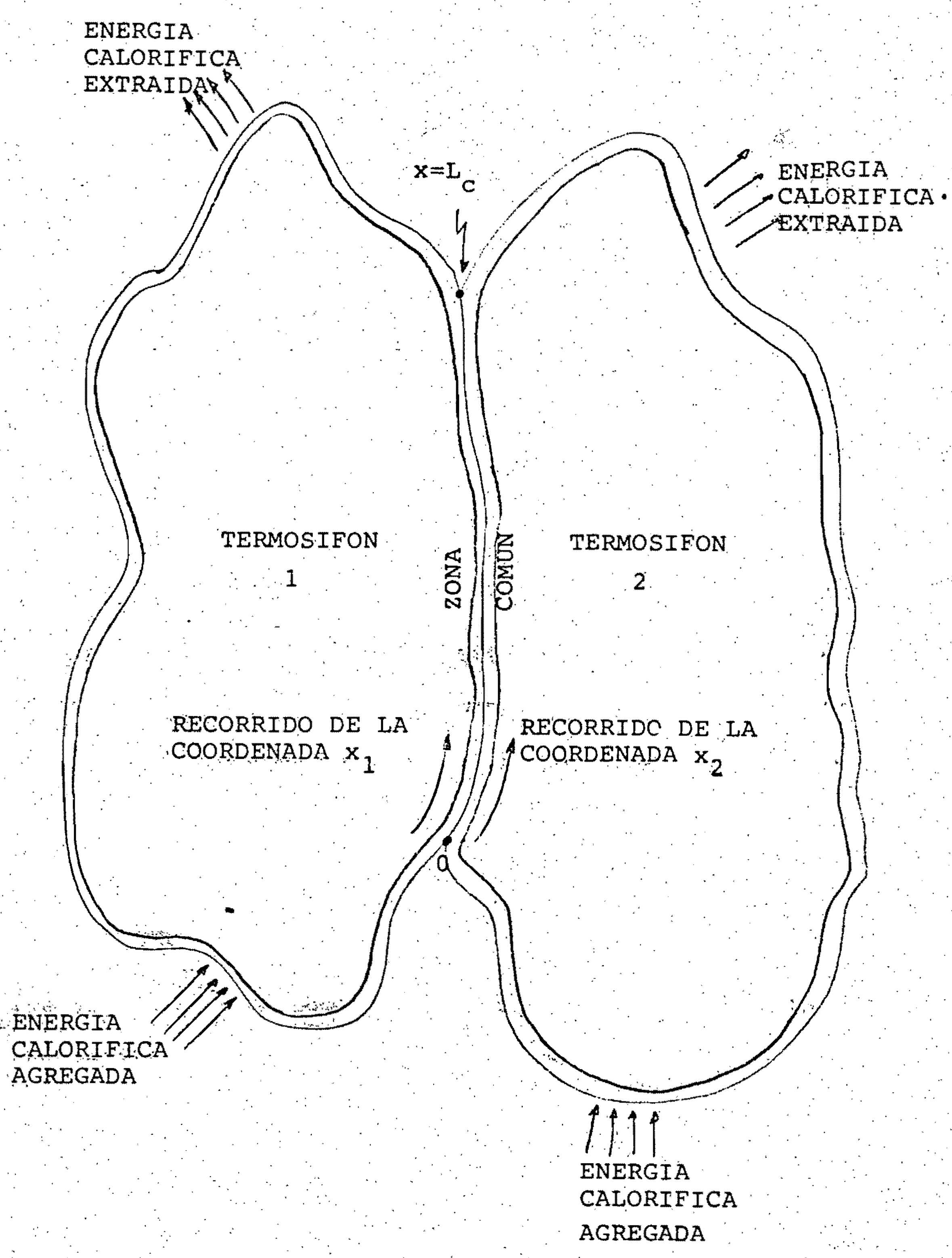


Figura II.1. Sistema formado por dos termosifones acoplados a lo largo de una longitud común L_c y con área transversal constante.

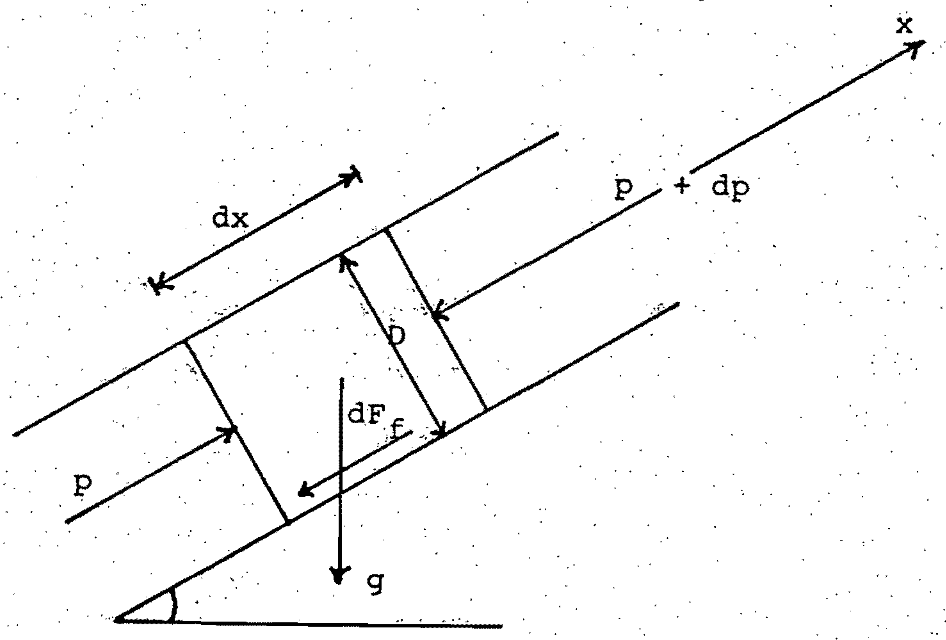


Figura II.2. Diagrama de cuerpo libre del sistema de fuerzas involucradas en un elemento de tubería a lo largo de la dirección x.

Donde p es la presión, F_f la fuerza de fricción, D el diámetro, ρ la densidad, g la aceleración de la gravedad, m la masa del fluído, v la velocidad y t el tiempo.

Si se restringe el problema a estado permanente ($\frac{d}{dt}=0$) :

$$- \frac{\pi D^2}{4} dp - dF_f - \rho g \frac{\pi D^2}{4} dx \operatorname{Sen}\alpha = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

Cuando se integra la ecuación anterior a lo largo de uno de los circuitos cerrados que muestra la figura II.1 es posible concluir:

$$-\frac{\pi D^2}{4} \int_{P_0}^{P_L} dp - \int_{F_{f_0}}^{F_{f_L}} dF_f - \int_0^L \rho g \frac{\pi D^2}{4} \operatorname{Sen}\alpha \, dx = 0, \qquad \text{(II-3)}$$

Donde L es la longitud total del circuito, p_L y p_0 las presiones en los puntos 0 y L, así como F_{f0} y F_{fL} las fuerzas de fricción en dichos puntos.

Ya que en un circuito cerrado los puntos 0 y L son el mismo:

$$\int_{P_0}^{P_L} dp = 0 \qquad \text{(II-4)}$$

Otra consideración adicional es suponer al flujo como de Poiseuille y totalmente desarrollado. Por tanto*:

$$dF_f = \frac{32 \mu u}{D^2} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) dx \qquad \text{(II-5)}$$

* Ver apéndice A.

Siendo μ la viscosidad dinámica y u la velocidad promedio en la sección transversal cuyo diámetro es D. Después de sustituir (II-4) y (II-5) en (II-3) :

$$-\int_{0}^{L} \frac{32\mu u}{D^2}\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) dx - \int_{0}^{L} \rho g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \text{Sen} \quad dx=0 \qquad \text{(II-6)}$$

Además:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad \text{(II-7)}$$

En que ν es la viscosidad cinemática y ρ_0 la densidad a una temperatura T_0. Otra nueva variable se define a través de $\bar{\nu}$, con el propósito de simplificar los cálculos tal que;

$$\bar{\nu} = 32\,\nu \qquad \text{(II-8)}$$

De (II-7) y (II-8) en (II-6):

$$-\int_{0}^{L} \rho_0 \frac{\bar{\nu} u}{D^2} dx = \int_{0}^{L} \rho\, g\, \text{Sen}\alpha\, dx \qquad \text{(II-9)}$$

Es posible definir:

$$\hat{g} = g\, \text{Sen}\alpha \qquad \text{(II-10)}$$

Donde g es la componente de la aceleración de la gravedad en la dirección negativa de la coordenada x tal y como se define por la figura II.2.

Sustituyendo (II-10) en (II-9) :

$$- \int_0^L \rho_0 \frac{\bar{\nu}\, u}{D^2}\, dx = \int_0^L \rho\, \hat{g}\, dx \qquad \text{(II-11)}$$

La densidad puede suponerse como función lineal de la temperatura a través del coeficiente de expansión volumétrico isobárico β*:

$$\rho = \rho_0 \;(1-\beta(T-T_0)) \qquad \text{(II-12)}$$

Donde ρ_0 es la densidad a la temperatura T_0. Al incorporar (II-12) en (II-11):

$$- \int_0^L \rho_0 \frac{\bar{\nu}\, u}{D^2}\, dx = \int_0^L \hat{g}\, \rho_0 \;(1-\beta(T-T_0))\; dx \qquad \text{(II-13)}$$

Desarrollando la expresión anterior:

* Ver apéndice B

$$- \int_0^L \rho_0 \frac{\bar{\nu} u}{D^2} dx = \int_0^L \hat{g} \rho_0 \, dx + \int_0^L \hat{g} \rho_0 \beta T_0 \, dx - \int_0^L \hat{g} \rho_0 \beta T \, dx \tag{II-14}$$

Las constantes de (II-14), es posible extraerlas del símbolo integral:

$$-\rho_0 \frac{\bar{\nu} u}{D^2} \int_0^L dx = \rho_0 \int_0^L \hat{g} \, dx + \rho_0 \beta T_0 \int_0^L \hat{g} \, dx - \rho_0 \beta \int_0^L \hat{g} T \, dx \tag{II-15}$$

Pero por otra parte:

$$\int_0^L \hat{g} \, dx = 0 \tag{II-16}$$

Ya que el campo gravitacional es conservativo y por tanto dependiente de la posición, y siendo como se dijo anteriormente, que en cualquiera de los circuitos cerrados de la figura II.1 los puntos 0 y L son el mismo:

$$\int_0^L \hat{g} \, dx = \int_0^L g \, \mathrm{Sen}\theta \, dx = g \int_0^0 dz = 0 \tag{II-17}$$

Donde $dz = \mathrm{Sen}\theta \, dx$.

De (II-16) en (II-15) e integrando el lado izquierdo de ésta:

$$\rho_0 \frac{\bar{U}\,uL}{D^2} = \rho_0 \beta \int_0^L \hat{g}(x)T(x)\ dx \qquad \text{(II-17)}$$

Finalmente:

$$\boxed{u = \frac{\beta D^2}{\bar{U}\ L} \int_0^L \hat{g}(x)T(x)\ dx} \qquad \text{(II-18)}$$

Balance De Energía

Al efectuar un balance de energía sobre el elemento mostrado en la figura II.3 y considerar estado permanente ($\frac{d}{dt}=0$):

$$\dot{m}C\ dt = q\ dx \qquad \text{(II-19)}$$

Donde $\dot{m}$ es el flujo másico, C la capacidad calorífica y q el calor agregado al sistema por unidad de longitud. El flujo másico se calcula a través de la ecuación de continuidad:

$$\dot{m} = \rho uA \qquad \text{(II-20)}$$

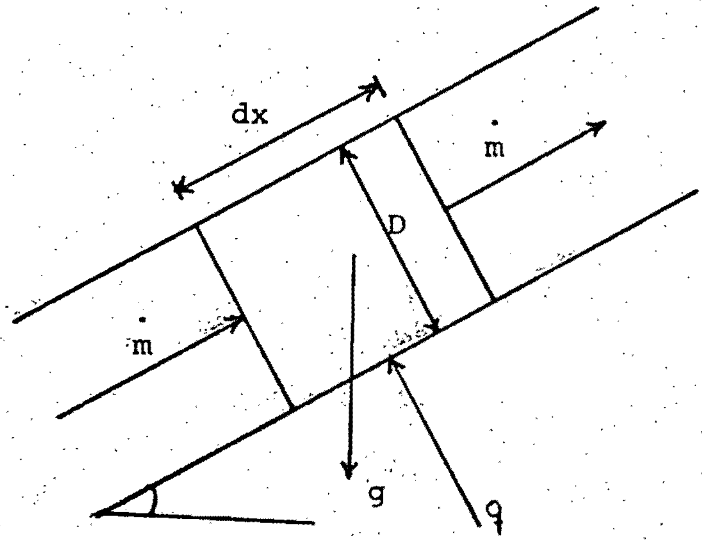


Figura II.3. Transferencia de energía en un elemento de tubería tal como el de la figura anterior.

Siendo A la sección transversal de la tubería igual a $\frac{\pi D^2}{4}$. De (II-20) en (II-19):

$$\rho uAC\ dt = q\ dx \tag{II-21}$$

Introduciendo el valor de la sección transversal:

$$\rho uC\ \frac{\pi D^2}{4}\ dT = q\ dx \tag{II-22}$$

O bien:

$$\rho u\ \frac{dT}{dx} = \frac{4}{\pi CD^2}\ q \tag{II-23}$$

Por tanto, como conclusión al sistema descrito y de la ecuación de conservación de la energía se tiene que:

$$\boxed{u\ \frac{dT(x)}{dx} = \frac{4q}{\pi D^2 \rho C}} \tag{II-24}$$

Las ecuaciones (II-18) y (II-24) describen el fenómeno en un circuito que interacciona con el medio ambiente recibiendo y/o entregando energía.

II.2 Dos Circuitos Acoplados.

De la figura II.1 es fácil apreciar que cada circuito posee una zona común y otra no común. La longitud de aquella se representará por L_c. En consecuencia, las ecuaciones (II-18) y (II-24), deben fragmentarse en dos, una correspondiente como ya se dijo a la parte común y el resto a la externa.

Los subíndices empleados a continuación indican el circuito analizado de acuerdo a la figura II.1. Por tanto, la ecuación (II-18) puede darse para cada circuito en forma separada:

$$u_1 = \frac{\beta_1 D_1^2}{L_1 \bar{\nu}_1} \left\{ \int_0^{L_c} \hat{g}_1(x) T_1(x)\, dx + \int_{L_c}^{L_1} \hat{g}_1(x_1) T_1(x_1)\, dx_1 \right\} \quad \text{(II-25)}$$

$$u_2 = \frac{\beta_2 D_2^2}{L_2 \bar{\nu}_2} \left\{ \int_0^{L_c} \hat{g}_2(x) T_2(x)\, dx + \int_{L_c}^{L_2} g_2(x_2) T_2(x_2)\, dx_2 \right\} \quad \text{(II-26)}$$

La coordenada x para la sección común ($0<x\leq L_c$) no posee subíndice, ya que corre paralela y siempre tendrá el mismo valor en ambos circuitos. L_1 y L_2 son las magnitudes totales de cada uno de ellos.

Análogamente para la ecuación (II-24), pero incluyendo la transferencia de calor de un circuito a otro en la zona común:

Calor transmitido del circuito 1 al 2 $= \pi D_1 h_1 (T_2(x) - T_1(x))$

Calor transmitido del circuito 2 al 1 $= \pi D_2 h_2 (T_1(x) - T_2(x))$

Siendo éstas las energías caloríficas transmitidas del circuito 1 al 2 y viceversa, respectivamente, donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Al sustituir lo anterior en (II-24) y dividiendo el sistema en sus regiones común y no común:

$$u_1 \frac{dT_1(x_1)}{dx_1} = \begin{cases} \dfrac{4h_1}{\rho_1 C_1 D_1} \left(T_2(x) - T(x_1)\right) & 0 < x \leq L_c \\[2ex] \dfrac{4q_1(x_1)}{\pi D_1^2 \rho_1 C_1} & L_c < x_1 \leq L_1 \end{cases} \qquad \text{(II-27)}$$

$$u_2 \frac{dT_1(x_1)}{dx_1} = \begin{cases} \dfrac{4h_1}{\rho_2 C_2 D_2} \left(T_1(x) - T_2(x)\right) & 0 < x \leq L_c \\[2ex] \dfrac{4q_2(x_2)}{\pi D_2^2 \rho_2 C_2} & L_c < x_2 \leq L_2 \end{cases} \qquad \text{(II-28)}$$

Con el propósito de hacer más general el sistema anterior de ecuaciones, así como, apreciar los cambios relativos de las variables entre sí, es necesario llevar acabo la adimensionalización de ellas.

II.3 Adimensionalización De Las Ecuaciones De Cantidad De Movimiento Y Energía.

