

0864

MODELO PARA ESTIMAR DAÑOS A ESTRUCTURAS INDUCIDOS POR TUNELEO

CESAREO ATENOGENES MORALES TRESS

TRABAJO

Presentado a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA

(ESTRUCTURAS)

CIUDAD UNIVERSITARIA D. F., 1986



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM

1986

MOR

J U R A D O

Presidente M en C NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS

Vocal M en C ENRIQUE DEL VALLE CALDERON

Secretario M en I RAMON CERVANTES BELTRAN

Suplente M en I RAFAEL ARANDA HERNANDEZ

Suplente M en C ROBERTO STARK FELDMAN

AGRADECIMIENTOS.

A mis padres y a Norma por su constante apoyo y comprensión.

Al Dr. Gustavo Ayala Milián y al Dr. Roberto Gómez Martínez por sus constantes enseñanzas.

A mis maestros.

A mis compañeros.

A MIS PADRES

A NORMA

INDICE.

	pag
I .- INTRODUCCION.	1
II .- DESCRIPCION DE MODELOS UTILIZADOS.	
II.1.- Características de los modelos existentes en la determinación de perfiles de desplazamientos provocados por procesos de tuneleo.	3
II.2.- Efecto de desplazamientos relativos en las estructuras.	18
III.- MODELO PROPUESTO.	
III.1.- Planteamiento e hipótesis.	33
III.2.- El concepto de subestructuración.	40
III.3.- Formación y unión de superelementos.	44
III.4.- Limitaciones en la definición y uso de subestructuras.	57
III.5.- Implantación de algoritmos de subestructuración en un programa de elementos finitos.	60
III.6.- Análisis de sistemas suelo-estructura en problemas de tuneleo.	71
IV.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	70
NOMENCLATURA	92
REFERENCIAS	94
APENDICES	
APENDICE A.- Subrutinas relacionadas con el almacenamiento y solución matriciales, en forma de columna activa.	98
APENDICE B.- Subrutinas adicionales para permitir la opción de subestructuración.	109
APENDICE C.- Formulación del método del elemento finito.	118

INTRODUCCION

I.- INTRODUCCION.

Los trabajos subterráneos, correspondientes a la excavación y construcción de túneles, alteran el estado inicial de la masa de suelo que los rodea. Estas alteraciones provocan movimientos en el terreno, que se transmiten hasta la superficie adyacente a la zona de excavación.

En zonas urbanas, los movimientos de la superficie, pueden ocasionar daños en las estructuras ubicadas sobre la zona de excavación al inducir desplazamientos relativos en su base.

Estos movimientos son de carácter tridimensional y dependen de las características físicas del suelo, del procedimiento usado en la excavación y construcción del túnel y del grado de restricción que ofrezcan al movimiento las estructuras desplantadas en la superficie. Además, varían conforme se avanza en la excavación y construcción del túnel a lo largo de su eje.

Hasta ahora, se han considerado por separado a los problemas de la determinación de los perfiles de asentamientos superficiales, ocasionados por procesos de tuneleo, y de la estimación de los daños que estos ocasionan sobre estructuras ubicadas en la superficie adyacente a la zona de excavación.

Por una parte, se han desarrollado métodos más o menos elaborados, que intentan predecir las características de los perfiles de asentamientos superficiales, ocasionados por procesos de tuneleo. Sin embargo, ninguno de ellos considera la influencia de las estructuras ubicadas en la superficie, en la definición de estas características.

Por otro lado, se han obtenido un gran número de mediciones de campo y mediciones experimentales, relacionadas con estructuras dañadas por la presencia de asentamientos diferenciales. En base a estas mediciones, diversos autores han propuesto valores límite de parámetros como la distorsión angular (δ) y deformación unitaria (ϵ), de tal manera que no pueden ser excedidos sin riesgo de daño, reflejado en forma de agrietamientos.

Para estimar el daño que los procesos de tuneleo ocasionan sobre las estructuras ubicadas en la superficie adyacente, se ha procedido a inducir en la base de las estructuras, los desplazamientos superficiales obtenidos por algún método que no considera la presencia de éstas, y comparan los valores inducidos de δ y ϵ con los valores límite permisibles (δ_0, ϵ_0).

Existe evidencia de que la presencia de estructuras en la superficie modifican sustancialmente a los perfiles de asentamientos provocados por tuneleo, de tal manera que la rigidez y peso de estas estructuras, interactúan con el comportamiento del suelo, por lo menos hasta una cierta profundidad.

En este trabajo, se describen brevemente las características de los modelos existentes más usuales en la determinación de perfiles de asentamientos superficiales, ocasionados por procesos de tuneleo; se hace una revisión de los criterios de daño producido por desplazamientos relativos en elementos estructurales; y finalmente, se propone un modelo de interacción suelo-estructura basado en el concepto de subestructuración, que permite tener en cuenta la influencia de estructuras desplantadas en la superficie, sobre los perfiles superficiales de desplazamientos generados por tuneleo.



DESCRIPCION DE
MODELOS UTILIZADOS

II.1.- CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS EXISTENTES EN LA DETERMINACION DE PERFILES DE DESPLAZAMIENTOS PROVOCADOS POR PROCESOS DE TUNELEO.

En la fig. (II.1) se muestran esquemáticamente las acciones que se generan en torno a un túnel, durante los trabajos de excavación y construcción del mismo, empleando algún sistema a base de escudo y presión en el frente de trabajo.

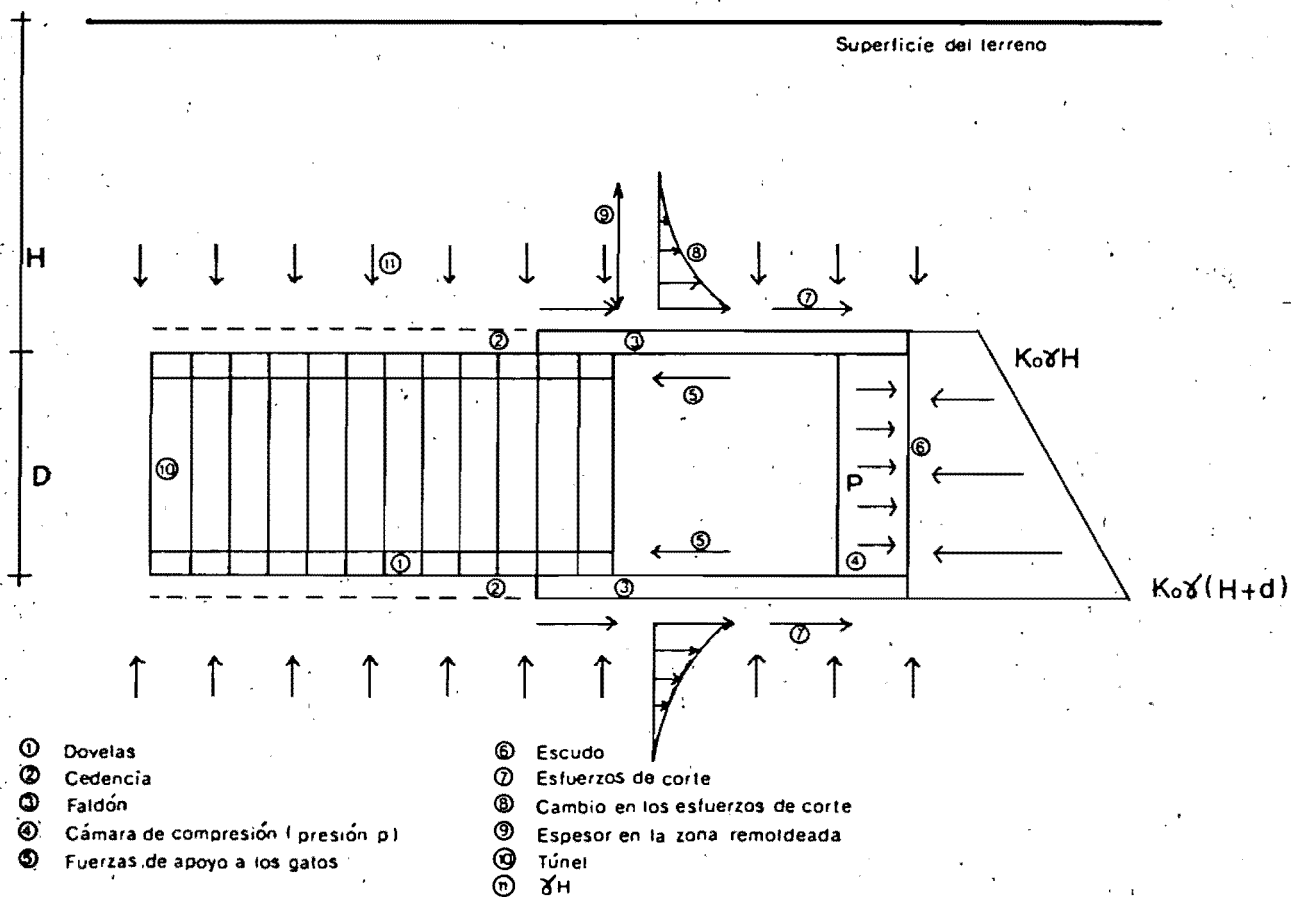


fig. (II.1)

Acciones generadas por procesos de tuneleo.

En mayor o menor medida todas estas acciones contribuyen a alterar el estado inicial del suelo, generándose esfuerzos y deformaciones, así como desplazamientos permanentes en su interior.

La magnitud de estos desplazamientos, es altamente dependiente del método de excavación usado. Dentro de los sistemas de excavación a base de escudos empleados en arcillas y arenas se encuentran el de escudo abierto, escudo cerrado, escudo con lodo y escudo con tierra. Una descripción detallada de cada uno de estos

procedimientos de excavación con escudo se encuentra en la ref. 19.

De los procedimientos mencionados, el sistema de escudo con lodo es, en la actualidad, el método de excavación que induce perfiles superficiales de desplazamientos más pequeños, cuando se excava en arcillas y el método de escudo con tierra, en arenas y en arenas combinadas con arcillas. Resultados de mediciones en campo se muestran en la tabla (II.1), la cual se obtuvo con base en datos estadísticos y en general da una idea del orden de magnitud de los desplazamientos máximos medidos en la superficie, así como de las dispersiones encontradas (ref. 11), las cuales deben tenerse en cuenta cuando se intente predecir las características de los perfiles de asentamientos superficiales, mediante el uso de alguna herramienta teórica.

TABLA II.1.- Asentamientos superficiales medidos en campo
 Diámetro $D = 2.0m - 20.0m$
 Prof. del eje del túnel $Z = 2.2m - 22.0m$
 $Z/D = 1.1 - 5.0$

Escudo	Suelo	Asentamiento Max. (cm)				No. de observs.
		max.	min.	prom.	error(+/-)	
Abierto	Arc.	12	6.8	10	3	4
		20	20	20	0	2
	Arc.-Ar.	13	7	10	3	5
	Ar.	7	1.3	4	3	7
Blindado	Arc.	5	0.7	3	2	6
	Arc.	5.7	2	4	2	10
	Arc.	11.2	7.5	10	2.5	4
Con lodo	Arc.	5	3.5	4	1	2
	Arc.-Ar.	12	6	9	3	3
	Ar.	6.4	2.1	4	2.5	4
Con tierra	Arc.	8.5	3.5	6	2.5	3
	Arc.	18.6	12	15	3.5	2
	Arc.-Ar.	2.5	1	2	1	3
	Ar.	6	3	4.5	1.5	4
	Ar.	2.4	1	2	1	3

A partir de los resultados mostrados en la tabla (II.1), es evidente que los suelos blandos son más susceptibles de sufrir desplazamientos importantes, bajo la acción de procesos de tunelamiento. Esto hace que normalmente se preste mayor interés al estudiar el comportamiento de este tipo de suelo, cuando en su interior se ejecutan trabajos de excavación y construcción de túneles.

Existen diversos métodos relacionados con la predicción de

asentamientos superficiales generados por procesos de excavación y construcción de túneles en suelo blando. Hasta ahora, estos métodos no contemplan la posibilidad de la existencia de estructuras desplantadas en la superficie, las cuales influyen de manera significativa sobre los perfiles de desplazamientos verticales y horizontales generados por procesos de tuneleo. (refs. 4,8). Dependiendo de su complejidad, estos métodos pueden identificarse dentro de tres grupos principales:

- a).- Métodos semiempíricos.
- b).- Métodos analíticos bidimensionales.
- c).- Métodos analíticos tridimensionales.

a).- Métodos semiempíricos.

Estos métodos consideran que la forma del perfil de asentamientos superficiales, permanece invariable, y con base en observaciones de campo, le asignan la forma de una distribución normal de probabilidades (fig. II.2). De esta manera, reducen el problema a la determinación de los parámetros de la distribución (S_{max}, i), que definen una configuración superficial asociada con un procedimiento de construcción en un suelo determinado, para un diámetro y profundidad en particular.

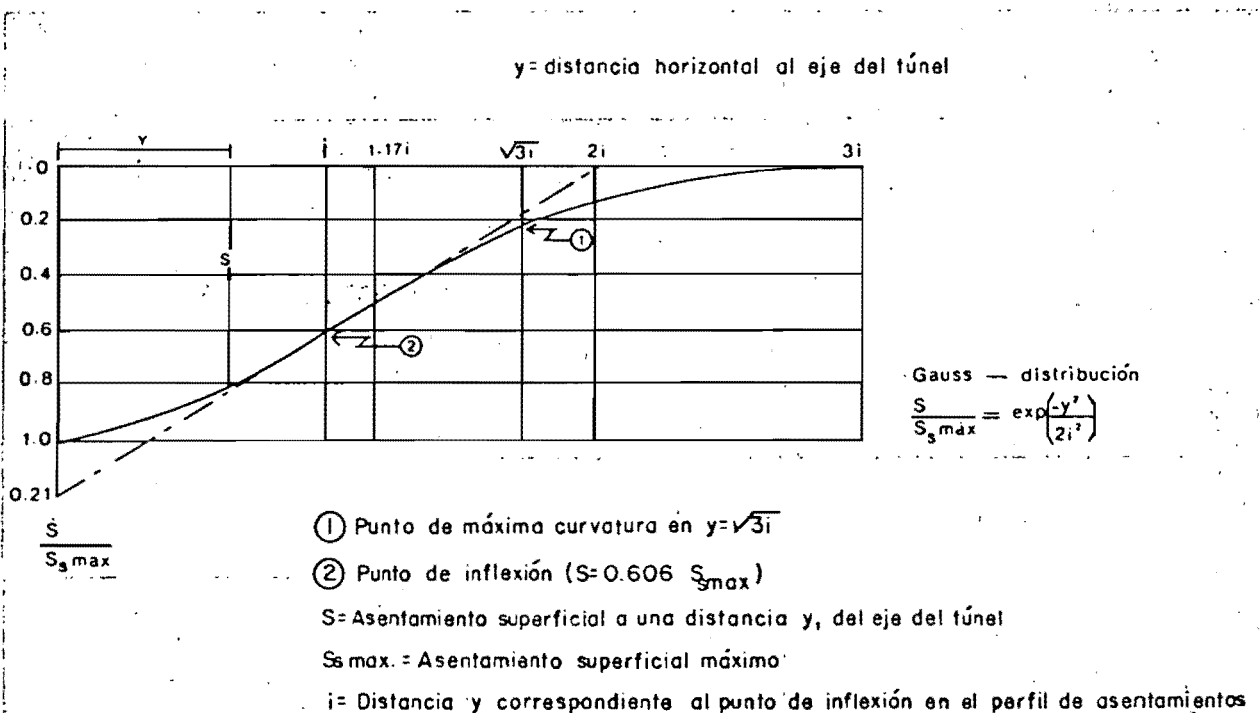
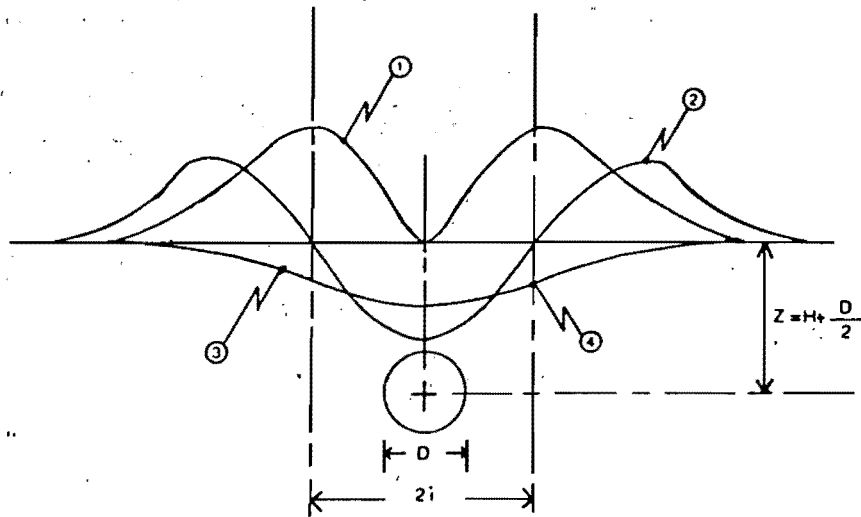


fig. (II.2.a)
 Perfil de desplazamientos verticales



- ① Desplazamiento interior horizontal
- ② Esfuerzo: positivo/tensión, negativo/compresión
- ③ Curva de probabilidad normal, asentamiento del perfil vertical
- ④ Punto de inflexión

fig. (II.2.b)
Perfiles de desplazamientos

Para determinar los parámetros de la distribución, se recurre a relaciones empíricas obtenidas a partir de observaciones de campo. Así, en la determinación del parámetro i , correspondiente a la distancia entre una vertical que pase por el eje del túnel y el punto de inflexión de la distribución; se recurre a relaciones del tipo mostrado en la fig. (II.3), las cuales pueden representarse matemáticamente como:

$$(2i/D) = (Z/D)^n \quad \dots(II.1.a)$$

$$i = (Z / 2)^{\frac{n}{1-n}} \times D \quad \dots(II.2.b)$$

donde n es un parámetro de ajuste, que depende del tipo de suelo y de las características del equipo de excavación.

De la figura (II.3), puede observarse que n es aproximadamente igual a 1 para arcillas rígidas y excavación con escudo. De igual manera, pueden determinarse distintos valores de n para cada caso particular, y en la ec. (II.1), la única variable desconocida sería el parámetro i correspondiente a la distribución supuesta del perfil de asentamientos.

A partir de otros análisis de regresión aplicados a datos obtenidos en campo (ref. 33), se ha observado que no existe correlación importante entre el parámetro i del perfil de asentamientos y el diámetro del túnel. Sin embargo sí existe una correlación bien definida entre el parámetro i y la profundidad del túnel, variando en proporción directa uno respecto al otro. Para

finés prácticos, se usa la siguiente expresión, la cual corresponde a considerar una variación lineal de los parámetros representados en la fig. II.3 .

$$i = KZ \quad \dots (II.2)$$

$K=0.50$ para suelos cohesivos.
 $K=0.25$ para suelos granulares

Entre más rígido sea el suelo, más bajo es el valor de K . Así, para arcillas blandas se encuentran valores de $K= 0.7$.

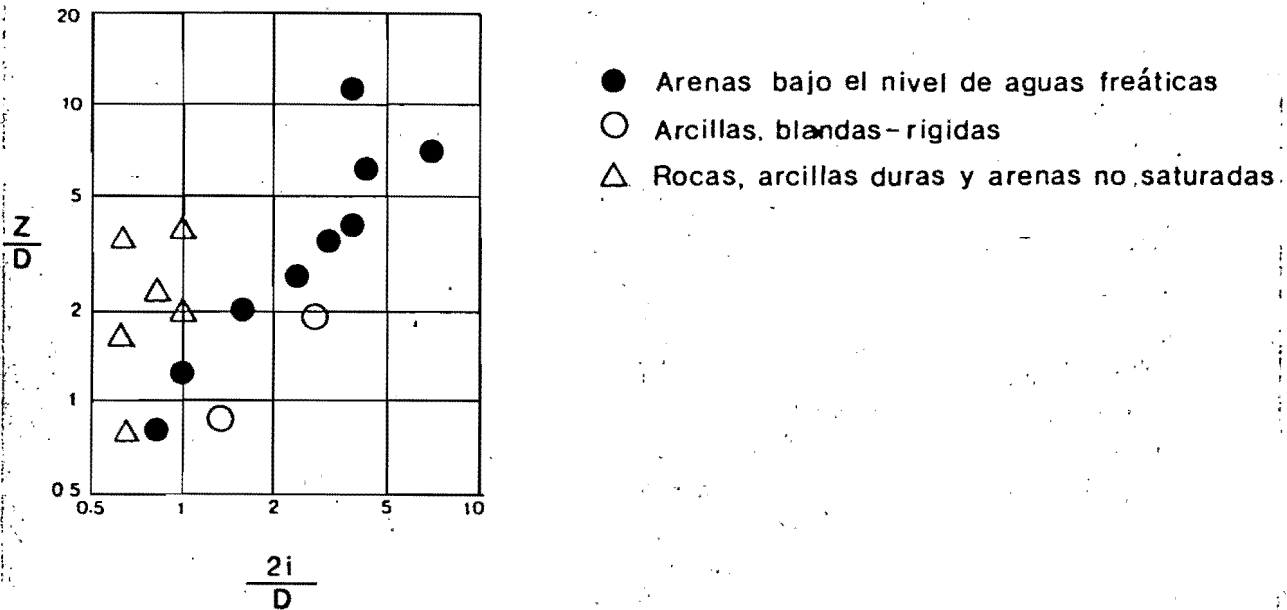


fig. (II.3)
 Datos para la evaluación de la ec. de asentamientos.

Estas dos opciones en la evaluación del parámetro i , conducen a resultados que pueden ser semejantes en algunos casos y muy distintos en otros. Por ejemplo, en la figura (II.4), se muestran los resultados obtenidos en el caso particular de arcillas rígidas, para un valor de $n= 0.8$ propuesto por Peck (ref. 33).

Debido a las diferencias relativamente pequeñas en los valores de i obtenidos con las ecuaciones (II.1.b) y (II.2), cuando se varía el diámetro D del túnel, es aceptable la ec. (II.2). Sin embargo, para grandes profundidades Z , las diferencias se vuelven muy significativas, y habrá que tomar en cuenta la variación del parámetro i en función del diámetro del túnel.

De manera análoga, pueden establecerse gráficas del tipo de la figura (II.3), para suelos granulares o arcillas blandas, encontrándose las mismas tendencias en la variación de los parámetros correlacionados en la fig. II.3 .

Relaciones similares a la representada en la fig. (II.3), se han obtenido para estimar el valor del asentamiento máximo S_{max} . En la fig. II.5., se presenta un tipo de relacion característica para estimar el valor del parámetro S_{max} . En términos generales, puede observarse un decremento exponencial de (Z / D) cuando se incrementa la relación (S_{max} / D) lo cual sugiere que los asentamientos superficiales máximos inducidos por tuneleo, varían en proporción inversa con la profundidad del túnel.

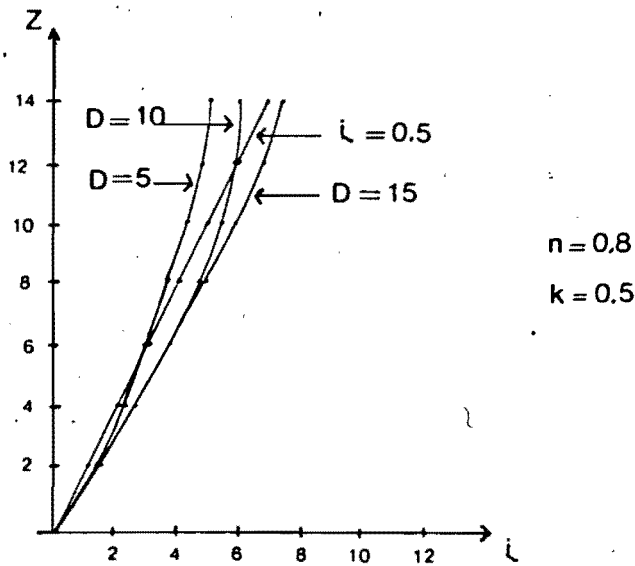


fig. (II.4)
Resultados obtenidos con las
ecs. (II.1.b) y (II.2)

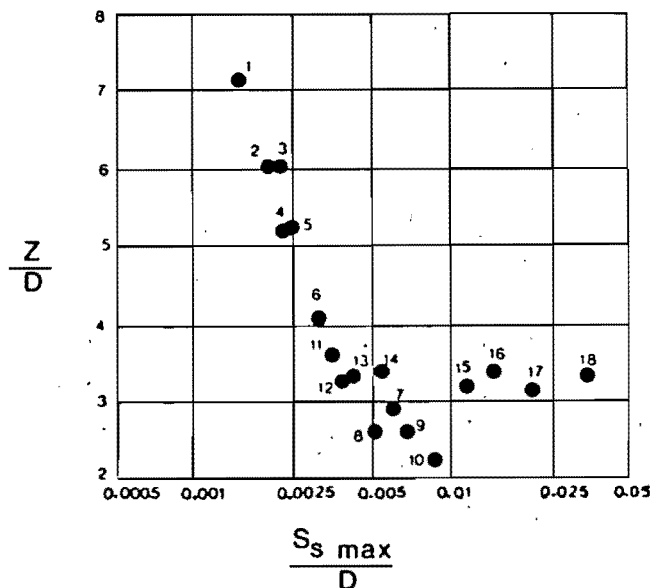


fig. (II.5)
Variación de $S_{s \max}$ en arcillas rígidas.

Las mediciones graficadas en la fig. (II.4), indican que el asentamiento máximo $S_s \text{ max}$ depende en mayor medida del diámetro del túnel, que el parámetro i . Haciendo caso omiso de los puntos 15 - 18 en la fig. (II.5), pueden correlacionarse las variables indicadas, a través de la expresión de tipo potencial.

$$(Z / D) = 0.08 (S_s \text{ max} / D)^{-0.69} \dots (II.3)$$

Una vez conocidos los parámetros i y $S_s \text{ max}$, puede calcularse el valor del asentamiento en cualquier punto de la superficie a través de la expresión

$$S_s = S_s \text{ max} \exp \left[\frac{-(x, y)^2}{2i^2} \right] \dots (II.4)$$

x , y están referidas al frente de avance del túnel.

En términos del ángulo de fricción ϕ del suelo, puede estimarse el ancho de los perfiles transversal y longitudinal de asentamientos, los cuales están definidos por superficies de corte asociadas con un ángulo B medido entre la horizontal y una superficie de falla que surge del frente del túnel (fig. II.6).

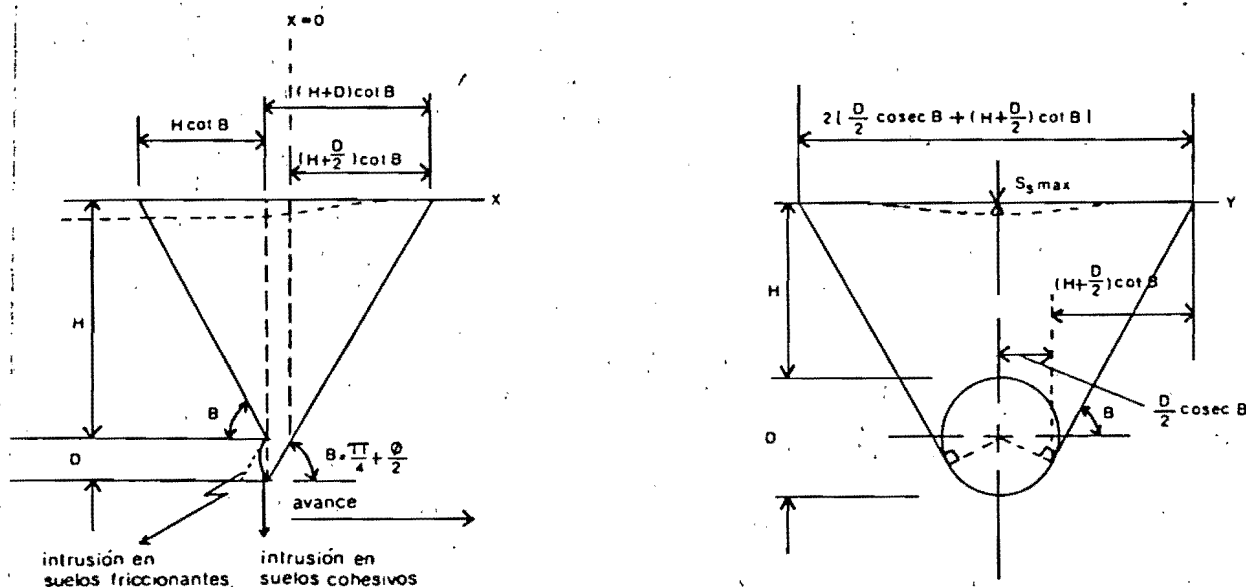


fig. (II.6)
 $S_s \text{ max}$ en función del ancho de los perfiles de asentamientos superficiales long. y transversal

De manera aproximada, ya que la distribución normal se extiende hasta el infinito, puede considerarse que es representativo tomar en cuenta la extensión del perfil de asentamiento hasta $3i$, el cual incluye un 99.7 % del volumen de asentamientos, así, de la fig. II.6.

$$3i = (D/2 \operatorname{cosec} B + (H + D/2) \cot B) \quad \dots (II.5)$$

En el sentido transversal, el asentamiento en cualquier punto x del perfil superficial, puede calcularse como:

$$S_x = S_s \max \exp \left[\frac{-x^2}{2i^2} \right] \quad \dots (II.6.a)$$

en el sentido longitudinal:

$$S_y = S_s \max \exp \left[\frac{-y^2}{2i^2} \right] \quad \dots (II.6.b)$$

Si se representa x como una fracción A_1 de la longitud total del perfil de asentamiento a un lado del eje del túnel, se tiene:

$$x = A_1 (3i) \quad \dots (II.7)$$

Sustituyendo la ecuación (II.7), en la ecuación (II.6.a):

$$S_x = S_s \max \exp (-4.5 A_1^2) \quad \dots (II.8.a)$$

de manera análoga :

$$S_y = S_s \max \exp (-4.5 A_2^2) \quad \dots (II.8.b)$$

En las expresiones (II.8), A_1 puede calcularse a partir de las longitudes de los perfiles de asentamientos definidas en la fig. (II.6), a través de las expresiones:

En sentido longitudinal

$$A_1 = \frac{x}{(H + D/2) \cot B} \quad \dots (II.9.a)$$

En sentido transversal

$$A_2 = \frac{y}{(D/2 \operatorname{cosec} B + (H + D/2) \cot B)} \quad \dots (II.9.b)$$

En la evaluación del semiancho del perfil transversal de asentamiento a través de la ecuación (II.1.b), y de la ecuación (II.5) se han obtenido longitudes muy parecidas. De esta manera, la determinación del perfil de asentamiento se reduce al conocimiento de $S_s \max$ a partir de expresiones empíricas del tipo de la ecuación (II.3) y del coeficiente de fricción θ o el parámetro empírico n .

Si se emplea el coeficiente de fricción θ , se calculan A_1 Y A_2

con las ecuaciones (II.9) y se sustituye en las ecuaciones (II.8).

Por otro lado, si se emplea el parámetro n , puede calcularse la distancia al punto de inflexión i a través de la ecuación (II.1.b) y sustituirlo en las expresiones (II.6) para hallar el valor del asentamiento S_s en cualquier punto del perfil de asentamiento.

Las correlaciones mostradas en las figuras (II.4) y (II.5), se refieren a arcillas sobreconsolidadas en las cuales la "pérdida" de terreno dentro del túnel es equivalente al volumen comprendido en el perfil de asentamientos superficiales (N_1), el cual puede representarse como (ref. 2):

$$V_s = \sqrt{2N_1} \quad i \quad S_s \text{ max} \quad \dots (II.10)$$

donde el subíndice s se refiere a pérdidas de terreno dentro del túnel.

A partir de los resultados graficados en la fig. (II.5), se concluyó que el asentamiento superficial máximo $S_s \text{ max}$ varía en proporción inversa a la profundidad del túnel. Sin embargo, a profundidades mayores, existen mayores niveles de esfuerzos debido al peso propio del suelo, los cuales actúan de manera importante sobre el túnel, e incrementan la consolidación del terreno que lo rodea, reflejándose en la superficie en forma de asentamientos adicionales a los ocasionados por la pérdida de terreno.

En algunos casos, los efectos de consolidación pueden provocar desplazamientos del orden de magnitud de los provocados por pérdida de terreno, o aun mayores.

Los métodos semiempíricos, basados en la estimación de los parámetros i , $S_s \text{ max}$ de una distribución normal de probabilidad, se apoya en observaciones experimentales (figs. II.3, II.5), y en suelos cuyas características sean similares a las correspondientes a las regiones en observación, los desplazamientos obtenidos con estos métodos, corresponden aproximadamente con los desplazamientos observados (ref. 33). Sin embargo, estos métodos no son capaces de describir el comportamiento tridimensional de la región en estudio, ni las variaciones de los desplazamientos conforme se avanza en el proceso de excavación.

N_1 . - A partir de mediciones de campo, Terzaghi (1943), Knapp (1940), Airncross (1973), en arcillas rígidas, concluyeron que el volumen del perfil de asentamientos superficiales, es aproximadamente igual que el volumen de la pérdida de terreno dentro del túnel.

b).- Métodos bidimensionales.

Mediante la aplicación de estos métodos, se trata de simular el carácter tridimensional de problemas relacionados con la excavación y construcción de túneles, empleando análisis bidimensionales de deformación plana en las direcciones longitudinal y transversal respecto al eje de avance del túnel. Estos análisis pueden llevarse a cabo empleando el método del elemento finito (Apendice C), por la posibilidad que ofrece para modelar la geometría de la región analizada.

Para estimar la contribución de la cedencia del frente del túnel durante el proceso de excavación, en la formación de perfiles de asentamientos a cualquier profundidad; los métodos bidimensionales combinan los resultados obtenidos de los análisis en ambas direcciones.

En el análisis longitudinal, al considerar la región sometida a un estado plano de deformaciones, se desprecia la tendencia del suelo a trabajar como arco en la dirección transversal.

Esto conduce a obtener desplazamientos mayores que los reales, cuando se aplica un sistema de cargas como se indica en la fig. (II.7).

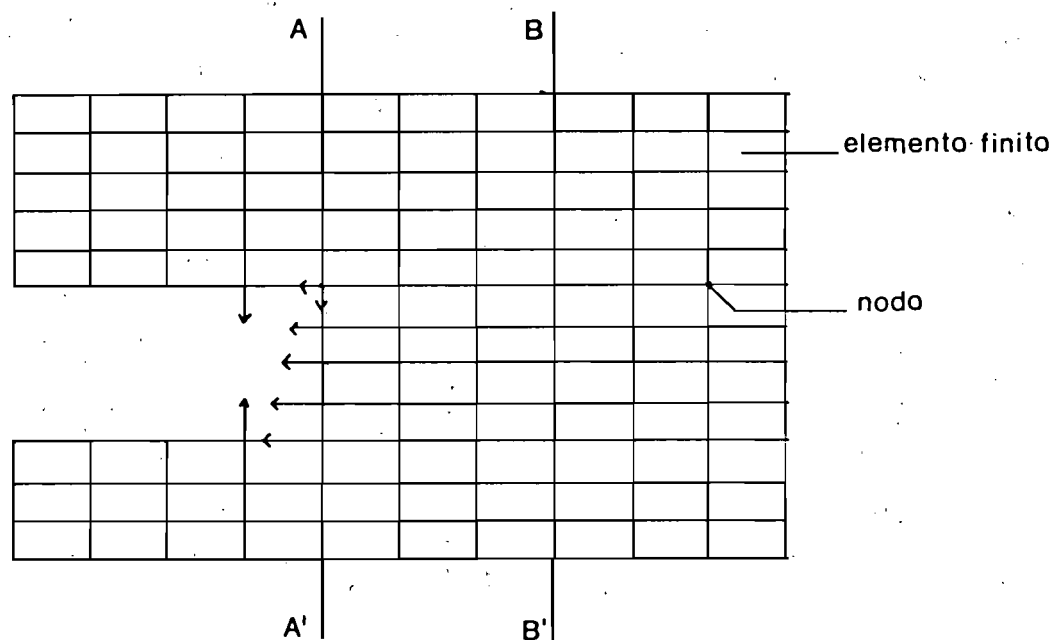


fig. (II.7)

Malla de elementos finitos planos empleada en análisis del perfil longitudinal.

En el análisis transversal (fig. II.8), se supone que el frente del túnel está suficientemente alejado como para considerar a las secciones transversales en un estado de deformación plana. De esta manera, se hace caso omiso del comportamiento del

frente del túnel, el cual contribuye a incrementar los desplazamientos, por lo que los desplazamientos obtenidos con este análisis, son menores que los reales.

De esta manera los análisis de deformación plana en los sentidos transversal y longitudinal, dan como resultado valores extremos de los desplazamientos.

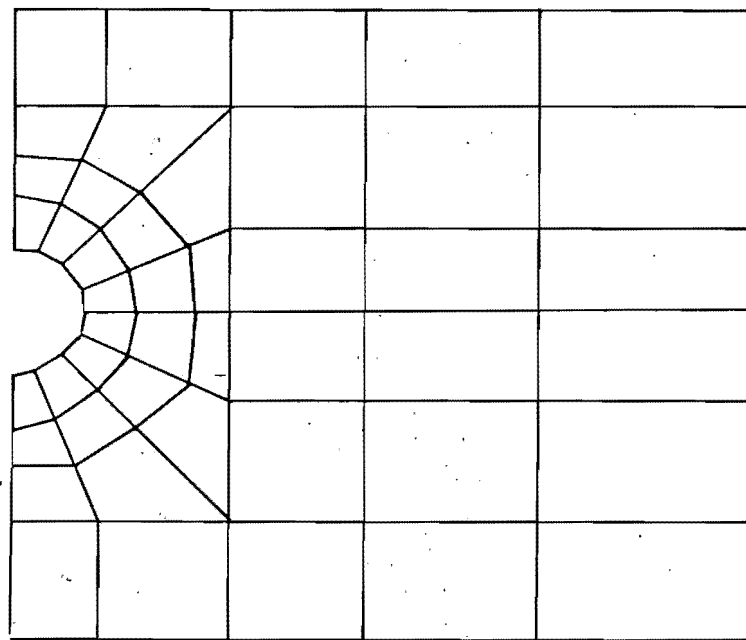


fig. (II.8)

Malla de elementos finitos planos empleada en el análisis del perfil transversal.

Para estimar los efectos de consolidación de la zona remodelada y la cedencia de las paredes del túnel, fig. (II.1), se considera que basta con hacer un análisis de deformación plana de la sección transversal, si los desplazamientos de interés son los que se generan a largo plazo. En análisis bidimensionales (ref. 37), los efectos mencionados se representan prescribiendo desplazamientos en las paredes del túnel, los cuales corresponden con el espacio de cedencia de las paredes (fig. II.1), el cual es variable dependiendo del equipo de excavación empleado (ref. 19).

Se ha intentado describir el comportamiento del suelo que rodea a un túnel, en términos de análisis de deformación plana, debido a la simplicidad de estos modelos. Sin embargo, no pueden tener en cuenta la historia de desplazamientos tridimensionales que se generan como resultado de los procesos de tuneleo, por lo que al realizar análisis de este tipo, se debe tener en cuenta que los valores obtenidos para los desplazamientos, corresponden a valores extremos de éstos.

c).- Métodos analíticos tridimensionales.

Los movimientos del terreno ocasionados por procesos de tunelaje, son de carácter tridimensional, por lo que en la superficie se generan perfiles de desplazamientos verticales y horizontales.

Los métodos semiempíricos carecen de la posibilidad de predecir los desplazamientos horizontales y los analíticos bidimensionales proporcionan valores extremos para los desplazamientos.

En los últimos años, se han hecho esfuerzos por estudiar el comportamiento tridimensional de regiones sometidas a procesos de tunelaje. Al respecto, se ha visto incrementada la aplicación del método del elemento finito (Apéndice C), principalmente debido a la posibilidad que ofrece de modelar la región en estudio, así como sus características físicas. Sin embargo, la simulación numérica del problema, empleando el MEF, se complica cuando se intenta reproducir el comportamiento no lineal del suelo, la variación de sus propiedades físicas dentro de la región en estudio, y las etapas de carga asociadas con la excavación y construcción del túnel.

Análisis que tomen en cuenta estas características, son excesivamente costosos, por lo que normalmente se aceptan como válidas algunas hipótesis simplificadoras al respecto.

