

SIMULACION NUMERICA DEL FLUJO EN ACUIFEROS
SEMICONFINADOS CON CARGA Y DESCARGA

CARLOS CRUICKSHANK VILLANUEVA

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., noviembre 1984



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



DEPFI

T. UNAM

1 9 8 4

CRU

Ej. 2

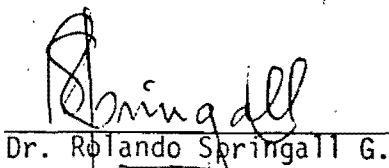
SIMULACION NUMERICA DEL FLUJO EN ACUIFEROS SEMICONFINADOS
CON CARGA Y DESCARGA

ASESOR



Dr. Ismael Herrera R.

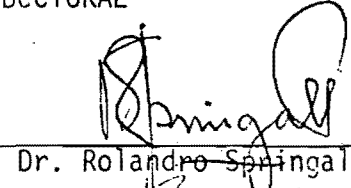
Jefe de la DEPMI



Dr. Rolando Springall G.

APROBADA POR
EL COMITE DOCTORAL

Presidente



Dr. Rolando Springall G.

Vocal




Dr. Ismael Herrera R.

Vocal



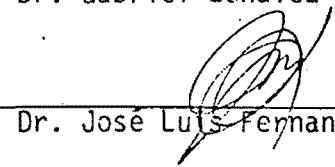
Dr. Enzo Levi L.

Vocal



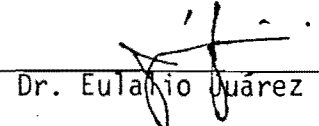
Dr. Gabriel Echavez A.

Secretario



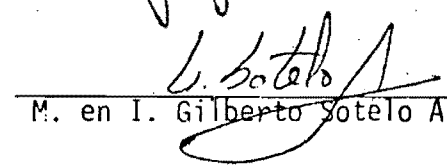
Dr. José Luis Fernández Z.

Suplente



Dr. Eulacio Juárez B.

Suplente



M. en I. Gilberto Sotelo A.

I N D I C E

RECONOCIMIENTO

	PAG
1. ANTECEDENTES Y RESUMEN	1
2. HIPOTESIS BASICAS Y SOLUCION	6
2.1 <i>Método integrodiferencial contra discretización vertical</i>	6
2.2 <i>Comportamiento de materiales arcillosos</i>	11
2.3 <i>Soluciones a la ecuación de flujo vertical con carga y descarga</i>	17
2.4 <i>Tesis para una solución aproximada</i>	21
2.5 <i>Obtención del método aproximado</i>	23
2.5.1 <i>Evaluación numérica</i>	23
2.5.2 <i>Pruebas numéricas</i>	27
2.5.3 <i>Aplicación a diferentes historias de carga y a una medición de campo</i>	33
3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	36
REFERENCIAS	40
Lista de símbolos de las variables	43

RECONOCIMIENTO

Agradezco en primer lugar el apoyo moral y económico que me brindó el Instituto de Ingeniería de la UNAM para la realización de este trabajo; este viene a ser la primera aportación al estudio de acuíferos semiconfinados después de cinco años de aplicar en el Instituto el método integrodiferencial del Dr. Ismael Herrera a la simulación del acuífero del Valle de México en colaboración con el Departamento del Distrito Federal, aportación surgida como respuesta a la inquietud de mejorar un aspecto de la modelación de este tipo de acuíferos.

Agradezco también los comentarios y las correcciones a mi trabajo de los miembros de mi comité doctoral que contribuyeron a mejorar su calidad en contenido y presentación.

1. ANTECEDENTES Y RESUMEN

En la simulación de acuíferos en contacto con acuitardos se aplica la teoría y el método numérico desarrollados por un grupo de investigadores bajo la dirección de Ismael Herrera (ver referencias). Dicha teoría se basa en calcular la aportación del acuitardo como respuesta a los cambios de presión en el acuífero e incluir dicha aportación en la ecuación diferencial del flujo en el acuífero lo que da lugar a ecuaciones integrodiferenciales. El análisis conduce a la que se ha demostrado como la solución más exacta al problema y el método numérico desarrollado es además de gran eficiencia.

Sin embargo, es bien conocida la propiedad de materiales del tipo que forman los acuitardos de tener distinta respuesta según los esfuerzos efectivos sean mayores o menores que los de preconsolidación. Esto significa que el material tiene coefi

cientes de deformación (o de almacenamiento) que dependen del estado de preconsolidación de los estratos a diferentes niveles. Esto vuelve el problema bastante complejo y no lineal por lo que para situaciones en las que hay recuperación de niveles piezométricos la metodología señalada no puede aplicarse directamente.

En análisis de esfuerzos de cimentaciones o de presas de tierra el problema se estudia discretizando el medio y aplicando modelos del suelo como el del estado crítico (Hujeux, 1979, Silva-Pérez, 1984) en dos o tres dimensiones; estas metodologías representan un esfuerzo computacional excesivo para aplicarlos en la simulación de acuíferos.

Una alternativa intermedia y más adecuada a ese caso es la de considerar el flujo en el acuitardo vertical y horizontal en el acuífero, lo que es muy cercano a la realidad debido al gran contraste entre las permeabilidades de los dos medios y a la gran extensión de los sedimentos comparados con su espesor; con esa consideración se pueden construir modelos cuasitridimensionales que discretizan el o los acuíferos con elementos bidimensionales cada uno de los cuales está conectado a una malla unidimensional perpendicular a él en la que se calcula el flujo del acuitardo. Este camino ha sido adoptado para el problema que aquí se trata (carga y descarga) por el grupo del U.S. Geological Survey (Prudic y Williamson, 1984) usando hipótesis de trabajo muy similares, relativas al com-

portamiento de materiales arcillosos, a las empleadas aquí y que se describen en el capítulo 2.3 pero sin usar las restricciones a la discretización que se señalan en el capítulo 2.1. Son estas restricciones las que en muchas ocasiones obligan a una malla de discretización vertical muy fina y por lo tanto, de nuevo, a mucho esfuerzo computacional y de almacenamiento en el caso de modelación numérica de acuíferos.

El presente trabajo tuvo como objetivo extender el enfoque integrodiferencial, que es numéricamente más eficiente que los mencionados, al caso de acuíferos semiconfinados con carga y descarga, aún a costa de perder algo de exactitud en la solución; esto último no se pudo evitar ya que, para mantener la sencillez de un cálculo basado en valores en la frontera, no resulta fácil tomar exactamente en cuenta la forma del cambio en el módulo de deformación dentro del acuitardo; sin embargo, y a pesar del alto contraste que puede haber entre el módulo de deformación del material para presiones mayores que la de preconsolidación y el de presiones menores, se logró obtener un método sistemático y eficiente de cálculo que, comparado con la solución por un método de discretización, reproduce aceptablemente la forma de los perfiles de presión en el acuitardo, la evolución de los caudales intercambiados y la deformación del acuitardo, esta última con desviaciones promedio menores del 10% y máximas, en casos extremos, del 20%. El procedimiento se aplicó a un caso con mediciones de campo con buenos resultados.

De relaciones obtenidas recientemente sobre la variación de características de materiales arcillosos con la presión (Juárez Badillo, 1975, 1983), resulta que en algunos casos esa variación es importante y hasta ahora no ha sido tomada en cuenta en la modelación de acuíferos semiconfinados. Se hizo aquí una evaluación aproximada de su efecto en el caso de las mediciones de campo en las que, debido a lo profundo de la localización del estrato no se tuvo un cambio importante de las propiedades. No obstante, en trabajos futuros convendrá investigar la mejor forma de tomar estos aspectos en cuenta y mientras tanto, cuando se detecte que su efecto pueda ser de importancia, revisar los resultados del método aquí propuesto por medio de una discretización vertical del acuitardo. Aún en esos casos el método aproximado es útil ya que en la etapa de calibración del modelo deben hacerse una gran cantidad de pruebas numéricas en las que conviene emplear menor esfuerzo de cálculo; una vez aproximadas las características se afinan los resultados con un modelo más realista.

Otro resultado importante es que si se tiene una historia de cargas hidráulicas y mediciones de asentamientos del estrato confinante, existe un rango amplio de parejas de valores S_s y K' que ajustan razonablemente la teoría con las mediciones; se desprende de esto que, para mejorar la confiabilidad de cualquier modelo, es necesario realizar pruebas de laboratorio sobre muestras inalteradas del material que se trata, por lo menos para determinar su permeabilidad, ya que para estra-

tos profundos no se llegará a sus presiones de preconsolidación con aparatos de prueba normales.

2. HIPOTESIS BASICAS Y SOLUCION

2.1 *Método integrodiferencial contra discretización vertical*

El método original considera que, debido a la alta relación entre dimensiones horizontales y verticales en un acuífero, el flujo en él es horizontal y que, debido a la alta relación entre permeabilidades de estratos permeables y confinantes, el flujo en estos últimos es vertical. Consecuente con estas dos hipótesis resulta que la principal deformación de los estratos es vertical y debida a cambios de presión efectiva sobre la estructura sólida, como en el caso de una prueba de consolidación unidimensional drenada. Así, al resolver la ecuación unidimensional del flujo en el acuitardo o material menos permeable que el acuífero, y acoplarla a la del flujo horizontal bidimensional en el acuífero se obtiene una sola ecuación integrodiferencial. Se considera siempre

flujo en material totalmente saturado y características constantes del acuitardo en una vertical.

Refiriéndose a la fig 1, el flujo unidimensional tiene como ecuación

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(K' \frac{\partial H}{\partial Z} \right) = S'_s \frac{\partial H}{\partial t}$$

Si K' no varía en la vertical

$$K' \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} = S'_s \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1a)$$

con condiciones de frontera

$$H(0, t) = H_1(t); \quad H(b, t) = H_2(t) \quad (1b)$$

y condición inicial

$$H(Z, 0) = \text{constante} \quad (1c)$$

donde

$H = p/\gamma + Z$	carga piezométrica
p	presión hidráulica o de poro
γ	peso específico del agua
Z	coordenada vertical
K'	conductividad hidráulica del acuitardo
S'_s	almacenamiento específico del acuitardo
b	espesor del acuitardo
t	tiempo
H_1	carga hidráulica en el acuífero inferior
H_2	carga hidráulica en el acuífero superior

En el apéndice se describe la solución a esta ecuación con coeficientes K' y S'_s constantes en el tiempo y en la vertical. Si se utiliza esa solución para obtener el caudal unitario de intercambio entre uno de los acuíferos y el acuitardo (ecs A11 y A12), la ecuación del flujo en dos dimensiones para el acuífero 1 es (Herrera y Rodarte, 1973):

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{K'}{b} \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial t} \Big|_{\tau} f[\beta(t-\tau)] d\tau + \frac{K'}{b} \int_0^t \frac{\partial H_2}{\partial t} \Big|_{\tau} h[\beta(t-\tau)] d\tau + Q_1 = S_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (2a)$$

donde

- S_1 coeficiente de almacenamiento del acuífero inferior
- T_1 transmisividad del acuífero inferior
- Q_1 caudal por unidad de área de una fuente externa al acuífero

$$f(\beta t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta t} \quad (2b)$$

$$h(\beta t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \beta t} \quad (2c)$$

funciones unitarias de respuesta como se explica a continuación y

$$\beta = K' / (S'_s b^2) \quad (2d)$$

Una ecuación similar se obtiene para el acuífero superior.

La función f , llamada función de memoria, es proporcional al caudal drenado del acuitardo al acuífero producido por un abatimiento unitario instantáneo de la carga piezométrica en el acuífero; varía rápidamente desde un valor infinito en $t=0$ acercándose a la unidad para valores de $\beta t \doteq 0.4$ (ver fig 2). h , llamada función de influencia, es proporcional al caudal drenado al acuitardo por el acuífero situado en la frontera opuesta al que se considera, debido al mismo abatimiento unitario instantáneo (es por esto que en el balance del acuífero inferior aparece la influencia de la variación de cargas del superior); en el origen del tiempo adimensional el valor de h es cero y llega cerca de la unidad también para $\beta t = 0.4$. Para este valor del tiempo adimensional el flujo debido a un impulso instantáneo queda prácticamente establecido y a partir de entonces no hay cedencia de agua almacenada en el acuitardo; lo contrario sucede en tiempos muy cortos, durante los cuales la mayor parte del agua de drenado del confinante proviene de su almacenamiento.

Se indicó en el capítulo 1 una de las ventajas de resolver la ec (2) sobre acuíferos discretizados por una malla bidimensional en lugar de usar una malla quasi-tridimensional al discretizar además el acuitardo; estas son: menor tiempo de cómputo y menor almacenamiento de información al reducir la dimensionalidad del fenómeno; mayor exactitud al utilizar una solución cerrada para el flujo vertical. Por otra parte, el tiempo para que las funciones f y h se acerquen a su valor límite

de uno, sirve para fijar la condición de exactitud de una malla que discretiza el acuitardo: el común de esquemas numéricos supone una variación cercana a la lineal de la carga entre no dos de la malla; esta condición sólo se cumple si el intervalo de tiempo adimensional local es mayor o igual que 0.4, esto es:

$$0.4 \leq \frac{K'\Delta t}{S'_s \Delta z^2}, \text{ o bien, } \Delta z \leq \left(\frac{K'\Delta t}{0.4S'_s}\right)^{1/2} \quad (3)$$

Esta condición es muy cercana a la de estabilidad de un esquema explícito para diferencias finitas de primer orden (Euler hacia adelante en el tiempo);

$$\Delta z \geq \left(\frac{K'\Delta t}{S'_s}\right)^{1/2} \quad (4)$$

La primera condición obliga a tener una malla fina, pero si es demasiado fina la segunda condición indica que será difícil mantener acotados los errores de truncado del esquema numérico.

En cambio, las convoluciones de la ec (2) se pueden evaluar numéricamente sin necesidad de almacenar la historia de cargas de los acuíferos, como podría pensarse en primera instancia; la forma de hacerlo se muestra en el inciso 2.5.1. Sin embargo, el método no puede aplicarse directamente a situaciones en las que el material del acuitardo sufre cargas y descargas debido a que entonces el coeficiente S'_s varía en el tiempo y en la vertical como se hace ver a continuación.

2.2 Comportamiento de materiales arcillosos

Los sedimentos arcillosos son en su gran mayoría de origen lacustre y desde el tiempo de su depósito en ambiente húmedo forman estructuras sólidas celulares muy porosas y poco permeables; si la presión efectiva sobre ellas aumenta ya sea por una sobrepresión sobre el material o por una depresión en el agua (presión de poro), la estructura celular se deforma y el conjunto sufre alteración de sus propiedades lineales.

Lo anterior se exhibe en los resultados de una prueba de consolidación unidimensional que se han dibujado esquemáticamente en la fig 3 con coordenadas presión de consolidación y relación de vacíos; esta última se relaciona con la deformación unitaria que para una muestra confinada lateralmente es:

$$\frac{dv_t}{v_t} = - m_v dp \quad (5)$$

donde

v_t	volumen total de la muestra, suma del volumen de sólidos (v_s) y el de vacíos (v_v)
m_v	módulo de compresibilidad volumétrica del material
P	presión de consolidación aplicada

Si se desprecia la compresibilidad de los sólidos comparada con la de su estructura, el decremento de volumen total es igual al decremento del volumen de vacíos:

$$\frac{dv_t}{v_t} = \frac{dv_v}{v_t} = \frac{v_s}{v_t} de = \frac{de}{1+e}$$

donde

e relación de vacíos del material

Sustituyendo esta igualdad en la ec (5)

$$m_v = - \frac{de/dP}{1+e} \quad (6)$$

Una muestra inalterada de material extraído del subsuelo estuvo sujeta a una determinada presión P_0 ; si durante una prueba de consolidación drenada la presión aplicada es menor que P_0 , el material muestra módulos de compresibilidad pequeños; al sobrepasar P_0 en la prueba, los módulos aumentan notablemente en uno o más órdenes de magnitud, pero solamente si la presión efectiva va en aumento; si se vuelve a hacer variar con valores menores al máximo histórico, los módulos de deformación vuelven a su valor más bajo.

En una muestra saturada, además de la estructura de los sólidos, se deforma el agua entre los vacíos de manera que el módulo de deformación total es en realidad la suma:

$$m_v = \alpha + n \epsilon$$

donde

- α módulo de compresibilidad de la estructura sólida
- ϵ módulo de compresibilidad del agua (recíproco de su módulo de elasticidad)
- n porosidad del material

Este módulo se relaciona con el coeficiente S'_s del material confinante en la ec 2d, que es el volumen de agua drenada del material por unidad de volumen y por unidad de abatimiento de la carga hidráulica H (por definición). En un punto del material del subsuelo puede considerarse que la presión total no cambia si no hay cambios en el material sólido ni en la cantidad de agua sobre él, de tal forma que, al estar formada por la suma de la presión de poro (presión hidráulica) y la presión efectiva sobre la estructura sólida, una disminución en la carga hidráulica se traduce en un aumento de la presión efectiva lo que tiende a consolidar el material. Si se compara la ec (5) con la definición dada para S'_s se ve que

$$S'_s = \gamma m_v \quad (7)$$

donde

γ peso específico del agua

ya que $dP = -\gamma dH$

Es práctica común al hacer cálculos geohidrológicos considerar al coeficiente S'_s constante o a lo más, tomar dos valores, uno alto para compresión en estado virgen, con cargas de agua menores que la mínima histórica, y otro bajo para presiones de poro mayores. Sin embargo, las pruebas de consolidación muestran en general una disminución del módulo de deformación virgen como se muestra en la fig 4 para algunas arcillas, al aumentar la presión de consolidación.

Juárez Badillo (1975) encuentra relaciones constitutivas para

suelos que resultan útiles para darse cuenta del error cometido al considerar S'_s (o m_v) constante en los cálculos.

Para compresión unidimensional obtiene:

$$\frac{1+e}{1+e_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^r \quad (8)$$

donde

- e_0 relación de vacíos de referencia sobre la curva de compresibilidad en estado virgen
- P_0 presión aplicada de referencia correspondiente a e_0
- r exponente constante para un determinado material, menor que la unidad

Utilizando la ec (6) y derivando la ec (8)

$$m_v = \frac{r}{1+e} \frac{P_0^r}{P^{r+1}} (1+e_0) = \frac{r}{P} \quad (9)$$

Que hace ver que el módulo de compresibilidad (o el coeficiente de almacenamiento específico) es inversamente proporcional a la presión de consolidación y que para el caso en estudio se traduce en presión efectiva. Al tratar con estratos confinantes someros que tienen una presión de preconsolidación natural relativamente baja, el cambio en el coeficiente de almacenamiento por cambio en presión efectiva será mayor que en estratos profundos con presión de preconsolidación mayor.

Para dar una idea de la magnitud del cambio, en el Valle de México el contacto entre la arcilla confinante y el acuífero profundo que se explota está en promedio a unos 40 m de profundidad en el centro de la Ciudad de México; a esta profundi

dad son de esperarse presiones de preconsolidación de tres kg/cm^2 y de 1930 a la fecha han habido abatimientos de presión del orden de 30 m de carga de agua, o sea, tres kg/cm^2 ; de acuerdo con la ec (9) este incremento de presión habrá producido la disminución a la mitad del coeficiente de almacenamiento. Como puede verse, el efecto que la consolidación de un estrato tiene sobre esta característica no es de despreciarse.

Por otra parte, también según Juárez Badillo (1983), la permeabilidad de un material arcilloso se ve modificada por la consolidación siguiendo una relación del tipo:

$$\frac{K'}{K'_0} = \left(\frac{1+e}{1+e_0} \right)^s \quad (10)$$

donde

- K'_0 conductividad hidráulica de referencia
- s exponente constante para un material determinado con valores conocidos entre 1 y 35

Si se considera de nuevo el ejemplo anterior del Valle de México para cuyas arcillas se ha encontrado que $s=4$ y $r=0.5$ las ecs (8) y (10) dan

$$\frac{K'}{K'_0} = \left(\frac{P_0}{P} \right)^{rs} = \left(\frac{3}{6} \right)^2 = 0.25 \quad (11)$$

que indica que la permeabilidad se afecta aquí aún más que el coeficiente de compresibilidad.

Lo anterior haría pensar que es muy limitado lo que puede hacerse con una teoría basada en características constantes del material en la vertical y en el tiempo como lo está la ec (2); sin embargo, en apoyo de los resultados prácticos que de ella se han obtenido en hidráulica de pozos y en la simulación de acuíferos semiconfinados, se observa que en la adimensionalización de la ec (2) aparece el parámetro $\beta = K' / (S'_s b^2)$ en el que un incremento de la presión efectiva produce, como se vió, una disminución apreciable de la permeabilidad K' pero al mismo tiempo una disminución (algo menor) en el coeficiente de almacenameinto y otra en el espesor del acuífero. Estos efectos se conjugan para que la variación del parámetro β no sea tan importante como cada uno de sus componentes y no esté tan alejado de la realidad suponerlo constante si se trata siempre del mismo material. Este parámetro determina la forma del perfil de presiones en el acuitardo (ec A10 del apéndice) pero el valor del flujo drenado depende de K'/b (ecs A11 y A12 del apéndice) por lo que si, como parece, fuera mayor el cambio en K' que en b , debiera ser notorio su efecto.

Respecto a la variación de las características del material para presiones menores que las de preconsolidación se sabe que el módulo de compresibilidad sigue una ley similar a la de la ec (8) con un exponente menor que para deformación en estado virgen; aunque se conoce menos, es de suponerse que también la permeabilidad se comporta análogamente en los dos

estados. En todo caso, los cambios para esas presiones son menores en al menos un orden de magnitud que los del estado virgen.

Con base en lo expuesto y sin menoscabo de enfatizar que el problema debe ser profundizado en el futuro y revisado desde la hipótesis de medio homogéneo en la vertical, se supondrá aquí que el parámetro $\beta = K' / (S'_s b^2)$ toma sólo dos valores, uno para cuando la carga hidráulica está bajo el mínimo histórico en un punto dado y otro para cuando está sobre ese mínimo. La permeabilidad K' se supondrá constante en el desarrollo del método; al aplicarlo a algunas mediciones de campo se compararán los ajustes en esa forma y haciendo variar la relación K'/b con el tiempo con apoyo en la ec (10).

