METODO ITERATIVO PARA EL TRAZO DE LA LINEA DE SATURACION EN CORTINAS DE TIERRA

Tésis que para obtener el grado de:

MAESTRO EN INGENIERIA

presenta el Ing. Alberto Moreno Bonett

A MI MADRE

INDICE

Introducción.- La solución teórica del problema de la filtración en una cortina, como sabemos, se basa en las siguientes hipótesis:

a).- La cortina de tierra constituye un medio permeble homogéneo e isótropo o bien está compuesta de estratos homogéneos bien definidos de manera que puedan distinguirse permebilidades distintas en dos direcciones principales.

b).- La cortina no sufre deformaciones debidas a la acción del agua infiltrada o a efectos de fuerzas exteriores.

c).- Los efectos producidos por fuerzas electroquímicas o capilares son despreciables.

d).- El flujo de filtración a través de la cortina constituye un caso de flujo plano.

Las hipótesis anteriores pueden ocasionar que los resultados obtenidos de la investigación y la realidad difieran en forma apreciable ya que, por ejemplo, detalles geológicos aparentemente sin importancia pueden llegar a ejercer una influencia decisiva.

Sabemos tambien que, en contra posición con lo que acontece en la mayoría de los problemas de filtración en donde se conocen las condiciones de frontera, en el caso del flujo a través de cortinas, el problema principal es la determinación de la frontera superior llamada linea de saturación, la cual debe determinarse como primer paso de lasolución del problema. El objeto de estatésis es llegar a ladeterminación correcta de la linea de saturación mediante un proceso iterativo que se expondrá posteriormente y que se basa por una parte en el método de relajaciones para resolver la ecuación de Laplace y fundamentalmente en larepresentación hodográfica del escurrimiento.

La ley de D'arcy.- La ecuación de Navier-Stokes[+]

$$\varrho \bar{a} = \varrho \bar{F} - \text{grad } p - \mu \text{ rot rot } \bar{V} \quad (1)$$

en el caso de flujos de filtración puede, simplificarse en la

---

+ Levi E. 1961 Mecánica de Líquidos p. 25

forma que sigue:

a).- Debido a la lentitud y uniformidad del fenómeno podemos despreciar a las aceleraciones esto es suponer: $\bar{a} = 0$

b).- Las fuerzas másicas $\bar{F}$ admiten potencial siendo éste proporcional a la elevación "y" esto es: $\bar{F} = -\operatorname{grad} gy$.

De esta manera la ecuación (1) puede escribirse:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + y\right) = -\frac{\mu}{\gamma}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{V}$$

al tomar la dibergencia de ambos miembros resulta:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + y\right) = 0 \qquad (2)$$

la expresión (2) debe verificarse simultáneamente con la ecuación de continuidad $\operatorname{div}\bar{V} = 0$ y consecuentemente podemos escribir:

$$\operatorname{div}\bar{V} = -k\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + y\right)$$

una solución de esta ecuación está dada por:

$$\bar{V} = -k\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + y\right) \qquad (3)$$

en donde k es un coeficiente llamado de permeabilidad que involucra tanto las caŕacteristicas físicas y granulométricas del medio como las características viscosas del fluido que le atraviesa.

Si hacemos $\frac{p}{\gamma} + y = h$, las expresiones (2) y (3) resultan respectivamente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

$$\bar{V} = -k\operatorname{grad} h = -k\frac{dh}{ds} \qquad (5)$$

en donde el sistema de referencia está orientado como se muestra en la figura 1 y s designa a la variable longitud de arco.

La ecuación (5), o su equivalente (3), es la expresión analítica de la ley de D'arcy y rige a los movimientos de filtración en medios permeables homogéneos e isótropos; vemos que ellos pued n considerarse como escurrimientos potenciales, siendo el potencial de velocidades:

$$\phi = -kh = -k\left(\frac{p}{\gamma} + y\right) \qquad (6)$$

de esta manera las componentes u, v de la velocidad $\overline{V}$ en cada punto y referidas al sistema cartesiano mostrado en la figura 1 serán:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{dh}{dx} \qquad (7)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{dh}{dy} \qquad (8)$$

Las curvas $\phi =$ cte se llaman lineas equipotenciales y son perpendiculares en todos sus puntos a la dirección del flujo+; como además de acuerdo con (4) y (6), ϕ es una función armónica, debe admitir una función ψ de corriente tal que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (9)$$

A una linea $\psi =$ cte se le llama linea de corriente y constituye junto con las equipotenciales una red cuadrática llamada red de flujo.

De acuerdo con lo anterior vemos que el trazo de una red de flujo puede ser determinado por la integración de la ecuación de La-Place, que es independiente de k. Para este fin es indispendable conocer las condiciones de frontera.

Condiciones de frontera.- Para la solución del problema que nos interesa y que se muestra esquemáticamente en lafigura-1, podemos considerar las siguientes condiciones de frontera sobre las cuales se insistirá posteriormente.

1).- La frontera AD fija e impermeable a lo largo de la cual existe flujo es una linea de corriente y la componente de la velocidad normal a AD debe ser nula ; consecuentemente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

en donde n es normal a la frontera.

+Levi E. Mecánica de líquidos p. 84

2).- El talud AB aguas arriba es una superficie equipotencial ya que la suma : $y + \frac{p}{\gamma}$ permanece constante, lo cual implica que sobre AB se tenga:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

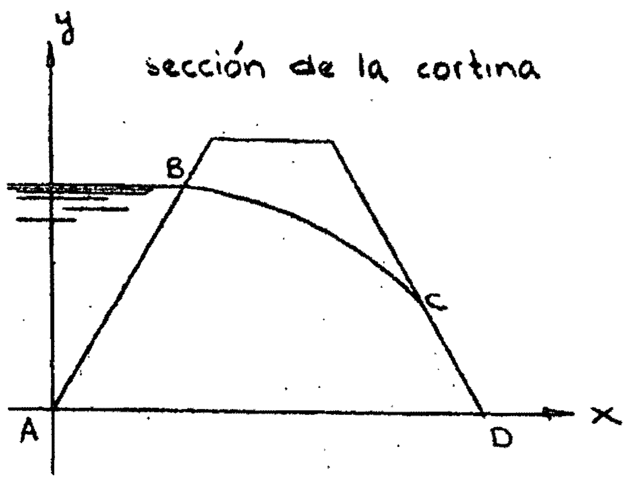


Fig. 1

en donde s y n son respectivamente tangente y normal a la frontera.

3).- A lo largo de la linea de saturación BC, en donde la presión es la atmosférica se tiene $p = p_{at.} = cte$ y podemos escribir:

$$h = \frac{p}{\gamma} + y = y + cte.$$

$$d\phi = -d(kh) = -k\,dy$$

lo cual muestra que la linea de saturación goza de la propiedad de que la caída de potencial a lo largo de ella es proporcional a la caída de nivel.

Las condiciones de frontera en este caso pueden ser:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

ya que la linea de saturación es una linea de corriente.

4).- El talud CD aguas abajo de la cortina en contacto -- con el aire no es ni linea de corriente ni equipotencial pero se acostumbra admitir que cumple con la mismacondición mencionada en el inciso anterior en lo referente a la proporcionalidad entre caídas de potencial y caídas de nivel ya que, a lo largo de CD, la presión permanece constante e igual a la atmosférica.

Introducción.- Hemos visto en el capítulo anterior que el escurrimiento en medio permeables homogéneos e isótropos está regido por una ecuación diferencial de Laplace que en nuestro caso es válida en todos los puntos interiores de la región cerrada ABCD mostrada en la figura 1.

Para obtener una solución aproximada reemplazamos la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias finitas que, para nuestro caso en que intervienen dos variables independientes, es válida en los n nudos de unared que cubre la región R estudiada y en la cual las dos variables son consideradas como coordenadas. Ello origina un sistema de n ecuaciones algebraicas que involucran los valores de la variable dependiente en los n nudos de la red. La solución de este sistema que puede realizarse mediante un proceso iterativo, que se describirá posteriormente, conduce a los valores aproximados de la variable dependiente asociados a cada uno de los n nudos antes dichos.

Desde luego en lugar de obtenerse la solución continua de la ecuación diferencial propuesta, definida en todo laregión R, encontramos valores aproximados de la variable dependiente en un conjunto de puntos aislados que nos permiten el trazo completo de la red de flujo.