A continuación, con base en la fig. (II.9) y la ec. (C.11) se explican los pasos que se deben seguir para simular numéricamente procesos de excavación y construcción.

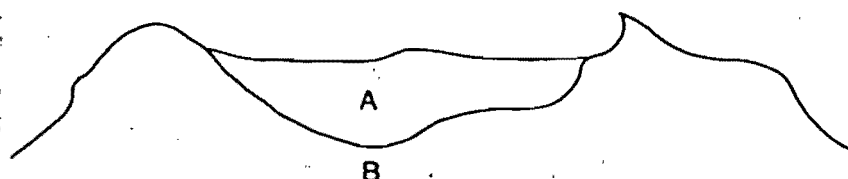


fig. (II.9)
Región sometida a excavación.

Supóngase que en un instante y para un incremento de carga dados se desea excavar la región A; en el primer paso de la simulación, para cada elemento finito de la zona de excavación se calculan las fuerzas por unidad de área (tracciones), que se transmiten de A a B como resultado de la excavación (fig. II.10), con la siguiente expresión (Apéndice C):

$$T_m = K_{lm} U_l - P_m \quad \dots (II.11)$$

en donde

t_m son las fuerzas por unidad de área producidas sobre la zona B por la excavación.

$K_{lm} U_l$ son las fuerzas producidas como resultado de los desplazamientos producidos por la excavación.

P_m son las fuerzas correspondientes al peso propio de la zona que se excava.

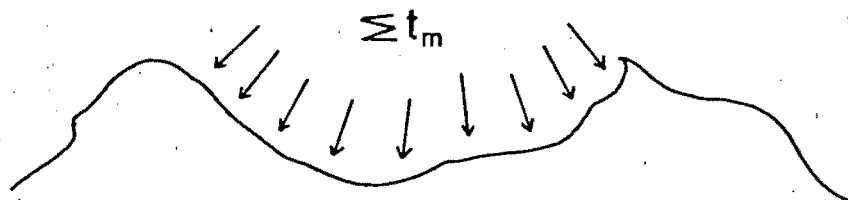


fig. (II.10).

Transmisión de tracciones.

En el siguiente paso se disminuye la rigidez de los elementos finitos de la región A de tal forma que se sigan considerando en el análisis pero con su rigidez disminuida notablemente, esto es, se siguen tomando en cuenta en la formación de la matriz K en la ec. (C.11). En este mismo paso se fijan los nodos de la zona A que no se encuentren sobre la frontera con la zona B. Durante el tercer paso del proceso de excavación, las tracciones calculadas se aplican sobre la frontera de la región B en dirección contraria a la que tenían (fig. II.11). Esto es, cada elemento finito de la región A contribuye al vector de carga global (\underline{P}) con :

$$-t_m = P_m - K_{lm} U_l$$

... (II.12)

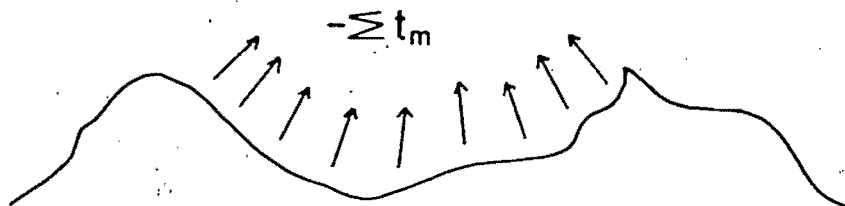


fig. (II.11).

Tracciones en sentido contrario.

En el paso o etapa final se resuelve el nuevo sistema de ecuaciones obteniéndose un nuevo estado de desplazamientos, de-

formaciones y esfuerzos que se deben añadir a las condiciones originales .

El proceso descrito es equivalente a una relajación de esfuerzos en la frontera entre las zonas A y B.

La simulación del proceso de construcción consiste básicamente de los mismos pasos con la diferencia de que los elementos que se van a construir contribuyen al vector global de cargas con :

$$-P_m + K_m U_k$$

...II.13

Hasta la fecha se han desarrollado diferentes procedimientos para el cálculo de las tracciones del suelo. Sin embargo, el proceso de excavación y construcción se simula aplicando básicamente los pasos descritos en los párrafos anteriores.

En la fig. (II.12) se muestra la región asociada al problema que se desea estudiar.

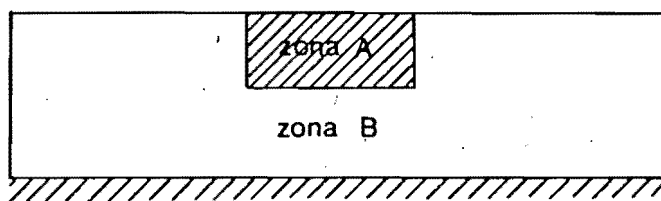


fig. (II.12)

Región asociada al problema de excavación.

Debido a las condiciones de carga, geometría y propiedades físicas de los materiales, sólo se analiza la mitad del modelo físico. En la fig. (II.13), se muestra la malla de elementos finitos empleada así como las condiciones de frontera consideradas. El número de elementos finitos influye en la precisión de los resultados obtenidos, sobre todo en la zona que rodea al túnel (zona remodelada en la fig. II.1), debido a las importantes variaciones de esfuerzos generados en esta zona.

En la fig. (II.13), la zona que se excava, zona A, se modela con 9 elementos finitos, sin embargo, no todos los elementos se excavan al mismo tiempo, ya que el proceso de excavación se lleva a cabo en varias etapas, por lo que se requiere aplicar el proceso descrito para cada una de las etapas de excavación y construcción del túnel.

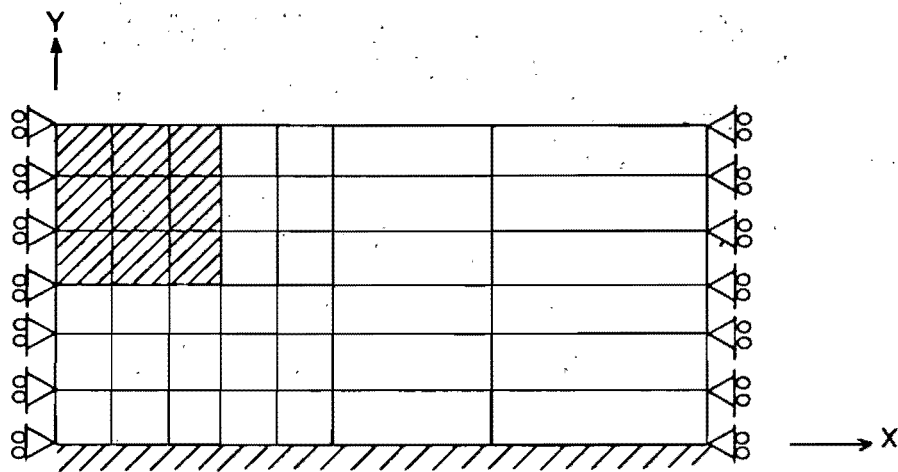
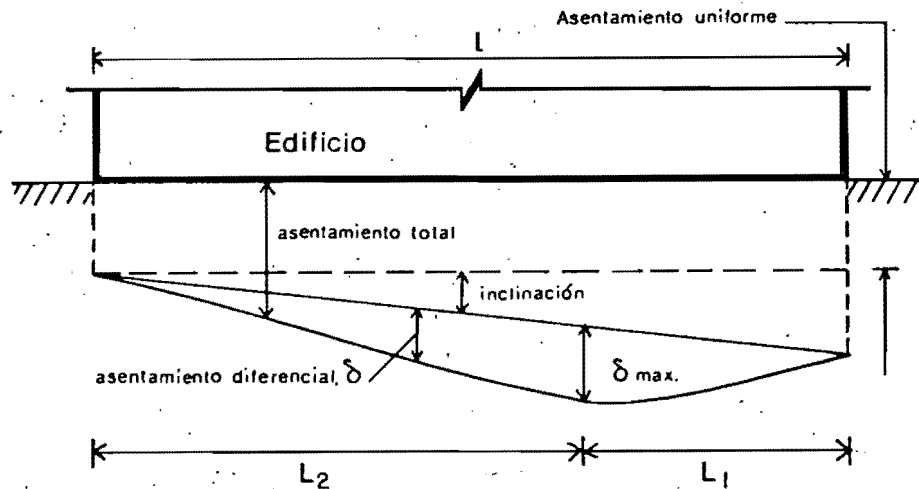


fig. (II.13)
Malla de elementos finitos.
y condiciones de frontera.

II.2.- EFECTO DE DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS EN LAS ESTRUCTURAS.

Mediante el estudio de daños ocasionados a edificios por la presencia de asentamientos diferenciales, se ha tratado de correlacionar a estas dos variables, a través del concepto de la distorsión angular, definida como la relación existente entre un asentamiento diferencial (δ) y la longitud en la cual se presenta éste (L_1) (fig. II.14).



$$\text{Distorsión angular } \gamma = \frac{\delta_{max}}{L_1}$$

$$\text{Asentamiento relativo} = \frac{\delta_{max}}{L}$$

fig. (II.14)
Parámetros de medición
de asentamientos.

A través de varios años se han hecho mediciones que han permitido establecer valores límite de la distorsión angular que ocasionan diversos daños a estructuras de características diferentes. Así, se han obtenido correlaciones para las distorsiones angulares que ocasionan agrietamientos en muros o pisos y para las que ocasionan daños estructurales severos en estructuras desplantadas sobre arcillas y arenas principalmente y para varios tipos de cimentación (zapatas, pilotes, cajones).

A partir de los resultados obtenidos, varios autores han propuesto valores límite de las distorsiones angulares que ocasionan daños en las estructuras. Estos resultados se presentan en las tablas II.2 - II.5. En la tabla II.6 se presenta valores límite

de la distorsión angular para estructuras a base de muros de mampostería sin refuerzo.

En términos generales, Skempton y Mc Donald, y Grant concluyen que $\delta / L > 1 / 300$, causará daños en muros de carga y panel la mayoría de las veces. En la fig. (II.15), se presenta la relación de mediciones de campo que dio origen a sus conclusiones.

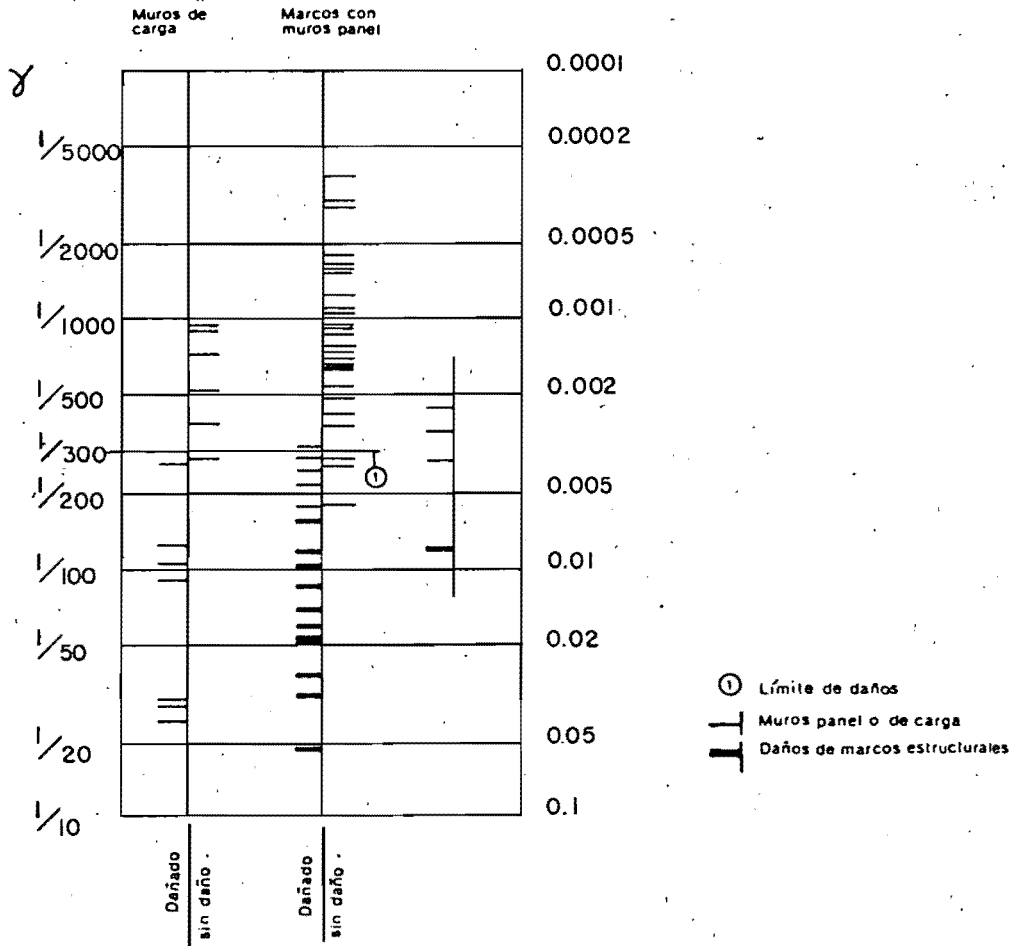


fig. (II.15)
Mediciones de distorsión angular.

Polshin y Tokar, así como Burland y Wroth hacen referencia a $\delta / L < 1 / 300$ en muros panel y $\delta / L < 1 / 2000$ en muros de carga para evitar agrietamientos. Esta diferencia se sustenta en la hipótesis de que en muros divisorios existen holguras mayores que permiten la deformación sin generarse esfuerzos significativos.

En edificios reales, δ_o es mayor que en experimentos de laboratorio, debido a que existen aberturas entre sus componentes. A través de mediciones de campo y de laboratorio, se han encontrado correlaciones entre ellas, como la definida por la ec. (II.14)

$$\delta_{oc \text{ exp.}} + C = \delta_o \text{ real.} \quad \dots (II.14)$$

$\delta_{oc} = \delta_o$ en experimentos a tensión diagonal.

donde $C = 0.5 \times 10^{-3}$ para muros de carga.
 $C = 1.0 \times 10^{-3}$ para muros panel.

Se ha encontrado que en especímenes de laboratorio, se tienen valores de 80 y 72 % en cuanto a resistencia y deformaciones respectivamente, en relación a los resultados de ensayos en modelos a escala natural.

El hecho de que δ_o medido en campo, sea mayor que δ_o experimental, se debe a la presencia de holguras en las estructuras reales.

Los valores propuestos para δ_o son valores que para los casos estudiados, establecen un límite de la distorsión angular, el cual no puede ser excedido sin el riesgo de que se presente agrietamiento. Sin embargo, pueden existir edificios con características tales que presenten agrietamientos para distorsiones angulares menores que δ_o , así como edificios para los cuales no se tenga agrietamiento para $\delta > \delta_o$, en cada uno de los casos.

Se ha tratado de correlacionar a la distorsión angular δ_o con algunos de los factores que afectan al mecanismo de formación de grietas como L/H, carga vertical y tipo de curvatura de la configuración deformada. Al respecto, pueden observarse algunas tendencias de los valores de δ_o , las cuales consisten en :

- a).- Se tienen valores apreciablemente menores para δ_o cuando la concavidad del perfil de asentamientos, es hacia abajo. Esta tendencia es particularmente importante en el estudio de daños a estructuras inducidos por tuneleo en suelo blando, ya que se presentan zonas (figs. III.1, III.2) con este tipo de concavidad, conforme avanza el frente de excavación.
- b).- Conforme crece la relación L/H, los valores de δ_o crecen también.
- c).- La presencia de carga vertical, tiende a contrarrestar las fuerzas de tensión diagonal generadas por deformaciones características de tipo cortante.
- d).- Los muros confinados por marcos admiten mayores valores para δ_o , que los muros de carga.

El mecanismo de la formación de grietas provocadas por asentamientos diferenciales, está asociado con esfuerzos de tensión inducidos por efectos de flexión (fig. II.16) o de cortante (fig. II.17) o una combinación de ambos (fig. III.18).

Las deformaciones por efecto de corte, tienen mayor influencia en el mecanismo de formación de grietas, cuando aumenta el grado de confinamiento, de tal forma que se impidan los desplazamientos laterales necesarios para que el muro trabaje en flexión, o cuando las relaciones longitud/altura de un muro, son pequeñas.

Del estudio hecho por Burland y Wroth, se observa que la

concavidad hacia abajo en el perfil de asentamientos en la base del muro, acepta menores σ_0 en su base (fig. II.19). Es evidente que bajo este tipo de deformación, se generan esfuerzos de tensión inducidos por flexión mayores en el interior del muro, conforme decrece la relación L/H cuando el muro tiene un confinamiento pobre, además de que la propagación de las grietas puede alcanzar rápidamente al peralte total del muro.

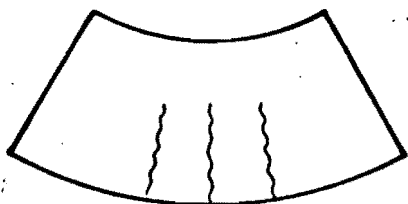


fig. (II.16)
Efectos de flexión.

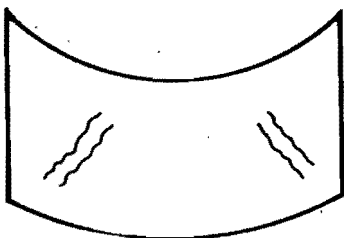


fig. (II.17)
Efectos de cortante.

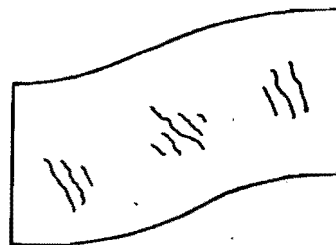


fig. (II.18)
Efecto de flexión y cortante.

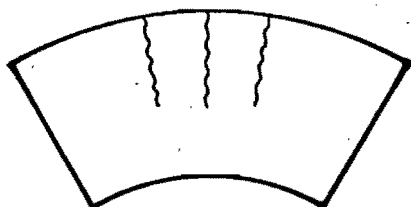


fig. (II.19)
Flexión con concavidad hacia abajo.

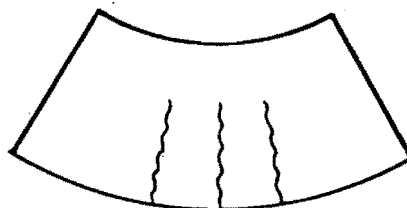


fig. (II.20)
Flexión con concavidad hacia arriba.

Bajo el efecto de deformaciones con concavidad hacia abajo, en la base de los muros, se han encontrado valores de σ_0 del orden de la mitad de los correspondientes a perfiles de asentamientos con concavidad hacia arriba. Esto es particularmente importante en el caso de tuneleo en zonas urbanas, ya que existen zonas con este tipo de deformación (figs. III.1, III.2), en los perfiles de asentamientos superficiales generados por tuneleo, que pueden causar daños en estructuras, para distorsiones angula-

res del orden de las presentadas en la tabla II.6.

Dadas las características variables, en cuanto a curvaturas y desplazamientos relativos de los perfiles de desplazamientos horizontales y verticales, generados en la superficie por procesos de tuneleo, es necesario identificar las distorsiones angulares a que se encuentra sometido un muro, dependiendo de su posición relativa con respecto al frente de avance del túnel.

De esta manera, puede plantearse una correlación entre las distorsiones angulares que se generan en un muro con ciertas características de carga y geometría y su posición relativa respecto al frente de avance del túnel. Por otro lado, para distintos materiales y conformaciones de un muro de mampostería, se puede obtener experimentalmente el valor de las distorsiones angulares que ocasionan el agrietamiento (ref. 28). Al comparar estas con las distorsiones angulares provocadas por tuneleo, para distintas posiciones de las estructuras con respecto al frente de avance del túnel, se podrá estimar si un muro de mampostería sufrirá daños debido a los desplazamientos superficiales inducidos por el proceso de tuneleo.

Los daños en muros, ocasionados por hundimientos diferenciales, se manifiestan en forma de grietas resultantes de esfuerzos de tensión. A partir de pruebas de laboratorio, ensayando especímenes de mampostería con distintas características, sometidas a la acción de tensiones indirectas, mediante compresión diagonal, se ha observado que las deformaciones unitarias de agrietamiento son del orden de $1/3 \delta_0$, para el tipo de deformación presentado en la (fig. II.21) (ref. 28).

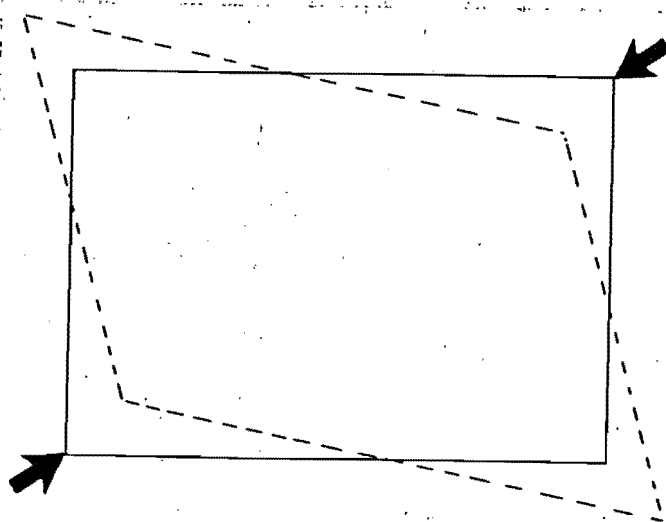


fig. (II.21)
Deformaciones por tensión indirecta.

Los valores encontrados por R. Meli para δ_0 , varían entre 0.002 y 0.003 como se indica en la (tabla II.6); de tal manera que $\epsilon_{crit} = 1/3 \delta_0$ varía entre 0.00066 y 0.001 dependiendo de las características de carga y de las holguras entre el muro y

su confinamiento (muros de carga o panel).

Por otro lado, en pruebas de marcos con muros confinados por marcos, a base de bloques huecos, bloques de escoria y ladrillos, Mainstone encontró que para distorsiones del orden de 0.0022 a 0.0033 debidas principalmente a fuerzas cortantes; el promedio de las deformaciones unitarias principales

$$\epsilon = (df - di) / di \times 100 \quad \dots (II.15)$$

fueron del orden de 0.0011 a 0.0016, cuando las mediciones se hicieron sobre los marcos (fig. II.22.a), y del orden de 0.0005 a 0.0010 cuando se hicieron sobre los muros (fig. II.22 b). Esta diferencia se debe a que la conducta del marco y el muro no es completamente en modo cortante y el muro no puede seguir los desplazamientos del marco. Cuando existen juntas entre marco y muro, las mediciones de ϵ sobre el muro se reducen al aumentar el espesor de las juntas.

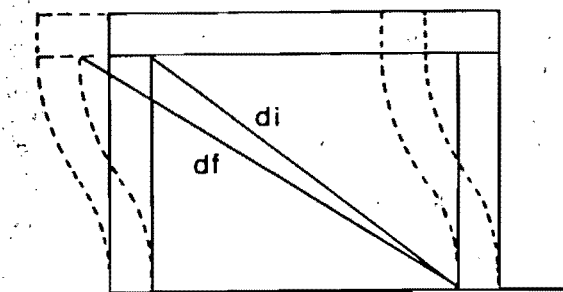


fig. (II.22.a)
Mediciones sobre el marco.

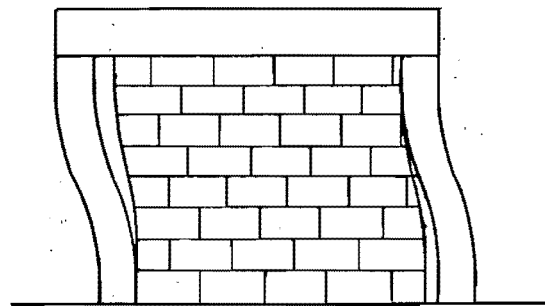


fig. (II.22.b)
Mediciones sobre el muro.

Polshin y Tokar, a partir de mediciones de desplazamientos en la cimentación de edificios de mampostería a base de ladrillos macizos, encontraron variaciones en los valores de ϵ_0 al variar la relación L/H (fig. II.23) de los muros que estudiaron, pero para todos ellos estimaron las deformaciones unitarias ϵ_0 en un valor de 0.0005. Este valor para ϵ_0 es del mismo orden de magnitud que los publicados por Burhouse, a partir de experimentos en los cuales se estudió el comportamiento de conjunto de vigas de concreto con muros de mampostería.

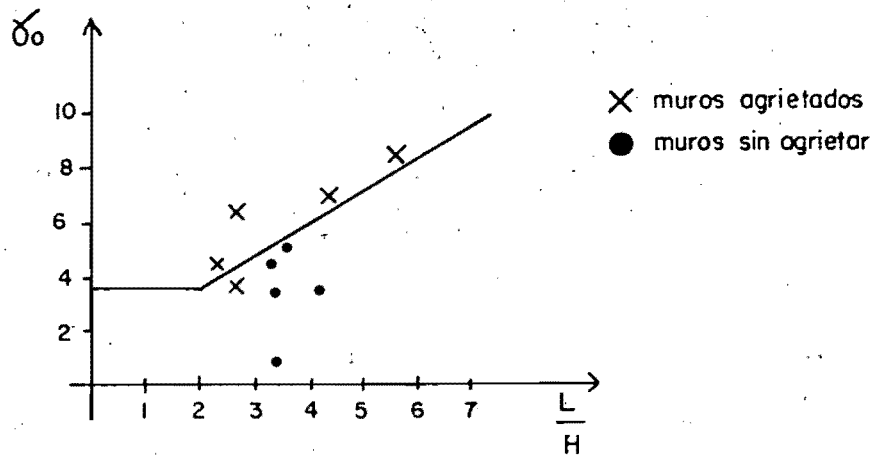


fig. (II.23)
Relación ϵ_0 - L/H
(Polshin-Tokar)

Los campos de esfuerzos y desplazamientos que se generan en el interior de un muro, cuando se le somete a distorsiones que generan tensiones internas por la presencia de momentos flexionantes o fuerzas cortantes, varían apreciablemente para cada uno de estos efectos. Sin embargo, cuando la geometría deformada en modo flexionante tiene concavidad hacia arriba (fig. II.20), las diferencias en las deformaciones unitarias que producen agrietamiento visible (ϵ_0), para cada uno de los efectos y para una combinación de ellos, es despreciable cuando se conservan las cargas externas y la configuración inicial del muro (ref. 6).

Además, cabe mencionar que el rango de variación de ϵ_0 para muros de mampostería sometidos a hundimientos diferenciales, son del mismo orden que los que se presentan por efectos de contracciones. Estas relaciones permiten definir intervalos en la variación de ϵ_0 , independientes del tipo de carga, distorsión o esfuerzos térmicos, lo cual hace de ϵ_0 un parámetro atractivo para el estudio de daños en muros inducidos por tuneleo.

Es importante notar que cuando son significativas las deformaciones por flexión, se reducen los valores de ϵ_0 . Por otro lado, la presencia de carga vertical influye más sobre ϵ_0 cuando son importantes las deformaciones debidas a esfuerzos cortantes, ya que éstos generan acciones de tensión diagonal, cuya componente vertical se ve contrarrestada en mayor o menor medida, por la presencia de carga vertical.

Hasta ahora, se han planteado criterios de daño, en términos de desplazamientos verticales relativos δ . Es importante definir criterios análogos cuando los desplazamientos relativos son horizontales. Bajo la acción de este tipo de desplazamientos, se inducen esfuerzos directos de tensión que tienden a abrir las estructuras, presentándose valores de ϵ_0 considerablemente menores a los que se presentan cuando las deformaciones son debidas a fuerzas cortantes (fig. II.17), y del mismo orden a los que se presentan cuando las deformaciones son debidas a flexión, sobre todo cuando el perfil de asentamientos tiene concavidad hacia abajo (fig.

II.19), que como se mencionó antes, es una de las condiciones más desfavorables para las estructuras.

En la tabla II.7 se describe el nivel de daño en estructuras, ocasionado por distintos valores de la deformación unitaria horizontal del terreno (ref. 13).

En relación con el estudio de daños en elementos de mampostería ocasionados por desplazamientos relativos, se han realizado pruebas de laboratorio sobre especímenes sometidos a la acción de cargas diagonales, con aplicación lenta (2 meses) y rápida (unos cuantos minutos) de carga (ref. 28).

A partir de estos ensayos, se ha observado que con aplicación rápida de carga, la falla es más frágil y el ancho de las grietas crece más rápido que con aplicación lenta de carga. Sin embargo, la distorsión angular de agrietamiento (γ_0) es aproximadamente igual para ambas velocidades de aplicación de carga. Además, la distorsión angular de agrietamiento se conserva prácticamente constante para muros sin confinar, muros confinados y muros con refuerzo, aunque el confinamiento y el refuerzo sí aumentan los esfuerzos cortantes resistentes cuando se presenta la distorsión de agrietamiento (fig. II.24) (ref. 28).

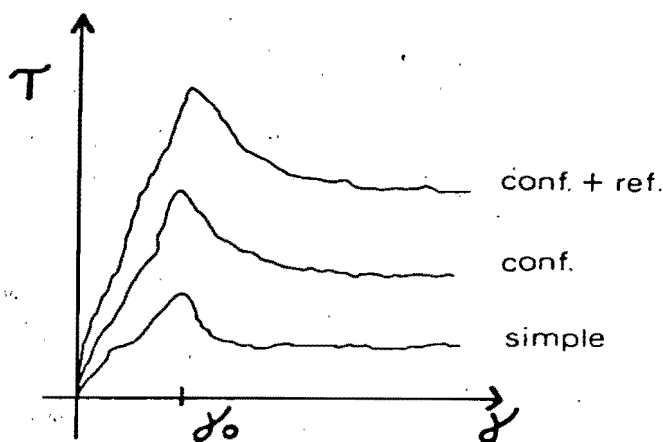


fig. II.24
Diagrama $T - \gamma$ para distintos
grados de confinamiento.

En problemas de tunelaje, los perfiles de desplazamientos superficiales, que se generan en la vecindad de alguna estructura, se desarrollan en el transcurso de unas cuantas semanas (refs. 4,8), por lo que no puede presentarse un acomodo gradual de las estructuras, sin la presencia de esfuerzos significativos de tensión, en el interior de los muros.

Por otro lado, se han realizado mediciones de campo en problemas de tunelaje (refs. 8,10,13), que corresponden con el orden de magnitud de las distorsiones angulares (tabla II.6) y deformaciones unitarias horizontales del terreno (tabla II.7) para las que se puede alcanzar un nivel de daño importante.

TABLA II. 2

AUTOR	DISTORSION ANGULAR MAXIMA SUGERIDA	DETALLES
Polshin y Tokar	1/3000 - 1/2500	$1/H \leq 3$ $1/H \geq 5$
	1/1000	Muros de tabique para un edificio de un piso
	1/500	Estructuras con marcos de acero y concreto reforzado
	1/150 - 1/100	Muros de tabique macizo en líneas extremas de columnas

TABLA II. 3

AUTOR	DISTORSION ANGULAR MAXIMA SUGERIDA	DETALLES
Meyerhof	1/20 000	Muros de tabique macizo con: altura = 2.50 mts. claro = 3.00 mts.
	1/ 4000	Muros de tabique macizo sobre vigas de concreto reforzado con: claro = 3.20 Mts.
	1/4500 - 1/7000	Muros de tabique macizo ligeramente reforzados con: altura = 3.00 mts. longitud = 9.00 mts. descansando sobre zapatas corridas de concreto.
	1/ 1000	Observaciones en muros de tabique macizo.
	1/ 2000	Valor de diseño sugerido por Meyerhof.
	1/ 300	Asentamiento diferencial entre columnas adyacentes de marcos abiertos de acero y concreto reforzado
	1/300 - 1/400	Experimentos sobre paneles de tabique macizo de 3.00 X 3.65 metros.
	1/1000	Sugerido por Meyerhof para diseño de marcos con muros interiores.

TABLA II.4

RECOMENDACIONES DE BJERRUM

DISTORSIONES ANGULARES, LIMITES EN EDIFICIOS MODERNOS

- 1/800 - MÁQUINAS SENSIBLES
- 1/600 - LÍMITE DE PELIGRO PARA ESTRUCTURAS DE VIGAS CON DIAGONALES
- 1/500 - LÍMITE DE SEGURIDAD PARA ESTRUCTURAS QUE NO PERMITAN FISURAS
- 1/300 - LÍMITE CUANDO SE ESPERAN GRIETAS EN LOS MUROS
- 1/250 - LÍMITE CUANDO EL GIRO DE EDIFICIOS ALTOS Y RÍGIDOS PUEDE SER VISIBLE
- 1/150 - GRIETAS CONSIDERABLES EN PAREDES Y MUROS DE MAMPOSTERÍA
- 1/130 - LÍMITE DE SEGURIDAD PARA MUROS FLEXIBLES DE MAMPOSTERÍA (ALTURA/LONGITUD - 1/4)
- 1/180 - LÍMITE CUANDO PUEDEN OCURRIR DAÑOS ESTRUCTURALES EN EDIFICIOS NORMALES.

TABLA II.5

CRITERIOS DE SKEMPTON Y MC.DONALD

A. ASENTAMIENTOS MAXIMOS

(LÍMITES ADMISIBLES PARA QUE NO SE PRODUZCAN DAÑOS).

- * CIMIENTOS AISLADOS EN ARCILLA 65 MM
- * CIMIENTO AISLADO EN ARENA 40 MM
- * LOSAS EN ARCILLA 65 -100 MM
- * LOSAS EN ARENA 40 - 65 MM

SKEMPTON Y Mc. DONALD RECOMIENDAN LIMITAR A 50 MM. EN ARCILLAS Y A 25 MM. EN ARENAS PARA ASEGURAR QUE NO HAYA DAÑOS.

B. DISTORSIONES ANGULARES

LÍMITE ADMISIBLE PARA QUE NO SE PRODUZCAN DAÑOS EN EDIFICIOS A BASE DE MARCOS (RELACIÓN LONGITUD-ALTURA = 3): 1/500.

TABLA I.L. 6.- DISTORSIONES ANGULARES DE AGRIETAMIENTO (‰)
EN MUROS DE MAMPOSTERIA SIN REFUERZO.

AUTOR	ELEMENTO	CARGA VERT. (Kg/cm ²)	CONCAVIDAD		L/H
			HACIA ARRIBA	HACIA ABAJO	
BJERRUM Y SKEMPTON MC. DONALD	MUROS PANEL MUROS DE CARGA	—	0.003-0.004	—	—
GRANT					
POLSHIN TOKAR	MUROS DE CARGA MUROS PANEL	—	0.0003-0.0004 0.0005-0.0007 0.003-0.004	—	3 5 —
BURLAND WROTH	MUROS DE CARGA	—	0.0004 0.0008	0.0002 0.0004	<1 >5
O'ROURKE	MUROS DE CARGA	—	0.001-0.0013	0.001-0.0013	—
MELI	MUROS DE CARGA MUROS PANEL	<2 >2 —	0.002 0.003 0.003	— — —	1 1 1
MAINSTONE	MUROS PANEL	—	0.002-0.003	—	—
CHENEY BURFORD	MUROS DE CARGA	—	—	0.000154 ⁽¹⁾ 0.00021 ⁽²⁾	— —
LITTLEJOHN	MUROS DE CARGA	—	—	0.00072 ⁽³⁾	12.5-17.0

NOTAS. (1).- APARICION DE GRIETAS
(2).- ANCHO DE GRIETAS = 2.5 mm.
(3).- MURO AGRIETADO A LO LARGO DE TODO SU PERALTE.

TABLA II.7.- DAÑO CAUSADO POR MOVIMIENTOS HORIZONTALES DEL TERRENO.

DEFORMACION UNIT. DEL TERRENO.	NIVEL DE DAÑO.	DESCRIPCION DEL DAÑO.
HASTA 0.001	DESPRECIABLE.	GRIETAS NO VISIBLES EXTERNAMENTE
0.001 - 0.002	LIGERO	FRACTURAS PEQUEÑAS. DESPRENDIMIENTO DE RECUBRIMIENTOS.
0.002 - 0.003	APRECIABLE	PEQUEÑAS FRACTURAS VISIBLES EXTERNAMENTE. FRACTURAS EN TUBERIAS.
0.003 - 0.004	SEVERO	ROTURA DE TUBERIAS. FRACTURAS ABIERTAS EN MUROS. DISTORSION DE PUERTAS Y VENTANAS. INCLINACION Y DISTORSION DE MUROS.
0.005 O MAYOR	MUY SEVERO	LOS EDIFICIOS PUEDEN REQUERIR DE RECONSTRUCCION PARCIAL O TOTAL.

TABLA II. 8.- VALORES DE $E_0\%$ PARA MUROS PANEL A ESCALA NATURAL.

AUTOR	PRUEBA	$E_0(\%)$	CARGA-VERTICAL	L/H
MELI	COMPRESION	0.07	<2 Kg/cm ²	1
	DIAGONAL	0.10	>2 Kg/cm ²	1
MAINSTONE	DISTORSION	0.081 - 0.137 ⁽²⁾	—	—
	POR CORTE EN	0.05 - 0.10 ⁽¹⁾		
	MARCOS CON MUROS PANEL	0.11 - 0.16		
POLSHIN TOKAR	MEDICIONES DE CAMPO	0.05	—	—
BURHOUSE	DISTORSION POR FLEXION Y CORTE EN MUROS PANEL	0.038 - 0.06	—	1.2-3.0

NOTAS. (1) 1º TRABAJO DE MAINSTONE
 (2) 2º TRABAJO DE MAINSTONE
 • MEDICIONES SOBRE EL MARCO



MODELO PROPUESTO

III.1.- PLANTEAMIENTO E HIPOTESIS.

Como resultado de los procesos de excavación y construcción de túneles, se generan perfiles de desplazamientos verticales y horizontales en la superficie. Estos perfiles se forman gradualmente y siguen distintas tendencias conforme se avanza en la construcción del túnel a lo largo de su eje (refs. 8,13,33).

En las figs. III.1 y III.2 se ilustra una trayectoria de los perfiles de desplazamientos verticales generados en la superficie, desde su posición inicial antes del paso del frente de excavación, hasta su posición final después de su paso por la sección de referencia, en los sentidos transversal y paralelo al eje del túnel, respectivamente.

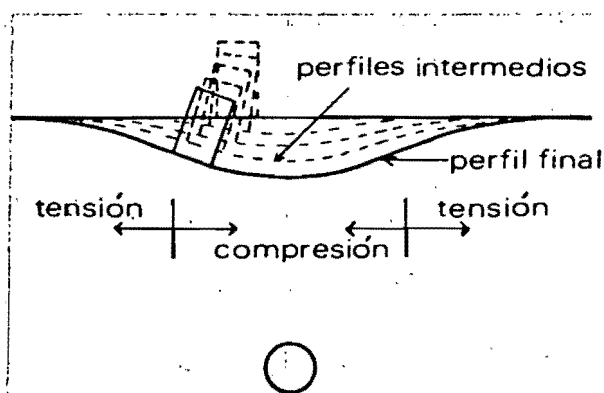


fig. III.1
Perfil transversal
de asentamientos.

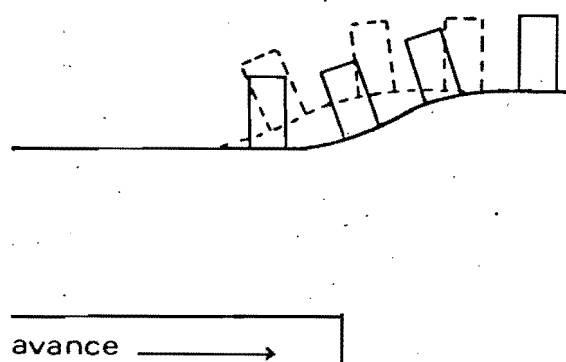


fig. III.2
Perfil longitudinal
de asentamientos.

Se presentan también movimientos horizontales, los cuales son importantes por dos razones:

- a).- Pueden producirse deformaciones unitarias horizontales del terreno, del orden de las descritas en la tabla II.7 y dañar a las estructuras ubicadas en la superficie.
- b).- Pueden producir altas presiones laterales sobre las estructuras situadas bajo la superficie del terreno en zonas de compresión.