Se definen los siguientes grupos adimensionales:

$$\delta_1 = \frac{\hat{g}_1(x_1)}{g} \quad , \quad \delta_2 = \frac{\hat{g}_2(x_2)}{g} \quad , \quad S = \frac{x}{L_c} \quad , \quad S_1 = \frac{x_1}{L_c}$$

$$S_2 = \frac{x_2}{L_c} \quad , \quad T_1 = \frac{|q_{1MAX}|}{h_1 L_c} \quad , \quad T_2 = \frac{|q_{2MAX}|}{h_2 L_c} \quad , \quad \Theta_1(x_1) = \frac{T_1(x_1) - T_1(0)}{T_1}$$

$$\Theta_2(x_2) = \frac{T_2(x_2) - T_2(0)}{T_2} \quad , \quad V_1 = \frac{u_1 \rho_1 C_1 D_1}{4 h_1 L_c} \quad , \quad V_2 = \frac{u_2 \rho_2 C_2 D_2}{4 h_2 L_c}$$

$$\ell_1 = \frac{L_1}{L_c} \quad , \quad \ell_2 = \frac{L_2}{L_c} \quad , \quad \Gamma_1 = \frac{\beta_1 g\, T_1 \rho_1 C_1 D_1^3}{4 h_1 L_1 \nu_1} \quad , \quad \Gamma_2 = \frac{\beta_2 g\, T_2 \rho_2 C_2 D_2^3}{4 h_2 L_2 \nu_2}$$

$$Q_1 = \frac{q_1}{\pi h_1 \Delta T_1 D_1} \quad , \quad Q_2 = \frac{q_2}{\pi h_2 \Delta T_2 D_2}$$

Donde los términos $|q_{1MAX}|$ y $|q_{2MAX}|$ representan la máxima cantidad de calor intercambiada entre los dos circuitos, mientras Γ_1 y Γ_2 los números de Grashof modificados pero cuyo significado es el mismo: La relación de las fuerzas de flotación a las fuerzas viscosas.

Al introducir los grupos adimensionales en las ecuaciones de cantidad de movimiento (II-25), (II-26) y energía (II-27), (II-28), estas quedan respectivamente como:

$$V_1 = \Gamma_1 \left\{ \int_0^1 \delta_1(S)\Theta_1(S)\, dS + \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1)\Theta_1(S_1)\, dS_1 \right\} \qquad \text{(II-29)}$$

$$V_2 = \Gamma_2 \left\{ \int_0^1 \delta_2(S)\Theta_2(S)\, dS + \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2)\Theta_2(S_2)\, dS_2 \right\} \qquad \text{(II-30)}$$

$$V_1 \frac{d\Theta_1(S_1)}{dS_1} = \begin{cases} \Theta_2(S) - \Theta_1(S) & 0 < S \leq 1 \\ Q_1(S_1) & 1 < S_1 \leq \ell_1 \end{cases} \qquad \text{(II-31)}$$

$$V_2 \frac{d\Theta_2(S_2)}{dS_2} = \begin{cases} \Theta_1(S) - \Theta_2(S) & 0 < S \leq 1 \\ Q_2(S_2) & 1 < S_2 \leq \ell_2 \end{cases} \qquad \text{(II-32)}$$

II.4 Resultados

A continuación se integrarán las ecuaciones anteriores para el sistema formado por los dos circuitos de la figura II.1, empezando por (II-31) en su parte común:

$$\int_0^S V_1 \frac{d\Theta_1(S_1)}{dS_1} dS = \int_0^s [\Theta_2(S') - \Theta_1(S')]\ dS' \qquad \text{(II-33)}$$

Después de efectuar la integración:

$$V_1[\Theta_1(S) - \Theta_1(0)] = \int_0^S [\Theta_2(S') - \Theta_1(S')]\ dS'$$

Por definición $\Theta_1(0)=0$ y entonces:

$$V_1\Theta_1(S) = -\int_0^S [\Theta_1(S') - \Theta_2(S')]\ dS' \qquad \text{(II-34)}$$

Análogamente para (II-32):

$$V_2\Theta_2(S) = \int_0^S [\Theta_1(S') - \Theta_2(S')]\ dS' + V_2\Theta_2(0) \qquad \text{(II-35)}$$

Sumando (II-34) y (II-35):

$$V_1\Theta_1(S) + V_2\Theta_2(S) = V_2\Theta_2(0) \qquad \text{(II-36)}$$

Resolviendo (II-31), es posible concluir que:

$$V_1 \frac{d\theta_1(S)}{\theta_2(S)-\theta_1(S)} = dS \qquad \text{(II-37)}$$

Cuando se despeja el valor de $\theta_2(S)$ en (II-36) y el resultado es sustituído en (II-37), se llega a:

$$V_1 \frac{d\theta_1(S)}{\frac{V_2\theta_2(0)-V_1\theta_1(S)}{V_2}-\theta_1(S)} = dS \qquad \text{(II-38)}$$

Desarrollando:

$$V_1V_2 \frac{d\theta_1(S)}{V_2\theta_2(0)-\theta_1(S)(V_1+V_2)} = dS$$

Llevando a cabo la integración:

$$\int_{\theta_1(0)}^{\theta_1(S)} V_1V_2 \frac{d\theta_1(S)}{V_2\theta_2(0)-\theta_1(S)(V_1+V_2)} = \int_0^S dS'$$

$$- \frac{V_1V_2}{V_1+V_2} \ln |V_2\Theta_2(0) - \Theta_1(S)(V_1+V_2)| \Bigg|_{\Theta_1(0)}^{\Theta_1(S)} = S$$

Entonces:

$$- \frac{V_1V_2}{V_1+V_2} \left| \ln \frac{V_2\Theta_2(0) - \Theta_1(S)(V_1+V_2)}{V_2\Theta_2(0)} \right| = S$$

O bien:

$$V_2\Theta_2(0) - \Theta_1(S)(V_1+V_2) = V_2\Theta_2(0) \ \mathrm{Exp}(- \frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S)$$

Finalmente:

$$\Theta_1(S) = \frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2} (1 - \mathrm{Exp}(- \frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S)) \qquad \text{(II-39)}$$

Cuyo resultado es únicamente válido para la zona común. Por un procedimiento similar sobre (II-31) en su parte común ($0 < S_1 \leq 1$), se obtiene:

$$\Theta_2(S) = \frac{\Theta_2(0)}{V_1+V_2} (V_1 \ \mathrm{Exp}(- \frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S) + V_2) \qquad \text{(II-40)}$$

Enseguida se hará lo mismo con (II-31) y (II-32) para las zonas no comúnes $(1<S_1\leq \ell_1)$ y $(1<S_2\leq \ell_2)$, respectivamente. Por tanto, al integrar la primera de ellas:

$$\int_{\theta_1(1)}^{\theta_1(S)} V_1\, d\theta_1 = \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1'$$

Efectuando la integración:

$$V_1(\theta_1(S_1)-\theta_1(1)) = \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1'$$

O bien:

$$\theta_1(S_1) = \frac{1}{V_1}\int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1' + \theta_1(1) \qquad \text{(II-41)}$$

La ecuación (II-32) para la zona no común lleva a:

$$\theta_2(S_2) = \frac{1}{V_2}\int_1^{S_2} Q_2(S_2')\, dS_2' + \theta_2(1) \qquad \text{(II-42)}$$

Por otra parte, es posible obtener $\theta_1(1)$ y $\theta_2(1)$ de (II-39) y (II-40) respectivamente, al sustituir S=1 en éstas:

$$\Theta_1(1) = \frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\ (1-\mathrm{Exp}(-\ \frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\ )) \qquad \text{(II-43)}$$

$$\Theta_2(1) = \frac{\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\ (V_1\ \mathrm{Exp}(-\ \frac{V_1+V_2}{V_1V_2}) + V_2) \qquad \text{(II-44)}$$

Finalmente, las expresiones (II-43) y (II-44) son incluídas en (II-41) y (II-42) respectivamente, dando orígen a ecuaciones que describen el campo de temperatura en la zona no común de ambos circuitos:

$$\Theta_1(S_1) = \frac{1}{V_1}\int_1^{S_1} Q_1(S_1')\ dS_1' + \frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\ (1-\mathrm{Exp}(-\ \frac{V_1+V_2}{V_1V_2})) \qquad \text{(II-45)}$$

$$\Theta_2(S_2) = \frac{1}{V_2}\int_1^{S_2} Q_2(S_2')\ dS_2' + \frac{\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\ (V_1\ \mathrm{Exp}(-\ \frac{V_1+V_2}{V_1V_2})+V_2) \qquad \text{(II-46)}$$

Ya que durante el desarrollo posterior será de utilidad el valor $\Theta_2(0)$, este puede alcanzarse a través de (II-45) y (II-46) como sigue. Al sustituir $S_1=0$ en la primera y sabiendo que como se trata de un circuito cerrado los valores 0 y ℓ_1 corresponderán a un mismo punto, es posible concluir:

$$\Theta_1(0) = \frac{1}{V_1}\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\ dS_1 + \frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\ (1-\mathrm{Exp}(-\ \frac{V_1+V_2}{V_1V_2}))$$

Como por definición $\Theta_1(0)=0$, la ecuación anterior quedará finalmente:

$$\Theta_2(0) = -\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 \quad \text{(II-47)}$$

Por un procedimiento análogo al llevado a cabo sobre (II-45), la ecuación (II-46) conduce a:

$$\Theta_2(0) = \frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}\int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 \quad \text{(II-48)}$$

De esta manera se poseen dos ecuaciones como son (II-47) y (II-48) para determinar el valor de $\Theta_2(0)$.

Las ecuaciones (II-31) y (II-32) pueden expresarse respectivamente a través de su zona común y su zona no común como sigue:

$$\int_0^{\ell_1} V_1 \frac{d\Theta_1(S_1)}{dS_1}\, dS_1 = \int_0^1 [\Theta_2(S)-\Theta_1(S)]\, dS + \int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 \quad \text{(II-49)}$$

$$\int_0^{\ell_2} V_2 \frac{d\Theta_2(S_2)}{dS_2}\, dS_2 = \int_0^1 [\Theta_1(S)-\Theta_2(S)]\, dS + \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 \quad \text{(II-50)}$$

Ya que se trata de dos circuitos cerrados donde 0, ℓ_1 y ℓ_2 representan el mismo punto:

$$\int_0^{\ell_1} V_1 \frac{d\theta_1(S_1)}{dS_1} dS_1 = \int_0^{\ell_2} V_2 \frac{d\theta_2(S_2)}{dS_2} dS_2 = 0 \qquad \text{(II-51)}$$

Además, como:

$$\int_0^1 [\theta_2(S)-\theta_1(S)]\, dS = - \int_0^1 [\theta_1(S)-\theta_2(S)]\, dS \qquad \text{(II-52)}$$

La suma de (II-49) con (II-50), junto a (II-51) y (II-52), conduce a:

$$\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 + \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 = 0 \qquad \text{(II-53)}$$

Esta última conclusión es muy importante y conduce al resultado siguiente.

RESULTADO 1. La suma de la energía calorífica recibida por los dos circuitos a lo largo de su región no común, estrictamente deberá ser nula para alcanzar el estado permanente.

Con anterioridad Ramos, Sen y Treviño[25], demostraron que para un circuito simple, la condición de existencia del estado permanente es que:

$$\oint Q(S)\, dS = 0$$

Entonces, la expresión (II-53) puede considerarse una generalización a dos circuitos acoplados.

Por otra parte, al reemplazar en (II-29) los valores de $\Theta_1(S)$ y $\Theta_1(S_1)$ de las ecuaciones (II-39) y (II-45) respectivamente, se obtiene:

$$V_1 = \Gamma_1 \left(\int_0^1 \delta_1(S) \left\{ \frac{V_2\theta_2(0)}{V_1+V_2} \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S\right)\right) \right\} dS + \int_1^{S_1} \delta_1(S_1) \left\{ \frac{1}{V_1} \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1' + \frac{V_2\theta_2(0)}{V_1+V_2} \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right) \right\} dS_1 \right) \qquad \text{(II-54)}$$

De donde:

$$V_1 = \Gamma_1 \left(\frac{1}{V_1} \int_0^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1' \right\} dS_1 + \frac{V_2\theta_2(0)}{V_1+V_2} \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right) \int_0^{\ell_1} \delta_1(S_1)\, dS_1 + \frac{\theta_2(0)V_2}{V_1+V_2} \int_0^1 \delta_1(S) \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S\right)\right) dS \right) \qquad \text{(II-55)}$$

Finalmente, sustituyendo (II-47) en (II-55) y multiplicando el resultado por V_1:

$$V_1^2 = \Gamma_1 \left(\int_0^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1') \, dS_1' \right\} dS_1 + \left(1-\operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \int_1^{\ell_1} Q_1(S_1) \, dS_1 \left\{ \operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right) \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \, dS_1 + \int_0^1 \delta_1(S) \operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S\right) dS \right\} \right) \qquad \text{(II-56)}$$

A través de un procedimiento análogo e involucrando a (II-30), (II-40), (II-46) y (II-48), se llega a que:

$$V_2^2 = \Gamma_2 \left(\int_0^{\ell_2} \delta_2(S_2) \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2') \, dS_2' \right\} dS_2 + \left(1-\operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2) \, dS_2 \left\{ \operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right) \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2) \, dS_2 + \int_0^1 \delta_2(S) \operatorname{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} S\right) dS \right\} \right) \qquad \text{(II-57)}$$

Las dos últimas ecuaciones proveen el campo de velocidad en cada uno de los circuitos, y donde con facilidad se aprecia que sustancialmente dependen tanto de la forma de calentamiento a través de Q como de la geometría δ del sistema.

El resultado final, arroja dos ecuaciones que deberán resolverse conjuntamente, formando en general un sistema trascendente cuya solución podrá obtenerse por medio de métodos numéricos.

La tabla II.1, muestra un resúmen de las ecuaciones desarrolladas en esta sección, para el sistema de la figura II.1 en estado permanente.

Si las ecuaciones (II-41) y (II-42) se analizan cuando $V_1 \to 0$ ó $V_2 \to 0$ ó ambas, la temperatura en los circuitos, θ_1 y θ_2 tiende a valores muy grandes $(\theta_1, \theta_2 \to \infty)$ y entonces el estado permanente desaparece. Esto siempre que Γ_1 y Γ_2 sean diferentes de cero, ya que de otra manera $V_1 = V_2 = 0$ (de (II-56) y (II-57)) y por tanto, se caería en el caso donde ninguno de los circuitos es perturbado con energía calorífica. O sea, el caso trivial.

<u>RESULTADO 2</u>. Si cualquiera de las velocidades V_1, V_2 ó ambas se anulan, el sistema no puede operarse en estado permanente.

La suma de $\dfrac{V_1^2}{\Gamma_1}$ y $\dfrac{V_2^2}{\Gamma_2}$ dadas por (II-56) y (II-57) respectivamente conduce a:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1^2}{\Gamma_1} + \frac{V_2^2}{\Gamma_2} = & \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1' \right\} dS_1 + \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \\
& \int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 \left\{ \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right) \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1)\, dS_1 + \right. \\
& \left. \int_0^1 \delta_1(S)\, \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\, S\right) dS \right\} + \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2) \\
& \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2')\, dS_2' \right\} dS_2 + \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \\
& \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 \left\{ \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right) \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2)\, dS_2 + \right. \\
& \left. \int_0^1 \delta_2(S)\, \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\, S\right) dS \right\}
\end{aligned}
$$

Como se demostró anteriormente, el campo gravitacional es conservativo y depende de la posición, además para la parte común $\delta_1(S)=\delta_2(S)$. También, ya que el punto ℓ_1 es igual al ℓ_2, es posible escribir la expresión anterior como:

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1^2}{1} + \frac{V_2^2}{2} = & \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\, dS_1' \right\} dS_1 + \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2) \\
& \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2')\, dS_2' \right\} dS_2 + \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \left[\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 \right. \\
& \left. + \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 \right] \left\{ \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right) \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1)\, dS_1 \right. \\
& \left. \int_0^1 \delta_1(S)\, \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\, S\right) dS \right\}
\end{aligned}
$$

CIRCUITOS ACOPLADOS A TRAVES DE UNA FRONTERA COMUN EN ESTADO PERMANENTE.

	CIRCUITO 1	CIRCUITO 2
Temperatura adimensional en $S_1=S_2=0$.	$\Theta_1(0)=0$	$\Theta_2(0)=\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}\int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\,dS_2$
Temperatura adimensional en la zona común $(S=S_1=S_2)$.	$\Theta_1(S)=\frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}S\right)\right)$	$\Theta_2(S)=\frac{\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\left(V_1\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}S\right)+V_2\right)$
Temperatura adimensional en la zona no común.	$\Theta_1(S_1)=\frac{1}{V_1}\int_1^{S_1} Q_1(S_1')\,dS_1' + \frac{V_2\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)$	$\Theta_2(S_2)=\frac{1}{V_2}\int_1^{S_2} Q_2(S_2')\,dS_2' + \frac{\Theta_2(0)}{V_1+V_2}\left(V_1\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)+V_2\right)$
Velocidad adimensional al cuadrado.	$V_1^2=\Gamma_1\Big(\int_1^{\ell_1}\delta_1(S_1)\left\{\int_1^{S_1}Q_1(S_1')\,dS_1'\right\}dS_1 + \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}\int_1^{\ell_1}Q_1(S_1)\,dS_1 \left\{\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\int_1^{\ell_1}\delta_1(S_1)\,dS_1 + \int_0^1\delta_1(S)\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}S\right)dS\right.\Big)$	$V_2^2=\Gamma_2\Big(\int_1^{\ell_2}\delta_2(S_2)\left\{\int_1^{S_2}Q_2(S_2')\,dS_2'\right\}dS_2' + \left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}\int_1^{\ell_2}Q_2(S_2)\,dS_2 \left\{\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\int_1^{\ell_2}\delta_2(S_2)\,dS_2 + \int_0^1\delta_2(S)\,\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}S\right)dS\right.\Big)$

Pero por otra parte, cuando se hace uso de (II-53), es posible concluir:

$$\frac{V_1^2}{\Gamma_1} + \frac{V_2^2}{\Gamma_2} = \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')dS_1' \right\} dS_1 + \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2) \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2')\ dS_2' \right\} dS_2 \qquad \text{(II-58)}$$

Ya que V_1, V_2 son diferentes de cero y Γ_1 y Γ_2 positivos, el segundo miembro de (II-58) cumple con la desigualdad:

$$\int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\ dS_1' \right\} dS_1 + \int_1^{\ell_2} \delta_2(S_2) \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2')\ dS_2' \right\} dS_2 > 0 \qquad \text{(II-59)}$$

Que también es una generalización a dos circuitos termosifónicos de la conclusión Hallada por Sen, Ramos y treviño[12] para uno sólo, en que:

$$\oint \delta(S) \left\{ \int_0^{S} Q(S')\ dS' \right\} dS \geq 0$$

Esto conduce al resultado siguiente.