Vemos lanecesidad de obtener el desarrollo en diferencias finitas de la ecuación de Laplace para diversas condiciones de frontera.

Desarrollos en diferencias finitas:

Ecuaciones diferenciales ordinarias.- Supongamos que se desea obtener el desarrollo en diferencias finitas, calculado en el punto x_i, de la expresión:

$$\sum_{\nu=0}^{i} P_\nu(x) \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}$$

la serie de Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \cdots$$

aplicada a $f(x_i+\varrho h)$ con $\varrho = -l,\dots,m$ conduce a:

$$\sum_{\nu=0}^{j} p_\nu(x_i) f^{(\nu)}(x_i) + \sum_{\nu=j+1}^{n} p_\nu(x_i) f^{(\nu)}(x_i) + \cdots = \sum_{\varrho=-l}^{m} c_\varrho f(x_i+\varrho h) \qquad (1)$$

en donde $\varrho = -l, -l+1, \dots, m-1, m$ con l y m enteros, h es el intervalo de diferencias finitas mostrado en la figura 2, y $f^{(\nu)}(x_i)$ – representa a $\left(d^\nu f(x)/dx^\nu\right)_{x=x_i}$.

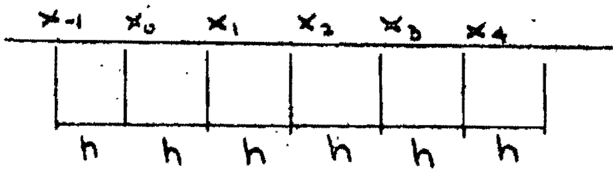


Fig. 2

Si en (1) los coeficientes $p_\nu(x_i)$ son constantes para $\nu = 0, 1, \dots, j$ y valen cero para $\nu = j+1, j+2, \dots, j+r$ y los enteros j y r son tales que $l+m=j+r$ entonces se dice que el desarrollo:

$$\sum_{\nu=0}^{j} p_\nu(x_i) f^{(\nu)}(x_i) = \sum_{\varrho=-l}^{m} c_\varrho f(x_i+\varrho h) \qquad (2)$$

es correcto hasta el $(k+r)$ésimo orden. Para que esto se verifique se requiere que+:

$$\begin{aligned} p_\nu(x_i)\frac{\nu!}{h^\nu} &= \sum_{\varrho=-l}^{m} c_\varrho \varrho^\nu \qquad \nu = 0,1,\dots,j \\ 0 &= \sum_{\varrho=-l}^{m} c_\varrho \varrho^\nu \qquad \nu = j+1,\dots,j+r \end{aligned} \qquad (3)$$

Las expresiones (3) nos permiten obtener el desarrollo – en diferencias finitas (correcto hasta el orden que se desee) para cualquier derivada o suma de derivadas convenientemente multiplicadas por los coeficientes $p_\nu(x)$.

Se ilustrará el procedimiento con el siguiente ejemplo:

Se desea obtener un desarrollo de tercer orden para $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ calculado en el punto $x=x_0$ en función de los valores adquiridos por $f(x)$ en los puntos $x = x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ y que designaremos con $f_{-1}, f_0, f_1, \dots$

En este caso se tiene:

$k=2$, $p_2=1$, $p_\nu=0$ para $\nu=0,1,3$, $r=1$, $l=1$, $m=2$, $l+m = k+r=3$

y la aplicación de (3) conduce a:

+ Collatz L. Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung Akad. Verlag. Leipzig p. 269

$$c_{-1} + c_0 + c_1 + c_2 = 0$$
$$-c_{-1} + c_1 + 2c_2 = 0$$
$$c_{-1} + c_1 + 4c_2 = \frac{2!}{h^2}$$
$$-c_{-1} + c_1 + 8c_2 = 0$$

cuya solución es:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{h^2}, \quad c_0 = -\frac{2!}{h^2}$$

reemplazando en (2) resulta:

$$h^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 = f_{-1} - 2f_0 + f_1 \qquad (5)$$

que es el desarrollo que buscamos.

Ecuaciones diferenciales parciales.- El proceso para obtener desarrollos en diferencias finitas para derivadas parciales es totalmente análogo al expuesto en el inciso anterior.

Consideremos una región R del plano xy subdividida en cuadrados por medio de una red de abertura h constituida por dos familias de rectas respectivamente paralelas a los ejes coordenados y sea $w(x,y)$ una función continua definida en la región R antes dicha. Consideremos un nudo o como el mostrado en la figura 3, el valor de $w(x,y)$ asociado a dicho punto lo designaremos con w_0; con la anotación anterior y refiriéndonos a la figura 3 se tiene:

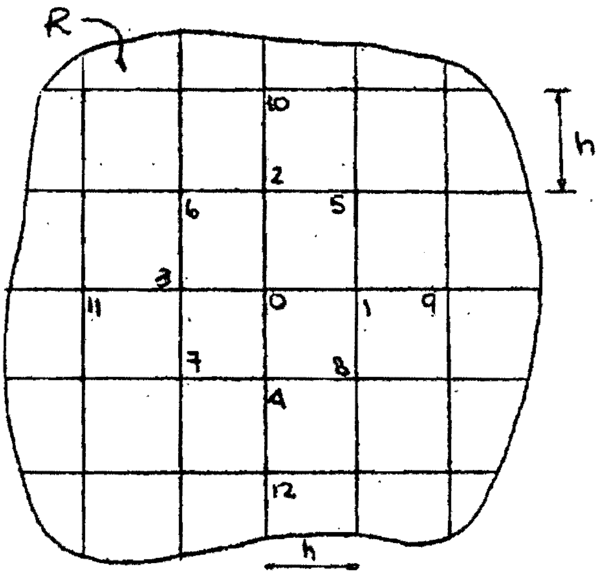


Fig. 3

$$2h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = w_1 - w_3$$
$$2h\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = w_2 - w_4$$
$$h^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = w_1 - 2w_0 + w_3 \qquad (6)$$
$$h^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 = w_2 - 2w_0 + w_4$$

En ocasiones resulta mas cómodo manejar los operadores[+] E_x^m

+ Bickley W. G. Finite-difference formulae for the square lattice Q. Jour. Mech. and Appl. Math. 1 p. 35-42

E_y^n que se definen en la forma que sigue:

$$E_x^1 \, w_{0,0} = w_{1,0}$$

$$E_y^1 \, w_{0,0} = w_{0,1}$$

y en general:

$$E_x^m E_y^n \, w_{0,0} = w_{m,n} \tag{7}$$

en donde $w_{m,n}$ es el valor $w(x=x_0 + mh,\ y=y_0 + nh)$. Así el desarrollo en diferencias finitas de $\partial^3 w/\partial x^2 \partial y$, en el punto o, puede escribirse de acuerdo con (6) y (7) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2h}(E_y^1 - E_y^{-1})\frac{1}{h^2}(E_x^{-1} - 2E_x^0 + E_x^1)w_{0,0} = \\ &= \frac{1}{2h^3}(E_x^{-1}E_y^1 - 2E_x^0 E_y^1 + E_x^1 E_y^1 - E_x^{-1}E_y^{-1} + 2E_x^0 E_y^{-1} - \\ &\qquad E_x^1 E_y^{-1})\, w_{0,0} = \\ &= \frac{1}{2h^3}(w_{-1,1} - 2w_{0,1} + w_{1,1} - w_{-1,-1} + 2w_{0,-1} - w_{1,-1})\end{aligned}$$

que utilizando la notación de la figura 3 resulta:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h^3}(w_6 - 2w_2 + w_5 - w_7 + 2w_4 - w_8) \tag{8}$$

La ecuación de Laplace.- Vemos que la ecuación de Laplace $\nabla^2 w = 0$ desarrollada en diferencias finitas en el punto o de la figura 3 conduce, de acuerdo con (6), a la expresión:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_0 = 0 \tag{9}$$

este desarrollo se aplica a cada uno de los nudos de la red trazada en la región R, generando así un sistema de ecuaciones algebraicas.

Para puntos cercanos a la frontera, como se muestra en la figura 4, es necesario eliminar los valores exteriores de w que exigiría la aplicación de (9), mediante la obtención de desarrollos en diferencias finitas que tengan en cuenta simultáneamente a las características geométricas de las estrellas asociadas a dichos puntos singulares y a las condiciones de frontera.