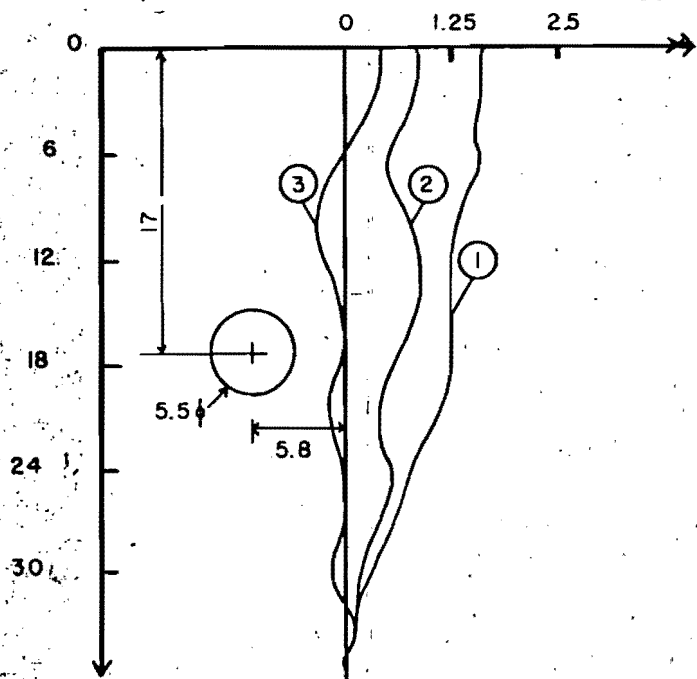
En la zona de interfase suelo-estructura, existe la posibilidad de que estas dos entidades no sigan el mismo patrón de desplazamientos, debido a la presencia de discontinuidades importantes. En este trabajo, se tiene en cuenta esta posibilidad, mediante la introducción de elementos de contacto que no son capaces de admitir esfuerzos de tensión, propiciando que suelo y estructura se despeguen, cuando se presenta este tipo de esfuerzos en la zona de interfase.

En términos generales, no se ha puesto mucha atención a los desplazamientos horizontales tal vez por la falta de sistemas

iniciales de referencia para medirlos o tal vez por falta de evidencias directas. Sin embargo, en problemas de tuneleo pueden afectar significativamente a las estructuras desplantadas en la superficie.

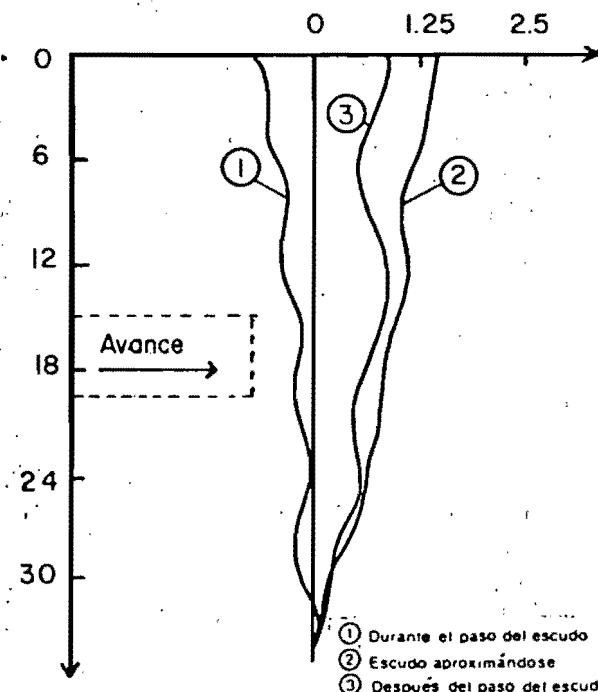
La evidencia de desplazamientos horizontales inducidos por tuneleo, no es permanente. En las figs. (III.3, III.4) se muestra una tendencia de variación de los desplazamientos horizontales para un caso particular (ref. 33).

Desplazamiento horizontal en centímetros



Profundidad en metros

fig. III.3
Desplazamientos horizontales
Sentido transversal.



- ① Durante el paso del escudo
- ② Escudo aproximándose
- ③ Después del paso del escudo

fig. III.4
Desplazamientos horizontales
Sentido longitudinal.

Cualitativamente, el perfil de asentamientos superficiales generados por el proceso de tuneleo, se presenta en la fig. (III.5), cuando no se ve afectado por la presencia de estructuras desplantadas en la superficie (ref. 13).

Por otro lado, existe evidencia de campo, de que la presencia de estructuras en la superficie, influye en los perfiles de desplazamientos, hasta una cierta profundidad (refs. 4,3), teniendo mayor influencia en la zona de interfase suelo-estructura, y disminuyendo al alejarse de ésta hacia el eje del túnel. Al estimar el nivel de daños en estructuras, inducidos por tuneleo, esta influencia hace necesario estudiar a la región afectada, teniendo en cuenta la presencia de estructuras desplantadas en la superficie. Hasta ahora, ninguno de los métodos descritos en el capítulo II, considera esta posibilidad.

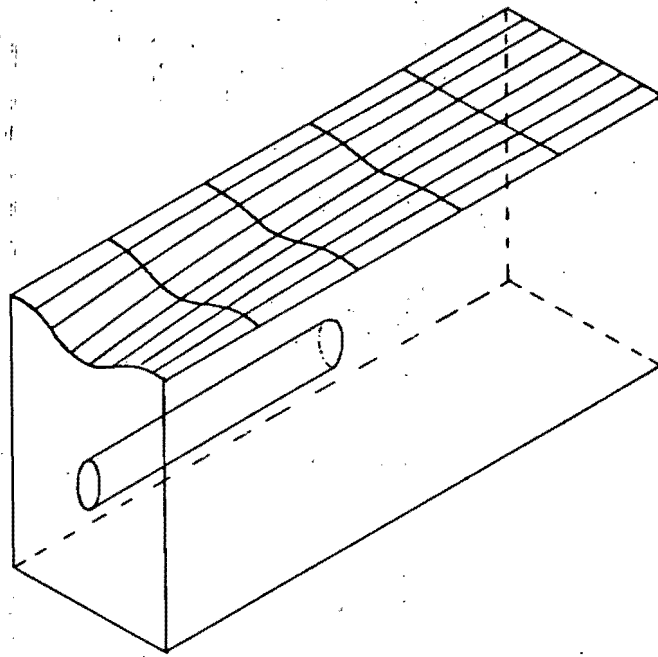


fig. III.5
 Perfil superficial de asentamientos
 generados por tuneleo.

Dadas las posibilidades que el Método de los Elementos Finitos ofrece para modelar la región afectada por trabajos de excavación y construcción de túneles, se han desarrollado modelos de análisis basados en este método, que intentan describir el comportamiento de esta región (refs. 19,20,26).

En estos análisis, se estudia el comportamiento de los suelos para cada paso en el proceso constructivo de un túnel, obteniéndose un perfil de asentamientos superficiales para cada uno de estos pasos, por lo que estos análisis permiten conocer la trayectoria del perfil de asentamientos superficiales desde su posición inicial hasta su posición final (figs. III.1, III.2), conforme se avanza en el proceso de excavación. Sin embargo, la ejecución de análisis de este tipo, requiere de un enorme esfuerzo computacional y de un correspondiente alto costo de cómputo. Si a la región analizada de esta manera, se le añade la presencia de estructuras en la superficie, el tamaño del problema y sus requerimientos computacionales crecen de manera extraordinaria. En la actualidad no es práctico realizar análisis de este tipo, debido al alto costo involucrado.

Durante la excavación y construcción de túneles, se presentan niveles altos de esfuerzos en la masa de suelo que los rodea, presentándose incluso, efectos de remoldeo (fig. II.1). Estos esfuerzos disminuyen conforme aumenta la distancia al eje del túnel (ref. 37).

En este trabajo, se realiza una serie de análisis elástico-lineales de carácter tridimensional, empleando el Método de los

Elementos Finitos, de la parte simétrica de una región que no involucra la zona de altos esfuerzos alrededor del túnel y que contempla la existencia de estructuras en la superficie (fig. III.6)

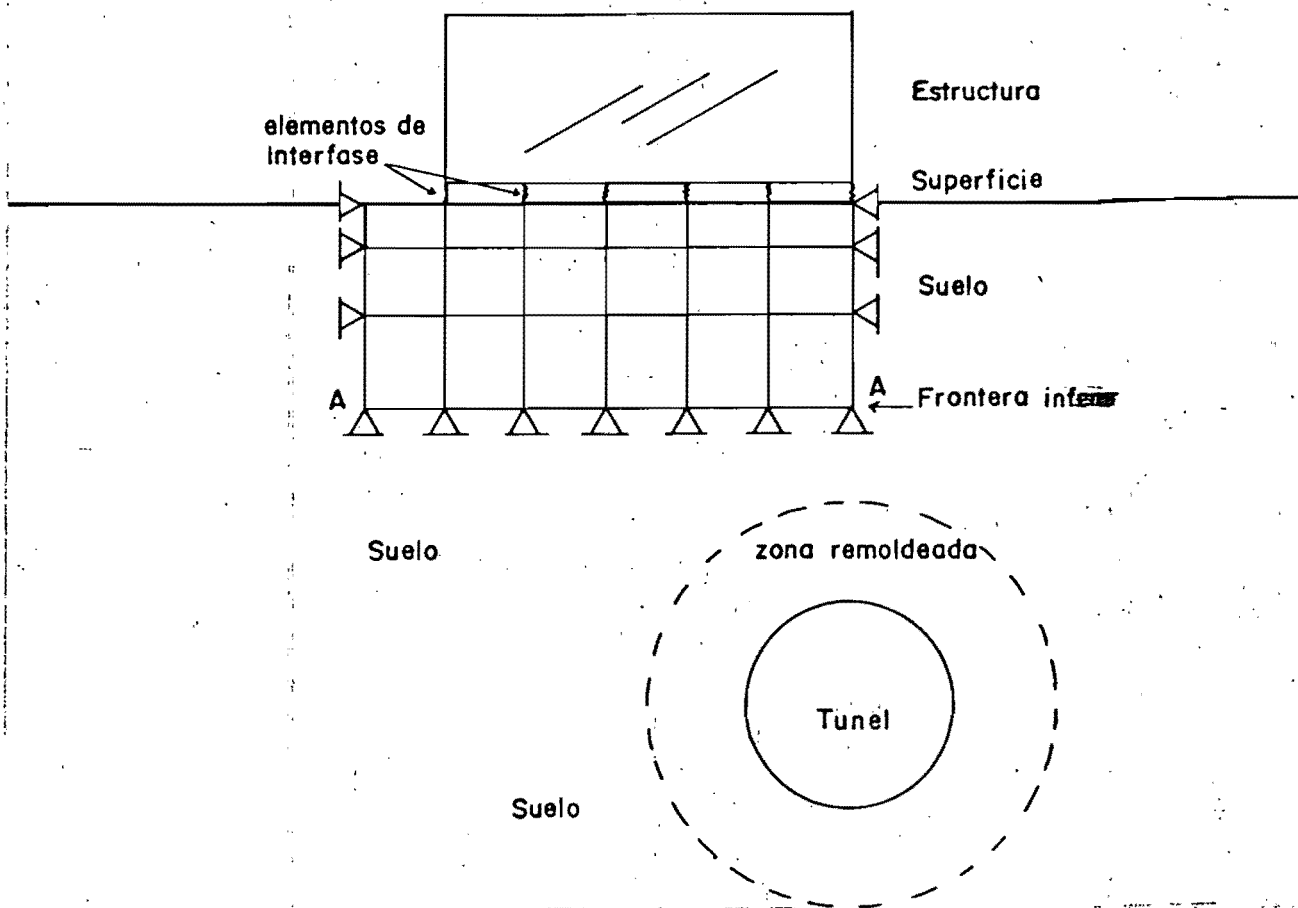


fig. III.6
Región considerada en el modelo suelo-estructura.

En la región considerada, la frontera inferior corresponde a una profundidad en la cual no influye significativamente la presencia de estructuras desplazadas en la superficie (refs. 4,8), por lo que a esa profundidad los perfiles de desplazamientos verticales y horizontales que produce el tuneleo, son prácticamente independientes de esas estructuras.

En este trabajo se analiza a la región suelo-estructura, para varias posiciones de las estructuras con respecto al frente de avance del túnel (sección III.6), prescribiendo una historia de desplazamientos medidos en campo (figs. III.7, III.8 y III.9) (ref. 8), en una sección perpendicular al eje del túnel al nivel de la frontera A-A (fig. III.6). Esta historia de desplazamientos contempla la variación de los mismos conforme se aproxima el frente de excavación y después de que ha pasado por la sección de

referencia, hasta que se estabilizan en valores aproximadamente constantes.

En las figs. III.7 a III.9, se muestra la historia de desplazamientos empleada en los análisis (sección III.6), medidos en campo (ref. 8), a una profundidad de 5.5 m. durante la construcción en suelo blando, cuyas propiedades se describen en la ref. 8, de un túnel de 6.3 m. de diámetro, cuyo eje se encuentra a una profundidad de 12.25 m. En estas figuras, se observa la variabilidad de los desplazamientos verticales (fig. III.7) y horizontales (figs. III.8, III.9), conforme se aproxima el frente de avance del túnel, al punto de referencia. Estos desplazamientos comienzan a generarse desde aproximadamente 30 m. antes de que el frente de excavación pase por el punto de referencia y se estabilizan posteriormente hasta que empiezan a tener variaciones importantes desde aproximadamente 10m. antes de que pase el frente del escudo. Estas variaciones continúan hasta aproximadamente 15 m. después de que ha pasado el frente de excavación por el punto de referencia, permaneciendo después, aproximadamente constantes.

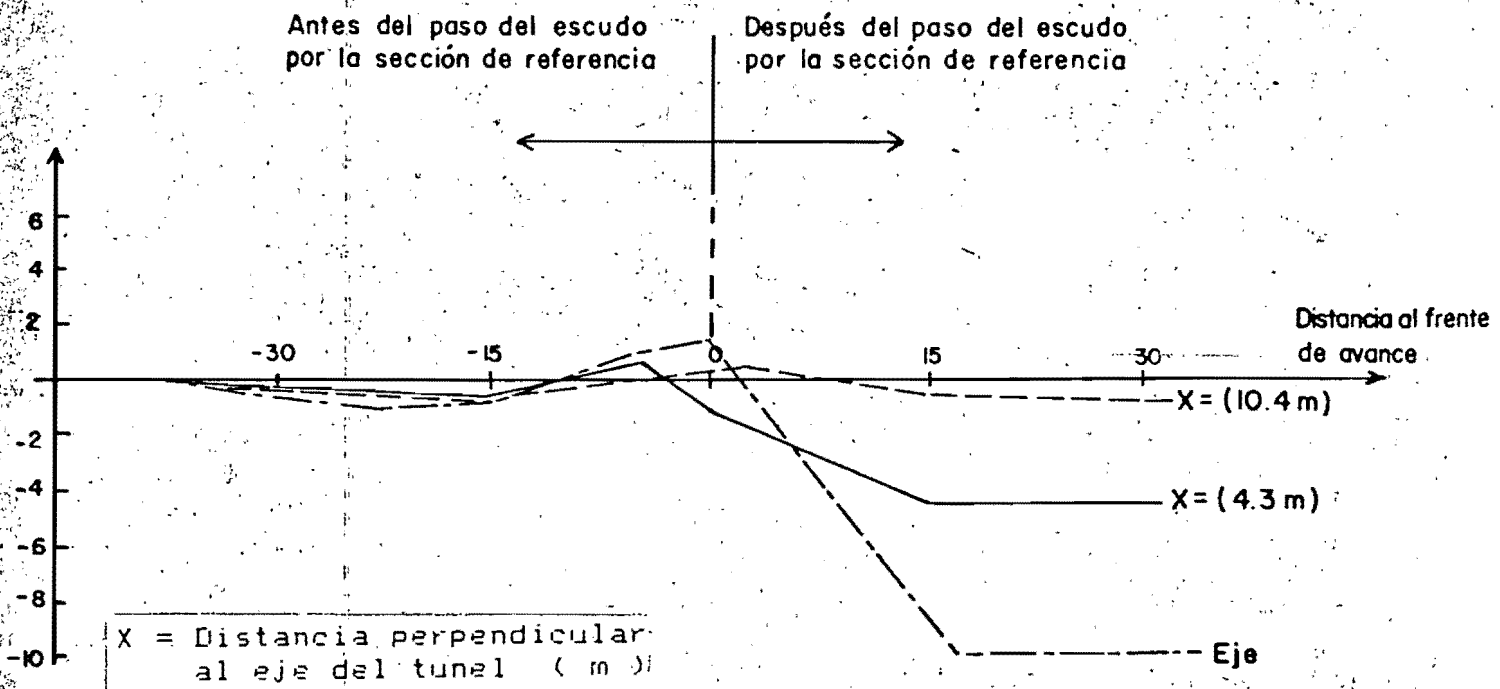


fig. III. 7
Desplazamientos verticales medidos a 5.5 m. de Profundidad.
(D = 6.3 m. ; Profundidad del eje = 12.25 m.)

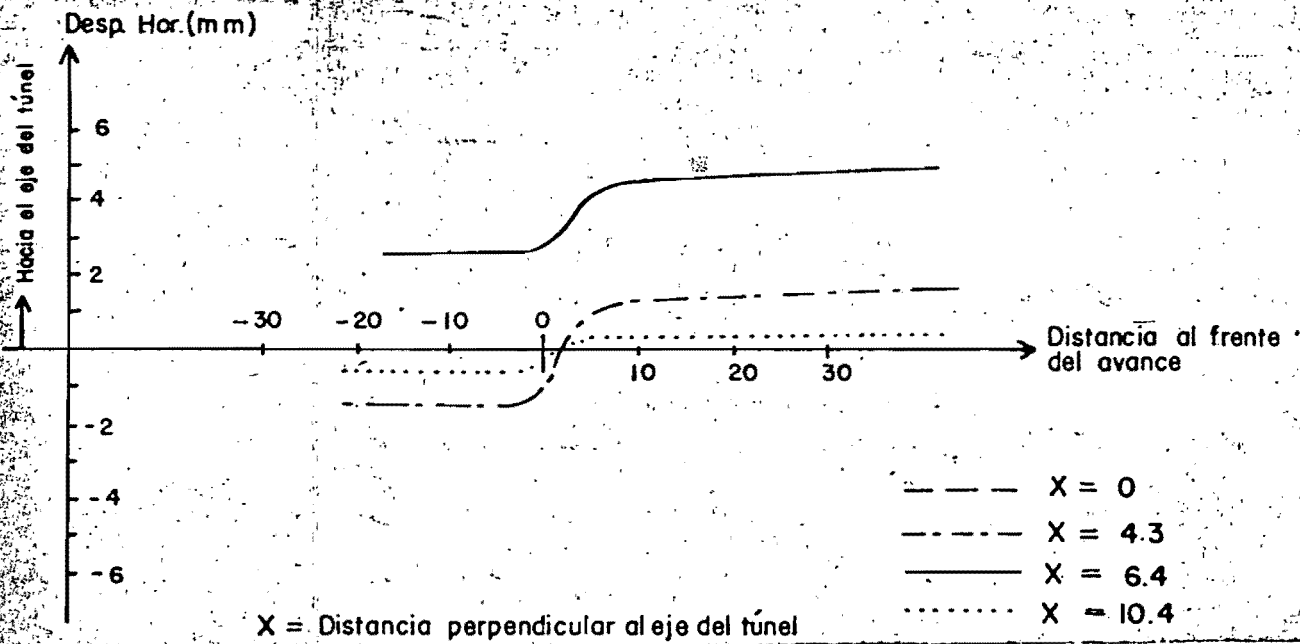


fig. III.8
 Desplazamientos horizontales perpendiculares al eje del túnel medidos a 5.5 m de Prof. (D = 6.3 m. ; Prof. eje = 12.25 m.)

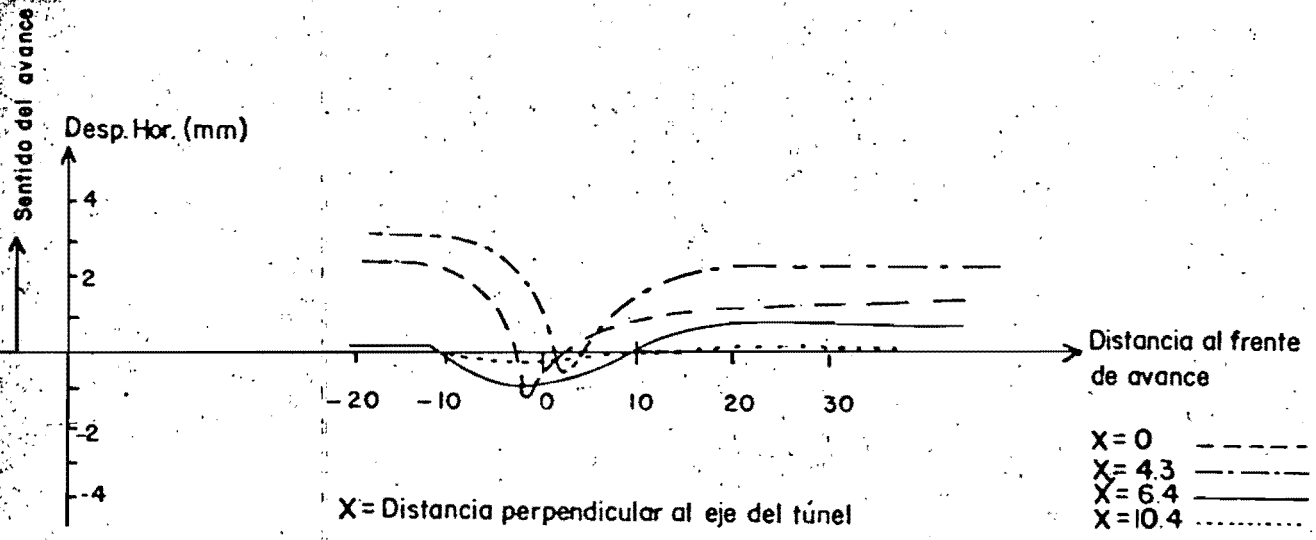


fig. III.9
 Desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel medidos a una Profundidad de 5.5 m. (D = 6.3 m. ; Prof. eje = 12.25 m.)

En la región en estudio (fig. III.6) se considera que las fronteras perpendiculares al eje del túnel, se encuentran definidas por secciones en las que se estabilizan los desplazamientos

verticales y horizontales. Estas corresponden a 10 m. antes de que pase el frente de excavación y a 15 m. después de que ha pasado por la sección de referencia.

En el sentido transversal al eje del túnel, las fronteras laterales se fijan en zonas donde los desplazamientos verticales y horizontales dejan de ser significativos en comparación con sus valores máximos. En las figs. III.7, III.8 y III.9 esta zona se encuentra a una distancia de aproximadamente 10 m. del eje del túnel, medida en sentido transversal a éste.

Mediante la aplicación del Método de los Elementos Finitos, al análisis de una región tridimensional afectada por trabajos de tuneleo, que toma en cuenta la presencia de estructuras en la superficie, se requiere de un gran número de elementos finitos para representar su geometría, teniéndose como resultado una gran cantidad de información relativa a desplazamientos, esfuerzos y deformaciones que se generan dentro de la región en estudio, requiriéndose además, de una gran cantidad de memoria y tiempo de ejecución en computadora, con un correspondiente alto costo de análisis.

Por otro lado, al estudiar los daños potenciales en estructuras, a través de las deformaciones unitarias horizontales y de las distorsiones angulares inducidas en su base, por trabajos de tuneleo, es necesario conocer el campo de desplazamientos que se genera en la superficie, conforme se avanza en la trayectoria del túnel, y cuál es el efecto que causa sobre ellas, por lo que es deseable plantear un algoritmo que permita analizar la región suelo-estructura de tal manera que se obtenga como resultado solamente los desplazamientos verticales y horizontales que se generan en la zona de interfase, con lo que se reducen significativamente los requerimientos computacionales.

Este algoritmo corresponde a representar las características de cargas y rigideces de suelo y estructuras, asociadas solamente a los nodos que definen la frontera entre ellos. Las rigideces y cargas de la masa de suelo, deberán asociarse, además, a los nodos que definen la frontera A-A en la fig. III.6, para hacer posible la prescripción de la historia de desplazamientos medidos en campo a esa profundidad.

En este trabajo, para lograr definir las cargas y rigideces de esta manera, se desarrolla un algoritmo de subestructuración que puede usarse de manera eficiente y económica, desde el punto de vista de memoria necesaria y tiempo de proceso en computadora. En las siguientes secciones se describe este algoritmo, así como su implantación en un programa de análisis basado en el Método de los Elementos Finitos.

III.2.- EL CONCEPTO DE SUBESTRUCTURACION.

Con el advenimiento de las computadoras, ha sido posible desarrollar de manera numérica, la solución de problemas estructurales complejos en cuanto a la definición de su geometría, el tamaño físico del problema y la solución de las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan. Uno de los métodos numéricos y por lo tanto aproximados, de solución de estructuras complejas, es el método del elemento finito, el cual requiere de la discretización de la región en estudio, en elementos más pequeños, denominados elementos finitos, en los que, de manera aproximada, sea posible establecer las variables cinemáticas (desplazamientos, giros, etc.), empleando funciones continuas de la clase que las características físicas del problema lo requiera, que nos permitan describir su rigidez K^e y sus cargas P^e asociadas a entidades estructurales en su frontera, a las cuales se les denomina nodos. De esta manera, el problema continuo se reduce a uno discreto que garantiza la continuidad de variables cinemáticas, requerida dentro del elemento. La continuidad cinemática entre elementos, se logra al establecer la definición de las variables cinemáticas, como resultado de la solución del sistema de ecuaciones $K U = P$ en donde K y P son matrices de rigideces y de cargas de la estructura global, formadas mediante la suma ordenada en un marco de referencia global, de las rigideces y cargas asociadas a los nodos de cada elemento, referidas a su marco local de referencia, y U es el vector correspondiente a las variables cinemáticas referidas a los nodos en un marco de referencia global.

Después de conocer el valor de las variables cinemáticas en todos los nodos de la estructura, es fácil conocer su variación dentro del elemento, a través de las funciones continuas que se usaron en la formación de las matrices K^e y P^e y establecer los parámetros de interés (deformaciones, esfuerzos), dependientes del campo de variables cinemáticas, mediante la aplicación de operadores diferenciales que relacionan al campo de desplazamientos con el campo de deformaciones, y de relaciones constitutivas entre los campos de deformaciones y esfuerzos.

Existen problemas (N2) en los cuales es necesario definir una discretización que requiera un gran número de elementos finitos, lo cual hace que, además, se incrementen considerablemente los requerimientos de memoria y tiempo de ejecución en computadora. Esto se refleja en un costo elevado y en ocasiones en la imposibilidad de obtener soluciones suficientemente precisas, debido a las limitaciones en la disponibilidad de memoria de la computadora.

N2.- El número de elementos finitos necesarios para obtener una aproximación adecuada, está en función de las variaciones en cuanto a propiedades físicas y condiciones de carga de la región en estudio, requiriéndose un mayor número de elementos en las zonas donde existen cambios importantes en las propiedades físicas de la región en estudio, o concentraciones importantes de carga.

Para analizar este tipo de problemas, se ha pensado en definir elementos de gran tamaño que contengan la geometría y propiedades de una región discretizada en un gran número de elementos finitos.

A estos elementos de gran tamaño, se les ha llamado superelementos. (fig. III.10).

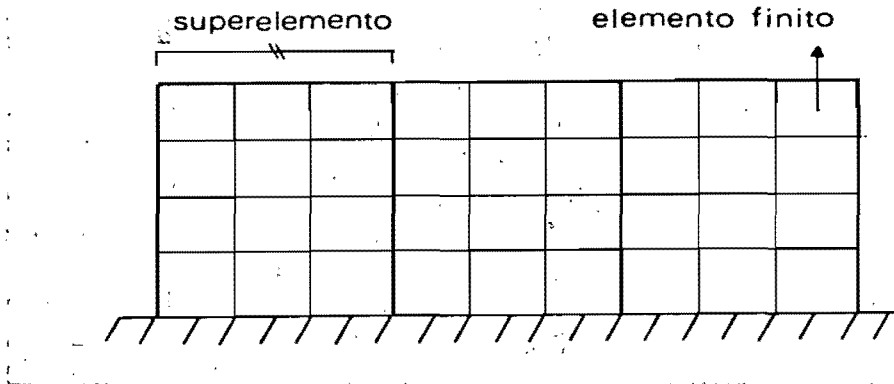


fig. (III.10)
Definición de superelemento.

Las propiedades de rigidez y carga que definen a un elemento finito o a una región definida mediante un superelemento, se obtienen a través de planteamientos numéricos, se asocian a sus nodos y se refieren a un marco de referencia local (fig. III.11.a).

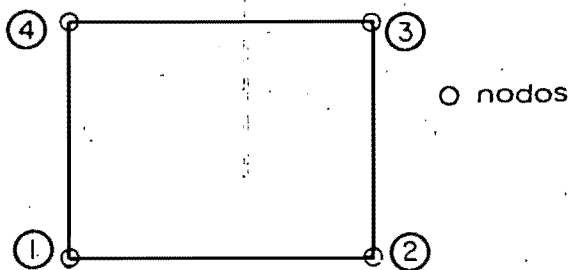


fig. (III.11.a)
Marco de referencia local para un elemento finito.

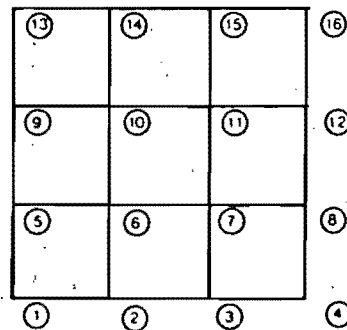


fig. (III.11.b)
Marco de referencia local para un superelemento.

En general, es conveniente definir la posición de los nodos de un elemento finito, en su periferia, para poder establecer condiciones de continuidad entre elementos. La continuidad dentro de los elementos, está definida a través de funciones continuas

llamadas funciones de interpolación, de la clase que el problema lo requiera. Sin embargo, es posible definir la posición de los nodos en cualquier punto. Así, un superelemento puede concebirse como un elemento finito de gran tamaño, con nodos ubicados tanto en su periferia como en su interior, y referidos a un marco de referencia local (fig.III.11.b).

Es deseable, al igual que en un elemento finito, que las matrices de rigideces \underline{K}^{se} y de cargas \underline{P}^{se} representativas de un superelemento, estén asociadas a nodos ubicados en su periferia solamente y buscar de alguna manera que exista continuidad de las variables cinemáticas, en el interior de la región asociada a él. En la siguiente sección, se presentan planteamientos para representar las rigideces y las cargas de un superelemento, definidas solamente en los nodos de su periferia. En lo sucesivo, a estas matrices se les denomina \underline{K} y \underline{P} respectivamente. Así, considerando una región plana en la cual se tengan 2 grados de libertad por nodo, 36 elementos, 50 nodos y condiciones de frontera como se indica en la (fig. III.12.a), se llega a un sistema $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$ de 80 ecuaciones.

Por otro lado, si se introduce la idea de superelementos, la misma región puede discretizarse en 3 superelementos con 14 nodos en su periferia y conducir a un sistema $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$ de 44 ecuaciones, fig. (III.12.b).

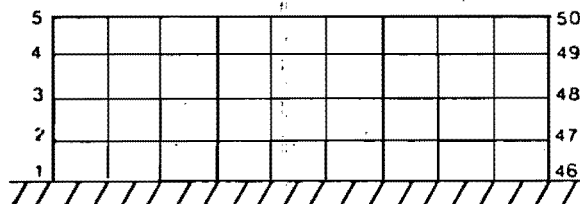


fig. (III.12.a)
Estructura sin
superelementos.

50 nodos
80 grados de libertad
36 elementos finitos
4 nodos por elemento
2 GL / nodo

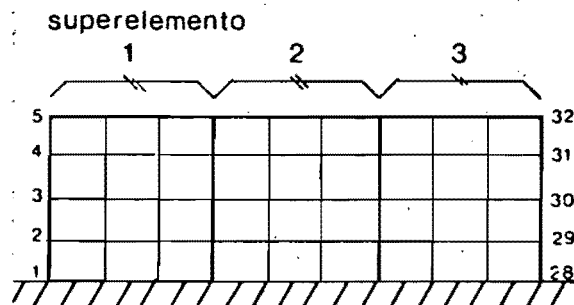


fig. (III.12.b)
Estructura con
superelementos.

32 nodos
44 grados de libertad
3 superelementos
14 nodos por superelemento
2 GL / nodo

El planteamiento del problema en términos de la discretización de la fig. (III.12.a), permite conocer el valor de las variables cinemáticas en los 50 nodos de la malla. Por otro lado, en térmi-

nos de la discretización en superelementos (fig. III. 12.b) se conocen los valores de las mismas variables sólo en 32 nodos .

A través de la discretización de la fig. (III. 12.b), en superelementos, se conoce la solución sólo en los puntos de la estructura global que son frontera de los superelementos. Esto, más que una desventaja del empleo de superelementos, permite una interpretación más fácil de los resultados. Además, como se discute en la siguiente sección, es posible conocer el valor de las variables cinemáticas en el interior de los superelementos, a partir de la solución obtenida para su frontera.

La discretización de la fig. III. 12.b corresponde a tres superelementos con las mismas características cada uno de ellos.

Se mencionó anteriormente, que las matrices \bar{K} y \bar{P} asociadas a un superelemento, corresponden a un sistema local de referencia. (fig.III.11). Esto hace posible que el desarrollo numérico para la obtención de las rigideces \bar{K} y de las cargas \bar{P} de entidades iguales o superelementos, se realice sólo una vez, y se sumen ordenadamente las matrices \bar{K} y \bar{P} obtenidas de este desarrollo, en arreglos globales K y P , tantas veces como superelementos se tengan representados por la misma entidad, a la cual se le denomina subestructura.

Visto de esta manera, el empleo del concepto de subestructuración en la solución de problemas complejos, desde el punto de vista de manejo de grandes cantidades de información, ofrece las siguientes ventajas, las cuales hacen posible el estudio de estructuras complejas, de manera eficiente y económica, desde el punto de vista de memoria y tiempo de proceso en computadora, requeridos para el análisis de este tipo de problemas.

- 1.- La estructura puede formarse a partir de bloques con iguales características físicas y geométricas.
- 2.- Regiones físicas distintas pueden modelarse como subestructuras separadas. Esto permite usar técnicas de modelado tales como generación especializada de malla para regiones locales, y permite almacenar las rigideces y cargas asociada a cada una de ellas, para ser usadas en análisis subsecuentes.
- 3.- Los modelos de subestructura pueden ser desarrollados y analizados en un marco de referencia local de coordenadas. La preparación y revisión de datos es más simple y segura.
- 4.- Puede hacerse un reanálisis de cualquier subestructura, más simple y eficientemente.
- 5.- La selección de salida se simplifica y las opciones de usuario son más fáciles de ejecutar.
- 6.- La memoria y tiempo de ejecución requeridos para análisis en computadora, se reducen notablemente.

III.3.- FORMACION Y UNION DE SUPERELEMENTOS.

Existen dos maneras fundamentales de formar las matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} asociadas a los nodos en la frontera de un superelemento. En una de ellas, se recurre a superelementos con nodos solamente en su periferia (fig. III.13.a), y cuya geometría y aproximación esta descrita através de complicadas funciones de interpolación, que permiten calcular las matrices \underline{K} y \underline{P} asociadas a los nodos en la periferia y que establecen la continuidad requerida dentro del superelemento, para un problema en particular (ref. 17). Este método requiere del conocimiento de funciones de interpolación establecidas para un cierto número de nodos en la periferia del superelemento. Es evidente que cuando crece el tamaño de éstos, es necesaria la definición de un número mayor de nodos en la periferia y en general habrá que adaptar la discretización de la geometría del medio que se analiza, en superelementos con un tamaño y número de nodos definidos, que garanticen una aproximación adecuada, dada por las funciones de interpolación que se empleen para ese superelemento en particular.

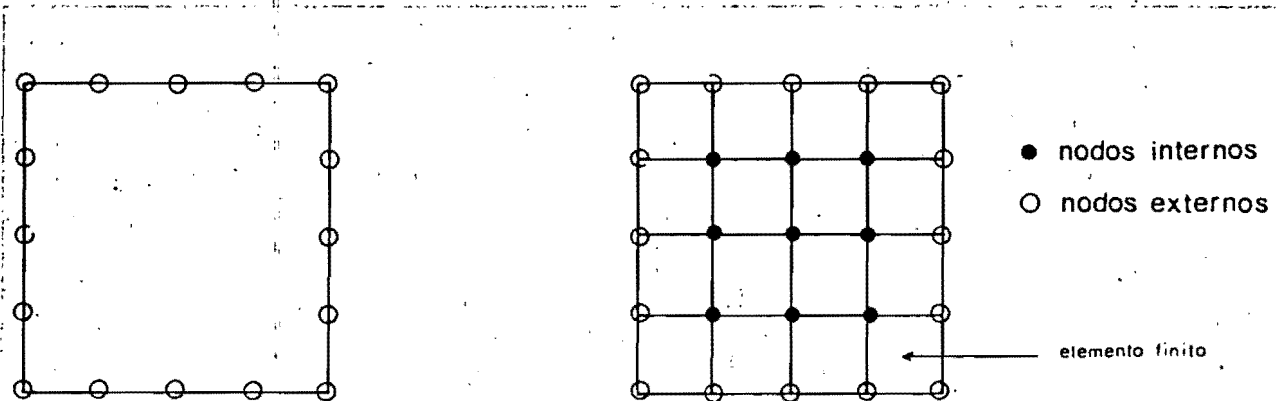


fig. (III.13.a)
Superelemento con nodos sólo en su periferia.

fig. (III.13.b)
Superelemento que comprende una malla de elementos finitos.

Cuando el problema es tridimensional, la definición de las funciones de interpolación se complica aún más, y aunque es posible desarrollarlas, se debe contar con gran cantidad de estas funciones dependiendo del número de nodos en la periferia del superelemento, para obtener la solución de la estructura global, en los puntos de interés.

Otra manera de formar las matrices \underline{K} y \underline{P} corresponde a una discretización de la geometría global, en superelementos que contienen una malla de elementos finitos (fig. III.13.b.).

En este planteamiento, una subestructura puede tratarse como una entidad independiente del sistema global, en la cual a través de los planteamientos convencionales del Método de Elementos Finitos, puede definirse una matriz \underline{K}^{se} y un vector \underline{P}^{se} asociados a los nodos externos e internos del super elemento, las cuales se obtienen sumando de manera ordenada, las matrices \underline{K}^e y \underline{P}^e correspondientes a los elementos finitos que lo conforman. De esta manera, la formación de la matriz de rigideces asociada a todos los nodos (externos e internos) de una subestructura, corresponde a un problema convencional en la aplicación del MEF, en el cual se cuenta ya con funciones de interpolación sencillas, con las que se puede obtener un grado adecuado de aproximación en cada problema particular.

De esta manera, la diferencia fundamental entre el MEF convencional y el empleo del concepto de subestructuración, consiste en que con este último, se pueden definir regiones que pueden tratarse como estructuras independientes en cuanto a la formación de sus matrices de cargas y rigideces. Además, como se verá más adelante, estas características se pueden representar en términos de algunos de sus grados de libertad solamente.

Se ha mencionado que es conveniente asociar la rigidez y la carga de un elemento finito o de un super elemento, a los nodos que definen su periferia. De acuerdo a este planteamiento, es necesario entonces, reducir el sistema de ecuaciones

$$\underline{K}^{se} \underline{U}^{se} = \underline{P}^{se} \quad \dots \text{(III.1)}$$

referido a todos los nodos del super elemento, en uno asociado solamente a los nodos ubicados en la frontera del mismo, cuya solución para las variables que se retienen, es "exactamente" la misma que se obtiene para ellos cuando se consideran todos los nodos del super elemento.

Tradicionalmente y de manera formal, el proceso de reducción de matrices consiste en expresar los grados de libertad que se quieren eliminar o condensar (internos), en términos de los que se quiere retener (externos). Así, se ha recurrido a particionar la matriz de rigideces y el vector de cargas, en submatrices; de tal manera que un sistema de ecuaciones $\underline{K}^{se} \underline{U}^{se} = \underline{P}^{se}$, en donde \underline{K}^{se} es la matriz de rigideces completa representativa de una subestructura, y \underline{U}^{se} es un vector de variables cinemáticas producido por la aplicación del vector de cargas \underline{P}^{se} , puede representarse como:

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix}^{se} \begin{bmatrix} U_e \\ U_i \end{bmatrix}^{se} = \begin{bmatrix} P_e \\ P_i \end{bmatrix}^{se} \quad \dots \text{(III.2)}$$

en donde los subíndices e,i se refieren a los nodos externos definidos en la frontera y a los internos en el interior de un super elemento.