2.3 Soluciones a la ecuación de flujo vertical con carga y descarga

Si en las ecs (1) se presentan periodos de carga y descarga, o sea, disminución e incremento de las cargas hidráulicas en las fronteras, sucederá en general que el coeficiente β , que resulta al adimensionalizar la ec (1a), tome los dos valores a los que se refiere el inciso anterior dependiendo de la historia de carga del punto que se considere y será así variable en tiempo y posición. El problema se vuelve altamente no lineal debido al gran contraste entre los dos valores posibles de compresibilidad del material que pueden presentarse ambos

en una vertical al mismo tiempo y cambiar bruscamente de un tiempo al siguiente.

Una forma de integrar las ecs (1) es la de discretizar el acuitardo en la vertical con una malla de elementos y aplicar un método numérico de integración como pueden ser el de diferencias finitas o del elemento finito; con estos métodos es posible tomar en cuenta la variación espacial y temporal del coeficiente β con procedimientos iterativos dada la no linealidad que dicha variación le confiere a la ec (1a). Sin embargo, como ya se señaló en el inciso 2.1, aún estos métodos presentan dificultades en su aplicación debido a las condiciones de exactitud y estabilidad impuestas por las ecs (3) y (4) unida a la variabilidad del coeficiente β . Si se adimensionalizan las ecs (1) se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \eta}{\partial t'} \quad (12a)$$

$$\eta(0, t') = \eta_1(t'); \quad \eta(1, t') = \eta_2(t') \quad (12b),$$

$$\eta(\zeta, 0) = \text{constante} \quad (12c)$$

donde

$$\eta = H/b; \quad \zeta = z/b; \quad t' = \beta t$$

y la condición de exactitud, ec (3), se puede expresar como:

$$\Delta \zeta \leq (\beta \Delta t / 0.4)^{1/2} \quad (13)$$

y la de estabilidad de un método explícito de diferencias fi-

nitas de primer orden (esquema Euler hacia adelante) ec (4), como

$$\Delta \zeta \geq (\beta \Delta t)^{1/2} \quad (14)$$

Si β se mantuviera constante no existirá dificultad en cumplir ambas condiciones, pero al variar en dos órdenes de magnitud esto es imposible. La única forma de integrar numéricamente la ecuación es utilizando un esquema implícito (de Euler hacia atrás) que es incondicionalmente estable y permite relajar la condición de la ec (14); sin embargo, dada la variación de β , la desviación es muy grande y la integración numérica tiende a alejarse de la solución de la ecuación diferencial cuando esto sucede (Richtmeyer y Morton, 1965); el único remedio a esta falla es reducir los intervalos finitos de integración ΔZ y Δt . Se procuró tener seguridad de la exactitud de los resultados para lo que se comparó la solución por diferencias finitas para el caso de β constante con la solución exacta que da la ec (A10 del apéndice) para diferentes historias de carga y características del material; se fueron afinando la malla espacial y la temporal cumpliendo la condición de la ec (13) hasta obtener errores menores del 2% en la magnitud de la carga; un ejemplo de los probados se muestra en las figs 9 a 11 y se comenta en el inciso 2.5.2.

Se procedió después a estudiar el efecto de la variación de β , cuyo valor (virgen o consolidado) depende en un punto de la presión hidráulica mínima ocurrida en la historia de pre-

siones de dicho punto, como se explicó en el subcapítulo 2.2; al avanzar la solución en el tiempo no se sabe cómo variará la presión en cada punto (y por lo tanto, qué valor de β tendrá) por lo que el método de solución debe ser iterativo.

Se probaron distintas historias de carga hidráulica en la frontera inferior del acuitardo dejando la superior constante y se analizaron los perfiles de carga hidráulica resultantes. De dicho análisis se concluyó que, después de una serie de cargas y descargas se presentan esencialmente dos situaciones al comparar el perfil de cargas con el de cargas de preconsolidación del material (mínimos históricos):

- a) Si después de un periodo de abatimiento de cargas hidráulicas se tiene otro de recuperación, los perfiles de carga tienen siempre evoluciones similares a la mostrada en la fig 5; si los perfiles de recuperación se comparan con el de preconsolidación (que en este caso resulta ser el inmediatamente previo a la recuperación) se observa que la mayor parte del perfil tiene cargas superiores a las de preconsolidación salvo en la parte más alejada de la frontera donde son menores; si la situación se mantiene por un tiempo largo, el perfil de carga tenderá a su posición de equilibrio (línea recta entre las cargas en las fronteras), pero siempre con su parte cercana a la frontera, que controla el flujo con el acuífero, con cargas (presiones de poro) mayores que la de preconsolidación, o sea, con un coe-

ficiente de almacenamiento reducido

- b) Si después de una recuperación como la descrita en (a) se tiene un abatimiento que no rebasa el máximo histórico, la situación del perfil no cambia en lo sustancial; en cambio, si el abatimiento en la frontera sobrepasa el máximo histórico, todo el perfil de cargas emerge sobre el de preconsolidación (toma valores negativos mayores) pero tiene que evolucionar desde abajo del mismo mientras ocurre el abatimiento, como se muestra en la fig 6.

2.4 Tesis para una solución aproximada

Partiendo de las observaciones anteriores y como un intento para evitar la discretización de la coordenada vertical del acuitardo y seguir utilizando el método de ecuaciones integro-diferenciales como las ecs (2), se pensó en probar una solución aproximada con base en un factor β variable sólo con el tiempo y determinado por la condición de carga en la frontera del acuitardo con el acuífero.

Para probar este tratamiento se deben resolver las mismas ecs (1) pero con la relación $\beta = K' / (S'_g b^2)$ variable en el tiempo y constante en la vertical. Una forma de hacerlo muy similar al caso de β constante, se describe en el apéndice; el resultado es también similar y conduce a las ecs (2) con la única diferencia de que el argumento de las funciones f y h

en lugar de ser $\beta(t-\tau)$ resulta $\int_t^t \beta d\tau_1$ (o si el argumento era $\beta\tau$ se cambia por $\int_0^t \beta d\tau_1$).

Para definir el valor de β más adecuado para el cálculo hay un par de opciones que se ocurren de la observación de los perfiles de presión obtenidos discretizando el medio en la vertical (figs 5 y 6) y son:

- a) Para el caso de recuperación, utilizar el β correspondiente a material preconsolidado ya que la parte cercana a la frontera está en esa situación, o bien, utilizar una combinación de los dos coeficientes (el virgen y el de preconsolidación) ya que la parte superior del perfil se desarrolla en estado virgen. Lo mismo se haría para cualquier abatimiento que no sobrepasara el máximo histórico
- b) Para un abatimiento que sobrepasa la presión mínima histórica, utilizar el valor de β para material virgen, o bien, ya que el perfil evoluciona durante el intervalo de tiempo, primero por el estado preconsolidado y luego por el virgen, dividir el intervalo en dos partes y utilizar el β correspondiente para cada una; si la evolución es toda en estado virgen se usa un solo valor de β .

Las opciones descritas se fueron probando sucesivamente como se indica a continuación hasta llegar a la mejor. Se utilizó como base de comparación el resultado de una integración so-

bre una malla muy fina de diferencias finitas que a su vez se validó comparándolo con la solución exacta que proporciona el método integrodiferencial cuando β es constante.

2.5 Obtención del método aproximado

2.5.1 Evaluación numérica

La solución a las ecs (1) con β variable es la integral de la ec (A10) del apéndice. Su cálculo debe hacerse numéricamente en intervalos discretos de tiempo en forma muy similar al caso de β constante como lo hacen Herrera y Yates (1977) y que se describe a continuación.

La integral es

$$H(Z,t) = \int_0^t \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} \left(1 - \frac{Z}{b} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi Z/b}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^t \beta d\tau} \right) d\tau \quad \dots \quad (15)$$

donde

H_0 carga hidráulica en $Z = 0$

Los dos primeros términos se integran directamente intervalo por intervalo de tiempo Δt ya que

$$\int_t^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} d\tau = H_{0,t+\Delta t} - H_{0,t}$$

o bien en forma total:

$$\int_0^t \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} (1-Z/b) d\tau = (1-Z/b) (H_{0,k} - H_{0,0})$$

Para el tercer término escríbase el valor de la integral al final del siguiente intervalo de tiempo:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi Z/b}{n\pi} \int_0^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^{t+\Delta t} \beta d\tau_1} d\tau$$

La integral es:

$$I_{n,k+1} = \int_0^t \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^{t+\Delta t} \beta d\tau_1} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^{t+\Delta t} \beta d\tau_1} d\tau$$

Si se considera un valor medio de β constante en el intervalo $(t, t+\Delta t)$ igual a β_{k+1} :

$$I_{n,k+1} = e^{-n^2 \pi^2 \beta_{k+1} \Delta t} \int_0^t \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^t \beta d\tau_1} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^{t+\Delta t} \beta d\tau_1} d\tau$$

Esto proporciona una fórmula de recurrencia ya que:

$$I_{n,k} = \int_0^t \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{\tau} e^{-n^2 \pi^2 \int_{\tau}^t \beta d\tau_1} d\tau$$

lo que permite calcular la integral de (16) si se evalúa numéricamente su segundo término en el intervalo; una vez calculada $I_{n,k+1}$ es simple obtener el valor de $H(Z, t)$.

Para el cálculo numérico del segundo término de (16) hay varias alternativas que representan opciones para pesar el efecto del cambio de la carga hidráulica en la frontera durante el intervalo considerado. Aquí serán útiles tres de estas opciones que consideran valores medios constantes de $\left. \frac{\partial H_o}{\partial t} \right|_{\tau}$ y de β .

Opción 1. Integración exacta. $\left. \frac{\partial H_o}{\partial t} \right|_{t+\Delta t/2}$ sale fuera de la integral y se integra directamente la exponencial con $\beta = \text{constante}$

$$T_{n_1, k+1} = \left. \frac{\partial H_o}{\partial t} \right|_{t+\Delta t/2} \int_t^{t+\Delta t} e^{-n^2 \pi^2 \beta_{k+1} (t+\Delta t - \tau)} d\tau$$

$$= \frac{\partial H_o}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t/2} \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 \beta_{k+1} \Delta t}}{n^2 \pi^2 \beta_{k+1} \Delta t} \Delta t \quad (17)$$

Opción 2. Integración numérica Crank-Nicholson. Similar a la anterior, pero en lugar de integrar se usa el valor de la exponencial a la mitad del intervalo por lo que el término resulta:

$$T_{n_2, k+1} = \left. \frac{\partial H_o}{\partial t} \right|_{t+\Delta t/2} e^{-n^2 \pi^2 \beta_{k+1} \Delta t/2} \Delta t \quad (18)$$

Opción 3. Integración numérica Euler hacia adelante. Se usa el valor de la exponencial al principio del intervalo

$$T_{n_3, k+1} = \left. \frac{\partial H_o}{\partial t} \right|_{t+\Delta t/2} e^{-n^2 \pi^2 \beta_{k+1} \Delta t} \Delta t \quad (19)$$

Las tres son opciones válidas numéricamente ya que al utilizar un valor del integrando dentro del intervalo de integración se comete un error del orden $\overline{\Delta t}^2$.

Los tres factores de peso $P_{n,1}$, $P_{n,2}$ y $P_{n,3}$ que multiplican a $\left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_{t+\Delta t} \Delta t$ de las tres opciones anteriores se han dibujado en la fig 7 contra la variable $n\pi(\beta\Delta t)^{1/2}$; la razón de su uso se explicará más adelante. Con la notación anterior, la expresión para $H(Z,t)$ queda:

$$H(Z,t) = \left(1 - \frac{Z}{b}\right) \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_j \Delta t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi Z/b}{n\pi} I_{n,k} \quad (20)$$

donde

$$I_{n,k} = P_{n,3} I_{n,k-1} + P_{n,i} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_k \Delta t$$

$P_{n,i}$ alguno de los tres factores definidos arriba que se escoja para pasar la influencia a $\partial H_0/\partial t$

$I_{n,1}$ primer valor de $I_n = P_{n,i} \left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_1 \Delta t$

Las derivadas respecto al tiempo de H_0 se estiman con la diferencia de cargas al final y al inicio del intervalo

$$\left. \frac{\partial H_0}{\partial t} \right|_j = \frac{H_{0,j} - H_{0,j-1}}{\Delta t} \quad (21)$$

El número de términos necesario para calcular con determinado error la serie de la ec (20) ha sido estudiado por Herrera (1974) y por Chen y Herrera (1982) y, depende del producto $\beta\Delta t$; más chico es éste, más términos se necesitan. Para rea-

lizar las pruebas numéricas que se describen a continuación se calculó el número de términos necesarios y se aplicó la ec (20); sin embargo, para la utilización del método en la simulación de acuíferos en el que aparecen derivadas de la ec (2) en la frontera del acuitardo, se propone un método diferente que emplea un número fijo de términos y que se describe en el apéndice.

2.5.2 Pruebas numéricas

Para comparar los resultados de una solución aproximada con los que proporciona la integración por diferencias finitas en una malla vertical fina, tomada como base, se escogió una historia de cargas que propiciara la aparición de las situaciones de transición descritas en el subcapítulo 2.3. Esa historia de cargas en la parte inferior del acuitardo es la mostrada en la fig 8 que, como se ve, es una sucesión de abatimientos y recuperaciones en la que los abatimientos son cada vez mayores; en la parte superior del acuitardo se supuso inicialmente carga constante. Las características del acuitardo se mantuvieron las mismas en todas las pruebas, excepto naturalmente el parámetro β que toma dos valores para la misma prueba, el virgen y el de preconsolidación, y el espesor del acuitardo con el fin de cubrir tiempos cortos, intermedios y largos (ver inciso 1.1). Las características empleadas fueron $K' = 10^{-9}$ m/s, $S'_s = 0.01$ m⁻¹, anchos de 15 y 50 m y relaciones de β consolidado a β virgen, β_2/β_1 de 10 y 100; los

intervalos de tiempo usados en el método integral aproximado fueron de medio año, 1.577×10^7 segundos y la historia de cargas duró 20 años; con esas características se cubren tiempos adimensionales que van de 0.0006 hasta 0.280, medidos con el β menor, o sea el β virgen.

Las variables de comparación para juzgar la bondad de ajuste del método aproximado al de diferencias finitas fueron los perfiles de presión, el caudal unitario (velocidad) descarga al acuífero y su integral en el tiempo que da el hundimiento.

Como se mencionó en el inciso 2.3, se comprobó primero que la malla de discretización fuera adecuada al menos para cuando β es constante comparando sus resultados con los de la solución integral que en ese caso es exacta; esto se muestra en las figs 9 a 11 en las que se comparan los perfiles de presión obtenidos por los dos métodos en condiciones de carga mínima, intermedia y máxima durante el proceso cíclico creciente de abatimientos en la frontera inferior del acuitardo; puede verse que la concordancia es casi perfecta, pero para lograrla hubo que dividir el acuitardo con una malla de 0.25 m de norma y reducir el intervalo de tiempo a 0.1 años mientras que los resultados del método exacto pueden tener prácticamente cualquier intervalo de tiempo y conocerse la carga en 20 puntos en la vertical con la décima parte de tiempo de procesamiento.

Se procedió luego a probar algunas de las alternativas indicadas en el inciso 2.4; después de varias pruebas en las que se obtuvo a veces muy buena concordancia y otras veces menos buena, se decidió sistematizarlas partiendo de la discrepancia que se obtendría si se ignorara el comportamiento histerético del material confinante y ver luego cómo eliminarlas. Esas diferencias se muestran en las figs 12 a 14 en perfiles de carga y en la fig 15 en caudales descargados al acuífero para el acuitardo de 50 m y relación de β consolidada a β virgen de 10. Puede verse ahí que para abatimientos máximos las cargas en los perfiles son bastante cercanas pero mayores en caso de no tomar en cuenta el cambio de β , por lo que dan caudales de descarga mayores al acuífero; que en recuperación total en la frontera los perfiles son muy cóncavos lo que significa un flujo del acuífero al acuitardo que es mucho mayor en caso de no considerar el cambio de β (fig 15). Esta última es la diferencia más grande y la que se buscó corregir con el método aproximado.

Se escogió a continuación el procedimiento más simple que es el de tomar el valor de β virgen (se le caracterizará en lo que sigue por β_1) siempre que la carga en la frontera evolucione a valores menores que el mínimo histórico y el valor de β para material consolidado (se llamará β_2) cuando la carga en la frontera cambie a valores mayores. Los resultados se muestran en las figs 16 a 34 en perfiles de cargas en caudales descargados y en hundimientos para tiempos cortos (espe

sor del acuitardo 15 m) y tiempos largos (espesor del acuitardo 50 m) y con valores de β_2/β_1 de 10 y 100 para cada espesor. Puede verse ahí que la correspondencia en caudales es buena lo mismo que los perfiles de carga para tiempos cortos y relaciones β_2/β_1 de 10; sin embargo, en tiempos largos y $\beta_2/\beta_1=100$ los perfiles se corren hacia la izquierda de los de referencia y la concordancia en caudales drenados es menor. De hecho, es de notarse que los resultados que da la integración con diferencias finitas cambian poco al cambiar β_2/β_1 y esto es debido a que la parte consolidada del acuitardo es la inferior y está regida por la carga en la frontera, mientras que la parte superior continúa en condiciones vírgenes en cualquier caso; en cambio, en el método aproximado se supone que todo el espesor tiene el β_2 por lo que sus respuestas a recuperación de carga son más notorias ya que corresponden a una capacidad de almacenamiento menor del material. Para tiempos largos esto no tiene mucha importancia debido a que la parte superior del perfil está condicionada a la carga en la frontera superior del acuífero.

En el cálculo de hundimientos, que son los caudales integrados en el tiempo, se nota una tendencia a subvaluarlos con este primer método aproximado, aunque la forma de evolucionar es muy similar; esto en la práctica no representaría una limitación muy grande ya que normalmente las características del acuitardo se conocen en forma aproximada por medio de pruebas de bombeo; esas características deben corregirse al hacer la

simulación numérica para reproducir evoluciones de niveles piezométricos y de hundimientos del terreno observados. Al utilizar este primer método bastaría modificar ligeramente el coeficiente β para obtener una concordancia muy buena en cuanto a evolución de hundimientos.

A pesar de la consideración anterior, se prefirió intentar mejorar el método, para lo cual se ensayó con valores del parámetro β intermedios entre β_2 y β_1 cuando la carga en la frontera fuera mayor que el mínimo histórico; esto resulta lógico porque, como se ha visto, parte del perfil está en estado consolidado y parte en estado virgen; el mejor valor fue el promedio geométrico de $\sqrt{\beta_2\beta_1}$; además de esto, fue también mejor utilizar el peso intermedio P_{n2} , para la última derivada de la carga respecto al tiempo en la ec (20), que el peso P_{n1} que se había utilizado antes y que se siguió aplicando cuando la carga de frontera es menor que la mínima histórica, $H_{o,mín}$. La mejoría en el cálculo de los perfiles de presión y de caudales descargados puede verse en las figs 35 a 38 para espesor de acuitardo de 50 m y $\beta_2/\beta_1=100$; se nota, sin embargo, que los caudales para recuperación total, que resultan negativos, son de mayor magnitud que los de referencia.

Un último intento por mejorar el cálculo para recuperaciones altas, después de varias pruebas numéricas, resultó en la subdivisión del intervalo de cargas $\infty < H_o < H_{i,mín}$ en dos partes; la primera, entre ∞ y $0.2 H_{mín}$ se trató con el coeficiente β_2

consolidado y el peso P_{n3} en la ec (20); el resto del intervalo se siguió tratando como se indicó en el párrafo anterior, esto es, con el promedio geométrico de las betas y peso P_{n2} entre $0.2 H_{mín}$ y $H_{mín}$ y con P_{n1} y β_1 para $H_{mín} > H_o > -\infty$.

Este resultado es también lógico, ya que a mayor recuperación mayor es también la parte del perfil de presiones que se encuentra en estado consolidado.

La utilización de pesos diferentes en la integración del último cambio de carga obedece a la necesidad de amortiguar su efecto sobre la parte superior del perfil de presiones para el que las hipótesis de simplificación no se cumplen.

Los perfiles de carga y los caudales de descarga se comparan con los de referencia en las figs 39 a 56 para todos los casos tratados (tiempos cortos y largos y β_2/β_1 de 10 y 100).

Se aprecia en estas gráficas la mejoría en la estimación de flujos y hundimientos respecto al primer método aproximado y que se ha logrado que los perfiles de carga hidráulica sean más cercanos a los de referencia y sigan su misma tendencia evolutiva. En los casos más desfavorables (tiempos cortos y relaciones β_2/β_1 altas) no ha sido posible eliminar algunas de las tendencias del método aproximado como son dar flujos de drenado negativos mayores que los de referencia y una subvaluación del volumen total drenado (hundimiento) del orden

del 20% (ver figs 55 y 56); sin embargo, es pertinente aquí también el comentario hecho arriba respecto a la necesidad de calibración de los parámetros del acuitardo al simular numéricamente un acuífero, con lo que basta que el método mantenga el orden de magnitud y la tendencia de evolución para que su ajuste se logre modificando ligeramente el parámetro β .

2.5.3 Aplicación a diferentes historias de carga y a una medición de campo

Como parte de una comprobación final se compararon los resultados del método desarrollado con los de diferencias finitas para otras historias de carga en la parte baja del acuitardo, específicamente dos recuperaciones de carga después de un periodo de abatimiento, para el caso de mayor dificultad, tiempos cortos y $\beta_2/\beta_1=100$. Las recuperaciones se producen después de 5 años de una depresión de 10 m; la primera de ellas es de 5 m de carga de tal manera que permanece con una depresión de 5 m. En este tipo de recuperaciones el método aproximado no es muy exacto en la estimación de los perfiles de carga como puede verse en la fig 57 para diferentes tiempos; sin embargo, en esas condiciones el caudal drenado es de muy poca magnitud por lo que el error cometido es poco si la recuperación no es de mucha duración. La segunda recuperación probada fue de 15 m de carga después de 5 años con 10 m de depresión, de tal manera que la frontera queda con una sobrecarga de 5 m. En este caso los resultados son totalmente coinciden

tes como se aprecia en las figs 59 y 60.

Se compararon también resultados para cuando existe variación de carga en las dos fronteras del acuitardo, con la hipótesis, para el método aproximado, de que los efectos son aditivos. Los resultados se comparan en las figs 61 a 64 también para tiempos cortos y $\beta_2/\beta_1=100$; la historia de carga fue la misma en las dos fronteras por lo que los perfiles son simétricos respecto al centro del acuitardo. La aproximación que se obtiene es muy parecida al caso de variación de carga en una sola frontera.