Una condición muy general que podría exigirse en la frontera es:

$$a(x,y)\frac{\partial w}{\partial s} + b(x,y)\frac{\partial w}{\partial n} + c(x,y)\,w = f(s)$$

en donde $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial n}$ son las derivadas según la tangente y la -

normal a la frontera, s es la longitud de arco a lo largo de la frontera y $a(x,y)$, $b(x,y)$ y $f(s)$ son funciones conocidas.

Un ejemplo particular es el asociado con el llamado problema de Neumann que consiste en encontrar una función armónica en el interior de una región determinada y que en su frontera satisface a la condición:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = f(x,y)$$

siendo $f(x,y)$ conocida. Una condición ligeramente mas compleja es la especificación de w en una porción de la frontera y de $\frac{\partial w}{\partial n}$ en el resto.+

Describiremos brevemente dos procedimientos a seguir en el tratamiento de estos puntos singulares:

a).- En este caso la ecuación diferencial propuesta es desarrollada en diferencias finitas en cada nudo de la red. - Para un punto como el o de la figura 4 es necesario modificar el desarrollo (9) tomando en cuenta simultáneamente las condiciones de frontera y los espaciamientos irregulares OB y OC.

b).- En este proceso la ecuación diferencial solo se desarrolla en diferencias finitas en aquellos nudos interiores - en los que puede aplicarse la expresión (9) sin ninguna alteración, ello conduce a un anillo exterior de valores de w que no cumplen con la ecuación diferencial pero satisfacen la aproximación en diferencias finitas de las condiciones de frontera.

Proceso a.- Para ilustrar los procesos antes descritos obtendremos el desarrollo en diferencias finitas de $\nabla^2 w=0$ en el punto o mostrado en la figura 4. Supondremos como primer caso que se conocen los valores de w en la frontera.

La serie de Taylor:

$$w = w_0 + x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 + \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 + xy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 + \frac{y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 + \cdots \quad (10)$$

aplicada a los puntos C, B, 4, y 3 cuyas coordenadas respectivas son $(0,jh)$, $(kh,0)$, $(0,-h)$, y $(-h,0)$; conducen a cuatro ecuaciones en la primera y segunda derivadas de w en o. Al

---

+ Fox L. Solution by relaxation methods of plane potential problems whith mixed boundary conditions Q. Appl. Maths. II p. 251

resolver este sistema para las segundas derivadas y al substituir estas en $\nabla^2 w = 0$ se llega a:

$$\frac{2}{k(1+k)}\,w_B + \frac{2}{j(1+j)}\,w_C + \frac{2}{1+k}\,w_3 + \frac{2}{1+j}\,w_4 - \left(\frac{2}{k} + \frac{2}{j}\right)w_0 = 0 \qquad (11)$$

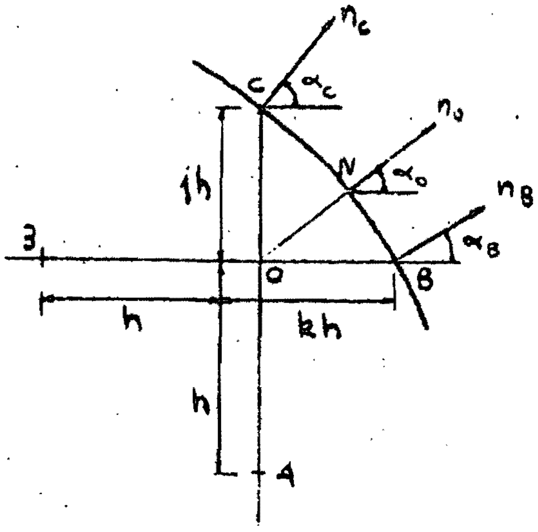


Fig. 4

Como segundo caso indicaremos brevemente, cómo se trataría el mismo punto si sobre la frontera se especificase el valor de

Sabemos que:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad (11)$$

además al derivar (10) se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 + x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 + y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \cdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 + x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 + \cdots \qquad (12)$$

al emplear (11) y (12) podemos expresar las derivadas normales en B, C y N en función de la primera y segunda derivadas de w en o y de magnitudes geométricas que pueden obtenerse de la figura. Así para el punto C se tiene:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_C = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 + jh\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_0\right]\cos\alpha_C + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 + jh\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0\right]\mathrm{sen}\,\alpha_C + \cdots \qquad (13)$$

que en unión con las dos expresiones similares para $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_B$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_N$ mas las series de Taylor para w_3 y w_4 constituyen un sistema de cinco ecuaciones simultáneas en la primera y segunda derivadas en o, las cuales pueden resolverse para las segundas derivadas y formar así la expresión correspondiente al desarrollo de la ecuación de Laplace.

Proceso b.- Este proceso de menor precisión tiene la ventaja de su gran sencillez. Para ilustrarlo supongamos que en la figura 5 se especifica el valor de $\frac{\partial w}{\partial n}$ en la frontera

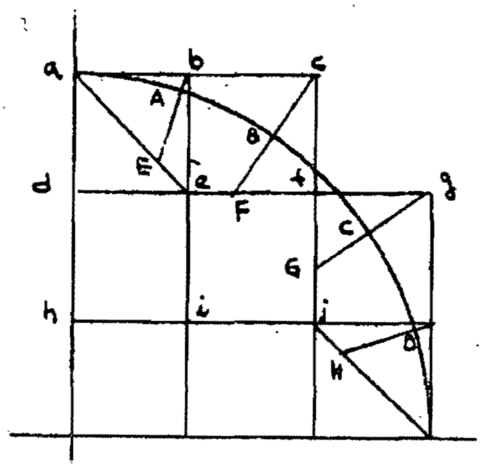


Fig. 5

el desarrollo de la ecuación de Laplace en el punto e de la figura resulta:

$$w_b + w_i + w_d + w_f - 4w_e = 0 \qquad (14)$$

que incluye el valor de w en el punto ficticio b.

Si utilizamos interpolación lineal e introducimos el punto E mostrado en la figura (Eb es normal a la frontera en A) queda:

$$\overline{ae}\, w_E = \overline{Ee}\, w_a + \overline{ae}\, w_H \qquad (15)$$

además y con el mismo orden de aproximación se tiene:

$$w_E = w_b - \overline{Eb}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_A \qquad (16)$$

eliminando w_E entre (15) y (16) resulta:

$$w_b = \frac{\overline{aE}}{\overline{ae}}\, w_e + \frac{\overline{Ee}}{\overline{ae}}\, w_a + \overline{Eb}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_A \qquad (17)$$

al remplazar en (14) se obtiene:

$$w_d + w_i + w_f + \frac{\overline{Fe}}{\overline{ae}}\, w_a + \overline{Eb}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_A - \left(4 - \frac{\overline{aE}}{\overline{ae}}\right) w_e = 0 \qquad (18)$$

que es el desarrollo buscado.

Un razonamiento análogo conduce, para el dearrollo de la ecuación de Laplace en el punto f, a la expresión:

$$\left(1 + \frac{\overline{Ff}}{\overline{ef}}\right) w_e + \left(1 + \frac{\overline{Gf}}{\overline{jf}}\right) w_j + \overline{Fc}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_B + \overline{Gg}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_C - \left(4 - \frac{\overline{eF}}{\overline{ef}} - \frac{\overline{jG}}{\overline{jF}}\right) w_f = 0 \qquad (19)$$

como casos particulares de (19) se tienen los siguientes:

En el caso de un punto singular como o de la figura 6 en el cual se conozca el valor de la derivada en una de las direcciones de la red, por ejemplo $G_{o,x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_o$ el desarrollo de la ecuación de Laplace para el punto o es:

$$w_1 + 2w_3 + w_4 - 4w_o + 2hG_o = 0 \qquad (20)$$

si se tuviese $G_o = 0$ resulta:

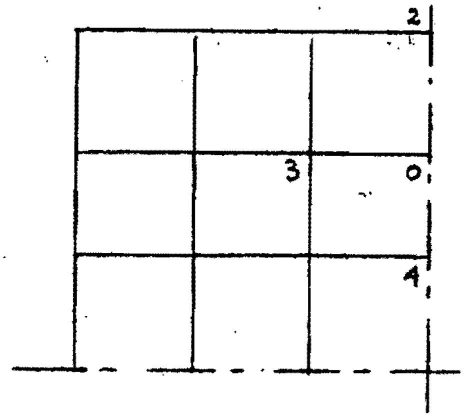


Fig. 6

$$w_2 + 2w_3 + w_4 - 4w_o = 0 \qquad (21)$$

lo que sería equivalente a que la línea 2-4 fuese un eje de simetría.+

Si se conociera además $G_{o,y} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_o$ el desarrollo de la ecuación de Laplace resultaría:

$$2w_3 + 2w_4 - 4w_o + 2G_{ox} + 2G_{oy} = 0 \qquad (22)$$

y si $G_{ox} = G_{oy} = 0$ queda:

$$2w_3 + 2w_4 - 4w_o = 0$$

lo cual equivale a que las líneas 1-3 y 2-4 fueran ejes de simetría.