RESULTADO 3. Otra condición adicional que debe registrarse para que el sistema de la figura II.1 alcance el estado permanente está dado por (II-59)

Ahora, si en un momento determinado pudiera darse el caso:

$$\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\ dS_1=0 \quad ó \quad \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\ dS_2=0$$

O ambas a la vez, entonces, de acuerdo a la ecuación (II-53), la energía recibida por cada circuito es nula y las expresiones (II-56) y (II-57) se reducen a:

$$V_1^2=\Gamma_1 \int_1^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1')\ dS_1' \right\} dS_1 \qquad \text{(II-62)}$$

$$V_2^2=\Gamma_2 \int_1^{\ell_2} {}_2(S_2) \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2')\ dS_2' \right\} dS_2 \qquad \text{(II-63)}$$

Cuyo significado se recoge en el resultado que a continuación se expresa.

RESULTADO 4. En caso de que la energía aportada a cualquier circuito fuera nula, el sistema general de ecuaciones para la velocidad (II-56) y (II-57) puede desacoplarse tal como se muestra en las dos últimas expresiones, (II-62) y (II-63).

Este resultado hace pensar que al poder desacoplarse el sistema de ecuaciones, no existe un gradiente de temperatura a lo largo de la zona común y en consecuencia se concluye que $\theta_1(S)=\theta_2(S)$. Ya que:

$$\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\ dS_1=0 \quad ó \quad \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\ dS_2=0$$

ó las dos nulas a la vez, entonces, de (II-53) se tiene:

$$\int_1^{\ell_1} Q_1(S_1)\ dS_1 = \int_1^{\ell_2} Q_2(S_2)\ dS_2=0$$

Que sustituído en (II-39) y (II-40), habiéndose basado en (II-47):

$$\theta_1(S)=\theta_2(S)=0 \qquad \text{(II-64)}$$

Demostrando que en efecto, el resultado cuatro genera la condición (II-64) y por tanto no hay diferencia de temperatura a través de la zona común, tal y como se supuso en un principio.

SECCION III. TERMOSIFONES RECTANGULARES ACOPLADOS.

III.1 Estudio General.

El estudio práctico de dos termosifones acoplados va a ser ejemplificado en ésta sección según muestra la figura III.1 con termosifones de forma rectangular, aunque de hecho, cualquier contorno podría escogerse ya que las ecuaciones descritas en la sección precedente son perfectamente generales.

Por otra parte, el termosifón de la figura III.2 es sometido a un régimen de calentamiento y enfriamiento como el de la figura III.3. Donde, las longitudes L_i' están adimensionalizadas con L_c, que es la longitud común a ambos termosifones.

Lo expuesto en la figura III.3 es posible expresarse en forma matemática como:

$$Q_1 = \begin{cases} a \text{ en } & 1 + L_1' < S_1 \leqslant 1 + \dfrac{L_1}{L_c} - L_2' \\ b \text{ en } & 1 + \dfrac{L_1}{L_c} + L_3' < S_1 \leqslant 2 + \dfrac{L_1}{L_c} - L_4' \\ c \text{ en } & 2 + \dfrac{L_1}{L_c} + L_5' < S_1 \leqslant 2\left(1 + \dfrac{L_1}{L_c}\right) - L_6' \end{cases}$$

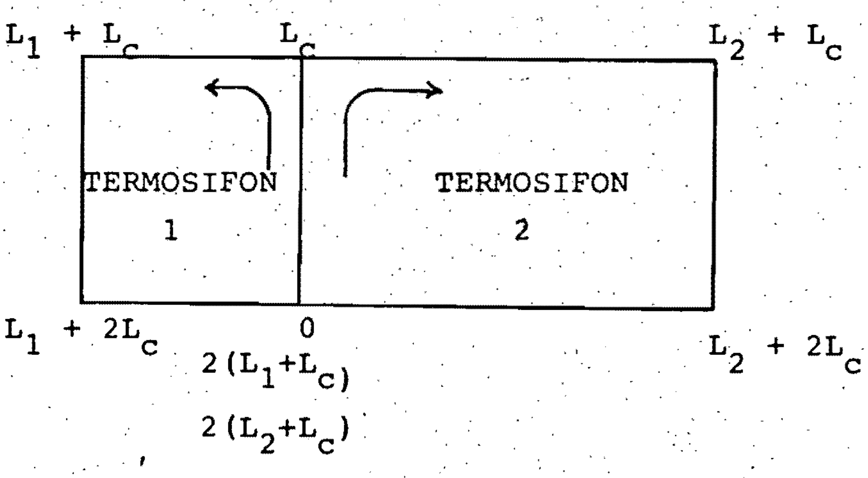


Figura III.1. Dos Termosifones acoplados a lo largo de una longitud L_c.

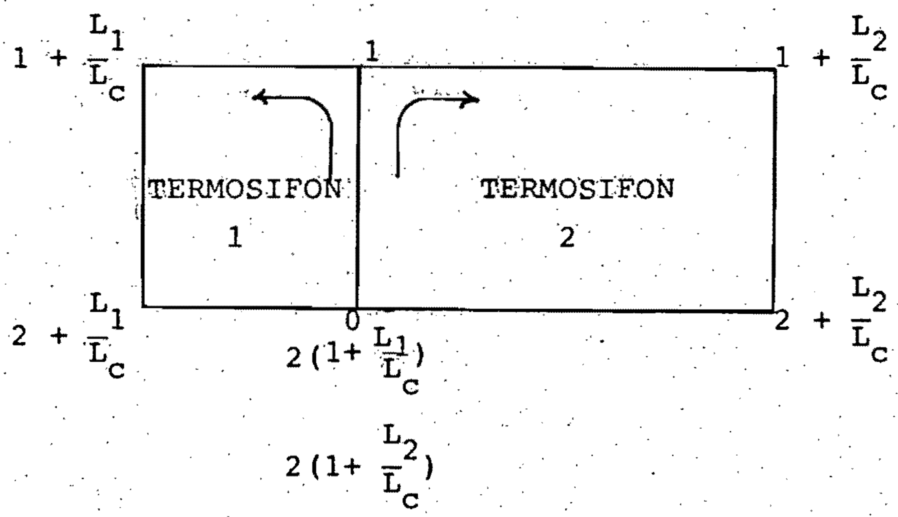


Figura III.2. Sistema adimensionalizado con la coordenada común L_c.

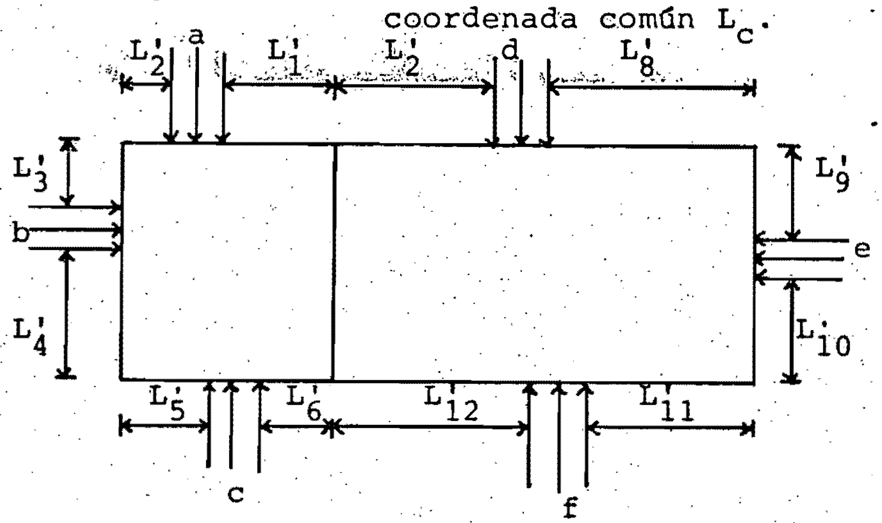


Figura III.3. Calentamiento y/o enfriamiento del sistema expuesto en la figura anterior, donde las longitudes adimensionalizadas con L_c y que no interactúan en la transferencia de energía están señaladas con L_i'.

$$-Q_2=\begin{cases} d \text{ en } 1 + L_2' < S_2 \leq 1 + \dfrac{L_2}{L_c} - L_8' \\ e \text{ en } 1 + \dfrac{L_2}{L_c} + L_9' < S_2 \leq 2 + \dfrac{L_2}{L_c} - L_{10}' \\ f \text{ en } 2 + \dfrac{L_2}{L_c} + L_{11}' < S_2 \leq 2(1 + \dfrac{L_1}{L_c}) - L_{12}' \end{cases}$$

O en forma gráfica tal como muestra la figura III.4, donde a,b,c,d,e y f son las magnitudes del calentamiento y/o enfriamiento del sistema. Dichas magnitudes son constantes. Las tres primeras variables anteriores a,b y c serán positivas cuando el calor se introduce y las tres restantes al ser extraído éste, tal como lo indica las relaciones precedentes.

La componente de la aceleración de la gravedad se expresa en forma adimensional tal y como está definida en la SECCION II o sea $\delta(x)=g(x)/g$, en donde $g(x)$ es positiva siempre y cuando posea sentido contrario al de la coordenada x en su recorrido. Además, δ adquiere valores únicamente en los ramales verticales, pues en los horizontales $g(x)$ es nula.

Entonces, la aceleración de la gravedad en forma tabular puede quedar como:

$$\delta_1(S_1)=\begin{cases} 1 \text{ en } 0 < S \leq 1 \\ 0 \text{ en } 1 < S_1 \leq 1 + \dfrac{L_1}{L_c} \\ -1 \text{ en } 1 + \dfrac{L_1}{L_c} < S_1 \leq 2 + \dfrac{L_1}{L_c} \\ 0 \text{ en } 2 + \dfrac{L_1}{L_c} < S_1 \leq 2(1 + \dfrac{L_1}{L_c}) \end{cases}$$

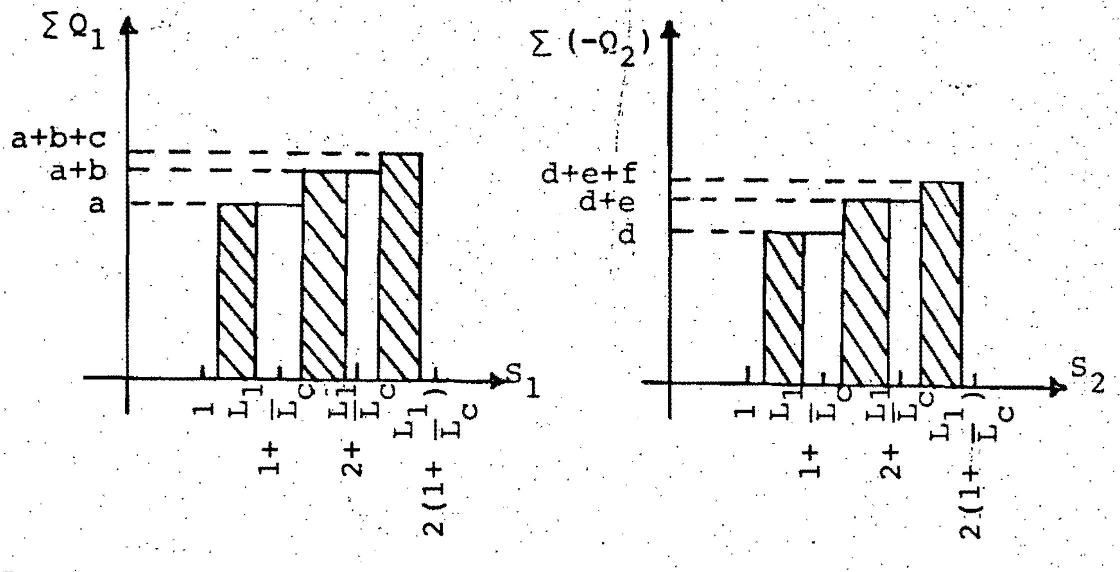


Figura III.4. Calentamiento y/o enfriamiento del sistema expuesto en la figura III.3.

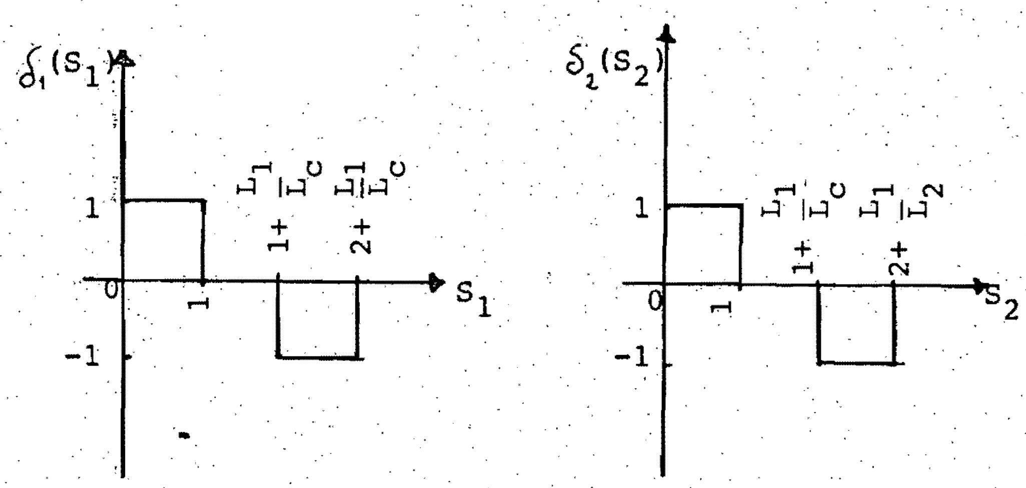


Figura III.5. Representación gráfica de la aceleración de la gravedad adimensional para el sistema representado en la figura III.3.

$$\delta_2(S_2)=\begin{cases} 1 \text{ en } 0 < S \leq 1 \\ 0 \text{ en } 1 < S_2 \leq 1 + \frac{L_2}{L_c} \\ -1 \text{ en } 1 + \frac{L_2}{L_c} < S_2 \leq 2 + \frac{L_2}{L_c} \\ 0 \text{ en } 2 + \frac{L_2}{L_c} < S_2 \leq 2(1 + \frac{L_2}{L_c}) \end{cases}$$

Esto puede representarse en la forma gráfica de la figura III.5. Por otra parte, al integrar las graficas de la figura III.3, se obtiene la figura III.6.

Sustituyendo los resultados anteriores en cada uno de los términos de (II-56) y (II-57):

$$\int_1^{l_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_1^{S_1} Q_1(S_1') \, dS_1' \right\} dS_1 = -[a + b(1-L_3'+L_4')]$$

$$\int_1^{l_2} {}_2(S_2) \left\{ \int_1^{S_2} Q_2(S_2') \, dS_2' \right\} dS_2 = d + \frac{e}{2} (1-L_9'+L_{10})$$

$$\int_1^{l_1} Q_1(S_1) \, dS_1 = a+b+c$$

$$\int_1^{l_2} Q_2(S_2) \, dS_2 = -(d+e+f)$$

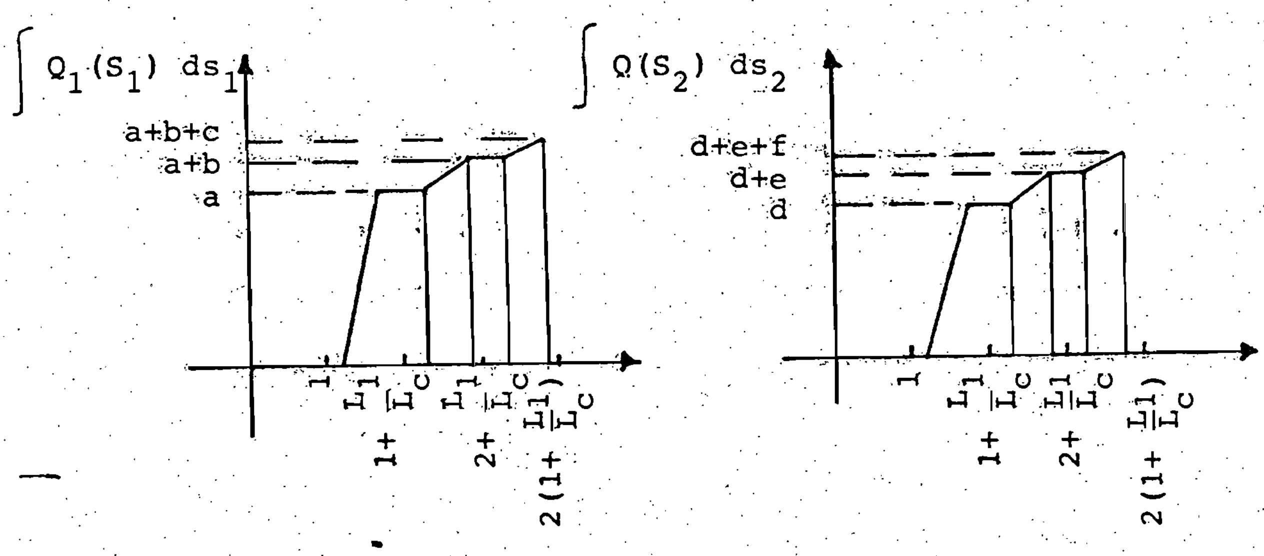


Figura III.6. Forma integral de las gráficas expuestas en la figura III.3.

$$\int_{1}^{l_1} \delta_1(S_1)\, dS_1 = -1$$

$$\int_{1}^{l_2} \delta_2(S_2)\, dS_2 = -1$$

$$\int_{0}^{1} \delta_1(S_1)\ \text{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\, S_1\right) dS_1 = -\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}\left(\text{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)-1\right)$$

$$\int_{0}^{1} \delta_2(S_2)\ \text{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\, S_2\right) dS_2 = -\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}\left(\text{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)-1\right)$$

Introduciendo cada uno de los resultados anteriores en (II-56) y (II-57), finalmente puede concluirse:

$$V_1^2 = \Gamma_1\left(-\left[a+\frac{b}{2}\,(1-L_3'+L_4')\right]+(a+b+c)\left(\left(1-\text{Exp}\left(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}+\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}\right)\right) \tag{III-1}$$

$$V_2^2 = \Gamma_2\left(d+\frac{e}{2}(1-L_9'+L_{10}')-(d+e+f)\left(\left(1-\text{Exp}\left(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1}+\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}\right)\right) \tag{III-2}$$

Las ecuaciones (III-1) Y (III-2), representan la forma más general a través de la cual se puede analizar el estado permanente de dos termosifones acoplados con geometría rectangular y de dimensiones arbitrarias.