Por último, el método propuesto se aplicó a un caso clásico de variación cíclica de niveles piezométricos de mediciones hechas por el U.S. Geological Survey en Pixley, Cal. (Lofgren 1978). Las mediciones incluyen registros piezométricos arriba y abajo de un manto arcilloso durante más de diez años, registro de la consolidación del manto en ese mismo periodo y una estimación, por cálculos globales, del módulo de deformación virgen y el de estado consolidado; no hay estimación ni medición de la permeabilidad vertical por lo que este parámetro se dejó para ser calibrado. En la fig 65 se muestra el registro de variaciones piezométricas en la parte inferior (profundidad 130 m) y en la superior (profundidad 230 m) del manto arcilloso; las características del manto son: espesor $b=100$ m y almacenamientos específicos, virgen $S'_{s1}=4.6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ y consolidado y $S'_{s2}=6.2 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$. La permeabilidad K' se varió hasta

lograr un buen ajuste en la estimación de la consolidación en el periodo de observación y resultó ser de 2×10^{-8} m/s, valor razonable para arcillas. En la fig 66 se muestra el ajuste entre asentamientos calculados y observados; sin embargo, como el valor de S'_s reportado para este caso se obtuvo en forma global para el estrato y se ha visto que la parte más afectada del mismo es la más cercana a la frontera donde existen las variaciones de carga hidráulica, se probó a variar los dos valores de S'_s haciéndolos mayores que los reportados; el resultado se muestra en las figs 67 y 68 para otros valores de S'_s y K' que, como puede apreciarse, ajustan mejor los cálculos a las mediciones a pesar de que se cambiaron de orden de magnitud. En la fig 67 se usaron $S'_{s1} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $\beta_2/\beta_1 = 125$ y $K' = 3.1 \times 10^{-9} \text{ m/s}$ y en la fig 68, $S'_s = 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, $\beta_2/\beta_1 = 125$ y $K' = 7.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}$.

Este resultado hace ver, por una parte, que la metodología empleada ajusta aceptablemente la evolución de la relación entre variaciones de carga y asentamientos de mantos confinantes y, por otra, que, más importante que la aproximación de la metodología usada, es el conocimiento del orden de magnitud de alguna de las características del material, ya sea su permeabilidad o su módulo de compresibilidad, lo cual debe hacerse a través de pruebas de laboratorio en muestras inalteradas, o bien por medio de pruebas de bombeo de larga duración y con pozos de observación.

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrolló un método aproximado para el cálculo del intercambio de agua entre un acuitardo y los acuíferos que tenga en contacto, que toma en cuenta el comportamiento histerético del material sedimentario saturado cuando se descarga su estructura después de un periodo de carga; el propósito del desarrollo fue ampliar la aplicabilidad del método numérico basado en ecuaciones integrodiferenciales (Herrera y Yates, 1977), para la simulación de acuíferos semiconfinados que se hace en función de sólo la piezometría en los acuíferos.

El método propuesto da aproximaciones aceptables (errores medios menores del 10%) en los volúmenes de agua intercambiada y evoluciones de perfiles piezométricos similares cuando se le compara con un método de solución de la ecuación de flujos sobre una malla de discretización del acuífero. Su ventaja

la tiene en el ahorro en tiempo y de almacenamiento para cómputo que es en ambos del orden de 20 veces menor que para el método de discretización. Lo anterior se confirmó aplicando el método propuesto a diversas historias de carga, muchas de ellas con variaciones extremas y reproduciendo el desarrollo de la consolidación de un manto arcilloso sujeto a variación cíclica de cargas de acuerdo con mediciones de campo.

El cálculo numérico del flujo de intercambio entre acuíferos y acuitardo es totalmente similar al desarrollo por Herrera y Yates por lo que puede acoplarse en la misma forma al cálculo numérico del comportamiento del acuífero; la única diferencia estriba en que, como la carga en la frontera no se conoce de antemano y de ella depende la caracterización del flujo en el acuitardo, se debe usar un método iterativo; se han hecho ya algunas pruebas encontrándose que sin ningún método especial se hacen un máximo de tres iteraciones ya que basta comprobar el estado de carga de la frontera para dar por buena una iteración.

El método se aplicó a un registro histórico largo (trece años) de mediciones de cargas hidráulicas y de asentamientos en un estrato arcilloso en Pixley, California (Lofgren 1978); se encontró que es posible calcular con bastante aproximación la evolución de los asentamientos del estrato pero que esto se logra con un rango amplio de parejas de valores del almacenamiento específico y de permeabilidad del material (que

cambian los tiempos adimensionales de largos a cortos); esto hace ver que más que mejorar la precisión del método de cálculo, es necesario estimar al menos el orden de magnitud de al menos uno de esos parámetros, con pruebas de laboratorio o de bombeo, para una correcta modelación del acuífero.

Al aplicar resultados de investigaciones recientes (Juárez Baidillo, 1975, 1983) para estimar el cambio en las características del material confinante por consolidación, se encontró que en algunos casos estos cambios pueden tener efectos notorios en el comportamiento del sistema aún en el caso de que inicialmente fueran constantes. Esos casos serán en general mantos arcillosos poco profundos y de alta compresibilidad; en ellos se recomienda utilizar el método aquí propuesto en la etapa de calibración del modelo numérico del acuífero ya que con él se logran ahorros importantes de tiempo de cálculo; una vez calibrado así, se tendría que afinar con la discretización vertical del acuitardo para tomar en cuenta la variación de las características hidráulicas con la consolidación. Por otra parte, como investigación futura puede resultar provechoso investigar métodos eficientes para tomar en cuenta la variación temporal y espacial de la permeabilidad y el coeficiente de almacenamiento del acuitardo para ser aplicados a la simulación de acuíferos.

Mientras tanto, el método aquí propuesto se recomienda para su uso en la evaluación del flujo y del hundimiento del terre

no debió al bombeo en acuíferos en contacto con formaciones compresibles con variaciones cíclicas de carga o para predecir los efectos de políticas de suspensión de bombeo, con las limitantes señaladas en el párrafo anterior.

REFERENCIAS

Chen, B. y Herrera, I., 1982, Numerical treatment of leaky aquifers in the short time range, Water Resources Research, v. 18, no. 3, pp 557-562

Herrera, I., 1974, Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications. 2. Error analysis of approximate theories. Water Resources Research, v. 10, pp 811-820

Herrera, I. y Rodarte, L., 1974, Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications. 1. The nature of approximate theories, Water Resources Research, v. 9, no. 4, pp 995-1005

Herrera, I. y Yates, R., 1977, Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications. 3. A numerical method of unlimited applicability, Water Resources Research, v. 13, no. 4, pp 725-732

Herrera, I., Hennart, J.P. y Yates, R., 1980, A critical discussion of numerical models for multiaquifer systems, Advances in Water Resources, v. 3, no. 12, pp 159-163

Hujeux, J.C., 1979, Analyse numerique de problemes de consolidation elasto plastique, Thesis Dr. Ing., Ecole Centrale

des Arts et Manufactures, Paris

Juárez Badillo, E., 1975, Constitutive relationships for soils. Memorias del Symposium on Recent Developments in the Analysis of Soil Behavior, Kensington, NSW, Australia.

Juárez Badillo, E., 1983, General permeability change equations for soils, Memorias de la International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials, Tucson, Ariz., pp 295-299.

Lofgren, B.E., 1978, Changes in aquifer-system properties with ground water depletion, Memorias de la International Conference on Evaluation and Prediction of Subsidence, Pansaccola Beach, Florida, pp 26-46

Prudic, D.E. y Williamson, A.K., 1984, Technique used to simulate the inelastic compaction of fined grained deposits in the Central Valley aquifer system, Cal. U.S.A., Memorias del III Simposio Internacional sobre Hundimiento del Terreno, Venecia, Italia

Richtmeyer, D.R. y Morton, K.W., 1965, Differential methods for initial value problems, 2nd. Ed. Interscience Publishers

Silva Pérez, A.A., 1984, Analysis of land subsidence using elasto plastic critical state soil model, Memorias del

III Simposio Internacional sobre Hundimiento del Terreno, Venecia, Italia.

Lista de símbolos de las variables

α	módulo de compresibilidad de la estructura sólida de un material $\{m^2/kg\}$
b	espesor del estrato confinante o acuitardo $\{m\}$
e	relación de vacíos del material arcilloso $\{0\}$
f	función de memoria ec (2b) $\{0\}$
H	carga hidráulica $\{m\}$
h	función de influencia, ec (2c) $\{0\}$
K'	permeabilidad vertical del material confinante $\{m/s\}$
m_v	coeficiente de compresibilidad volumétrica del material confinante $\{m^2/kg\}$
n	porosidad del material confinante $\{0\}$
P	presión de consolidación $\{kg/m^2\}$
$P_{n,k}$	peso que se da a la última variación de carga, ecs (17) a (19) $\{0\}$
Q	caudal fuente unitario proveniente de fuera del sistema en un punto del acuífero $\{m/s\}$
r	exponente en la ec (8) $\{0\}$
S_i	coeficiente de almacenamiento del acuífero i $\{0\}$
S'_s	coeficiente de almacenamiento específico del acuitardo $\{m^{-1}\}$
s	exponente en la ec (10) $\{0\}$
T_i	transmisividad del acuífero i $\{m^2/s\}$
t	tiempo $\{s\}$
t'	tiempo adimensional, $t'=\beta t$ $\{0\}$

V_s	volumen de sólidos de una muestra $\{m^3\}$
V_t	volumen total de una muestra $\{m^3\}$
V_v	volumen de vacíos de una muestra $\{m^3\}$
x, y	coordenadas horizontales $\{m\}$
z	coordenada vertical con origen en la base del acuitardo $\{m\}$
β_1	factor de características del acuitardo en condiciones vírgenes $\beta_1 = K'_1 / (S'_{s1} b_1^2) \{s^{-1}\}$
β_2	factor de características del acuitardo para presiones menores que la de preconsolidación $\beta_2 = K'_2 / (S'_{s2} b_2^2) \{s^{-1}\}$
β_k	factor del acuitardo para el instante $k \{s^{-1}\}$
γ	peso específico del agua $\{kg/m^3\}$
ϵ	coeficiente de compresibilidad del agua
η	carga hidráulica adimensional, $H/b \{0\}$
ξ	coordenada vertical adimensional, $z/b \{0\}$

Nota: las dimensiones de las variables están dadas entre llaves $\{\}$; m = metros, s = segundos, kg = kilogramos fuerza, 0 adimensional

F I G U R A S

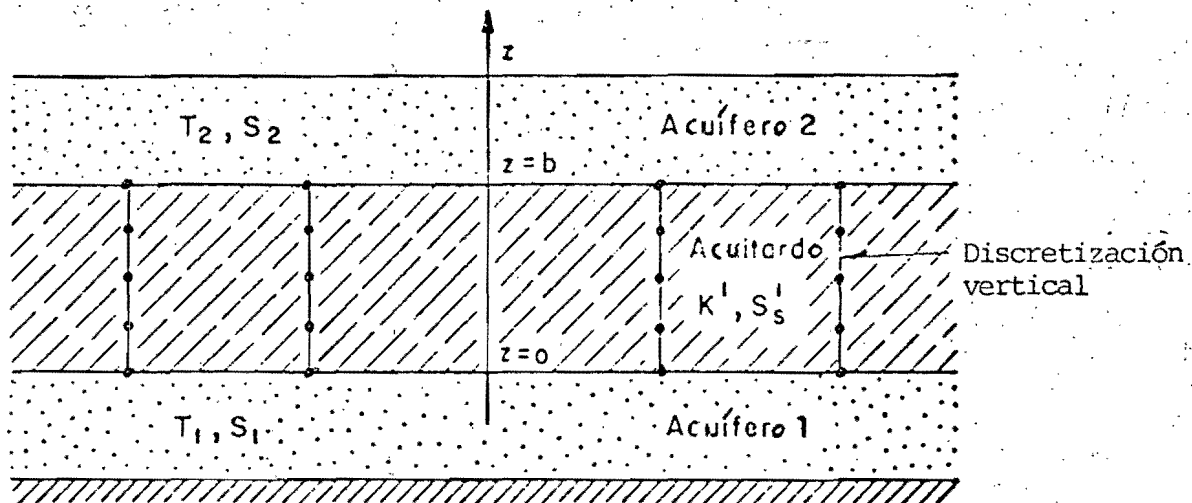


Fig 1 Sistema estratificado en estudio

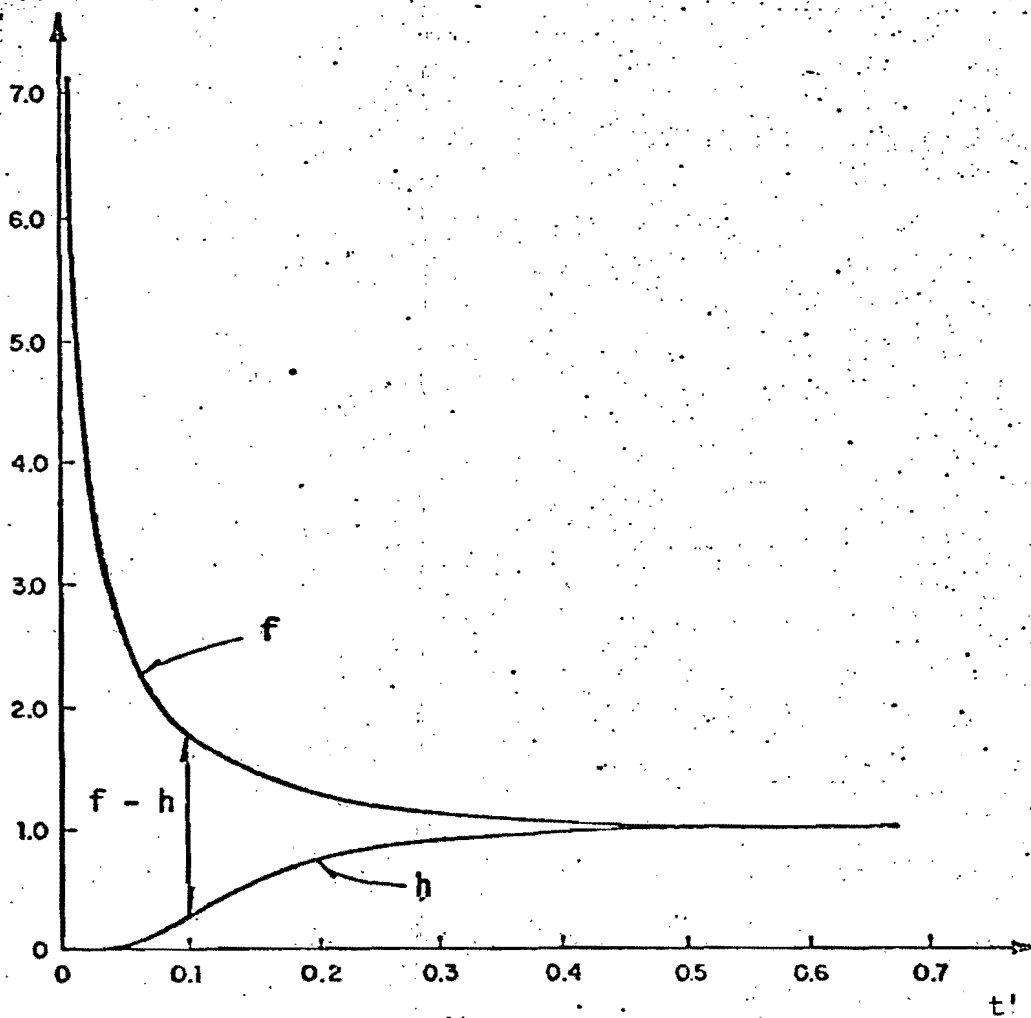


Fig 2 Funciones de memoria (f) y de influencia (h)

