

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

“DESACOPLAMIENTO DINÁMICO CON CONTROLADORES
DE ORDEN MINIMOENTES”

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:

ALFONSO MARTÍNEZ CORTES II

1986



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

0.8.77

DESACOPPLAMIENTO DINAMICO CON CONTROLADORES
DE ORDEN MINIMO

Créditos asignados a la tesis 12 (DOCE)

APROBADO POR EL JURADO:

Presidente:	<u>DR. ROMEO ORTEGA MARTINEZ</u>	<i>[Signature]</i>	1/oct/86
Vocal:	<u>DRA. CRISTINA VERDE</u>	<i>[Signature]</i>	1/oct/86
Secretario:	<u>DR. MARCO ANTONIO MURRAY LASSO</u>	<i>[Signature]</i>	
Suplente:	<u>DR. STANISLAW RACZYNSKI</u>	<i>[Signature]</i>	Oct 3, 86
Suplente:	<u>DR. RAFAEL KELLY MARTINEZ</u>	<i>[Signature]</i>	30-Sep. 86



DEPFI

T. UNAM
1 9 8 6
MAR
Ej. 2



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. DRA. CRISTINA VERDE
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del SUBJEFE DEL AREA
DE ELECTROMECHANICA ha sido designado
como director de tesis del alumno(a) ALFONSO MARTINEZ
CORTES para obtener el grado de
M EN I EN ELECTRICA.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la
aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a de-
sarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 16 de enero de 1986.
EL JEFE DE LA DIVISION

guy DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

AGRADECIMIENTOS

Hago patente mi agradecimiento a las siguientes personas e instituciones:

Dr. Marco Antonio Murray-Lasso por la oportunidad brindada para ingresar a la DEPFI y el apoyo constante durante mi estancia en la misma.

Dra. Cristina Verde Rodarte por la dirección diligente de este trabajo; sus múltiples observaciones permitieron mejorar, en gran medida, el contenido y forma del mismo.

Compañía de Luz y Fuerza del Centro por el tiempo suficiente, generosamente cedido, para realizar los estudios de posgrado que concluyen con este trabajo.

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada durante el tiempo que estuve en la DEPFI-UNAM.

Este trabajo trata el problema del desacoplamiento dinámico de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Se dice que un sistema es desacoplado dinámicamente si cada salida del mismo es controlada por una y sólo una entrada. El problema se puede resolver mediante retroalimentación de los estados o de la salida. También se estudia un caso más general del desacoplamiento, en el cual el conjunto de salidas no es completamente medible. A diferencia de otros estudios presentados hasta ahora, en esta tesis se determina cómo obtener controladores de orden mínimo para lograr el desacoplamiento. La solución del problema es importante para el caso de sistemas que requieren operación manual parcial o bien cuando se requiera que el control aplicado a una salida no afecte a las demás.

INDICE

	Página
Resumen	iv
CONTENIDO	v
Introducción	vii
Capítulo 0. Preliminares	1
0.0 Introducción	1
0.1 Bases mínimas	1
0.2 El problema de diseño mínimo	2
0.3 Determinación de una base mínima para un espacio nulo derecho	6
0.4 Algoritmo para encontrar una base mínima de un espacio nulo derecho	8
Capítulo 1. Condiciones para el desacoplamiento dinámico	14
1.0 Introducción	14
1.1 Definición y condiciones para el desacoplamiento	14
1.2 Desacoplamiento en lazo abierto y lazo cerrado	15
Capítulo 2. Desacoplamiento dinámico mediante retroalimentación de estados	19
2.0 Introducción	19
2.1 Implementación de la retroalimentación de estados mediante un observador	19
2.2 Algoritmo para la obtención de las matrices $G(S)$, $L(S)$ y $M(S)$	21
2.3 Observadores de orden mínimo	22
2.4 Condiciones para determinar la matriz desacoplada $T_d(S)$	26
2.5 Ejemplos de problemas de desacoplamiento y de minimización de observadores	30
Capítulo 3. Desacoplamiento dinámico mediante retroalimentación de la salida	39
3.0 Introducción	39

3.1 Implementación de la retroalimentación de la salida	39
3.2 Ejemplos de desacoplamiento utilizando retroalimentación de la salida	43
Capítulo 4. Desacoplamiento de una clase mas general de sistemas	49
4.0 Introducción	49
4.1 Esquema general del sistema	49
4.2 Factorizaciones coprimas	52
4.3 Determinación de la clase de $T_d(S)$ admisible y controladores correspondientes $C(S)$	58
4.4 Ejemplo de determinación de $T_d(S)$ admisibles y controladores $C(S)$ respectivos	60
Conclusiones	67
Apéndice	70
a. Simbología utilizada	70
b. Invertibilidad de matrices	70
Referencias bibliográficas	75

INTRODUCCION

Uno de los problemas de los sistemas multivariables planteados desde fines de los años treinta es el del desacoplamiento dinámico; el cual consiste fundamentalmente en diseñar un controlador que al conectarse de alguna forma conveniente con la planta, produce una matriz de transferencia total diagonal y no-singular. De esta manera cada salida del sistema es controlada por una y solo una entrada; esto puede representar ventajas considerables de simplicidad y confiabilidad especialmente si el control es ejecutado parcialmente por un operador humano como en el caso de un avión o bien, cuando se requiera que las salidas sean controladas independientemente, como por ejemplo la fuerza y velocidad con que sujeta y transporta un objeto un brazo mecánico.

Las desventajas principales que se tienen cuando se desacopla un sistema son las siguientes:

- 1.- Es necesario conocer la planta perfectamente ya que el desacoplamiento está basado en cancelaciones parciales de ésta.
- 2.- El controlador requerido es, generalmente, de orden elevado.

Uno de los pioneros en la investigación del problema del desacoplamiento de sistemas lineales fue B. S. Morgan quien en su artículo "The Synthesis of Lineal Multivariable Systems by State Variable Feedback", Proc. 1964 JACC, Stanford CA, pp 468-472 da condiciones suficientes para el desacoplamiento en el dominio del tiempo de un sistema de la forma $\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t)$; $Y(t)=CX(t)$. Morgan encontró que la no-singularidad del producto de la matriz CB es una condición suficiente para el desacoplamiento. Posteriormente, E. Gilbert publicó el artículo "The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback", SIAM J. Control, Vol. 7, No. 1, february 1969, en el cual formaliza algunos resultados obtenidos por Morgan y da condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento en función de las matrices A, B y C definidas arriba. Nuevamente el problema del desacoplamiento fue estudiado en el dominio del tiempo, esto se debió tal vez a la influencia de los trabajos presentados por R. Kalman a principios de los años sesenta en los cuales los sistemas lineales eran

analizados en el dominio del tiempo.

Posteriormente, Wolovich en 1975 en [32] presenta condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento utilizando la retroalimentación de la salida. Hasta ese momento se había considerado que todas las salidas del sistema eran factibles de ser medidas, en 1981 L. Pernebo en [17] presenta una clase de sistemas más general que los estudiados hasta entonces en los cuales se considera que las salidas se puedan agrupar en dos clases (con una posible intersección no vacía de elementos) la de salidas controlables y la de salidas medibles. Basado en este esquema, en 1985 Ohm, Howze y Bhattacharyya en [15] resuelven un problema que denominan problema general del servomecanismo (PGS) que consiste en determinar una matriz de Transferencia realizable y estable entre la entrada externa del sistema y las salidas controlables utilizando un controlador en el lazo de retroalimentación entre las salidas medibles y la entrada interna del sistema. Con este esquema el desacoplamiento dinámico es un caso particular del PGS en el cual la matriz de Transferencia realizable debe ser diagonal y no singular.

En este trabajo con base a las investigaciones arriba mencionadas, se determina como obtener una matriz de transferencia del sistema desacoplado tal que el conjunto de controladores requeridos sean de orden mínimo, realizable y estable para los casos en que se utilice retroalimentación de estados o de salida. Durante todo el desarrollo de este trabajo, el análisis de los tres esquemas para el desacoplamiento que se tratan: retroalimentación de los estados, retroalimentación de la salida y retroalimentación parcial de la salida, se hace en el dominio de la frecuencia. Se decidió tomar este enfoque para la solución del problema porque el desacoplamiento dinámico se expresa en función de la matriz de transferencia del sistema la cual está dada también en el dominio de la frecuencia. En otras palabras, el trabajo se desarrolla completamente con el enfoque frecuencial para evitar el tener que hacer transformaciones de una representación en variables de estado a una en el dominio de la frecuencia para comprobar la validez de los resultados. Adicionalmente, existen procedimientos completamente definidos para pasar del dominio de la frecuencia al tiempo y viceversa, por ejemplo mediante el teorema

de la estructura desarrollado por Wolovich en su libro mencionado en las referencias bibliográficas, Por lo tanto, los resultados que aquí se presentan pueden transformarse fácilmente a una representación en variables de estado. Este procedimiento específico se considera fuera del objetivo de este trabajo.

La solución al problema de minimalidad y estabilidad, simultáneamente, de los controladores requeridos para desacoplar un sistema lineal e invariante con el tiempo no había sido presentada hasta ahora en la literatura de control mas conocida, por lo que se puede decir que esta es la aportación principal de esta tesis. Con respecto al desacoplamiento cuando se tiene el esquema del problema general del servomecanismo, se presenta un procedimiento para obtener los factores coprimos definidos en la identidad de Bezout, la cual se utiliza para encontrar el controlador requerido. A diferencia de los esquemas anteriores, en este caso no es posible encontrar siempre controladores estables, la demostración de este hecho está dada en la referencia [26].

Esta tesis esta basada principalmente en los resultados presentados en las referencias [9], [13], [15], [31] y está organizada de la siguiente forma:

En el capítulo 0 se presenta algunos resultados obtenidos por Forney [9] relacionados con el concepto de base mínima, además se plantea el problema de diseño mínimo y se deriva un método para determinar una base mínima de un espacio nulo derecho el cual está basado en el trabajo reportado por Kung y Kailath en [13].

En el capítulo 1 se define lo que se entiende por un sistema lineal desacoplado dinámicamente, se dan condiciones necesarias y suficientes para que este sea posible y se muestra un esquema, propuesto por Wolovich y Falb [34], para la implementación del controlador en lazo cerrado.

El desacoplamiento dinámico mediante la retroalimentación de estados se estudia en el capítulo 2. La implementación se hace con un observador de orden mínimo encontrado mediante una modificación efectuada al

algoritmo para determinar bases mínimas de espacios nulos derechos presentado en el capítulo 0. Finalmente, se propone un método para encontrar una matriz de transferencia desacoplada a partir de la matriz de transferencia de la planta de tal forma que el controlador resultante sea propio y estable.

En el capítulo 3 se estudia el desacoplamiento mediante la retroalimentación de la salida y se dan condiciones suficientes para realizarlo. Se muestra que si se permite que el controlador que se encuentra en el lazo de retroalimentación tenga una matriz racional propia en lugar de una matriz constante y, la inversa de la matriz de transferencia de la planta guarda una diferencia de grado de numerador menos denominador de cuando mucho uno, se puede garantizar que existe una matriz de transferencia propia y estable equivalente.

En el capítulo 4 se presenta la solución del problema general del servomecanismo, y se desarrolla un procedimiento para resolver la identidad $L(S)Nm(S)+R(S)Dm(S)=1$ donde $L(S)$, $Nm(S)$, $R(S)$ y $Dm(S)$ son razones de polinomios propios y estables. Además, se ve como esta relacionada esta identidad con la determinación del controlador requerido. Como último paso se muestra un método para encontrar las matrices desacopladas $Td(S)$ admisibles y se da un ejemplo.

CAPITULO 0.- Preliminares.

0.0.- Introducción. El objetivo de este capítulo es presentar algunos conceptos necesarios para una mejor comprensión del problema de desacoplamiento. Esto permitirá que no halla disgresiones en los capítulos posteriores y que los temas puedan ser abordados de una manera mas directa. Se comienza por dar algunas definiciones y enunciar algunos teoremas relacionados con bases mínimas, de los cuales no se da una demostración ya que éstas se encuentran en la literatura a que se hace referencia. En la sección (0.1) se da el concepto de base mínima, el cual es de gran importancia en los problemas de minimización dentro de la teoría de sistemas. En la sección 0.2 se define el problema de diseño mínimo, el cual, como se ve en el capítulo 1, está directamente relacionado con el problema de desacoplamiento. Posteriormente, en la sección 0.3 se muestra como determinar una base mínima para un espacio nulo derecho. En 0.4 se presenta un algoritmo para encontrar la base mínima definida en la sección 0.3. Finalmente, en 0.5 se muestra como determinar bases mínimas estables.

0.1.- Bases mínimas [9].

Dada una matriz $P(S)$ ($m \times p$), $m \leq p \in F[S]$ (el anillo de las funciones polinomiales en S) y un espacio vectorial V_e m -dimensional de p -tuplas sobre $F[S]$, se pueden definir los siguientes conceptos:

Definición 0.0.1.- El grado de $P(S) \in F[S]$, $0[P(S)]$, es el grado mayor de todos los elementos de $P(S)$.

Definición 0.1.2.- El índice V_i de la columna U_i del renglón i de $P(S)$.

$V_i(U_i)$: = el grado máximo de los elementos de la i -ésima columna (i -ésimo renglón) de $P(S)$.

Definición 0.1.3.- El orden de $P(S), (V)$, es la suma de los índices V_i de la matriz $P(S)$.

$$V = \sum_{i=1}^p V_i \quad (0.1.1)$$

Definición 0.1.4.- Una base mínima $P(S)$ de V_e es aquella que tiene el menor orden entre todas las bases polinomiales de V_e .

Definición 0.1.5.- El espacio dual VT de V es el conjunto de todas las columnas P -tuplas $K(S)$ tal que $P(S)K(S) = 0$.

Si V tiene dimensión m , VT tendrá dimensión $p-m$. Una base $K(S)$ de VT consiste de $(p-m)$ vectores columnas linealmente independientes en el núcleo de $P(S)$.

$$P(S)K(S) = 0 \quad (0.1.2)$$

Definición 0.1.6.- La matriz de coeficientes de orden mayor $[P(S)]_r$, es la matriz formada por los coeficientes de los términos de mayor grado en cada renglón de $P(S)$.

Nota 1.- Similarmente, $[P(S)]_c$ es la matriz que consiste de los términos de mayor grado en cada columna de $P(S)$ ejemplo:

$$P(S) = \begin{bmatrix} 2S^4 & S^3+2 \\ S & -4S^2-1 \end{bmatrix}, [P(S)]_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, [P(S)]_c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 0.1.7.- Si $[P(S)]_r$ es de rango completo se dice que $P(S)$ es reducida por renglones.

0.2 El problema de diseño mínimo (PDM):

Una de las aplicaciones inmediatas de las bases mínimas es en la solución del PDM, el cual puede ser definido de la siguiente forma:

Dadas $T(S)$ ($p \times m$), $T_d(S)$ ($p \times q$) $\in F(S)$ (campo de las funciones racionales en S) con rango de $[T(S)]_r$ $[T(S)]_c$, $= p < m$, encontrar $T_c(S)$ ($m \times q$) $\in F(S)$, tal que $T_c(S)$ sea propia con orden mínimo y

$$T(S)T_c(S) = T_d(S) \quad (0.2.1)$$

Además si existe $T_c(S)$, ésta se debe poder expresar como

$$T_c(S) = N(S) D(S)^{-1} \tag{0.2.2}$$

donde $N(S), D(S) \in F[S]$

substituyendo $T_c(S)$ en (0.2.1)

$$T(S) N(S) D(S)^{-1} = T_d(S) \tag{0.2.3}$$

de donde

$$[T_d(S) : -T(S)] [D(S)^{-1} : N(S)^{-1}]^1 = 0 \tag{0.2.4}$$

La existencia de $T_c(S)$ se puede determinar con base al siguiente teorema demostrado en [9].