Desde el punto de vista matemático, haciendo operaciones se puede representar uno de los vectores de variables cinemáticas (U_e en este caso) en función del otro de ellos (U_i).

La expresión (III.2) puede escribirse como:

$$\underline{K}_{ee} \underline{U}_e + \underline{K}_{ei} \underline{U}_i = \underline{P}_e \quad \dots \text{(III.3.a)}$$

$$\underline{K}_{ie} \underline{U}_e + \underline{K}_{ii} \underline{U}_i = \underline{P}_i \quad \dots \text{(III.3.b)}$$

en donde todos los términos se refieren a una subestructura.

De la ec. (III.3.b)

$$\underline{K}_{ii} \underline{U}_i = \underline{P}_i - \underline{K}_{ie} \underline{U}_e \quad \dots \text{(III.4.a)}$$

$$\underline{U}_i = \underline{K}_{ii}^{-1} (\underline{P}_i - \underline{K}_{ie} \underline{U}_e) \quad \dots \text{(III.4.b)}$$

Sustituyendo la expresión (III.4.b) en la expresión (III.3.a):

$$\underline{K}_{ee} \underline{U}_e + \underline{K}_{ei} (\underline{K}_{ii}^{-1} (\underline{P}_i - \underline{K}_{ie} \underline{U}_e)) = \underline{P}_e$$

$$\underline{K}_{ee} \underline{U}_e + \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_i - \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{K}_{ie} \underline{U}_e = \underline{P}_e$$

agrupando para U_e :

$$(\underline{K}_{ee} - \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{K}_{ie}) \underline{U}_e = \underline{P}_e - \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_i \quad \dots \text{(III.5)}$$

Así, el sistema asociado a los nodos en la frontera de la subestructura, puede escribirse como:

$$\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{U}} = \underline{\tilde{P}} \quad \dots \text{(III.6)}$$

en donde:

$$\underline{\tilde{K}} = \underline{K}_{ee} - \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{K}_{ie} \quad \dots \text{(III.7.a)}$$

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{U}_e \quad \dots \text{(III.7.b)}$$

$$\underline{\tilde{P}} = \underline{P}_e - \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_i \quad \dots \text{(III.7.c)}$$

El sistema de ecuaciones representado por la ec. (III.6), comprende un sistema de $NGL_e \times NGL_e$, y en general, tiene menos ecuaciones que el que representa la ec. (III.2), especialmente cuando crece el número de variables cinemáticas internas, sin embargo cuando éste es el caso, se incrementa el esfuerzo necesario para hallar las matrices $\underline{\tilde{K}}$ y $\underline{\tilde{P}}$, debido a la presencia de \underline{K}_{ii} , aunque se emplee alguna técnica que matemáticamente resuelva el problema de la solución de las ecuaciones. (III.7.a) y (III.7.c) para hallar $\underline{\tilde{K}}$ y $\underline{\tilde{P}}$, sin recurrir explícitamente a un algoritmo de inversión de matrices.

Una manera de evitar el proceso de inversión de \underline{K}_{ii} para la obtención de $\underline{\tilde{K}}$ en la expresión (III.7.a), consiste en proponer una matriz \underline{M} tal que;

$$\underline{M} = \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{K}_{ie} \quad \dots \text{(III.8.a)}$$

la cual puede expresarse en la forma:

$$\underline{K}_{ii} \underline{M} = \underline{K}_{ie} \quad \dots \text{(III.8.b)}$$

En las ecuaciones (III.8), \underline{M} es una matriz de $NGL_i \times NGL_e$, la cual puede conocerse explícitamente a través de la solución de un sistema de ecuaciones de $NGL_i \times NGL_i$ con NGL_e vectores de términos independientes descritos por \underline{K}_{ie} .

Sustituyendo la solución encontrada para \underline{M} a partir de la ec. (III.8.b), en la ec. (III.7.a):

$$\underline{\tilde{K}} = \underline{K}_{ee} - \underline{K}_{ei} \underline{M} \quad \dots \text{(III.8.c)}$$

Análogamente, puede determinarse $\underline{\tilde{P}}$ mediante la introducción de una matriz \underline{Q} tal que:

$$\underline{Q} = \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_i \quad \dots \text{(III.9.a)}$$

$$\underline{K}_{ii} \underline{Q} = \underline{P}_i \quad \dots \text{(III.9.b)}$$

Sustituyendo en la expresión (III.7.c) la solución hallada para \underline{Q} de la expresión (III.9.b):

$$\underline{\tilde{P}} = \underline{P}_e - \underline{K}_{ei} \underline{Q} \quad \dots \text{(III.9.c)}$$

En las ec. (III.9.), \underline{Q} es la solución de un sistema de $NGL_i \times NGL_i$ ecuaciones lineales con tantos vectores de términos independientes como condiciones de carga descritas por \underline{P}_i .

De esta manera, para hallar $\underline{\tilde{K}}$ y $\underline{\tilde{P}}$, se necesita resolver el sistema:

$$\underline{K}_{ii} [\underline{M}; \underline{Q}] = [\underline{K}_{ie}; \underline{P}_i] \quad \dots \text{(III.10)}$$

y efectuar operaciones de multiplicación y suma de matrices en las expresiones (III.8.c) y (III.9c).

Después de sumar $\underline{\tilde{K}}$ y $\underline{\tilde{P}}$ de manera ordenada, en las matrices de la estructura global \underline{K} y \underline{P} y resolver para \underline{U} a partir de

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad \dots \text{(III.11)}$$

e identificar dentro de \underline{U} los términos correspondientes a los GL_e asociados a un superelemento y representándolo como $(\underline{U}_e)_{se}$, puede conocerse la solución dentro de éste, resolviendo el sistema de la expresión (III.4,a), sustituyendo \underline{U}_e por $(\underline{U}_e)_{se}$.

La ec. (III.5) puede obtenerse también a partir de un planteamiento más perceptible desde el punto de vista del análisis estructural.

Considérese una estructura en la cual existen superelementos cuya frontera no coincide con alguna frontera restringida de la estructura global, (superelemento 1, fig. III.14).

Para un superelemento de este tipo, la matriz \bar{K} es singular, pues corresponde a una subestructura libre de desplazarse en cualquier dirección. Para obtener la matriz \bar{K} asociada a este superelemento, se considera la superposición de dos estados relativos a la cinemática de las fronteras.

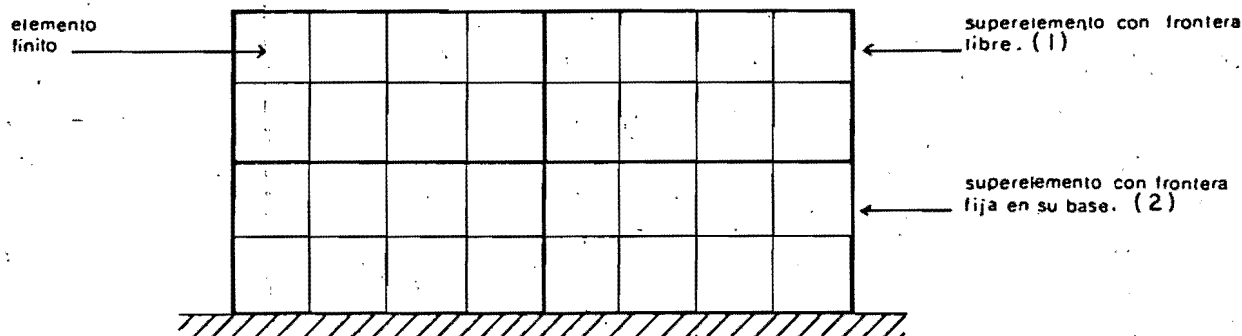


fig. (III.14)

Estructura global con dos superelementos fijos en uno de sus bordes y dos libres en todos sus bordes.

ESTADO 1.- Fronteras fijas, o GLe fijos. Al imponer condiciones de frontera de tal forma que se impiden todos los movimientos de cuerpo rígido de un superelemento, éste es estable y el sistema de la ec. (III.2) tiene solución. Esto es, \bar{K}_{ii} es invertible.

Si las fronteras están fijas ($\underline{U}_{iI}^{se} = 0$), la expresión (III.2) puede escribirse como:

$$\bar{K}_{ei}^{se} \underline{U}_{iI}^{se} = \underline{P}_{eI}^{se} \quad \dots (III.12.a)$$

$$\bar{K}_{ii}^{se} \underline{U}_{iI}^{se} = \underline{P}_{iI}^{se} \quad \dots (III.12.b)$$

en donde el subíndice I se refiere al estado I. (N3).

N3.- En la ec. (III.12.b), \underline{P}_{iI}^{se} corresponde a \underline{P}_i^{se} , ya que en el estado II sólo se considera la liberación de las fronteras.

De la ec. (III.12.b):

$$\underline{U}_I^{se} = \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_I^{se} \quad \dots (III.13)$$

sustituyendo la ec. (III.13) en la ec. (III.12.a):

$$\underline{P}_I^{se} = \underline{K}_{ei} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_I^{se} \quad \dots (III.14)$$

En la ec. (III.14), \underline{P}_I^{se} son las reacciones necesarias para mantener $\underline{U}_I^{se} = 0$ cuando se aplican cargas \underline{P}_I^{se} en el interior del superelemento.

ESTADO II.- Liberación de las fronteras. Ahora $\underline{U}_II^{se} \neq 0$ y $\underline{P}_II^{se} = 0$.

La expresión (III.2) puede escribirse como:

$$\underline{K}_{ee}^{se} \underline{U}_II^{se} + \underline{K}_{ei}^{se} \underline{U}_II^{se} = \underline{P}_II^{se} \quad \dots (III.15.a)$$

$$\underline{K}_{ie}^{se} \underline{U}_II^{se} + \underline{K}_{ii}^{se} \underline{U}_II^{se} = 0 \quad \dots (III.15.b)$$

de la ec. (III.15.b):

$$\underline{U}_II^{se} = - \underline{K}_{ii}^{se} \underline{K}_{ie}^{se} \underline{U}_II^{se} \quad \dots (III.16)$$

Sustituyendo la ec. (III.16) en la ec. (III.15.a)

$$\underline{U}_II^{se} = \underline{K}_{ee}^{se} - \underline{K}_{ei}^{se} \underline{K}_{ii}^{se} \underline{K}_{ie}^{se} \underline{P}_II^{se} \quad \dots (III.17)$$

Peró

$$\underline{P}_II^{se} = \underline{P}_e^{se} - \underline{P}_I^{se} \quad \dots (III.18)$$

Sustituyendo la ec. (III.18) en la ec. (III.17), introduciendo \underline{P}_I^{se} dado por la ec. (III.14) y haciendo $\underline{U}^{se} = \underline{U}_I^{se} + \underline{U}_II^{se}$ y recordando que $\underline{U}_I^{se} = 0$; se tiene:

$$\underline{U}^{se} = \underline{U}_II^{se} \quad \dots (III.19.a)$$

$$= [\underline{K}_{ee}^{se} - \underline{K}_{ei}^{se} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{K}_{ie}^{se}] [\underline{P}_e^{se} - \underline{K}_{ei}^{se} \underline{K}_{ii}^{-1} \underline{P}_I^{se}]$$

$$\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{U}} = \underline{\tilde{P}} \quad \dots (III.19.b)$$

Existen otros planteamientos similares basados en la imposición de condiciones de frontera, para hallar las matrices \underline{K} y \underline{P} asociadas a una subestructura. Sin embargo, en todos ellos se llega a expresiones del tipo de la ec. (III.5), en las cuales cuando crece NGL_i , que es cuando el concepto de subestructuración se hace atractivo, se requiere de un gran esfuerzo para determinar \underline{K} y \underline{P} ; ya que se requiere de la inversión de matrices de gran tamaño.

Se comentó anteriormente que el proceso de reducción de matrices consiste en expresar los GL que se quieren eliminar o condensar (GLC), en términos de los que se desean retener (GLR). Este concepto está íntimamente relacionado con el proceso de reducción Gaussiana, considerado como parte de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Las características del campo de desplazamientos superficiales, que se generan como resultado de los trabajos de tunelero, son de carácter tridimensional, por lo que las rigideces \underline{K} y las cargas \underline{P} , representativas del sistema global suelo-estructura, serán el resultado de la suma ordenada de matrices de rigideces \underline{K}^e y de cargas \underline{P}^e de elementos o superelementos tridimensionales. Por simplicidad en el manejo de los arreglos elementales \underline{K}^e y \underline{P}^e , y de los arreglos globales \underline{K} y \underline{P} , para ilustrar el procedimiento de obtención de las matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} , asociadas a los grados de libertad retenidos en una subestructura, se considera el esquema de la fig. (III.15.b), en el cual, por simplicidad, se considera una subestructura formada por 3 elementos barra (fig. III.15.a), cada uno de los cuales tiene definida su matriz de rigideces como:

$$\underline{K}^e = (EA/h) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots (III.20.a)$$



fig. (III.15.a)
Elemento barra.
Sistema de ref. local

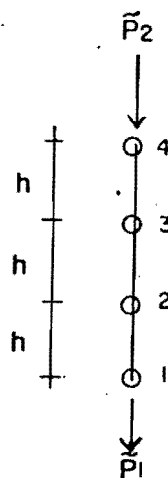


fig. (III.15.b)
Superelemento.
Sistema de ref. local.

y su vector de cargas como :

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

... (III.20.b)

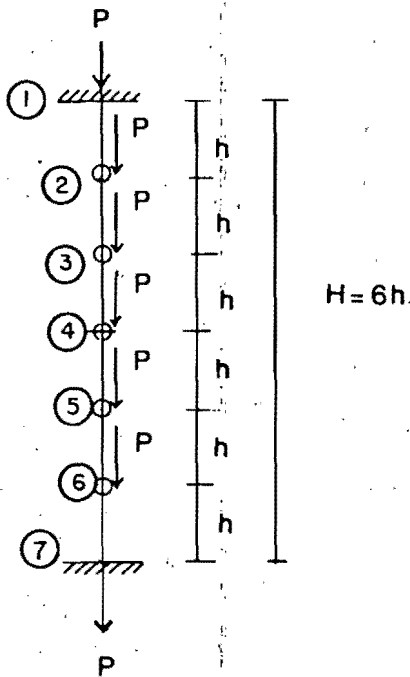


fig. (III.15c)
Barra de longitud
= 6 h, fija en sus
extremos, compuesta
por 6 E.F.

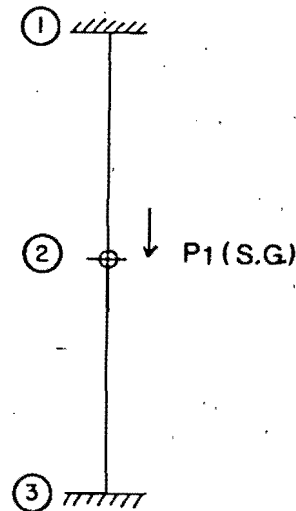


fig.(III.15.d)
Barra de longitud 6 h, fija en
sus extremos, compuesta por dos
superelementos asociados a la
subestructura de la fig.
(III.15.b).

Considerando que $(EA/h) = 1$ y $P_1 = P_2 = 0.5$, por simplicidad numérica, se tiene :

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

... (III.20.c)

Sumando ordenadamente los arreglos \underline{K}^e y \underline{P}^e de cada elemento, en el sistema de referencia nodal local del superelemento que conforma:

$$\underline{K}^{se} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}^{se} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

... (III.21.a)

Y el sistema $\underline{K}^{se} \underline{U}^{se} = \underline{P}^{se}$ tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{se} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \end{bmatrix}^{se} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}^{se} \quad \dots \text{(III.21.b)}$$

Suponiendo que se desean condensar los GL internos (1 y 2), lo cual corresponde a representarlos en términos de los GL externos (3 y 4).

Si se conociera $\underline{U}_e = \begin{bmatrix} U3 \\ U4 \end{bmatrix}$, bastaría con hacer las operacio-

nes necesarias para que $(K2,1) = 0$. De esta manera podría determinarse $U2$ en función de \underline{U}_e como:

$$U2 = (K2,3 U3 + K2,4 U4) / K2,2$$

Una vez conocida $U2$, puede conocerse $U1$ haciendo:

$$U1 = (K1,2 U2 + K1,3 U3 + K1,4 U4) / K1,1$$

Este desarrollo corresponde a una secuencia de sustitución hacia atrás en el proceso de solución. El problema de la condensación del sistema de ecuaciones (III.21), se simplifica al cálculo de \underline{U}_e mediante algún algoritmo, cuando $(K1,m) = 0$ con $l = \text{número de variable } U_l \text{ que se desea calcular a partir de } \underline{U}_e$ y de las U_i ya calculadas; y $m < l$.

Si la etapa de reducción hacia adelante en el proceso de solución, se lleva a cabo sólo hasta la posición NGL_i ; en la parte inferior derecha de \underline{K}^{se} , inicialmente ocupada por \underline{K}_{ee} , se encontrará una matriz \underline{K}^* de NGL_e y NGL_e . Si esta matriz se extrae del sistema de ecuaciones reducido hasta NGL_i , junto con su vector \underline{P}^* asociado de $NGL_e \times NCC$, se tendrá un sistema independiente:

$$\underline{K}^* \underline{U}^* = \underline{P}^* \quad \dots \text{ec. (III.22)}$$

La solución de este sistema, corresponde a completar la etapa de reducción hacia adelante del sistema representado por la ec. (III.21.b) y a establecer la etapa de sustitución hacia atrás

hasta la posición $NGL_i + 1$, por lo que $\underline{U}^* = \begin{bmatrix} U3 \\ U4 \end{bmatrix}$

De esta manera, los sistemas de ecuaciones lineales representados por las expresiones (III.18.b) y (III.22) son idénticos. Así

$$\underline{K}^* = \underline{\tilde{K}} \quad \text{y} \quad \underline{F}^* = \underline{\tilde{P}}$$

Aplicando este proceso al sistema de la ec. (III.21.b), se tiene :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \dots(III.23)$$

en donde las submatrices definidas por las líneas punteadas son las matrices condensadas de la subestructura de la fig. (III.15.b).

Nótese que:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U3 \\ U4 \end{bmatrix}^{se}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \dots(III.24)$$

Este mismo resultado se obtiene al aplicar las ec. (III.7.a) y (III.7.c) al sistema de ecuaciones lineales definido por la expresión (III.21.b).

El procedimiento descrito es aplicable para cualquier tamaño de las matrices. Así es aplicable también a las matrices resultantes de la suma ordenada de matrices elementales \underline{K}^e , \underline{F}^e o de matrices de superelementos \underline{K} , \underline{P} , representativas de regiones tridimensionales.

Es importante notar que las matrices \underline{K}^{se} definida en la ec.(III.21.a) y \underline{K} definida en la ec. (III.24) son singulares, ya que en ningún momento se han restringido variables cinemáticas de tal manera que se impidan los movimientos de cuerpo rígido del superelemento de la fig. (III.15.b). Sin embargo, no interesa obtener los valores de la matriz \underline{U} a partir de la solución de la ec. (III.19.b), sino que interesa conocer los coeficientes que definen a \underline{K} y \underline{P} .

Puede establecerse una analogía entre las ec. (III.20.c) y (III.24). Las ec. (III.20.c) no intentan resolver el sistema $\underline{K}^e \underline{U}^e = \underline{P}^e$, sino establecer los valores de los coeficientes de \underline{K}^e y \underline{P}^e , para sumarse ordenadamente en el primer nivel de

subestructuración correspondiente a la subestructura de la fig. (III.15.b), tantas veces como elementos finitos iguales fig. (III.15.a) se encuentren dentro de ella. En este caso, son tres los elementos que la conforman.

Si se intenta resolver el sistema $\bar{K} \bar{U} = \bar{P}$ donde \bar{K} y \bar{P} están definidos por las ec. (III.24), se encuentra que este sistema se satisface para cualquier valor de los coeficientes de \bar{U} .

De todos estos posibles valores para \bar{U} , los que realmente corresponden a la solución se obtendrán de la solución del sistema $K U = P$ para la estructura global.

Considérese ahora, que se requiere calcular los desplazamientos axiales, que se generan en el centro de una barra con las características que se definen en la fig. (III.15.c). Una opción sería considerar 6 elementos finitos representados por las ec. (III.20.c) en una matriz $K_{7.7}$ asociada a la estructura global, la cual se reduce a $K_{5.5}$ cuando se introducen las fijaciones de los extremos superior e inferior. La solución se obtiene al resolver un sistema de 5×5 , que conduce al conocimiento del vector U completo, el cual contiene los desplazamientos de los nodos 2 a 6 en la barra de la fig. (III.15.c).

Otra opción consiste en unir dos super elementos asociados a la subestructura de la fig. (III.15.b), la cual está representada por las ec. (III.24). A este nivel, debe mencionarse que de la misma manera en que cada uno de los nodos de los 3 elementos que forman la subestructura de la fig. (III.15.b), tiene definida su incidencia en los nodos 1 a 4 del sistema de referencia nodal local a la subestructura; los nodos externos o retenidos (1 y 4), tienen definida su incidencia en el sistema de referencia nodal global de la barra definido en la fig. (III.15.d). Este proceso de unión conduce a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, el cual se reduce a un sistema de 1×1 al introducir las condiciones de fijación en las fronteras.

Con cualquiera de estas opciones se obtiene el mismo valor para el desplazamiento en el centro de la barra.

Si se deseara ahora calcular los desplazamientos correspondientes a los nodos 2, 3, 5 y 6 referidos al sistema de la fig. (III.15.c), a partir de la opción que considera la posibilidad de emplear dos super elementos asociados a la subestructura de la fig. (III.15.b); bastará con identificar la relación de incidencia existente entre los sistemas de referencia nodal asociados a la estructura global y a cada uno de los super elementos asociados a la subestructura.

De esta manera, el vector de desplazamiento referido al sistema de la fig. (III.15.d), sería :

$$\underline{U}^G = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{U}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En donde \underline{U} se refiere a un valor conocido de \underline{U} en el sistema global.

Para el superelemento ubicado en la parte superior de la barra, se tendrá:

$$\underline{\tilde{U}}^1 = \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{U}^{\text{se } 1} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \bar{U}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

referido al sistema de la fig. (III.15.b).

y para el superelemento ubicado en la parte inferior:

$$\underline{\tilde{U}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{U}^{\text{se } 2} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix}$$

Para ambos superelementos, los valores de \tilde{U}_1 y \tilde{U}_2 se obtienen de la solución del sistema global, y las componentes de \underline{U} correspondientes a los GL_i se obtienen mediante sustitución hacia atrás en la ec. (III.23).

El procedimiento descrito es aplicable para cualquier número de superelementos asociados a una subestructura, de tal manera que la generación de las matrices \underline{K} y \underline{P} se realiza sólo una vez y se suma ordenadamente en el siguiente nivel de subestructuración, tantas veces como superelementos de nivel inferior se tengan.

Hasta aquí, se ha formado una subestructura, a partir de elementos finitos. Esto constituye un primer nivel de subestructuración. A partir de superelementos asociados a subestructuras de primer nivel, se pueden formar subestructuras de segundo nivel, para las cuales los superelementos de primer nivel se constituyen en subelementos. Esto es válido para cualquier nivel de subestructuración. Así, cada vez que se efectúa el proceso de condensación, para formar una subestructura, aumenta el nivel de subestructuración.

El nivel cero de subestructuración, corresponde al nivel elemental:

$$\underline{K}^0 = \underline{K}^e \quad \text{y} \quad \underline{P}^0 = \underline{P}^e$$

Similarmente a como se obtuvieron las matrices \underline{K}^1 y \underline{P}^1 para un primer nivel de subestructuración (N4), pueden obtenerse \underline{K}^n y \underline{P}^n para el nivel n, mediante una adición sistemática de las matrices de rigideces \underline{K}^{n-1} y cargas \underline{P}^{n-1} de los subelementos en ese nivel y la eliminación o condensación de los GLI correspondientes al nivel n de subestructuración. La adición sistemática de las matrices \underline{K}^{n-1} y \underline{P}^{n-1} requiere del conocimiento de la correspondencia nodal entre los sistemas de referencia nodal local asociados a las subestructuras de niveles n-1 y n.

De la misma manera en que para conocer los componentes del vector de variables cinemáticas \underline{U}^{sc} , correspondiente a los GLI en los superelementos de la fig. (III.15.b), se requería de la determinación de \underline{U} a partir de la solución de la estructura de la fig. (III.15.d); para el cálculo de los GLI en los superelementos asociados al nivel n de subestructuración, se requiere del conocimiento de \underline{U}^n para cada superelemento, obtenido a partir de la solución para el nivel n + 1 de subestructuración.

En algunos problemas complejos, se recurre a la eliminación de algunos grados de libertad, para simplificar el problema; en regiones con características de simetría o antisimetría, en cuanto a geometría y cargas, pueden simplificarse los modelos, identificando los grados de libertad con igual valor absoluto en sus variables cinemáticas. En el proceso de condensación descrito, no se recurre a alguna de las simplificaciones anteriores, sino a representar los grados de libertad que se desean condensar, en términos de aquéllos que se desean retener, empleando un proceso de reducción parcial.

N4.- El superíndice se refiere al nivel de subestructuración.

III.4.- LIMITACIONES EN LA DEFINICION Y USO DE SUBESTRUCTURAS.

En el interior de los elementos finitos, se establece la continuidad de desplazamientos a través de las funciones de interpolación. Además, los desplazamientos deben ser continuos en cualquier región de la estructura global, lo cual exige que los desplazamientos tengan un valor único en las fronteras entre elementos, definidas a través de sus puntos nodales, los cuales tienen incidencias en los nodos de la estructura global, de acuerdo a su posición relativa dentro de ella.

Cuando se intenta formar una subestructura, es particularmente importante estudiar cuáles serán los nodos de la misma que deban retenerse y cuales deban condensarse, teniendo en cuenta que no es posible condensar los grados de libertad asociados a un nodo del superelemento, el cual a su vez forme parte de otro superelemento de la misma o alguna otra subestructura.

Si se condensara un nodo de una subestructura con estas características, implícitamente se hace que este nodo no tenga incidencia en los nodos que definen a la estructura global. Por esto, la rigidez de un superelemento, asociada a un grado de libertad condensado, no puede formar parte explícita de la rigidez del sistema global. Además, la continuidad de desplazamientos en las fronteras entre superelementos, sólo existe en los grados de libertad retenidos, los cuales están asociados a los nodos que definen la frontera de un superelemento.

Para aclarar esta idea, considérese la malla de elementos finitos planos, definida en la fig. (III.16.a). Supóngase que interesa conocer solamente los desplazamientos originados en la parte superior de la estructura, por la acción de algún tipo de carga externa, de tal manera que el sistema de referencia nodal global, esté definido solamente por los nodos ubicados en la parte superior de la estructura.

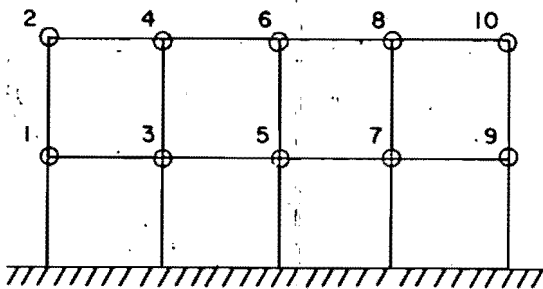


fig. (III.16.a)
Malla plana de
elem. finitos (S.G.)

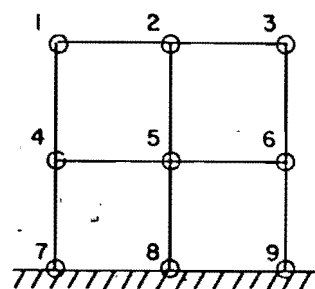


fig. (III.16.b)
Subestructura
(S.L. subest.)

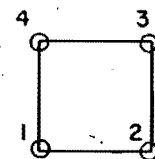


fig. (III.16.c)
Elemento
(S.L. elem.)

Como posible solución, empleando el concepto de subestructuración, puede formarse una subestructura de 4 elementos finitos fig. (III.16.b). Así, la estructura estará formada por 2 super elementos asociados a la subestructura definida en la fig. (III.16.b).

Como en este caso particular interesa conocer solamente los desplazamientos asociados a los nodos 1, 2 y 3 de cada super elemento, puede pensarse en condensar los grados de libertad asociados a los nodos 4, 5 y 6 y retener los asociados a los nodos 1, 2 y 3. Los grados de libertad asociados a los nodos 7, 8 y 9 de la subestructura, son prescritos, por lo que los nodos de cada super elemento podrán incidir en el sistema de referencia nodal global, a través de sus nodos 1, 2 y 3 solamente y el problema se reduce a resolver la estructura para los grados de libertad asociados a los nodos 1 ... 5 referidos al S.G. de la estructura (fig. III.17.a), que son los que nos interesan.

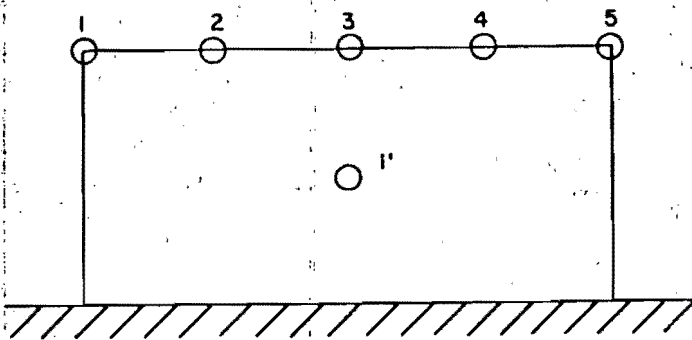


fig. (III.17.a)
S.G.

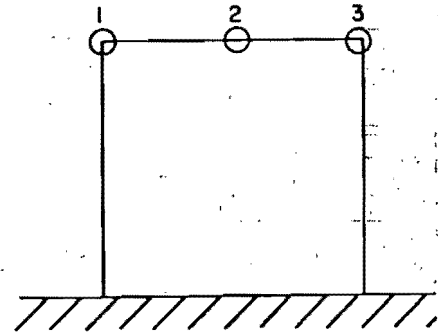


fig. (III.17.b)
S.L. Subest.

Al formar la matriz de rigideces sin condensar, de la subestructura mostrada en la fig. (III.16.b), se deben establecer requisitos de continuidad de variables cinemáticas (desplazamientos, giros, etc.), dentro de cada uno de sus 4 elementos y en cada uno de los nodos referidos al sistema local de referencia de la subestructura.

La continuidad en los nodos internos de una subestructura, se manifiesta a través de las incidencias de los nodos referidos al S.L. del elemento, en los nodos referidos al S.L. de la subestructura, de la misma manera en que los nodos retenidos de una subestructura inciden en los nodos referidos al S.G. de la estructura. Sin embargo, en este caso, los nodos 4 y 6 de la subestructura fig. (III.16.b) se condensaron, por lo que no podrán incidir en los nodos referidos al S.G. fig. (III.17.a) y no podrá establecerse la continuidad en el punto 1' de la estructura global, ya que nunca se especificó a través del proceso de unión de super elementos, que el desplazamiento del nodo 6 del super elemento 1 fuese igual al desplazamiento del nodo 4 del super elemento 2 fig. (III.18.a).

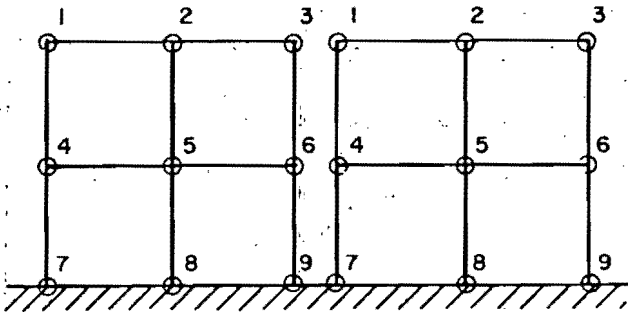


fig. (III.18.a)
 Superelementos asociados
 a la subestructura de la
 fig. (III.16.b).

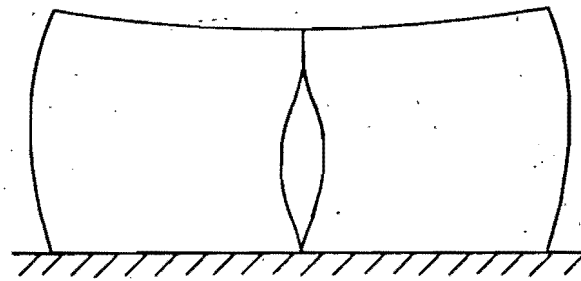


fig.(III.18.b)
 Estructura deformada sin
 continuidad de desplaza-
 mientos en el punto 1'
 (fig. III.17.a)

Una posible configuración de la estructura deformada se representa en la fig. (III.18.b).

Es importante notar que si se resuelve el problema de acuerdo al planteamiento anterior, considerando solamente el peso propio de la estructura, se obtiene un campo de desplazamientos simétrico (fig. III.18.b), aunque no exista continuidad en el punto 1' (fig.III.17.a), por lo que no se puede detectar esta discontinuidad a través de los desplazamientos obtenidos para los nodos 1...5 referidos al S.G. (fig.III. 17.a), que son los nodos a los cuales inciden los nodos cuyos grados de libertad se han retenido en el proceso de reducción de las matrices de rigidez y de cargas, de cada una de las subestructuras que conforman a la estructura global.

De acuerdo a lo anterior, si se condensan grados de libertad correspondientes a nodos de una subestructura, que formen parte de la frontera entre superelementos, se estarán introduciendo discontinuidades cinemáticas en esta frontera, ya que no es posible definir la incidencia de un nodo cuyos grados de libertad se condensan, en el sistema de referencia nodal global. Esto hace necesario revisar que al formar una subestructura, no se condensen grados de libertad correspondientes a nodos que definan fronteras entre superelementos.

Por otra parte, empleando el concepto de subestructuración, es posible definir las condiciones de frontera del sistema global (fig. III.16.a), desde la etapa de la formulación de superelementos (fig. III.16.b), así como las coordenadas, cargas, desplazamientos impuestos, etc., lo cual reduce los requerimientos de memoria para almacenar condiciones referidas al S.G.(sección III.5). Esta característica puede añadirse a las ventajas del empleo del concepto de subestructuración, descritas en la sección III.2 .

III.5.- IMPLANTACION DE ALGORITMOS DE SUBESTRUCTURACION, EN UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS.

La primera etapa en el análisis de un medio continuo, con el método de los elementos finitos, es la discretización de éste, en un número determinado de regiones discretas denominadas elementos finitos. Además, es conveniente identificar aquellos elementos que tengan las mismas propiedades en cuanto a material y a comportamiento, y definir con ellos un grupo de elementos.

La identificación de elementos dentro de un grupo, es conveniente porque se reduce la cantidad de datos y porque permite hacer una revisión mas eficiente de éstos y obtener resultados de manera más ordenada.

El concepto de grupos de elementos, como se verá más adelante, es de gran utilidad para introducir la opción de subestructuración en un programa de elementos finitos.

Así, un programa de elementos finitos convencional, para análisis de cualquier problema descrito en términos de la teoría de la elasticidad lineal, comprende las siguientes etapas:

I.- DATOS GENERALES.

- I.1.- Control.- Título, número de puntos nodales, dimensiones espaciales, número de grupos de elementos, número de condiciones de carga, etc.
- I.2.- Coordenadas.- Coordenadas de los puntos nodales X (NDE, NPN).
- I.3.- Condiciones de frontera.- De todos los grados de libertad asociados a todos los nodos. ID (NDE, NPN).
- I.4.- Determinación del número de ecuaciones NEC y del número de ecuaciones que le corresponde a cada GL de cada punto nodal. Esto se guarda en el mismo arreglo ID (NDE, NPN).
- I.5.- Desplazamientos iniciales.- ID (NDE, NPN).
- I.6.- Fuerzas aplicadas y desplazamientos prescritos F (NDE, NPN)

II.- DATOS DE CADA GRUPO DE ELEMENTOS.

- II.1.- Control de grupo.- Título del grupo, número de elementos en el grupo (NUMEL), etc.
- II.2.- Propiedades elásticas de los elementos en este grupo (E, NU).

II.3.- Peso volumétrico y componentes con respecto al sistema global de referencia. (P. Vol., X1, X2, X3).

II.4.- Incidencia de los nodos de los elementos del grupo, en el sistema de referencia nodal global.
IEN (NNE, NUMEL)

*
III.- DETERMINACION DEL NUMERO DE ECUACION CORRESPONDIENTE A CADA UNO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD (GL), ASOCIADOS A LOS NODOS DE CADA ELEMENTO EN ESTE GRUPO.

*
IV.- DETERMINACION DE LA ALTURA DE CADA COLUMNA EN LA MATRIZ DE RIGIDEZES \underline{K} , TOMANDO EN CUENTA SOLO LOS ELEMENTOS EN ESTE GRUPO.

Los pasos II, III y IV se repiten para cada grupo de elementos.

*
V.- DETERMINACION DE LA POSICION DE LOS COEFICIENTES EN LA DIAGONAL PRINCIPAL DE \underline{K} , CON RESPECTO AL VECTOR EN QUE SE ALMACENA ESTA.

VI.- CALCULO Y SUMA ORDENADA DE LAS MATRICES \underline{K}^e Y \underline{P}^e

VI.1.- Determinación de las matrices de rigideces y de cargas \underline{K}^e y \underline{P}^e de cada elemento en un grupo. Es en este paso donde se aplican todas las técnicas desarrolladas para aproximar la solución a través del M.E.F.

*
VI.2.- Suma ordenada de las matrices \underline{K}^e Y \underline{P}^e en los sistemas globales \underline{K} y \underline{P} . La suma ordenada se realiza inmediatamente después de que se conocen las matrices \underline{K}^e y \underline{P}^e .

El paso VI se realiza para todos los elementos en un grupo

VII.- SUMAR CARGAS DE PRESION EN LAS ARISTAS DE LOS ELEMENTOS DEL GRUPO (SI EXISTEN) AL VECTOR DE CARGAS \underline{P} .

Los pasos VI y VII se repiten para cada grupo de elementos. Al terminar con el último elemento del último grupo, se tienen completas las matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} asociadas a la estructura completa.

*
VIII.- PROCESO DE SOLUCION.- Solución del sistema de ecuaciones
 $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$.

IX.- OBTENCIÓN DE DEFORMACIONES Y ESFUERZOS A PARTIR DE LA SOLUCIÓN PARA U OBTENIDA EN EL INCISO ANTERIOR

Después de referirse al apéndice A, el procedimiento descrito puede representarse esquemáticamente a través del diagrama de bloques de la fig. (III.19), en el cual se hace énfasis en las subrutinas relacionadas con la manipulación matricial del proceso de almacenamiento de las matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} , en la estructura global; así como de la solución del sistema $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$.

Este énfasis atiende a la estrecha relación que existe entre el concepto de subestructuración y la condensación o reducción matricial.

Se mencionó anteriormente que el nivel cero de subestructuración, corresponde a considerar

$$\tilde{\underline{K}}^0 = \underline{K}^e \quad \text{y} \quad \tilde{\underline{P}}^0 = \underline{P}^e$$

por lo que para un primer nivel de subestructuración, lo que se mencionó para un elemento, ahora es válido para un superelemento. El procedimiento sigue siendo válido, pero habrá que hacer algunas modificaciones que permitan calcular y sumar ordenadamente las matrices $\tilde{\underline{K}}^n$ y $\tilde{\underline{P}}^n$, en arreglos globales \underline{K} y \underline{P} .

A partir de un programa de elementos finitos, estructurado en la forma indicada en la fig. (III.19), es necesario crear algunas nuevas subrutinas para permitir la opción de subestructuración; modificar algunas otras de las ya existentes, y acomodar dentro de ciertas posiciones del programa, el llamado a algunas de las ya existentes.

En la fig. (III.20), se muestra un diagrama de bloques obtenido a partir del indicado en la fig. (III.19), pero permitiendo ahora la opción de subestructurar. En este nuevo diagrama se identifica la introducción de cuatro nuevas subrutinas, las cuales son: NECSUB, KSUBST, ENSUB y LYEAS. En el apéndice (B), se explica la necesidad de introducir estas nuevas subrutinas y se proponen secuencias de instrucciones FORTRAN para satisfacer estas necesidades.

La diferencia fundamental entre los diagramas de las figuras (III.19) y (III.20), consiste en que un grupo de elementos que representa a una subestructura, es tratado como una estructura independiente.

*.- En el apéndice A, se da más información acerca de estos pasos, los cuales están relacionados con el almacenamiento y solución matriciales en forma de columna activa, y se emplearán al introducir la opción de subestructuración, en un programa de elementos finitos.