Redes graduadas.- Frecuentemente se requiere mayor precisión en una parte de la región estudiada lo cual puede lograrse mediante el paso de una red gruesa a una red fina. Esta última puede tener una amplitud que sea la mitad de la correspondiente a la primera (figura 7) y consecuentemente para realizar la transición de la red gruesa a la red fina, se requiere una red intermedia de

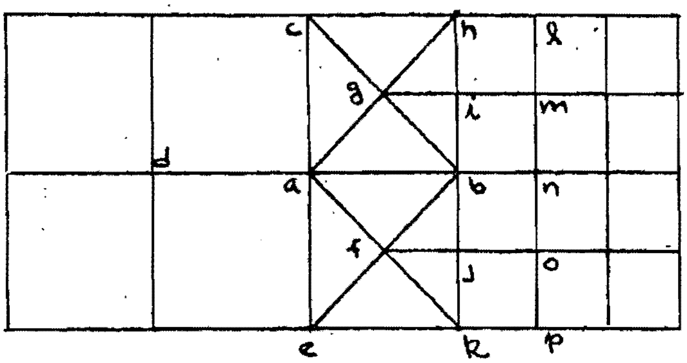


Fig. 7

amplitud $h/\sqrt{2}$ orientada a 45° con respecto a la red inicial. En la figura 7 se muestra la transición requerida para el paso de una red a otra, el desarrollo de la ecuación de Laplace aplicado a puntos en la zona de transición conduce; para los puntos: a, g, i:- a las siguientes expresiones respectivas:

$$w_b + w_c + w_d + w_e - 4w_a = 0$$
$$w_a + w_b + w_h + w_c - 4w_g = 0 \qquad (23)$$
$$w_m + w_h + w_g + w_b - 4w_i = 0$$

y a ecuaciones análogas para los restantes puntos de la red fina.

Observamos que, con el uso de redes graduadas, el número de incógnitas puede reducirse considerablemente; al aumentar la precisión solo en aquellas zonas en donde sea indispensable hacer-

---

+ Allen 1954 Relaxation Methods Mc Graw Hill p. 72

lo.

Solución de la ecuación de Laplace por el método de relajaciones.- Supongamos para ilustrar el desarrollo que en la región R mostrada en la figura 3 secdesea encontrar, en los nudos de la red trazada, los valores de w que satisfagan la ecuación de Laplace; supondremos como condición que en la frontera se conocen los valores de w o de $\frac{\partial w}{\partial n}$.

Al aplicar los desarrollos de la ecuación de Laplace, obtenidos en el inciso anterior, a cada uno de los n nudos de la red se llega a un sistema de ecuaciones con n incógnitas que en general puede escribirse en la forma:

$$
\begin{aligned}
-w_1 + b_{12} w_2 + b_{13} w_3 + \dots + b_{1n} w_n + k_1 &= 0 \\
b_{21} w_1 - w_2 + b_{23} w_3 + \dots + b_{2n} w_n + k_2 &= 0 \qquad (24) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
b_{n1} w_1 + b_{n2} w_2 + b_{n3} w_3 + \dots + b_{n\,n-1} w_{n-1} - w_n + k_n &= 0
\end{aligned}
$$

en donde el número máximo de coeficientes b_{ij} no nulos en cada ecuación es cuatro.

Indiquemos con R_i (residuos) al valor adquirido por el primer miembro de la i ésima ecuación para un conjunto supuesto de valores iniciales $w_j^{(0)}$, esto es:

$$
\begin{aligned}
-w_1^{(0)} + b_{12} w_2^{(0)} + b_{13} w_3^{(0)} + \dots + b_{1n} w_n^{(0)} + k_1 &= R_1 \\
b_{21} w_1^{(0)} - w_2^{(0)} + b_{23} w_3^{(0)} + \dots + b_{2n} w_n^{(0)} + k_2 &= R_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
b_{n1} w_1^{(0)} + b_{n2} w_2^{(0)} + \dots + b_{n\,n-1} w_{n-1}^{(0)} - w_n^{(0)} + k_n &= R_n
\end{aligned}
$$

El proceso de relajación consiste en cambiar los valores iniciales de las incógnitas, una o más a la vez, hasta que todas las R sean despreciables. Con este fin nótese que, si una determinada $w_k^{(0)}$ es incrementada en δw_k, entonces R_k cambia en $-\delta w_k$ mientras los restantes R_i cambian en $b_{ik}\delta w_k$.

Para reducir una R_i, digamos R_k, a cero; incrementamos $w_k^{(0)}$ en $\delta w_k = R_k$; hecho esto los otros R_i también cambiarán y deberán ser reducidos a cero mediante convenientes incrementos δw_j. Desde luego existen diversos medios+ para acelerar la-

---

+ Southwell R. V. 1946 Relaxation methods in theoretical physics Oxford University Press convergencia del proceso.

Cálculo de primeras derivadas parciales en la frontera.- Una vez encontrados los valores de w en todos los nudos de la red es necesario, para la aplicación del método que se propondrá posteriormente, calcular $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ en los puntos de intersección de la frontera y cuerdas de la red.

En la figura 8 se muestra un caso típico en donde la frontera es cortada en B por una cuerda horizontal de la red, o y 3

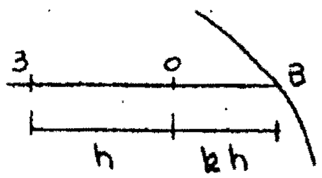


Fig. 8

són los nudos adyacentes a la frontera y alojados en dicha cuerda.

Según el método de escrito en la hoja 9 se obtiene, omitiendo términos del orden de h^3:

$$h^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_o = \frac{2w_B}{k(1+k)} + \frac{2w_3}{1+k} - \frac{2w_o}{k}$$

En la misma forma puede hacerse ver que:

$$h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_o = \frac{w_B}{k(1+k)} - \frac{k}{1+k}w_3 - \frac{1-k}{k}w_o$$

y consecuentemente:

$$h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_B = h\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_o + kh^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_o = \frac{1+2k}{k(1+k)}w_B + \frac{k}{1+k}w_3 - \frac{1+k}{k}w_o$$

Esta expresión y otra análoga para el sentido "y" nos permiten calcular el valor de las primeras parciales en puntos alojados en la frontera.

Existencia de la solución.- En nuestro problema específico gobernado por la ecuación de Laplace podemos efectuar el siguiente razonamiento:

Como hemos visto, las ecuaciones algebraicas por resolver exigen que el valor de w en los nudos de la red estén dados por el promedio de los ~~valores en los~~ cuatro puntos adyacentes; ello implica que los valores de w en puntos interiores de la red no pueden ser ni máximos ni mínimos relativos y consecuentemente los máximos o mínimos solo se presentan en puntos alojados en la frontera. Supongamos ahora que w es nula en todos los puntos de una frontera cerrada; luego, de acuerdo con el resultado anterior, w debe valer cero en todos los puntos interiores de la red.

Pero si un sistema homogéneo de n ecuaciones algebraicas - con n incógnitas solo posee la solución trivial entonces el sistema de ecuaciones no homogéneo obtenido al introducir en el anterior segundos miembros no nulos siempre posee una y solo una - solución[+], esto es, la solución aproximada de nuestro problema - es única.

Cuando se utiliza un método iterativo para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas generado por la ecuación en diferencias finitas se ocurre pensar si el método iterativo en sí -- converge a la solución del sistema de ecuaciones; sin embargo, - ello no se puede discutir puesto que no se especifica una tecnica explícita a seguir pero, puesto que el sistema de ecuaciones- posee una solución, esa solución puede encontrarse por "algún" - proceso de relajación.