Teorema 0.2.1.- Sean $T(S) (pxm), T_d(S) (pxq) \in F(S)$, sea $TA(S) = [T_d(S) : -T(S)]$ y $r[TA(S)] = p$. Sea $K(S)$ una base mínima para el espacio de $(m+q) -$ tuplas ortogonales a $TA(S)$ y por lo tanto de dimensión $(m+q-p)$ y sea $K(S)^1 = [D(S)^1 : N(S)^1]$, donde $D(S)$ es $qx(m+q-p)$ y $N(S)$ es $mx(m+q-p)$. Entonces existe una matriz causal $T_c(S) (mxq)$ solución de $T(S) T_c(S) = T_d(S)$ si y solo si $r[D(S)]_r = q$.

*

Para una demostración ver el teorema 6 de [9], éste es válido aún en el caso mas general en el cual el rango de $TA(S)$ es r , evidentemente r puede ser menor o igual a p . Si este fuera el caso para el PDM, habría $(p-r)$ renglones linealmente dependientes de $TA(S)$. Premultiplicando $TA(S)$ por una matriz unimodular $U(S)$, se tendría

$$U(S) TA(S) = [TAR(S)^1 : 0^1]^1 \tag{0.2.5}$$

donde $TAR(S)$ tendría rango r . De esta forma el problema puede ser reducido a uno de rango completo r .

El teorema 0.2.1 da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de $T_c(S)$, sin embargo, no garantiza que esta $T_c(S)$, solución de la ecuación (0.2.1), sea de orden mínimo, la minimalidad del orden de $T_c(S)$ está dada por el siguiente teorema.

Teorema 0.2.2.- Sean $T(S), T_d(S), TA(S), K(S), D(S)$ y $N(S)$ definidas de la misma forma que en el teorema anterior y se asume que $r[D(S)]_r = q$. Si se ordenan las columnas de $K(S)$ por grado, es decir, $v_1 \leq v_2 \leq \dots$,

$\leq V_{m+q}$ y sean V_1, V_2, \dots, V_q los índices de las PRIMERAS q columnas linealmente independientes de $[D(S)]_r$, entonces:

- 1.- Existe una solución causal $T_c(S)$ a la ecuación $T(S) T_c(S) = T_d(S)$.
- 2.- Esta solución tiene el orden mínimo.
- 3.- Todas las soluciones de orden mínimo tienen el MISMO conjunto de índices. $\{V_i\}$.

Para su demostración ver el teorema 7 de [9].

Las matrices que tienen $[\cdot(S)]_r$ y/o $[\cdot(S)]_c$ de rango completo reciben un nombre especial, como se define a continuación.

Definición 0.2.1.- Una matriz $P(S)$ ($m \times p$) $\in F[S]$ se dice que es reducida por columnas (propia por columnas) si

$$r[P(S)]_c = \min(m, p)$$

Nota 1.- Similarmente se dice que $P(S)$ ($m \times p$) $\in F[S]$ es reducida por renglones (propia por renglones) si $r[P(S)]_r = \min(m, p)$.

La siguiente definición se refiere a una forma particular que tienen algunas matrices polinomiales y se conoce como forma de Popov o forma polinomial - escalón.

Esta forma es muy útil, como se verá en las siguientes secciones, para encontrar bases mínimas.

Definición 0.2.2.- Una matriz $P(S)$ ($m \times p$) $\in F[S]$ se dice que está en forma polinomial - escalón si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) $P(S) = [P_{ij}]$ es reducida por columnas con sus índices V_i en orden ascendente, es decir $V_1 \leq V_2, \dots, \leq V_p$.

(ii) En la columna j , existe un índice q_j , llamado índice pivote, tal que:

- (a) $P_{q_j j}(S)$ es mónico con grado V_j
- (b) $P_{q_j j}(S)$ es el último elemento de $P(S)$ en la j -ésima columna que tiene grado V_j , es decir, grado $P_{ij} < V_j$ $\forall i > q_j$.
- (c) Los índices pivotes están en orden ascendente, es decir, si $V_i = V_j$ e $i < j$ entonces $q_i < q_j$.
- (d) Los q_j son distintos.

Si se cumplen (i) e (ii) se dice que la matriz está en forma casi-escalón.

Si se reemplaza (d) por

$$(d') \text{ grado } P_{q_j i}(S) < V_j \quad \forall i \neq j$$

se dice que la matriz está en forma canónica o polinomial - escalón.

Ejemplo 0.2.1.

$$P(S) = \begin{bmatrix} -1 & -2S+4 & S^2-2S+1 \\ -4 & S-1 & S^2-4 \\ 5 & 1 & S \end{bmatrix}$$

$P(S)$ no es ni canónica ni casi-escalón definido ya que (ii) (c,d) no se cumplen.

$$Q(S) = \begin{bmatrix} -1 & S^2 & 0 \\ S+2 & S-1 & -S+1 \\ 4 & 1 & S^3-4 \end{bmatrix}$$

$Q(S)$ está en forma canónica, satisface (i) e (ii) con (d') .

0.3.- Determinación de una base mínima para un espacio nulo derecho. [13], [16].

De la ecuación (0.2.3) y con base en el teorema 0.2.1., se tiene

$$TA(S)K(S) = 0 \quad (0.3.1)$$

Sea $TA^*(S) = TA(S) d(S) \quad (0.3.2)$

$$TA^*(S) = IT_0 + SIT_1 + \dots + S^a IT_a \quad (0.3.3)$$

donde $a = \text{grado de } TA^*(S)$

$d = \text{mínimo común denominador de } TA(S) \text{ y}$

$$K(S) = IK_0 + SIK_1 + \dots + S^b IK_b \quad (0.3.4)$$

donde $b = \text{grado de } K(S) \text{ (a determinarse).}$

(b debe ser tan pequeño como sea posible para que $K(S)$ sea una base mínima).

T_i y K_i son las matrices de coeficientes de las potencias S^i respectivamente.

Se observa que $TA^*(S) \in F[S]$

Combinando las ecuaciones (0.3.1) $i=1,2,3,4$, se tiene

$$TA^*(S)K(S) = TA^*(S)IK_0 + TA^*(S)SIK_1 + \dots + TA^*(S)S^b IK_b \quad (0.3.5)$$

$$TA^*(S)K(S) = [TA^*(S), SITA^*(S), \dots, S^b ITA^*(S)] [K'_0, K'_1, \dots, K'_b] \quad (0.3.6)$$

$$[TA^*(S), SITA^*(S), \dots, S^b ITA^*(S)] = [I, SI, \dots, S^b I \quad T'_0, T'_1, \dots, T'_a] \quad (0.3.7)$$

$$[SI, S^2I, \dots, S^{b+1}I] [T'_0, T'_1, \dots, T'_a] \quad (0.3.7)$$

$$[S^b I, S^{b+1}I, \dots, S^{b+a}I] [T'_0, T'_1, \dots, T'_a] \quad (0.3.7)$$

de aquí que

$$\begin{aligned}
 & [TA^*(S), SITA^*(S), \dots, s^b ITA^*(S)] = \\
 & [I, SI, S^2I, \dots, S^b I, S^{b+1} I, \dots, S^{b+a} I] \begin{bmatrix} T_0 & 0 & \dots & 0 \\ T_1 & T_0 & & \\ T_2 & T_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & T_0 \\ T_a & & & T_1 \\ 0 & T_a & & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & T_a \end{bmatrix} \quad (0.3.8)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$TA^*(S)K(S) = [I, SI, S^2I, \dots, S^b I, S^{b+1} I, \dots, S^{b+a} I] T [K_0', K_1', \dots, K_b'] \quad (0.3.9)$$

donde T es la matriz toeplitz definida en la ecuación (0.3.8), y la cual se conoce como matriz resultante generalizada.

Una condición suficiente para que $TA^*(S)K(S)$ sea igual a cero es que $T[K_0', K_1', \dots, K_b']$ también lo sea.

Si se le imponen las condiciones (i), (ii)^{*} de la definición 0.2.2 (con el fin de obtener una base mínima) a $K(S)$, se tiene que $K(S)'$ debe reunir las siguientes características:

- (i) cada columna que contiene un índice pivote debe ser una combinación lineal de algunas de las columnas que están a la izquierda de ésta. Estas columnas son llamadas COLUMNAS PRIMARIAS DEPENDIENTES, para distinguirlas de las columnas secundarias dependientes.

Estas columnas secundarias dependientes se deben a la estructura de T ; si se encuentra un índice pivote en la columna j , $K = q_j \bmod l, K > q_j$ donde l es el número de columnas de $K(S)$, K es una columna secundaria dependiente dado que, por ejemplo, si las columnas q_d, q_e, q_j son un conjunto de vectores linealmente dependientes, $q_d \bmod l, q_e \bmod l$ y $q_j \bmod l$ también lo serán. Se deben cancelar todas las columnas secundarias dependientes, de lo contrario la condición (ii) (d) de la definición 0.2.2 no se cumplirá.

- (ii) Los índices pivote están, todos, en columnas primarias dependientes. Lo opuesto mostraría que al menos uno de los índices pivote que se tiene no lo sería en realidad, dado que habría una combinación menor de vectores columna linealmente independientes y esto será una contradicción de la definición de índice pivote dada en (ii) de la definición 0.2.2.

0.4.- Algoritmo para encontrar una base mínima de un espacio nulo derecho.

- 1.- Dados $T(S), T_d(S)$, se define $TA(S) \in F(S)$.
- 2.- Se encuentra el denominador común mínimo $d(S)$ de $TA(S)$.
- 3.- Se multiplica cada elemento de $TA(S)$ por $d(S)$ y efectúan todas las cancelaciones posibles.
- 4.- Se forma T con el siguiente criterio: suponiendo que TA es una matriz de $p \times q$ con grado N . El espacio nulo de TA es de dimensión $(q-p)$, por lo que deben existir $(q-p)$ columnas primarias dependientes en T . Se recomienda que la dimensión de T , para determinar estas $(q-p)$ columnas primarias dependientes, se fije con base en el siguiente algoritmo, al final de esta sección se explica el hecho en que está fundamentado.

1'.- Se fija $L=0$.

2'.- Si $(N+L) p \leq qL$ fin

3'.- $L=L+1$

4'.- Se regresa a 2'.

Una vez que se ha determinado L , se puede fijar T , inicialmente, como una matriz de $(N+1+L) p \times (L+1)q$, es decir T tendrá $(N+1+L)$ "bloques renglones" por $(L+1)$ "bloques columna".

5.- Se fija $I=1$.

6.- Se localiza la I columna primaria dependiente y se expresa como una combinación lineal de las anteriores.

$$\sum_{j=1}^{q_I} K_{jI} t_j = 0 \quad (0.4.1)$$

donde t_j es la j ésima columna de T con t_{q_I} la columna donde está el índice pivote q_I .

7.- Se normaliza la ecuación (0.4.1), es decir, se hace $K_{q_I I} = 1$ (ver definición 0.2.2 (ii) (a)).

8.- Si $I=q-p$ fin

9.- Se cancelan todas las columnas $C=q_I \bmod q$, con esto se cumple la condición (ii) (d') de las definición 0.2.2.

10.- $I=I+1$, se regresa al punto 6.

Si el algoritmo termina sin encontrar el total de la $(q-p)$ columnas dependientes primarias, se tiene que incrementar T por el número necesario de "bloques columna" para determinarlas.

El criterio para definir la dimensión de la T está basado en la siguiente observación:

La dimensión mínima que puede tener T es de $(N+1) p \times q$, para garantizar que se tengan $(q-p)$ vectores linealmente dependientes en T se deberá cumplir la desigualdad $q-p \leq q - (N+1)p$, lo cual es un absurdo ya que N es el grado de $TA(S)$ y por lo tanto un número natural. Por lo tanto se debe aumentar el número de columnas en múltiplos de q , pero al hacer esto, al mismo tiempo se incrementan los renglones en múltiplos de p .

5. $I=1$

6. $K_{11}=6, K_{21}=9, K_{31}=9, K_{41}=2, K_{51}=-1, K_{81}=7$

7. K's normalizados

$$K_{11} = \frac{6}{7}, K_{21} = \frac{9}{7}, K_{31} = \frac{9}{7}, K_{41} = \frac{2}{7}, K_{51} = -\frac{1}{7}, K_{81} = 1.$$

8. Se cancelan las columnas $C = 8 \bmod 5$

$$C = 8, 13$$

10. $I=2$

6. $K_{12}=8, K_{22}=-2, K_{32}=-2, K_{42}=5, K_{52}=1, K_{72}=7, K_{92}=7.$

7. $K_{12} = \frac{8}{7}, K_{22} = -\frac{2}{7}, K_{32} = -\frac{2}{7}, K_{42} = \frac{5}{7}, K_{52} = \frac{1}{7}, K_{72} = 1, K_{92} = 1$

9. $C = 9 \bmod 5; C=9,14$

10. $I=3$

6. $K_{13}=1, K_{23}=2, K_{33}=2, K_{43}=2, K_{53}=-2, K_{63}=-1, K_{103}=-1$

7. $K_{13}=-1, K_{23}=-2, K_{33}=-1, K_{43}=-2, K_{53}=2, K_{63}=1, K_{103}=1$

8. $I=3=q-p=5-2$, fin

como se observa solo se requirió la información de las primeras diez columnas, formando K se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & -1 \\ \frac{9}{7} & -\frac{2}{7} & -2 \\ \frac{9}{7} & -\frac{2}{7} & -2 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -2 \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \end{bmatrix} \quad (0.4.7)$$

Por lo tanto

$$K(S) = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & S-1 \\ \frac{9}{7} & S-\frac{2}{7} & -2 \\ S+\frac{9}{7} & -\frac{2}{7} & -2 \\ \frac{2}{7} & S+\frac{5}{7} & -2 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{2} & S+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(S) \\ N(S) \end{bmatrix} \quad (0.4.8)$$

Esta base es diferente de la encontrada para el mismo ejemplo en [9].

$$K(S) = \begin{bmatrix} S+2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & S-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & S+\frac{3}{2} \\ 1 & S+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ S+2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (0.4.9)$$

Sin embargo las dos tienen el mismo orden y los mismos índices, como era de esperarse de acuerdo con el teorema 0.2.1 inciso 3, el cual establece que todas las bases mínimas tienen el mismo orden y los mismos índices.

Para obtener $T_c(S)$ se aplican los teoremas 0.2.1 y 0.2.2 a la $K(S)$ obtenida en (0.4.8).

$$[K(S)]_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(S) \\ N(S) \end{bmatrix}_r \quad (0.4.10)$$

$r[D(S)]_r = 2$, esto implica que existe solución (ver teorema 0.2.1) la cual está dada por:

$$T_c(S)' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -2 \\ S + \frac{5}{7} & -2 \\ \frac{1}{7} & S + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & S - 1 \\ S - \frac{2}{7} & -2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (0.4.11)$$

efectuando las operaciones y trasponiendo el resultado se obtiene la $T_c(S)$ buscada.

CAPITULO 1.- Condiciones para el desacoplamiento dinámico.

1.0.- Los objetivos de este capítulo son definir lo que se entiende por un sistema lineal desacoplado dinámicamente y dar las condiciones necesarias y suficientes para su existencia, así mismo, se presentan algunos esquemas de implementación del sistema desacoplado en lazo abierto y lazo cerrado.

1.1.- Definición y condiciones para desacoplamiento.

Como primer paso se procede a definir lo que se entiende por un sistema desacoplado.

Definición 1.1.1.- Un sistema lineal es desacoplado dinámicamente si su matriz de transferencia es diagonal y no singular.

De esta definición se observa que, para sistemas desacoplados, la matriz de transferencia actúa como un operador biyectivo sobre entradas y salidas, es decir que a cada entrada corresponde una y solo una salida.

La primer pregunta que surge al tratar de resolver el problema del desacoplamiento es si esto es o no posible. La respuesta está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1.- Un sistema lineal con matriz de transferencia $T(S)$ ($p \times m$) $\in F(S)$ (campo de las funciones racionales en S sobre F) puede ser desacoplado si y solo si $T(S)$ es invertible por la derecha.

Demostración.

(necesidad)

Si el sistema puede ser desacoplado, existe $T_d(S)$ diagonal y no singular tal que

$$T(S) T_c(S) = T_d(S) \quad (1.1.1)$$

con $T_c(S)$, $T_d(S) \in F(S)$ no necesariamente propias, multiplicando (1.1.1) por $T_d(S)$ se tiene

$$T(S) T_c(S) T_d(S)^{-1} = I_p \quad (1.1.2)$$

esto implica que $T(S)$ es invertible por la derecha con $T_c(S) T_d(S)^{-1}$ su inversa derecha.