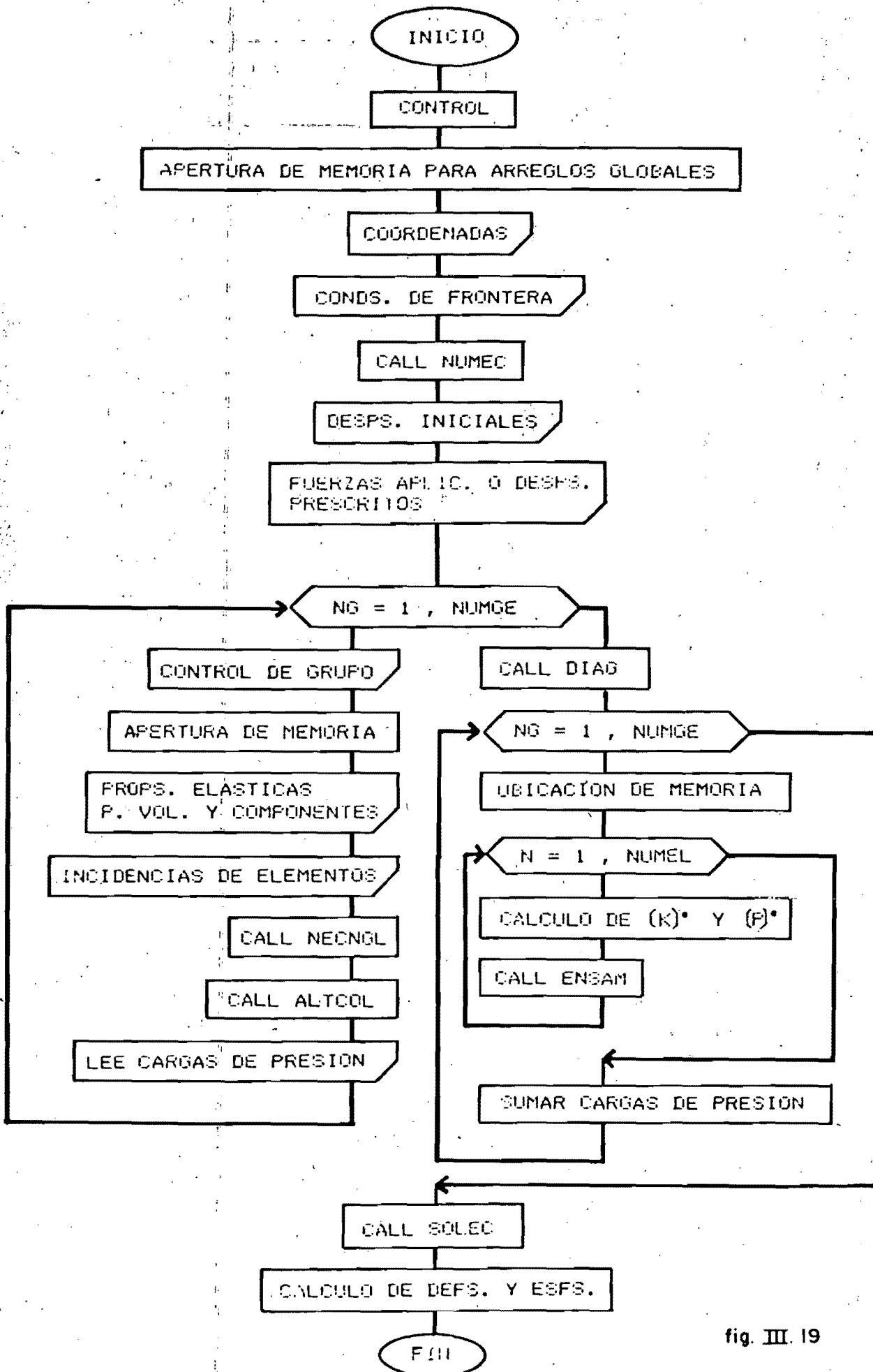
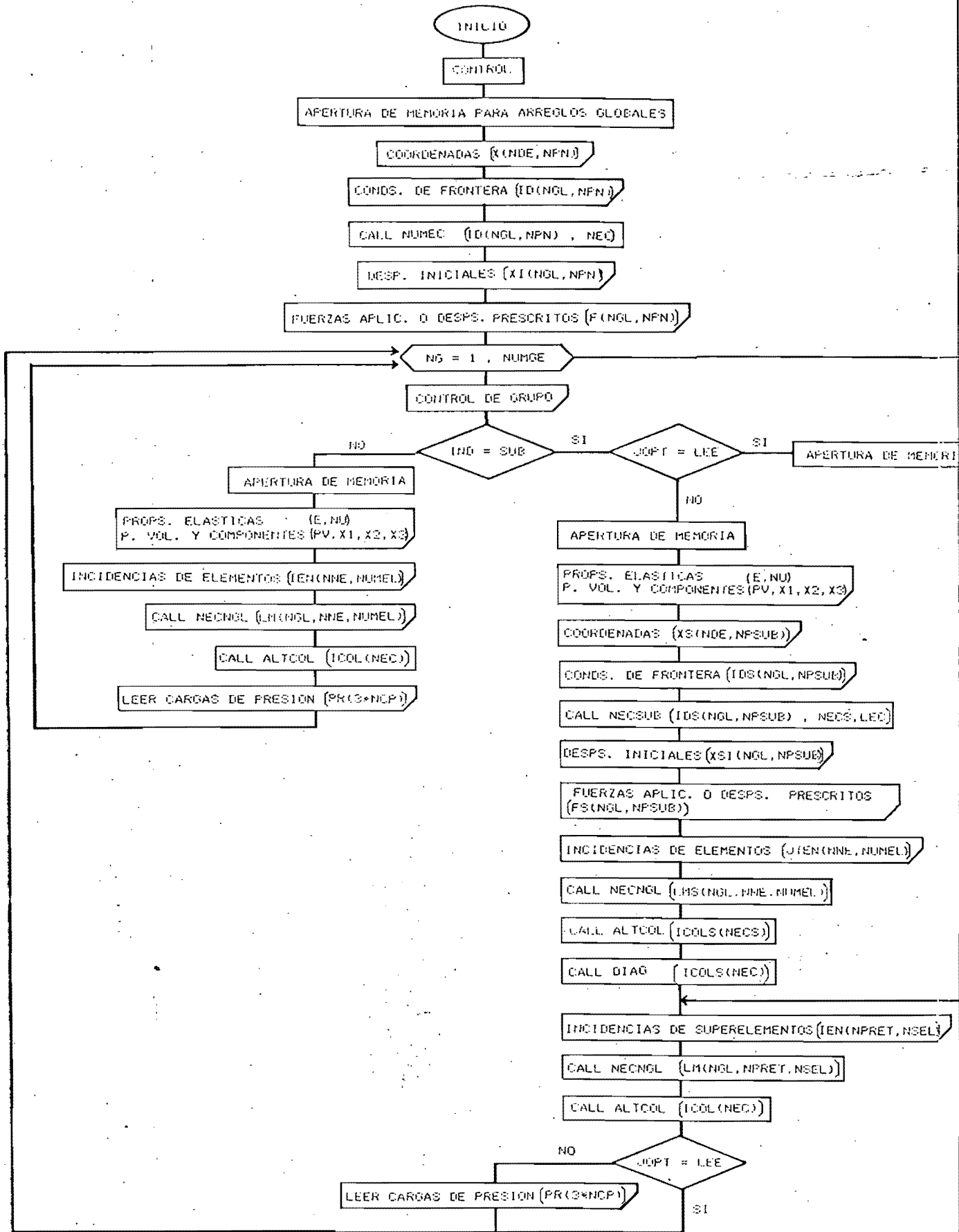


fig. III. 19



NOTA : DESPUES DE LA EJECUCION DE CADA INSTRUCCION SE OBTIENE COMO RESULTADO LO INDICADO ENTRE []

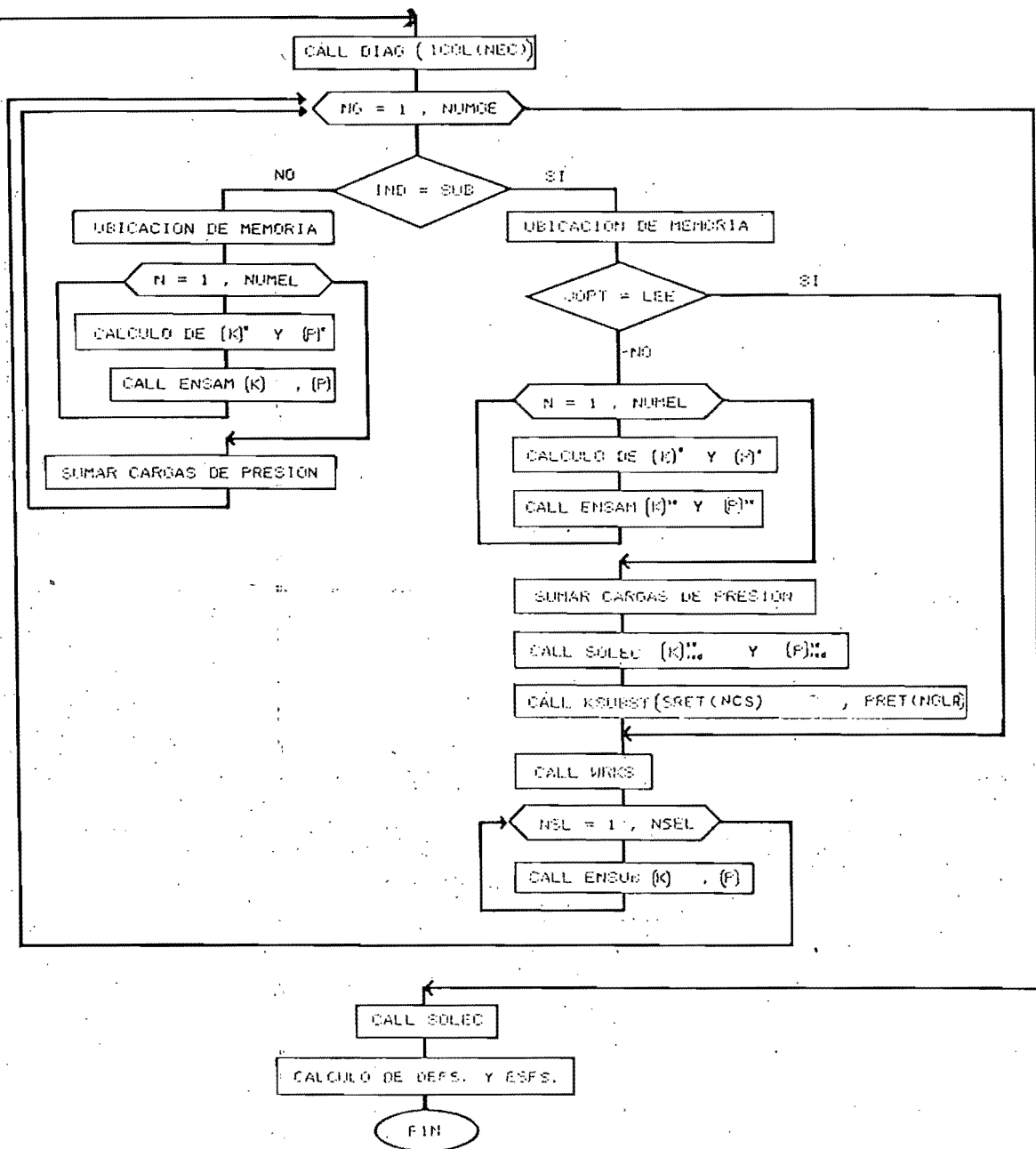


fig. III. 20

Si ningún grupo de elementos corresponde a una subestructura, se tiene subestructuración de nivel cero. Además, el indicador IND, el cual es dato dentro de la tarjeta de control de grupo, será siempre distinto de SUB, y el diagrama de la fig. (III.20), obtiene exactamente la misma forma que el diagrama de la fig. (III.19).

En el inicio de los diagramas de las figuras (III.19) y (III.20), el llamado a la subrutina NUMEC, tiene los siguientes parámetros :

CALL NUMEC (ID,NGL,NFN,NEC)

los cuales se definen en la sección A-1.

En la fig. (III.20), cuando $IND \neq SUB$, el llamado a las subrutinas NECNGL y ALTCOL, tienen los siguientes parámetros :

CALL NECNGL (ID,IEN,LM,NGL,NDE,NNE,NUMEL)

los cuales se definen en la sección A.2 y

CALL ALTCOL (ICOL,LM,NDE,NNE,NUMEL)

los cuales se definen en la sección A.3 .

En la parte correspondiente a la solución, cuando $IND \neq SUB$, los parámetros de llamado a la subrutina ENSAM, se definen en la sección A.5 .

Al final del diagrama, el llamado a la subrutina SOLEC, tiene los parámetros :

CALL SOLEC (A,B,ICOL,NEC,NEC,NCC,5)

los cuales corresponden a la solución completa del sistema de ecuaciones

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$$

de la estructura global (ver sección A.6).

Nótese que en los parámetros de las cinco instrucciones CALL anteriores, los arreglos subindicados se refieren al sistema de ecuaciones que define a la estructura global.

Por otra parte, cuando $IND = SUB$ para algún grupo de elementos, y JOPT, el cual es dato dentro de la tarjeta de control de grupo, es distinto de LEE ; se tiene una subestructura y se debe tratar como una estructura independiente, por lo que será necesario disponer de datos suficientes para formar las matrices de rigideces \underline{K} asociada a esta subestructura y de su correspondiente vector de cargas \underline{P} . Estos datos se suministran en la parte intermedia del diagrama, en la cual, las condiciones de frontera, desplazamientos iniciales, fuerzas o desplazamientos

prescritos, y las incidencias de los nodos de los elementos, se refieren al sistema de referencia nodal local de la subestructura correspondiente.

En la tabla III.1, se muestran las instrucciones CALL indicadas en esta parte del programa, completas :

TABLA III.1.- Instrucciones de llamado en la etapa de datos.

- 1.- CALL NECSUB (IDS, IGL, IPN, NGL, NPSUB, NECS, LEC)
- 2.- CALL NECNGL (IDS, JIEN, LMS, NGL, NDE, NNE, NUMEL)
- 3.- CALL ALTCOL (ICOLS, LMS, NDE, NNE, NUMEL)
- 4.- CALL DIAG (ICOLS, NECS, NCS)
- 5.- CALL NECNGL (ID, IEN, LM, NGL, NDE, NPRET, NSEL)
- 6.- CALL ALTCOL (ICOL, LM, NDE, NPRET, NSEL)

Las cuatro primeras instrucciones CALL de la tabla III.1, están relacionadas con las matrices K^{se} y P^{se} asociadas a la subestructura, y las últimas, con las matrices K y P , asociadas a la estructura global.

En estas instrucciones de llamado, se identifican algunos nuevos parámetros relacionados con las subestructuras. Estos son : JIEN, LMS, ICOLS, NCS, NPRET y NSEL.

El parámetro JIEN es un arreglo análogo al arreglo IEN, definido en la sección A.2. Este nuevo parámetro contiene las incidencias de los nodos de los elementos, en el sistema de referencia nodal local a la subestructura. Así,

$$JIEN = JIEN (NNE, NUMEL)$$

LMS es un arreglo análogo al arreglo LM descrito en la sección A.2. Este arreglo contiene el número de ecuación correspondiente a cada GL de cada nodo de todos los elementos que forman la subestructura. $LMS = LMS (NGL, NNE, NUMEL)$

ICOLS es un arreglo análogo al descrito en las secciones A.3 y A.4, pero ahora $ICOLS = ICOLS (NECS)$, contiene la altura de las columnas de la matriz K^{se} , sin considerar los elementos en la diagonal principal, después de ejecutar la tercera instrucción CALL de la TABLA III.1 ; y contiene la posición de los coeficientes ubicados en la diagonal de la matriz K después de ejecutarse la cuarta instrucción CALL .

NCS es el número total de coeficientes en la matriz de rigideces de la subestructura. Es importante conocer el valor de NCS para disponer del espacio requerido para almacenar la matriz de rigideces asociada a la subestructura, en la instrucción de apertura de memoria.

NPRET es el número de puntos nodales cuyos grados de libertad se retienen.

a través de la subrutina LYEAS, la cual se define en la sección B.3 y los parámetros de llamado para escritura son :

CALL LYEAS (SRET, BRET, ICOLS, NGLR, 1)

Posteriormente, se suman ordenadamente las matrices \tilde{K} y \tilde{P} , representativas de una subestructura, en las matrices globales K y P , tantas veces como superelementos asociados a ella se tengan. Esto se hace a través de la subrutina ENSUB, la cual se define en la sección B.4, y cuyos parámetros de llamado son :

CALL ENSUB (A, B, SRET, BRET, ICOL, ICOLS, LM, NGLR)

En esta instrucción, los parámetros ICOL y LM se definen de igual manera que los definidos para las instrucciones 5 y 6 de la tabla III.1.

A y B son los arreglos globales, en los cuales se suman ordenadamente las matrices de rigideces SRET y de cargas BRET asociadas a la subestructura en cuestión.

En la tabla III.2, se escriben las instrucciones CALL anteriores, y las subrutinas que se llaman se describen en los apéndices A y B.

TAOLA III.2.- Instrucciones de llamado en la etapa de solución de subestructuras.

- 1.- CALL ENSAM (ASUB, BSUB, S, P, ICOLS, LMS, NGLR)
- 2.- CALL SOLEC (ASUB, BSUB, ICOLS, NECS, LEC, NCC, 4)
- 3.- CALL KSUBST (ASUB, SRET, BSUB(LEC+1), BRET, ICOLS(LEC+1))
- 4.- CALL LYEAS (SRET, BRET, ICOLS, NGLR, 1)
- 5.- CALL ENSUB (A, B, SRET, BRET, ICOL, COLS, LM, NGLR)

Después de ejecutar el proceso de formación y suma ordenada de las matrices de rigideces y de cargas, para todos los elementos en cada grupo en el que $IND \neq SUB$ y para todos los superelementos en cada grupo que define a una subestructura; se obtiene la solución del sistema de ecuaciones $K U = P$, en la subrutina SOLEC.

El llamado a la subrutina SOLEC, desde la posición final del diagrama, tiene los siguientes parámetros :

CALL SOLEC (A, B, ICOL, NEC, NEC, NCC, 5)

Finalmente, se obtienen las deformaciones y esfuerzos en los elementos, empleando algoritmos convencionales del M.E.F.

De esta manera, en análisis posteriores, para los grupos de elementos que definen a subestructuras cuyas matrices \tilde{K} y \tilde{P} se encuentran almacenadas en algún archivo, bastará con indicar en la tarjeta de control de grupo, que $IND = SUB$ y que $JOPT = LEE$. Así, en la etapa correspondiente a datos de subestructuras en la fig. (III.20), será necesario reservar espacio de memoria

sólo para las incidencias de los nodos de los superelementos asociados a la subestructura de que se trate, en el sistema de referencia nodal global definidas en el arreglo IEN (NPRET, NSEL); para los números de ecuación correspondientes a cada uno de los GL de los NPRET nodos de cada superelemento, a través del arreglo LM (NGL, NPRET, NSEL); para los NCS coeficientes de la matriz \underline{K} y para los NGLR coeficientes del vector de cargas \underline{P} . El espacio de memoria necesario para el almacenamiento del arreglo ICOL (NEC), se reserva en la apertura de memoria para arreglos globales, ya que NEC se conoce inmediatamente después de llamar a la subrutina NUMEC, en la parte inicial del diagrama de la fig. (III.20).

En la etapa de solución, sólo es necesario leer las matrices \underline{K} , \underline{P} e ICOL de la subestructura de que se trate, a través de la instrucción :

```
CALL LYEAS ( SRET, BRET, ICOLS, NGLR, 2 )
```

y sumarlas de manera ordenada en las matrices \underline{K} y \underline{P} empleando la instrucción :

```
CALL ENSUB ( A, B, SRET, BRET, ICOL, ICOLS, LM, NGLR )
```

tantas veces como superelementos se tengan asociados a esta subestructura.

A través del concepto de grupos de elementos, en una ejecución del programa, pueden tenerse las siguientes opciones para distintos grupos :

- 1.- IND \neq SUB .- Esta opción corresponde a considerar que todos los nodos que definen a los elementos dentro de este grupo, forman parte del sistema de referencia nodal global.
- 2.- IND = SUB .- Esta opción corresponde a una subestructura en la cual habrá que calcular las matrices de rigideces \underline{K} y el vector de cargas \underline{P} y almacenarlas en algún archivo, si es que se piensa usarlas en análisis posteriores.
JOPT \neq LEE
- 3.- IND = SUB :- Con esta opción, sólo se leen la matriz de rigideces \underline{K} y el vector de cargas \underline{P} de una subestructura, de algún archivo en el cual estas fueron almacenadas en algún análisis anterior.
JOPT = LEE

Al emplear un algoritmo de subestructuración como el descrito en el diagrama de la fig. (III.20), la selección de una región para ser modelada como subestructura, en un problema determinado, puede hacerse de tal manera que se empleen subestructuras ya construidas, cuya naturaleza física coincida con aquélla de la región a la cual se asocie.

Con el empleo de la segunda opción anterior, puede analizarse tridimensionalmente la región de la fig. III.9, analizando al suelo y a las estructuras independientemente, para formar sus matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} . Las matrices \underline{K} y \underline{P} correspondientes a los superelementos que representan a las estructuras, se referirán solamente a los nodos en su base. Las matrices \underline{K} y \underline{P} correspondientes a los superelementos que forman la masa de suelo, se referirán a los nodos que definen la superficie, y a los que representan la frontera inferior A-A (fig. III.9), en la cual se impondrá la historia de desplazamientos medidos en campo, para un caso particular.

Con la tercera opción, es posible realizar el análisis de la región suelo-estructura (fig. III.9), sin generar las matrices de rigideces y de cargas de los superelementos representativos del suelo y de las estructuras. Estas se leerán de archivos en los que se almacenaron empleando la segunda opción, y se sumarán ordenadamente en arreglos globales \underline{K} y \underline{P} . Como resultado de este análisis se obtendrá la solución del sistema

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$$

la cual corresponde a conocer los desplazamientos que se generan en la zona de interfase suelo-estructura.

En la zona de interfase suelo-estructura, se introduce un grupo de elementos de contacto, que no admiten esfuerzos de tensión, propiciando que exista discontinuidad entre suelo y estructura cuando se presenta este tipo de esfuerzos.

III.6.- ANÁLISIS DE SISTEMAS SUELO-ESTRUCTURA EN PROBLEMAS DE TUNELEO.

En esta sección se analiza el comportamiento tridimensional de la masa de suelo afectada por procesos de tuneleo, sin tener en cuenta la presencia de estructuras ubicadas en la superficie, así como del sistema suelo-estructura representado en la fig. III.9; empleando el algoritmo de subestructuración descrito en secciones anteriores, cuando en su vecindad se realizan trabajos de excavación y construcción de túneles.

La secuencia de análisis y la definición de la región afectada por procesos de tuneleo, se describió en la sección III.1, para un caso particular.

La región en estudio comprende dos subestructuras fundamentales; una de ellas representa a los superelementos asociados a la masa de suelo afectada por procesos de tuneleo, y la otra representa a los superelementos asociados a estructuras ubicadas en la superficie. Además, se introduce un grupo de elementos de contacto entre suelo y estructura, que no son capaces de admitir esfuerzos de tensión, permitiendo que suelo y estructuras no sigan el mismo patrón de desplazamientos en la zona de interfase, cuando se presenta este tipo de esfuerzos (sección III.1).

La selección de los grados de libertad a retener en cada una de estas subestructuras, se llevó a cabo de la siguiente manera:

- a).- Subestructura representativa de superelementos asociados a la masa de suelo.

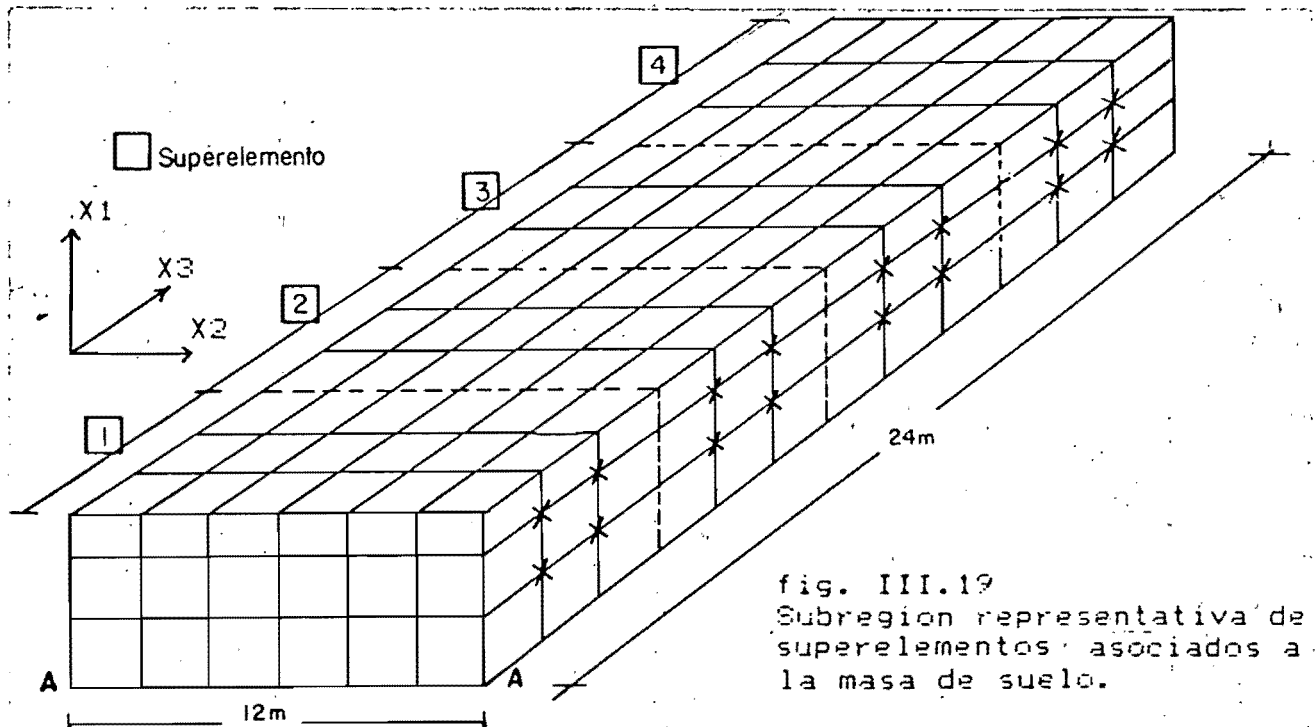


fig. III.19
Subregion representativa de superelementos asociados a la masa de suelo.

Los superelementos asociados a esta subestructura se representan en la fig. III.19. En la cara superior de cada uno de ellos se retienen todos los grados de libertad, para establecer su unión con las estructuras ubicadas en la superficie, a través de los elementos de contacto (sección III.1).

En la cara inferior, se retienen todos los grados de libertad, para prescribir en ellos la historia de desplazamientos medidos en campo, representados por las figs. III.6, III.7 y III.8.

En las caras anterior y posterior, se retienen todos los grados de libertad, ya que es necesario establecer continuidad cinemática entre los superelementos representativos de la masa de suelo (sección III.4).

En las caras laterales, no se requiere retener a los grados de libertad marcados con una X, por ninguno de los conceptos anteriores. Con base en las figs. III.6, III.7 y III.8, estos nodos se consideran fijos en la dirección X2, y en libertad de movimiento en las direcciones X1 y X3. Estas condiciones de frontera se introducen desde el sistema de referencia nodal local a la subestructura representada por la fig. III.19 (sección III.5).

b).- Subestructura representativa de superelementos asociados a estructuras ubicadas en la superficie.

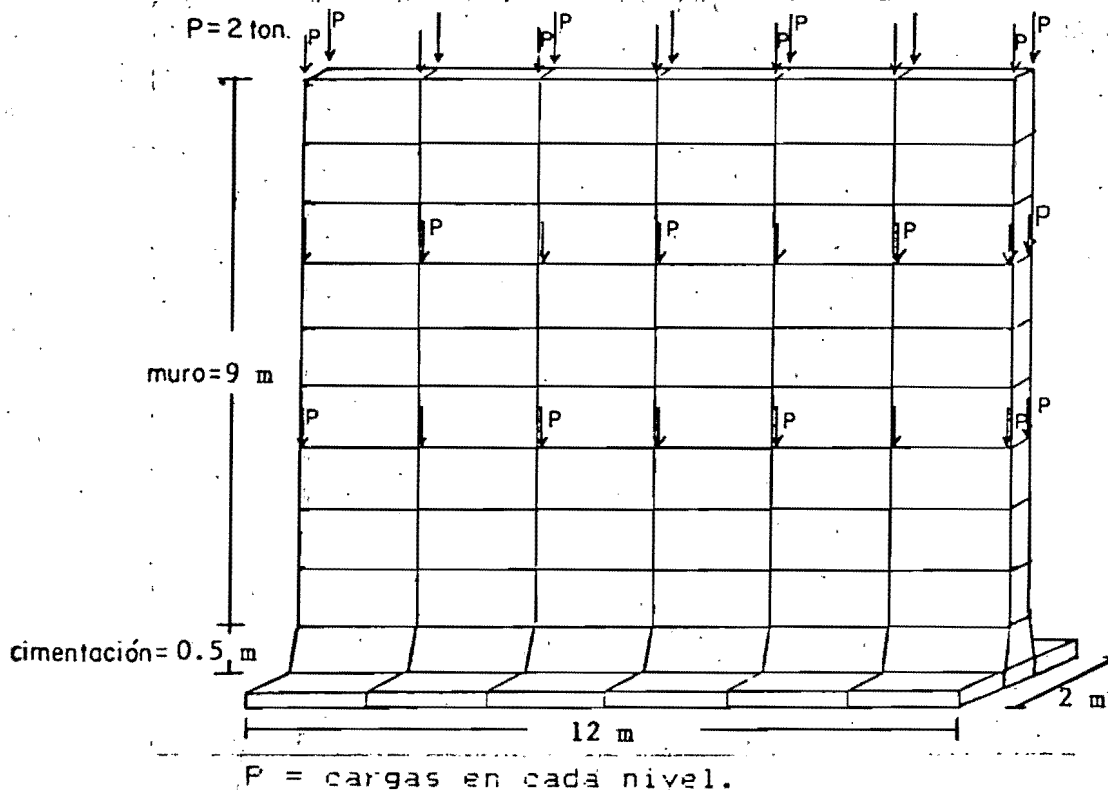


fig. III.20
Subregión representativa de superelementos asociados a estructuras ubicadas en la superficie.

Esta subestructura se representa en la fig. III.20. En la formación de las matrices de rigideces \underline{K} y de cargas \underline{P} de esta subestructura, se empleó subestructuración de segundo nivel (sección III.3). En primer lugar, se obtuvieron las matrices de rigideces \underline{K}' y de cargas \underline{P}' (NS), para cada una de las regiones representativas de muros y cimentación (fig. III.20), empleando subestructuración de primer nivel.

En la subestructura representativa de muros, los grados de libertad retenidos corresponden solamente a los nodos que inciden en la parte superior de la subestructura representativa de la cimentación. En esta última, los grados de libertad retenidos corresponden a los nodos en su parte superior, para establecer la unión con los muros, y en su parte inferior, para unirse con los superelementos representativos de la masa de suelo, a través de los elementos de contacto.

Después de sumar de manera ordenada las matrices de rigideces \underline{K}' y de cargas \underline{P}' , correspondientes a muros y cimentación, se efectuó subestructuración de segundo nivel (sección III.3), reteniéndose solamente los grados de libertad correspondientes a los nodos en la base del sistema muro-cimentación, de tal manera que las características de rigideces y de cargas de este sistema, representadas por las matrices \underline{K} y \underline{P} respectivamente, se asocian solamente a los nodos en su base.

Con este esquema de subestructuración, se ejecutó una serie de análisis de regiones análogas a la representada en la fig. III.21 variando la posición de la estructura ubicada en la superficie.

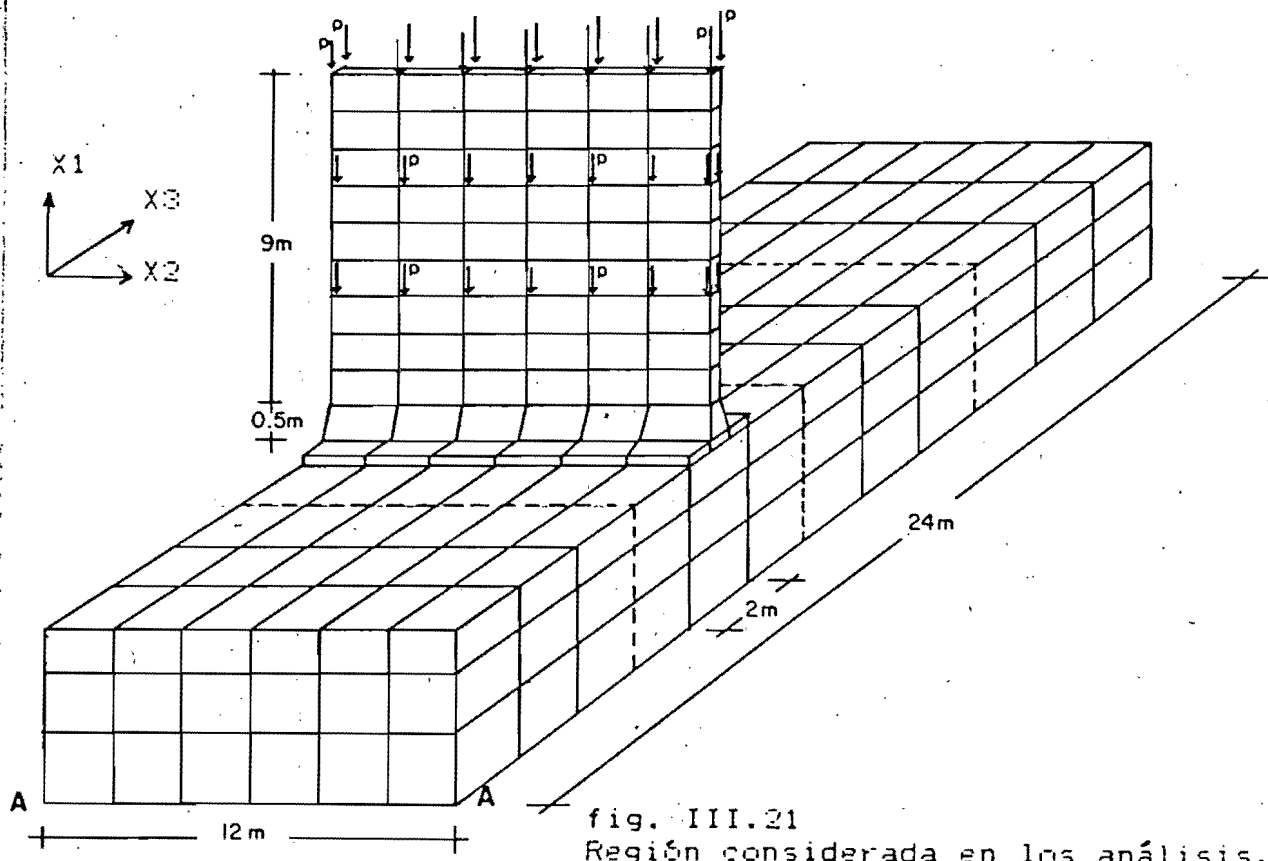


fig. III.21
Región considerada en los análisis.

NS.- El superíndice se refiere al nivel de subestructuración.

En todos los casos, la historia de prescripción de desplazamientos (sección III.1), al nivel de la frontera A-A (fig. III.9), correspondió a la historia definida por las figs. III.6, III.7 y III.8, comprendida dentro de la zona afectada significativamente por trabajos de tuneleo (sección III.1).

Los resultados de estos análisis se muestran en las figuras siguientes:

En la fig. III.22 se muestran las variaciones de desplazamientos verticales en la superficie del terreno, para distintas posiciones de la estructura con respecto al frente de avance del túnel, sin la presencia de estructuras en la superficie.

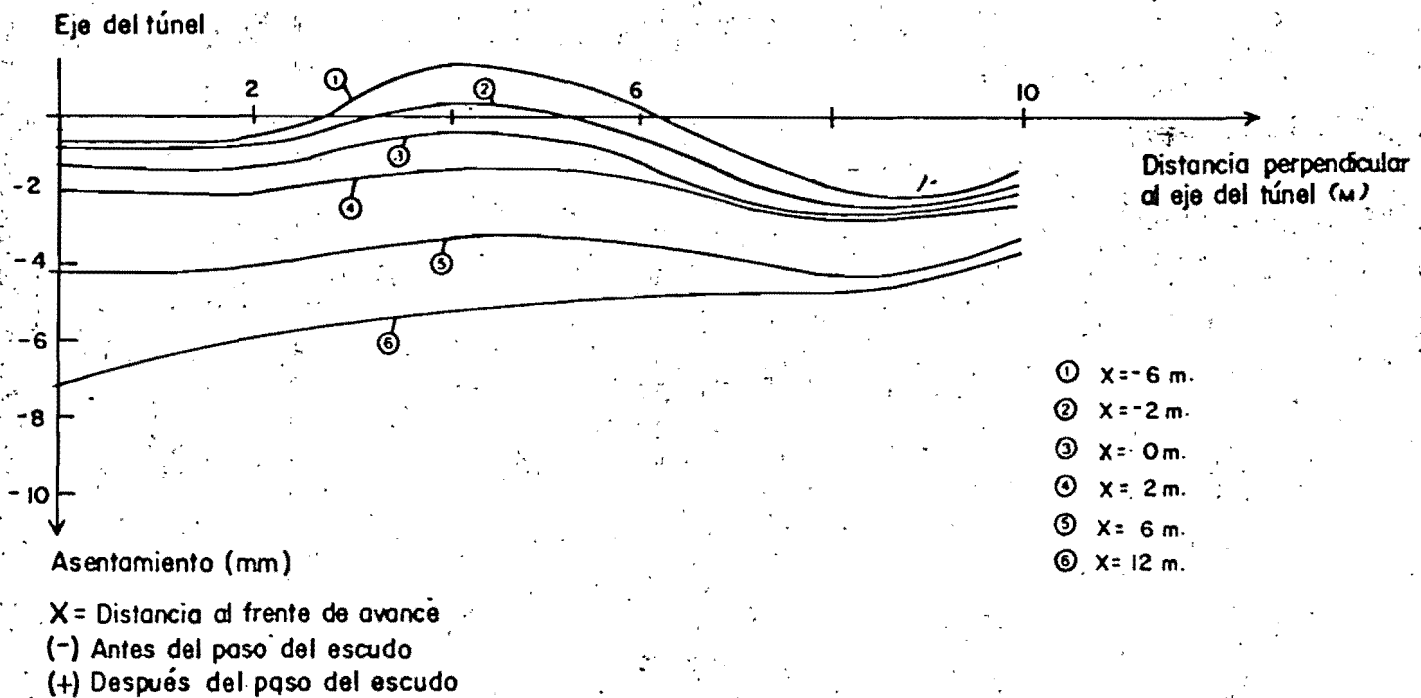


fig. III.22

Perfiles superficiales de desplazamientos verticales, sin considerar la presencia de estructuras en la superficie.

En la fig. III.22 se observa que los perfiles de desplazamientos verticales propuestos por los métodos semiempíricos, corresponden a la forma que éstos toman cuando el frente de excavación ha pasado por la sección de referencia. Sin embargo, durante la aproximación y paso del frente de excavación, se presentan distorsiones importantes que pueden dañar las estructuras ubicadas en la superficie (fig. III.22).

En las figs. III.23 a III.28 se comparan los perfiles de desplazamientos superficiales verticales obtenidos teniendo en cuenta la presencia de estructuras en la superficie, para varias

posiciones de éstas con respecto al frente de avance del túnel, con aquéllos graficados en la fig. III.22 .