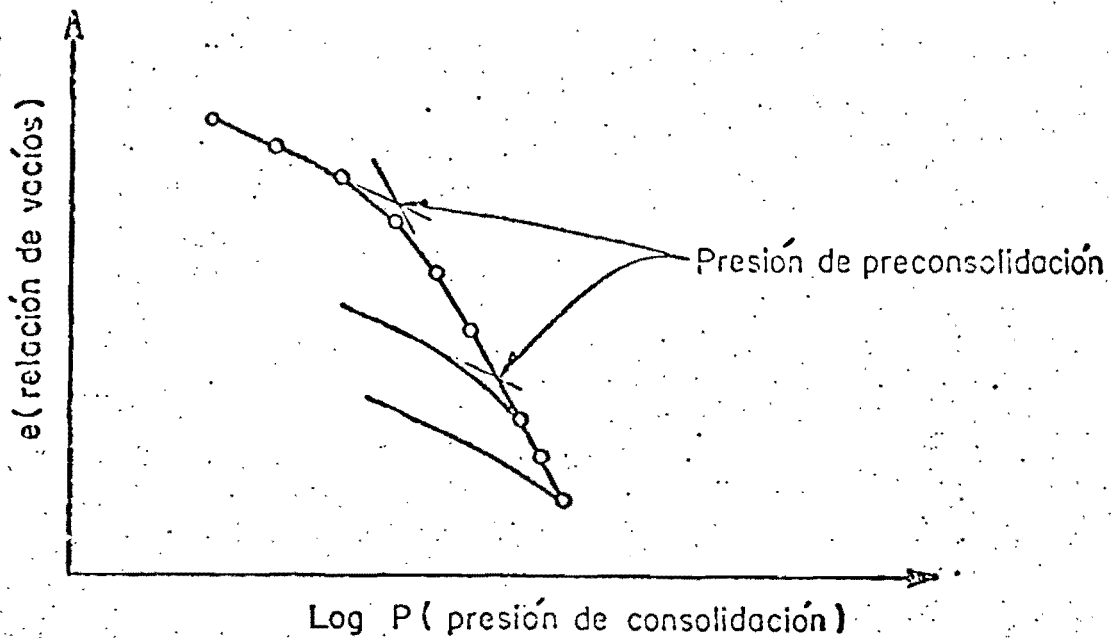


Fig 3 Curva tipo relación de vacíos-presión para arcilla

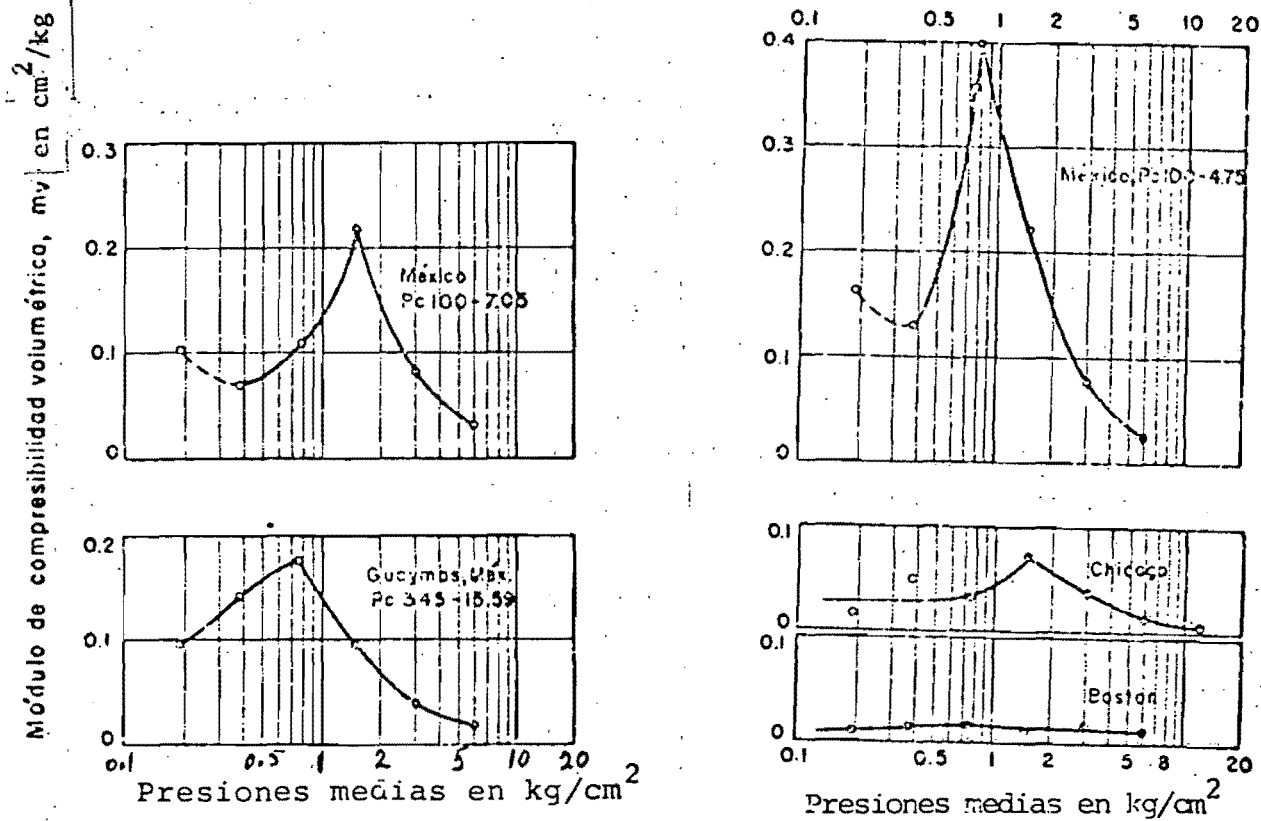


Fig. 4 Variación del módulo de deformación con la presión

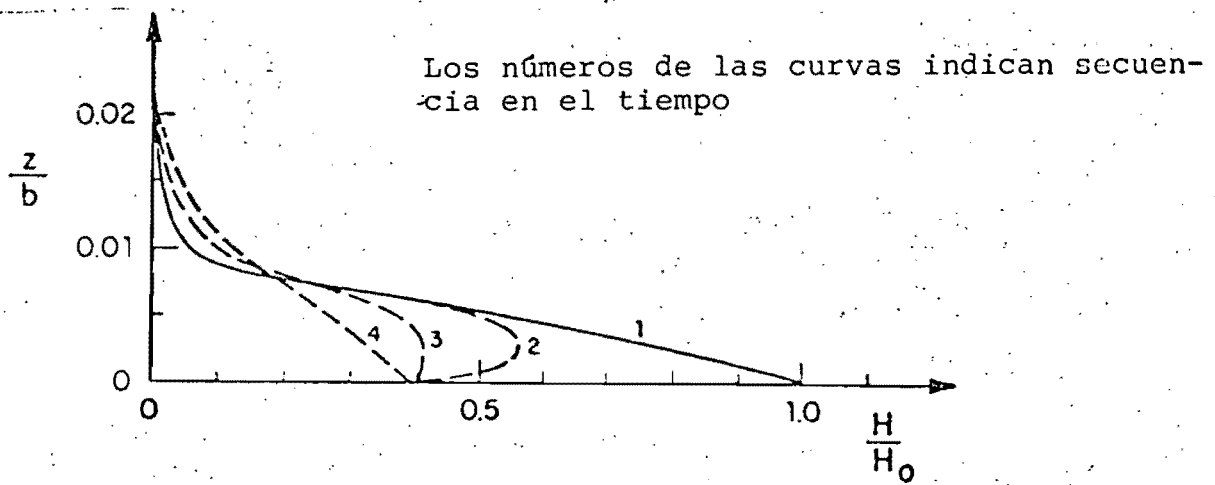


Fig 5 Perfiles de carga hidráulica después de una recuperación

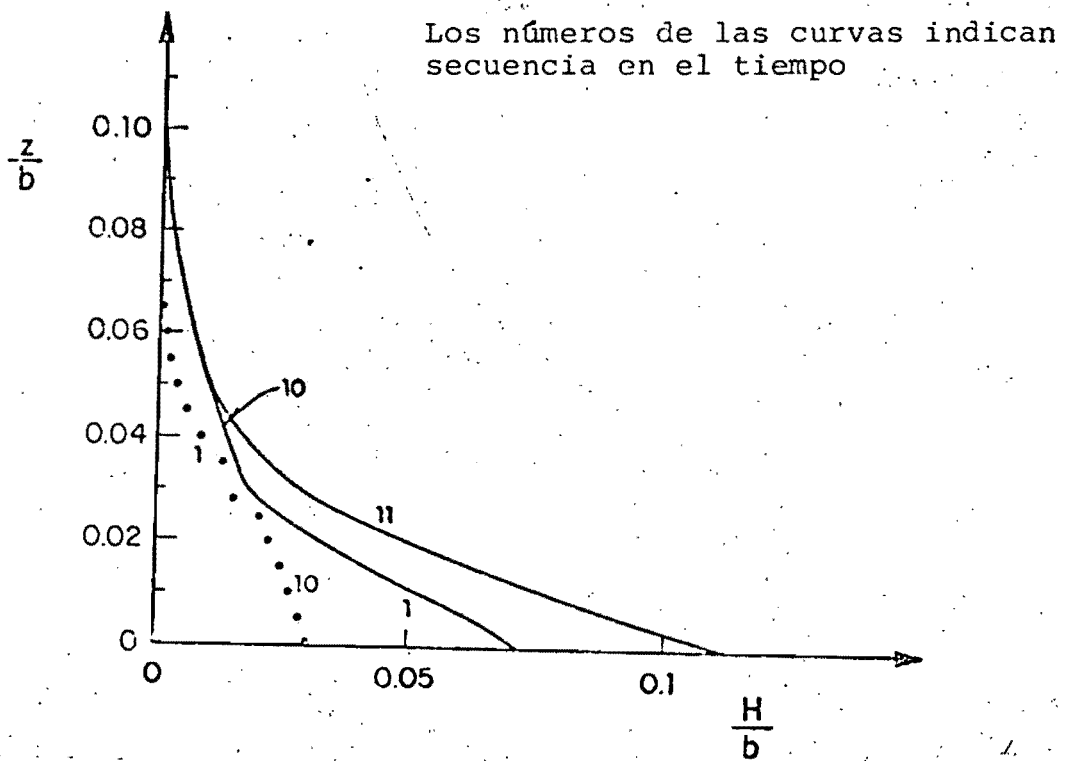


Fig 6 Perfiles de carga hidráulica desde recuperación (10) hasta mayor abatimiento (11)

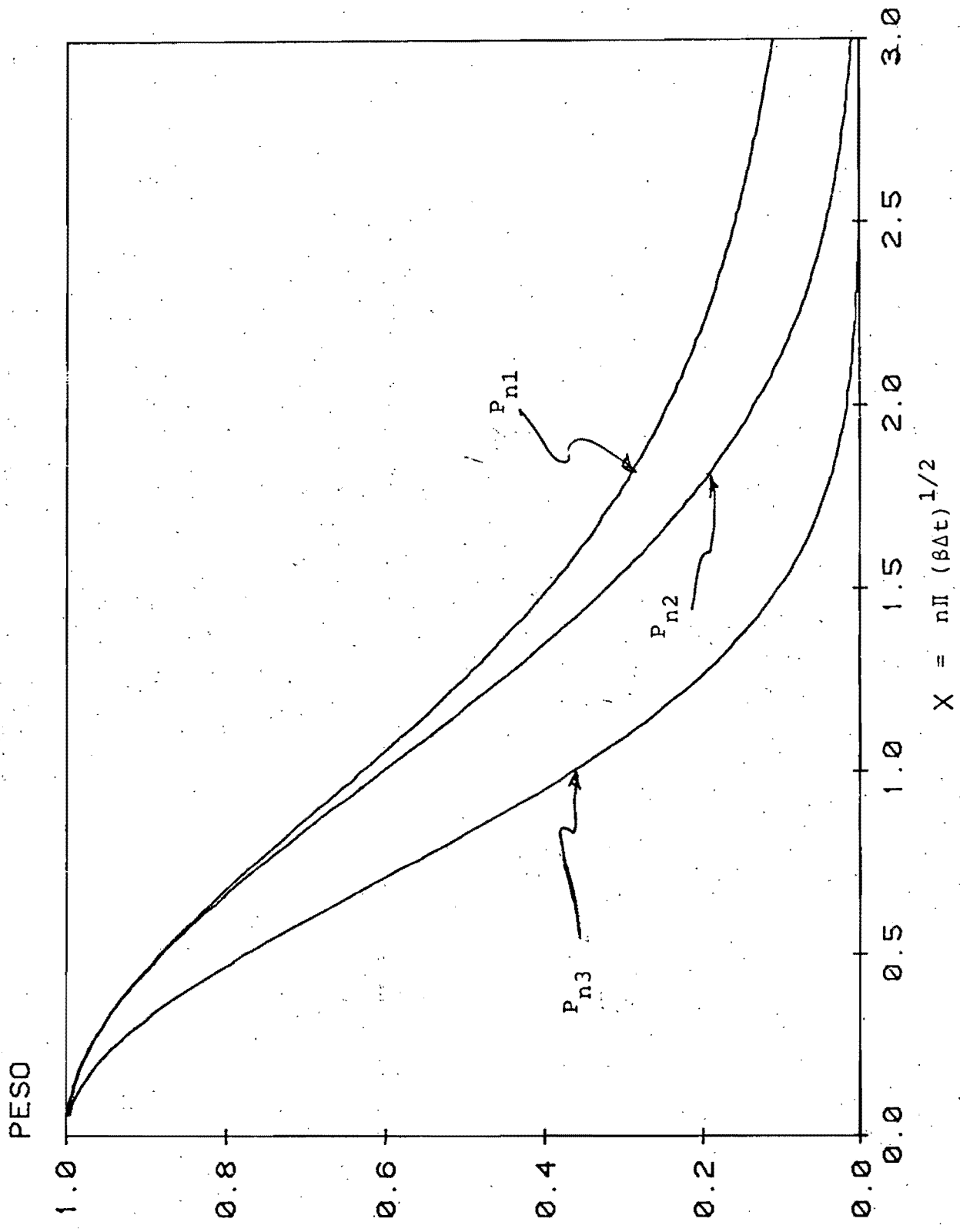


Fig 7 Pesos en la integración numérica de una exponencial

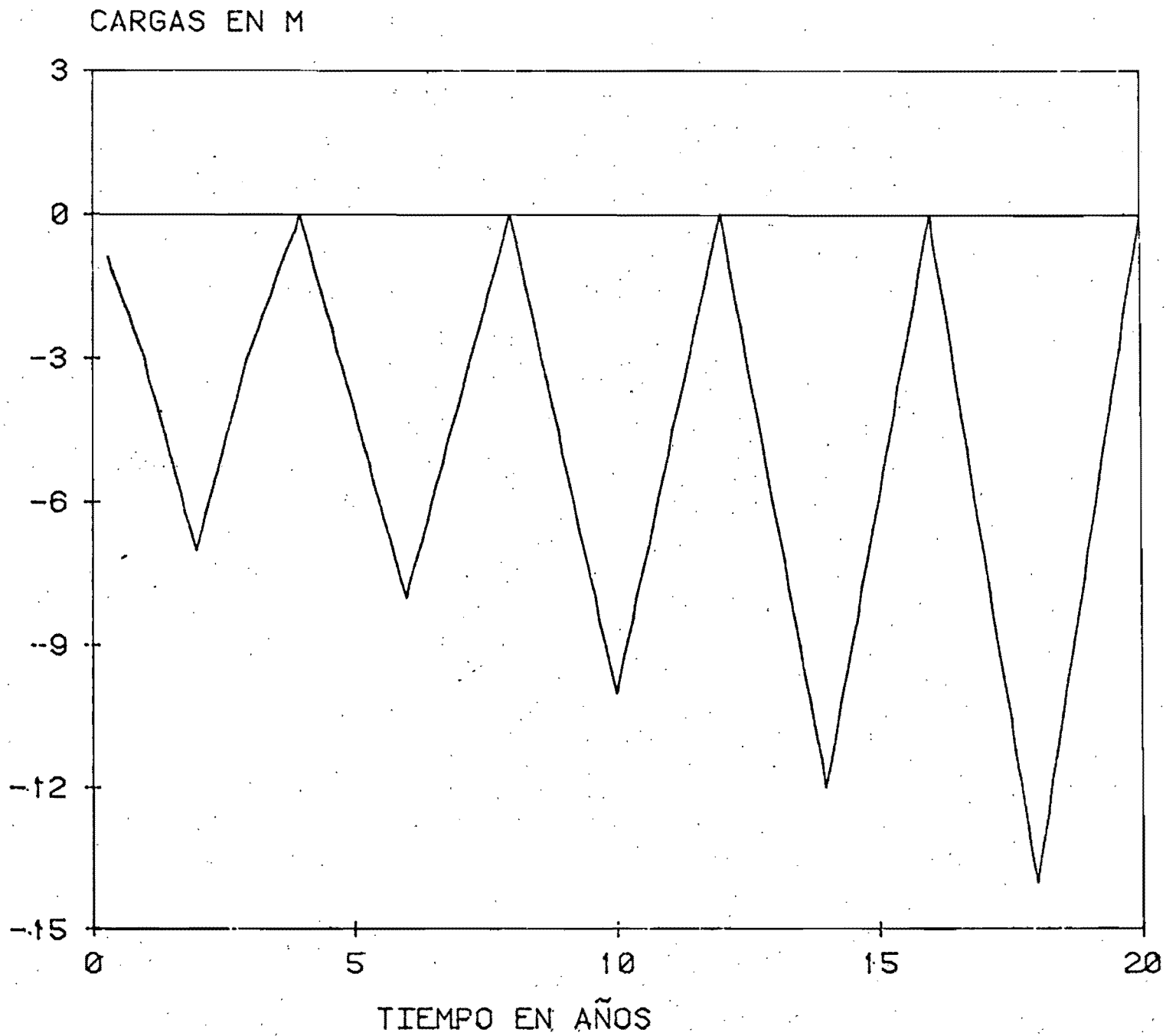
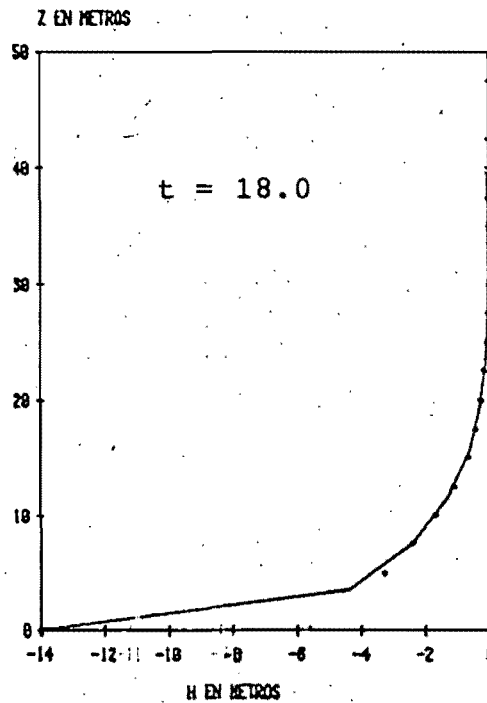
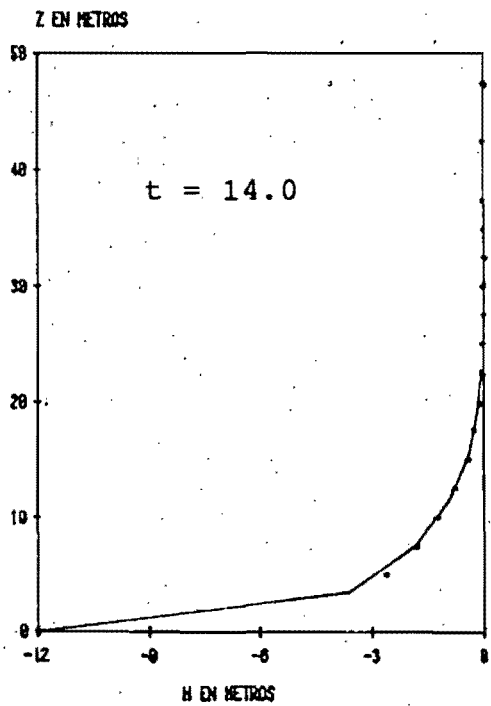
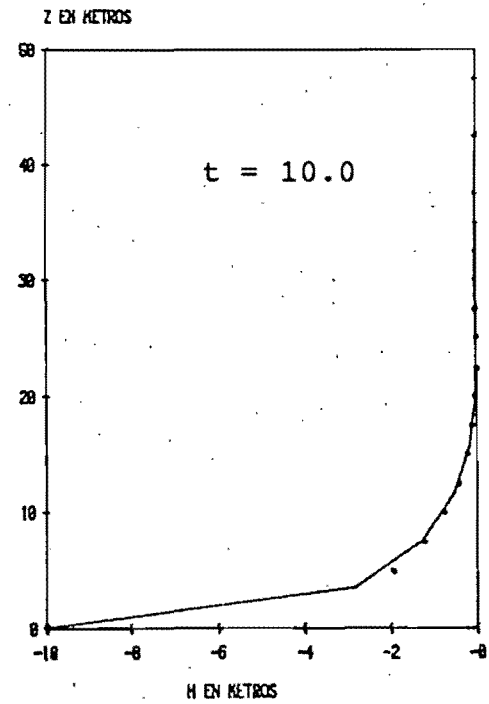
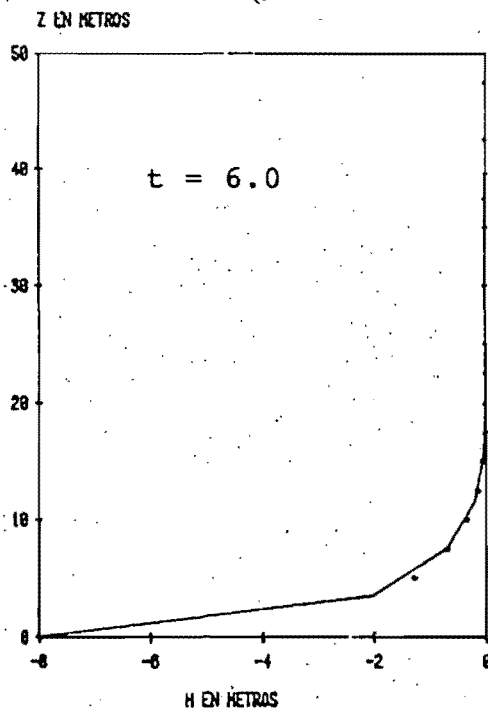
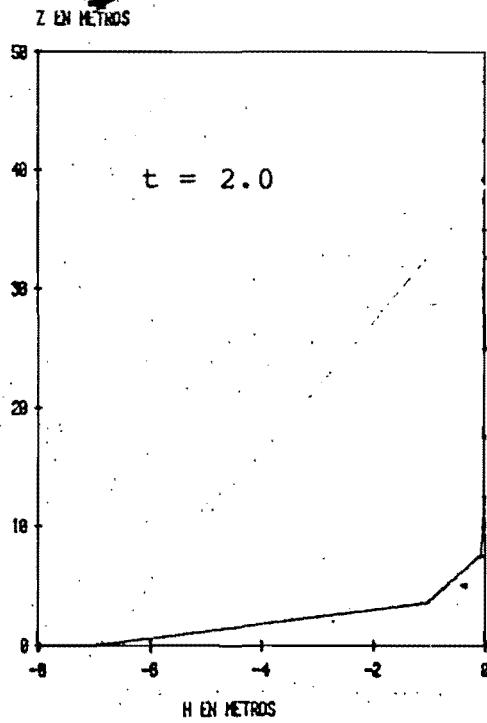
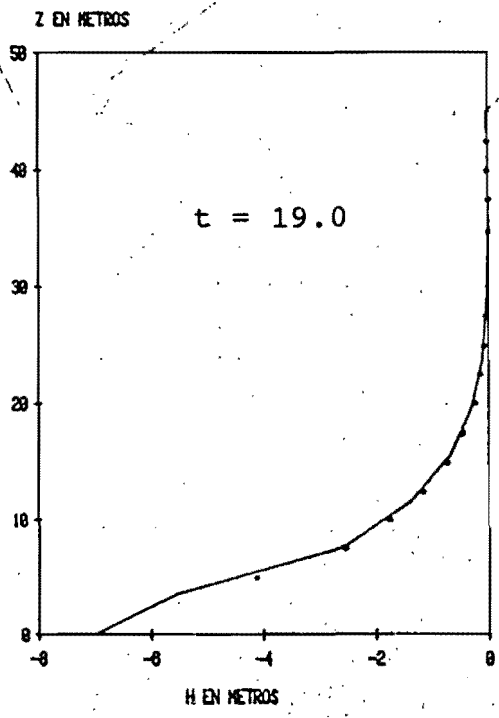
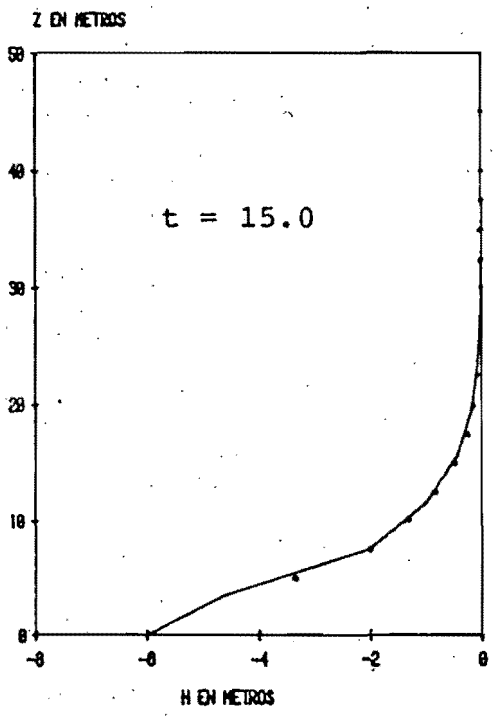
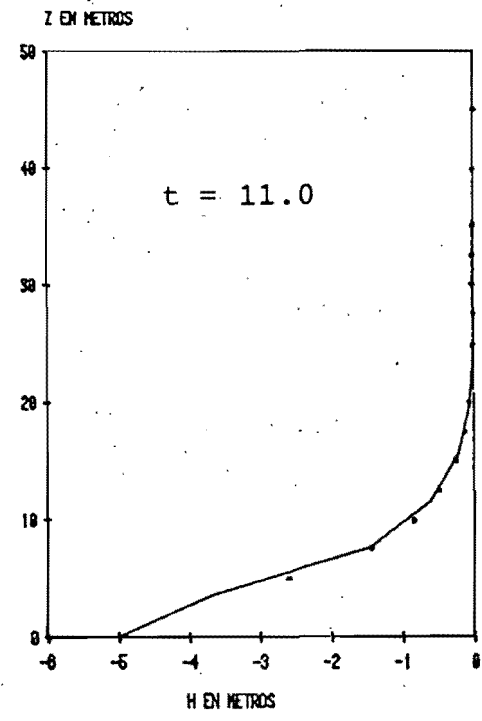
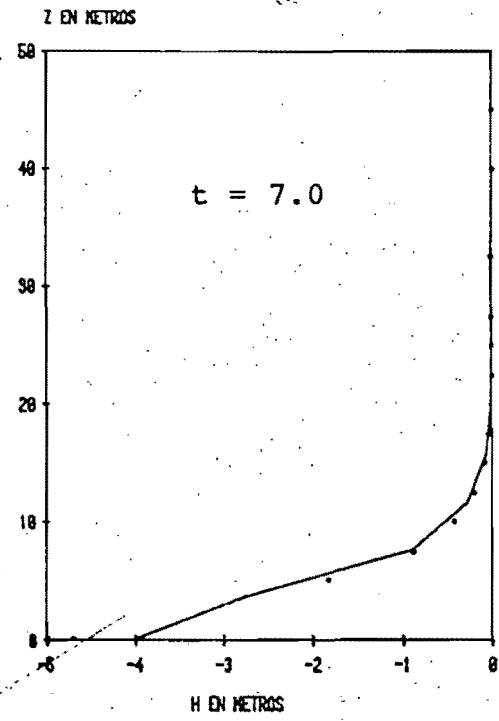
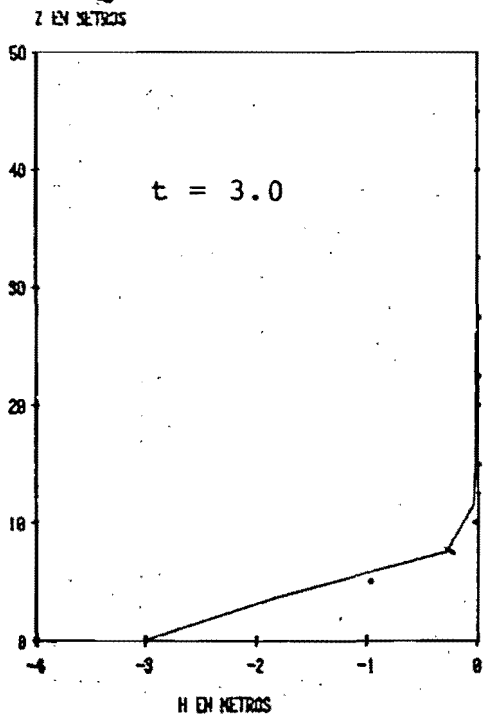