(suficiencia)

Si existe la inversa derecha $T_R(S) \in F(S)$ de $T(S)$, se tiene

$$T(S) T_R(S) = I_p \quad (1.1.3)$$

descomponiendo $T_R(S)$ como $T_c(S) T_d(S)^{-1}$ con $T_d(S)$ diagonal de rango p se obtiene la ecuación (1.1.1).

*

Por otra parte se puede demostrar (ver apéndice) que $T(S)$ ($p \times m$) tiene inversa derecha si y sólo si el rango de $T(S)$ es p , esta observación junto con el teorema 1.1.1 da lugar al siguiente corolario.

Corolario 1.1.1.- Un sistema lineal con matriz de transferencia $T(S)$ ($p \times m$) $\in F(S)$ puede ser desacoplada si y sólo si el rango de $T(S)$ es p .

1.2.- Desacoplamiento en lazo abierto y lazo cerrado.

En la figura 1.2.1 se muestra la representación en diagrama de bloques de la ecuación (1.1.1)

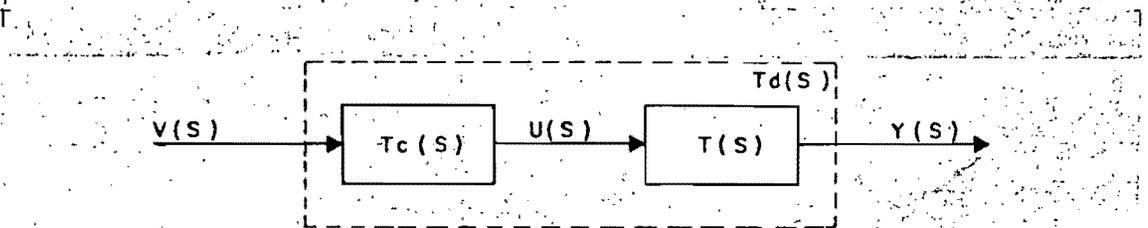


Fig. 1.2.1 Diagrama de bloques desacoplado en lazo abierto

donde

$$Y(S) = T(S)U(S) = T(S)T_c(S)v(S) = T_d(S)V(S) \quad (1.2.1)$$

Para aprovechar las ventajas que tienen los sistemas retroalimentados sobre los de lazo abierto, a continuación se presenta la descomposición de $T(S)$ y $T_c(S) \in F(S)$ para conseguir la implementación de la ecuación (1.1.1) como un sistema retroalimentado. Este esquema fue propuesto por Wolovich y Falb [34].

Primero se factoriza $T(S)$ como el producto de dos matrices $R(S)$ y $P(S) \in F[S]$, (anillo de funciones polinomiales sobre F) coprimas por la derecha tales que

$$T(S) = R(S) P(S)^{-1} \quad (1.2.2)$$

(La relatividad prima por la derecha de $R(S)$ y $P(S)$, como se ve en el siguiente capítulo, es una condición necesaria para la implementación de observadores de estado en el dominio de la frecuencia).

Introduciendo un vector $Z(S)$, conocido comúnmente como estado parcial o pseudoestado, tal que

$$P(S) Z(S) = U(S) \quad (1.2.3)$$

se tiene, substituyendo las ecuaciones (1.2.2) y (1.2.3) en (1.2.1), que

$$Y(S) = R(S) Z(S) \quad (1.2.4)$$

la siguiente figura muestra el diagrama de bloques del sistema resultante.

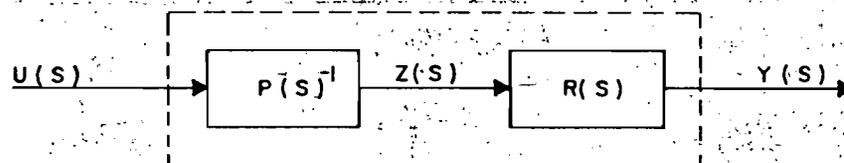


Fig. 1.2.2 Diagrama de bloques de la ecuación (1.2.3).

asumiendo $M(S), Q(S), L(S) \in F[S]$ con $G(S)$ no singular tales que

$$T_c(S) = P(S) P_c(S)^{-1} \tag{1.2.5}$$

$$P_c(S) = G(S) P(S) - M(S) \tag{1.2.6}$$

y combinando las ecuaciones (1.2.i) $i=1, \dots, 6$ se tiene

$$P_c(S)^{-1} L(S)V(S) = P(S)^{-1}U(S) = Z(S) \tag{1.2.7}$$

$$L(S) V(S) = P_c(S) Z(S) \tag{1.2.8}$$

$$L(S)V(S) = [G(S) P(S) - M(S)] Z(S) \tag{1.2.9}$$

de donde

$$Z(S) = P(S)^{-1} G(S)^{-1} [L(S)V(S) + M(S)Z(S)] \tag{1.2.10}$$

en la siguiente figura se muestra la implementación en lazo cerrado de la ecuación (1.1.1) con la descomposición de matrices indicada en las ecuaciones (1.2.i) $i=1, \dots, 10$.

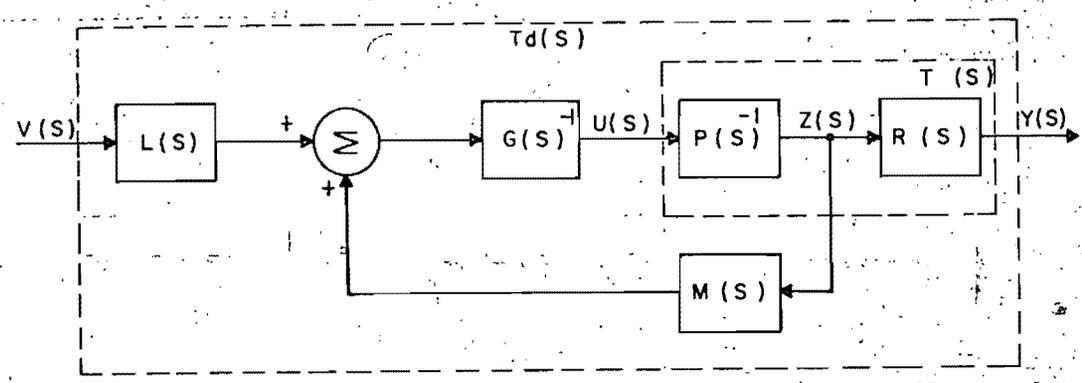


Fig. 1.2.3 Diagrama de bloques del sistema desacoplado en lazo cerrado.

Se hace notar de la fig. 1.2.3 que la retroalimentación no puede tomarse a partir de $Z(S)$ porque este punto no existe físicamente en la plan

ta por lo que es necesario modificar esta estructura. En los capítulos posteriores se ve como solucionar este problema.

CAPITULO 2.- Desacoplamiento dinámico mediante retroalimentación de estados.

2.0.- Introducción. En este capítulo se trata el problema del de desacoplamiento con retroalimentación de estados. En la sección 2.1 se desarrolla la implementación de esta retroalimentación mediante un observador y se presentan dos teoremas relacionados con este problema. El algoritmo para la obtención de las matrices definidas en 2.1 se discute en la sección 2.2. En 2.3, se muestra como obtener un observador de orden mínimo. El problema de como proponer una matriz de transferencia desacoplada $T_d(S)$ propia y estable utilizando un controlador realizable $T_c(S)$ se resuelve en 2.4 y, finalmente, se dan algunos ejemplos de desacoplamiento y de obtención de observadores de orden mínimo en la sección 2.5.

2.1- Implementación de la retroalimentación de estados mediante un observador. Esta sección 2.1 y la siguiente 2.2 siguen muy de cerca a las secciones 7.3 y 7.4 de [31]; se incluyen aquí para seguir de forma continua y clara la solución del problema. Antes de proceder a definir el algoritmo para determinar los parámetros del observador se anuncian dos teoremas relacionados con éste.

Teorema 2.1.1.- Sea $T(S) \in F(S)$, $R(S)$ y $P(S) \in F[S]$ tales que $T(S) = R(S) P(S)^{-1}$ con $R(S)$ y $P(S)$ coprimas por la derecha y $P(S)$ reducida por columnas. Para cualquier $M(S) \in F[S]$ tal que $0[M_i(S)]_C < 0[P_i(S)]_C$ $i=1, \dots, m$, existe $\{H(S), K(S), Q(S)\} \in F[S]$ que satisface:

(i) $|Q(S)|$ es un polinomio de Hurwitz

(ii) $K(S) P(S) + H(S) R(S) = Q(S) M(S)$ * (2.1.1)

(iii) $Q(S)^{-1} K(S)$ y $Q(S)^{-1} H(S)$ son matrices propias.

para la demostración ver el teorema 7.2.23 de [31].

*

Teorema 2.1.2. Sea $P(S), P(S) \in F[S]$ de dimensiones $(m \times m)$. Si $r [P(S)] = m$, existen $G(S)$ y $M(S)$ tales que

Como primer paso para implementar el esquema de la figura 2.1.1, es necesario determinar las matrices $G(S)$, $L(S)$ y $M(S)$ para lo cual se propone a continuación un algoritmo.

2.2.- Algoritmo para la obtención de las matrices $G(S)$, $L(S)$ y $M(S)$.

Dadas $T(S)$, $T_c(S) \in F(S)$, $R(S)$, $P(S) \in F[S]$ coprimas por la derecha, tales que

$$T(S) = (R(S)P(S))^{-1} \quad (2.2.1)$$

y

$$T(S)T_c(S) = T_d(S) \quad (2.2.2)$$

para encontrar $M(S) \in F[S]$, definida en las secciones 1.1 y 2.1, se efectúan las siguientes operaciones.

1. Se multiplica $T_c(S)$ por $P(S)^{-1}$ y el resultado se factoriza como el producto de dos matrices $\bar{P}(S)$, $\bar{L}(S) \in F[S]$ relativamente primas por la izquierda tales que:

$$P(S)^{-1} T_c(S) = \bar{P}(S)^{-1} \bar{L}(S) \quad (2.2.3)$$

La relatividad prima por la izquierda es con el fin de disminuir el orden del compensador en el lazo directo y dejar el mayor orden posible en el lazo de retroalimentación el cual a su vez puede ser minimizado como se explica en la siguiente sección (2.3).

2. Si $P(S)\bar{P}(S)^{-1}$ es propia, se hace $P_c(S) = \bar{P}(S)$ y $\bar{L}(S) = L(S)$, si no es así, se posmultiplica $P(S)$ por la inversa de cualquier matriz diagonal no singular y estable $G_L(S)$ del menor grado posible tal que $P(S)\bar{P}(S)^{-1} G_L(S)^{-1}$ sea propia. Definiendo

$$P_c(S) = G_L(S)\bar{P}(S) \quad (2.2.4)$$

$$L(S) = G_L(S)\bar{L}(S) \quad (2.2.5)$$

de las ecuaciones (2.2.1) $i=3,4,5$ se tiene

$$P(S)^{-1}Tc(S) = Pc(S)^{-1}L(S) \quad (2.2.6)$$

se observa que esta ecuación no es otra cosa que la (1.2.5), la cual sirvió de base para la implementación del esquema utilizado.

3. Se descompone $Pc(S)$ como

$$Pc(S) = G(S)P(S) - M(S) \quad (2.2.7)$$

esto es posible de acuerdo al teorema 2.1.2 ya que $P(S)$ no es singular y es igual a la factorización dada en la ecuación (1.2.6).

Una vez que se han determinado las matrices $G(S)$, $L(S)$ y $M(S)$, el siguiente problema a resolver es el de la determinación de las matrices que definen al observador $\{K(S), H(S), Q(S)\}$ las cuales deben satisfacer el enunciado del teorema 2.1.1. Dado que interesa resolver el problema de minimización, se debe buscar como determinar al observador de orden mínimo; éste es el objetivo de la siguiente sección.

2.3.- Observadores de orden mínimo.

Con base, en la condición (ii) la ecuación del observador puede ser reescrita como:

$$[K(S)H(S)Q(S)] [P(S)' R(S)' - M(S)'] = 0 \quad (2.3.1)$$

la cual se asemeja mucho a la (0.3.1), únicamente que la matriz de datos conocidos, en este caso, se encuentra a la derecha mientras que en (0.3.1) esta a la izquierda, esto se soluciona transponiendo (2.3.1).

$$[P(S)' R(S)' - M(S)'] [K(S) H(S) Q(S)] = 0 \quad (2.3.2)$$

Esta ecuación se puede resolver de la misma forma que se encuentra la

base mínima de un espacio nulo derecho y cuyo algoritmo se encuentra en el capítulo 0 sección 4(0.4) con la simplificación de los incisos 2 y 3 ya que como $TA(S)$ (definida en la ecuación (0.3.1) es polinomial, en este caso, el denominador común es la unidad.

Con el fin de cumplir todas las condiciones del teorema 2.1.1 para asegurar la existencia del observador es necesario modificar adicionalmente el algoritmo (0.4) de la siguiente manera:

- 1.- Se determina cuantas columnas de $M(S)'$ son cero, sea $C :=$ número de columnas cero de $M(S)'$.

Con esto se logra modificar ARBITRARIAMENTE los parámetros que se encuentran en el renglón de $Q(S)'$ que es multiplicado por la columna de ceros que tiene $M(S)'$ (si hay alguna). Por ejemplo, si la columna $(m+p+i)$ $i \in [1, \dots, m]$ de $[P(S)' R(S)' -M(S)']$ es cero, el renglón $(m+p+i)$ de $[K(S) H(S) Q(S)]$ puede ser cualquier polinomio sin que se afecte la ecuación (2.3.2).

- 2.- Se asume que $P(S)$, $R(S)$ y $M(S)$ son de dimensiones $(m \times m)$, $(p \times m)$ y $(m \times m)$ respectivamente, se buscan $(m-c)$ columnas primarias dependientes comenzando a considerar SIEMPRE como candidata a columna primaria dependiente únicamente a aquellas que pertenezcan a $M(S)'$. Especificamente se comienza a buscar la primer columna dependiente a partir de la columna $(m+p+1)$ de la matriz T definida en las ecuaciones (0.3.8) y (0.3.9) hasta la $(m+p+m)$ inclusive, si no se encuentran ahí las $(m-c)$ columnas, se continúa buscando a partir de $(m+p+m) + (m+p+1)$ hasta $(m+p+m) + (m+p+m)$ y así sucesivamente hasta terminar la búsqueda. Con esta modificación se asegura la existencia de $Q(S)^{-1}$, ya que todos los índices pivote (ver def. 0.22) de $[K(S) H(S) Q(S)]$ están en $Q(S)'$ por lo que $Q(S)$ es en sí misma una matriz polinomial escalón y por lo tanto invertible. En el apéndice se demuestra que todas las matrices cuadradas en forma polinomial escalón son invertibles. De la invertibilidad de $Q(S)$, la ubicación de todos los índices pivote en $Q(S)$ y

el teorema 0.2.1, se puede asegurar la existencia de las matrices propias $Q(S)^{-1}K(S)$ y $Q(S)^{-1}H(S)$. Hasta este punto se ha encontrado solución a los incisos (ii), (iii) del teorema 2.1.1, queda por resolver el problema de estabilidad dado por (i) ($|Q(S)|$ es un polinomio de Hurwitz).

Para encontrar $Q(S)$ estable se propone el siguiente algoritmo.

- 1.- Se calcula $Q(S)$, si es estable fin.
- 2.- Se determina el número de columnas de $M(S)'$ que sean cero, sea $c :=$ número de columnas cero de $M(S)'$.
- 3.- Se determina el número de columnas de $Q(S)'$ en los cuales solo exista UN elemento polinomial ESTABLE diferente de cero. Sea $e :=$ número de columnas con un solo polinomio estable.
- 4.- Sea f el número de columnas de $Q(S)'$ que no cumplan con 1 y 2, esto es

$$b = m - c - e \quad (2.3.3)$$

para estabilizar $Q(S)$ se puede parametrizar estas b columnas.