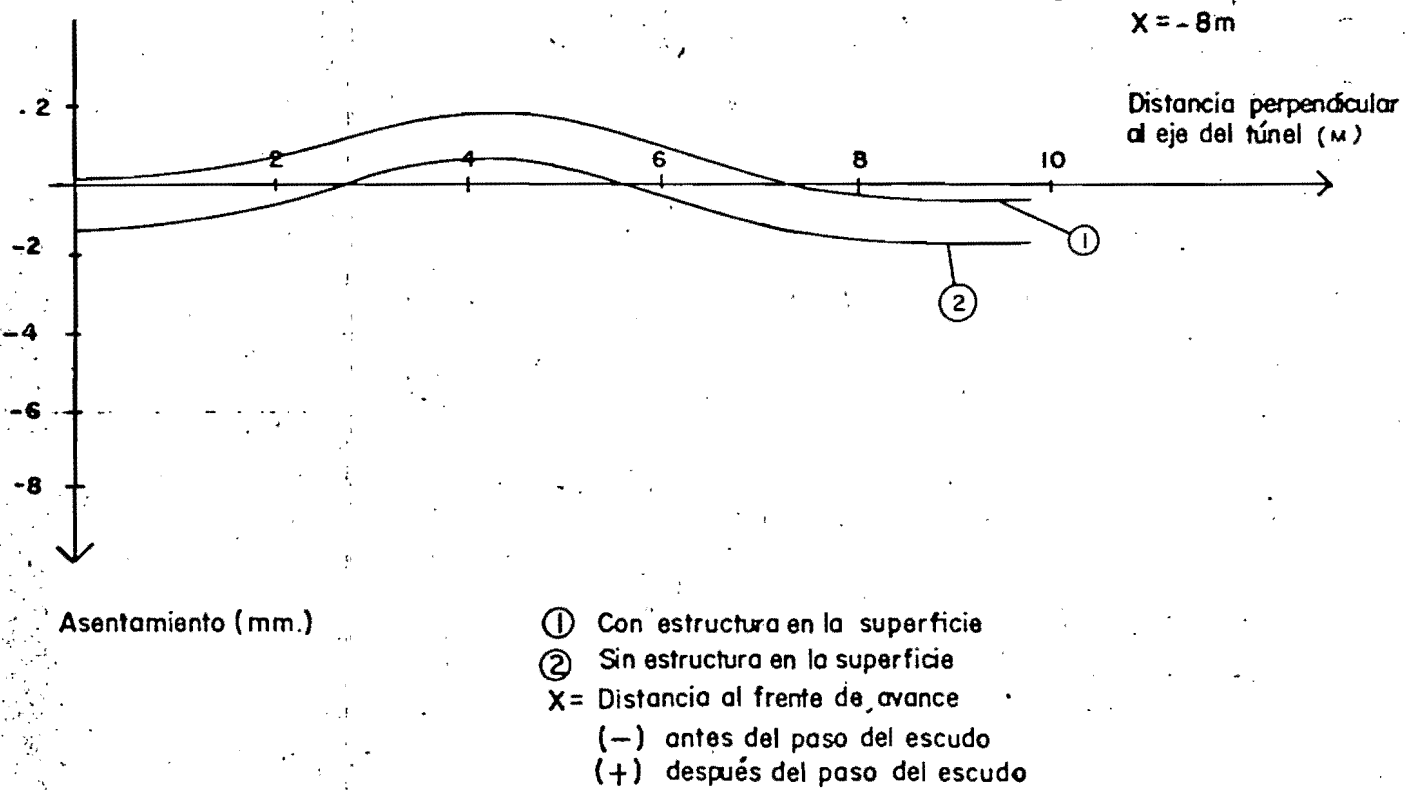


fig. III.23
Desplazamientos verticales calculados en la superficie

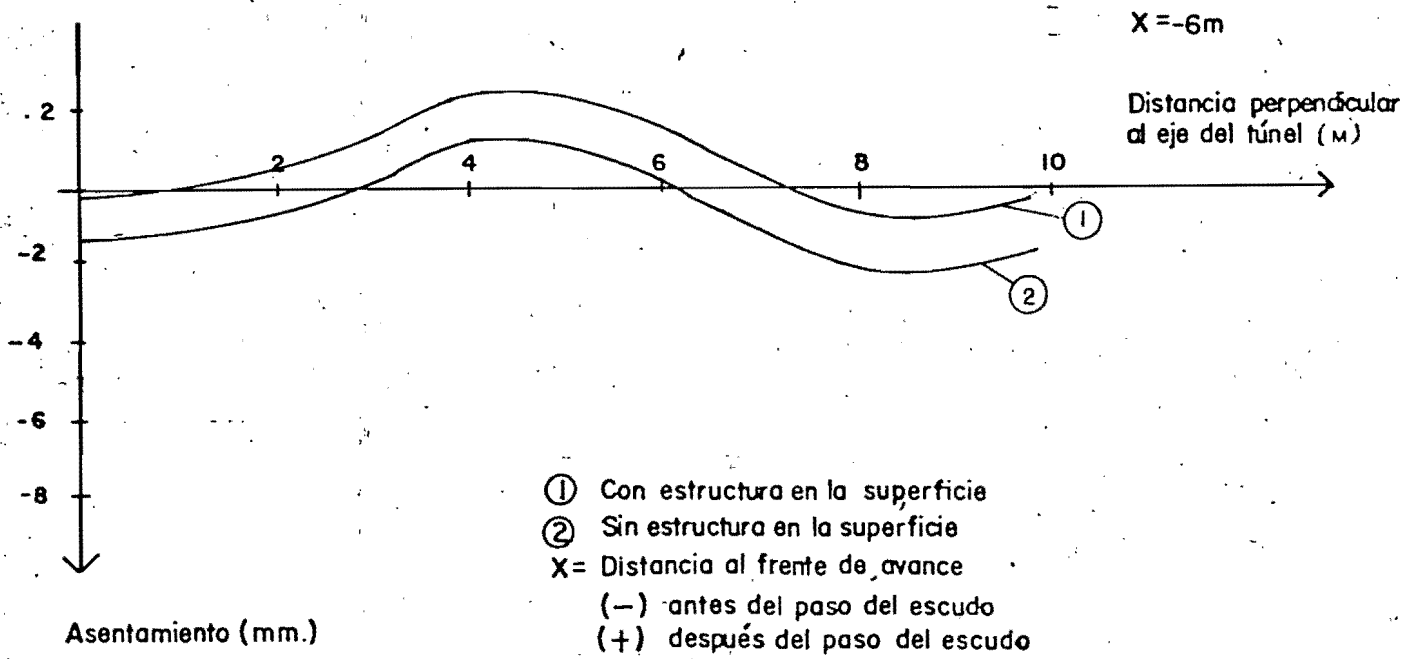


fig. III.24
Desplazamientos verticales calculados en la superficie.

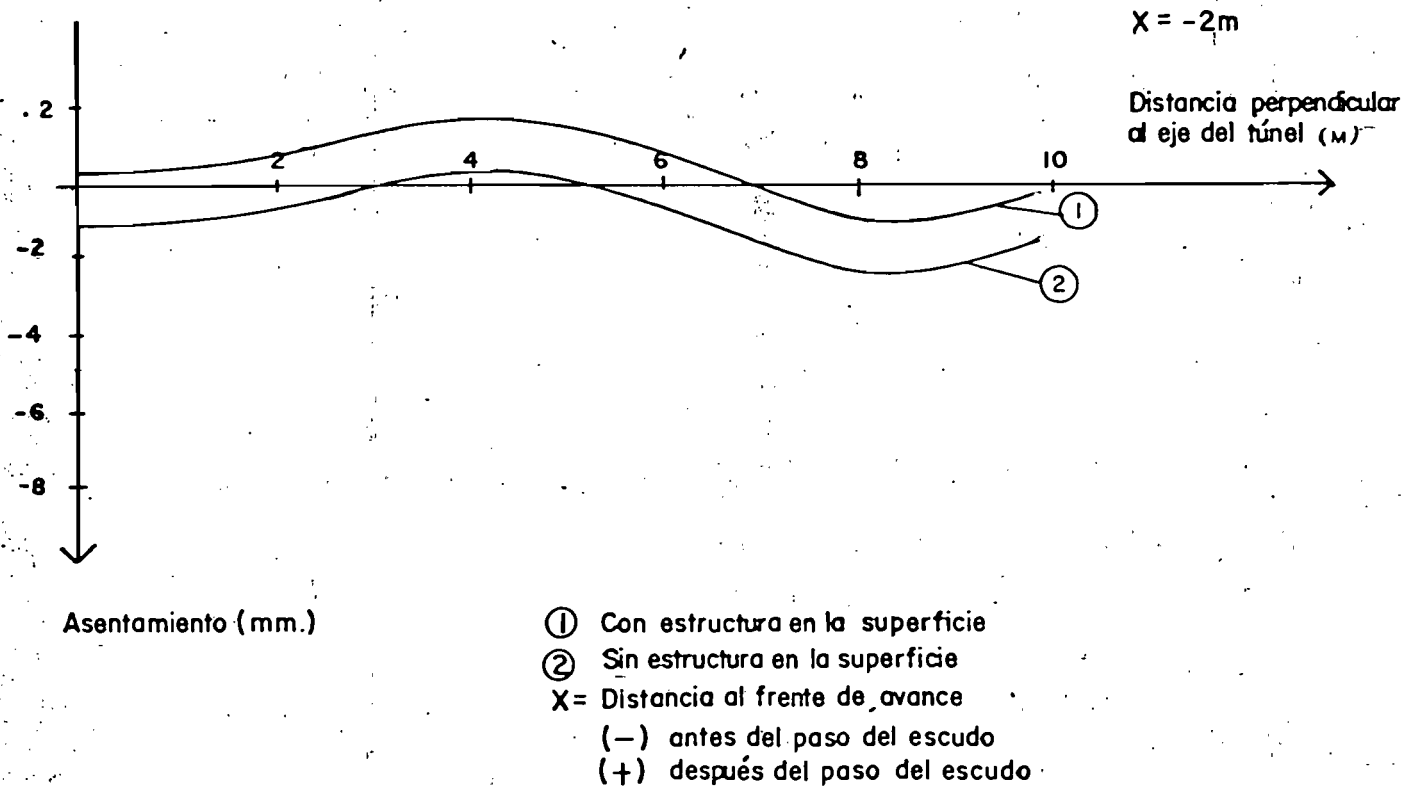


fig. III.25
Desplazamientos verticales calculados en la superficie.

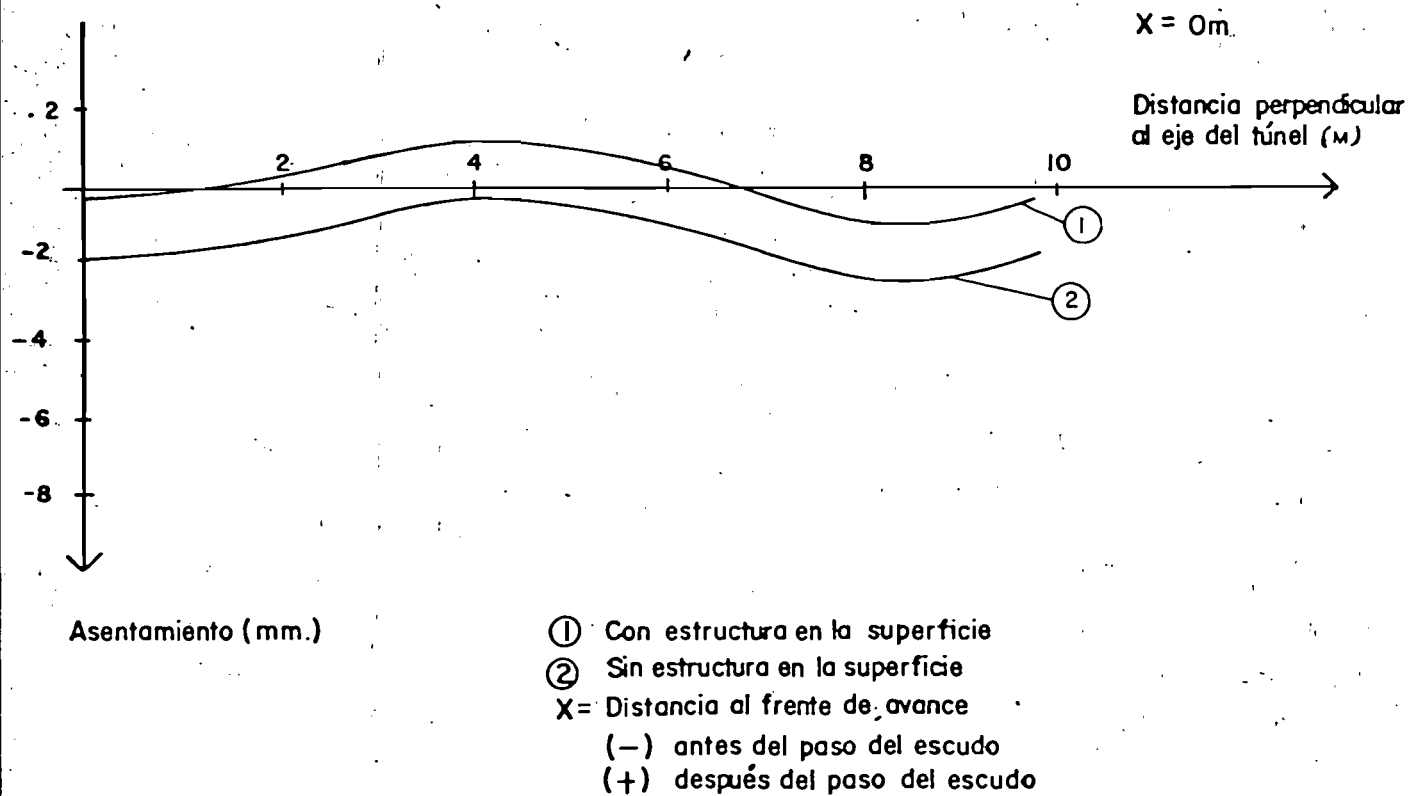


fig. III.26
Desplazamientos verticales calculados en la superficie.

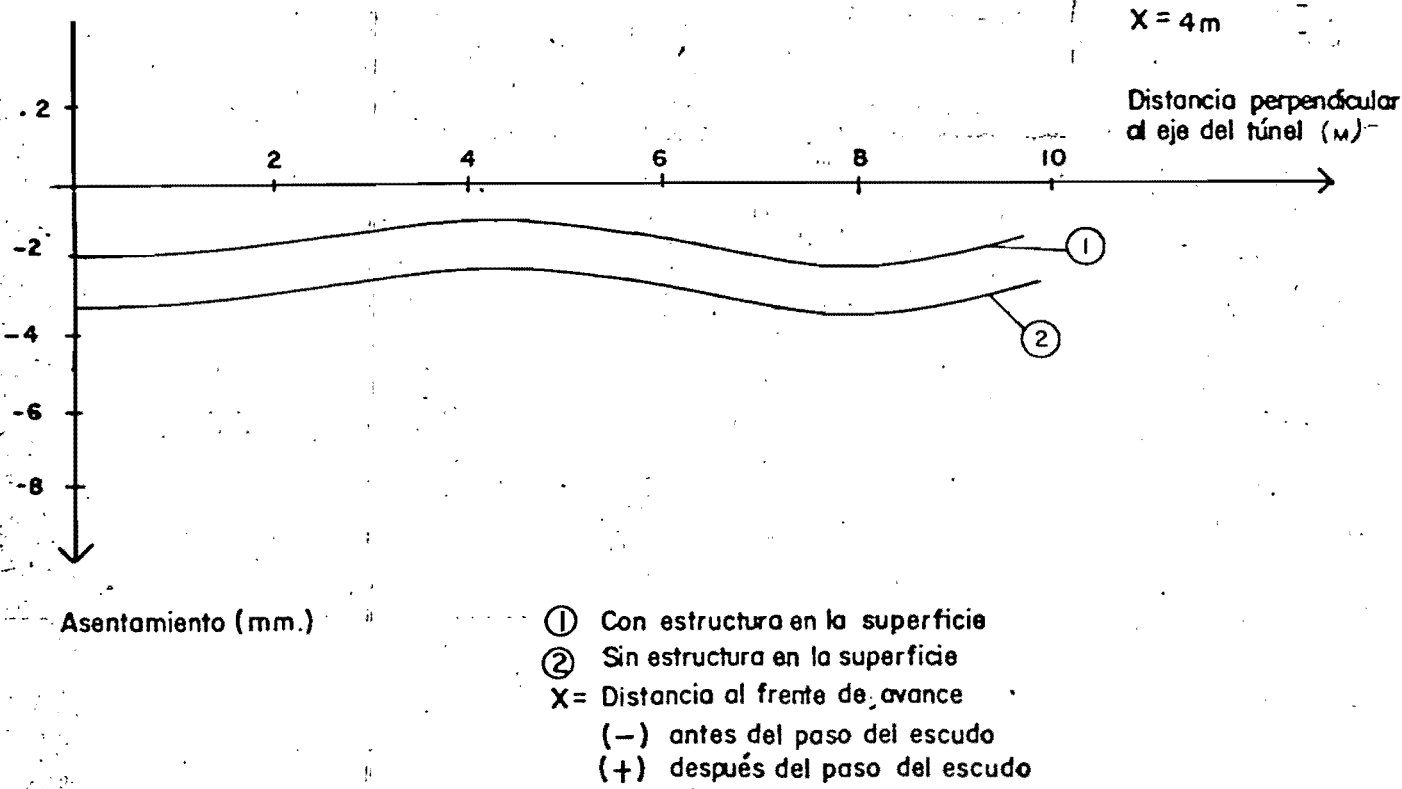


fig. III.27
Desplazamientos verticales calculados en la superficie.

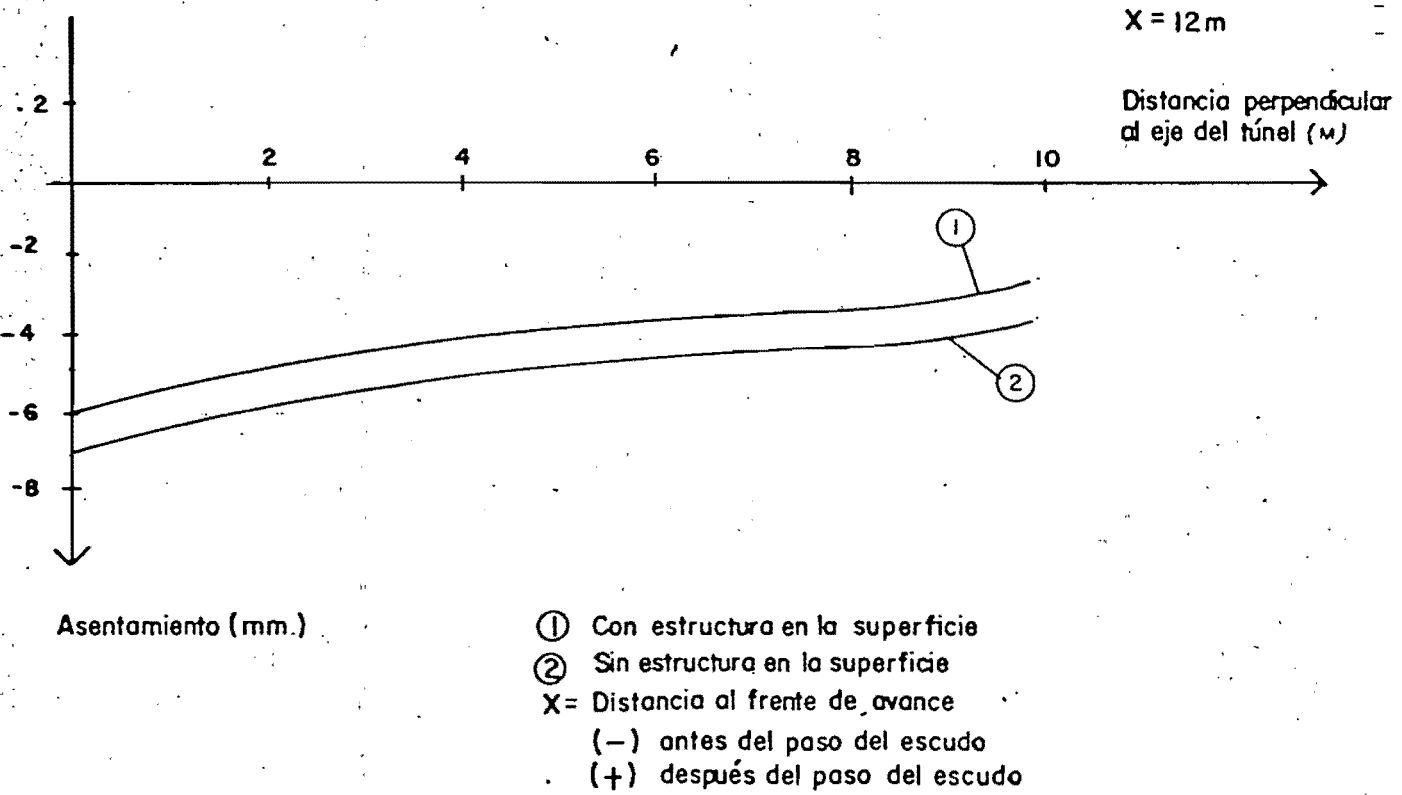


fig. III.28
Desplazamientos verticales calculados en la superficie.

En las figs. III.23 a III.28 se aprecia la influencia que tienen las estructuras sobre los perfiles de desplazamientos superficiales generados por tuneleo. En todos los casos esta influencia tiende a disminuir los desplazamientos verticales, así como las distorsiones angulares verticales en la zona de interfase suelo-estructura.

En la fig. III.29 se comparan los valores de las distorsiones angulares superficiales máximas obtenidas a partir de las figs. III.23 a III.28, teniendo y sin tener en cuenta la presencia de estructuras en la superficie.

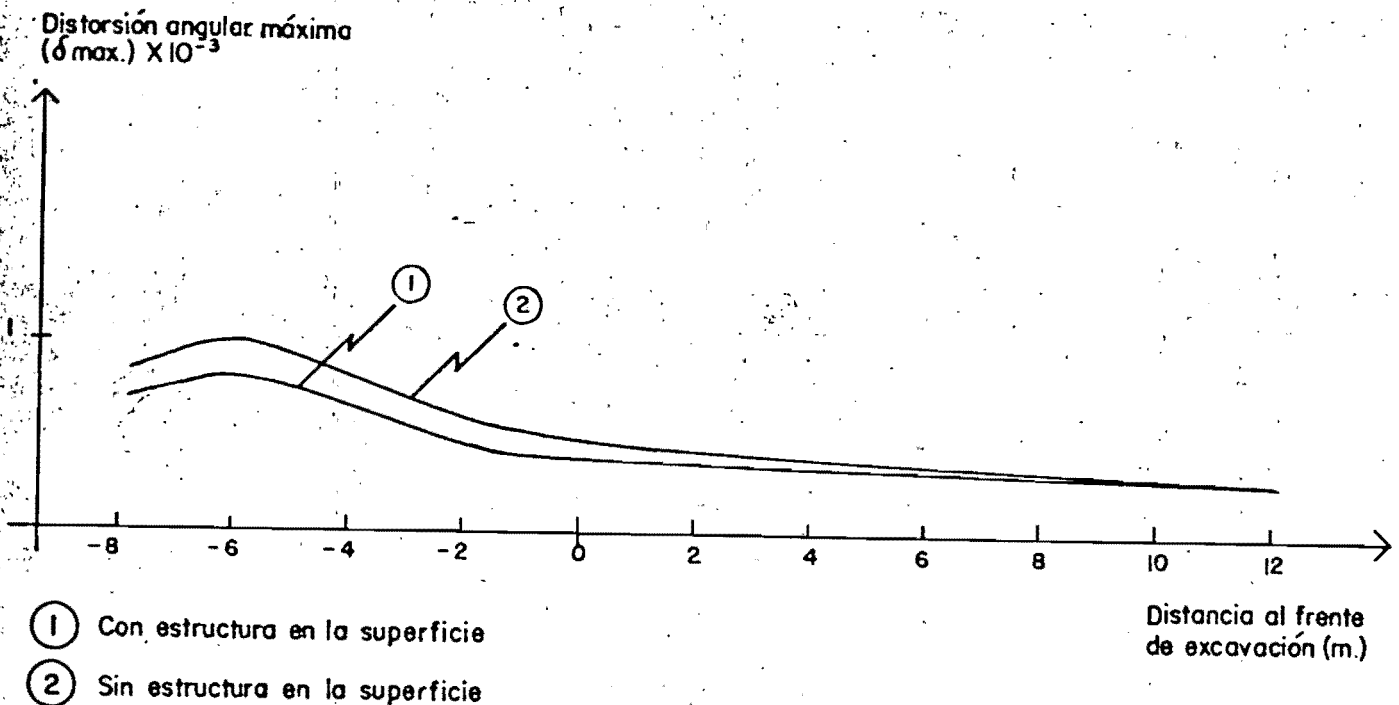


fig. III.29

Distorsiones angulares máximas calculadas en la superficie.

En la fig. III.29 pueden observarse las tendencias siguientes:

a).- La presencia de estructuras en la superficie disminuye las distorsiones angulares de manera significativa durante la aproximación del frente de excavación y en menor medida después de que éste ha pasado por la sección de referencia, obteniéndose prácticamente las mismas distorsiones máximas para la región que considera la presencia de estructuras en la superficie y para la que no la considera, después de que el frente de excavación se encuentra alejado de esta sección; aunque los desplazamientos verticales son menores en el primer caso que en el segundo (figs. III.23 a III.28).

de éstas con respecto al frente de avance del túnel, con los graficados en la fig. III.30.

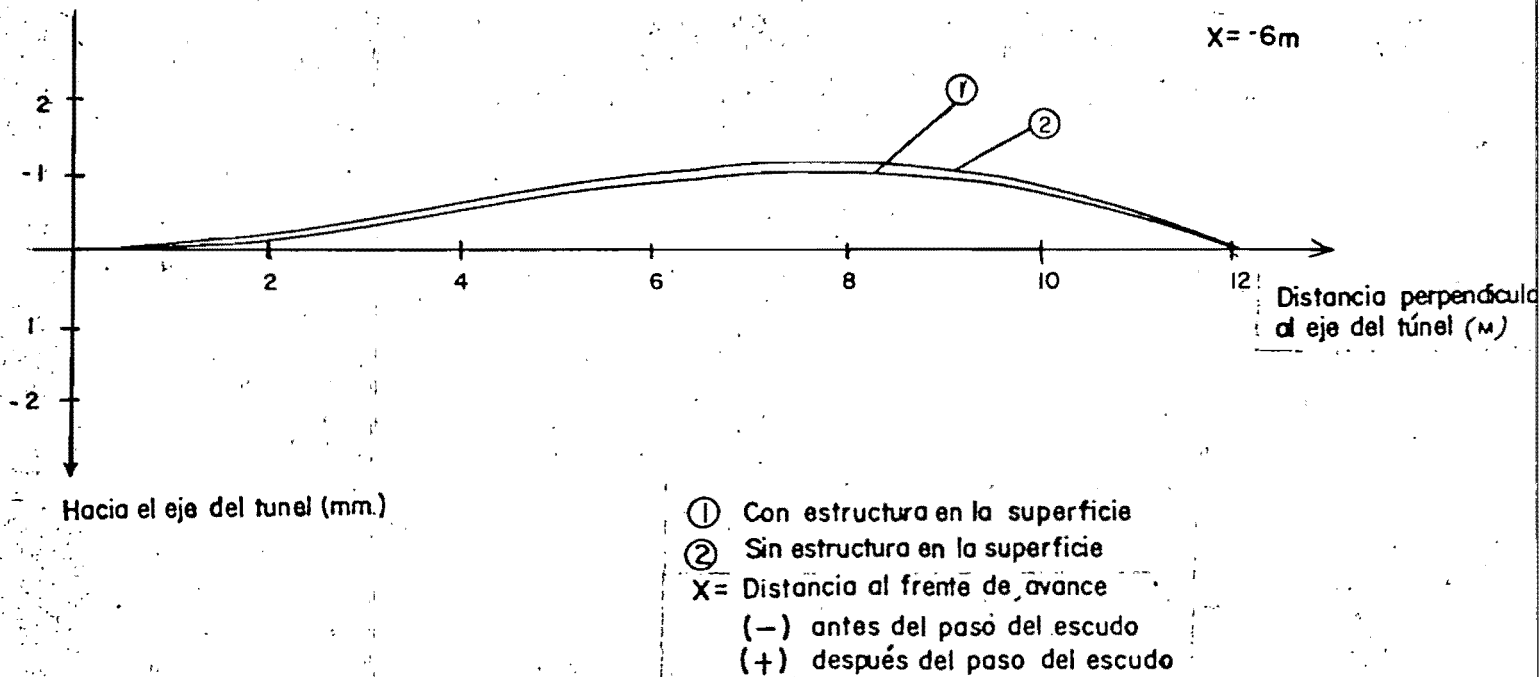


fig. III.31

Desplazamientos horizontales transversales al eje del túnel, calculados en la superficie.

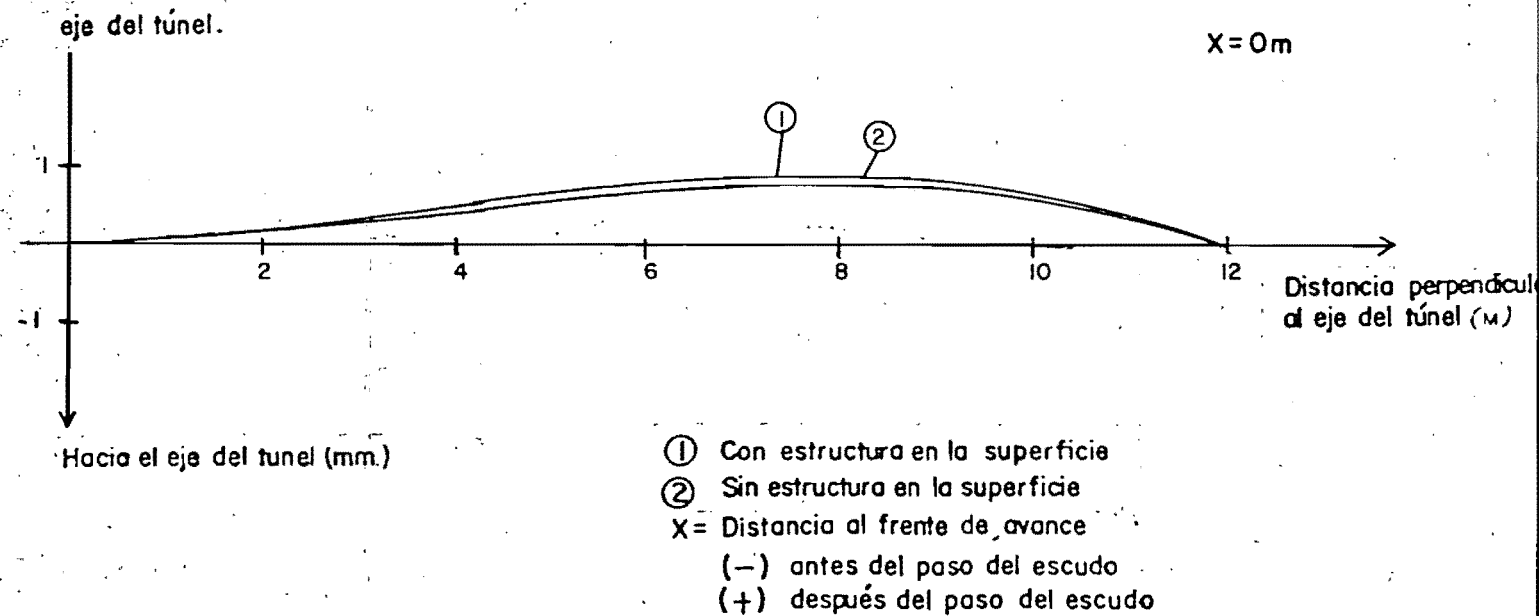


fig. III.32

Desplazamientos horizontales transversales al eje del túnel, calculados en la superficie.

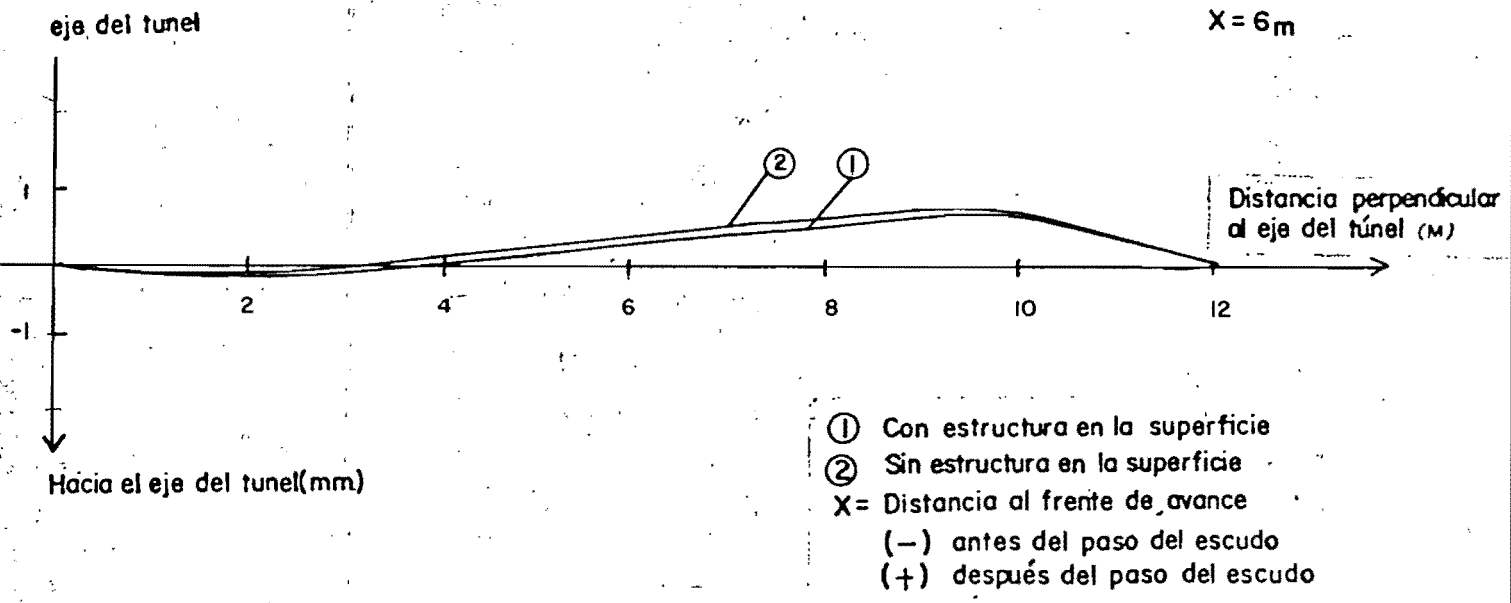


fig. III.33
 Desplazamientos horizontales transversales al eje del túnel, calculados en la superficie.

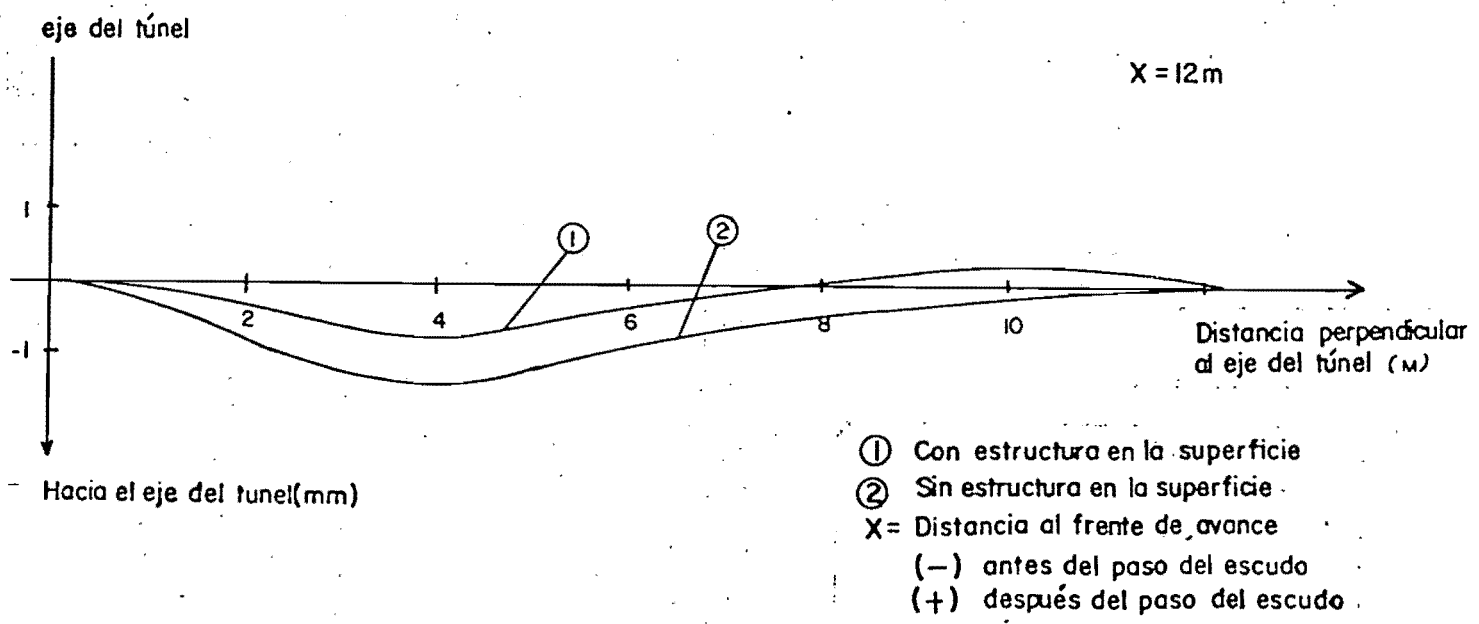


fig. III.34
 Desplazamientos horizontales transversales al eje del túnel, calculados en la superficie.

c).- Después del paso del escudo, la presencia de estructuras en la superficie disminuye las deformaciones unitarias máximas ϵ_t hasta en un 50 % aproximadamente.

En la fig. III.36 se muestran las variaciones de los desplazamientos horizontales superficiales calculados en sentido paralelo al eje del túnel, conforme se acerca el frente de excavación y después de que ha pasado por la sección de referencia, sin tener en cuenta la presencia de estructuras en la superficie.

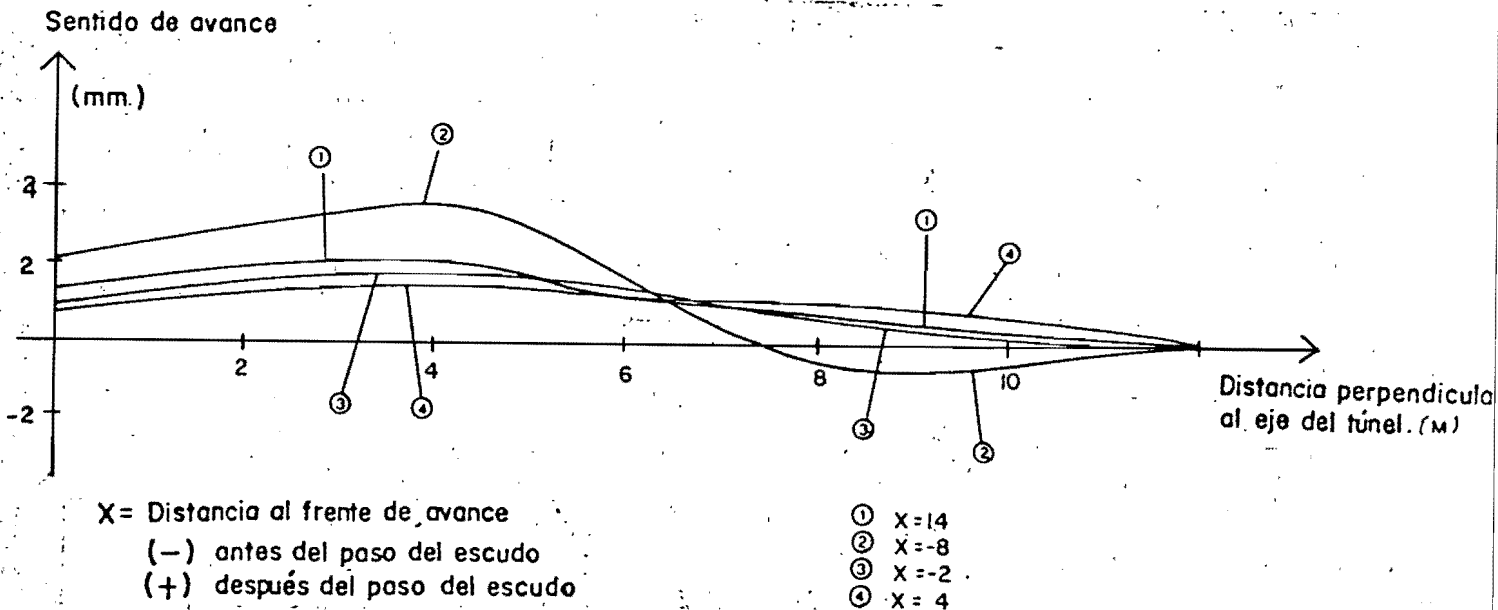


fig. III.36

Perfiles superficiales de desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel, sin considerar la presencia de estructuras en la superficie.