Fig 8: Historia de cargas hidráulicas en la frontera para las pruebas numéricas



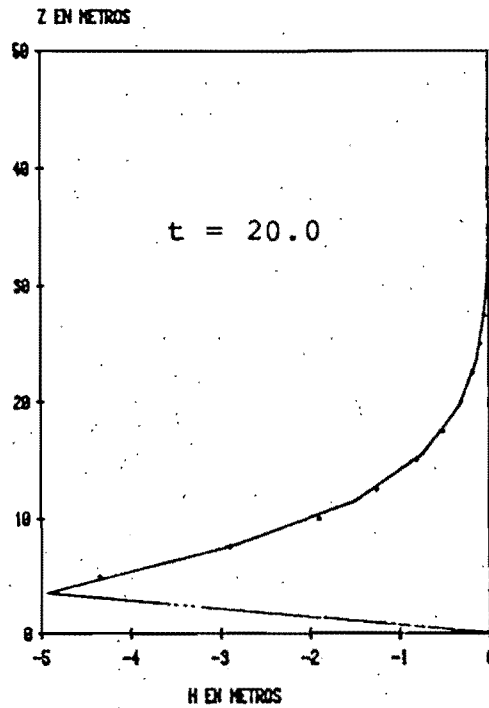
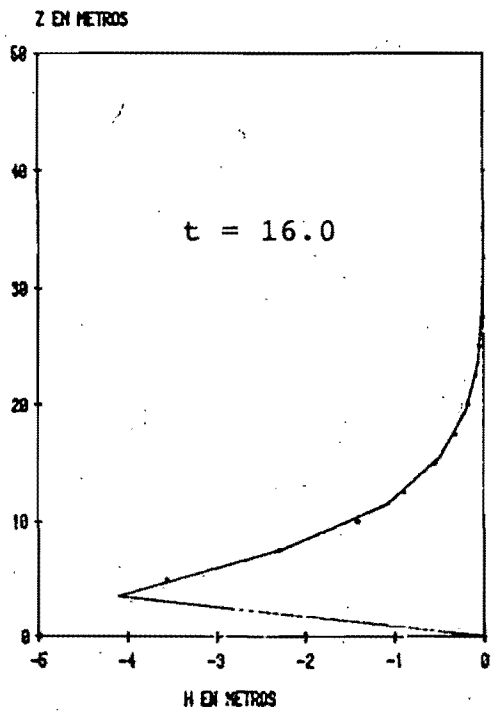
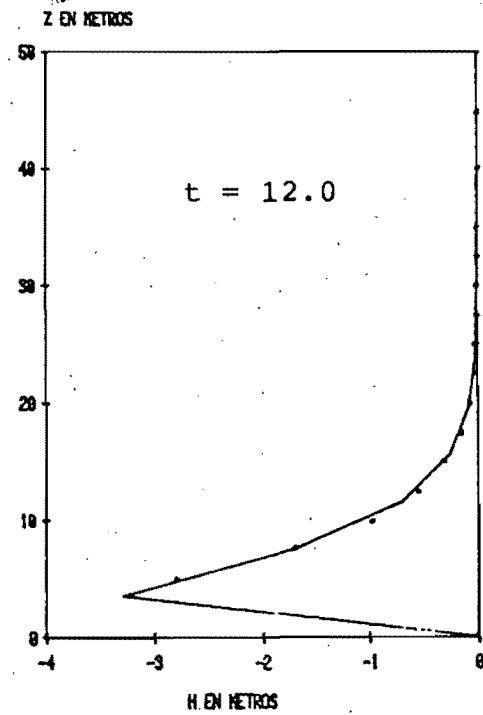
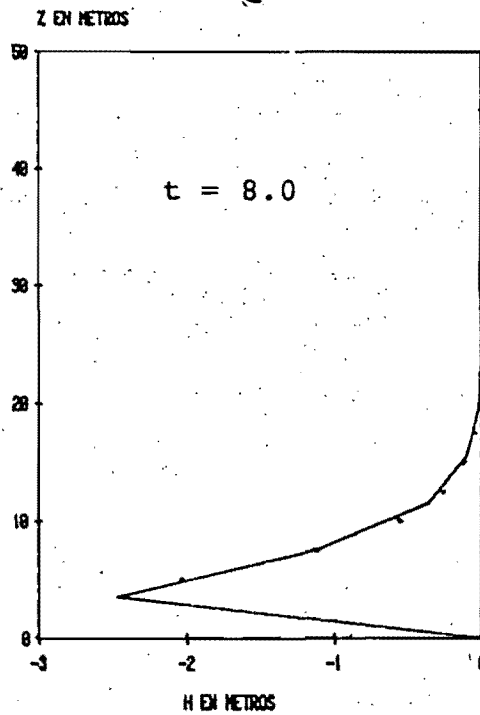
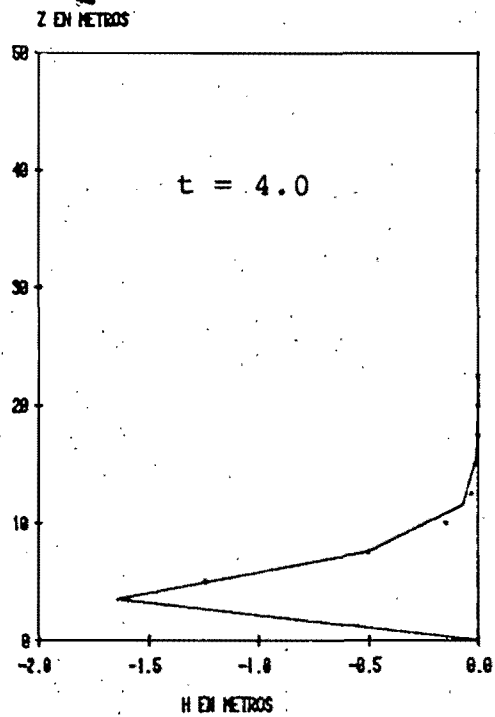
— Diferencias finitas
 Método exacto
 El intervalo de tiempo para diferencias finitas fue 5 veces menor que para el método exacto

FIG 9 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



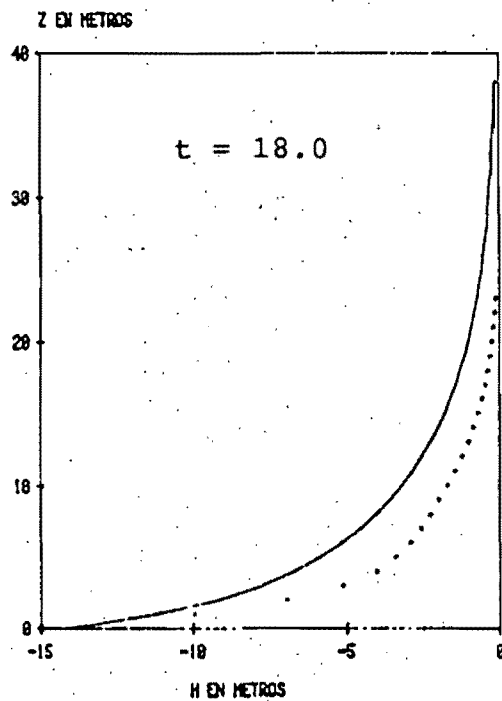
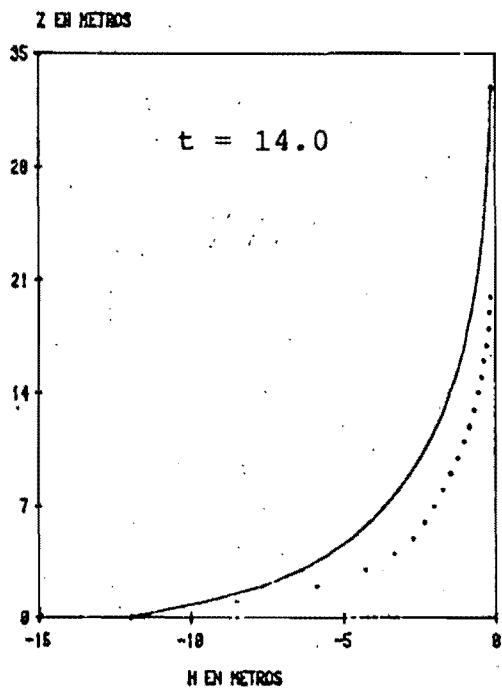
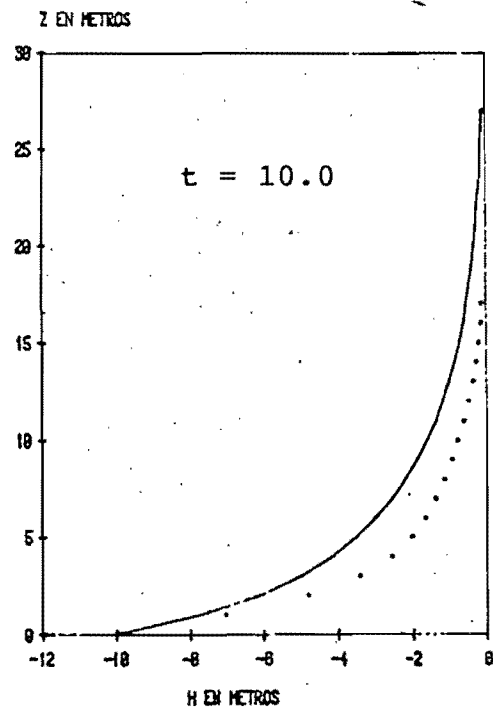
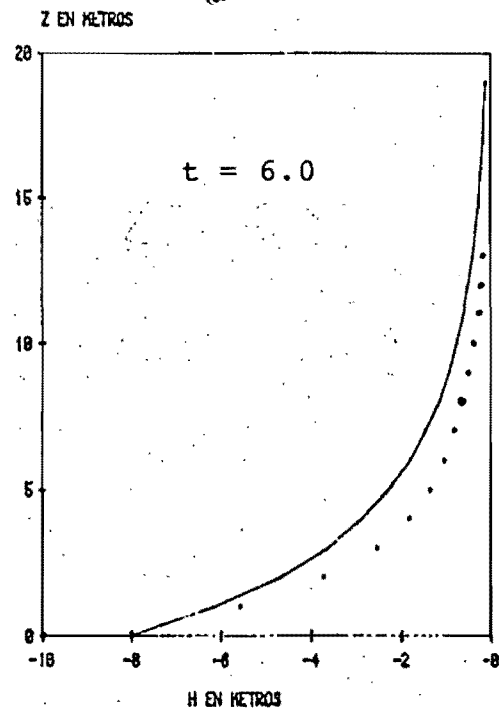
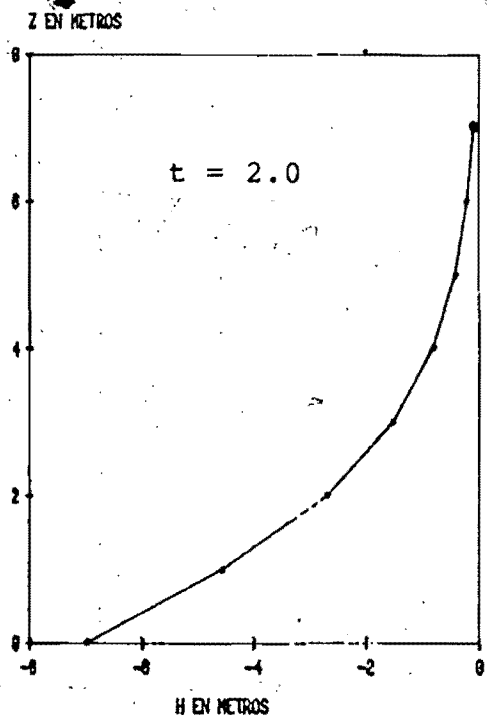
— Diferencias finitas
 Método exacto
 El intervalo de tiempo pa
 ra diferencias finitas
 fue 5 veces menor que pa
 ra el método exacto

FIG 10 Comparación
 de perfiles
 de carga en
 la vertical
 (media)



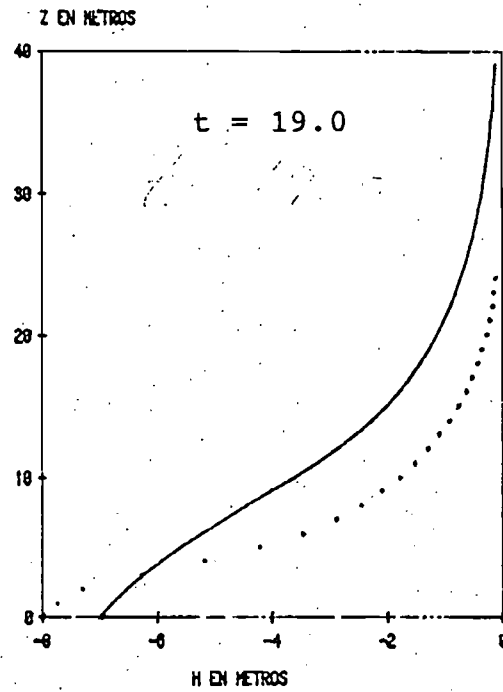
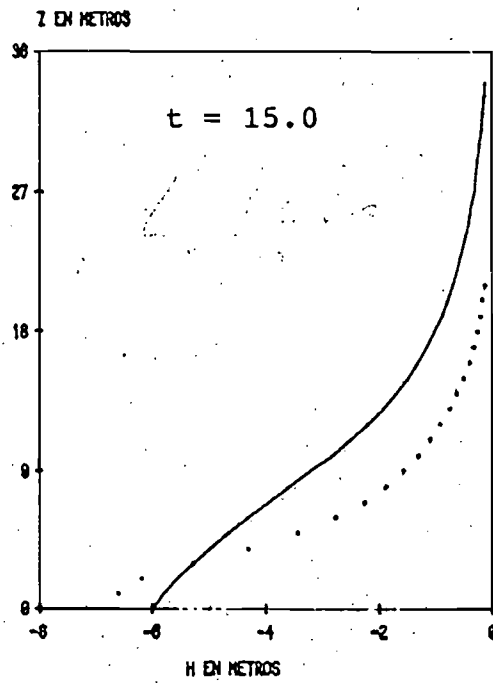
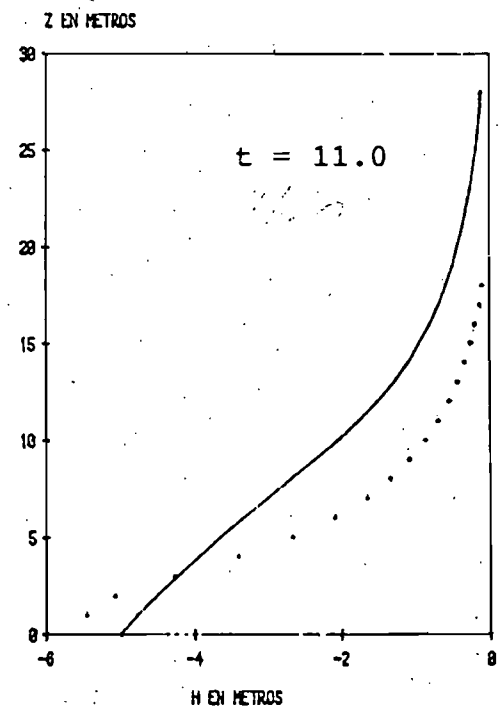
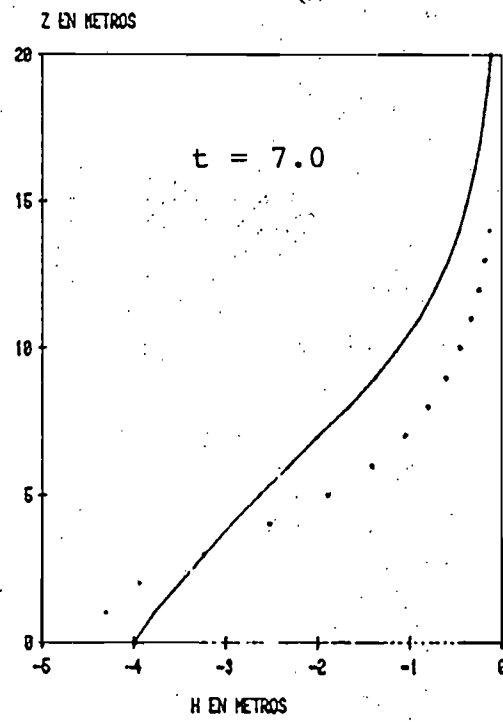
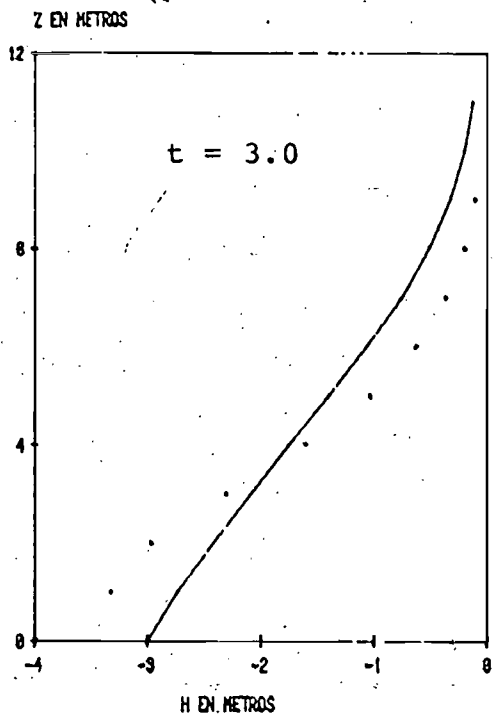
— Diferencias finitas
 Método exacto
 El intervalo de tiempo
 para diferencias finitas
 fue 5 veces menor que pa-
 ra el método exacto

FIG 11 Comparación
 de perfiles
 de carga en
 la vertical
 (máxima)



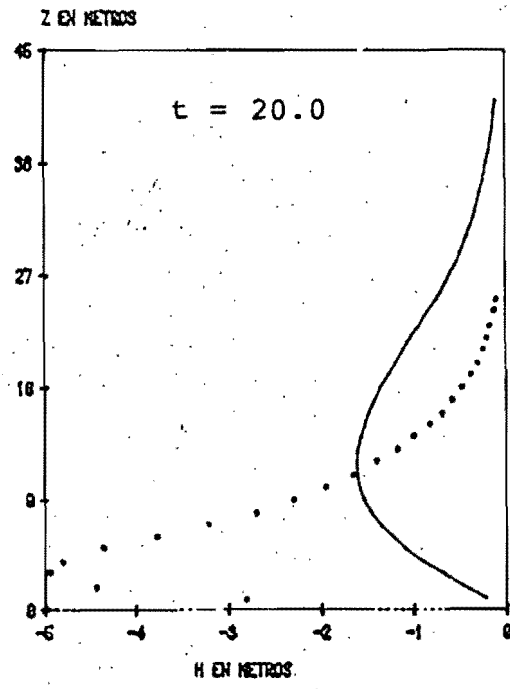
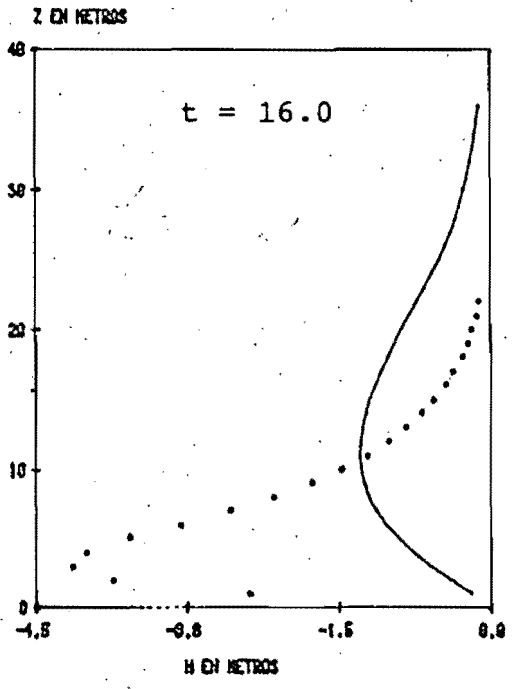
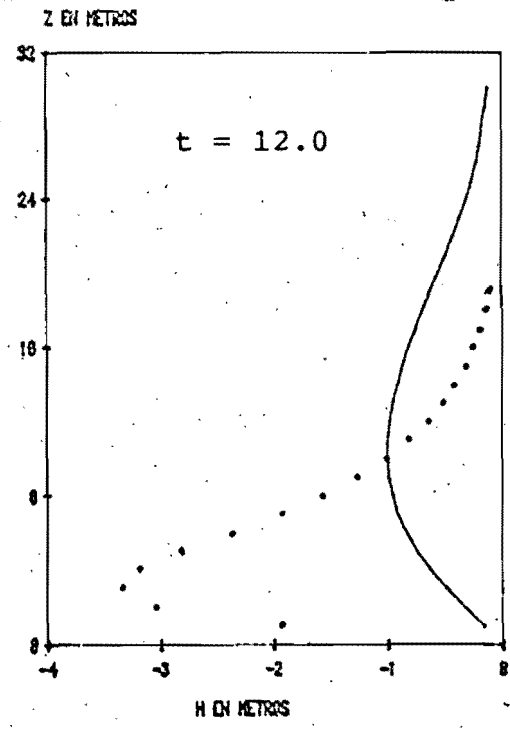
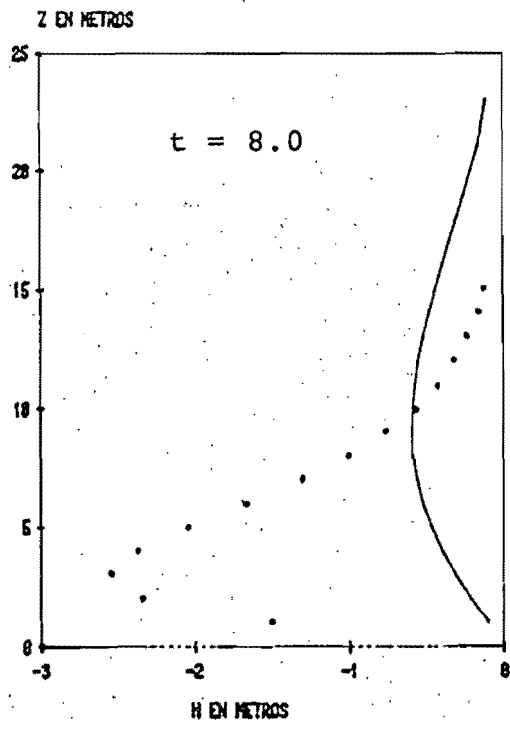
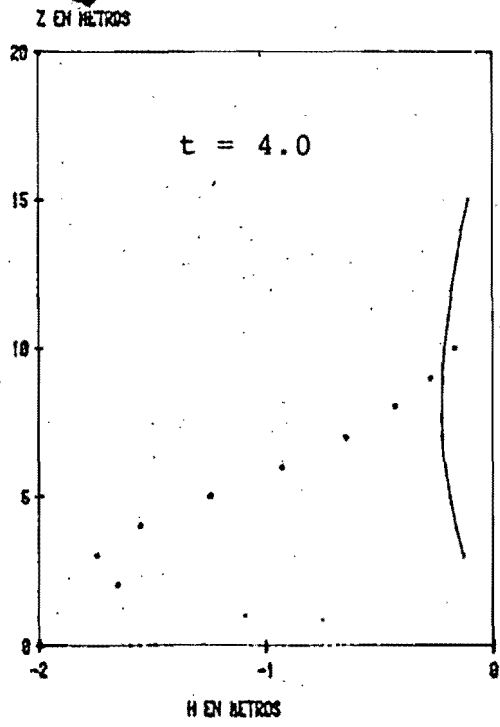
— Diferencias finitas
 sin histéresis
 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50$