- 5.- $I = 1$
- 6.- Se toma la I columna de las b definida en 4
- 7.- Para no incrementar el orden se fija como parámetro ajustable de la columna I algún coeficiente de grado estrictamente menor que el del índice pivote que pertenezca a $Q(S)'$.
- 8.- Se expresa la columna L_i de T que intervenga en la fijación del parámetro como una combinación lineal de las columnas que se encuentran a la izquierda de la columna de T que corresponde al grado del índice pivote de esa columna de $Q(S)'$. Con esto se garantiza la existencia de una $Q(S)$ invertible. En otras palabras se hace

$$KL_i - \sum_{j=1}^{n-I} c_j L_j = 0 \quad (2.3.4)$$

donde K es el parámetro ajustable de la columna I , c_j son los coeficientes de las columnas L_j de la matriz T y n es el gra

do de la columna I. Se suma (2.3.4) a la ecuación original

$$\sum_{i=1}^n k_i L_i = 0 \text{ que define a la columna I, esto es, se hace:}$$

$$KL_i + \sum_{j=1}^{n-1} c_j L_j + \sum_{i=1}^n k_i L_i = 0 \tag{2.3.5}$$

- 9.- Se sustituye la columna I de $[K(S) \ H(S) \ Q(S)]'$ por la ecuación (2.3.5).
- 10.- Se calcula el nuevo $Q(S)$
- 11.- Si $|Q(S)|$ es estable, fin (termina el algoritmo)
- 12.- Si $I=b$ fin (termina el algoritmo sin encontrar $|Q(S)|$ estable)
- 13.- $I = I + 1$
- 14.- Se regresa al punto 6.

Nota 1.- Si el algoritmo termina sin encontrar la $|Q(S)|$ estable, es necesario incrementar el orden de $Q(S)$, para ello se multiplica por S a cada uno de los elementos de $[K(S)' \ H(S)' \ Q(S)]'$ y se procede a obtener las b columnas parametrizadas. Una vez que se tengan éstas se procede a sustituirlas utilizando una a la vez y reemplazándolas de izquierda a derecha; si no se encuentra estable se substituyen $\begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}$ y así hasta llegar a $\begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$ si es necesario. De esta forma se incrementa el orden de $[K(S)' \ H(S)' \ Q(S)]'$ de uno en uno y no se pierde la minimalidad.

Este algoritmo está basado en dos hechos:

- 1.- Al sumar a un polinomio de grado n igualado a cero otro polinomio de grado menor que n igualado a cero, se tiene un nuevo polinomio de grado n también igualado a cero; es decir, el grado y la igualdad no se altera.
- 2.- Si el polinomio que resulta en 1 no es estable, se puede multiplicar por S incrementando el grado a $n+1$ y sumar ahora un polinomio de grado n igualado a cero, de tal manera que se conserve el grado del nuevo polinomio en $n+1$ y exista una mayor flexibilidad en

el ajuste de los coeficientes de los términos de grado menor o igual a n .

Con los algoritmos arriba mencionados se esta en condiciones de encontrar las matrices $G(S)$, $K(S)$, $H(S)$ y $R(S)$ mostradas en la figura 2.1.1 asociadas al problema de desacoplamiento mediante la retroalimentación de estados; sin embargo no se ha estudiado bajo que condiciones es posible proponer una matriz de transferencia desacoplada que pueda ser realizable. Este es el objetivo de la siguiente sección.

2.4. Condiciones para determinar la matriz desacoplada $T_d(S)$.

Uno de los problemas fundamentales del desacoplamiento, es el de la solución de la matriz desacoplada $T_d(S)$ que se puede tener. Si se efectúa esta selección a priori, sin tomar en cuenta la planta $T(S)$, es casi seguro que esta $T_d(S)$ sea inadmisibles debido a las restricciones severas que impone el hecho de requerir que el controlador obtenido $T_c(S)$ sea propio, estable y de orden mínimo. Una forma para conocer exactamente las $T_d(S)$ factibles de obtener se basa en la demostración del teorema 1.1.1 el cual establece que un sistema puede ser desacoplado si y solo si es invertible por la derecha. Si se define $T_R(S)$ como la inversa derecha de $T(S)$ se tiene

$$T(S) T_R(S) = I \quad (2.4.1)$$

de la ecuación (1.1.2) se concluye que

$$T_R(S) = T(S)T(S)^{-1} \quad (2.4.2)$$

$T_R(S)$ se puede descomponer de acuerdo a la ecuación (2.4.2) de tal forma que $T(S)$ y $T(S)$ sean estables y propias y $T(S)$ sea, adicionalmente no singular y diagonal. Para obtener $T_R(S)$ se puede utilizar el algoritmo 0.4 que permite encontrar una base mínima de un espacio nulo de recho y posteriormente, si existe duda acerca de la minimalidad de la $T_d(S)$ obtenida, se debe de aplicar el mismo algoritmo 0.4 pero ahora tomando como datos $T(S)$ y $T_d(S)$, si existe una nueva $T_c(S)$ propia y es

table de orden menor se considera ésta como la solución del problema.

Ejemplo 2.4.1.

Dada

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{S} & \frac{1}{S+2} & \frac{1}{S+1} \\ 1 & \frac{S-2}{S+2} & \frac{S-1}{S+1} \end{bmatrix}$$

encuentre la clase de matrices $T_d(S)$ admisibles.

Solución:

Sea $T(S) = N(S) D(S)^{-1}$ de la ecuación (2.4.1)

$$T(S) N(S) D(S)^{-1} = I \quad (2.4.3)$$

$$[T(S) \quad -I][N(S)' \quad D(S)'] = 0 \quad (2.4.4)$$

Utilizando el algoritmo 0.4 se obtiene una base mínima del espacio nulo derecho de $T(S)$, esta base es:

$$\begin{bmatrix} S & -S^2+S & S^2 \\ 0 & 0 & -S^2-4S-4 \\ 0 & S^2+S & 0 \\ \hline S+1 & 1 & S^2-2 \\ S & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(S) \\ \hline D(S) \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

tomando las 3 combinaciones posibles de las 3 columnas de la base en grupos de dos se obtienen las 3 posibles $T_d(S)$.

a) Con las columnas 1 y 2

$$T_{R1}(S) = \begin{bmatrix} -S^2+S & S^2 \\ 0 & 0 \\ S^2+S & -(S+1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

b). Con las columnas 1 y 3

$$T_{R2}(S) = \begin{bmatrix} \frac{S(S-2)}{S^2-2S-2} & -\frac{S}{S^2-2S-2} \\ -\frac{S(S+2)}{S^2-2S-2} & \frac{(S+1)(S+2)}{S^2-2S-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

c). Con las columnas 2 y 3

$$T_{R3}(S) = \begin{bmatrix} -S^2+S & \frac{S(S^3-S^2-S+2)}{4} \\ 0 & -\frac{(S+2)^2}{4} \\ S^2+S & -\frac{S(S^3+S^2-2S-2)}{4} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

Se observa que de las 3 matrices $T_R(S)$ obtenidas solo la $T_{R2}(S)$ es propia, lo cual coincide con lo que se afirma en el teorema 0.2.1, ya que únicamente las columnas 1 y 3 cumplen con la condición de que $r[D(S)]_r = 2$, en este caso

$$[D(S)]_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.9)$$

Utilizando la ecuación (2.4.2) se pueden descomponer las $T_R(S)$ obtenidas de la siguiente manera:

$$e). T_{R1}(S) = T_{c1}(S) T_{d2}(S)^{-1} \quad (2.4.10)$$

$$T_{c1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s^2+s}{(s+a)(s+b)} & \frac{s^2}{(s+c)(s+d)} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+a)(s+b)} & \frac{s^2+2s+1}{(s+c)(s+d)} \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

$$T_{d1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+a)(s+b)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+c)(s+d)} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$b). T_{R2}(s) = T_{c2}(s) T_{d2}(s)^{-1} \quad (2.4.13)$$

$$T_{c2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2-2s}{(s+a)(s+b)} & -\frac{s}{(s+e)(s+d)} \\ \frac{s^2+2s}{(s+a)(s+b)} & \frac{s^2+3s+2}{(s+c)(s+d)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.14)$$

$$T_{d2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2-2s-2}{(s+a)(s+b)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2-2s-2}{(s+c)(s+d)} \end{bmatrix} \quad (2.4.15)$$

$$c). T_{R3}(s) = T_{c3}(s) T_{d3}(s)^{-1} \quad (2.4.16)$$

$$T_{c3}(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s^2+s}{(s+a)(s+b)} & \frac{s^4-s^3-s^2+2s}{4(s+c)(s+d)(s+e)(s+f)} \\ 0 & \frac{s^2+2s+2}{4(s+c)(s+d)(s+e)(s+f)} \\ \frac{s^2+s}{(s+a)(s+b)} & \frac{s^4+s^3-2s^2-2s}{4(s+c)(s+d)(s+e)(s+f)} \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

$$T_{d3}(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(S+a)(S+b)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(S+c)(S+d)(S+e)(S+f)} \end{bmatrix} \quad (2.4.18)$$

Ahora se puede seleccionar la $T_d(S)$ que se considere más conveniente, se observa que estas matrices no son únicas ya que se pueden incrementar el número de polos siempre y cuando se incremente en igual cantidad los ceros para cualquier elemento de $T_d(S)$: de esta forma se puede conservar la igualdad expresada en la ecuación (2.4.2), por supuesto esto incrementará el orden del compensador.

En general después de la descomposición de $T_R(S)$ en algún producto $T_c(S) T_d(S)^{-1}$, no puede ser garantizada la minimalidad de $T_c(S)$, pero una vez más, si existe duda acerca de ella, se debe aplicar el algoritmo 0.4, dando como datos $T(S)$ y la $T_d(S)$ seleccionada y buscando una $T_c(S)$ mínima tal que

$$T(S) T_c(S) = T_d(S) \quad (2.4.19)$$

2.5 Ejemplos de problemas de desacoplamiento y de minimización de observadores.

Ejemplo 2.5.1. Se considera la matriz de transferencia del ejemplo 2.4.1 y se seleccionan a, b, c, d los polos de $T_{d1}(S)$ iguales a uno, esto es (ec. 2.4.12)

$$T_{d1}(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(S+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(S+1)^2} \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

el compensador correspondiente es (ec. 2.4.11).

$$T_{c1}(S) = \begin{bmatrix} \frac{-S^2+S}{(S+1)^2} & \frac{S^2}{(S+1)^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{S}{S+1} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5.2)$$

Se puede comprobar que este es un controlador de orden mínimo para las $T(S)$ y $T_{d1}(S)$ dadas. Para la obtención de las matrices $L(S)$, $G(S)$ y $M(S)$ definidas en la figura 1.2.3 se aplica el algoritmo de la sección 2.2. Una descomposición de $T(S) = R(S) P(S)^{-1}$ con $R(S)$ y $P(S)$ coprimas por la derecha esta dada por

$$R(S) = \begin{bmatrix} S+1 & 1 & S \\ S & S-2 & S-1 \end{bmatrix} \quad (2.5.3)$$

$$P(S) = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 \\ 0 & 0 & S+1 \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

continuando el algoritmo 2.2

$$P(S)^{-1} T_{c1}(S) = \begin{bmatrix} \frac{-S+1}{(S+1)^2} & \frac{S}{(S+1)^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{S}{(S+1)^2} & -\frac{1}{S+1} \end{bmatrix} \quad (2.5.5)$$

$\bar{P}(S)$ y $\bar{L}(S)$ definidas en la ec (2.2.3) son

$$\bar{P}(S) = \begin{bmatrix} (S+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (S+1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

$$\bar{L}(S) = \begin{bmatrix} -S+1 & S \\ 0 & 0 \\ S & -S-1 \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

y por lo tanto

$$P(S)\bar{P}(S)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S}{(S+1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S+1} \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

como $P(S)\bar{P}(S)^{-1}$ no es propia.

$$\text{se selecciona } G_L(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.9)$$

de las ecuaciones (2.2.4), (2.5.6) y (2.5.9) se tiene

$$Pc(S) = \begin{bmatrix} (S+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 \\ 0 & 0 & (S+1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.10)$$

de las ecuaciones (2.2.5), (2.5.7) y (2.5.9) se obtiene

$$L(S) = \begin{bmatrix} -S+1 & S \\ 0 & 0 \\ S & -S-1 \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

con la $Pc(S)$ calculada y la $P(S)$ dada se encuentran $G(S)$ y $M(S)$ definidas en la ecuación (2.2.7)

$$G(S) = \begin{bmatrix} S+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S+1 \end{bmatrix} \quad (2.5.12)$$

$$M(S) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

Una vez que se tiene $M(S)$ se procede a determinar el observador de orden mínimo, substituyendo los valores obtenidos en la ecuación (2.3.2) se tiene

$$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 & S+1 & S & 1 & 0 & 0 \\ 0 & S+2 & 0 & 1 & S-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S+1 & S & S-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(S)' \\ H(S)' \\ Q(S)' \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5.14)$$

Utilizando el algoritmo 0.4 y las modificaciones indicadas en la sección 2.3, hasta antes de la estabilidad de $Q(S)$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} K(S)' \\ \text{---} \\ H(S)' \\ \text{---} \\ Q(S)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S - \frac{13}{6} & -S - \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{5}{6} & -S + \frac{7}{3} & 0 \\ -S - \frac{1}{6} & -S + \frac{5}{3} & 0 \\ \text{---} \\ S + \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & S + \frac{5}{3} & 0 \\ \text{---} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & S \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

Como las últimas columnas de $M(S)$ son cero los dos últimos renglones de $Q(S)'$ pueden ser cualquier polinomio en S sin que deje de cumplirse la ecuación (2.5.14). Para que $Q(S)$ sea invertible se requiere que en las dos primeras columnas de esta base, $Q(S)$ tenga polinomios de grado al menos 1, con el grado igual a uno se obtiene el mínimo. Proponiendo los elementos 2,1 y 3,2 de $Q(S)'$ iguales a $(S+a)$ y $(S+b)$ respectivamente, se tiene

$$Q(S)' = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & S \\ S+a & 0 & 0 \\ 0 & S+b & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

$$|Q(S)| = S(S+a)(S+b) \quad (2.5.17)$$

Esta matriz $Q(S)$ es una solución posible del problema, sin embargo el observador es marginalmente estable porque tiene un polo en el origen. Si se desea evitar esto, es necesario modificar $Q(S)$. De la ecuación (2.5.15) se ve que es factible la modificación del polo de $Q(S)$ que se encuentra en la tercer columna, sin incrementar el orden, de S a $(S+c)$ si se multiplica cualquiera de las dos primeras columnas por una constante, por ejemplo la primer columna por $-3C/4$ y se suma a la tercera, resultan

$$\begin{bmatrix} K(S) \\ \dots \\ H(S) \\ \dots \\ Q(S) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -S - \frac{13}{6} & -S - \frac{1}{3} & \frac{3}{4}CS + \frac{13}{8}C - 1 \\ -\frac{5}{6} & -S + \frac{7}{3} & \frac{5}{8}C \\ -S - \frac{1}{6} & -S + \frac{5}{3} & \frac{3}{4}CS + \frac{C}{8} \\ \dots & \dots & \dots \\ S + \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{4}CS - C \\ -\frac{1}{6} & S + \frac{5}{3} & \frac{C}{8} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & S+C \\ S+a & 0 & 0 \\ 0 & S+b & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.18)$$

$$Q(S) = (S+a)(S+b)(S+c) \quad (2.5.19)$$

con esto se encuentra un observador de orden mínimo (3) con polos completamente asignables y por tanto el objetivo se ha logrado al quedar determinados todos los parámetros del esquema de la figura 5.1.1.

Ejemplo 2.5.2. [33].

Dados $R(S)$, $P(S)$ y $M(S)$ encontrar un observador de orden mínimo ($K(S)$, $H(S)$ y $Q(S)$) que satisfagan la ecuación 2.3.1).

$$R(S) = \begin{bmatrix} S^2 & -S-2 \\ S^2+S+1 & -S \end{bmatrix} \quad (2.5.20)$$

$$P(S) = \begin{bmatrix} -1 & -S^2 \\ S^3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.21)$$

$$M(S) = \begin{bmatrix} -1 & 2S+2 \\ -3S^2-3S-1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.22)$$

substituyendo estos valores en la ec (2.3.2) se tiene

$$\begin{bmatrix} -1 & S^3 & S^2 & S^2+S+1 & 1 & 3S^2+3S+1 \\ -S^2 & 1 & -S-2 & -S & -2S-2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K(S)' \\ H(S)' \\ Q(S)' \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5.23)$$

utilizando el algoritmo 0.4 con las modificaciones indicadas en 2.3 para un observador se tiene

estabilización de $Q(S)$ dada en la sección 2.3.