Aplicación.- En la aplicación del método al caso particu-- lar mostrado en la figura 9 distinguimos los siguientes incisos:

a).- La línea de saturación BC se trazó tomando como base- las tablas propuestas por A. Casagrande[++] y se ha indicado con -- trazos punteados la línea de saturación utilizada en un ensayo - anterior.

b).- Para obtener los valor de ϕ y consecuentemente las líneas equipotenciales se eligió una red de relajación cuadrada, - graduada en las cercanías de la línea de saturación y haciendo - coincidir la base AD de la cortina con cuerdas de la red.

La línea AB (paramento aguas arriba de la cortina) es una - equipotencial de valor $\phi = kh = 23170$ elegido arbitrariamente.

En la línea de saturación BC y en la línea CD (paramento -- aguas abajo de la cortina) se conoce la caída de potencial ya -- que, según los incisos c,d de la hoja 4, este es proporcional a - "y". Los valores de asociados a puntos de la red sobre dichas - fronteras se encuentran indicados en la fihura 9.

La línea AD (base de la cortina) es una línea de corriente- donde se cumple $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ y como coincide con cuerdas de la red se - puede considerar como eje de simetría.

+ Hildebrand F. B. Methods of Applied Mathematics Prentice Hall 1960 p. 22

++ Creager, Justin, Hinds 1957 Engineering for Dams John Wiley V. III p. 665

De acuerdo con estas condiciones de frontera basta aplicar convenientemente los desarrollos (9), (11), (21) y (23); obtenidos anteriormente, a los nudos de la red para obtener un sistema lineal de 77 ecuaciones con 77 incógnitas; este sistema se resolvió por le método de relajaciones+ y los valores finales de ϕ aparecen indicados en la tabla 1.

c).- No obstante que este estudio está enfocado a la verificación de la línea de saturación describiremos brevemente los pasos a seguir para el trazo completo de la red de flujo sin proceder a dibujarla.

Desde luego, suponiendo que la línea de saturación BC se ha verificado según el método que se propondrá posteriormente: los valores de la función de corriente pueden calcularse a partir de los valores de ϕ antes obtenidos ya que se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

cuyos desarrollos en diferencias finitas referidos a la figura 3 son respectivamente:

$$\phi_1 - \phi_3 = \psi_2 - \psi_4$$
$$\phi_2 - \phi_4 = \psi_3 - \psi_1$$

de este modo, elegido el valor de ψ en un punto, puede determinarse en el inmediato siguiente a partir de los otros dos de ϕ.

Finalmente, conocidos los valores de ϕ y ψ, podemos trazar las líneas de corriente y las equipotenciales que constituyen la red de flujo que nos interesa.

+mayores detalles de la aplicación de este método pueden verse en:

Luna H. 1958 Estudio de las redes de flujo por el método de relajación.

Ingeniería Hidráulica en México 1961 Determinación de la red de filtración para el corazón impermeable de la presa de Malpaso, Chis.

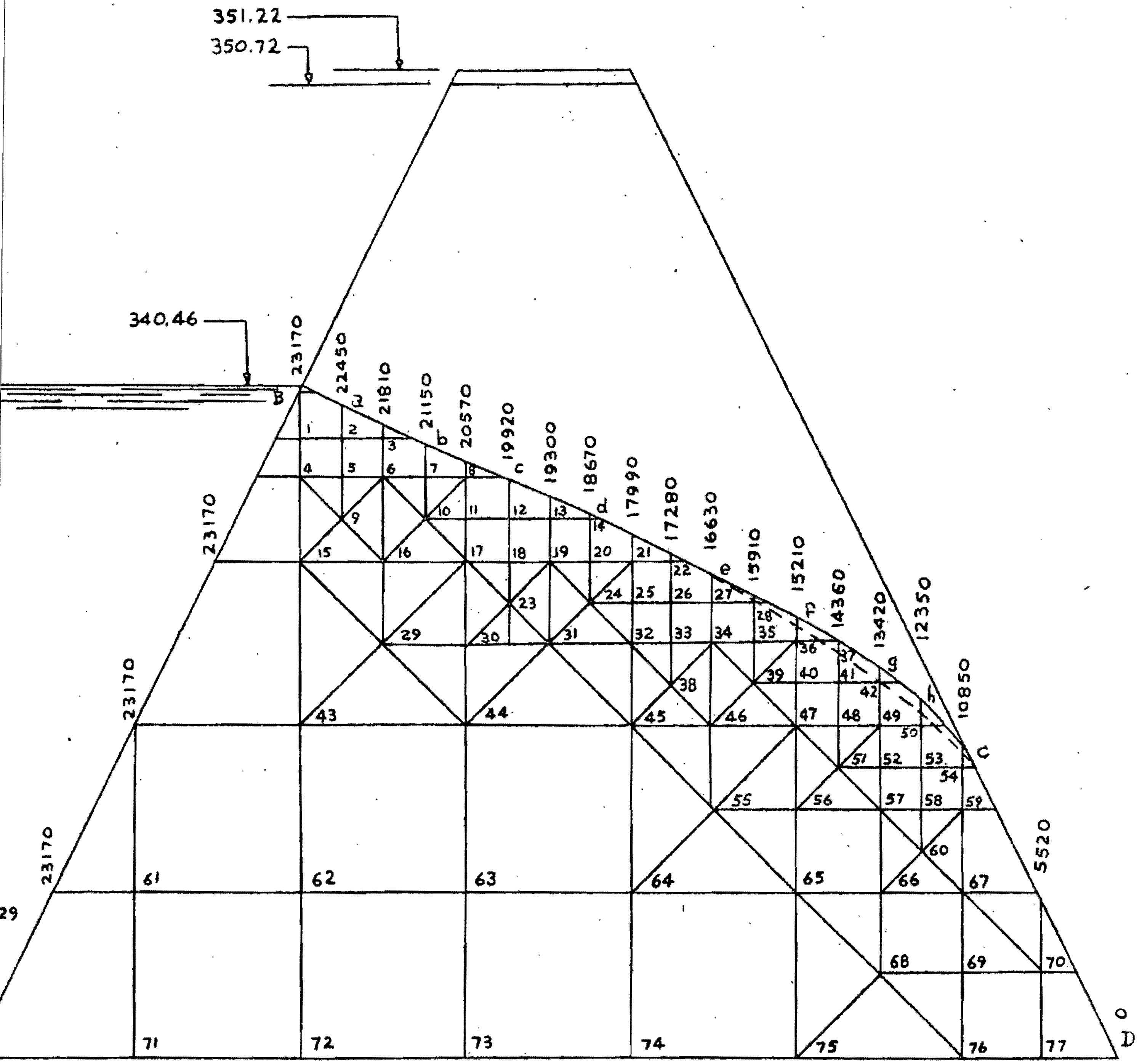

351.22
350.72
340.46
B
23170
22450
21810
21150
20570
19920
19300
18670
17990
17280
16630
15910
15210
14360
13420
12350
10850
5520
0
a
b
c
d
e
f
g
h
C
D
29
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77

FIGURA 9

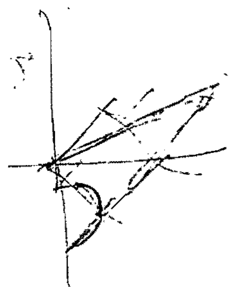
Punto	φ	Punto	φ
1	22844	40	14437
2	22306	41	13795
3	21770	42	13163
4	22639	43	21237
5	22081	44	19062
6	21544	45	16640
7	21001	46	15343
8	20481	47	13996
9	21845	48	13269
10	20780	49	12598
11	20248	50	11919
12	19720	51	12789
13	19201	52	12030
14	18668	53	11233
15	22137	54	10405
16	21077	55	14698
17	20017	56	13161
18	19488	57	11481
19	19007	58	10597
20	18396	59	9611
21	17813	60	9996
22	17229	61	22413
23	19227	62	20581
24	18100	63	18357
25	17515	64	15698
27	16940	65	12469
27	16399	66	10560
28	15830	67	8343
29	20615	68	9947
30	19520	69	7487
31	18382	70	4525
32	17216	71	22082
33	16627	72	20334
34	16044	73	18096
35	15455	74	15334
36	14885	75	11851
37	14291	76	7133
38	16308	77	4044
39	15068		

$\chi \quad z$

III

ξ

$\rho = x + iy$



Las hodógrafas.- En este método la idea fundamental es el considerar los tres planos siguientes:

Plano	ξ xi		$\xi = \phi + i\psi$
"	Z	(plano de flujo)	$z = x + iy$
"	W	(plano de las hodógrafas)	$w = u - iv$

en donde ϕ es el potencial de velocidades, ψ la función de corriente, x, y las coordenadas en el plano de flujo, u y v las componentes horizontal y vertical de la velocidad (ver fig. 11).