FIG 12 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



Diferencias finitas
Sin histéresis
 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50m$

FIG 13 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)



— Diferencias finitas
 Sin histéresis
 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50m$

FIG 14 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

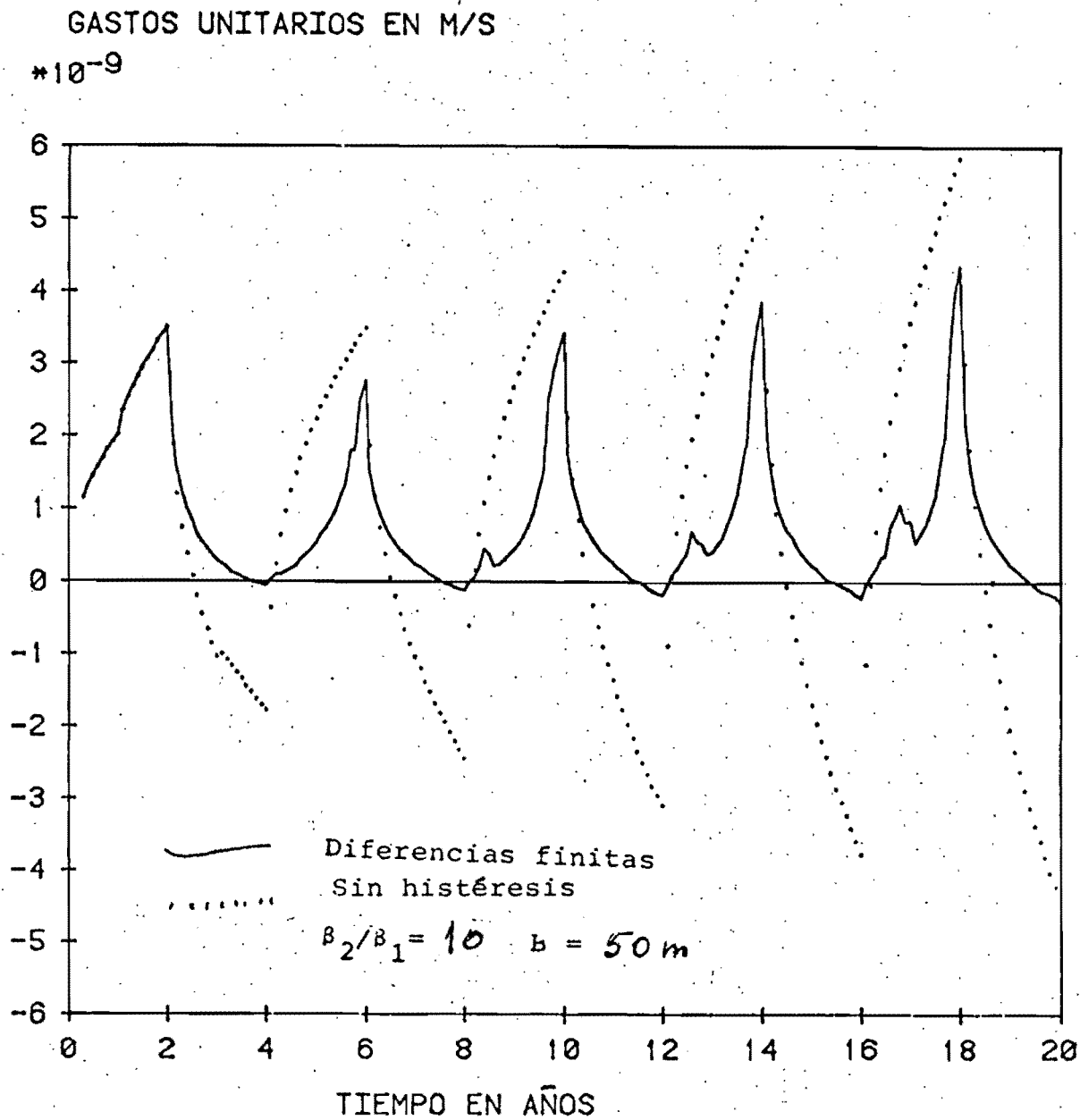
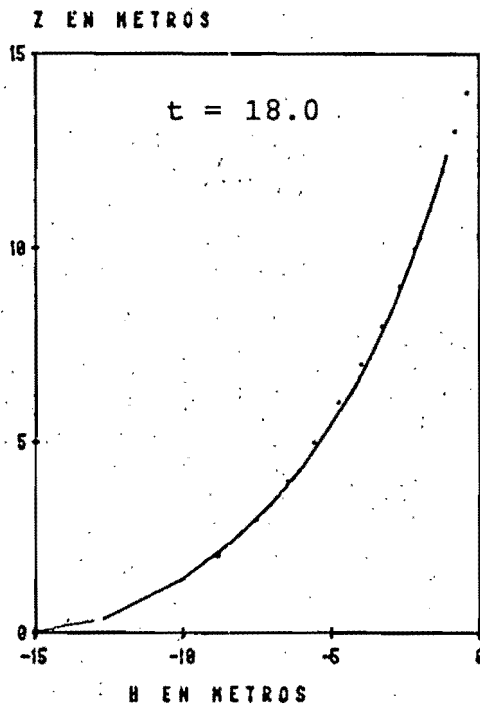
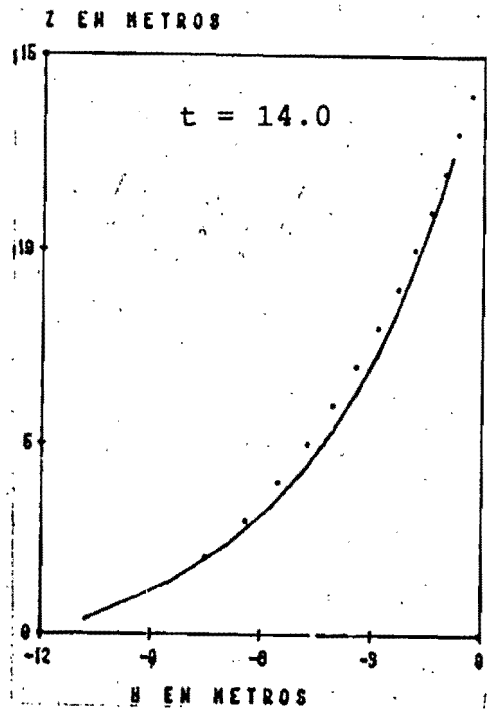
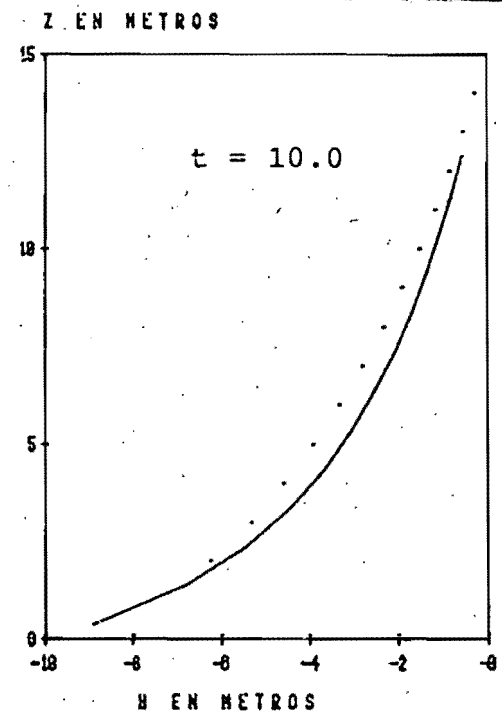
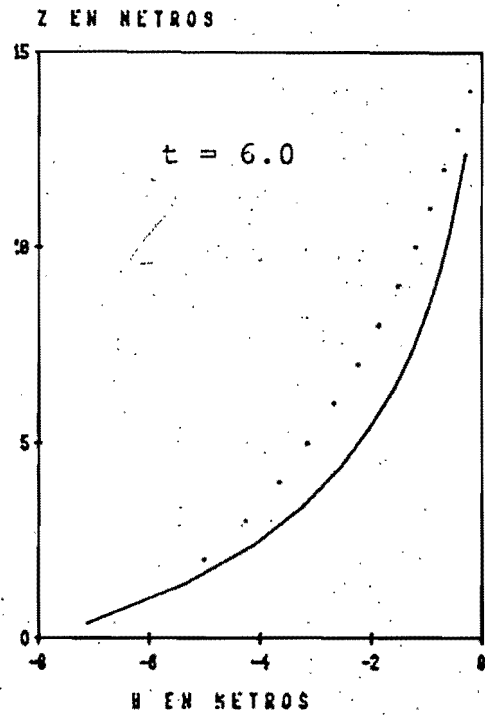
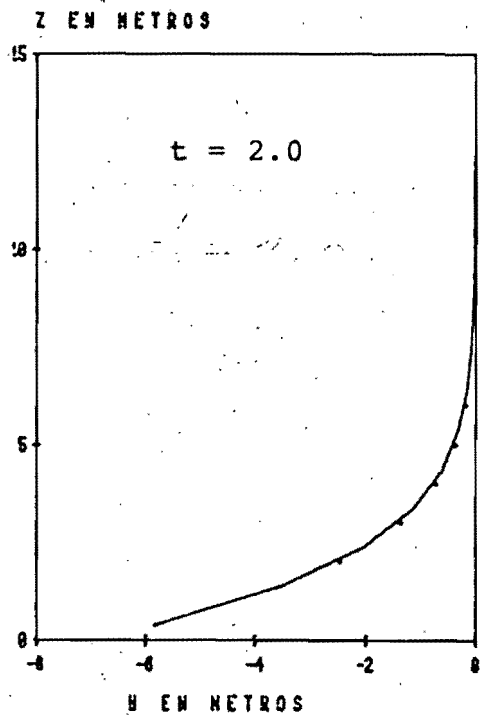


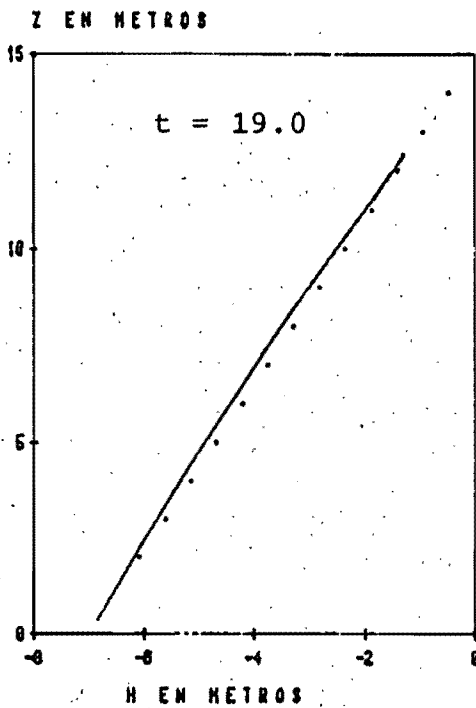
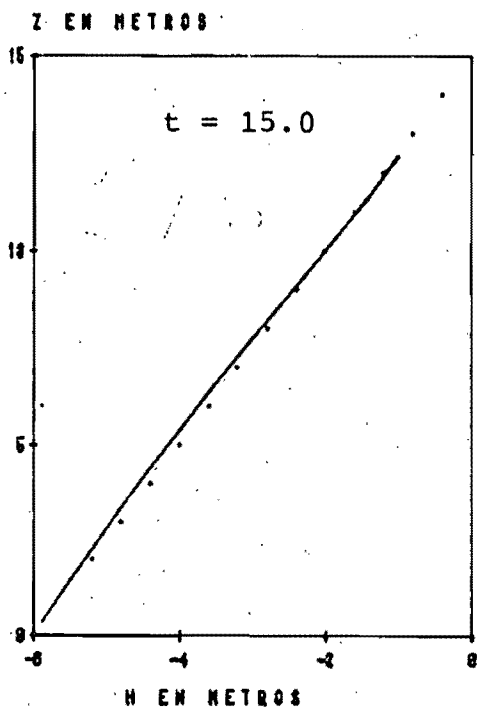
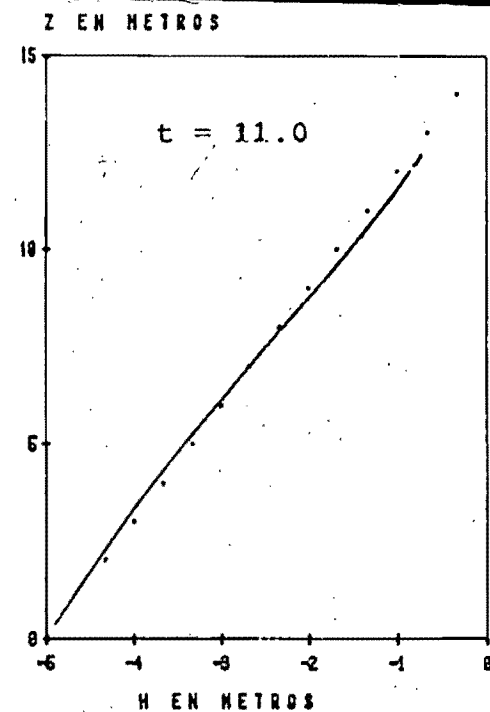
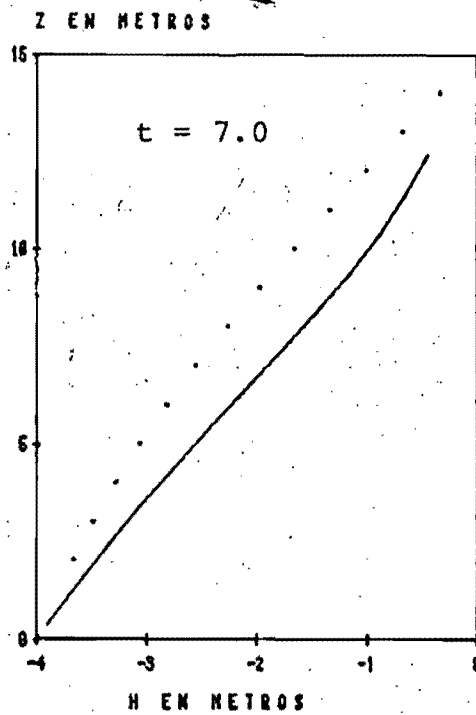
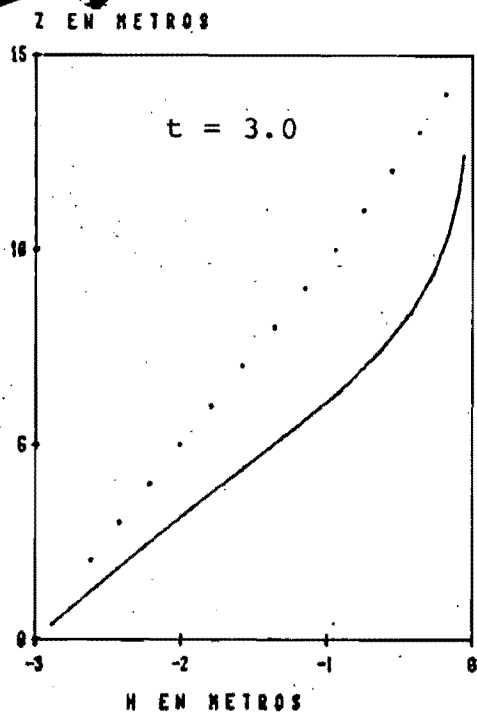
FIG 15 Comparación de caudales drenados



— Diferencias finitas
 Método aproximado

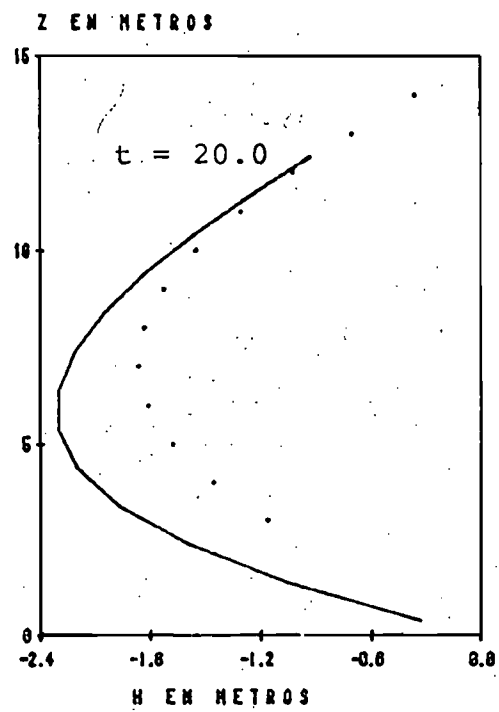
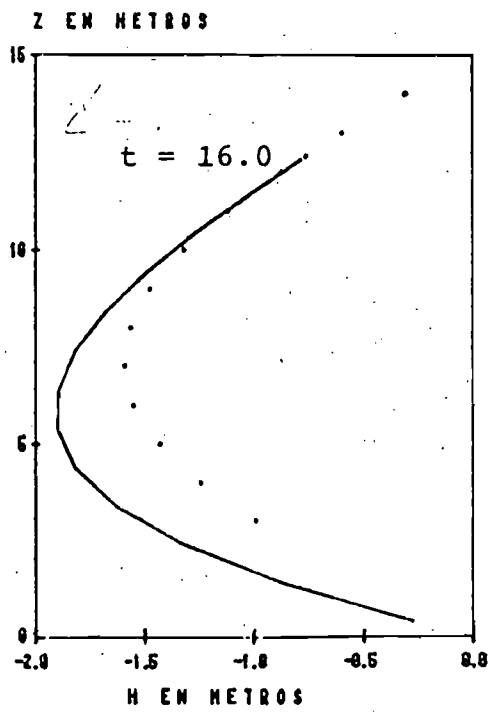
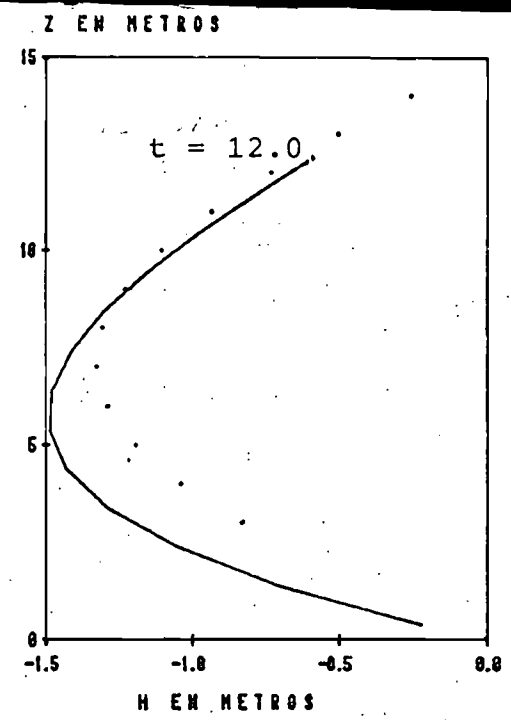
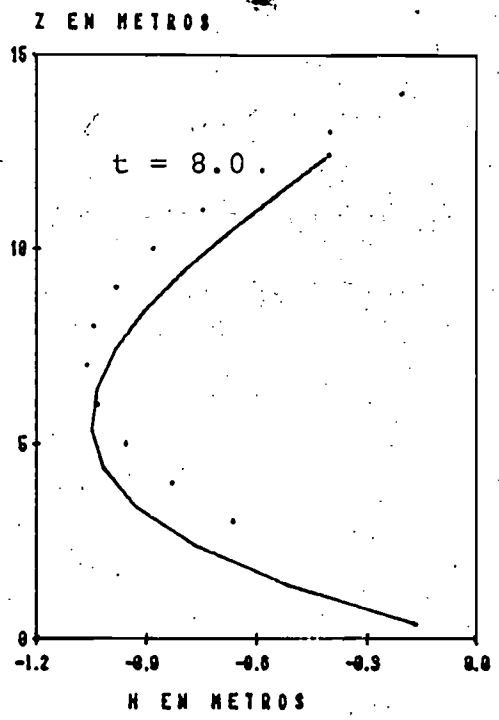
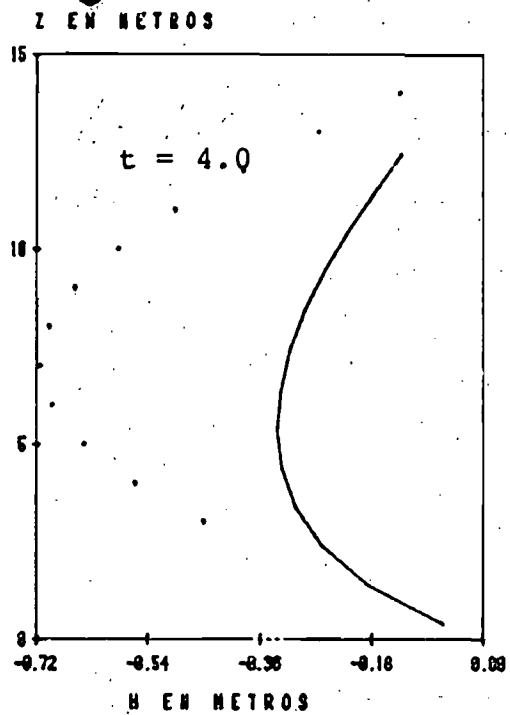
$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 15m$