1. $|Q(S)| = (S+1)(S-1)$
2. $c = 0$
3. $e = 0$
4. $b = 2-0-0$

se pueden parametrizar 2 columnas

5. $I = 1$
6. Se selecciona para modificar, la primer columna de la matriz definida en la ecuación (2.5.24).
7. Se debe de modificar el término -1 , esto es se cambia el término (5,1) de (2.5.24) de $(S-1)$ a $(S+K-1)$ con $K > 0$.
8. El término -1 dado por L_5 y el grado de la columna I de $Q(S)'$ es 1, por lo que se procede a expresar KL_5 como una combinación lineal de las primeras 10 columnas de T obteniéndose:

$$KL_5 + 2KL_1 + 2KL_2 + \frac{4}{3}KL_4 - \frac{1}{3}KL_6 - \frac{5}{3}KL_9 - \frac{1}{3}KL_{10} = 0 \quad (2.5.29)$$

sumando (2.5.27) a (2.5.29).

$$2(K-1)L_1 + 2KL_2 + L_3 + \left(\frac{4}{3}K-1\right)L_4 + (K-1)L_5 - \frac{1}{3}KL_6 - \frac{5}{3}KL_9 - \frac{1}{3}KL_{10} + L_{11} = 0 \quad (2.5.30)$$

$$9. \begin{bmatrix} \underline{K(S)} \\ \underline{H(S)'} \\ \underline{Q(S)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(K-1) & -5 \\ 2K & -8 \\ -\frac{5}{3}KS+1 & 5S-2 \\ -\frac{K}{3}S+\frac{4}{3}K-1 & -4 \\ S+K-1 & -2 \\ -\frac{K}{3} & S+1 \end{bmatrix} \quad (2.5.31)$$

$$10. |Q(S)| = (S+1)(S+K-1) - \frac{2K}{3} \\ = S^2 + KS + \frac{K}{3} - 1 = 0 \quad (2.5.32)$$

11. $|Q(S)|$ es estable para todo $K > 3$

fin

Se nota de la ecuación (2.5.32) que el observador obtenido es de segundo orden.

CAPITULO 3.- Desacoplamiento dinámico mediante retroalimentación de la salida.

3.0.- Introducción. El objetivo de este capítulo es encontrar condiciones suficientes para el desacoplamiento dinámico mediante retroalimentación de la salida. Este problema ha sido estudiado y resuelto en las referencias [32], [3] y [12], sin embargo los resultados encontrados tienen limitaciones en cuanto a las matrices aceptables como datos o a las matrices obtenidas. En [32] la matriz del sistema $T(S)$ debe ser estrictamente propia y la matriz de retroalimentación del sistema $H(S)$ definida en la ecuación (3.1.1) debe ser constante. En [3] se considera igualmente que $T(S)$ es estrictamente propia y H es una función de S ; sin embargo no se garantiza que esta $H(S)$ sea estable. En [12] resuelven el problema en el dominio del tiempo pero considerando que H es una matriz real.

En este capítulo se resuelve el problema (con condiciones suficientes) aceptando que $T(S)$ sea propia (no necesariamente estrictamente propia) y se obtiene una matriz $H(S)$ racional propia y estable, en la sección 3.1. Finalmente en la sección 3.2, se dan algunos ejemplos.

3.1.- Implementación de la retroalimentación de la salida.

Considerando el esquema dado en la figura 3.1.1.

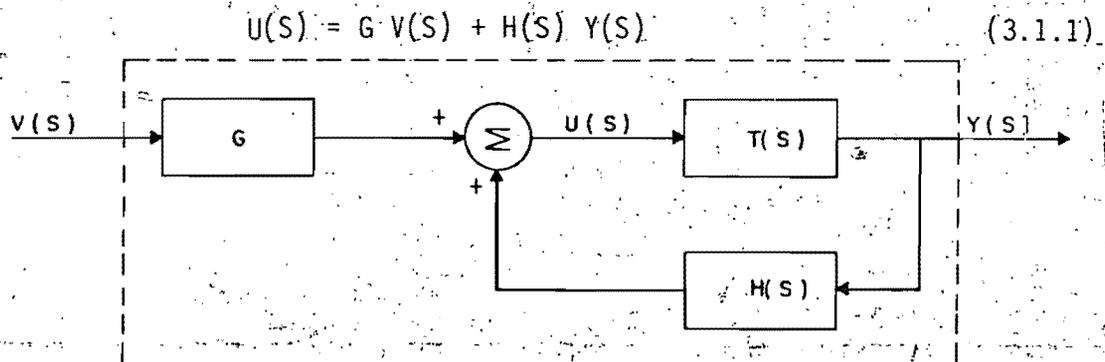


Fig. 3.1.1 Esquema con retroalimentación de la salida.

De la figura se observa que:

$$Y(S) = T(S) U(S) \quad (3.1.2)$$

sustituyendo la ecuación (3.1.1) en (3.1.2)

$$Y(S) = T(S) [G V(S) + H(S) Y(S)] \quad (3.1.3)$$

de aquí

$$[I - T(S) H(S)] Y(S) = T(S) G V(S) \quad (3.1.4)$$

suponiendo que $[I - T(S) H(S)]$ es invertible

$$Y(S) = [I - T(S) H(S)]^{-1} T(S) G V(S) \quad (3.1.5)$$

se tiene

$$T_d(S) = [I - T(S) H(S)]^{-1} T(S) G \quad (3.1.6)$$

de donde

$$I - T(S) H(S) = T(S) G T_d(S)^{-1} \quad (3.1.7)$$

Suponiendo $T(S)$ invertible (esta es la limitación principal que tienen los sistemas desacoplados mediante la retroalimentación de la salida). Se tiene reorganizando la ecuación (3.1.7)

$$H(S) = T(S)^{-1} - G T_d(S)^{-1} \quad (3.1.8)$$

En la ecuación (3.1.5) se supuso que $[I - T(S) H(S)]$ era invertible, en el siguiente Lemma se demuestra que, dando por válida la ecuación (3.1.8), esta es cierta si y solo si la matriz constante G es invertible.

Lemma 3.1.1.- Si $H(S) = T(S)^{-1} - G T_d(S)^{-1}$, la matriz $[I - T(S) H(S)]$ es invertible si y solo si G también lo es.

Demostración:

(necesidad)

Si $[I - T(S) H(S)]$ es invertible; se tiene

$$\begin{aligned} [I - T(S) \cdot (T(S)^{-1} - G T_d(S)^{-1})] &= \\ [I - I + T(S) G T_d(S)^{-1}] &= T(S) G T_d(S)^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

como $T(S) G T_d(S)^{-1}$ es invertible G también lo es.

(suficiencia)

Si G es invertible, premultiplicando (3.1.8) por $I(S)$, se tiene

$$T(S) H(S) = I - T(S) G T_d(S)^{-1} \quad (3.1.10)$$

de donde

$$[I - T(S) H(S)] = T(S) G T_d(S)^{-1} \quad (3.1.11)$$

como G es invertible, $[I - T(S) H(S)]$ también lo es.

*

Para que el sistema sea realizable $H(S)$ debe ser propia, además si se requiere que sea estable, es necesario introducir restricciones. A continuación se da un lemma que está directamente relacionado con la solución del problema de racionalidad y estabilidad de $H(S)$.

Lemma 3.1.2.- Dado $\frac{P(S)}{q(S)} = \left[\frac{P_2(S)}{P_1(S)} - g_i \frac{P_{d2}(S)}{P_{d1}(S)} \right]$.

Donde, $0 \leq \left[P_2(S) \right] = n \geq 0 \leq \left[P_1(S) \right] = m$, $0 \leq \left[P_{d2}(S) \right] = k \geq 0 \leq \left[P_{d1}(S) \right] = l$

$P_{d2}(S)$ es un polinomio de Hurwitz y g_i es una constante; con $P_1(S)$ y $P_2(S)$ relativamente primos y $P_{d1}(S)$ y $P_{d2}(S)$ relativamente primos y completamente asignables, entonces $\frac{P(S)}{q(S)}$ es:

a) racional propio si $n-m \leq 1$

b) estable si $P_1(S)$, $P_{d1}(S)$ son polinomios de Hurwitz

Demostración

a) Del enunciado del lema se tiene que $n-m \leq 1$ esto implica que $n-m=0$ ó $n-m=1$ si $n-m=0$ haciendo $g_i=0$ se tiene que $\frac{P(S)}{q(S)}$ es racional y propio.
Si $n-m=1$

$$\frac{P(S)}{q(S)} = \frac{P_2(S) \cdot P_{d1}(S) - g_i P_1(S) \cdot P_{d2}(S)}{P_1(S) \cdot P_{d1}(S)} \quad (3.1.12)$$

$$O[P(S)] \leq \max(n+1, m+k) \quad (3.1.13)$$

como k, l son arbitrarios únicamente deben cumplirse que $l \leq k$, haciendo

$$k = l + 1 \quad (3.1.14)$$

$$O[P(S)] \leq \max(m-l+1, m+l+1) = m+l+1 \quad (3.1.15)$$

ajustando g_i de tal forma que el coeficiente de grado $(m+l+1)$ de $P_2(S)P_{d1}(S)$ sea igual al coeficiente de grado $(m+l+1)$ de $g_i P_1(S) P_{d2}(S)$ se tiene que

$$O[P(S)] \leq m+l \quad (3.1.16)$$

y finalmente

$$O[q(S)] = m+l \quad (3.1.17)$$

por lo tanto

$$\frac{P(S)}{q(S)} \text{ es racional y propio.}$$

b) De la expresión (3.1.12) se ve claramente que $\frac{P(S)}{q(S)}$ es estable si $P_1(S)$ y $P_d(S)$ lo son. *

Este resultado se puede generalizar para el caso en que $\frac{P(S)}{q(S)}$ represente a los elementos de una matriz racional propia y estable. Con base en

el lemma arriba propuesto se puede demostrar el siguiente teorema, el cual da condiciones suficientes para desacoplamiento utilizando la salida.

Teorema 3.1.1.- Un sistema con matriz de transferencia invertible $T(s)$ puede ser desacoplado mediante retroalimentación de la salida con la ley de control definida en la ecuación (3.1.1) con $H(s)$ racional, propia y estable si se cumple que:

- Todos los polos de $T(s)^{-1}$ sean estables.
- La diferencia de grados de (numerador-denominador) de cada elemento de $T(s)$ sea cuando mucho uno.
- La matriz G formada con los g_i , definidos en el lema 3.1.2 para cada elemento de $H(s)$ dada en la ecuación (3.1.8) sea invertible.

Este teorema es una consecuencia directa de los lemas 3.1.1 y 3.1.2, considerando que $\frac{P(s)}{q(s)}$, y cada uno de los elementos de $H(s)$ y $\frac{T_{d2}(s)}{T_{d1}(s)}$ es la columna correspondiente $T_d(s)^{-1}$ la cual es completamente asignable en cuanto a la ubicación de sus polos y ceros, la única restricción se tiene en la diferencia de grados de $P_{d2i}(s)$ y $P_{d1i}(s)$ la cual debe cumplir la ecuación $0 \leq [P_{d2i}(s) - P_{d1i}(s)] = \max_j [P_{2ji}(s) - P_{1ji}(s)] \leq 1 \quad \forall i=1, \dots, \text{no. de columnas de } T(s)$.

En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos que ilustran el procedimiento para desacoplar sistemas mediante la retroalimentación de la salida.

3.2 Ejemplos de desacoplamiento utilizando retroalimentación de la salida.

Ejemplo 3.2.1. [32]. Sea

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{S^2-3S-2} & 0 \\ \frac{S+1}{S^3-4S^2+S+2} & \frac{S^2-3S-2}{S^3-4S^2+S+2} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

la matriz de una planta asociada a la figura 3.1.1. Se desean encontrar las matrices $H(S)$, G y $T_d(S)$. Cancelando las raíces comunes del numerador y denominador de cada elemento de $T(S)$, se tiene

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{S^2-3S-2} & 0 \\ \frac{S+1}{S^3-4S^2+S+2} & \frac{1}{S-1} \end{bmatrix}$$

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S^2-3S-2}{S+1} & 0 \\ -1 & S-1 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

de la ecuación (3.1.8) $(H(S)=T(S)^{-1}GT_d(S)^{-1})$

$$H(S) = \begin{bmatrix} \frac{S^2-3S-2}{S+1} & 0 \\ -1 & S-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_3 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \\ g_2 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_4 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

por simplicidad se selecciona.

$$P_{1d2}(S) = S+a$$

$$P_{1d1}(S) = 1$$

haciendo $g_1=1$

$$h_{11} = \frac{S^2-3S-2}{S+1} - (S+a) = \frac{-(4+a)S-(2+a)}{S+1}$$

haciendo $g_2=0$

$$h_{21} = -1$$

Para la segunda columna se seleccionan:

$$P_{2d2}(S) = S+b$$

$$P_{2d1}(S) = 1$$

haciendo $g_3=0$

$$h_{12} = 0$$

haciendo $g_4=1$

$$h_{22} = S - 1 - (S+b) = -1 - b$$

por lo tanto

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(4+a)S+(2+a)}{S+1} & 0 \\ -1 & -1-b \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

con la correspondiente

$$T_d(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S+b} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

propia y estable, en [32] encuentran una $T_d(S)$ con mas polos y ceros que además es inestable, esto se debe a la limitación que se imponen al permitir que la matriz H sea únicamente real.

Ejemplo 3.2.2 (ejemplo 1 [12]). Dada la planta

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S}{S^2-1} & \frac{1}{S^2-1} \\ 0 & \frac{1}{S} \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

encontrar las matrices $H(S)$, G y $T_d(S)$ que desacoplan al sistema.

$$T(S)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S^2-1}{S} & -1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$H(S) = \begin{bmatrix} \frac{S^2-1}{S} & -1 \\ 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_3 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \\ g_2 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_4 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

sea $P_{1d2}(S) = S+a$

$P_{1d1}(S) = 1$

$g_1 = 1$

entonces $h_{11} = \frac{S^2-1}{1} - (S+a) = -\frac{aS+1}{S}$

si se hace $g_2 = 0$, $h_{21} = 0$

sea $P_{2d2}(S) = S+b$

$P_{2d1}(S) = 1$

si se hace $g_3 = 0$, $h_{12} = -1$

si $g_4 = 1$, $h_{22} = S - (S+b) = -b$

por lo tanto

$$H(S) = \begin{bmatrix} -\frac{aS+1}{S} & -1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

y la correspondiente $T_d(s)$ propia y estable esta dada por:

$$T_d(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S+b} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

en la referencia citada se encuentra que:

$$T_d(S) = \begin{bmatrix} \frac{aS}{S^2-bS-1} & 0 \\ 0 & \frac{c}{S-d} \end{bmatrix} \quad \text{Con } a,b,c,d \text{ arbitrarias} \\ \text{y } a,c \neq 0 \quad (3.2.11)$$

Esta matriz tiene al menos un polo inestable, esto se debe a que se plantean el problema permitiendo que H no sea función de S (H es real).

Ejemplo 3.2.3.- (ejemplo 3, [12]). Dada la planta

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{S-3}{S^2-3S+2} & \frac{1}{S-2} \\ -\frac{1}{S^2-5S+6} & \frac{1}{S^2-5S+6} \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

encontrar las matrices $H(S)$, G y $T_d(S)$ (si existen)

$$T(S)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S-1}{2} & -\frac{S^2-4S+3}{2} \\ \frac{S-1}{2} & \frac{S^2-6S+9}{2} \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

$T(S)^{-1}$ no cumple la condición de suficiente (b) del teorema 3.1.1; sin embargo se tratará de determinar si es posible el desacoplamiento de la ecuación (3.1.8)

$$H(S) = \begin{bmatrix} \frac{S-1}{2} & -\frac{S^2-4S+3}{2} \\ \frac{S-1}{2} & \frac{S^2-6S+9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_3 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \\ g_2 \frac{P_{1d2}(S)}{P_{1d1}(S)} & g_4 \frac{P_{2d2}(S)}{P_{2d1}(S)} \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

Se observa que no hay ningún problema para que la primera columna de $H(s)$ pueda ser racional, propia y estable, desafortunadamente, no es posible decir lo mismo de la segunda columna ya que no existe ningún $P_{2d2}(S)$ (estable ó no) y $P_{2d1}(S)$ capaces de hacer que los elementos 12 y 22 de $H(S)$ sean al menos racionales propios. Esta afirmación coincide con la dada en el artículo de donde se tomó el ejemplo, aunque con argumentos diferentes, en el cual se dice que el sistema no puede ser desacoplado mediante retroalimentación de la salida.