De las ecuaciones (III-1) y (III-2) es posible obtener las siguientes conclusiones:

1) En caso de que $a= -(b+c)$ y $d= -(e+f)$ se tiene el RESULTADO 4 de la SECCION II, ya que las dos ecuaciones se desacoplan.
2) Por otra parte, si:

$$a+ \frac{b}{2}(1-L_3'+L_4')=0 \qquad L_3'= \frac{2a}{b} + L_4' +1$$

$$d+ \frac{e}{2}(1-L_9'+L_{10}')=0 \qquad L_9'= \frac{2d}{e} + L_{10}'+1$$

y además:

$$a+b+c=d+e+f$$

Se tendría que:

$$\frac{V_1^2}{\Gamma_1} + \frac{V_2^2}{\Gamma_2} = 0$$

Donde es posible concluir $V_1=V_2=0$ y de acuerdo con el RESULTADO 1 de la SECCION II no corresponde al estado permanente.
3) Además, si:

$$a+b+c=d+e+f$$

Entonces:

$$\frac{V_1}{\Gamma_1} + \frac{V_2}{\Gamma_2} = [d+ \frac{e}{2}(1-L_9'+L_{10}')]-[a+ \frac{b}{2}(1-L_3'+L_4)]$$

Dependiendo única y exclusivamente el término de la derecha de la longitud y forma de calentamiento.

Las ecuaciones (III-1) y (III-2), forman un sistema acoplado en donde la variable dependiente no puede despejarse para obtener una expresión en términos de las variables independientes Γ_1 y Γ_2. Por tanto, este caso cae en la clasificación de ecuaciones trascendentes, cuya solución puede darse por el método numérico de Newton-Raphson.*

Este último desarrollo arroja un resultado muy importante "LA NO DEPENDENCIA DE V_1 Y V_2 CON CUALQUIER LONGITUD TIPICA DEL TERMOSIFON COMO: L_1 Y L_2. POR TANTO, EL RESULTADO SERA EL MISMO SI SE ACORTA O ALARGA LA ESTRUCTURA DEL TERMOSIFON Y EN CONSECUENCIA, UNICAMENTE HABRA RELACION DIRECTA CON LA FORMA DE CALENTAMIENTO".

A continuación, se analiza un caso típico como es el acoplamiento de dos termosifones cuadrados.

III.2 Ejemplo Específico.

Sea un sistema de dos termosifones cuadrados acoplados como muestra la figura III.7, sometidos a ciertos regímenes de calentamiento y enfriamiento, que en forma matemática quedan expresados como:

$$Q_1 = \begin{cases} 0 \text{ en } 1 < S_1 \leq 2 \\ 0 \text{ en } 2 < S_1 \leq 3 \\ 1 \text{ en } 3 < S_1 \leq 4 \end{cases}$$

* Ver apéndice C.

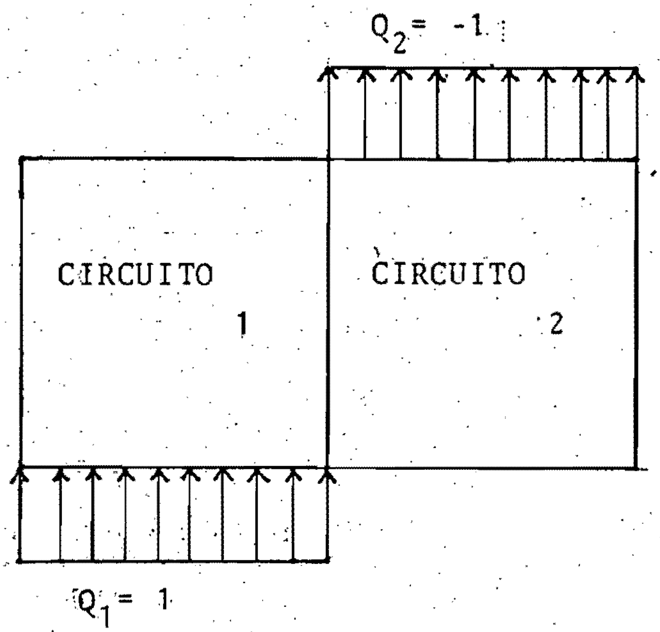


Figura III.7. Sistema formado por dos circuitos cuadrados con una etapa de calentamiento $Q_1=1$ y otra de enfriamiento $Q_2= -1$.

$$Q_2=\begin{cases} -1 \text{ en } 1< S_2\leq 2 \\ 0 \text{ en } 2< S_2\leq 3 \\ 0 \text{ en } 3< S_2\leq 4 \end{cases}$$

Al sustituir lo anterior en las ecuaciones generales (III-1) (III-2), se tiene que:

$$v_1^2= \Gamma_1((1-\mathrm{Exp}(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}))^{-1} + \frac{V_1V_2}{V_1+V_2}) \qquad \text{(III-3)}$$

$$v_2^2= \Gamma_2(1-(1-\mathrm{Exp}(\frac{V_1+V_2}{V_1V_2})^{-1}- \frac{V_1V_2}{V_1+V_2}) \qquad \text{(III-4)}$$

La suma de (III-3) y (III-4) genera:

$$\frac{v_1^2}{\Gamma_1} + \frac{v_2^2}{\Gamma_2} =1 \qquad \text{(III-5)}$$

Relación que debe satisfacer el grupo de resultados obtenidos del sistema de ecuaciones compuesto por (III-3) y (III-4).

Las ecuaciones (III-3) y (III-4) fueron resueltas por el método de Newton-Raphson, cuyo programa se expone en el apéndice D, dando lugar a las figuras III.8 a III.18 y de donde es posible obtener ciertas conclusiones para el estudio de termosifones rectangulares acoplados que trabajen a régimen permanente, tal como el mostrado en la figura III.7.

Ya que la forma de las gráficas no se altera cualitativamente para todo valor de Γ_1 y Γ_2, según pudo apreciarse al llevar a cabo las corridas en la computadora, el sistema de la figura III.7 se analizó dando a éstas magnitudes unitarias.

La figura III.8 muestra como varía la velocidad en un termosifón respecto a otro cuando $\Gamma_1=1$ y $\Gamma_2 \rightarrow \infty$, adquiriendo entonces la velocidad en el circuito primario, o sea, V_1 los valores: 0.60681 y -0.7772. Estos se obtienen de la expresión (III-3), que puede escribirse:

$$V_1^2 = \Gamma_1((1-\mathrm{Exp}(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}))^{-1} + \frac{1}{\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_2}}) \qquad \text{(III-6)}$$

Cuando $V_2 \rightarrow \infty$, (III-6) se reduce a:

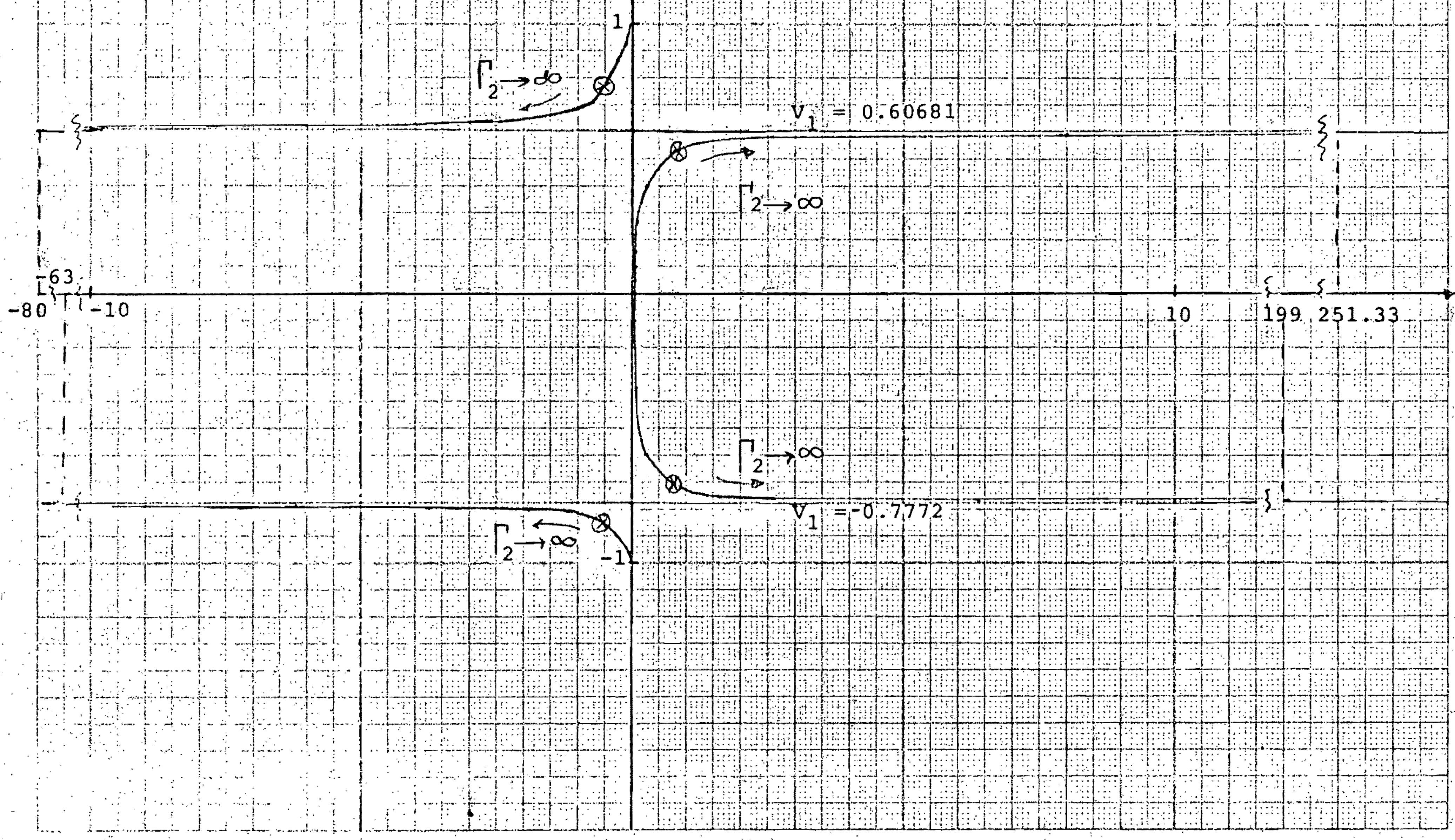
$$V_1^2 = {}_1((1-\mathrm{Exp}(\frac{1}{V_1}))^{-1} + V_1) \qquad \text{(III-7)}$$

Ecuación trascendente que resuelta a base de métodos numéricos cuando $\Gamma_1=\Gamma_2=1$, genera los resultados:

$$V_1=0.60681 \ , \quad V_1=-0.7772$$

Por otro lado, si V_2 tiende a valores pequeños tanto por la parte negativa como positiva del cero, esto es 0^- y 0^+ respectivamente, es posible entonces localizar los valores límite de V_1.

circuito uno contra velocidad en el circuito dos, manteniendo el valor de Γ_1 constante y Γ_2 variando en el intervalo comprendido por 10^{-6} y 10^{6}.



Suponiendo en primera instancia que $V_2 \to 0^-$, la ecuación (III-6) se reduce a:

$$V_1 = \pm (\Gamma_1)^{0.5}$$

Y como $\Gamma_1 = 1$:

$$V_1 = \pm (\Gamma_1)^{0.5}$$

Siendo éstos, los valores límite de V_1 en la figura III.8. Ahora, haciendo a $V_2 \to 0^+$, la expresión (III-6) adopta el valor:

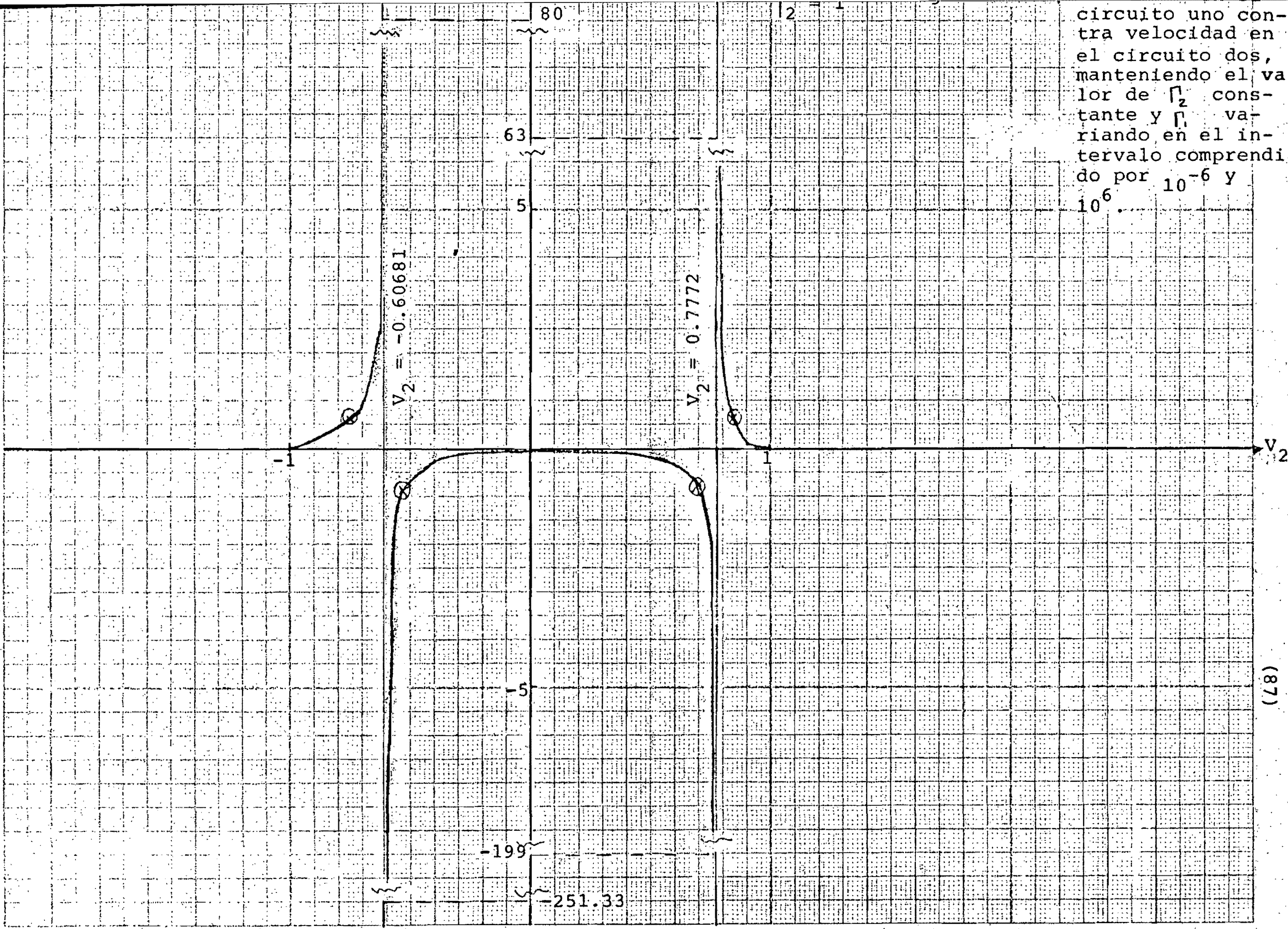
$$V_1 = 0$$

Como también se expone en la gráfica de la misma figura.

El mismo tipo de análisis puede hacerse sobre la base de $\Gamma_2 = 1$ y Γ_1 variando, lo que genera una grafica como la expuesta en la figura III.9, cuya diferencia con la anterior radica en un giro de 90° en sentido de las manecillas del reloj y una reflexión.