Cualquier función $\xi = \xi(z)$ que defina una transformación conforme de una figura del plano ξ a una figura del plano Z admite primera derivada:

$$\frac{d\xi}{dz} = w = \xi'(z) \tag{1}$$

que también es función de z y consecuentemente permitirá una transformación conforme del plano W al plano Z o viceversa se tendrá:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x} \tag{2}$$

$- \frac{\partial \phi}{\partial y}$

y como $z = x + iy$ resulta:

$$w = \frac{d\xi}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{3}$$

siendo ϕ y ψ respectivamente la función potencial y la función de corriente de un flujo potencial bidimensional del plano Z, la expresión (3) podrá escribirse:

$$w = u - iv$$

+ Jaeger Ch. Engineering Fluid Mechanics St. Martin's Press p. 442

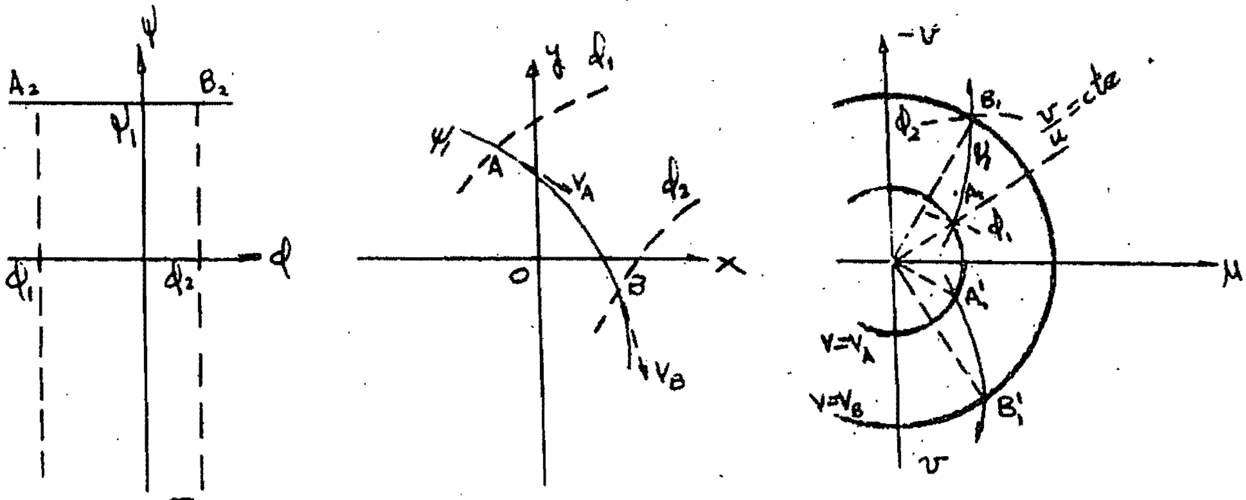


Figura 11

Excepto por el signo de v, las coordenadas (u, v) de cualquier punto en el plano W son idénticas con las componentes de la velocidad del flujo en el plano Z. Si la transformación del punto A del plano Z, conduce al punto A_1 en el plano W y si A_1' es el simétrico del punto A_1 respecto al eje de las u, entonces las coordenadas de A_1' representarán, en magnitud y dirección, a las componentes de la velocidad del punto A del plano Z: la recta OA_1' es el vector velocidad $\overline{V}_A$ del punto A. Vemos que a todo punto A del plano del flujo, en el cual el fluido tiene velocidad $\overline{V}_A$ corresponde un punto A_1 bien determinado del plano W situado de tal manera que su distancia al origen es precisamente:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \mathrm{mod}\ \overline{V}_A$$

A toda línea del plano de flujo corresponderá una línea del plano W y se dice que ésta última es la hodógrafa de la primera y que el pl no W es el plano de las hodógrafas.

En el plano de las hodógrafas, las líneas de velocidad constante en magnitud (isótacas) están representadas por círculos de centro en el origen y las líneas de igual dirección de velocidad (isóclinas) por rectas que pasan por el origen, constituyendo entre ambos una red ortogonal. Como w es función de la variable compleja z, la correspondencia entre los planos W y Z es conforme+ y consecuentemente la red constituída por las isótacas y las

+ Levi E. 1961 Matemáticas p. 71

Levi E. Mecánica de Líquidos p. 152

isóclinas en el plano Z es también una red ortogonal.

De acuerdo con (3), la relación mencionada entre w y z resulta:

$$z = \int \frac{d\xi}{w} \qquad (4)$$

cuando la relación entre z y w es mas sencilla que aquella que relaciona a z con ξ, resulta conveniente aplicar el método de las hodógrafas, ya que entonces, en base a los datod relativos a las velocidades en el plano Z se efectúa la representación hodógrafica del flujo en el plano W, de ésta se deduce la relación funcional que liga a w con ξ y reemplazando en (4) se obtiene finalmente la expresión del potencial complejo ξ, en función de z.

Desde luego, de ser posible obtener las líneas de corriente y las equipotenciales en el plano de las hodógrafas, podemos obtener sus coordenadas correspondientes en el plano Z en la forma que sigue:

$$w = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha$$

$$x = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos\alpha}{w}\,d\phi \qquad y = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{w}\,d\phi \qquad (5)$$

en donde α es el ángulo que el vector velocidad forma con la horizontal.

Condiciones de frontera.- Para exponer las condiciones de frontera consideremos una cortina ABMN permeable limitada inferiormente por un estrato impermeable AB según se muestra en la figura 12; sea CD la línea de saturación del flujo que la atravieza. En el interior de la cortina es válida la ley de D'arcy:

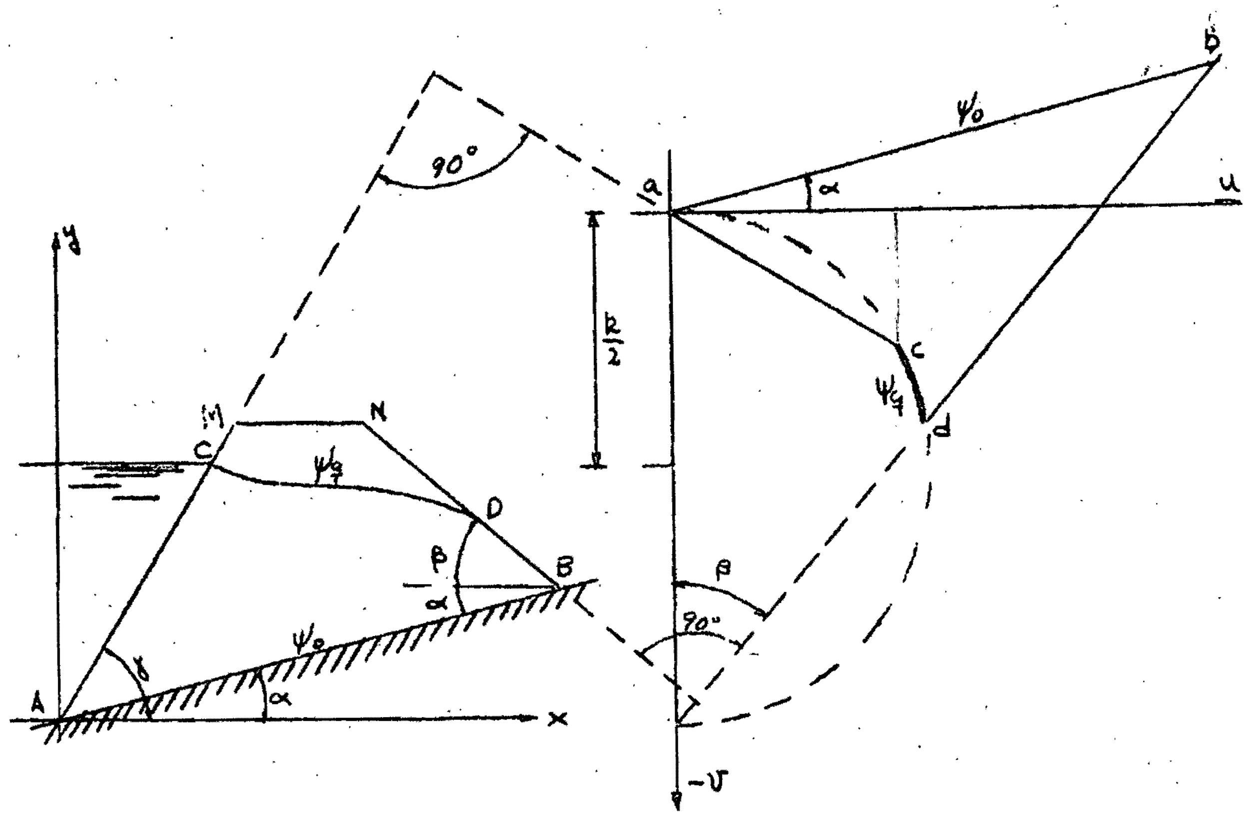
$$\overline{V} = \mathrm{grad}\,\phi$$

en donde:

$$\phi = -k(p/\gamma + y) = -kh \qquad (6)$$

estando el eje "y" orientado hacia arriba como se ve en la figura 12. Con objeto de lograr la representación hodógrafica de la frontera observemos que:

a).- El talud AC de aguas arriba es una línea equipotencial y consecuentemente las líneas de corriente le deben ser normales. Si el talud AC es recto, será una isóclina, ya que las velocidades asociadas a cada uno de sus puntos son todas pa



Plano Z *(Plano de flujo)*

Plano W *(Plano de las hodógrafas)*

Figura 12.

ralelas y por lo tanto su hodógrafa es una recta ac que pasa por el origen del plano W y es perpendicular al talud AC tal como se muestra en la figura 12.

b) El estrato impermeable AB es una línea de corriente (hoja 4) y a lo largo de la misma debe cumplirse:

$$\psi = cte. \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

si el estrato AB es una frontera plana que forme un ángulo α *con el eje x deberá ser:*

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial s}\cos\alpha \quad ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial s}\operatorname{sen}\alpha$$

es decir:

$$\frac{u}{v} = \cot\alpha$$

lo cual significa que la hodógrafa de AB es una recta ab que le es paralela y pasa por el origen del plano W; si AB es horizontal, la recta ab coincidirá con el eje de las u.

c) La línea de saturación CD es una línea de corriente en donde la presión se mantiene constante (hoja 5) y consecuentemente, de acuerdo con (6), podemos escribir:

$$\frac{d\phi}{ds} + k\,\frac{dy}{ds} = 0$$

o bien:

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + k\,\frac{dy}{ds}\,\frac{d\phi}{ds} = 0 \qquad (7)$$

pero:

$$\frac{d\phi}{ds} = \mathcal{V} \qquad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta \qquad (8)$$

en donde θ es el ángulo que forma la tangente a la línea de saturación con la horizontal. Reemplazando (8) en (7) queda:

$$\mathcal{V}^2 + k\,\mathcal{V}\,\operatorname{sen}\theta = 0$$

que puede escribirse:

$$u^2 + v^2 + kv = 0 \qquad (9)$$

en el plano de las hodógrafas la expresión (9) es la ecuación de un círculo acdh de centro $u = 0$, $-v = k/2$ y radio $k/2$.

d) El talud BD aguas abajo de la cortina, en contacto con el aire, forma el ángulo β con la horizontal y consecuentemente la componente de la velocidad en la dirección del talud podrá - escribirse:

$$\mathcal{V}_\beta = \frac{\partial\phi}{\partial s_\beta} = -k\,\frac{\partial h}{\partial s_\beta} = -k\,\frac{\partial y}{\partial s_\beta} = -k\,\operatorname{sen}\beta \qquad (10)$$

análogamente si designamos con θ al ángulo que la tangente a la línea de saturación en el punto D forma con la horizontal, resulta:

$$\mathcal{V} = -k\,\operatorname{sen}\theta\ . \qquad (11)$$

ahora bien, como el punto D es común a la línea de saturación y al talud aguas abajo deberá tenerse de acuerdo con (10) y (11):

$$k\,\operatorname{sen}\theta\cos(\beta-\theta) = k\,\operatorname{sen}\beta$$

lo cual sólo se verifica si $\theta=\beta$, esto es, la línea de saturación es tangente en D al talud aguas abajo. Por otra parte la expresión (10) puede escribirse:

$$u\cos\beta + v\,\operatorname{sen}\beta + k\,\operatorname{sen}\beta = 0 \qquad (12)$$

que en el plano de las hodógrafas representa a una recta que pasa por el punto $u = 0$, $-v = k$ y que es normal al talud BD.

En resumen y refiriéndonos a la figura 12 se tiene: a la frontera impermeable AB corresponde en el plano de las hodógrafas el segmento ab de una recta paralela a AB, al talud AC el segmento de recta ac normal a dicho talud, al talud BD el segmento de recta bd normal al talud, a la línea de saturación CD el arco cd de un círculo de centro $(0, k/2)$ y radio $k/2$. A la frontera ACDB corresponde en el plano de las hodógrafas el cuadrilátero curvilíneo acdb que presenta la gran ventaja de reemplazar a la línea de saturación CD, de forma desconocida, por el arco de círculo cd perfectamente definido.

Flujo en el plano de hodógrafas+.- Si en el plano W elegimos un determinado camino de integración y designamos con ν_s su dirección variable y con ν a la dirección de la tangente a las líneas de corriente, resulta que el valor de ψ asociado a cada uno de los puntos del camino de integración es:

$$\psi = \int_{s_1}^{s_2} V \cos(\nu_s - \nu)\, ds \qquad (13)$$

$\sqrt{u^2+v^2}\cos(\alpha ...)$

y el valor de ϕ resulta:

$$\phi = \int_{s_1}^{s_2} V \operatorname{sen}(\nu_s - \nu)\, ds \qquad (14)$$

luego, conocidos los valores de V y ν en todos los puntos de la región pueden obtenerse líneas equipotenciales y de corriente por medio de una integración gráfica y retornar al plano del flujo (plano Z) utilizando las relaciones (5) de la hoja 19 ; finalmente podemos obtener la longitud BD del paramento aguasabajo de la cortina mostrada en la figura 12 pues se tiene:

$$d\psi = dq = V \operatorname{sen}(\beta - \alpha)\, ds$$

y consecuentemente:

$$S_{BD} = \int_0^q \frac{d\psi}{V \operatorname{sen}(\beta - \alpha)} \qquad (15)$$

+ H. Breitenöder 1959 Freie Oberfläche und Hangquelle, zwei wesentliche Randbedingungen der Dammdurchsickerung. Der Bauingenieur H.9 357-362

Aplicación.- Antes de atacar el trazo de la red de flujo siguiendo el método delineado en el inciso anterior y aún más, antes de intentar obtener la solución analítica del problema lo cual podría ser objeto de un trabajo posterior; proponemos un método iterativo que nos permita asegurar, en base al plano de hodógrafas, que la línea de saturación trazada en el plano de flujo es correcta. El proceso a seguir es el siguiente:

a) Dada la sección y características de la cortina procedemos a trazar la línea de saturación siguiendo por ejemplo las tablas propuestas por A. Casagrande (ver figura 13).

Conocidas así las condiciones de frontera (ver capítulo II), se procede a obtener los valores de ϕ asociados a diversos puntos de la cortina para lo cual se utiliza el método de relajaciones.

b) Siguiendo las ideas expuestas en la hoja 19 y siguientes trazamos, como se muestra en la figura 13, la representación hodográfica de las fronteras del escurrimiento. De esta manera la línea de saturación BC queda representada en el plano de las hodógrafas por el arco de círculo bc.

c) Calculamos las componentes u y v de la velocidad en una serie de puntos alojados en la línea de saturación BC para lo cual aprovechamos los valores obtenidos en la relajación anterior.

d) A partir de los valores de u y v antes calculados procedemos a dibujar, en el plano de las hodógrafas, los vectores velocidad respectivos cuyas extremidades deberán estar alojadas en el arco de círculo bc, si esto no acontece procedemos a modificar la línea de saturación original en el plano de flujo (plano Z) hasta lograrlo. Estas modificaciones deberán realizarse teniendo en cuenta la magnitud y dirección de la velocidad indicada por el plano de hodógrafas y las variaciones que, con respecto a ellas, presenten las obtenidas a partir de la línea de saturación original.