CAPITULO 4.- Desacoplamiento de una clase más general de sistemas.

4.0.- Introducción. En este capítulo se presenta la solución al problema general del servomecanismo, del cual el desacoplamiento es un caso particular. En este esquema se considera que existen dos clases de entradas, la entrada de referencia U_r y la entrada de control U_c y dos clases de salidas, las salidas controlables Y_c y las salidas medibles Y_m . El problema general del servomecanismo puede plantearse de la siguiente forma: dado un sistema como el que se muestra en la figura 4.1.1 encontrar un controlador que estabilice la planta y una matriz de transferencia $T_d(S)$ que relacione a U_r con Y_c . Este problema fué planteado y resuelto en [15] y este capítulo sigue muy de cerca los resultados presentados en esa referencia. En particular la aportación, que se hace en este capítulo es la solución de la ecuación $L(Z)N_m(Z)+R(Z)D_m(Z)=1$, donde $N_m(Z)$ y $D_m(Z)$ son datos del problema y $L(Z)$ y $R(Z)$ son los factores coprimos que se buscan. Con la estructura que se logra al escribir la ecuación anterior como se expresa en (4.1.27) se consigue determinar los coeficientes de $L(Z)$ y $R(Z)$ mediante la solución de la matriz resultante de Sylvester. En la sección 4.1 se muestra el esquema general del sistema y algunos resultados preliminares a la solución del problema general del servomecanismo. En la 4.2 se presenta la factorización coprime que permite encontrar el controlador requerido mas adelante. En el inciso 4.3 se plantea el PGS para el caso multivariable y finalmente se da un ejemplo para el caso de una entrada y dos salidas en la sección 4.3.

4.1.- Esquema general del sistema.

En este capítulo se considera, a diferencia de los planteamientos presentados en capítulos anteriores, que existen dos conjuntos de salidas: $Y_c(S)$ salidas controlables y $Y_m(S)$ salidas medibles y en donde solo el vector de las $Y_m(S)$ es retroalimentado.

En la figura 4.1.1 se muestra el sistema en lazo cerrado.

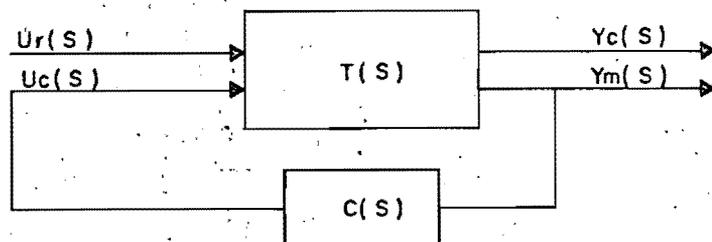


Fig. 4.1.1.

Sea la matriz de transferencia del sistema

$$T(S) = \begin{bmatrix} G(S) & H(S) \\ M(S) & N(S) \end{bmatrix} \quad (4.1.1a)$$

$$Y(S) = T(S) U(S) \quad (4.1.1b)$$

con

$$Y(S) = [Y_c(S)' \quad Y_m(S)']', \quad U(S) = [U_c(S)' \quad U_r(S)']' \quad (4.1.1c)$$

donde $U_r(S)$ es el vector de entradas de referencia y $U_c(S)$ el vector de entradas de control y $G(S)$, $H(S)$, $M(S)$ y $N(S)$ son matrices racionales propias que asocian el vector de entradas $U(S)$ con el vector de salidas $Y(S)$.

De la figura 4.1.1 y las ecuaciones 4.1.1 se tiene:

$$V_c(S) = C(S) Y_m(S) \quad (4.1.2)$$

$$Y_c(S) = G(S) C(S) Y_m(S) + H(S) U_r(S) \quad (4.1.3)$$

$$Y_m(S) = M(S) C(S) Y_m(S) + N(S) U_r(S) \quad (4.1.4)$$

factorizando la ec. 4.1.4.

$$[I - M(S) C(S)] Y_m(S) = N(S) U_r(S) \quad (4.1.5)$$

suponiendo que $[I - M(S) C(S)]$ es invertible se tiene

$$Y_m(S) = [I - M(S) C(S)]^{-1} N(S) U_r(S) \quad (4.1.6)$$

substituyendo ésta en (4.1.3) se obtiene

$$Y_c(S) = \left\{ G(S) C(S) [I - M(S) C(S)]^{-1} N(S) + H(S) \right\} U_r(S) \quad (4.1.7)$$

obteniéndose la salida controlable en función de los parámetros del sistema y de la entrada $U_r(S)$.

Con ayuda del diagrama mostrado en la figura 4.1.1 y la ecuación (4.1.7) se puede plantear el problema general del servomecanismo [15] de la siguiente forma:

Dadas las matrices $G(S)$, $H(S)$, $M(S)$, $N(S)$ y $T_d(S)$ donde $Y_c = T_d U_r$ en ciente un controlador racional propio $C(S)$ tal que:

a) el sistema en lazo cerrado sea estable y

$$b) G(S) C(S) [I - M(S) C(S)]^{-1} + N(S) H(S) = T_d(S) \quad (4.1.8)$$

Para el esquema de la figura 4.1.1, el problema del desacoplamiento puede verse como un caso particular del problema general del servomecanismo arriba planteado en donde se impone la restricción que $T_d(S)$ sea diagonal y no singular.

Para determinar si el sistema en lazo cerrado es estable se puede aplicar el siguiente teorema cuyo planteamiento y demostración se encuentra en la referencia [4].

Teorema 4.1.1.- Dadas las matrices racionales propias $\{G(S), H(S), M(S), N(S)\}$ definidas en la ec. (4.1.1) existe un controlador $C(S)$ definido por la ec. (4.1.2) tal que el sistema en lazo cerrado es estable si.

$$O+[M] = O+[T] \quad (4.1.9)$$

donde $O+$ representa el grado de Mc Millan de los componentes inestables

de la expansión en fracciones parciales. Para la demostración ver [4].

*

4.2.- Factorizaciones coprimas.

Antes de proceder a determinar las matrices $C(S)$ y $T_d(S)$ de la ec. (4.1.8), se dan algunas definiciones y resultados importantes que se requieren en el inciso 4.3.

Definición 4.2.1.- Dos matrices estables y propias $N_m(S)$, $D_m(S)$ son coprimas por la derecha si existen dos matrices estables y propias $L(S)$ y $R(S)$ tales que.

$$L(S) N_m(S) + R(S) D_m(S) = I \quad (4.2.1)$$

Definición 4.2.2.- Dos matrices estables y propias $\bar{N}_m(S)$, $\bar{D}_m(S)$ son coprimas por la izquierda, si existen dos matrices estables y propias $\bar{L}(S)$, $\bar{R}(S)$ tales que

$$\bar{N}_m(S) \bar{L}(S) + \bar{D}_m(S) \bar{R}(S) = I \quad (4.2.2)$$

Si $N_m(S)$ y $D_m(S)$ o $\bar{N}_m(S)$ y $\bar{D}_m(S)$ son funciones racionales en lugar de matrices, pierde sentido al hablar de relatividad prima por la izquierda o por la derecha y simplemente se dice que las dos funciones son coprimas o no. En la solución del problema del desacoplamiento, como se ve posteriormente, se requiere de la descomposición de la matriz $M(S)$ definida en la ec. (4.1.1) de la siguiente forma.

$$M(S) = N_m(S) D_m(S)^{-1} = \bar{D}_m(S)^{-1} \bar{N}_m(S). \quad (4.2.3)$$

En el caso particular en que $M(S)$ sea simplemente una función de transferencia, $N_m(S) = \bar{N}_m(S)$ y $D_m(S) = \bar{D}_m(S)$, donde $N_m(S)$ y $D_m(S)$ son funciones racionales propias y el denominador de $D_m(S)$ es un polinomio de Hurwitz de grado igual al de su numerador.

Ejemplo 4.2.1.- Dado una $M(S) = \frac{S(S-2)}{(S-4)(S+1)}$ descomponer $M(S)$ en la forma de la ecuación (4.2.3).

$$M(S) = \frac{S(S-2)}{(S+1)^2} \left[\begin{array}{c} S-4 \\ S+1 \end{array} \right]^{-1} \quad (4.2.4)$$

de donde

$$Nm(S) = \frac{S(S-2)}{(S+1)^2}, \quad Dm(S) = \frac{S-4}{S+1} \quad (4.2.5)$$

Para determinar los factores coprimos $L(S)$ y $R(S)$ definidos en la ec. (4.2.1) es conveniente aplicar una transformación que permita obtener la expresión de $L(S)$ y $R(S)$ ya no como un cociente de polinomios si no simplemente como dos polinomios en alguna variable; y la cual además puede garantizar que las $L(S)$ y $R(S)$ obtenidas sean funciones racionales propias y estables.

Una forma de determinar las funciones racionales propias $L(S)$ y $R(S)$ definidas en la ec. (4.1.10) es mediante la aplicación de la transformación bilineal.

$$Z = \frac{S-a}{S+a} \quad S = a \frac{1+Z}{1-Z} \quad (4.2.6)$$

donde a es el polo de $Dm(S)$. De esta forma se consigue transformar las funciones racionales en S a funciones polinomiales en Z y asegurar que al hacer la transformación inversa de Z a S las $L(S)$ y $R(S)$ sean funciones racionales estables. Esta transformación fué propuesta por Vidyasagar [26].

Ejemplo 4.2.2.- Dado $Nm(S)$ y $Dm(S)$ definidas por la ecuación (4.2.5) encontrar las funciones polinomiales $Nm(Z)$ y $Dm(Z)$ que satisfacen la ec. (4.2.6).

$$Nm(Z) = \frac{\frac{1+Z}{1-Z} \left(\frac{-1+3Z}{1-2} \right)}{\left(\frac{2}{1-Z} \right)^2} = \frac{1}{4} (3Z^2 + 2Z - 1) \quad (4.2.7)$$

$$Dm(Z) = \frac{\frac{-3+5Z}{1-2}}{\frac{2}{1-Z}} = \frac{1}{2} (5Z - 3) \quad (4.2.8)$$

Existen varios procedimientos para obtener los polinomios $L(Z)$ y $R(Z)$, uno de ellos es el de la división Euclídeana ver [2], [11], [26]. A continuación se desarrolla un procedimiento para encontrar estos polinomios en función de la matriz resultante de Sylvester para lo cual se procede a definir $L(Z)$, $R(Z)$, $N_m(Z)$ y $D_m(Z)$ en función de sus coeficientes de la siguiente forma:

$$L(Z) = L_0 + L_1 Z + L_2 Z^2 + \dots + L_1 Z^1 \quad (4.2.9)$$

$$N_n(Z) = N_0 + N_1 Z + N_2 Z^2 + \dots + N_n Z^n \quad (4.2.10)$$

$$R(Z) = R_0 + R_1 Z + R_2 Z^2 + \dots + R_r Z^r \quad (4.2.11)$$

$$D_M(Z) = D_0 + D_1 Z + D_2 Z^2 + \dots + D_d Z^d \quad (4.2.12)$$

con los grados de $L(Z)$ y $R(Z)$, l y r , como incógnitas. Por lo tanto

$$L(Z) N_m(Z) = N_0 L_0 + (N_0 L_1 + N_1 L_0) Z + (N_0 L_2 + N_1 L_1 + N_2 L_0) Z^2 + \dots + N_n L_1 Z^{n+1} \quad (4.2.13)$$

y

$$R(Z) D_M(Z) = D_0 R_0 + (D_0 R_1 + D_1 R_0) Z + (D_0 R_2 + D_1 R_1 + D_2 R_0) Z^2 + \dots + D_d R_r Z^{d+r} \quad (4.2.14)$$

(4.2.13) y (4.2.14) puede ser expresadas respectivamente por

$$L(Z) N_n(Z) = [1, Z, Z^2, \dots, Z^{1+n}] \begin{bmatrix} N_0 & 0 & \dots & 0 \\ N_1 & N_0 & & \vdots \\ N_2 & N_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & N_0 \\ \vdots & \vdots & & N_1 \\ N_n & N_{n-1} & & \vdots \\ 0 & N_n & & N_{n-1} \\ \vdots & 0 & & N_n \\ 0 & 0 & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.15)$$

$$R(Z)D_M(Z) = [1, Z, Z^2, \dots, Z^{r+d}] \begin{bmatrix} D_0 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 & D_0 & \dots & \vdots \\ D_2 & D_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & D_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & D_1 \\ D_d & D_{d-1} & \dots & D_2 \\ 0 & D_d & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & D_{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & D_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

Se observa que para que se cumpla la ecuación (4.2.1) se requiere que

$$l+n = r+d \quad (4.2.17)$$

Por lo que de (4.2.1), (4.2.15), (4.2.16) y (4.2.17) se tiene

$$L(Z)N_M(Z) + R(Z)D_M(Z) = [1, Z, Z^2, \dots, Z^{l+n}] \begin{bmatrix} N_0 & 0 & \dots & D_0 & 0 \\ N_1 & N_0 & \dots & D_1 & D_0 \\ N_2 & N_1 & \dots & D_2 & D_1 & D_0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & N_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & N_1 & \vdots & \vdots \\ N_n & N_{n-1} & \dots & \vdots & D_d & D_{d-1} & 0 \\ 0 & N_n & \dots & D_d & D_{d-1} & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & D_d & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_{n-1} & 0 & D_{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 & D_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_l \\ R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

la ecuación (4.2.18), determina una forma de encontrar los coeficientes de $L(Z)$ y $R(Z)$; sin embargo antes de poder utilizarla es necesario conocer los grados l y r . Para ello se hace uso del siguiente lema.

Lemma 4.2.1.- Dados dos polinomios coprimos $N_M(Z)$ y $D_M(Z)$ de grados $n \geq 1$ y $d \geq 1$ respectivamente, existen dos polinomios únicos $L(Z)$ y $R(Z)$ ta

les que:

$$L(Z) Nm(Z) + R(Z) Dm(Z) = 1 \tag{4.2.19}$$

con grados de $L(Z)$ y $R(Z)$ ($0 \leq [L(Z)]$, $0 \leq [R(Z)]$) $0 \leq [L(Z)] = l = d - 1$ y $0 \leq [R(Z)] = r = n - 1$ respectivamente.

Demostración.-

Si $Nm(Z)$ y $Dm(Z)$ son coprimos, la matriz de coeficientes de $Nm(Z)$ y $Dm(Z)$ definida en (4.1.18) conocida como resultante de Sylvester (\bar{S}) es cuadrada y no-singular, ver [11, pp 142], de donde

Número de renglones de \bar{S} = número de columnas de \bar{S} ,

$$\text{esto es, } l+n+1 = l+r+2 \tag{4.2.20}$$

por lo tanto

$$r = n - 1 \tag{4.2.21}$$

de (4.2.17) y (4.2.21)

$$l = d - 1 \tag{4.2.22}$$

Para que se cumpla (4.2.19) es suficiente (ver ecuación 4.1.27) con que

$$\bar{S} [L'_0, L'_1, \dots, L'_l, R'_0, R'_1, \dots, R'_r]^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \tag{4.2.23}$$

donde \bar{S} es la resultante de Sylvester.

Dado que la matriz S es no singular, se cumple que

$$r \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{S} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = r \cdot [\bar{S}] \tag{4.2.24}$$

es decir el rango de \tilde{S} es igual al rango de la matriz aumentada, y por lo tanto (ver teorema 3.6 [14]) la solución de 4.2.24 es única, lo que implica que $L(Z)$ y $R(Z)$ son únicos. *

Por lo tanto, una vez que se determinaron los grados de $L(Z)$ y $R(Z)$ con el lema anterior la solución de la ecuación (4.2.23) define completamente a los coeficientes de $L(Z)$ y $R(Z)$.