La ecuación (III-4) se puede escribir:

$$V_2^2 = \Gamma_2 \left(1 - \left(1 - \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)\right)^{-1} - \frac{1}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}\right) \qquad \text{(III-8)}$$



circuito uno contra velocidad en el circuito dos, manteniendo el valor de Γ_2 constante y Γ_1 variando en el intervalo comprendido por 10^{-6} y 10^{6}.

Cuando V_1 se hace tender a valores muy grandes ($V_1 \rightarrow \infty$), la expresión anterior es posible reducirla a:

$$V_2^2 = \Gamma_2 (1-(1-\mathrm{Exp}(\frac{1}{V_2}))^{-1} - V_2) \qquad \text{(III-9)}$$

Ecuación trascendente que resuelta en forma numérica cuando $\Gamma_2=1$, alcanza los valores:

$$V_2=0.7772 \;,\; V_2= -0.60681$$

Además, si V_1 tiende a valores pequeños como son 0^- y 0^+, es posible localizar los puntos límite de V_2, según muestra la figura III.9. Al hacer $V_1 \rightarrow 0^-$, entonces de (III-8):

$$V_2=0$$

Finalmente, si $V_1 \rightarrow 0^+$, la expresión (III-8) toma el valor:

$$V_2= \pm (\Gamma_2)^{0.5}$$

Ya que $\Gamma_2=1$:

$$V_2= \pm 1$$

La figura III.10 presenta a la velocidad en el circuito primario V_1 contra Γ_1 manteniendo Γ_2 constante e igual a la unidad, para cada cuadrante de la figura III.8 y donde se aprecia como aumenta la velocidad al hacerlo Γ_1. De igual forma, $V_1 \rightarrow 0$ a medida que $\Gamma_1 \rightarrow 0$. Esto es lógico pues la ecuación (III-3) tiene la forma:

$$V_1^2 = \Gamma_1 f_1(V_1, V_2) \qquad \text{(III-10)}$$

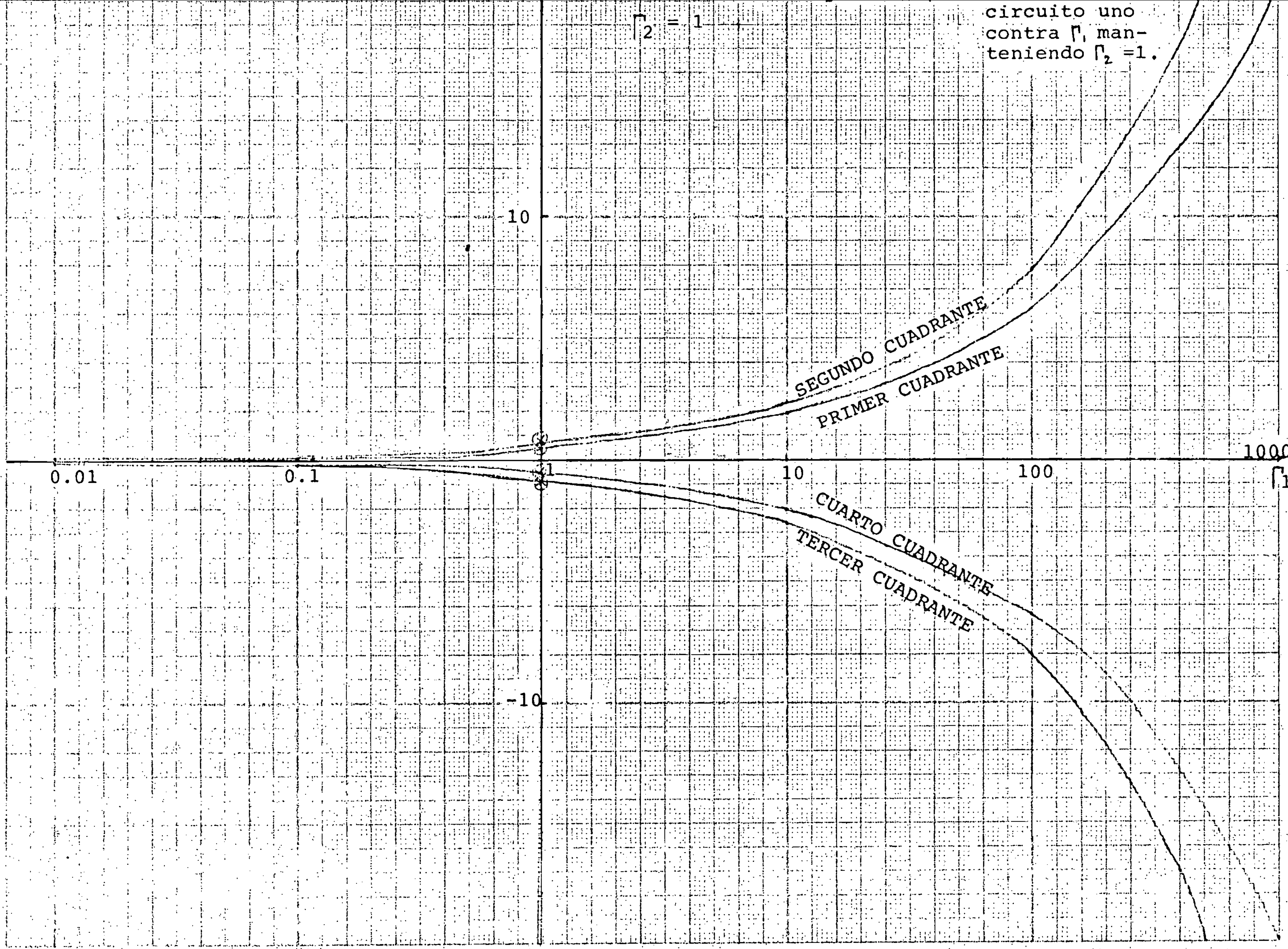
Por otro lado, la gráfica de III.11 muestra como para valores grandes de Γ_2, la velocidad tiende a resultados deducidos con anterioridad:

$$V_1 = 0.60681 \;,\; V_1 = -0.7772$$

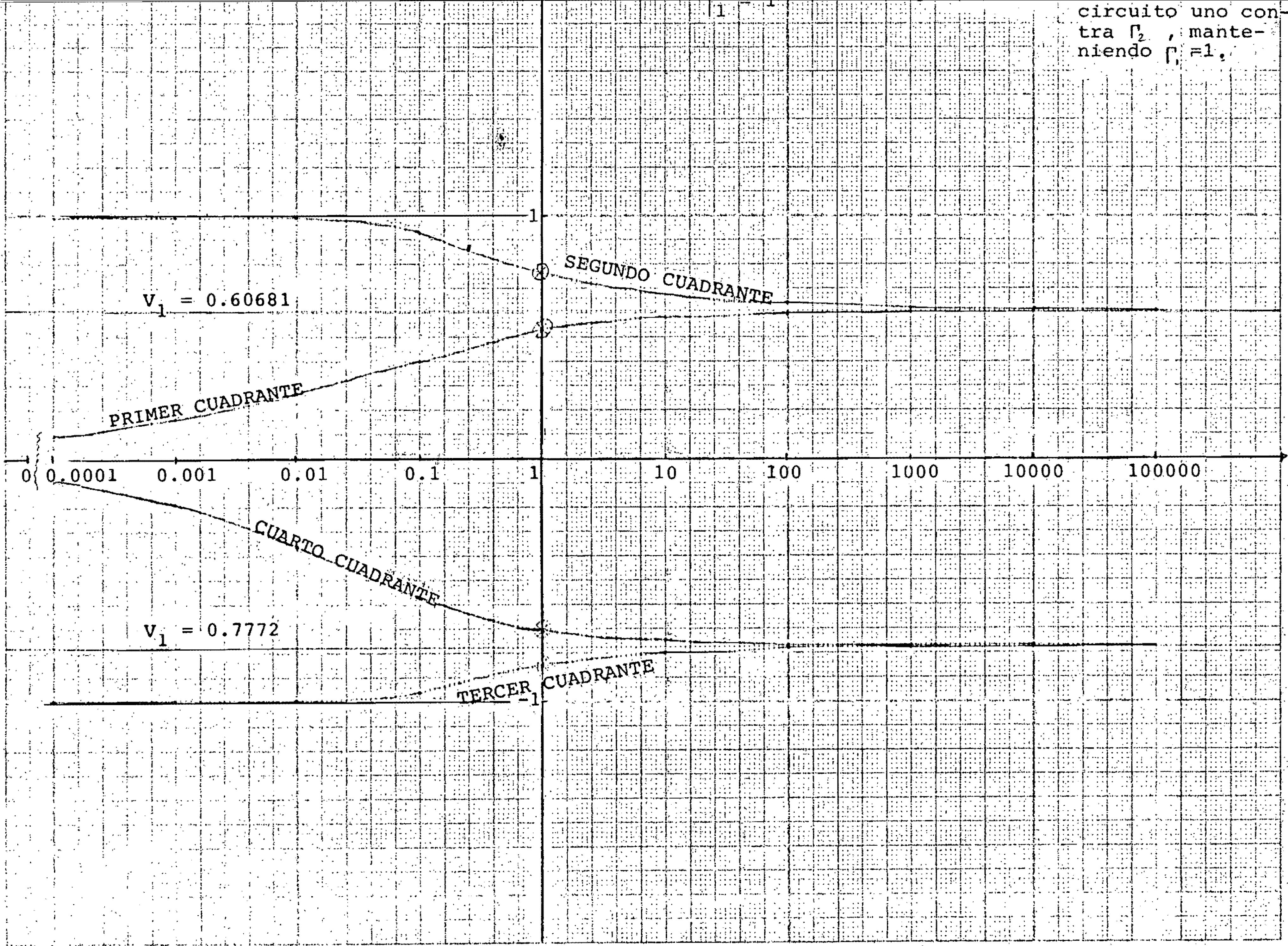
Cuando $\Gamma_2 \rightarrow 0$, la velocidad en el circuito primario puede adquirir cuatro valores. Los dos primeros serían $V_1 = \pm 1$ ya deducidos. Sustituyendo esta condición ($\Gamma_2 \rightarrow 0$) en la ecuación (III-4), se concluye que: $V_2 = 0$. Introduciendo este valor en la ecuación (III-6), entonces:

$$V_1 = 0$$

De esta forma se comprueba que $V_1 = 0$ a medida que $\Gamma_2 \rightarrow 0$.



circuito uno contra Γ_1 manteniendo $\Gamma_2 = 1$.
$\Gamma_2 = 1$
10
-10
0.01
0.1
1
10
100
1000
Γ_1
SEGUNDO CUADRANTE
PRIMER CUADRANTE
CUARTO CUADRANTE
TERCER CUADRANTE



circuito uno contra Γ_2, manteniendo $\Gamma_1=1$.

Análogamente, la figura III.12 muestra como $V_2 \rightarrow \infty$ cuando $\Gamma_2 \rightarrow \infty$ y $V_2 \rightarrow 0$ si $\Gamma_2 \rightarrow 0$. Este caso es fácil de demostrar en forma directa ya que:

$$V_2^2 = \Gamma_2 f_2(V_1, V_2) \qquad \text{(III-11)}$$

El gráfico de la figura III.13 demuestra como la velocidad en el circuito dos alcanza los valores: -0.60681 y 0.7772 cuando $\Gamma_2 \rightarrow \infty$, ya deducidos con anterioridad. Por otra parte, si $\Gamma_1 \rightarrow 0$, la ecuación (III-10) muestra que $V_1=0$. Sustituyendo éste en la expresión (III-8), entonces:

$$V_2=0$$

Comprobando que cuando $\Gamma_1 \rightarrow 0$, $V_2=0$. Según puede verse en la figura III.13.

La figura III.14, muestra el aspecto tridimensional de la velocidad en función de los dos parámetros de control Γ_1 y Γ_2. En este caso, las características cualitativas de las velocidades V_1 y V_2 son las mismas. Dicho gráfico es muy importante, ya que con dos valores como Γ_1 y Γ_2 es posible localizar cuatro soluciones para cada velocidad.

En las figuras III.8 a III.13, las soluciones para el caso propuesto en la figura III.7, en que $\Gamma_1=\Gamma_2=1$, se encuentran señaladas con el símbolo ⊛. El estudio arroja cuatro pares de soluciones como cabría esperar, o sea, dos pares por termosifón.

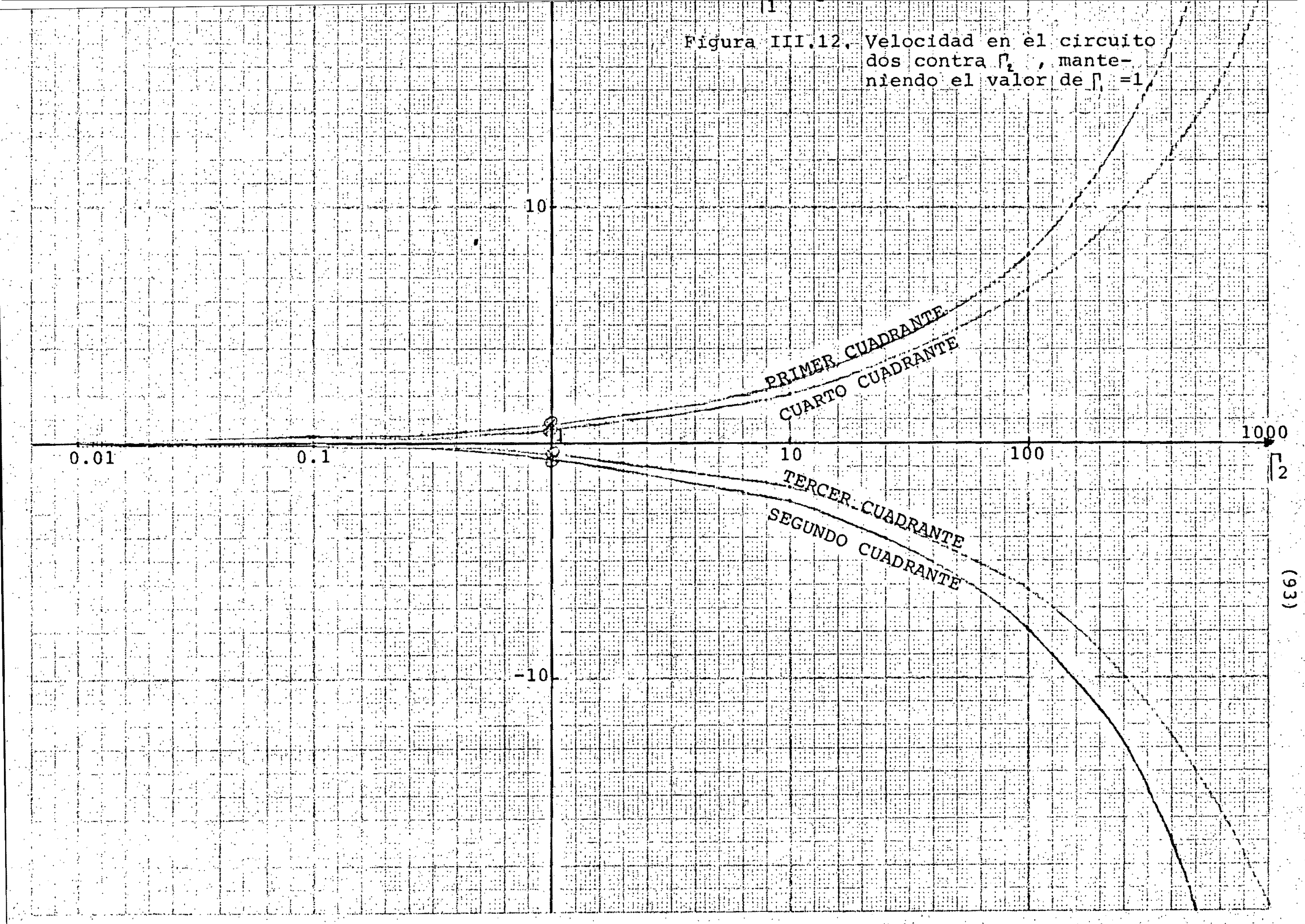


Figura III.12. Velocidad en el circuito dos contra Γ_2, manteniendo el valor de $\Gamma_1 = 1$

Figura III.13. Velocidad en el circuito dos contra Γ_1, manteniendo $\Gamma_2 = 1$.