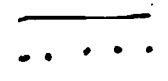
FIG 16 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



— Diferencias finitas
 Método aproximado I
 $B_2/B_1 = 10$ $b = 15m$

FIG 17 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)





 Diferencias finitas

 Método aproximado

 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 15m$

FIG 18 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M/S
*10⁻⁹

— Diferencias finitas
••••• Método aproximado I
 $B_2/B_1 = 10$ $B = 15m$

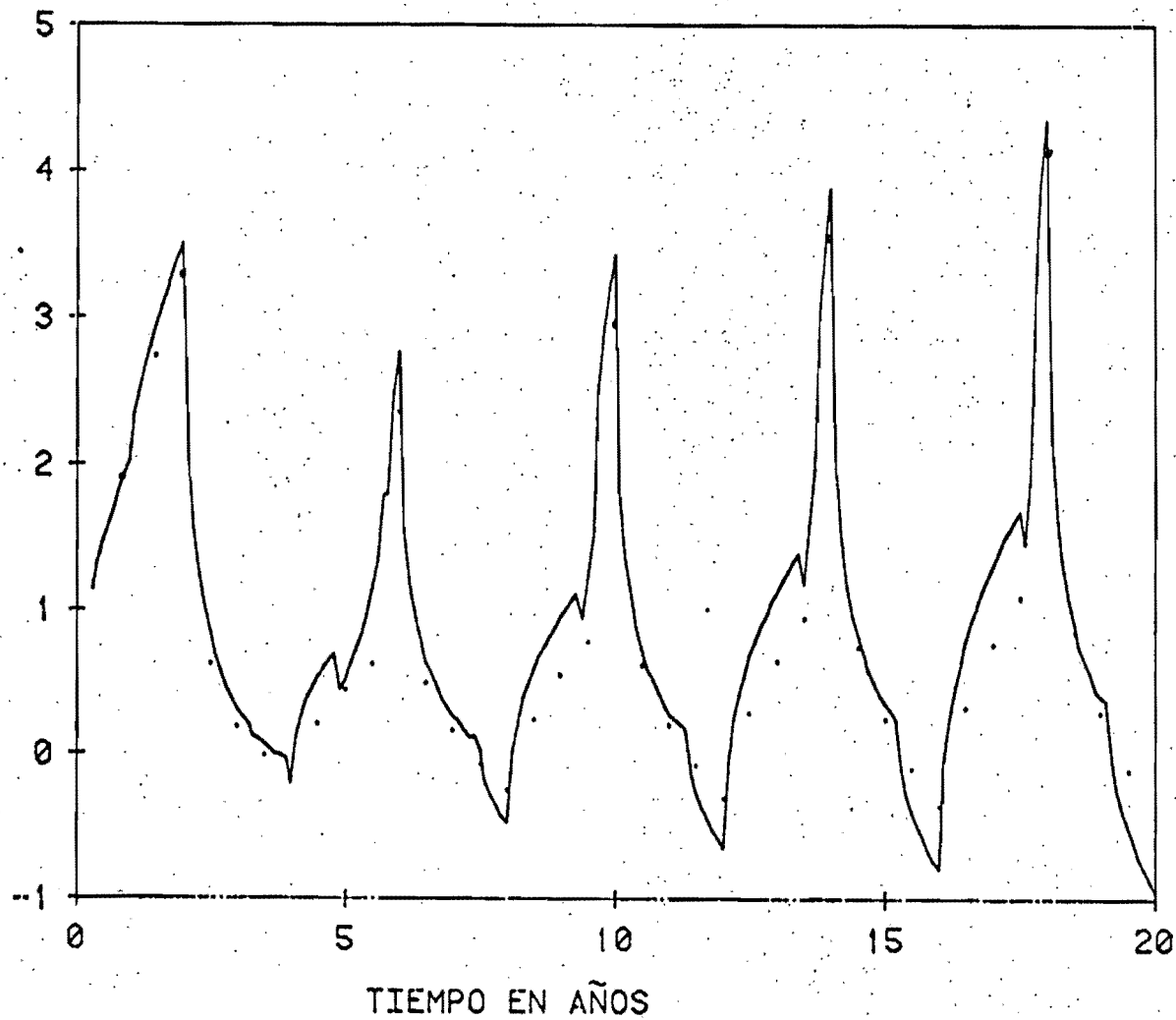


FIG 19 Comparación de caudales drenados

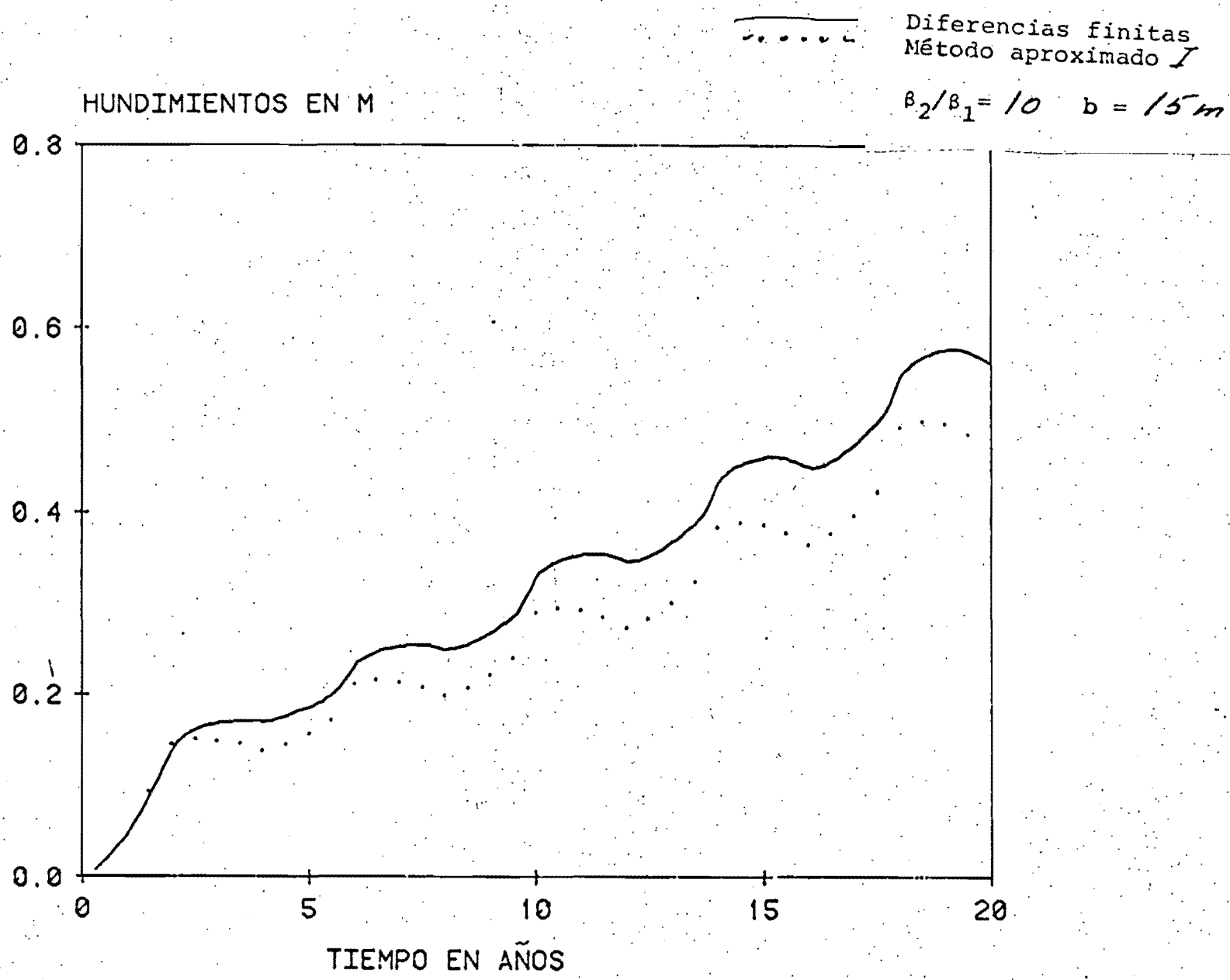
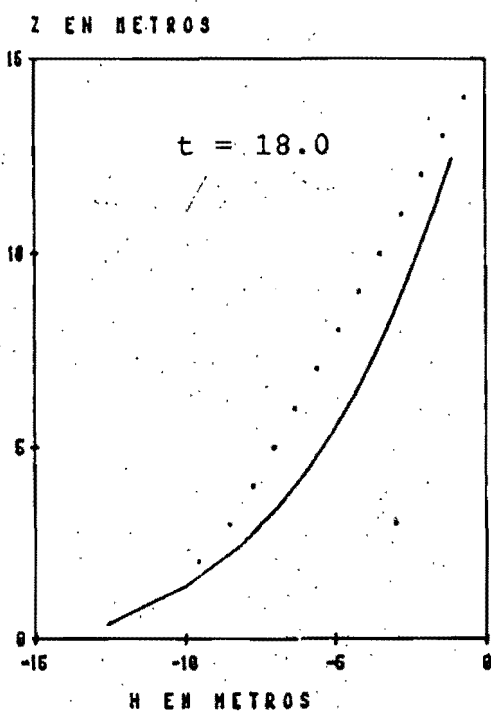
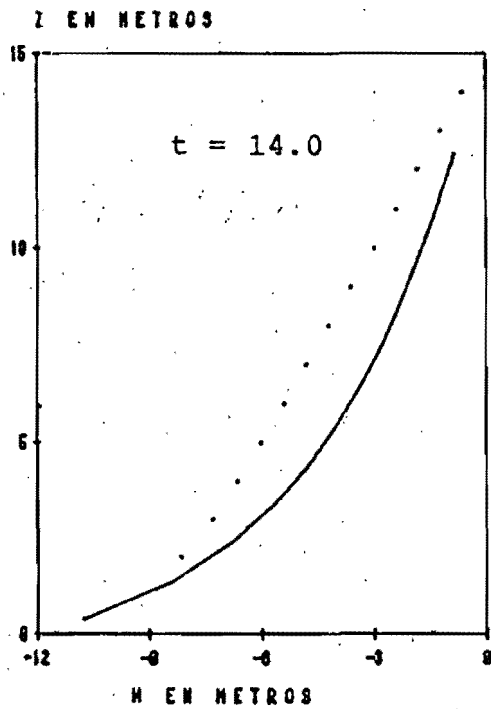
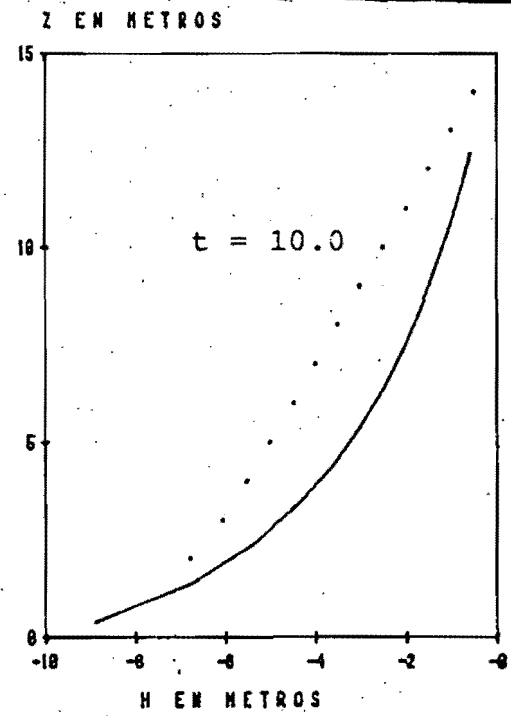
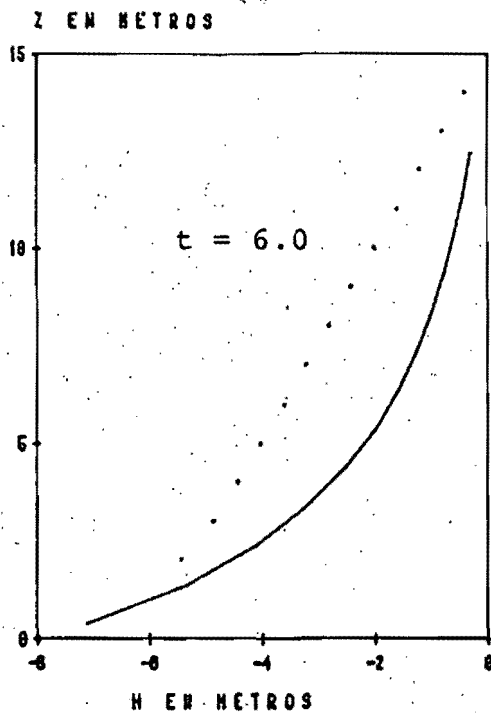
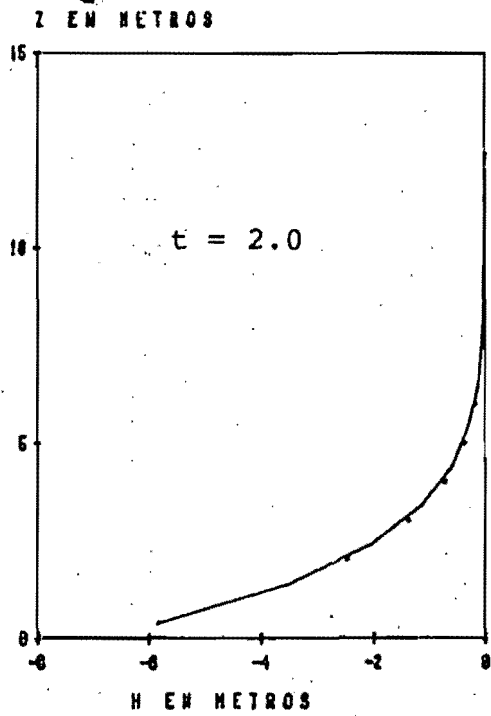




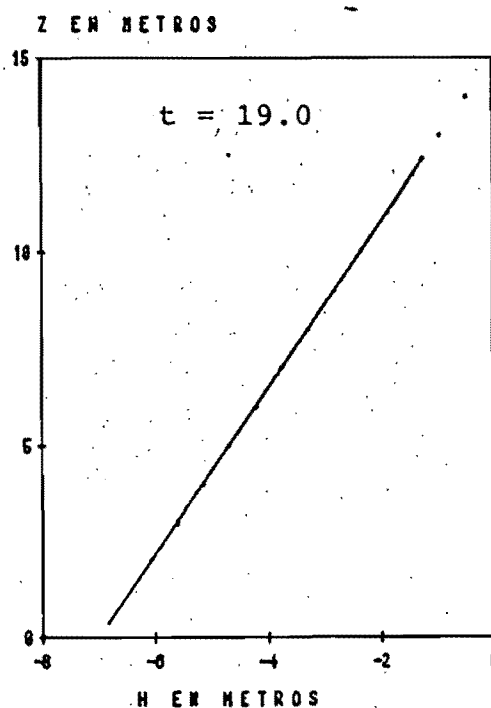
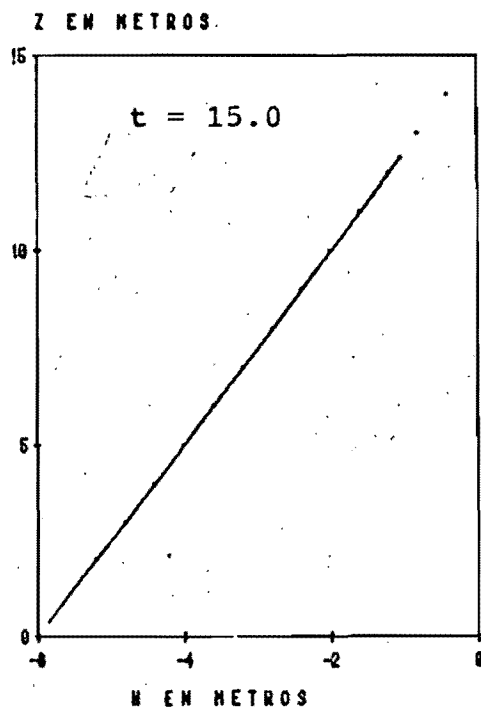
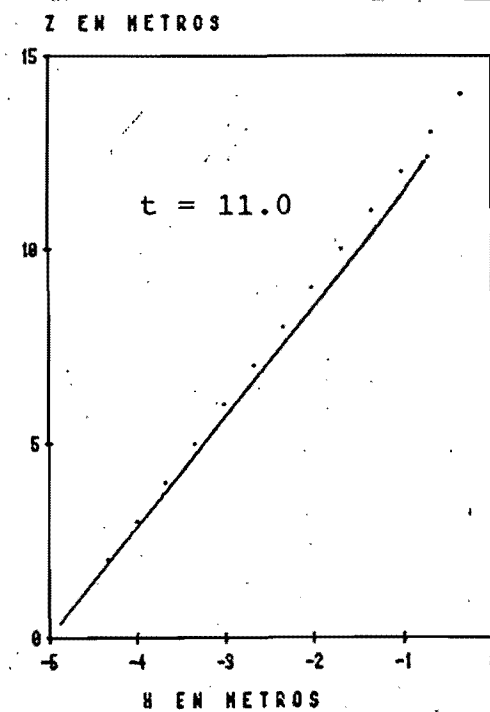
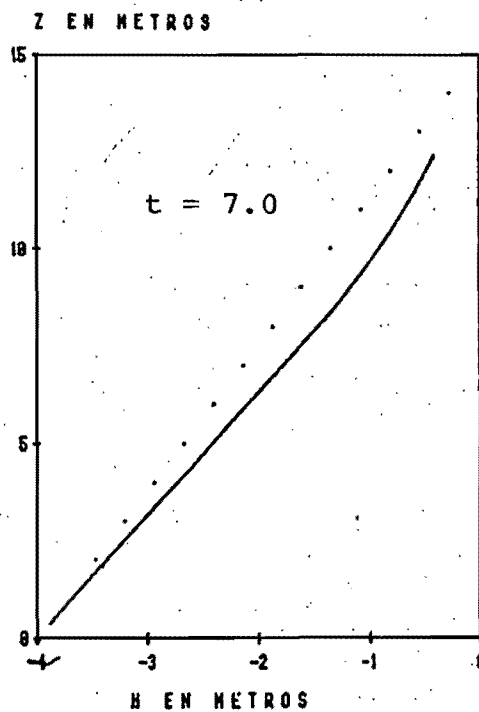
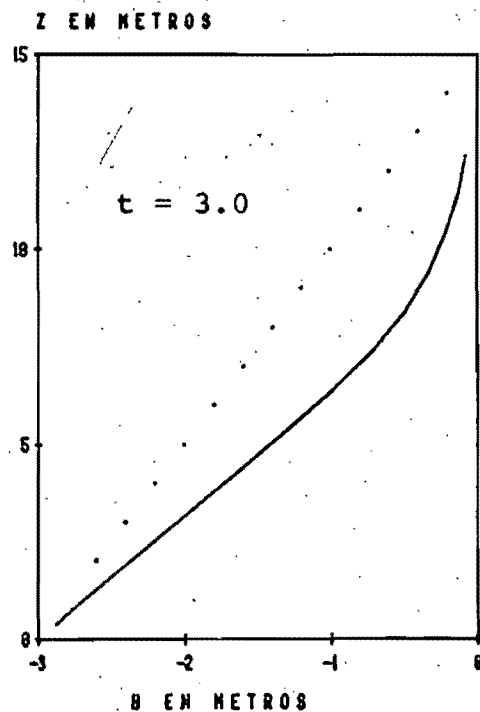
FIG 20 Comparación de hundimientos



 Diferencias finitas
 Método aproximado

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 15m$

FIG 2/ Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)

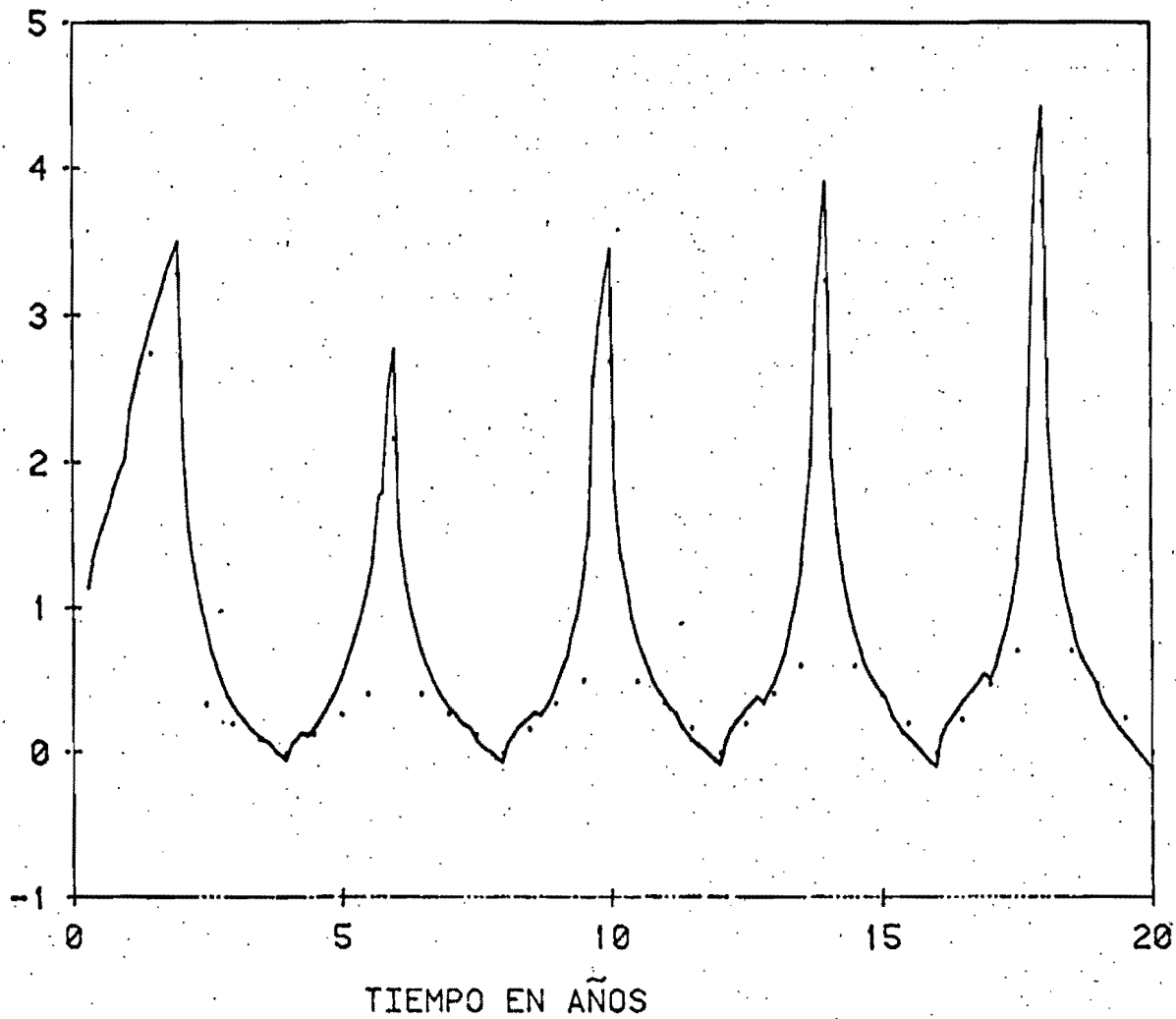


Diferencias finitas
Método aproximado I

$$\beta_2/\beta_1 = 100 \quad b = 15m$$

FIG 22 Comparación
de perfiles
de carga en
la vertical
(media)