Ejemplo 4.2.3. Encuentre $L(Z)$ y $R(Z)$ dados $N_m(Z)$ y $D_m(Z)$ definidos en el ejemplo 4.2.2.

$$O[N_m(Z)] = 2 \quad ; \quad O[D_m(Z)] = d = 1$$

del lema 4.1.1, $l = 0$, $r = 1$

Por lo que (4.2.23) puede ser expresada como

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ R_0 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

resolviendo (4.2.25)

$$L_0 = \frac{25}{8}, \quad R_0 = \frac{-19}{16}, \quad R_1 = \frac{-15}{16} \quad (4.2.26)$$

Por lo tanto

$$L(Z) = \frac{25}{8}, \quad R(Z) = \frac{-1}{16} (15Z + 19) \quad (4.2.27)$$

finalmente de (4.2.6)

$$L(S) = \frac{25}{8}, \quad R(S) = \frac{-1}{16} \left(\frac{34S + 4}{S + 1} \right) \quad (4.2.28)$$

Una vez que se ha mostrado como determinar si el sistema de la Figura

4.1.1 es estabilizable y como resolver la ecuación (4.2.10), el siguiente paso para resolver el problema del desacoplamiento es la determinación de la $T_d(S)$ admisible y el controlador $C(S)$ correspondiente, este es el objetivo de la siguiente sección.

4.3.- Determinación de la clase de $T_d(S)$ admisible y controladores correspondientes $C(S)$.

La determinación del controlador que estabiliza el sistema definido por la ecuación (4.1.1) está dada por el siguiente lemma cuyo planteamiento y demostración se encuentra en las referencias [15] y [27].

Lemma 4.3.1.- Dadas las matrices, racionales, propias y estables $\bar{N}_m(S)$, $\bar{D}_m(S)$, $N_m(S)$, $D_m(S)$, $L(S)$, $R(S)$, $\bar{L}(S)$, $\bar{R}(S)$ que satisfacen las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2), el controlador $C(S)$ estabiliza al sistema de la figura 4.1.1 si

$$C(S) = - [\bar{L}(S) + D_m(S) S(S)] [\bar{R}(S) - N_m(S) S(S)]^{-1} \quad (4.3.1)$$

para alguna matriz racional propia y estable $S(S)$.

*

A continuación se enuncia un teorema que permite encontrar el conjunto de $T_d(S)$ admisibles.

Teorema 4.3.1. [15]. El problema general del servomecanismo tiene solución si se cumple (4.3.1) y existe una solución propia y estable $S(S)$ que satisfaga.

$$\bar{G}(S) S(S) \bar{N}(S) = \bar{H}(S) - T_d(S) \quad (4.3.2)$$

donde

$$\bar{G}(S) = G(S) D_m(S) \quad (4.3.3)$$

$$\bar{N}(S) = \bar{D}_m(S) N(S) \quad (4.3.4)$$

$$\bar{H}(S) = H(S) - G(S) \bar{L}(S) \bar{D}_m(S) N(S) \quad (4.3.5)$$

la demostración aparece en la referencia indicada arriba.

*

La $S(S)$ que satisface (4.3.2) puede ser encontrada de acuerdo a lo establecido en el artículo Kung, S. y T. Kailath. Some notes on Evaluation theory in linear Systems. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1979, San Diego CA. y [11] según se reporta en [15]. Siguiendo estas referencias se tiene que la ecuación (4.3.2) tiene una solución para $S(S)$ sin polos en $\alpha \in \mathbb{C}_+$ (campo de los números complejos con parte real no negativa).

si

$$V_{\alpha}^r \begin{bmatrix} \overline{G(S)} \ominus \overline{N(S)} \\ \overline{H(S)} - Hd(S) \end{bmatrix} = V_{\alpha}^r \begin{bmatrix} \overline{G(S)} \ominus \overline{N(S)} \\ \overline{H(S)} - Hd(S) \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

donde V_{α}^r y \ominus se definen como sigue:

se dice que la Valuación $V_{\alpha}(g)$ de una función racional $g(S)$ en α que pertenece al plano complejo extendido es K si

$$g(S) = \frac{(S-\alpha)^k p(S)}{q(S)} \quad (4.3.7)$$

con $P(s)$ y $q(s)$ coprimos y no divisibles por $(S-\alpha)$.



$V_{\infty}(g) = \text{grado del denominador de } g - \text{grado del numerador de } g$

y

$V_{\alpha}(0) = \infty$

para el caso de matrices racionales $V_{\alpha}^i[Q(S)]$ se denomina la i -ésima valuación de $Q(S)$ en α y se define como

$$V_{\alpha}^i[Q(S)] = \min_j V_{\alpha}^i[|H_j^i(S)|] \quad (4.3.8)$$

donde $|H_j^i(S)|$ denota un menor i de $H(S)$ para cada j .

Por lo cual, para que $S(S)$ sea estable, se requiere que α tome cada

uno de los valores de los polos y ceros que la ecuación (4.3.6) tenga en el semiplano complejo derecho cerrado y extendido.

Por último \otimes representa el producto Kronecker definido por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}^B & a_{12}^B & \dots & a_{1n}^B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}^B & a_{m2}^B & \dots & a_{mn}^B \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

$$\text{Para } A = [a_{ij}] \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3.10)$$

$$\text{y } B = [b_{ij}] \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, q$$

En la siguiente sección se da un ejemplo de aplicación de esta teoría.

4.4.- Ejemplo de determinación de $T_d(S)$ admisibles y controladores $C(S)$ respectivos.

Ejemplo 4.3.1.- Dado el esquema de la figura 4.4.1 encuentre la clase de $T_d(S)$ y controlador $C(S)$ admisibles

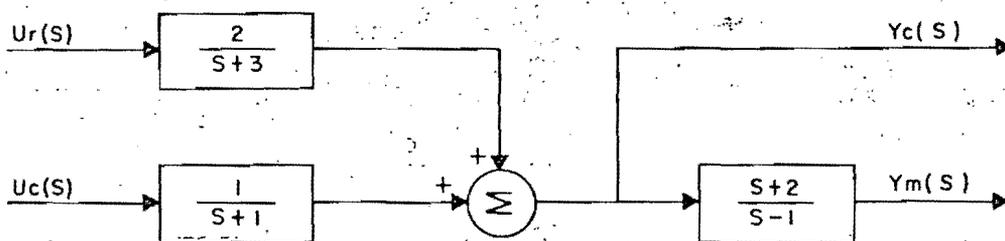


Fig. 4.4.1

de la ecuación (4.1.1)

$$\begin{bmatrix} Y_c(S) \\ Y_m(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+3} \\ \frac{S+2}{(S+1)(S-1)} & \frac{2(S+2)}{(S+3)(S-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c(S) \\ U_r(S) \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$M(S) = \frac{S+2}{(S+1)(S-1)} = \frac{3}{2(S-1)} - \frac{1}{2(S+1)} \quad (4.4.2)$$

$$T(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{S+1} & \frac{2}{S+3} \\ -\frac{1}{2(S+1)} & \frac{1}{2(S+3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{2(S-1)} & \frac{3}{2(S-1)} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$0^+ [M(S)] = 0 \quad [2(S+1)] = 1 \quad (4.4.4)$$

$$0^+ [T(S)] = 0 \quad [2(S+1)] = 1 \quad (4.4.5)$$

como $0^+ [M(S)] = 0^+ [T(S)]$, por el teorema 4.1.1, existe el controlador $C(S)$ tal que el sistema en lazo cerrado es estable.

De la ecuación (4.2.3)

$$M(S) = \frac{S+2}{(S+1)(S-1)} = \frac{S+2}{(S+1)^2} \begin{bmatrix} S-1 \\ S+1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.4.6)$$

de donde

$$N_m(S) = \bar{N}_m(S) = \frac{S+2}{(S+1)^2} \quad (4.4.7)$$

$$D_m(S) = \bar{D}_m(S) = \frac{S-1}{S+1} \quad (4.4.8)$$

para obtener $L(S) = \bar{L}(S)$, $R(S) = \bar{R}(S)$ definidos en la ec. (4.2.1) y (4.2.2) se utiliza la ec. (4.2.6) con $a = 1$, obteniéndose.

$$N_m(Z) = 1/4 (Z^2 - 4Z + 3) \quad (4.4.9)$$

$$D_m(Z) = Z \quad (4.4.10)$$

$$0 [N_m(Z)] = n = 2 \quad (4.4.11)$$

$$0 [D_m(Z)] = d = 1 \quad (4.4.12)$$

aplicando el lema 4.2.1., se obtienen los grados de $L(Z)$ y $R(Z)$

$$0 [L(Z)] = 1 = d - 1 = 0 \quad (4.4.13)$$

$$0 [R(Z)] = r = 2 - 1 = 1 \quad (4.4.14)$$

de las ecuaciones (4.2.18) y (4.2.23) se obtienen los coeficientes de $L(Z)$ y $R(Z)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 \\ R_0 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.15)$$

de donde

$$L_0 = R_0 = \frac{4}{3} \quad (4.4.16)$$

$$R = -\frac{1}{3} \quad (4.4.17)$$

por lo tanto

$$L(Z) = \frac{4}{3} \quad (4.4.18)$$

$$R(Z) = -\frac{1}{3} (Z-4) \quad (4.4.19)$$

transformando $L(Z)$ a $L(S)$ y $R(Z)$ a $R(S)$ con la ec. (4.2.6)

$$L(S) = \bar{L}(S) = \frac{4}{3} \quad (4.4.20)$$

$$R(S) = \bar{R}(S) = \frac{S+5/3}{S+1} \quad (4.4.21)$$

de las ecuaciones (4.3.3), (4.3.4) y (4.3.5)

$$\bar{G}(S) = \frac{S-1}{(S+1)^2} \quad (4.4.22)$$

$$\bar{N}(S) = \frac{2(S+2)}{(S+1)(S+3)} \quad (4.4.23)$$

$$\bar{H}(S) = \frac{6(S+1)^2 - 8(S+2)}{3(S+1)^2(S+3)} \quad (4.4.24)$$

$$[\bar{G}(S) \ominus \bar{N}(S)] = \frac{2(S-1)(S+2)}{(S+1)^3(S+3)} \quad (4.4.25)$$

de la ecuación (4.3.6)

$$v_{\infty}' [\bar{G}(S) \ominus \bar{N}(S)] = 2 \quad (4.4.26)$$

$$v_1' [\bar{G}(S) \ominus \bar{N}(S)] = 1 \quad (4.4.27)$$

por lo que se requiere que para que $S(S)$ no tenga polos en infinito y en 1,

$$v_{\infty}' [\bar{H}(S) - Td(S)] \geq 2 \quad (4.4.28)$$

y

$$v_1' [\bar{H}(S) - Td(S)] \geq 1 \quad (4.4.29)$$

sea

$$Td(S) = \frac{n(S)}{d(S)}, \quad 0[n(S)] \leq 0[d(S)] \quad (4.4.30)$$

entonces

$$\bar{H}(S) - Td(S) = \frac{6(S+1)^2 - 8(S+2)}{3(S+1)^2(S+3)} - \frac{n(S)}{d(S)} \quad (4.4.31)$$

$$\bar{H}(S) - Td(S) = \frac{3(S+1)^2 [2d(S) - (S+3)n(S)] - 8(S+2)d(S)}{3(S+1)^2(S+3)d(S)} = \frac{\bar{n}(S)}{\bar{d}(S)} \quad (4.4.32)$$

aplicando la ec. (4.4.28) a (4.4.32) se tiene que

$$0[\bar{d}(S)] - 0[\bar{n}(S)] \geq 2 \quad (4.4.33)$$

o equivalentemente

$$3 + 0[d(S)] - \{2 + 0[2d(S) - (S+3)n(S)]\} \geq 2 \quad (4.4.34)$$

$$O[d(S)] - O[2d(S) - (S+3)n(S)] \geq 1 \quad (4.4.35)$$

esto implica que si

$$O[d(S)] = q, \quad O[n(S)] = q - 1 \quad (4.4.36)$$

y si

$$d(S) = d_0 + d_1 S + \dots + d_q S^q \quad (4.4.37)$$

$$n(S) = n_0 + n_1 S + \dots + n_{q-1} S^{q-1} \quad (4.4.38)$$

$$2d_q = n_{q-1} \quad (4.4.39)$$

la aplicación de (4.4.29) a (4.4.32) lleva a

$$\bar{n}(1) = 0 \quad (4.4.40)$$

el conjunto de ecuaciones (4.4.32) y de (4.4.36) a (4.4.40) inclusive, junto con la restricción obvia de que $d(S)$ sea un polinomio estable definen a $T_d(S)$.

Considerando a $d(S) = S+a$, $n(S)$ debe ser (4.4.39) igual a 2, substituyendo estos valores en (4.4.32) se puede comprobar que no es posible cumplir la restricción impuesta por (4.4.40) para cualquier valor de a . Ahora se considera que

$$d(S) = (S+a)(S+b), \quad a, b > 0 \quad (4.4.41)$$

por lo que

$$n(S) = 2(S+f) \quad (4.4.42)$$

substituyendo $n(S)$ y $d(S)$ en (4.4.32) se observa que $\bar{n}(1)=0$ se cumple para cualquier valor de a y b y f tiene un solo valor, $f=-1$, por lo que la clase de $T_d(S)$, en su forma general, esta definida por

$$T_d(S) = \left\{ \frac{2(S-1)}{(S+a)(S+b)} : a, b > 0 \right\} \quad (4.4.43)$$

para fines de cálculo de $C(S)$ se considera

$a = 4$; $b = 5$, esto es

$$T_d(S) = \frac{2(S-1)}{(S+1)(S+5)} \quad (4.4.44)$$

por lo tanto

$$\bar{H}(S) = T_d(S) = \frac{34S^3 + 134S^2 + 14S - 182}{3(S+1)^2 (S+3) (S+4) (S+5)} \quad (4.4.45)$$

$$\bar{H}(S) - T_d(S) = \frac{(S-1)(34S^2 + 168S + 182)}{3(S+1)^2 (S+3) (S+4) (S+5)} \quad (4.4.46)$$

de la ec. (4.3.2)

$$S(S) = \frac{(S+1)^3 (S+3) (S-1) (34S^2 + 168S + 182)}{2(S-1) (S+2) 3(S+1)^2 (S+3) (S+4) (S+5)} \quad (4.4.47)$$

$$S(S) = \frac{(S+1)(17S^2 + 84S + 91)}{3(S+2)(S+4)(S+5)} \quad (4.4.48)$$

substituyendo (4.4.48) en (4.3.1) se obtiene

$$C(S) = - \frac{(S+1)(7S+23)}{(S+2)(S+3)} \quad (4.4.49)$$

Nota.- Toda la teoría vista en este capítulo es válida únicamente para el caso en que $M(S)$ sea estrictamente propia, en caso contrario es necesario descomponer primero $M(S)$ como

$$M(S) = M_1(S) + D_m(S) \quad (4.4.50)$$

donde $D_m(S) = \lim_{S \rightarrow \infty} M(S)$

y resolver el problema para $M_1(S)$ obteniendo un controlador $C_1(S)$; con base

en este $C_1(S)$ se puede determinar $C(S)$ utilizando la siguiente relación:

$$C(S) = [I - C_1(S) D_m(S)]^{-1} C_1(S) \quad (4.4.51)$$

la cual fue obtenida por [15].

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha considerado el problema del desacoplamiento dinámico de sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Se han analizado tres esquemas mediante los cuales se puede desacoplar un sistema de este tipo, los cuales son:

- 1) Retroalimentación de los estados mediante un observador de orden mínimo.
- 2) Retroalimentación de la salida.
- 3) Retroalimentación parcial de la salida.

La aplicabilidad de cada uno de estos esquemas de desacoplamiento depende de la estructura específica del sistema.

La determinación de los controladores de orden mínimo, propios y estables necesarios para el desacoplamiento mediante los esquemas 1) y 2), se basa en un algoritmo para encontrar una base de un espacio nulo derecho. Dicho algoritmo está basado principalmente en los resultados presentados por Kung y Kailath en [13]; sin embargo, ni en [13] ni en este trabajo se presenta un procedimiento sistemático específico para ser implementado en computadora. Como trabajo posterior se propone esta implementación, Birkhoff, MacLane y Chen en, las referencias [5, pp 183-187] y [7, pp 546-551] presentan un procedimiento adecuado para este fin.