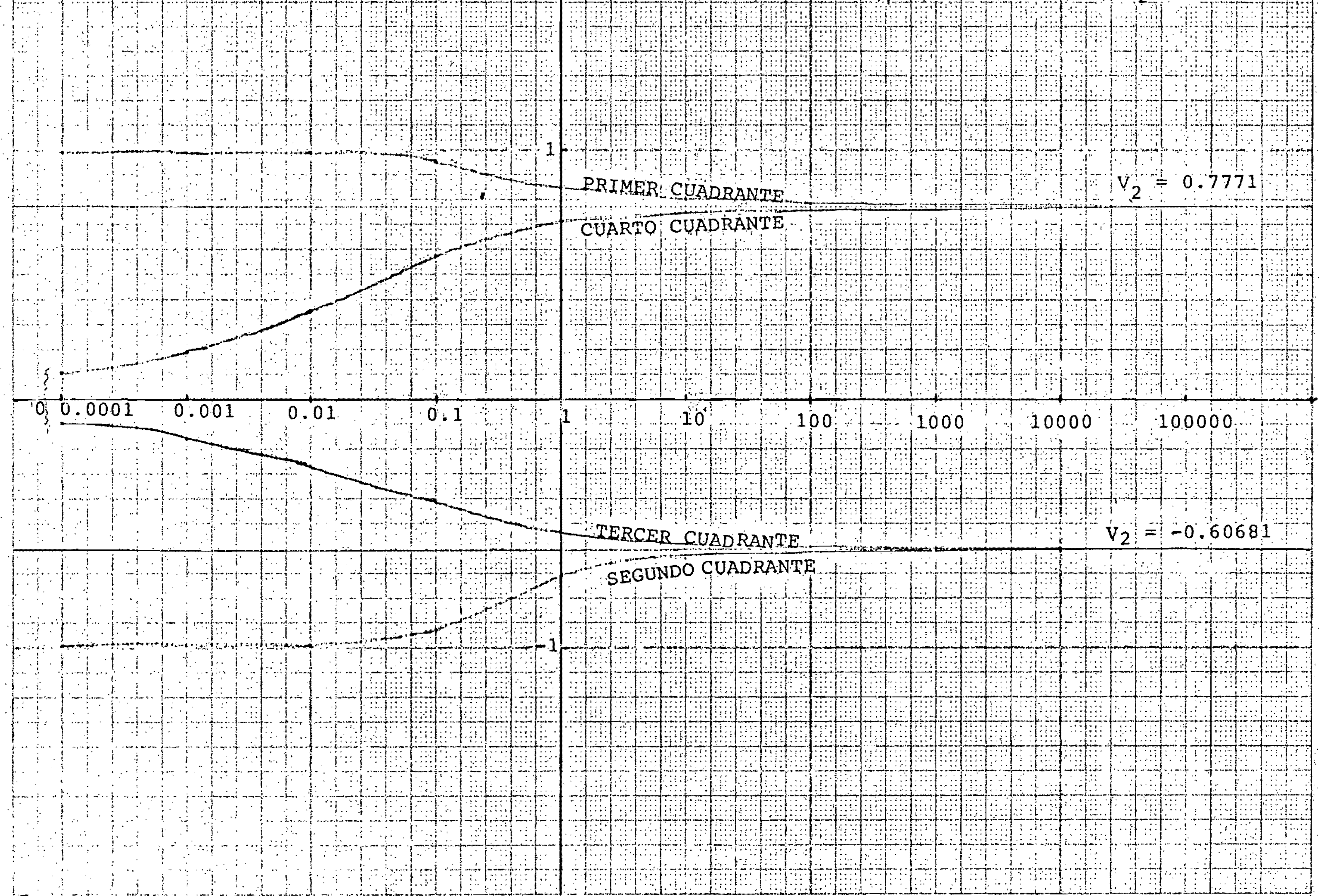
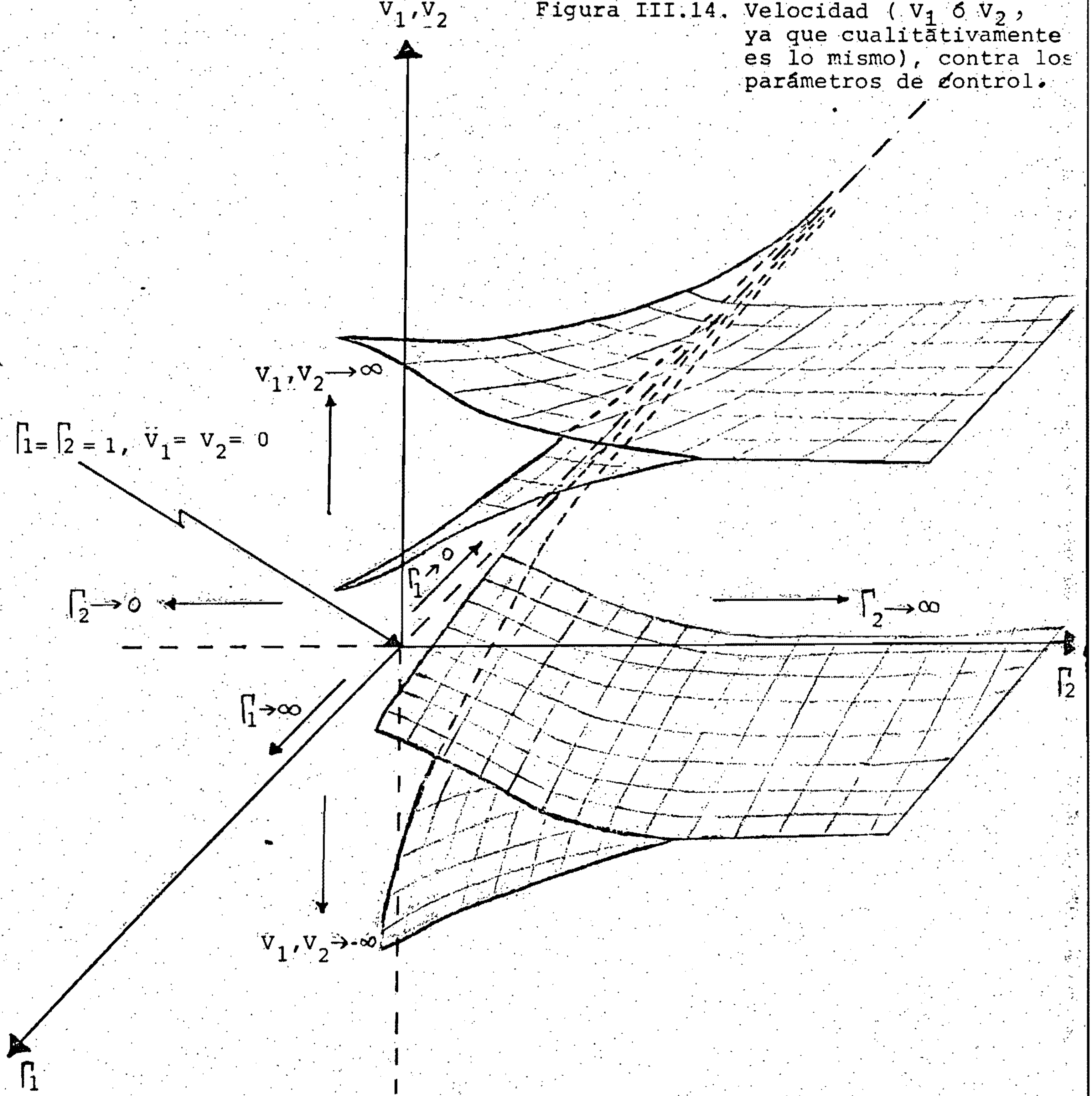


Figura III.14. Velocidad (V_1 ó V_2 , ya que cualitativamente es lo mismo), contra los parámetros de control.



Respecto a la distribución de temperaturas en los circuitos, ésta se encuentra dada por las figuras III.15 a III.18, donde las flechas indican el sentido en que el fluído circula dentro de los circuitos. Los valores de la temperatura para la zona común en cada circuito, se calculan a través de (II-39) y (II-40), haciendo uso de (II-49). Como:

$$\int_{1}^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 = 1$$

Según puede verse de la figura III.7, la expresión (II-47), se reduce a:

$$\theta_2(0) = -\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\left(1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)\right)^{-1} \qquad \text{(III-12)}$$

Que sustituída en (II-39) y (II-40), origina:

$$\theta_1(S) = -\frac{1}{V_1}\,\frac{1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\,S\right)}{1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)} \qquad \text{(III-13)}$$

$$\theta_2(S) = -\frac{1}{V_1V_2}\,\frac{V_1\ \mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\,S\right) + V_2}{1-\mathrm{Exp}\left(-\frac{V_1+V_2}{V_1V_2}\right)} \qquad \text{(III-14)}$$

Válidas para la zona común.

Por otra parte, las expresiones (II-41) y (II-42) dan la distribución de temperatura para la zona no común ó exterior de ambos circuitos. Estas pueden fraccionarse como sigue:

$$\Theta_1(S_1) = \frac{1}{V_1}\left\{\int_1^2 Q_1(S_1)\,dS_1 + \int_2^3 Q_1(S_1)\,dS_1 + \int_3^{S_1} Q_1(S_1')\,dS_1'\right\} + \Theta_1(1)$$

$$_2(S_2) = \frac{1}{V_2}\left\{\int_1^2 Q_2(S_2)\,dS_2 + \int_2^3 Q_2(S_2)\,dS_2 + \int_3^{S_2} Q_2(S_2')\,dS_2'\right\} + \Theta_2(1)$$

Pero de la figura III.7 se encuentra que:

$$\int_1^2 Q_1(S_1)\,dS_1 = \int_2^3 Q_1(S_1)\,dS_1 = \int_2^3 Q_2(S_2)\,dS_2 = \int_3^{S_2} Q_2(S_2')\,dS_2' = 0$$

Ya que en dichos intervalos no hay intercambio de energía por parte del sistema con el medio ambiente. Entonces, las expresiones para $\Theta_1(S_1)$ y $\Theta_2(S_2)$ quedan finalmente:

$$\Theta_1(S_1) = \frac{1}{V_1}\int_3^{\eta} Q_1(S_1)\,dS_1 + \Theta_1(1)\ ,\quad \eta = S_1 \text{ si } 3 \leq S_1 \leq 4$$

$$\Theta_2(S_2) = \frac{1}{V_2}\int_1^{\xi} Q_2(S_2)\,dS_2 + \Theta_2(1)\ ,\quad \xi = S_2 \text{ si } 1 \leq S_2 \leq 2$$

De la figura III.7:

$$Q_1(S_1) = 1\ ,\quad Q_2(S_2) = -1$$

Introduciendo ésto en las ecuaciones anteriores y efectuando la integración:

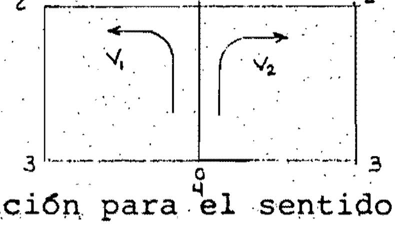
$$\theta_1(S_1) = \frac{1}{V_1}(\eta - 3) + \theta_1(1) \; , \qquad 3 \leq \eta \leq 4 \quad \text{(III-15)}$$

$$\theta_2(S_2) = \frac{1}{V_2}(\xi - 1) + \theta_2(1) \; , \qquad 1 \leq \xi \leq 2 \quad \text{(III-16)}$$

El valor de $\theta_1(1)$ y $\theta_2(1)$ que aparece en las expresiones anteriores, se calcula de (III-13) y (III-14) respectivamente, haciendo S=1.

Del análisis anterior, concretamente de las figuras III.8 y III.9, se encuentra que el sistema acoplado de la figura III.7 posee cuatro pares de valores, que a continuación se revisarán en relación con la distribución de temperatura expuesta en las figuras III.15 a III.18.

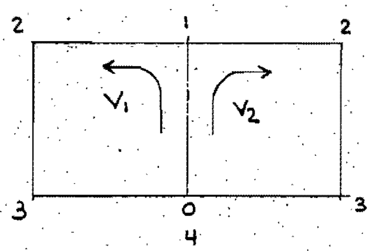
1) El primer caso corresponde a los valores: $V_1 = 0.526$ y $V_2 = 0.85$, cuyo sentido dentro del sistema es como sigue.



La convención para el sentido positivo de la velocidad está expuesta en la figura II.1.

El gráfico de la figura III.15 muestra como la temperatura en el circuito uno Θ_1 es mayor, que la del segundo circuito Θ_2. Esto conduce a la aparición de un flujo de calor a través de la región común y que redunda en un incremento de Θ_2 dentro de esta zona. Después, entre 1 y 3, Θ_1 se mantiene constante para recibir un incremento en el intervalo de 3 a 4, producto del calentamiento, repitiéndose entonces el ciclo. Por otra parte, Θ_2 se reduce en 1-2 debido al enfriamiento, permaneciendo constante de 2 a 4, para de nuevo comenzar el ciclo.

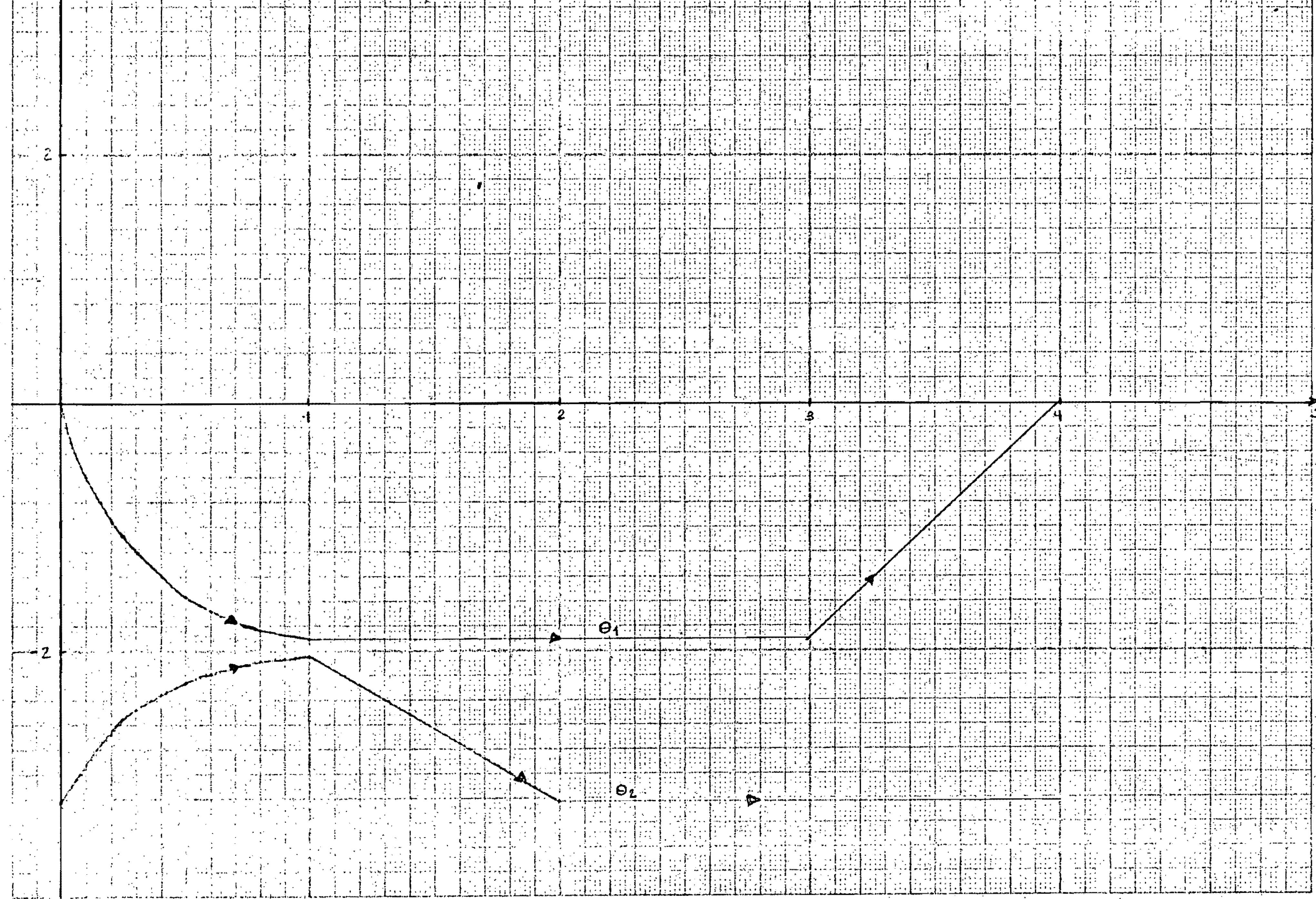
2) En este caso V_1=0.707 y V_2= -0.707. El sentido en que el fluído circula es.



Analizando los valores de la velocidad se observa como $V_1 = -V_2$. Esto plantea una dificultad, pues las ecuaciones para la temperatura conducen a una indeterminación del tipo 0/0; que puede ser removida empleando la regla de L'Hopital. Introduciendo una nueva variable a través de;

$$p = -\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} \qquad \text{(III-17)}$$

$V_1 = 0{,}526$, $V_2 = 0{,}85$, Correspondientes a $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ para el sistema de la figura III.7.