En la fig. III.36 se observa que la superficie del terreno tiende a desplazarse en el sentido de avance del túnel, antes y después del paso del escudo por la sección de referencia. Antes del paso del escudo se localizan zonas (zonas alejadas transversalmente del eje del túnel) en las que se localizan desplazamientos en sentido contrario al del avance del túnel.

En las figs. III.37 a III.40 se comparan los perfiles de desplazamientos horizontales en sentido paralelo al eje del túnel, obtenidos teniendo en cuenta la presencia de estructuras en la superficie para varias posiciones de éstas con respecto al frente de avance del túnel, con los graficados en la fig. III.36.

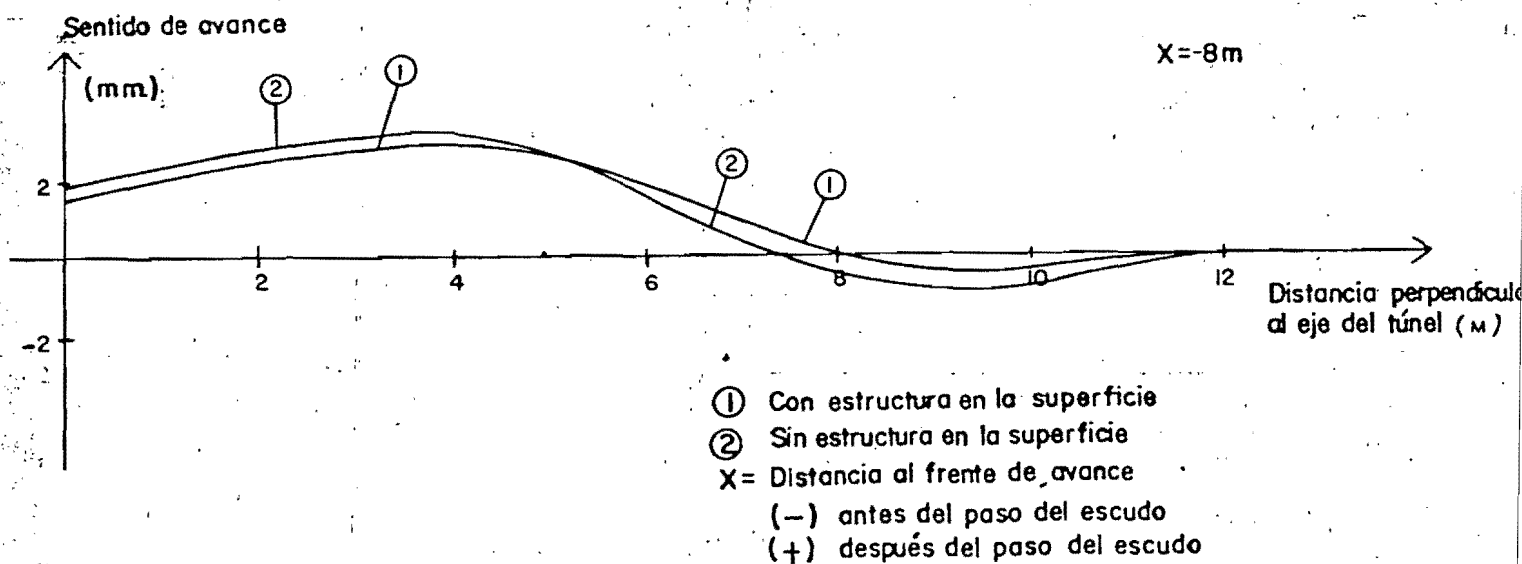


fig. III.37

Desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel, calculados en la superficie.

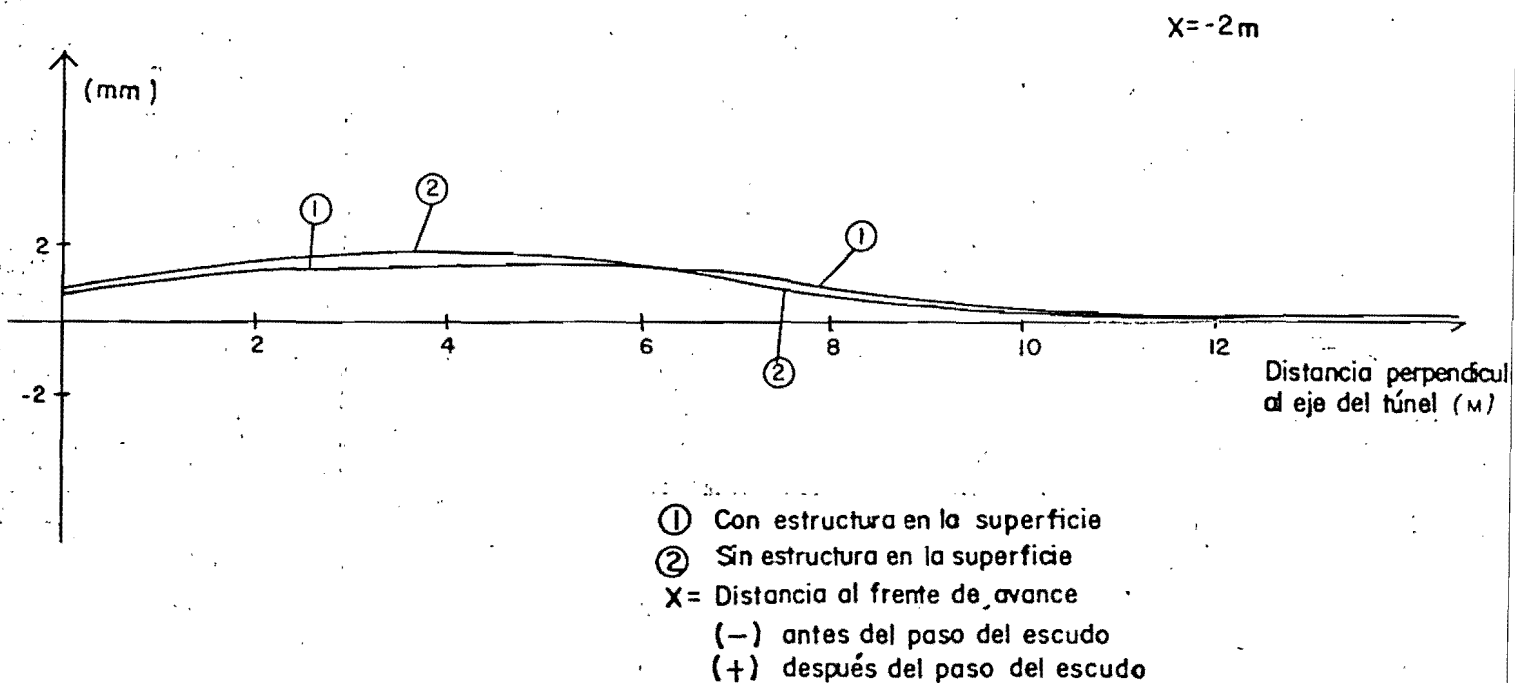


fig. III.38

Desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel, calculados en la superficie.

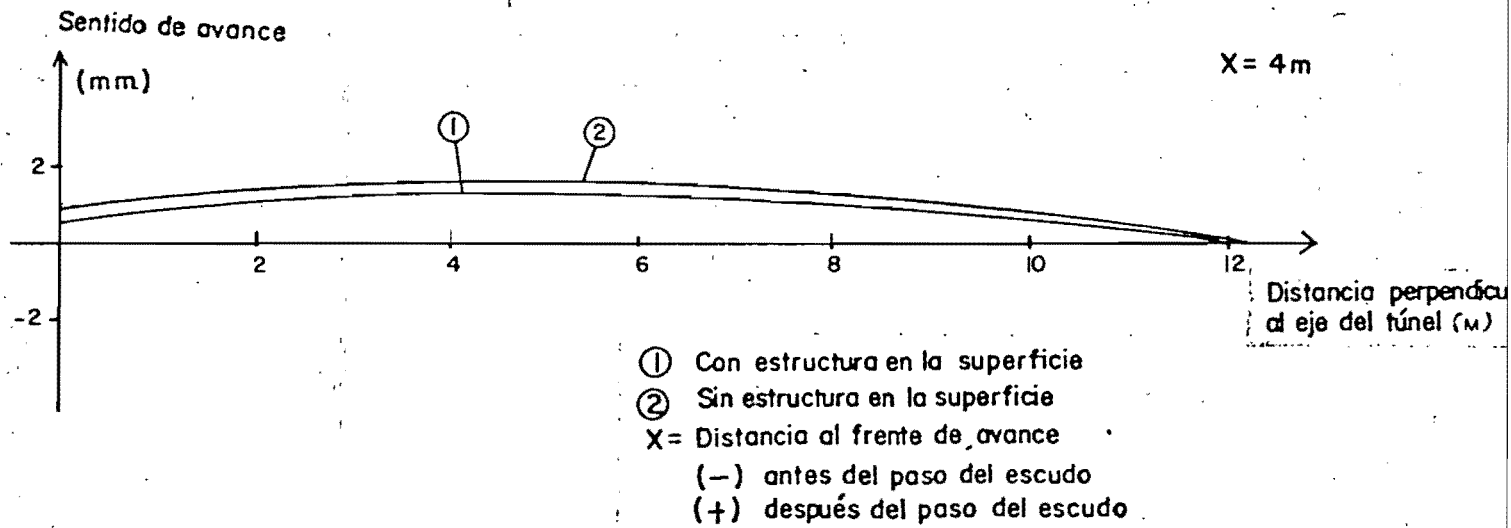


fig. III.39.

Desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel, calculados en la superficie.

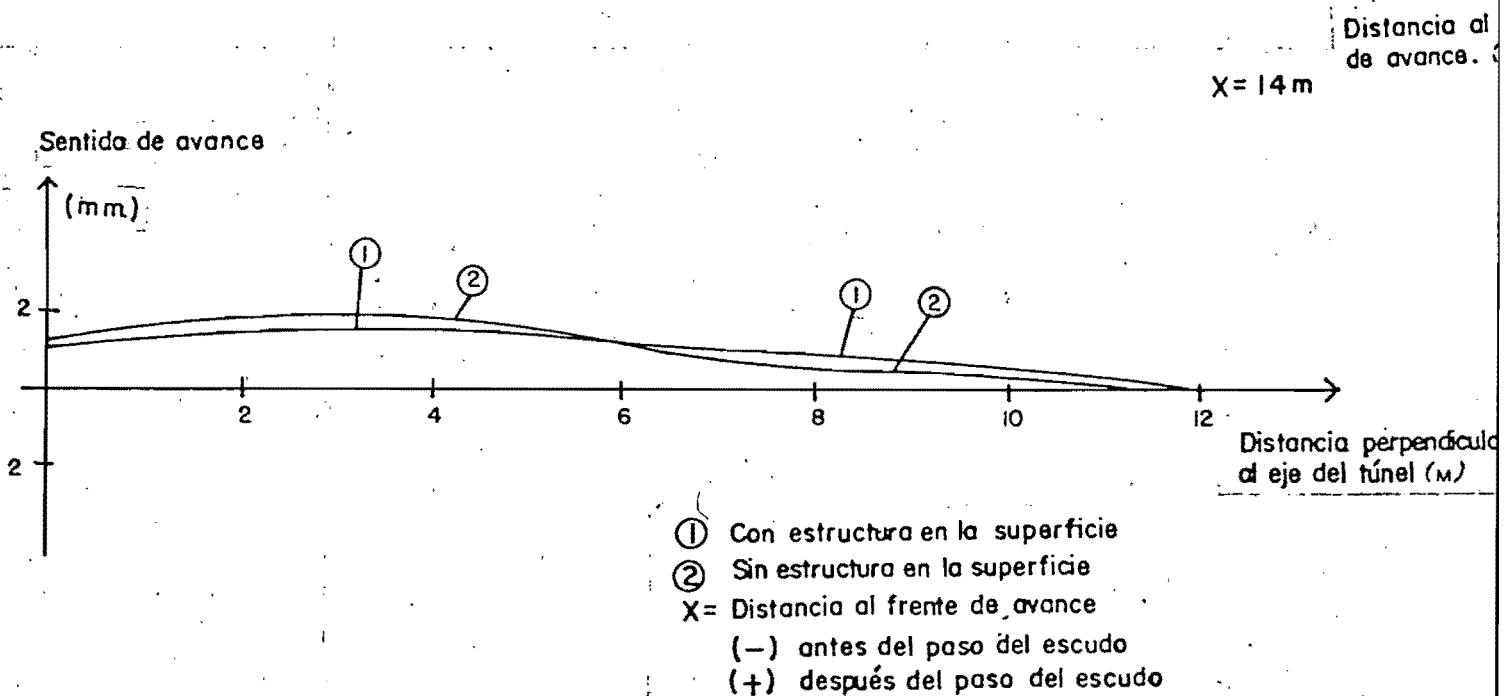


fig. III.40

Desplazamientos horizontales paralelos al eje del túnel, calculados en la superficie.

En las figs. III.37 a III.40 se observa que la presencia de estructuras en la superficie tiende a disminuir los desplazamientos y las distorsiones horizontales que ocasiona el proceso de tuneleo, en sentido paralelo al eje del túnel, sobre la cimentación de la estructura.

En la fig. III.41 se comparan los valores de las distorsiones horizontales máximas en sentido paralelo al eje del túnel (δL), calculadas a partir de las figs. III.37 a III.40, teniendo y sin tener en cuenta la presencia de estructuras en la superficie.

Distorsiones angulares horizontales máximas ($\times 10^{-3}$).

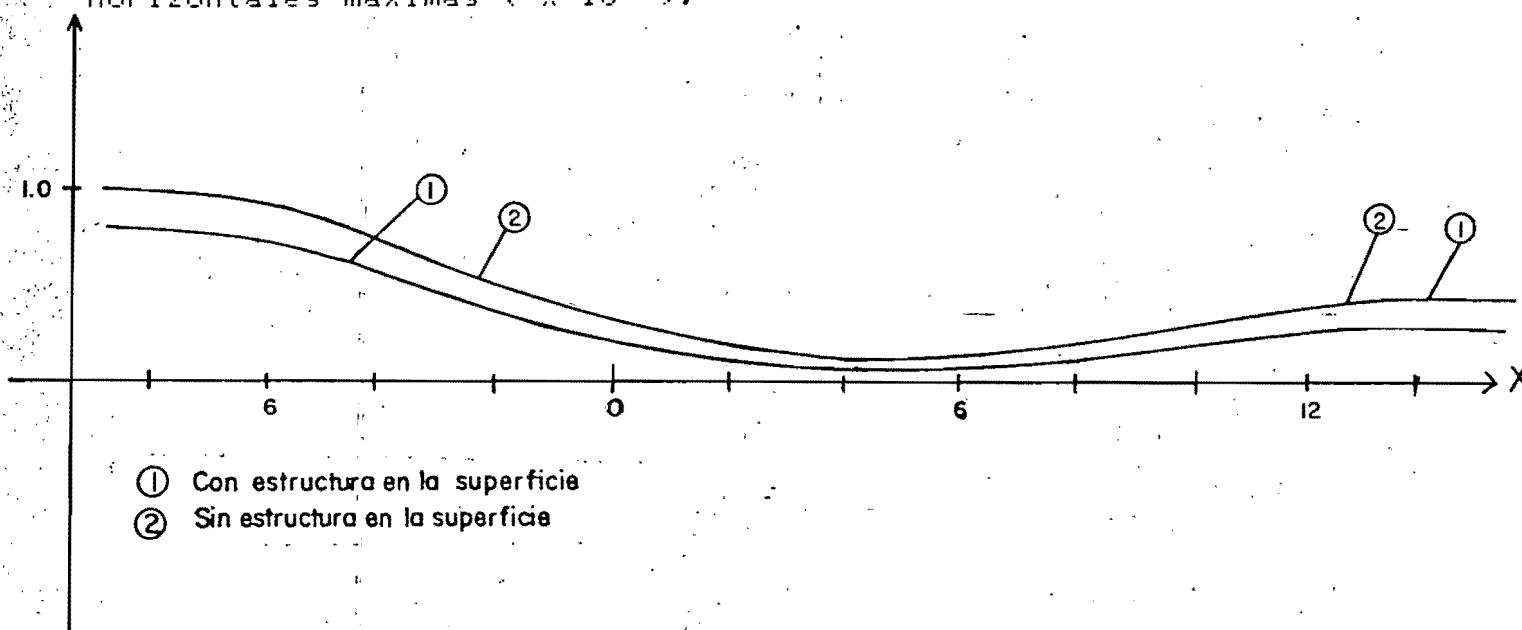


fig. III.41

Distorsiones angulares horizontales máximas calculadas en la superficie, en sentido paralelo al eje del túnel.

En la fig. III.41 se observan las siguientes tendencias:

a).- La presencia de estructuras en la superficie afecta de manera significativa las distorsiones angulares horizontales máximas (δL), antes y después del paso del escudo por la sección de referencia. Existe una zona (de 2 m. a 6 m. aproximadamente, después del paso del escudo) en la que la presencia de estructuras en la superficie, no afecta de manera significativa las distorsiones angulares horizontales máximas δL .

b).- Los valores calculados de las distorsiones angulares horizontales máximas δL , alcanzan su mayor valor antes del paso del frente de excavación por la sección de referencia (aproximadamente a 8 m. antes del paso del frente); disminuyen paulatinamente conforme se acerca el frente de excavación; aumentan después del paso del frente hasta alcanzar valores de aproximada-

mente 50 % de los valores mayores calculados antes del paso del escudo y permanecen aproximadamente constantes posteriormente.

c).- Antes del paso del escudo por la sección de referencia, la presencia de estructuras en la superficie disminuye los valores de las distorsiones angulares horizontales máximas δ_L en un 20 % y después del paso del escudo en un 40 % aproximadamente.

Al comparar los valores calculados de las mayores distorsiones angulares graficadas en la fig. III.29 con los valores para las distorsiones angulares máximas permisibles, sugeridas por distintos autores (tablas II.2 a II.5), pueden establecerse criterios de daño ocasionado por tuneleo, para la estructura en estudio.

Nótese que las distorsiones angulares máximas graficadas en la fig. III.29, corresponden a zonas de los perfiles de asentamientos con concavidad hacia abajo (figs. III.23 a III.28). En este caso puede emplearse la tabla II.6 para estimar el nivel de daño.

En la fig. III.29 la distorsión angular máxima es del orden de $\delta_{max}=0.0008$, considerando la presencia de la estructura representada en la fig. III.20 en la superficie. Al comparar este valor con las distorsiones angulares que ocasionan agrietamiento (δ_o) según los autores citados en la tabla II.6 para zonas con curvatura con concavidad hacia abajo se observa que el valor de $\delta=0.0008$ excede a los valores de δ_o propuestos en la tabla II.6 para este tipo de concavidad, por lo que para la región en estudio, puede esperarse agrietamiento de la estructura durante el paso del escudo.

En cuanto a las deformaciones unitarias horizontales del terreno, puede estimarse el nivel de daño para la estructura en estudio, a partir de la comparación de las deformaciones unitarias máximas graficadas en la fig. III.35 con los criterios de daño ocasionado por deformaciones unitarias horizontales del terreno, propuestos en las tablas II.7 y II.8.

En la fig. III.35 el valor máximo de las deformaciones unitarias horizontales del terreno es del orden de $\epsilon_{max}=0.0002$ cuando se considera la presencia de la estructura de la fig. III.20 en la superficie. Al comparar este valor con los propuestos en la tabla II.7 se observa que para el valor calculado de $\epsilon_{max}=0.0002$ se presentará un nivel de daño despreciable, correspondiente a la formación de grietas no visibles externamente.

Existe la posibilidad de que para alguna estructura en estudio no existan correlaciones entre las distorsiones angulares o deformaciones unitarias del terreno y aquellas que inician el agrietamiento de la estructura. En este caso se puede recurrir a calcular las deformaciones unitarias que se generan dentro de la estructura, a partir de los desplazamientos que se produzcan en la cimentación y compararlas con los valores de la deformación unitaria que inicia el agrietamiento, propuestos en la tabla II.8 por distintos autores.

En la fig. III.42 se muestra la variación de las fuerzas que se presentan en los elementos de interfase. Para la región en estudio (fig. III.21) las fuerzas en todos los elementos de interfase son de compresión para cualquier posición de la estructura representada en la fig III.20 con respecto al frente de avance del túnel.

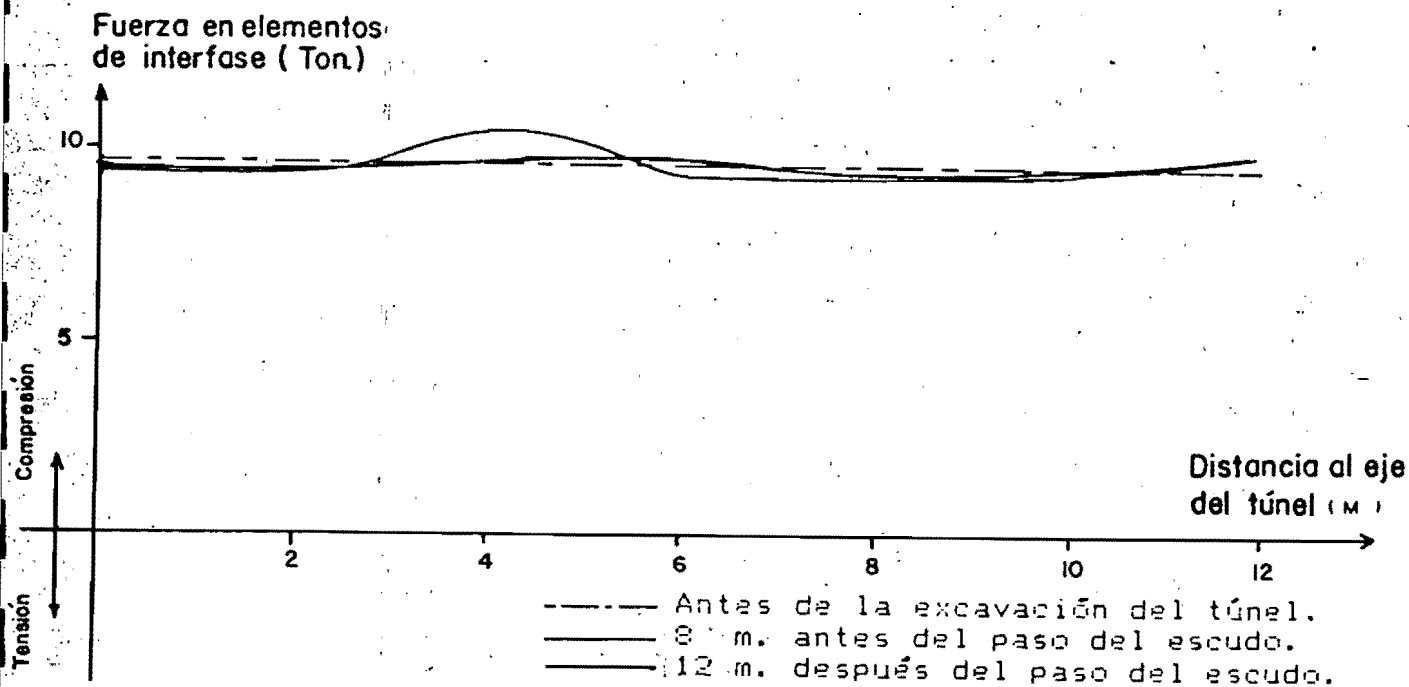


fig. III.42
Distribución del peso de la estructura en los elementos de interfase.

En la fig. III.42 se grafican solamente las distribuciones de las fuerzas en los elementos de interfase para las secciones $X=-8$ m. (8 m. antes del paso del escudo) y para $X=12$ m. (12 m. después del paso del escudo). Para secciones intermedias, se obtienen distribuciones intermedias de fuerzas entre las graficadas. No se grafican estas distribuciones por claridad en la fig. III.42.

Nótese que la zona en la que aumentan las fuerzas en los elementos de interfase con respecto a las existentes antes de la excavación (de 2.5 m. a 6.0 m. del eje del túnel aproximadamente), corresponde con las zonas de concavidad hacia abajo de los perfiles de desplazamientos verticales graficados en las figs. III.23 a III.28. Las zonas con curvatura con concavidad hacia arriba en las figs. III.23 a III.28 corresponden con zonas de decrementos en las fuerzas que actúan sobre los elementos de interfase. Este comportamiento corresponde con un mayor apoyo de la estructura en las zonas con concavidad hacia abajo en los

perfiles de desplazamientos verticales.

En las zonas con mayor curvatura con concavidad hacia abajo se tienen mayores incrementos en las fuerzas actuando sobre los elementos de interfase y en las zonas con mayor curvatura con concavidad hacia arriba se tienen mayores decrementos.

CONCLUSIONES

abajo, erróneamente se utiliza evidencia correspondiente a desplazamientos verticales con concavidad hacia arriba, que son generalmente mayores que las anteriores.

3).- En situaciones donde no existan correlaciones entre distorsiones y daño estructural, es posible, empleando esta misma herramienta, calcular distribuciones de esfuerzos sobre las estructuras y evaluar la susceptibilidad de daño estructural. Lo anterior se logra al considerar sólo la subestructura correspondiente a la estructura en estudio y analizarla dentro del mismo proceso ante los desplazamientos que experimente su cimentación.

IV.- CONCLUSIONES.

1.- En este trabajo se desarrolló un modelo numérico basado en técnicas de subestructuración de niveles múltiples en elementos finitos. EL modelo, de aplicación general, permite resolver entre otros, el problema de interacción suelo-estructura ocasionado por procesos de tuneo en suelo blando, de manera eficiente desde el punto de vista de los requerimientos de memoria y tiempo de ejecución en computadora.

Empleando este modelo, se pueden evaluar perfiles de desplazamientos verticales y horizontales generados en la cimentación de las estructuras, a partir de desplazamientos medidos o calculados a una cierta profundidad en condiciones de campo libre, esto es, desplazamientos en situaciones donde no existen estructuras en la vecindad.

2.- De la aplicación del modelo propuesto, a una región que considera la presencia de una estructura en la superficie del terreno, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

a).- La existencia de estructuras en la superficie modifica los perfiles superficiales de desplazamientos verticales y horizontales de tal forma que disminuyen los desplazamientos y las distorsiones angulares verticales y las deformaciones unitarias horizontales del terreno en la zona de interfase suelo-estructura.

b).- Las distorsiones angulares máximas se presentan antes del paso del escudo por la sección de referencia, aunque los desplazamientos verticales máximos se presentan después del paso del frente de excavación.

La posibilidad de evaluar desplazamientos superficiales para distintas posiciones de la estructura con respecto al frente de excavación, permite conocer condiciones críticas de agrietamiento que pueden ser diferentes a las obtenidas por la práctica común de considerar sólo los desplazamientos después del paso del escudo.

Las deformaciones unitarias horizontales máximas que se presentan en la cimentación de la estructura, en dirección perpendicular al eje del túnel, permanecen aproximadamente constantes antes y después del paso del frente de excavación, y para el caso en estudio son menores que las deformaciones horizontales del terreno que ocasionarían agrietamiento.

c).- Las distorsiones angulares máximas se presentan en zonas donde los perfiles de desplazamientos verticales tienen concavidad hacia abajo. Estas distorsiones deben correlacionarse con evidencia de campo que muestre valores de la distorsión angular de agrietamiento para este tipo de concavidad. Es de importancia enfatizar lo anterior, ya que al existir poca información sobre distorsiones angulares de agrietamiento para concavidades hacia

NOMENCLATURA

NDE	= No. de dimensiones espaciales.
NPN	= No. de puntos nodales.
NGL	= No. de grados de libertad por nodo.
NEC	= No. de ecuaciones en el sistema global.
E	= Módulo de elasticidad.
NU	= Relación de Poisson.
PV	= Peso volumétrico.
NNE	= No. de nodos por elemento.
NUMEL	= No. de elementos en un grupo.
NCP	= No. de cargas de presión en aristas.
NPSUB	= No. de puntos nodales en una subestructura.
NECS	= No. de ecuaciones en el sistema local a una subestructura.
LEC	= No. de ecuaciones a condensar en una subestructura.
NPRET	= No. de puntos nodales cuyos NGL se retienen.
NSEL	= No. de superelementos asociados a una subestructura.
NUMGE	= No. de grupos de elementos.
NAS	= No. de coeficientes en la matriz de rigideces SRET de una subestructura, almacenada en forma de columna activa
NGLR	= No. de grados de libertad retenidos en una subestructura
PRET	= Vector de cargas de una subestructura.
X	= Coordenadas referidas a un marco global de referencia.
XS	= Coordenadas referidas a un marco local de referencia.
ID	= Condiciones de frontera y número de ecuación de los NGL en arreglos globales ref 14.
IDS	= Condiciones de frontera y número de ecuación de los NGL en arreglos locales.
XI	= Desplazamientos iniciales referidos a un marco global de referencia.
XSI	= Desplazamientos iniciales referidos a un marco local de referencia.
F	= Fuerzas aplicadas o desplazamientos prescritos referidos marco global de referencia.
FS	= Fuerzas aplicadas o desplazamientos prescritos referidos a un marco e referencia local.
IEN	= Incidencias nodales de elementos o superelementos, en el marco de referencia nodal global.
JIEN	= Incidencias nodales de elementos, en un marco de referencia nodal local a una subestructura.
LM	= No. de ecuación correspondiente a cada uno de los NGL de los elementos o de los NGLR de los superelementos de un grupo, en arreglos globales \underline{K} , \underline{P} .
LMS	= No. de ecuación correspondiente a cada uno de los NGL de los elementos de un grupo, en arreglos locales \underline{K}^{se} , \underline{P}^{se}
ICOL	= Posición de los coeficientes de la matriz de rigideces global \underline{K} , almacenados en forma de columna activa.
ICOLS	= Posición de los coeficientes de la matriz de rigideces local \underline{K}^{se} en una subestructura, almacenados en forma de columna activa.
NUMEC	= Establece el No. de ecuaciones globales y el GL a que corresponden.
ALTCOL	= Calcula alturas de columnas de arreglos almacenados en forma de columna activa.

- ENSAM = Suma ordenadamente arreglos cuadrados en arreglos definidos en forma de columna activa.
- SOLEC = Resolvedor de ecuaciones que contempla la opción de reducción parcial.
- NECSUB = Renumera y determina el No. de ecuaciones y de GL a condensar en una subestructura.
- KSUBST = Extrae los arreglos SRET y PRET, de los arreglos K y P
- LYEAS = Almacena o lee en archivo los arreglos ICOLS, SRET y PRET
- ENSUB = Suma ordenadamente arreglos almacenados en forma de columna activa, en arreglos almacenados de igual manera.
- K = Matriz de rigideces de la estructura global.
- K^{se} = Matriz de rigideces de una subestructura.
- K_{red}^{se} = Matriz de rigideces de la región asociada a una subestructura antes del proceso de reducción.
- P = Vector de cargas de la estructura global.
- P^{se} = Vector de cargas de una subestructura.
- P_{red}^{se} = Vector de cargas de la región asociada a una subestructura, antes del proceso de reducción.
- P_{red}^{se} = Vector de cargas de la región asociada a una subestructura, después del proceso de reducción.

REFERENCIAS.

- 1 .- Arora J.S., Gobil A.K.
An efficient method for optimal structural design by substructuring.
Computers and structures. Vol 7 (1977). pp 507-515.
- 2 .- Attewell P.B., Farmer I.W.
Ground disturbance caused by shield tunnelling in a stiff, overconsolidated clay.
Engineering geology, 8 (1974) pp. 361-381.
- 3 .- Bjerrum L.
Allowable settlements of structures.
Proceedings european Conf. on soil Mech. and Fdn. Engr. Vol. 3
Weisbaken, Germany (1968).
- 4 .- Boscardin M.D.
Building response to excavation-induced ground movements.
Ph. D. Thesis. Illinois University (1980).
- 5 .- Burhouse P.
Composite action between brick panel walls and their supporting beams.
Proc. Instn. Civ. Engrs. Vol. 43. (1969). pp. 175-194.
- 6 .- Burland J.B., Wroth C.P.
Settlements of buildings and associated damage.
Proc. conference on settlements of structures. Cambridge, Pentech Press, London (1974) pp. 611-654.
- 7 .- Cheney J.E., Burford D.
Damaging uplift to a three-storey office block constructed on a clay soil following the removal of trees.
Proc. Conf. settlement of structures, Cambridge (1974). pp. 337-343.
- 8 .- Eisenstein Z., Thomson S., Branco Jr. P.
South LRT extension Jasper Avenue twin tunnel instrumentation test section at 102nd street, part I
Southbound tunnel, Feb. (1982)
- 9 .- Felippa Carlos A.
Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix.
Computers and structures. Vol. 5 (1975). pp 13-29.
- 10 .- Fujita K.
On the surface settlements caused by various methods of shield tunnelling.
Proc. 10th Intl. Conf. on S.M. and F.E. Vol. 4 (1982) pp. 609-610

- 11 .- Fujita K.
Prediction of surface settlements caused by shield tunnelling.
Intl. Conf. of soil Mech. Vol. 1 (1982). S.M.M.S.
pp. 239-246.
- 12 .- Furnike
Computerized multilevel substructuring analysis.
Computing structures 2. (1972). pp 1063-1073.
- 13 .- Geddes J.D., Cooper D.W.
Structures in areas of mining subsidence.
The structural engineer Vol. XL No. 3 (1962).
- 14 .- Govil A.K., Arora J.S., Haug E.J.
Optimal design of frames with substructuring.
Computers and structures. Vol. 12 (1980). pp. 1-10.
- 15 .- Grant R., Christian J.F., Vanmarcke E.H.
Differential settlements of buildings.
Proc. A.S.C.E. Vol. 100 No. GT9 (1974) PP. 973-991.
- 16 .- Hernandez O., Meli R.
Modalidades de refuerzo para mejorar el comportamiento sísmico de muros de mampostería.
Instituto de Ingeniería UNAM. No.382 (1976)
- 17 .- Iglesias J., Rukos E.A.
Generación de funciones serendipia para elementos finitos.
Instituto de ingeniería UNAM. No. 429 (1980)
- 18 .- Ito T., Hisatake M.
Three dimensional surface subsidence caused by tunnel driving.
Proc. 4th Intl. Conf. on numerical methods in geomechanics.
(1982). pp. 551-559.
- 19 .- Kasali G.
Three dimensional finite element analysis of shallow soil tunnelling
Ph. D. Thesis. Stanford University. (1982)
- 20 .- Kasali G., Clough G. W.
Three dimensional Finite Element Analysis of advanced and conventional shield tunneling Vol. II
Stanford University (1983)
- 21 .- Kerisel J.
Old structures in relation to soil conditions.
Geotechnique 25. No. 3 (1975). pp. 433-483.
- 22 .- Kron G.
Solving highly complex elastic structures.
Applied mechanics (1955). pp. 135-144.

- 23 .- Littlejohn G.S.
Observations of brick walls subjected to mining subsidence
Proc. Conf. settlement of structures. Cambridge (1974).
pp. 384-393.
- 24 .- Mainstone R.J.
On the stiffness and strengths of infilled frames.
Proc. Instn. Civ. Engrs., Suppl. (IV), paper 73608 (1971).
pp. 57-90
- 25 .- Mainstone R.J., Weeks G.A.
The influence of a building frame on the racking stiffnes-
ses and strenghts of brick walls.
S.I.B.M.A.C. Proc. (1970). pp. 165-171.
- 26 .- Mana A.
Finite element analyses of deep excavation behavior in soft
clay
Ph. D. Thesis. Stanford University (1978)
- 27 .- Meirovitch L., Hale A.L.
On the substructure synthesis method.
A.I.A.A. Journal. Vol. 19 No. 7 (1981). pp 940-947.
- 28 .- Meli R., Hernández O.
Efectos de hundimientos diferenciales en construcciones a
base de muros de mampostería.
Instituto de Ingeniería UNAM. No. 350 (1975).
- 29 .- Meli R., Salgado G.
Comportamiento de muros de mampostería sujetos a carga
lateral.
Instituto de Ingeniería UNAM. No. 237 (1969)
- 30 .- Meyerhof G.G.
Discussion of paper by Skempton A.W. and Mc. Donald D.H.,
The allowable settlements of buildings
Proceedings, Institution of civil engineers, Part II, Vol 5
(1956) pp. 774-775.
- 31 .- Noor A.K., Kamel H.A., Fulton R.E.
Substructuring Techniques-status and projections.
Computers and structures. Vol. 8 (1979). pp. 621-632.
- 32 .- O'Rourke T.D.
Ground movements caused by braced excavations
Journal of the geotechnical Engr. Div., A.S.C.E. Vol. 107
No. GT9 Sept. (1981) pp. 1159-1178.
- 33 .- Peck R.E.
Deep excavations and tunnelling in soft ground
Proceedings, 7th International Conf. on S.M. and F.E.,
State of the art volume (1969) pp 225-290.

- 34 .- Petersson H., Popov E.P.
Substructuring and equation system solutions in finite element analysis.
Computers and structures. Vol. 7 (1977). pp.197-206.
- 35 .- Polshin D.E., Tokar R.A.
Maximum allowable non-uniform settlements of structures.
Proc. 4th Int. Conf. S.M. and F.E. Vol. 1 (1957)
PP. 402-405.
- 36 .- Przemieniecki S.
Matrix structure analysis of substructures.
A.I.A.A. Journal (1963). pp. 133-147.
- 37 .- Romo M.P., Diaz C., Resendiz D.
Metodo para estimar asentamientos causados por la construccion de un tunel en suelo blando.
Instituto de Ingenieria UNAM. Proy. 8032 (1978).
- 38 .- Rosen R., Rubinstein M.F.
Substructure analysis by decomposition.
J. Structural division A.S.C.E. 96 (1970) pp. 663-670
- 39 .- Skempton A.W., Mc Donald
Allowable settlements of buildings
Proc. Inst. of Civil Engineers. Part 3, Vol. 5 (1956)
pp. 727-768.
- 40 .- Wilson E.L., Dovey H.H.
Solution or reduction of equilibrium equations for large complex structural systems.
Advances in engineering software. Vol. 1 (1978). pp.19-25.
- 41 .- Williams F.W.
Comparison between sparse stiffness matrix and substructure methods.
Int. J. of numerical methods in engineering. 5 (1973).
PP. 383-394

APENDICES

APENDICE A.

Subrutinas relacionadas con el almacenamiento y solución matriciales en forma de columna activa. Al final de esta sección, se presentan listados de instrucciones FORTRAN correspondientes a cada inciso.

A.1.- Determinación del número de ecuaciones (NEC), y del número de ecuación que le corresponde a cada grado de libertad (GL), de cada punto nodal.

SUBROUTINE NUMEC (ID,NGL,NPN,NEC)

El parámetro ID(NGL,NPN), es un arreglo que contiene los códigos de condiciones de frontera, como parámetro de entrada, y contiene el número de ecuación que le corresponde a cada grado de libertad (GL), asociado a cada nodo de la estructura global, como parámetro de salida.

NGL = Número de GL por nodo.

NPN = Número de puntos nodales en la estructura global.

NEC = Número de ecuaciones en el sistema global.

A.2.- Determinación del número de ecuación correspondiente a cada uno de los grados de libertad (GL) asociados a los nodos de cada elemento en un grupo.

SUBROUTINE NECNGL (ID,IEN,LM,NGL,NDE,NNE,NUMEL)

ID(NGL,NPN) es parámetro de entrada, y contiene el número de ecuación correspondiente a cada grado de libertad (GL), asociado a cada nodo de la estructura global.

IEN(NNE,NUMEL) es un parámetro de entrada que contiene la incidencia de los nodos referidos al sistema de referencia nodal local del elemento, en el sistema de referencia nodal global de la estructura, para todos los elementos en un grupo.

LM(NGL,NNE,NUMEL) es parámetro de salida, y contiene el número de ecuación correspondiente a cada grado de libertad de cada nodo para cada elemento en un grupo.

NGL = Número de grados de libertad por nodo.

NDE = Número de dimensiones espaciales de la región analizada.

NNE = Número de nodos por elemento.

NUMEL = Número de elementos en un grupo.