La obtención de la clase de matrices de transferencia desacopladas $T_d(S)$ para el esquema 1) está basada en la observación clave de que, dado que cualquier sistema factible de ser desacoplado tiene inversa derecha $T_R(S)$ (ver capítulo 1) y éste puede descomponerse en el producto $T_c(S)T_d(S)^{-1}$ donde $T_c(S)$ representa la matriz del controlador en lazo abierto y $T_d(S)$ la del sistema desacoplado con ambas matrices propias y estables. Una vez obtenida la clase de $T_d(S)$ admisible, se puede obtener el controlador $T_c(S)$ de orden mínimo a partir de la descomposición de éste como $T_c(S)=N(S)D(S)^{-1}$, efectuando operaciones se obtiene que $[T_d(S) \quad -T(S)][D(S) \quad N(S)'] = 0$: esta ecuación se puede resolver con el algoritmo mencionado anteriormente.

Con respecto al esquema 2), se dan condiciones suficientes para la obtención de la clase de $T_d(S)$ admisible y el controlador $H(S)$ correspondiente, los cuales están relacionados a través de la ecuación $H(S) \cdot T(S)^{-1} = G T_d(S)^{-1}$ donde G es una matriz constante e invertible. A diferencia de otros trabajos presentados hasta ahora Bayoumi y Duffield, Kim y Shapiro y Wolovich muestran como determinar la clase de $T_d(S)$ y la $H(S)$ correspondiente ambas estables y propias (para el caso en que $T(S)^{-1}$ no tenga polos inestables) aun si $T(S)$ es propia (no estrictamente propia). En los artículos mencionados no se garantiza que $T_d(S)$ y $H(S)$ resulten estables y requieren que $T(S)$ sea estrictamente propia.

Con relación al esquema 3), denominado problema general del servomecanismo PGS (por Ohm, Horza y Bhattacharyya, se presenta un algoritmo para resolver la identidad $L(Z)N_m(Z) + R(Z)D_m(Z) = 1$, en donde la solución resulta ser función de una matriz conocida como resultante de Sylvester. Este algoritmo permite encontrar los polinomios $L(Z)$ y $R(Z)$ mediante alguno de los métodos conocidos para resolver ecuaciones algebraicas simultaneas, por ejemplo el de eliminación Gaussiana. Como alternativa para la solución de esta identidad se tiene el algoritmo de la división Euclidiana tratado por Barnett, Kailath y Vidyasagar. Se presenta también la solución al problema del desacoplamiento, basado en los resultados que aparecen en el artículo publicado por Ohm, Howze y Bhattacharyya, para el caso de una entrada y dos salidas. Como investigación futura se propone la generalización de la solución de la identidad mencionada arriba para el caso en que los elementos de ella sean matrices polinomiales en la variable Z . La solución de esta ecuación permitirá resolver sistemas de mas de dos entradas y salidas. A diferencia de los esquemas 1) y 2), para el PGS, en el cual se tiene una retroalimentación parcial de la salida, no se puede garantizar que el controlador $C(S)$ requerido para desacoplar el sistema sea estable, aun en el caso escalar. Vidyasagar demuestra en [26] que el controlador $C(S)$ es estable si la matriz de transferencia de la planta tiene un número par de polos inestables entre cada par de ceros que también lo sean. La clase de $T_d(S)$ se obtiene con base a las restricciones que se imponen al controlador para conseguir que éste sea realizable y la matriz desacoplada sea, adicionalmente, estable.

Dado que al agregarse el controlador $T_c(S)$ a la planta $T(S)$ se efec.

túan cancelaciones entre polos y ceros para conseguir que el sistema desacoplado $T_d(S)$ sea estable, es necesario conocer con exactitud la planta, de lo contrario el desacoplamiento completo no podrá ser realizado. Esta limitación, junto con la invertibilidad por la derecha de la planta, debe ser considerada antes de plantearse el problema del desacoplamiento dinámico.

El desarrollo de este trabajo ha sido completamente teórico por lo que es conveniente, para conocer los alcances y limitaciones reales de las soluciones propuestas, emplearlo en problemas prácticos ya que en estos casos "Experimentum solum certifiat".

A P E N D I C E

a) Simbología utilizada

$F[S]$	Anillo de las funciones polinomiales en S .
$F(S)$	Campo de las funciones racionales en S .
$O[P(S)]$	Grado mayor del conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a la matriz $P(S)$.
V_i de $P(S)$	Grado máximo de los elementos de la columna i de $P(S)$.
U_i de $P(S)$	Grado Máximo de los elementos del renglón i de $P(S)$
V	Suma de todos los V_i de $P(S)$
V_e	Espacio vectorial
V^T	Espacio dual de V_e
$[P(S)]_r$	Matriz de coeficientes de términos de mayor grado de cada renglón de $P(S)$.
$[P(S)]_c$	Matriz de coeficientes de términos de mayor grado de cada columna de $P(S)$.
$r[T(S)]$	Rango de la matriz $T(S)$
$r[T(S)]_r$	Rango de $[T(S)]_r$
$r[T(S)]_c$	Rango de $[T(S)]_c$
$T(S)'$	Transpuesta de $T(S)$
$T(S)^{-1}$	Inversa de $T(S)$
\otimes	Producto Kronecker
*	Fin de demostración

b) Invertibilidad de Matrices.

Teorema A.b.1. - Un sistema con matriz de transferencia $T(S)(p \times m) \in F(S)$ es invertible por la derecha si y solo si $r[T(S)] = p$.

Demostración:

Necesidad.

Por el teorema de Smith-McMillan (ver [6], [11]) existen matrices unimodulares (matrices polinomiales cuyo determinante y el de su inversa son constante diferentes de cero) $U_1(S)$, $U_2(S)$, $V_1(S)$, $V_2(S)$ tales que

$$T(S) = U_1(S)TD(S)V_1(S) \quad (\text{A.b.1})$$

$$R(S) = U_2(S)RD(S)V_2(S) \quad (\text{A.b.2})$$

con $TD(S)$ y $RD(S)$ matrices diagonales del mismo rango que $T(S)$ y $R(S)$ respectivamente, con $R(S)$ inversa derecha de $T(S)$.

De las ecuaciones (A.b.1) y (A.b.2)

$$T(S)R(S) = U_1(S)TD(S)V_1(S)U_2(S)RD(S)V_2(S) \quad (\text{A.b.3})$$

sea
$$RE(S) := V_1(S)U_2(S)RD(S) \quad (\text{A.b.4})$$

con $RE(S)$ de dimensiones $(m \times p)$.

entonces

$$T(S)R(S) = U_1(S)TD(S)RE(S)V_2(S) \quad (\text{A.b.5})$$

si se asume que $r[T(S)] = 1 < p$ (A.b.6)

se tiene que $r[TD(S)RE(S)] \leq 1$ (A.b.7)

(por la desigualdad de Sylvester).

dado que $U_1(S)$ y $V_2(S)$ son matrices unimodulares. Por otra parte como $R(S)$ es la inversa derecha de $T(S)$, de (A.b.5).

$$U_1(S)TD(S)RE(S)V_2(S) = I_p \quad (\text{A.b.8})$$

por lo que

$$r[TD(S)RE(S)] = r[I_p] = p \quad (\text{A.b.9})$$

esto es una contradicción por lo que

$$r[T(S)] = p$$

suficiencia

$$\text{si } r[T(S)] = p, \quad p \leq m \quad (\text{A.b.10})$$

por el teorema de Smith-McMillan existen matrices unimodulares $U(S)$ y $V(S)$ tales que

$$T(S) = U(S)TD(S)V(S) \quad (\text{A.b.11})$$

con $TD(S)$ una matriz diagonal de rango p mas $(m-p)$ columnas de ceros, sea

$$TD(S) := \begin{bmatrix} \text{TFR}(S) & 0 \\ p & m-p \end{bmatrix} \quad (\text{A.b.12})$$

y

$$TD(S)^{-1} = \begin{bmatrix} \text{TFR}(S)^{-1} & 0 \\ p & m-p \end{bmatrix} \quad (\text{A.b.13})$$

entonces

$$R(S) = V(S)^{-1} TD(S)^{-1} U(S)^{-1} \quad (\text{A.b.14})$$

dado que

$$T(S)R(S) = U(S)TD(S)V(S) [V(S)^{-1}TD(S)^{-1}U(S)^{-1}] = I_p \quad (\text{A.b.15})$$

*

Lemma A.b.1.- Cualquier matriz polinomial escalón $P(S)$ es invertible y su determinante esta definido por:

$$\det P(S) = [P(S)]_c \begin{bmatrix} s^{v1} \\ s^{v2} \\ \vdots \\ s^{vm} \end{bmatrix} + \text{términos de orden menor o igual a } S^{n-1}$$

$\det P(S) = [P(S)]_c S^n + \text{términos de orden menor o igual a } S^{n-1}$

$$n = \sum_{i=1}^m v_i \quad (\text{A.b.16})$$

Demostración:

Solución propuesta en (p 21, [31]).

Por inducción, para $n=0$

$$\det P(S) = [P(S)]_c \quad (\text{A.b.17})$$

de la definición (0.2.2) (i) $P(S)$ es reducida por columnas, de la definición (0.2.1) $r[P(S)]_c = m$

$$\text{por lo tanto} \quad \det P(S) = P(S)_c \neq 0 \quad (\text{A.b.18})$$

se asume que la expresión (A.b.16) es válida y ahora, para $n+1$

$$\det P(S) = P(S)_c \begin{bmatrix} S^{v_1^*} & & & \\ & S^{v_2^*} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{v_m^*} \end{bmatrix} \quad (\text{A.b.19})$$

+ términos de orden menor o igual a S^n .

como $v_i^* = v_i$ a excepción de algún j tal que $v_j^* = 1 + v_j$

$$\begin{bmatrix} S^{v_1^*} & & & \\ & S^{v_2^*} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{v_m^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{v_1} & & & \\ & S^{v_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S^{v_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.b.20})$$

de (A.b.16), (A.b.10) y (A.b.20)

$$\det P(S) = [P(S)]_c S^{n+1} + \text{términos de orden menor o igual a } S^n \quad (\text{A.b.21})$$

que es igual a substituir a n por $n+1$ en la expresión (A.b.16),
por lo tanto la afirmación es cierta.

*

REFERENCIA BIBLIOGRAFICAS

- [1] Andreev, Y.N. Algebraic Methods of State Space in Linear Object Control Theory. Traducción de *Automatika i Telemekhanika*, No. 3, pp. 3-50, Marzo 1977. UDC-62-501.12.
- [2] Barnett, A. *Polynomials and Linear Control Systems*. Marcel Dekker, 1983.
- [3] Bayoumi, M.M. y T.L. Duffield, Output Feedback Decoupling and Pole Placement in Linear Time -Invariant Systems- *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 1, Febrero 1977, pp. 142-143.
- [4] Bhattacharyya, S.P. y J.W. Howze, Transfer Function Conditions for Stabilizability, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 3, Marzo 1984, pp. 253-254.
- [5] Birkhoff, G.S., MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, MacMillan Publishing Co. 1977.
- [6] Callier, F.M. y C.A. Desoer, *Multivariable Feedback Systems*. Springer-Verlag, 1982.
- [7] Chen, C.T. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [8] Desoer, C.A., Ruey -Wen Liu, John Murray y Richard Seeks. Feedback System Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-25, No. 3, Junio 1980, pp. 399-412.
- [9] Forney, G.D. Minimal Bases of Rational Vector Spaces, with Applications to Multivariable Linear Systems, *SIAM Journal of Control*, Vol. 13, No. 3, Mayo 1975, pp. 493-520.
- [10] Howze, J.W. Necessary and Sufficient Conditions for Decoupling Using Output Feedback, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-18, No. 1, Febrero 1973, pp. 44-46.

- [11] Kailath, T. Linear Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [12] Kim, H.Y. y E.V. Shapiro. On Output Feedback Decoupling, IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-26, No. 3, Junio 1981, pp. 782-784.
- [13] Kung, S. y T. Kailath, Fast Projection Methods for Minimal Design Problems in Linear System Theory. Automática, Vol. 16, Julio 1980, pp. 339-403.
- [14] Noble, G. y L.W. Daniels. Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs. New Jersey, 1977.
- [15] Ohm, D.Y., J.W. Howze y S.P. Bhattacharyya. Structural Synthesis of Multivariable Controllers. Automática, Vol. 21, Enero 1985, pp. 35-55.
- [16] Patel, R.V. y Neil Munro. Multivariable System Theory and Design. Pergamon Press 1982.
- [17] Pernebo, L. An Algebraic Theory for Use Design of Controllers for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-26, No. 1, Febrero 1981, pp. 171-193.
- [18] Rosenbrock, H.H. Bounds for Transfer Functions in Multivariable Systems, IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-18, No. 1, Febrero 1973, pp. 54-56.
- [19] Saeks, R. y J. Murray. Feedback System Design: The Tracking and Disturbance Rejection Problems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-26, No. 1, Febrero 1981, pp. 203-217.
- [20] Scott, R.W. y G.D.O. Anderson. Least Order, Stable Solution of the Exact Model Matching Problem. Automatica, Vol. 14, 1976, pp. 481-492.
- [21] Van Der Waerden. Algebra. Frederick Publishing. Co. 1970.
- [22] Vardulakis, A.I.G. y N. Karcanias. Classification of Proper Bases of Rational Vector Spaces: Minimal MacMillan Degree Bases. Int. J. Control, Vol. 38, No. 4, 1983, pp. 779-809.

- [23] Vardulakis, A.I.G. y N. Karcanias. Structure, Smith McMillan Form and Coprime MFD's of a Rational Matrix Inside a Region $R=\Omega U\{\infty\}$, Int. J. Control. Vol. 38, No. 5, 1983, pp. 927-957.
- [24] Vardulakis, A.I.G. y N. Karcanias. On The Stable Exact Model Matching and Stable Minimal Design Problems Capítulo 13. Multivariable Control New Concepts and Tools. Editado por Spyros G. Tzepestas. D. Redil Publishing Co., 1984.
- [25] Vidyasagar, M. On the Use of Right-coprime Factorization in Distributed Feedback Systems Containing Unstable Subsystems. IEEE Trans. on Circuits and Systems. Vol. CAS-25 No. 11, Noviembre 1978, pp. 916-921.
- [26] Vidyasagar, M. Control Systems Synthesis: a Factorization Approach. The MIT Press. 1985.
- [27] Vidyasagar, M. y N. Viswanadham, Algebraic Design Techniques for Reliable Stabilization. IEEE Trans. On Automatic Control. Vol. AC-27, No. 5, Octubre 1982, pp. 1085-1095.
- [28] Wang, S.H. y E. Davison. A Minimization Algorithm for the Design of Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-18, No. 3, Junio 1973, pp. 221-225.
- [29] Wang, Q.G. y C. H. Zhou. An Efficient Division Algorithm for Polynomial Matrices. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-31, No. 2, Febrero 1986, pp. 165-166.
- [30] Wolovich, W.A. On the Synthesis of Multivariable Systems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-18, No. 1, Febrero 1973, pp. 47-50.
- [31] Wolovich, W.A. Linear Multivariable Systems. Vol. II, Applied Mathematical Sciences, New York, Springer Verlag, 1974.
- [32] Wolovich, W.A. Output Feedback Decoupling. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-20, No. 1, Febrero 1975, pp. 148-149.

- [33] Wolovich, W.A., P. Antsaklis y H. Elliott. On The Stability of Solutions To Minimal and Nominimal Design Problems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-22, No. 1, Febrero 1977, pp. 88-94.
- [34] Wolovich, W.A. y P.L. Falb. Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Compensation. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 14, No. 6, Noviembre 1976, pp. 996-1008.
- [35] Youla, D.C., J.J. Bongiorno y H.A. Jabr. Modern Wiener-Hoop Design Optimal Controllers. IEEE Trans on Automatic Control, Vol. AC-21, No. 1, Febrero 1976, pp. 3-13.
- [36] Zhang, S.H. The Division of Polynomial Matrices, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 1, Enero 1986, pp. 55-56.