Derivando con respecto a ella y tomando el límite cuando $p \to 0$, la temperatura en la zona común para ambos termosifones queda:

$$\Theta_1(S_1) = \frac{S}{V_2} \qquad \text{(III-18)}$$

$$\Theta_2(S) = \frac{S}{V_2} - 1 \qquad \text{(III-19)}$$

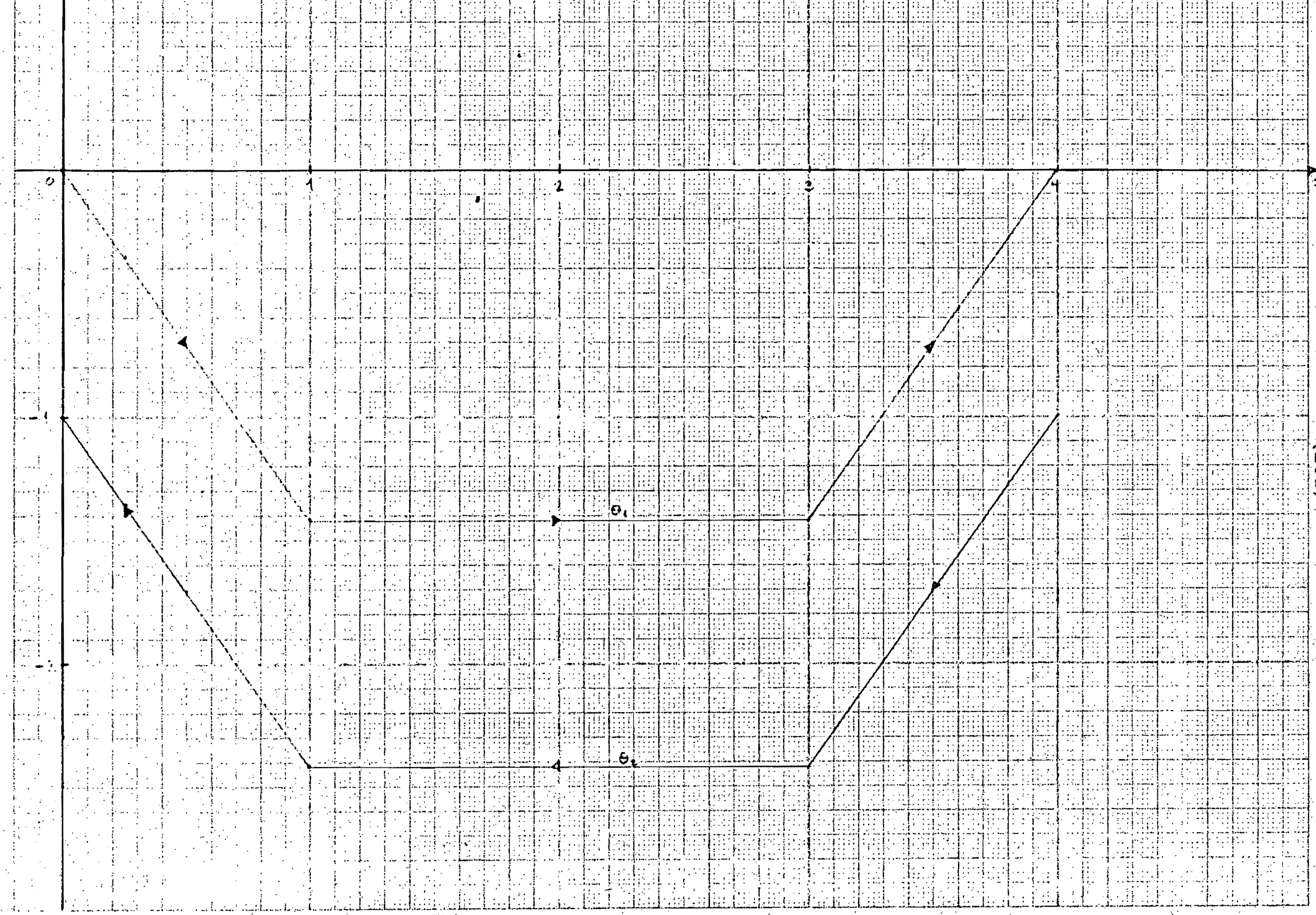
Haciendo S=1 en las dos expresiones anteriores y sustituyendo el resultado en (III-15) y (III-16):

$$(S_1) = \frac{1}{V_1}(\eta - 3) + \frac{1}{V_2} \quad \text{para} \quad 3 \leq \eta \leq 4$$

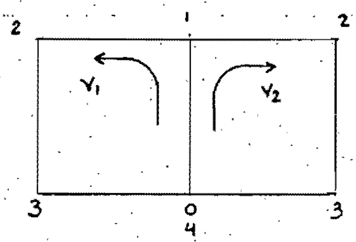
$$(S_2) = \frac{1}{V_2}\xi - 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq \xi \leq 2$$

Que proveen el resultado de Θ_1 y Θ_2 en la zona no común. La gráfica III.16 muestra como la temperatura Θ_1 disminuye a lo largo de la zona común y se incrementa Θ_2, producto de un flujo de calor generado por el gradiente de temperatura. Θ_1 es constante entre 1-3, aumentando en 3-4 debido al calentamiento. Θ_2 se mantiene constante entre 4-2 y decrece su valor de 2-1, consecuencia del enfriamiento.

$V_1 = 0.707$, $V_2 = -0.707$; Correspondientes a $I_1 = I_2 = 1$
para el sistema de la figura III.7.

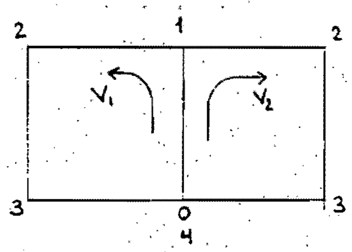


3) También, para la solución V_1=-0.707 y V_2= 0.707, sucede lo mismo que en el caso anterior, o sea que, $V_1=-V_2$ provocando la indeterminación 0/0. Procediendo de manera análoga, se encuentra la gráfica mostrada en la figura III.17 para el sistema acoplado.



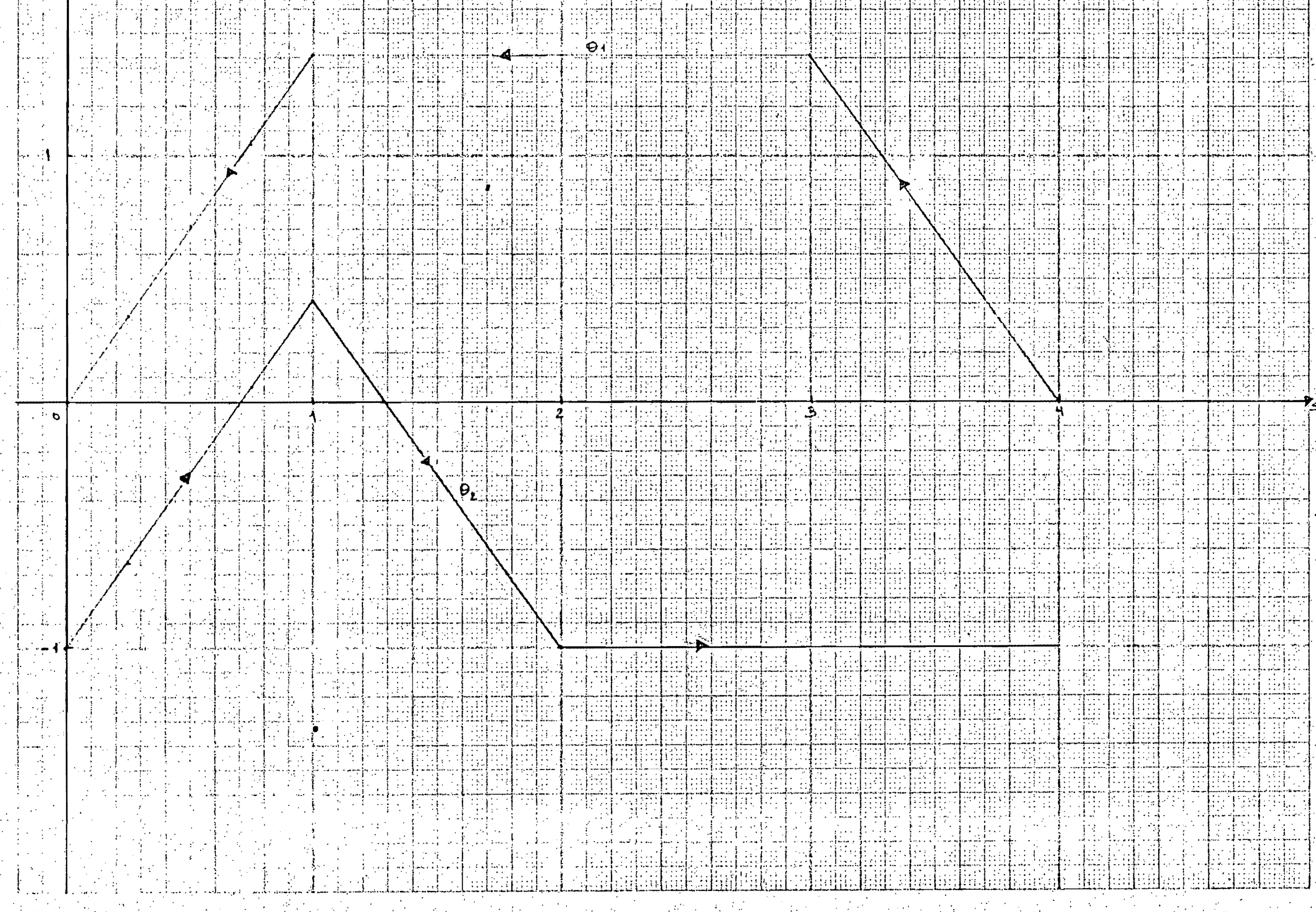
Donde una vez más, la temperatura en el circuito uno Θ_1 disminuye, mientras Θ_2 se incrementa en este lapso. Θ_1 permanece constante entre 3-1 y aumenta de 4-3 producto del calentamiento. Mientras Θ_2 es constante de 2 a 4 y decrece de 1-2 debido al enfriamiento.

4) La solución V_1= - 0.85 y V_2= -0.526 posee la dirección que abajo se muestra, así como en la figura III.18.

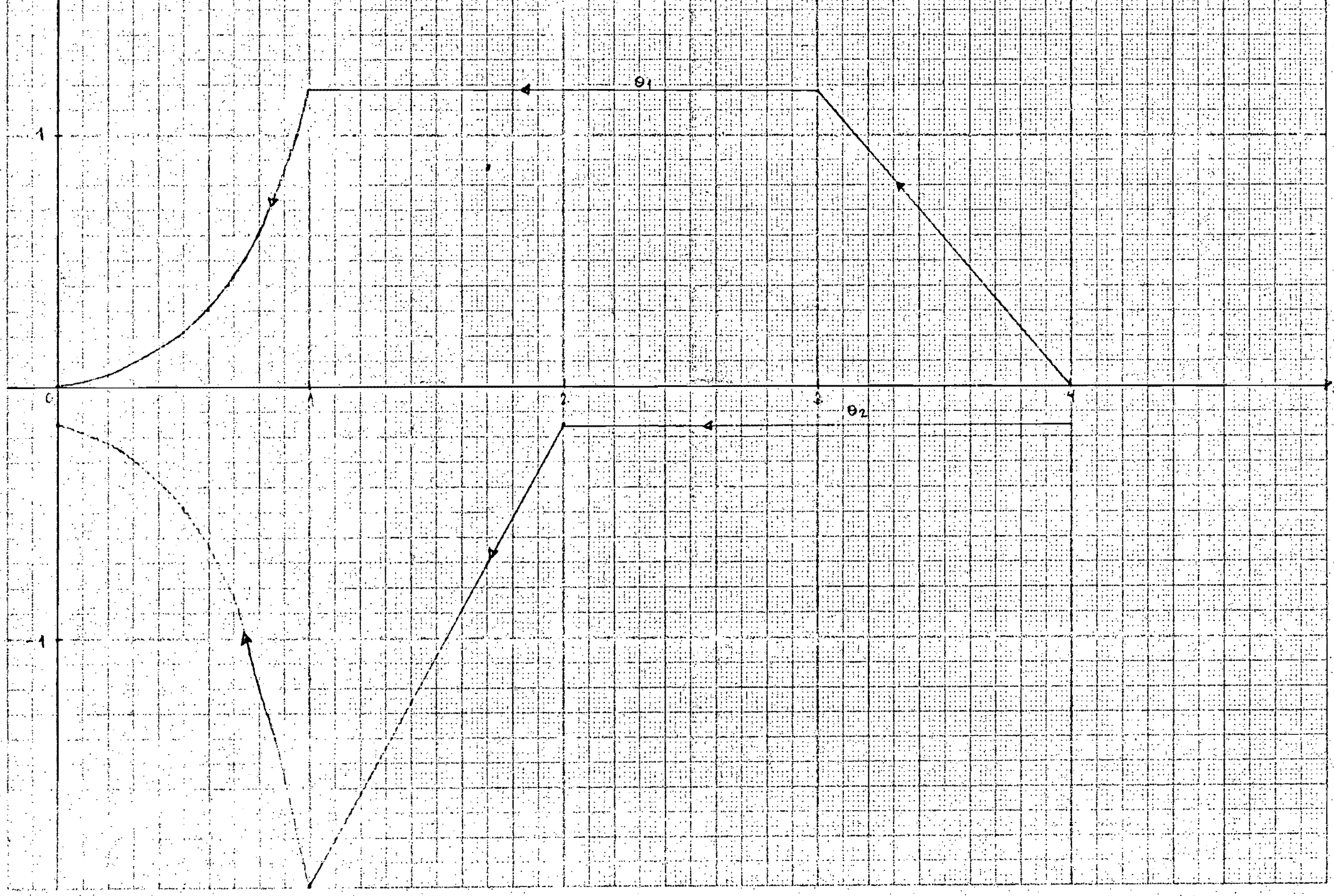


Incrementándose Θ_2 y reduciéndose Θ_1 a lo largo de la zona común, consecuencia del flujo de calor generado por el gradiente de temperatura en ésta. Θ_1 se mantiene constante entre 3-1, mientras aumenta su valor en 4-3 producto del calentamiento. Θ_2 permanece constante durante 4-2, reduciendo su magnitud entre 2-1, debido al enfiamiento.

velocidades: $V_1 = -0.707$, $V_2 = 0.707$.
Correspondientes a $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ para el
sistema de la figura III.7



las velocidades: $V_1 = -0.85$ y $V_2 = -0.526$. Correspondientes a $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ para el sistema de la figura III.7.



SECCION IV. CONCLUSIONES.

En esta sección se presenta una recopilación de las conclusiones obtenidas durante el desarrollo anterior. Aunque, la mayoría de ellas fueron señaladas en su momento, a continuación se muestra un breve resúmen:

a) La multiplicidad de soluciones en sistemas de convección natural, ya detectada para el caso de un sólo circuito, se aprecia durante el funcionamiento de dos de ellos acoplados. Para aquel, se encontraron en general dos velocidades una en sentido de las manecillas del reloj y otra en sentido contrario. Al unir dos termosifones como es natural se tendrán: 2x2=4 soluciones diferentes de cero.

b) La suma de la energía calorífica recibida por los dos circuitos a lo largo de su región no común, estrictamente deberá ser nula para alcanzar el estado permanente, o sea:

$$\int_{1}^{\ell_1} Q_1(S_1)\, dS_1 + \int_{1}^{\ell_2} Q_2(S_2)\, dS_2 = 0$$

c) Si cualquiera de las velocidades V_1, V_2 ó ambas se anulan, el sistema no puede operarse en estado permanente, según puede verse en el RESULTADO 2, de la SECCION II.

d) Para alcanzar el estado permanente es necesario cumplir con:

$$\int_{1}^{\ell_1} \delta_1(S_1) \left\{ \int_{1}^{S_1} Q_1(S_1') \, dS_1' \right\} dS_1 + \int_{1}^{\ell_2} \delta_2(S_2) \left\{ \int_{1}^{S_2} Q_2(S_2') \, dS_2' \right\} dS_2 >$$

Esto se derivó con base en el RESULTADO 3 de la SECCION II.

e) En caso de que la energía aportada a cualquier termosifón fuera nula, el sistema general de ecuaciones para la velocidad (II-56) y (II-57) se desacopla. Esto, significa que n existe un gradiente de temperatura a lo largo de la zona común.

f) Las ecuaciones (III-1) y (III-2) que dan el campo de velocidad para dos circuitos rectangulares acoplados, demuestran que V_1 y V_2 no dependen de cualquier longitud típica como L_1 y L_2 (ver figura III.1), sino únicamente de su forma de calentamiento, para régimen permanente.

La idea de este trabajo fué analizar un sistema de convección natural, formado por dos circuitos acoplados que intercambian energía con el exterior y entre ellos mismos. Una cuestión importante es que no hay restricción respecto a geometría y dimensiones. Este tipo de sistemas es muy empleado en equipos para enfriamiento de emergencia en reactores nucleares, sistemas de captación de energía solar y plantas geotérmicas. El análisis, se efectúa únicamente para régimen permanente.

APENDICE A. FLUJO DE POISEUILLE.

La Figura A.1, representa una tubería de radio constante y en ella se tienen dos secciones transversales 1 y 2 que distan entre sí una longitud L. La tubería es horizontal. Considerar un cilindro coaxial paralelo al eje de la tubería abcd de base w y radio r. Sobre el fluído del cilindro anterior (abcd), actúa la fuerza T debida al esfuerzo cortante; donde τ_w es el esfuerzo en la pared de la tubería.

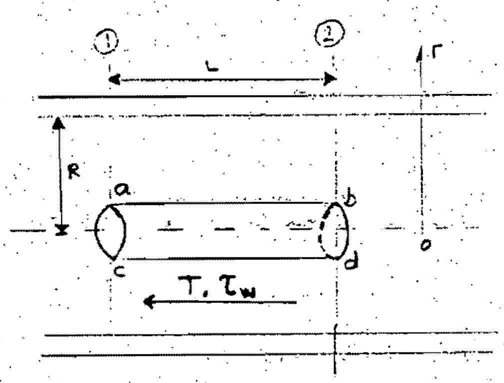


Figura A.1. Al flujo laminar se oponen las fuerzas T originadas por el esfuerzo cortante . La integración de todas las fuerzas que actúan sobre el fluído comprendido entre las secciones 1 y 2 de la tubería conduce a la ecuación de Poiseuille.