Considérese la fig. (A.1). A la rigidez y cargas correspondientes al grado de libertad GL=1 del nodo 3, referido al sistema de referencia global (S.G.), contribuyen los cuatro elementos. Es entonces necesario crear un arreglo que indique el número de

ecuación a la cual se debe sumar la rigidez y carga correspondientes a cada GL de cada nodo de cada elemento finito. Este arreglo es LM(NGL,NNE,NUMEL).

Con las definiciones de los arreglos ID e IEN, el arreglo LM debe expresarse como

$$LM(I,J,K) = ID(I, IEN(J,K))$$

En esta subrutina se ejecután las operaciones necesarias para crear el arreglo LM de esta manera.

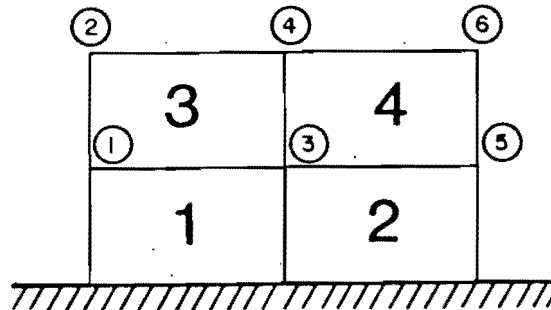


fig. (A.1)

A.3.- Determinación de la altura de cada columna (sin incluir el término en la diagonal principal), en la matriz de rigideces K de la estructura global, tomando en cuenta sólo los elementos en cada grupo.

SUBROUTINE ALTCOL (ICOL,LM,NDE,NNE,NUMEL)

ICOL(NEC) es un parámetro de entrada-salida, en el cual se encuentran las alturas de cada columna en la matriz K sin incluir los coeficientes de la diagonal principal. El valor inicial de entrada para los elementos del arreglo ICOL, es cero.

LM(NGL,NNE,NUMEL) funciona como parámetro de entrada y se define igual que en la sección A.2 .

NDE, NNE Y NUMEL se definen en la sección A.2

A cada columna en la matriz K , corresponde un grado de libertad (GL). Cada GL esta relacionado con las fuerzas aplicadas en los GL de todos los nodos de todos los elementos que concurren en él, fig. (A.2).

La altura de columna asociada a un GL, estará dada por la máxima diferencia positiva (por tratarse de matrices simétricas) en el número de ecuaciones correspondientes a todos los GL de

todos los elementos que concurren en él.

Nótese que el llamado a ALTCOL se hace en el paso de la secuencia convencional para análisis elástico, por lo que se hará un llamado a ALTCOL para cada grupo de elementos. Para los GL asociados a nodos que se encuentren en la frontera entre dos o más grupos de elementos, los valores finales para los coeficientes del arreglo ICOL se obtendrán después de haber llamado a ALTCOL para todos estos grupos.

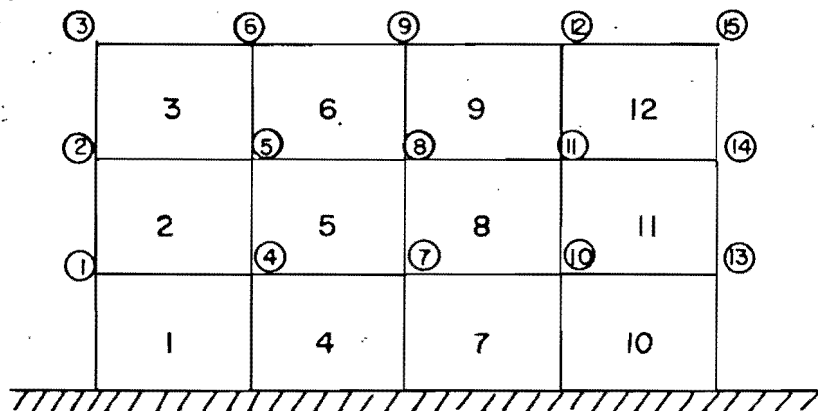


fig. (A.2)
Estado plano. NGL=2

En la fig. (A.2), el desplazamiento correspondiente al GL=1 del nodo 8 en S.G., está relacionado con las fuerzas aplicadas en GL1 y GL2 de los nodos 4 - 12. Para esta estructura, el número de ecuación correspondiente a cada GL de cada nodo, se tiene almacenado en un arreglo ID(2,15) (secc. A.2),

$$ID(2,15) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 35 & 37 & 29 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26 & 28 & 30 \end{bmatrix}$$

//
nodos 4 - 12

Al GL 1 del nodo 8, le corresponde la ecuación 15. La máxima diferencia entre la ecuación 15 y las ecuaciones correspondientes a los GL de los nodos 4 - 12, siendo ésta positiva, es $15-7=8$; Por lo que $ICOL(15) = 8$.

De la misma manera se determinan todos los coeficientes del arreglo ICOL(NEC).

A.4.- Determinación de la posición de los coeficientes en la diagonal principal de K.

SUBROUTINE DIAG (ICOL,NEC,NC)

El parámetro ICOL(NEC), es de entrada-salida. Cuando funciona como parámetro de entrada, contiene la altura de las columnas en la matriz \underline{K} , calculadas en la subrutina ALTCOL. Cuando es parámetro de salida, contiene la posición de los coeficientes en la diagonal principal de \underline{K} .

El parámetro NC contiene el número total de coeficientes en la matriz \underline{K} . Este parámetro es útil para reservar espacio de memoria, para el almacenamiento de la matriz \underline{K} en forma de columna activa.

NEC = No. de ecuaciones.

A.5.- Suma ordenada de las matrices \underline{K}^e y \underline{P}^e en los sistemas globales \underline{K} y \underline{P} .

SUBROUTINE ENSAM (A,B,S,P,ICOL,LM,NGLR)

El parámetro A(NC), corresponde a un arreglo unidimensional cuyos coeficientes son las rigideces de la estructura global.

B(NEC) corresponde al vector de cargas en la estructura global.

A Y B son parámetros de entrada-salida, ya que corresponden a una sumatoria para todos los elementos de todos los grupos.

S(NGLE*NGLE) Y P(NGLE) son las matrices \underline{K}^e y \underline{P}^e .

ICOL(NEC) contiene los elementos en la diagonal principal de la matriz \underline{K} .

En el llamado a la subrutina ENSAM, los parámetros son :

CALL ENSAM (A,B,S,P,ICOL,LM(1,1,N),NGLE)

N = número de elemento que se suma de manera ordenada.
NGLE = número de grados de libertad por elemento.

A.6.- Solución del sistema de ecuaciones $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$.

SUBROUTINE SOLEC (A,B,ICOL,NEC,LEC,NCC,KK)

Esta subrutina corresponde a un resolvidor de ecuaciones que contempla la opción de efectuar el proceso de reducción de las matrices \underline{K}^{se} y \underline{P}^{se} , hasta el número de ecuación que se le indique (LEC), por lo que es útil para la formación de las matrices \underline{K} y \underline{P} (LEC = LEC); para cada subestructura (Secc. III.3), y para resolver completamente el sistema de ecuaciones $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$ (LEC = NEC).

A = \underline{K} almacenada en forma de columna activa.
B = \underline{P}
ICOL(NEC) se define como en la sección A.5 .
NCC = número de casos de carga.
KK = opción.

```
SUBROUTINE NUMEC(ID,NGL,NUMPN,NEC)
```

```
C  
C.... PROGRAMA PARA ESTABLECER EL NO. DE EDS. Y EL GL A QUE  
C CORRESPONDEN
```

```
C ID(NGL,NPN) = CODIGOS DE CONDS. DE FRONTERA
```

```
C = 0 LIBRE
```

```
C = 1 FIJO
```

```
C DIMENSION ID(NGL,1)
```

```
C NEC=0
```

```
C DO 100 N=1,NUMPN
```

```
C DO 100 I=1,NGL
```

```
C IF(ID(I,N).EQ.0) GOTO 110
```

```
C ID(I,N)=0
```

```
C GOTO 100
```

```
C 110 NEC=NEC+1
```

```
C ID(I,N)=NEC
```

```
C 100 CONTINUE
```

```
C RETURN
```

```
C END
```

```
SUBROUTINE NECNGL(ID,IEN,LM,NGL,NDE,NNE,NUMEL)
```

```
C  
C.... PROGRAMA PARA DETERMINAR EL NO. DE EC. CORRESPONDIENTE  
C A CADA GL DE CADA NODO DE TODOS LOS ELEMENTOS DE UN  
C GRUPO
```

```
C DIMENSION ID(NGL,1),IEN(NNE,1),LM(NDE,NNE,1)
```

```
C DO 10 K=1,NUMEL
```

```
C DO 10 J=1,NNE
```

```
C NN=IEN(J,K)
```

```
C DO 10 I=1,NDE
```

```
C 10 LM(I,J,K)=ID(I,NN)
```

```
C RETURN
```

```
C END
```

SUBROUTINE ALTCOL(ICOL,LM,NDE,NNE,NUMEL)

C
C.... PROGRAMA PARA CALCULAR ALTURAS DE COLUMNAS EN ARREGLOS
C ALMACENADOS EN FORMA DE COLUMNA ACTIVA

C
DIMENSION ICOL(1),LM(NDE,NNE,1)

C
DO 10 K=1,NUMEL
MIN=100000
DO 20 I=1,NDE
DO 20 J=1,NNE
IF(LM(I,J,K).EQ.0) GOTO 20
MIN=MINO(MIN,LM(I,J,K))
20 CONTINUE
DO 30 I=1,NDE
DO 30 J=1,NNE
II=LM(I,J,K)
IF(II.EQ.0) GOTO 30
M=II-MIN
IF(M.GT.ICOL(II)) ICOL(II)=M
30 CONTINUE
10 CONTINUE

C
RETURN
END

SUBROUTINE DIAG (ICOL,NEC,NC)

C
C.... CALCULO DE LAS POSICIONES DE LOS COEFICIENTES
C EN LA DIAGONAL PRINCIPAL DE ARREGLOS ALMACENADOS
C EN FORMA DE COLUMNA ACTIVA.

C
DIMENSION ICOL(1).

C
NC=1
ICOL(1)=1
IF(NEC.EQ.1) RETURN
DO 10 I=2,NEC
10 ICOL(I)=ICOL(I)+ICOL(I-1)+1
NC=ICOL(NEC)

C
RETURN
END

SUBROUTINE ENSAM (A,B,S,P,ICOL,LM,NGLE)

C
C.... PROGRAMA PARA ENSAMBLAR RIGIDEZES Y FUERZAS EN
C EN ARREGLOS GLOBALES
C

DIMENSION A(1),B(1),S(NGLE,1),P(1),ICOL(1),LM(1)

DO 10 J=1,NGLE

K=LM(J)

IF(K.EQ.0) GOTO 10

B(K)=B(K)+P(J)

L=ICOL(K)-K

DO 20 I=1,NGLE

M=LM(I)

IF(M.GT.K.OR.M.EQ.0) GOTO 20

M=L+M

A(M)=A(M)+S(I,J)

20 CONTINUE

10 CONTINUE

C
RETURN

END

```

SUBROUTINE SOLEC (A,B,ICOL,NEC,LEC,NCC,KK)
C
C.... RESOLVEDOR DE SISTEMAS DE ECUACIONES AX = B
C ALMACENADAS EN FORMA DE COLUMNA ACTIVA.
C
C CON OPCION DE SUBESTRUCTURACION REDUCE LEC ECS.
C
C KK = 1 FACTORIZACION LDL
C KK = 2 REDUCCION HACIA ADELANTE
C KK = 3 SUSTITUCION HACIA ATRAS
C KK = 4 FACTORIZACION LDL Y REDUCCION HACIA ADELANTE
C KK = 5 FACTORIZACION LDL, REDUCCION HACIA ADELANTE
C Y SUSTITUCION HACIA ATRAS
C KK = 6 REDUCCION HACIA ADELANTE Y SUSTITUCION HACIA ATRAS
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C.... REMUEVA LA TARJETA ANTERIOR PARA PRECISION SENCILLA
C
C DIMENSION A(1),B(NEC,NCC),ICOL(NEC)
C ALOG10(XX)=DLOG10(XX)
C
C IF(KK.EQ.1) GOTO 50
C IF(KK.EQ.2) GOTO 550
C IF(KK.EQ.3) GOTO 890
C
C 50 IF (NEC.EQ.1) RETURN
C IF(KK.EQ.6) GO TO 550
C.... DESCOMPOSICION LDL
C DO 500 J=2,NEC
C JH=ICOL(J)-ICOL(J-1)
C IF (JH.EQ.1) GO TO 500
C K=J-JH+1
C.... FORMA U(I,J) DE LA PARTE SUPERIOR DE LA COL. A LA DIAGONAL
C I=K
C 100 NT=MINO (JH-J+I,ICOL(I)-ICOL(I-1))-1
C NS=ICOL(I)-NT
C NE=ICOL(I)-1
C IJ=ICOL(J)-J+1
C IC=IJ-ICOL(I)
C S=0.0
C IF (I.EQ.J) GO TO 400
C IF(I.GT.LEC) NT=NT+LEC-I+1
C IF (NT) 300,300,150
C 150 A(IJ)=A(IJ)-DOT(A(NS),A(NS+IC),NT)
C 300 I=I+1
C GO TO 100
C.... FORMA L(I,J) Y U(I,I)
C 400 IF(I.GT.LEC) NE=NE+LEC-I+1
C IF(NE.LT.NS) GO TO 460
C DO 450 N=NS,NE
C ND=ICOL(K)
C K=K+1
C T=A(N)
C A(N)=A(N)/A(ND)

```

```

450 S=S+A(N)*T
460 A(IJ)=A(IJ)-S
C.... REVISION DE SINGULARIDAD EN LA MATRIZ A
IF(S.EQ.0.0)GO TO 500
IF(A(IJ).EQ.0.0) GO TO 490
FF=ABS(S/A(IJ))
NF=ALOG10(FF)
IF(NF.LT.9) GO TO 500
490 A(1)=0.0
WRITE(6,2000)
2000 FORMAT(24HOLA MATRIZ A ES SINGULAR////)
RETURN
500 CONTINUE
IF(KK.EQ.4.OR.KK.EQ.5) GO TO 550
RETURN

C
C.... REDUCCION HACIA ADELANTE DEL VECTOR DE CARGAS B
C
550 DO 860 L=1,NCC
DO 700 J=2,NEC
JH=ICOL(J)-ICOL(J-1)-1
NS=ICOL(J)-JH
K=J-JH
IF(J.GT.LEC) JH=JH+LEC-J+1
IF(JH.LE.0) GO TO 700
B(J,L)=B(J,L)-PRODR(A(NS),B(K,L),JH)
700 CONTINUE
800 DO 850 I=1,LEC
K=ICOL(I)
850 B(I,L)=B(I,L)/A(K)
860 CONTINUE
IF(KK.EQ.5.OR.KK.EQ.6) GO TO 890
RETURN

C
C.... EVALUACION DEL VECTOR X MEDIANTE SUSTITUCION HACIA ATRAS
C
890 DO 960 L=1,NCC
J=NEC
900 IF(J.EQ.1) GO TO 960
K=J-ICOL(J)+ICOL(J-1)+1
NS=ICOL(J-1)+1
JH=ICOL(J)-ICOL(J-1)-1
IF(J.GT.LEC) JH=JH+LEC-J+1
IF(JH.LE.0) GO TO 950
S=-B(J,L)
CALL SUMVEC(B(K,L),A(NS),S,JH)
950 J=J-1
GO TO 900
960 CONTINUE

C
RETURN
END

```


SUBROUTINE SUMVEC (A,B,S,N)

C
C.... SUMA DE DOS VECTORES

C
DIMENSION A(1),B(1)
DO 100 I=1,N

100 A(I)=A(I)+B(I)*S

C
RETURN
END

FUNCTION PRODP (A,B,N)

C
C.... REALIZA EL PRODUCTO PUNTO DE DOS VECTORES

C
DIMENSION A(1),B(1)
DOT=0.0

DO 100 I=1,N
100 DOT=DOT+A(I)*B(I)

C
RETURN
END

APENDICE B.

Subrutinas adicionales para permitir la opción de subestructuración. Al final de esta sección, se presentan listados de instrucciones FORTRAN correspondientes a cada inciso.

B.1.- Renumeración de ecuaciones y determinación del número de ecuaciones y de grados de libertad a condensar en una subestructura.

SUBROUTINE NECSUB (IDS, IGL, IPN, NGL, NPSUB, NECS, LEC)

Se comentó en la sección (III.4), que la forma más eficiente de formar las matrices \underline{K} y \underline{P} , asociadas a una subestructura; consiste en aplicar el proceso de reducción de ecuaciones, de una manera parcial, a las matrices \underline{K}^{sc} y \underline{P}^{sc} .

El proceso de reducción parcial puede aplicarse sobre cualesquiera ecuaciones del sistema $\underline{K}^{sc} \underline{U} = \underline{P}^{sc}$, sin importar el orden en que éstas se encuentren. Sin embargo, habrá que identificar la posición de las ecuaciones que se deseen condensar y desarrollar un algoritmo que efectúe el proceso de reducción parcial, sobre ecuaciones que no guardan un orden establecido dentro del sistema que se quiere condensar.

Por otro lado, el proceso de reducción es parte de la solución completa de un sistema de ecuaciones, por lo que puede pensarse en la utilidad de un resolvidor de ecuaciones, para efectuar el proceso de reducción parcial (sección A. 6). Sin embargo, cualquier resolvidor de ecuaciones efectúa el proceso de reducción hacia adelante, a partir de la primera ecuación.

Por lo anterior, es necesario crear un algoritmo que identifique los G L que se desean condensar, y les asigne los primeros números de ecuaciones; o bien, que identifique los G L que se desean retener, y les asigne los últimos números de ecuaciones, además de determinar el número total de G L a condensar y el número total de ecuaciones, para indicarle al resolvidor hasta dónde haga el proceso de reducción y obtener de esta manera las matrices \underline{K} y \underline{P} asociadas a los GL retenidos en una subestructura (sección III.3). Esta es la función de la subrutina NECSUB.

Al comparar la subrutina NECSUB con la subrutina NUMEC (sección A.1), se encuentran nuevas definiciones y nuevas variables.

En la subrutina NUMEC, el arreglo ID (NGL, NPN) contiene los códigos de frontera 0 y 1 para indicar si un grado de libertad correspondiente a uno de los nodos que definen la estructura global, esta libre o fijo, respectivamente. De manera análoga, en la subrutina NECSUB, el arreglo IDS (NGL, NPSUB) contiene los códigos de frontera 0, 1 y -1 para indicar si un grado de libertad de un nodo de una subestructura, deberá ser condensado, está fijo

o será un GL retenido, respectivamente. Los arreglos ID (NGL , NPN) e IDS (NGL , NPSUB) pueden generarse con las mismas subrutinas.

Los parámetros IGL e IPN son arreglos que almacenan temporalmente el número de grado de libertad asociado a un nodo, y el número de nodo a que éste corresponde, para un grado de libertad retenido. Así $IGL = IGL (NGL * NPRET)$ e $IPN = IPN (NGL * NPRET)$. Aunque IGL e IPN son arreglos internos para la subrutina NECSUB solamente, funcionan como parámetros debido a que el valor de NPRET es variable para cada subestructura. Por esto, es necesario reservar espacio para estos arreglos, en la parte correspondiente a apertura de memoria en subestructuras (fig. III.20).

- NGL = número de grados de libertad (GL) por nodo.
- NPSUB = número total de puntos nodales en la subestructura.
- NECS = número total de ecuaciones en la subestructura.
- LEC = número de GL a condensar.
- NPRET = número de nodos cuyos GL se retienen.

B.2.- Obtención de las matrices de rigideces y de cargas de una subestructura.

SUBROUTINE KSUBST (ASUB, SRET, BSUB, BRET, ICOLS)

Después de aplicar el proceso de reducción parcial a las LEC primeras ecuaciones del sistema $\underline{K}^{se} \underline{U}^{se} = \underline{P}^{se}$, empleando algún resolvidor del tipo descrito en la sección (A.6), los coeficientes de las matrices reducidas ocupan la misma posición que aquéllos de las matrices sin reducir (fig. B.1), aunque no son iguales en ambos casos.

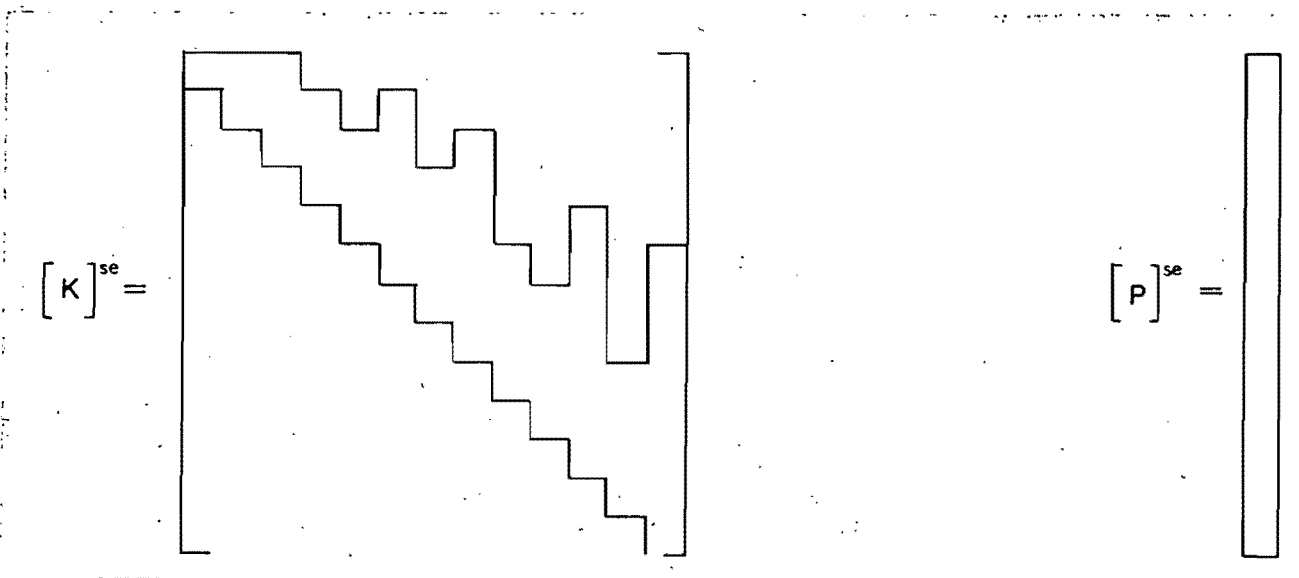


fig. (B.1.a)
Matrices de subestructuras
sin reducción parcial.

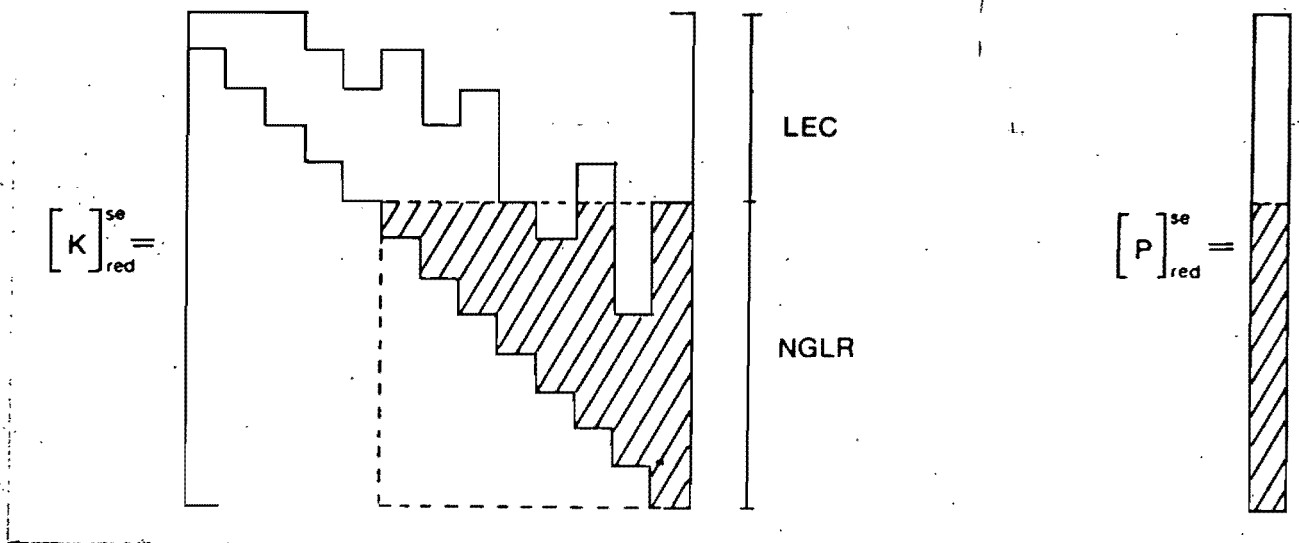


fig. (B.1.b)
Matrices de subestructuras
reducidas parcialmente.

En la fig. (B.1.b), las partes achuradas de las matrices
 \underline{K}_{red}^{se} y \underline{P}_{red}^{se}

corresponden a las matrices $\tilde{\underline{K}}$ y $\tilde{\underline{P}}$ respectivamente, y forman parte de matrices más grandes almacenadas en forma de columna activa.

Por otro lado, la subrutina presentada en la sección (A.5), suma de manera ordenada, matrices almacenadas como arreglos cuadrados en una matriz más grande almacenada en forma de columna activa. Este tipo de subrutina es comúnmente empleado para sumar las matrices de rigideces de elementos finitos, las cuales son matrices de orden pequeño.

En el caso de subestructuras, las matrices de rigideces asociadas a ellas (\underline{K} , \underline{P}), pueden tener un gran número de ecuaciones. Si se empleara la subrutina de la sección (A.5), sería necesario almacenar la matriz de rigideces de la subestructura, en un arreglo cuadrado (zona delimitada por líneas punteadas en la fig. (B.1.b)). Esto no es conveniente desde el punto de vista de la memoria necesaria para almacenar estos arreglos.

Teniendo en cuenta que la matriz $\tilde{\underline{K}}$ de la subestructura, es simétrica; es adecuado almacenar sólo la parte achurada en la fig. (B.1.b) y sumarla ordenadamente en el siguiente nivel de subestructuración, empleando una subrutina que considere la suma de un arreglo almacenado en forma de columna activa, en otro almacenado en la misma forma (sección B.3).

Al emplear la subrutina KSUBST, $SRET = \tilde{\underline{K}}$ y $BRET = \tilde{\underline{P}}$, son las matrices retenidas de rigideces y de cargas respectivamente, asociadas a una subestructura, almacenadas en forma de

columna activa.

Los parámetros ASUB y BSUB, son arreglos unidimensionales que contienen los coeficientes de las matrices

\underline{K} _{se} red y \underline{P} _{se} red , respectivamente.

El parámetro ICOLS, es análogo al parámetro ICOL, de la sección A.4, y contiene la posición de los elementos en la diagonal principal de las matrices

\underline{K} _{se} red y \underline{P} _{se} red , como parámetro de entrada, y contiene la posición de los elementos en la diagonal principal de la matriz \underline{K} , correspondiente a la zona achurada en la fig. (E.1.b), en las últimas NGLR posiciones, como parámetro de salida.

El llamado a la subrutina KSUBST, contiene los siguientes parámetros :

CALL KSUBST (ASUB,SRET,BSUB(LEC+1),BRET,ICOLS(NEC+1))

los cuales corresponden a recibir en SRET y BRET, a la parte achurada de los arreglos \underline{K} _{se} red y \underline{P} _{se} red , y a los últimos NGLR coeficientes del arreglo ICOLS.

B.3.- Suma ordenada de matrices almacenadas en forma de columna activa, en arreglos almacenados en la misma forma.

SUBROUTINE ENSUB (A,B,SRET,BRET,ICOL,ICOLS,LM,NGLR)

En esta subrutina, los parámetros A y B, corresponden a los arreglos globales \underline{K} y \underline{P} , a los cuales se suman ordenadamente los arreglos SRET y BRET, correspondientes a las subestructuras .

Los parámetros ICOL e ICOLS, son arreglos que contienen las posiciones de los elementos ubicados en la diagonal principal de los arreglos A y SRET, respectivamente.

LM (NGL,NPRET,NSEL) contiene el número de ecuación que le corresponde a cada grado de libertad GL de cada nodo en cada superelemento asociado a los arreglos SRET y BRET.

NGLR = NGL * NPRET.

NGL = Número de grados de libertad GL por nodo.

NPRET = Número de nodos retenidos en una subestructura.

NSEL = Número de superelementos asociados a la subestructura en cuestión.

B.4.- Almacenamiento y lectura en archivo, de las matrices de subestructuras.

SUBROUTINE LYEAS (SRET,BRET,NGLR,ICOLS,NUNIT,JOPT)

En esta subrutina, se graban (JOPT=1) o se leen (JOPT=2) del archivo NUNIT, los arreglos SRET Y BRET correspondientes a las matrices de rigideces y de cargas de una subestructura con NGLR grados de libertad retenidos, así como el arreglo ICOLS, que contiene las posiciones de los coeficientes en la diagonal principal de la matriz de rigideces \underline{K} , y el número total de estos (ICOLS(NGLR)).

SUBROUTINE NECSUB(IDS, IDOF, INP, NGL, NPSUB, NECS, LEC)

C.... PROGRAMA DE RENUMERACION Y DETERMINACION DEL NO. DE
C... ECUACIONES Y DE GL A CONDENSAR EN UNA SUBESTRUCTURA

C... IDS(NGL, NPSUB) = CODIGOS DE CONDS. DE FRONTERA

C... = 1 FIJO
C... = 0 LIBRE
C... = -1 RETENIDO

C... NECS = NO. TOTAL DE ECS. EN LA SUBESTRUCTURA

C... LEC = NO. TOTAL DE GL A RETENEREN LA SUBESTRUCTURA

C... DIMENSION IDS(NGL, 1), IDOF(1), INP(1)

C... NECS=0

C... LEC=0

C... NDR=0

C... DO 100 N=1, NPSUB

C... DO 100 I=1, NGL

C... IF(IDS(I, N)) 120, 110, 105

C... 105 IDS(I, N)=0

C... GO TO 100

C... 110 LEC=LEC+1

C... IDS(I, N)=LEC

C... GO TO 100

C... 120 NDR=NDR+1

C... IDOF(NDR)=I

C... INP(NDR)=N

C... 100 CONTINUE

C... NECS=LEC

C... DO 130 I=1, NDR

C... NECS=NECS+1

C... IDS(IDOF(I), INP(I))=NECS

C... 130 CONTINUE

C... RETURN

C... END

```
SUBROUTINE KSUBST(AUPSUB,SRET,BSUB,BRET,ICOLS)
```

```
C
```

```
C.... LOCALIZACION DE LAS MATRICES SRET Y BRET EN UNA SUBESTRUCTURA
```

```
C
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
C
```

```
C.... REMUEVA LA TARJETA ANTERIOR PARA PRECISION SENCILLA
```

```
C
```

```
DIMENSION AUPSUB(1),SRET(1),BSUB(1),BRET(1),ICOLS(1)
```

```
C
```

```
COMMON/SUBSTR/NECS,NCS,LEC,NNSE,NGLR
```

```
C
```

```
IAUX=ICOLS(1)
```

```
ICOLS(1)=1
```

```
NCONT=1
```

```
NDIAG=1
```

```
SRET(1)=AUPSUB(IAUX)
```

```
DO 20 J=2,NGLR
```

```
IAUX1=ICOLS(J)
```

```
IAUX2=IAUX1-NDIAG
```

```
IAUX3=ABS(IAUX2-J)
```

```
IF(IAUX2.LE.J) IAUX3=1
```

```
IAUX4=NDIAG+IAUX3
```

```
DO 30 K=IAUX4,IAUX1
```

```
NCONT=NCONT+1
```

```
SRET(NCONT)=AUPSUB(K)
```

```
30 CONTINUE
```

```
NDIAG=ICOLS(J)
```

```
ICOLS(J)=NCONT
```

```
20 CONTINUE
```

```
C
```

```
DO 40 J=1,NGLR
```

```
40 BRET(J)=BSUB(J)
```

```
C
```

```
RETURN
```

```
END
```


SUBROUTINE ENSUB(A,B,S,P,ICOL,ICOLS,LM,NGLR)

C.... ENSAMBLE DE UN ARREGLO ALMACENADO EN FORMA DE COLUMNA ACTIVA,
EN OTRO ALMACENADO EN LA MISMA FORMA.

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

C... REMUEVA LA TARJETA ANTERIOR PARA PRECISION SENCILLA

DIMENSION A(1),B(1),S(1),P(1),ICOL(1),ICOLS(1),LM(1)

NAUX2=0

DO 10 J=1,NGLR

NAUX1=ICOLS(J)

IF(J.GT.1)NAUX2=ICOLS(J-1)

K=LM(J)

IF(K.EQ.0) GO TO 10

B(K)=B(K)+P(J)

L=ICOL(K)-K

DO 20 I=1,NGLR

M=LM(I)

IF(M.GT.K.OR.M.EQ.0) GO TO 20

M=L+M

IF(I.GT.J) GO TO 30

NAUX=NAUX1-J+I

IF(NAUX.LE.NAUX2) GO TO 20

GO TO 40

30 NAUX3=ICOLS(I-1)

NAUX=ICOLS(I)-I+J

IF(NAUX.LE.NAUX3) GO TO 20

40 A(M)=A(M)+S(NAUX)

20 CONTINUE

10 CONTINUE

RETURN

END

```

SUBROUTINE LYEAS(SRET, BRET, ICOLS, NGLR, NUNIT, JOPT)
C
C.... GRABA Y LEE EN LA UNIDAD=NUNIT LOS ARREGLOS SRET Y BRET
C
C      JOPT = 1 GRABA
C      JOPT = 2 LEE
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C.... REMUEVA LA TARJETA ANTERIOR PARA PRECISION SENCILLA
C
C      DIMENSION SRET(1),BRET(1),ICOLS(1)
C
C      GO TO (1,2) JOPT
C
1  WRITE(NUNIT,*) ICOLS(NGLR)
   WRITE(NUNIT,*) (SRET(I),I=1,ICOLS(NGLR))
   WRITE(NUNIT,*) (BRET(I),I=1,NGLR)
   WRITE(NUNIT,*) (ICOLS(I),I=1,NGLR)
C
2  READ(NUNIT,*) NCS
   READ(NUNIT,*) (SRET(I),I=1,NCS)
   READ(NUNIT,*) (BRET(I),I=1,NGLR)
   READ(NUNIT,*) (ICOLS(I),I=1,NGLR)
C
RETURN
END

```

APENDICE C.- FORMULACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

Considerando un cuerpo en equilibrio que ocupa un volumen V y tiene una frontera $S = S_\sigma + S_u$ (fig. C.1). S_σ y S_u son las partes de la frontera con tracciones prescritas (t_i), y desplazamientos prescritos (u_i) respectivamente.

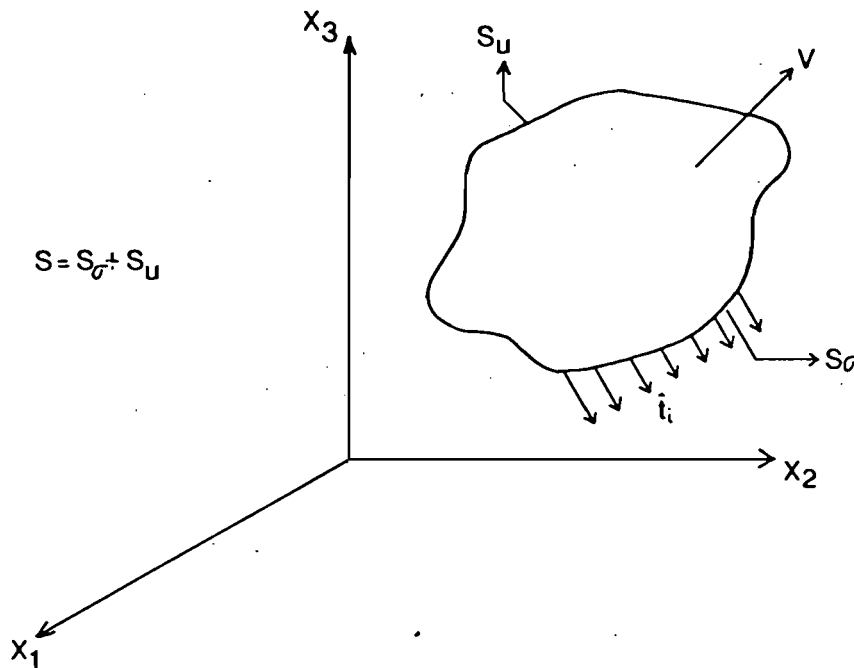


fig. (C.1)
Cuerpo en equilibrio.

Para conocer el estado de esfuerzos y desplazamientos de este cuerpo, es necesario establecer las siguientes relaciones básicas de la teoría de la elasticidad lineal.

a).- Ecuaciones de equilibrio.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = 0 \quad \dots (C.1)$$

b).- Ecuaciones esfuerzo-deformación.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \dots (C.2)$$

c).- Ecuaciones desplazamiento-deformación

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots (C.3)$$

donde :

ϵ_{ij} = Tensor de deformaciones

σ_{ij} = Tensor de esfuerzos

B_i = Fuerza de cuerpo por unidad de volumen

U = Función de densidad de energía de deformación

u_i = vector de desplazamientos

Las ecuaciones (C.1) a (C.3) junto con las condiciones de frontera

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{en } S_\sigma \quad \dots (C.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } S_u \quad \dots (C.5)$$

Permiten formular de manera completa el problema; t_i son las tracciones no prescritas y n_j representa un vector unitario normal al punto en cuestión.

La solución aproximada de las ecuaciones (C.1) a (C.5) se puede obtener aplicando el principio de los trabajos virtuales el que conduce a :

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i \right) \delta u_i dV + \int_V \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \left(\epsilon_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \delta \sigma_{ij} dV \\ & = \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) \delta u_i ds - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta t_i ds \quad \dots (C.6) \end{aligned}$$

donde δ es la variación de la función considerada.

Si se impone la restricción de que las funciones independientes u_i , σ_{ij} y ϵ_{ij} satisfacen las ecuaciones (C.2) y (C.3) se obtiene

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i \right) \delta u_i dV = \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) \delta u_i ds - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta t_i ds \dots (C.7)$$

Para resolver esta ecuación, junto con sus condiciones de frontera asociadas, se discretiza el dominio del problema en

subregiones o elementos finitos y se aproxima la solución en cada uno de ellos con una expresión del siguiente tipo:

$$U_i = N_{il} U_l \quad \dots (C.8)$$

donde N_{il} son las funciones de interpolación y U_l son los desplazamientos en los nodos de la malla de elementos finitos (incógnitas).

Integrando por partes la ec. (C.7) y sustituyendo en el resultado la expresión para la aproximación del campo de desplazamientos ec (C.8), se obtiene para cada elemento finito:

$$\int_{V_e} \lambda \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial N_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial N_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial N_{km}}{\partial x_i} \right) dV U_l$$

$$= \int_{S_{\sigma_e}} t_i \delta u_i dS + \int_{V_e} F_i \delta u_i dV - \int_{S_{u_e}} (U_i - \bar{u}_i) \delta t_i dS \quad \dots (C.9)$$

donde λ y G son las constantes de Lamé y V_e es el volumen del elemento en cuestión.

Si se considera ahora, que las variaciones del campo de desplazamientos se pueden expresar también en términos de las funciones de interpolación N_{il} , entonces se obtiene:

$$\int_{V_e} \lambda \frac{\partial N_{kl}}{\partial x_k} \frac{\partial N_{im}}{\partial x_i} + G \left(\frac{\partial N_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial N_{im}}{\partial x_k} + \frac{\partial N_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial N_{km}}{\partial x_i} \right) dV U_l$$

$$= \int_{S_{\sigma}} t_i N_{im} dS + \int_{V_e} F_i N_{im} dV \quad \dots (C.10)$$

expresión que en forma matricial queda como:

$$K_{lm} U_l = P_m + t_m \quad \dots (C.11)$$

donde K_{lm} , P_m , t_m y U_l son las matrices de rigideces, vector de cargas, vector de tracciones y vector de desplazamientos del elemento, respectivamente.

Al realizar la suma ordenada de las contribuciones de cada elemento finito del dominio en estudio, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad \dots (C.12)$$

donde \underline{K} , \underline{U} y \underline{P} son las matrices de rigideces, desplazamientos y vector global de cargas del sistema, respectivamente.