En la figura 9 se han indicado con $a_1, b_1, \ldots, h_1$ a los puntos localizados en el plano de flujo en los cuales se calculó la velocidad (en algunos casos la velocidad fué calculada en las cercanías de dichos puntos); en la figura 13, que corresponde al plano de hodógrafas, se han indicado con $a_2, b_2, \ldots, h_2$ a los vectores velocidad asociados a los puntos antes mencionados. Es-

tos vectores velocidad deberían aumentar progresivamente en módulo, partiendo del valor asociado a c hasta llegar al módulo - de la velocidad en d (ver figura 13); además la pendiente de dichos vectores+ también debe crecer a partir de c y hasta llegar a d.

Observamos que todos los puntos elegidos caen fuera del arco de círculo cd; esta dispersión puede deberse, además de los errores propios del calculista, a que toda la labor se ejecutó en calculadora de escritorio; sin embargo y prosiguiendo con este primer intento de aplicación específica observamos que:

a) No obstante la dispersión antes mencionada, los extremos de los vectores velocidad: a_2, b_2, ... , h_2 tienden a describir un arco de círculo concéntrico con cd y próximo a él.

b) A pesar de que el módulo de dichos vectores no crece - continuamente, las variaciones que presenta son pequeñas y pueden ser ocasionadas por los errores inherentes al proceso de relajaciones por lo cual es de esperarse que con el auxilio de máquina eléctrónica se llegue a resultados mucho más satisfacto - rios.

c) En cuanto a la pendiente de los vectores velocidad, esta crece continuamente sin presentar ninguna regresión.

En base a las observaciones anteriores se considera innecesario modificar la línea de saturación considerando los resultados obtenidos como satisfactorios ya que, el principal objeto - de este primer estudio es hacer ver la viabilidad, sencillez y rapidez del método propuesto.

Conclusiones.- En cuanto al método de relajaciones observamos que:

a) Es conveniente utilizar una red graduada en la cercanía de la línea de saturación ya que, reduciendo considerablemente el número de incógnitas, aumentamos la presición en el cálculo de los vectores velocidad alojados en dicha frontera. Por otra parte para el trazo mismo de la red las diferencias obtenidas - con dos redes de relajación cuya relación de amplitudes sea del orden de un medio son prácticamente imperceptibles.

b) Una vez sistematizado el cálculo, este se reduce a ejecutar una serie de operaciones muy simple, tanto en el método --

+ Cabe hacer notar que las figuras 9 y 13 son reducciones a escala de dibujos bastante mayores.

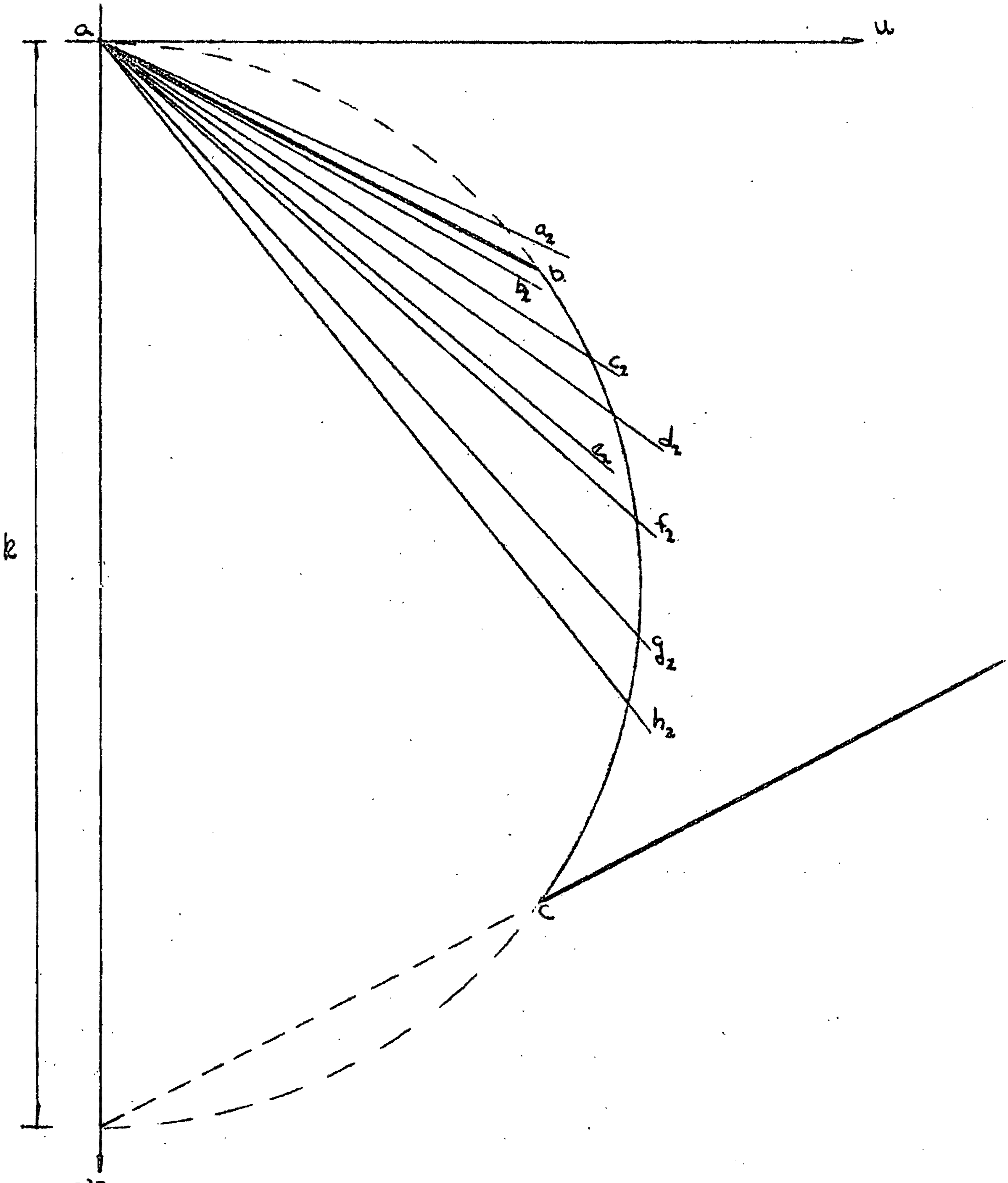


FIGURA 13

de relajación en sí, como en el planteo mismo del sistema de ecuaciones; ello ocasiona que el tiempo empleado en resolver el problema es suficientemente reducido.

En cuanto a la verificación de la línea de saturación observamos que:

a) El cálculo de los vectores velocidad asociados a puntos alojados en la línea de saturación se reduce también a operaciones aritméticas sencillas que además aprovechan datos y resultados del proceso de relajación anterior.

b) En caso de ser necesario modificar la línea de saturación supuesta ello ocasiona que algunas de las ecuaciones del sistema original desaparecen o son modificadas y aún puede ocasionar la aparición de nuevas ecuaciones, sin embargo el número de estas ecuaciones nuevas o alteradas es en general muy pequeño en comparación con el total de manera que aprovechando la solución del sistema original bastan unos cuantos pasos de relajación para llegar a los nuevos resultados. Ello ocasiona que el tiempo total empleado para la solución del problema es comparable con el que se requiere para la aplicación de otros procedimientos.

c) En el caso de atacar el problema con calculadora de escritorio es aconsejable detener los cálculos cuando se haya logrado que los extremos de los vectores velocidad tiendan a acumularse en torno al arco de círculo cd del plano las hodógrafas lográndose además que sus pendientes crezcan sucesivamente partiendo de las cercanías del punto c hasta llegar a la vecindad del punto d.

d) Se observó la conveniencia de iniciar el proceso construyendo la línea de saturación según las tablas propuestas por A. Casagrande que se ajusta bastante satisfactoriamente a la línea correcta ya que, según esta aplicación, es posible que las únicas modificaciones necesarias se presenten en las cecanías del talud aguas abajo. No obstante en el caso de equivocaciones en el trazo de la primera línea de saturación ellas serán inmediatamente detectadas al aplicar el método.

e) Finalmente cabe insistir en la sencillez del método que permite su utilización aún por personal no especializado.