Al aplicar la segunda ley de Newton:

$$p_1 w - p_2 w - T = 0 \qquad \text{(A-1)}$$

donde T es debida al esfuerzo cortante. O sea:

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - 2\pi r L \tau_w = 0 \qquad \text{(A-2)}$$

Pero el esfuerzo τ_w para fluídos Newtonianos es:

$$\tau_w = \mu \frac{dv}{dr} \qquad \text{(A-3)}$$

en que v es la velocidad del fluído. Sustituyendo (A-3) en (A-2):

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - 2\pi r L \mu \frac{dv}{dr} = 0 \qquad \text{(A-4)}$$

La ecuación anterior es posible escribirla como:

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = 2\pi r L \mu \frac{dv}{dr} \qquad \text{(A-5)}$$

o bien

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi r L \mu \frac{dv}{dr} \qquad \text{(A-6)}$$

donde Δp es la caída de presión a través de las secciones 1 y 2. También, de (A-6) es posible concluir que:

$$r \Delta p = -2 L \mu \frac{dv}{dr} \qquad \text{(A-7)}$$

y despejando dv :

$$dv = -\frac{\Delta p}{2L\mu} r\, dr$$

Ecuación de variables separables que al integrarla da:

$$v = -\frac{\Delta p}{2L\mu} r^2 + C \tag{A-8}$$

La constante C se determina por condiciones a la frontera en que $v = 0$ cuando $r = R$. Por tanto:

$$C = \frac{\Delta p}{4L\mu} R^2 \tag{A-9}$$

Reemplazando (A-9) en (A-8), se llega a:

$$v = \frac{\Delta p}{4L\mu} (R^2 - r^2) \tag{A-10}$$

que es la ecuación en el plano de una parábola y en el espacio de un paraboloide de revolución. La velocidad máxima tiene lugar en el eje del paraboloide, que es el eje de la tubería:

$$v_{máx} = \frac{\Delta p}{4L\mu} R^2 \tag{A-11}$$

En la práctica es mucho más fácil medir la velocidad media u, que la máxima $v_{máx}$. Es conveniente pues, expresar (A-8) en función de aquella. Entonces, por definición:

$$u = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} \tag{A-12}$$

donde $\dot{V}$ es el flujo volumétrico. Este, para un anillo circular comprendido entre dos circunferencias concéntricas con el eje de la tubería de radios r y r + dr será:

$$d\dot{V} = 2\pi r \, dr \, v = 2\pi r \, dr \frac{\Delta p}{4L\mu} (R^2 - r^2) \tag{A-13}$$

Al integrar la ecuación anterior:

$$\dot{V} = \int_0^R d\dot{V} = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta p}{4L\mu} (R^2 - r^2)\, dr \qquad \text{(A-14)}$$

y

$$\dot{V} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8L\mu} \qquad \text{(A-15)}$$

De (A-15) en (A-12):

$$u = \frac{\Delta p R^2}{8L\mu} \qquad \text{(A-16)}$$

Comparando ésta con (A-11):

$$u = \frac{v_{máx}}{2} \qquad \text{(A-17)}$$

Finalmente:

$$\Delta p = \frac{8L\mu u}{R^2} = \frac{32L\mu u}{D^2} \qquad \text{(A-18)}$$

Entonces, la ecuación (II-5) es posible escribirla a través de (A-18) como:

$$dF_f = dp\,\frac{\pi D^2}{4}$$

o bien:

$$dF_f = \frac{32\ u}{D^2}\,\frac{\pi D^2}{4}\,dx \qquad \text{(II-5)}$$

cuya relación demuestra la funcionalidad de dF_f con dx.

APENDICE B. DISTRIBUCION LINEAL DE LA DENSIDAD CON LA TEMPERATURA.

El volumen específico, puede considerarse función de T y p exclusivamente, o sea que:

$$v = v(T,p) \tag{B-1}$$

Al llevar a cabo una expansión en serie de Mc.Claurin y despreciando los términos no lineales:

$$v(T + dT, p + dp) = v(T,p) + \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp + \dots \tag{B-2}$$

o bien:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp \tag{B-3}$$

Introduciendo en (B-3) las definiciones siguientes:

$$\beta v = \frac{\partial v}{\partial T} \tag{B-4}$$

$$\kappa v = - \frac{\partial v}{\partial p} \tag{B-5}$$

donde κ y β son lon coeficientes de compresibilidad isotérmica y expansión isobárica respectivamente. Por tanto:

$$dv = \beta v \, dT - \kappa v \, dp \tag{B-6}$$

Al derivar (B-6) respecto a la temperatura y considerar un proceso a presión constante:

$$\frac{dv}{dT} = \beta v \tag{B-7}$$

Excribiendo en forma diferencial (B-7):

$$\frac{\Delta v}{\Delta T} = \beta v \qquad \text{(B-8)}$$

También:

$$\frac{(v - v_o)}{(T - T_o)} = \beta v \qquad \text{(B-9)}$$

Ahora, ya que el volumen específico es recíproco de la densidad, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_o} = \frac{\beta}{\rho}(T - T_o)$$

$$\rho_o - \rho = \rho_o \beta (T - T_o)$$

Finalmente:

$$\rho = \rho_o(1 - \beta(T - T_o)) \qquad \text{(II-12)}$$

La ecuación (II-12), muestra la relación lineal de la densidad con la temperatura a través del coeficiente de expansión volumétrica isobárica .

APENDICE C. METODO NUMERICO NEWTON-RAPHSON.

El Método de Newton-Raphson consiste en lo siguiente. Sea un grupo de funciones de la forma:

$$F_i(x_j) = 0 \; ; \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array} \tag{C-1}$$

o de manera no compacta:

$$\begin{array}{l} F_1(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0 \\ F_2(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = 0 \end{array} \tag{C-2}$$

Entonces, el jacobiano de $F_i(x_j)$ denominado como J debe cumplir con:

$$\left[J\right]\left[\Delta x\right] = -\left[f\right] \tag{C-3}$$

donde $\left[\Delta x\right]$ es un vector de incrementos de cada una de las variables x_j. Por otra parte, $\left[f\right]$ es un vector que se obtiene al dar valores a las x_j y sustituirlas en $F_i(x_j)$, o sea $F_i(x_j) = f_i$.

De (C-3), se concluye que:

$$\left[\Delta x\right] = -\left[J\right]^{-1}\left[f\right] \tag{C-4}$$

La metodología es como sigue:

1) Se dá un valor inicial a cada una de las variables x_j.
2) Se calcula $[J]^{-1}$.
3) Se obtiene $[f]$, de $F_i(x_j) = f_i$.
4) Al sustituir los tres incisos anteriores en (C-4), se calcula el vector $[\Delta x]$.
5) Si $[\Delta x] = [0]$ la solución ha sido alcanzada, en caso contrario efectuar el incremento $x_j+\Delta x_j$ y regresar al paso primero con el nuevo valor. Así sucesivamente hasta cumplir con:

$$[\Delta x] = 0$$

y por tanto, las raíces x_j de (C-2) han sido halladas.

APENDICE D. PROGRAMA DE COMPUTADORA QUE UTILIZA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

Programa diseñado para resolver las ecuaciones (III-3) y (III-4), que dieron lugar al grupo de figuras III.8 a III.18. Este se implementó en una computadora HP-85.

```
10 G1=1
20 G2=.00001
30 N=0
40 N=N+1
50 V1=1
60 V2=1
70 A=V1
80 E=EXP((V1+V2)/(V1*V2))
90 F=V1^2-G1*(1/(1-E)+V1*V2/(V1
   +V2))
100 G=V2^2+G2*(-1+1/(1-E)+V1*V2/
   (V1+V2))
110 E1=E/(1-E)^2
120 V3=V1^2/(V1+V2)^2
130 V4=V2^2/(V1+V2)^2
140 F1=2*V1+G1*(E1/V1^2-V4)
150 F2=2*V2+G2*(-(E1/V2^2)+V3)
160 H1=G1*(E1/V2^2-V3)
170 H2=G2*(-(E1/V1^2)+V4)
180 D=H1*H2-F1*F2
190 A1=(F2*F-H1*G)/D
200 A2=(F1*G-H2*F)/D
210 V1=V1+A1
220 V2=V2+A2
230 IF ABS(F)>.001 THEN 80
240 IF ABS(G)>.001 THEN 80
250 PRINT "V1=";V1
260 PRINT "V2=";V2
270 PRINT "G1=";G1
280 PRINT "G2=";G2
290 G2=G2*10
300 IF G2>10000000 THEN 320
310 GOTO 50
320 END
```

Referencias.

[1] Japikse D., Advances in Thermosyphon Technology in Advances in Heat Transfer, Edited by T.F.Irvine Jr. and J.P.Hartnett, Vol.9, pp.1-111, Academic Press, New York, 1973.

[2] Mertol A. and Greif R., A Review of Natural Circulation Loops., Invited Lecture at NATO Advanced Study Institute on Natural Convection: Fundamentals and Applications, Izmir Turquía, Julio 16-27, 1984. También para ser publicado en Natural Convection: Fundamentals and Applications, Eds. W.Aung, S.Kakac and R.Viskanta, Hemshire Publishing - Corporation, New York, N.Y., 1985.

[3] Zvirin Y., A Review of Natural Circulation Loops in Pressurized Water Reactors and Other Systems, Nuclear Engineering and Design, Vol.67, pp.203-225, North Holland Publishing Company.

[4] Keller B.J., Periodic Oscillations in a Model of Thermal Convection. Journal of Fluid Mechanics, Vol.26, Part.3, pp.599-606, 1966.

[5] Welander P., On the Oscilatory Instability of a Differentialy Heated Fluid Loop, Journal of Fluid Mechanics, Vol.29, Part.1, pp.17-30, 1967.

[6] Sen M. and Treviño C., Dynamic Analysis of an One Dimensional Thermosyphon Model, Journal of Thermal Engineering, Vol.3, No.1, pp.15-20,1982.

[7] Creveling H.F., De Paz J.F., Baladi J. and Schoenhals R.J., Stability Characteristics of a Single Phase Free Convection Loop, Journal of - Fluid Mechanics, Vol.67, Part.1, pp.65-84, 1975.

[8] Damerell P.S.and Schoenhals R.J., Flow in a Toroidal Thermosyphon with Angular Desplacement of Heated and Cooled Section, Transaction of the ASME, Vol.101, pp.672-676, 1979.

[9] Sen M., Ramos E. and Treviño C., On the Steady State Velocity of the Inclined Toroidal Thermosyphon. Por publicarse.

[10] Acosta R. y Manero E., Estudio Teórico Experimental sobre Termosifones en Una y Dos Fases, Tesis Profesional, Facultad de Ingeniería UNAM, 1984.

[11] Rojas J., Análisis del Comportamiento Transitorio de un Termosifón, Tesina de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería UNAM (DEPFI), Noviembre, 1980.

[12] Sen M., Ramos E. and Treviño C., The Toroidal Thermosyphon with Known Heat Flux, International Journal Heat and Mass Transfer, En prensa.

[13] Hart J., A New Analysis of the Closed Loop Thermosyphon, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.27, pp.125-136, 1984.

[14] Zvirin Y., The Effect of Dissipation on Free Convection Loops, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.22, pp.1539-1546, 1979.

[15] Bau H. and Torrance K.E., On the Effects of Viscous Dissipation and Pressure Work in Free Convection Loops, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.26, No.5, pp.727-734, 1983.

[16] Mertol A., Lavine A. and Greif R., A Study of the Variation of the Pressure in a Natural Circulation Loop, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.27, No.4, pp.626-630, 1984.

[17] Bau H. and Torrance K.E., Transient and Steady Behavior of an Open, Symetrically-Heated, Free Convection Loop, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.24, No.4, pp.597-609, 1981.

[18] Sen M. and Treviño C., One Dimensional Thermosyphon Analysis, Latin American Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.7, pp.135-150, 1983.

[19] Mertol A., Greif R. and Zvirin Y., The Transient Steady State and Stability Behavior of a Thermosyphon with Through flow, International - Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.24, No.4, pp.621-633, 1981.

[20] Mertol A., Greif R. and Giz T.A., The Transient Steady State and Stability Behavior of a Toroidal Thermosyphon with a Parallel Flow Heat Exanger, Journal Solar Energy, Vol.105, pp.58-65, 1983.

[21] Mertol A. and Greif R. Study of a Thermosyphon with a Counter Flow Heat Exanger, Proceedings of the 7th. Heat Transfer Conference, Sept.-6-10, Munich Germany, 1982.

[22] Sen M. y Treviño C., Efecto de la Conducción Longitudinal en un Termosifón Solar, Memorias de la 6a. Reunión Nacional de Energía Solar, pp.87-90, 1982.

[23] Chen K., The Influence of Loop Configuration on Closed Loop Thermosyphons, ASME Paper No.83-WA/HT-93.

[24] Kaizerman S., Wacholder E. and Elías E., Stability and Transient Behavior of a Natural Circulation Loop, ASME Paper No.81-WA/HT-11, 1981.

[24.a] Wachholder E., Kaiserman S. and Elias E., Numerical Analysis of the Stability and Transient Behavior of Natural Convection Loops, International Journal Engineering Sci., Vol.20, No.11, pp.1235-1254, 1982.

[25] Ramos E., Sen M. and Treviño C., Chaotic Behavior in Convective Flows, Segunda Escuela Mexicana de Física Estadística, Oaxtepec Morelos, - México 1983.

[26] Ramos E., Sen M. and Treviño C., A Steady State Analysis for Variable Area One and Two Phase Thermosyphon Loops, Por publicarse.

[27] Lapin Y.D., Thermal Engineering (USSR), Vol.9, No.16, pp.94-97, 1969.

[28] Morris W.D. Heat Transfer Characteristics of a Rotating Thermosyphon, Ph. D. Thesis, Universidad de Bales, Swansea, 1964.

[29] Sen M. And Fernández J.L., One Dimensional Modeling of Multiple Loop Thermosyphons, International Journal of Heat and Mass Transfer, Por publicarse.

[30] Leslie F.M., Free Convection on the Tilted Open Thermosyphon, Journal of Fluid Mechanics, Vol.7, Part.1, pp. 246-256, 1959.

[31] Martin B.W. and Lockwood F.C., Entry Effects in the Open Thermosyphon, Journal of Fluid Mechanics, Vol.19, Part.2, pp.115-127,1963.

[32] Torrance K.E.,Open Loop Thermosyphons with Geological Applications, Journal of Heat Transfer, Vol.101, pp.677-683, 1979.

[33] Bau H. and Torrance K.E., Transient and Steady Behavior of an Open Simetrically Heated Free Convection Loop, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.24, No.4, pp.597-609, 1981.

[34] Gupta G.L. and Garg H.P., System Design in Solar Water-Heaters with Natural Circulation, Solar Energy, Vol.12, pp.163-182, 1968.

[35] Ong K.S., A Finite Difference Method to Evaluate the Thermal Performance of a Solar Water Heater, Solar Energy, Vol.16, pp.183-191, 1975.

[36] Morrison G.L. and Ranatunga D.B.J., Thermosyphon Circulation in Solar Colectors, Solar Energy, Vol.24, pp.191-198, 1980.

[37] Huang B.J., Similarity Theory of Solar Water Heater with Natural Circulation, Solar Energy, Vol.25, pp.105-116,1980.

[38] Mertol A., Place W., Webster P. and Greif R., Detailed Model Analysis of Liquid Solar Thermosyphons with Heat Exangers, Solar Energy, Vol.27, No.5, pp.367-386, 1981.

[39] Agrawal A.R., Madni I.R., Guppy J.G. and Weaner III W.L., Dynamic Simulation of LMFBR Plant Under Natural Circulation, Transaction of the ASME, Vol.103, pp.312-318, 1981.

[40] Zvirin Y., Jenck III P.R., Sullivan C.W. and Duffey R.B., Experimental and Analitical Investigation of a Natural Circulation System with Parallel Loops, Journal of Heat Transfer, Vol.103, pp.645-652, 1981.

[41] Britt T. and Wood D., Free Convection in a Partially Submerged Fluid Loop, ASME Paper No.83-HT-67, 1983.

[42] Ranganathan P., Vafa Z., Schoenhals R.J. and Guillelano F.N., An Experimental and Analytical Study of Thermosyphon Type Thermal Energy Storage System, Proceedings of 7th., International Heat Transfer Conference, Munich Germany, Vol.6, - pp.479-484, 1982.

[43] Young M.F. and Bergquam J.B., Performance Characteristics of a Thermosyphon Solar Domestic Hot Water Systems, Journal Solar Energy Engineering, Vol.103, pp.193-200, 1981.

[44] Zvirin Y., Shitzer A. and Grossman G., The Natural Circulation Solar Heater Models with Linear and Non Linear Temperature Distributions, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.20, pp.997-999, 1977.

[45] Shitzer A., Kalmanoviz D., Zvirin Y. and Grossman G., Experiments with a Flat Plate Solar Water Heating System in Thermosyphonic Flow, Solar Energy, Vol.22, pp.27-35, 1979.

[46] Gruszczynski M.J. and Viskanta R., Heat Transfer from a Vertical Tube Bundle Under Natural Circulation Conditions, Proceedings of ASME-JSME Thermal Engineering, Conference, Honolulu, pp.403-410, 1983.

[47] Orlando A.F., Magnoli D. and Goldstein Jr. L., Thermosyphon Solar Water Heating System Under Brasilian Conditions, Proceedings of 13th. Intersociety Engineering Conversion Engineering, Conference, San Diego California, Vol.2, pp. 1628-1633, 1978.

[48] Grand D., Natural Convection Cooling in Nuclear Reactor Safety Heat Transfer, Edited by Owen C.Jones Jr., pp.729-750, Hemisphere Publishing Corporation 1983.