GASTOS UNITARIOS EN M/S
 $\times 10^{-9}$



Diferencias finitas
Método aproximado I

$$B_2/B_1 = 100 \quad B = 15m$$

FIG 23 Comparación de caudales drenados

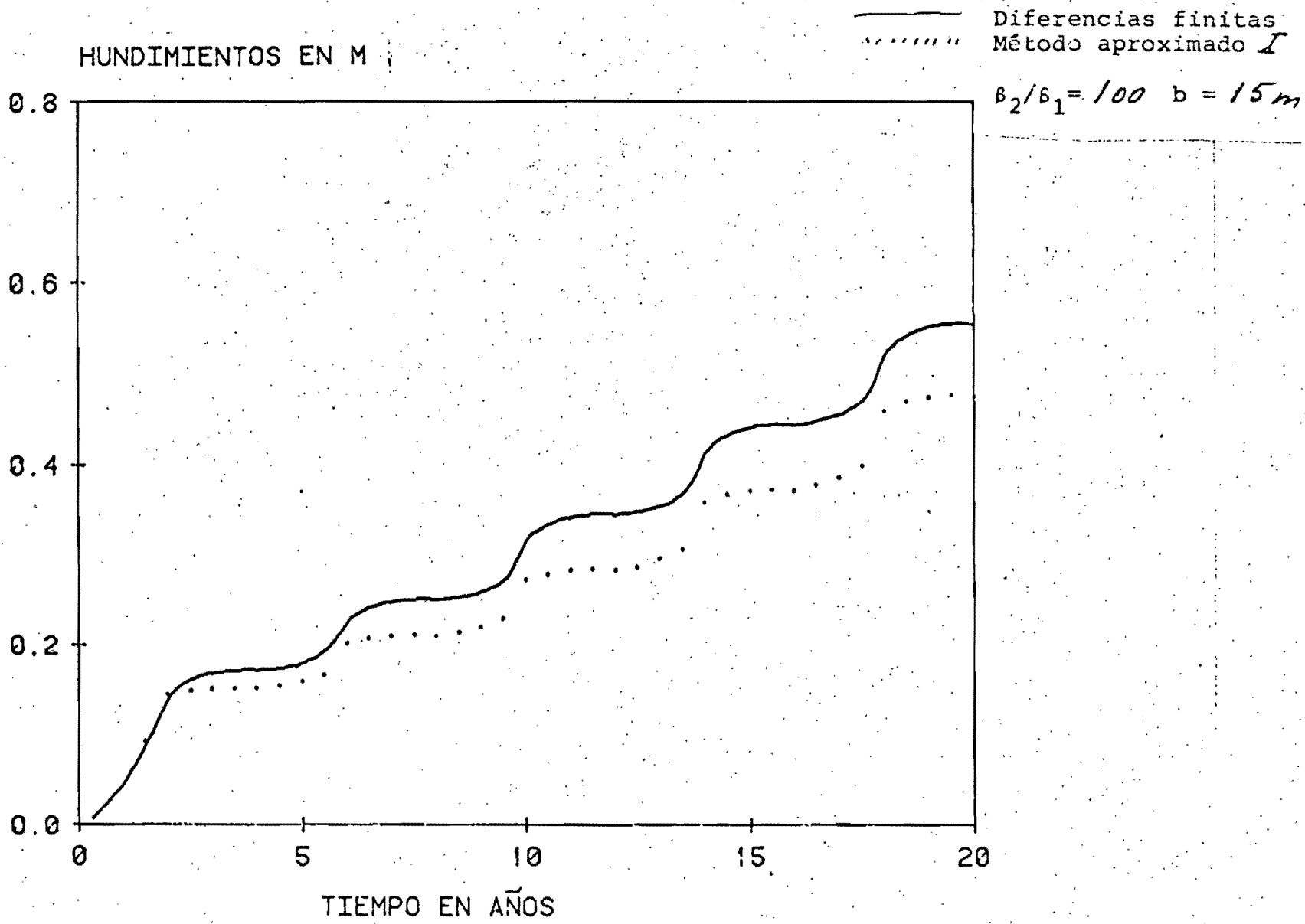
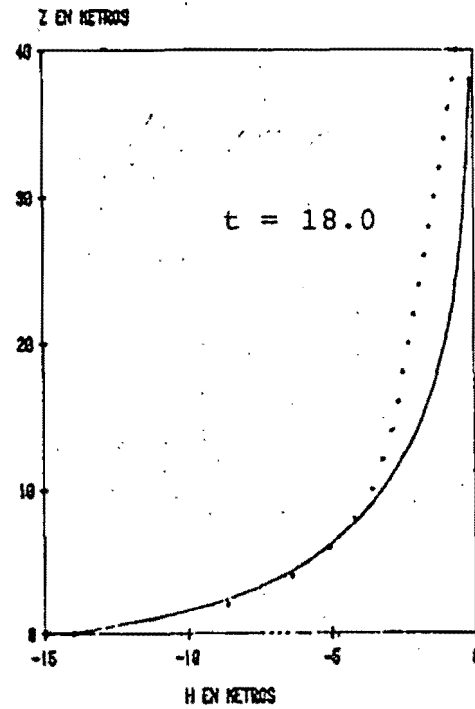
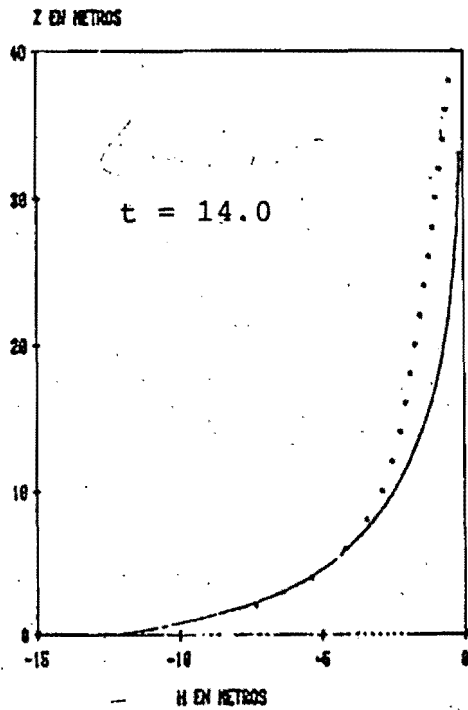
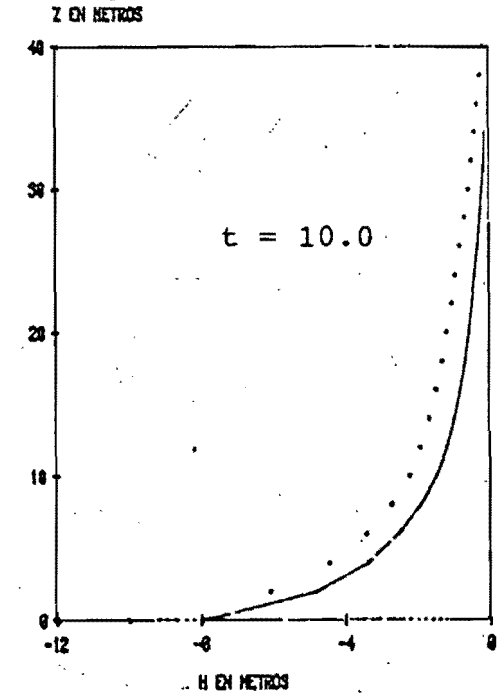
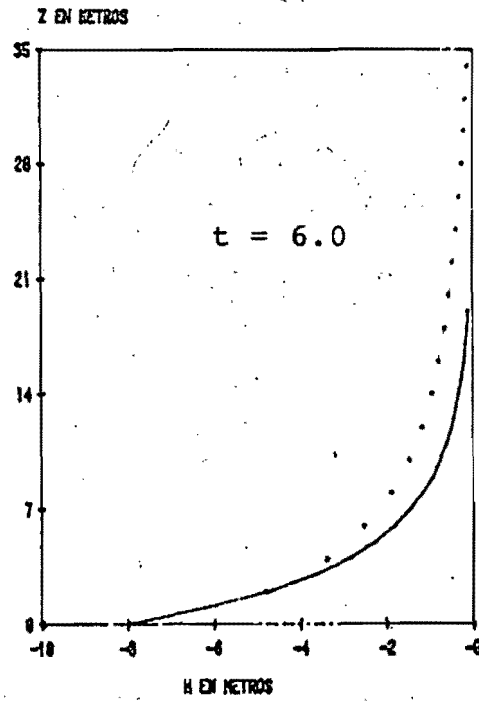
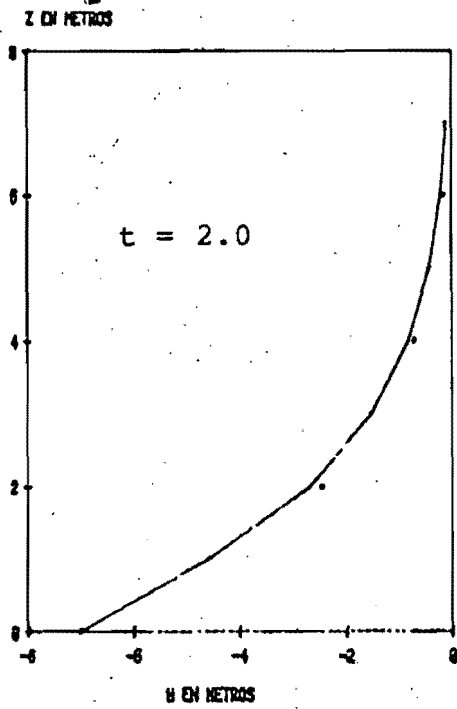
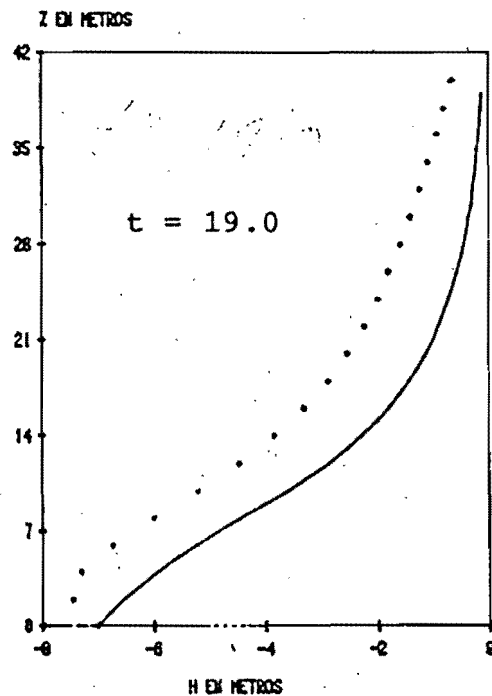
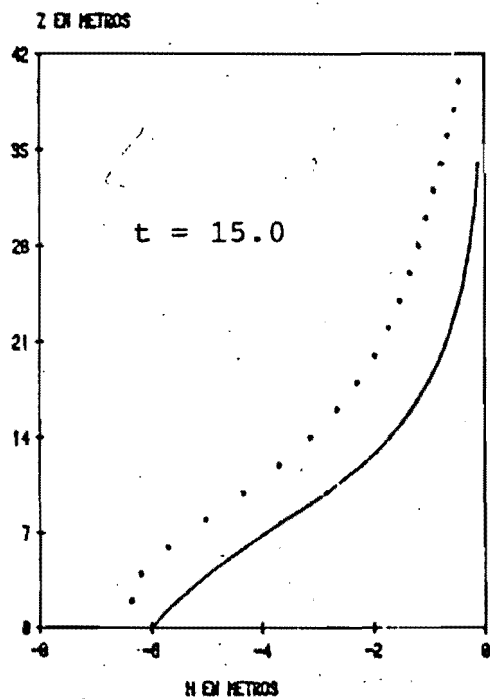
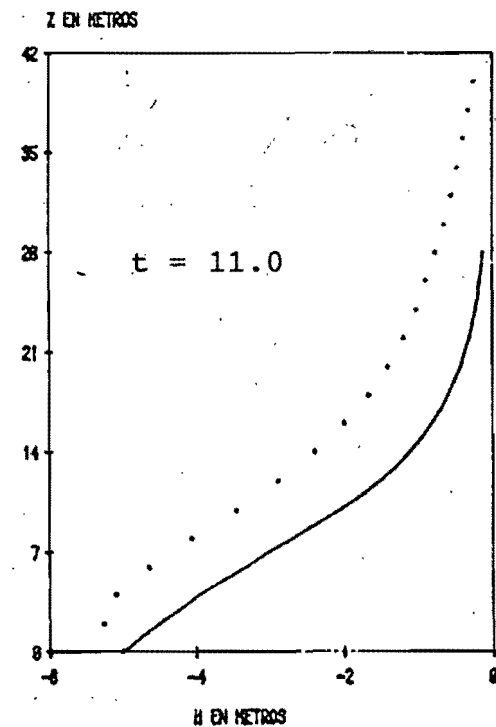
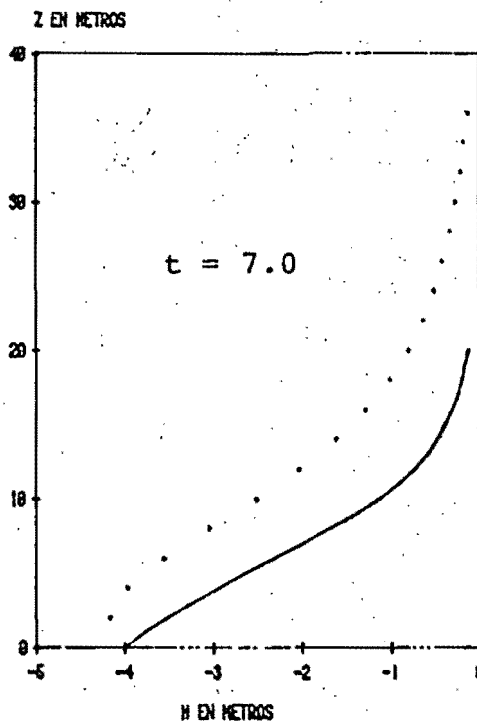
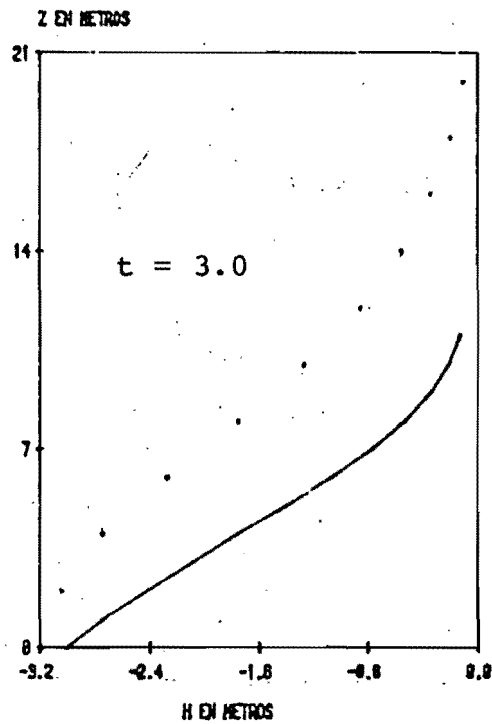


FIG 24 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 - - - Método aproximado I
 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50m$

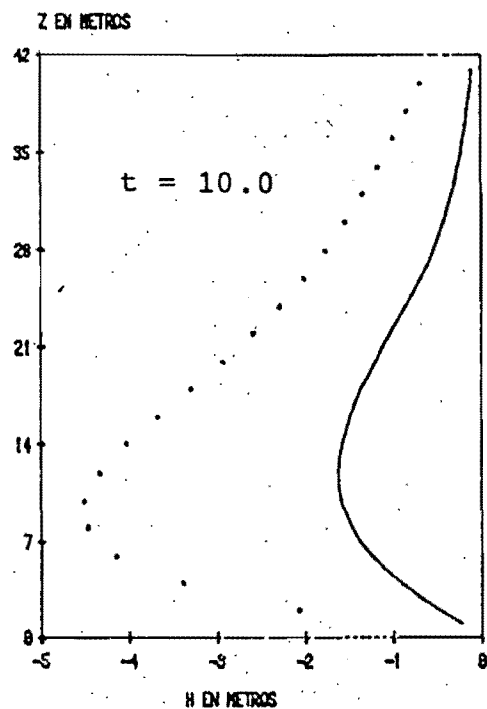
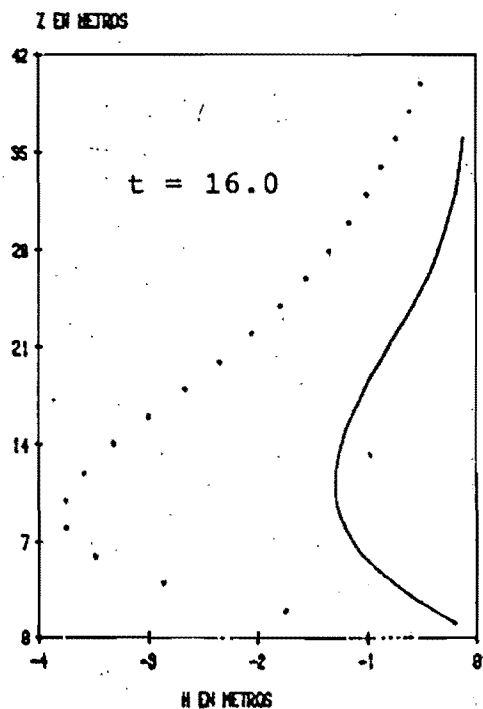
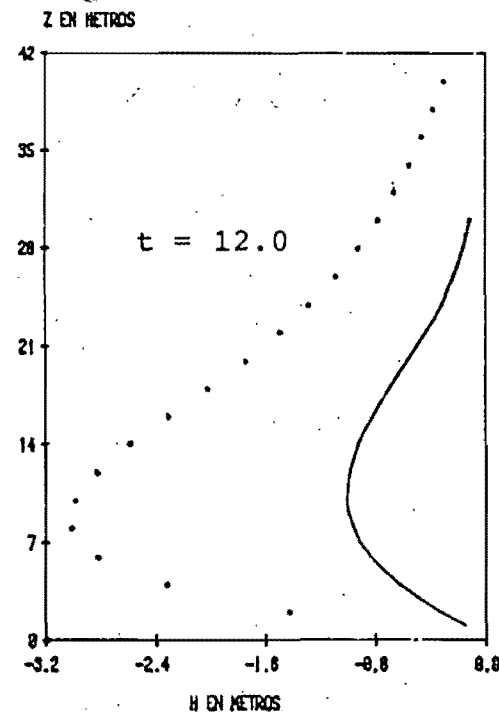
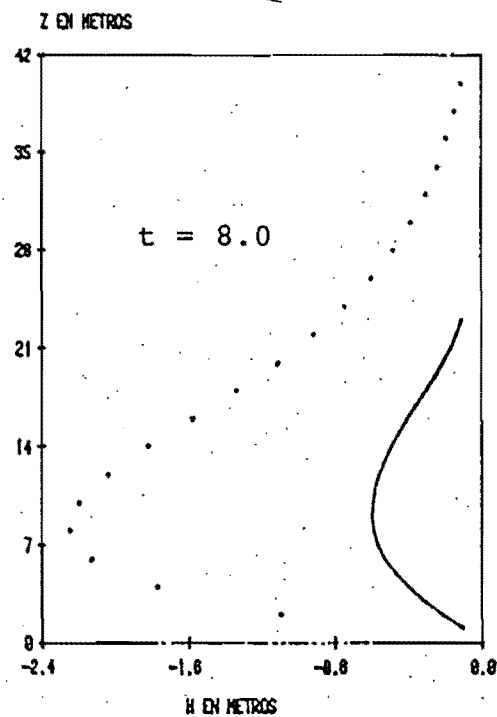
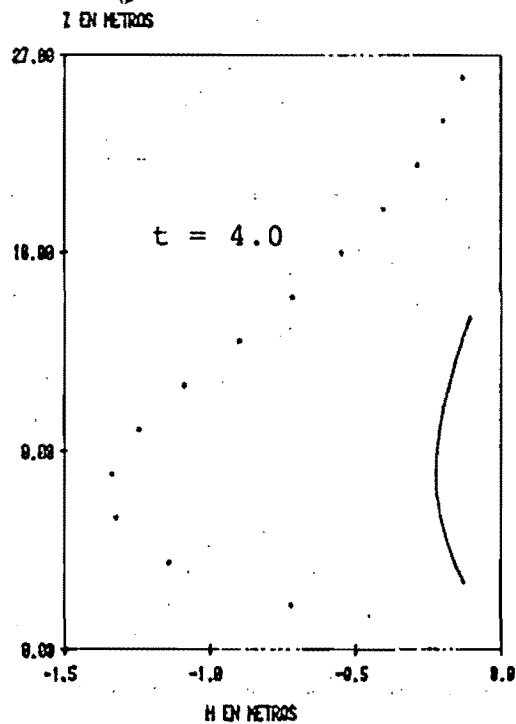
FIG 25 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



— Diferencias finitas
 Método. aproximado I

$\beta_2/\beta_1 = 10 \quad b = 50m$

FIG 26 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)





 Diferencias finitas
 Método aproximado \int
 $B_2/B_1 = 10$ $b = 50m$

FIG 27 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M /S
 $\times 10^{-9}$

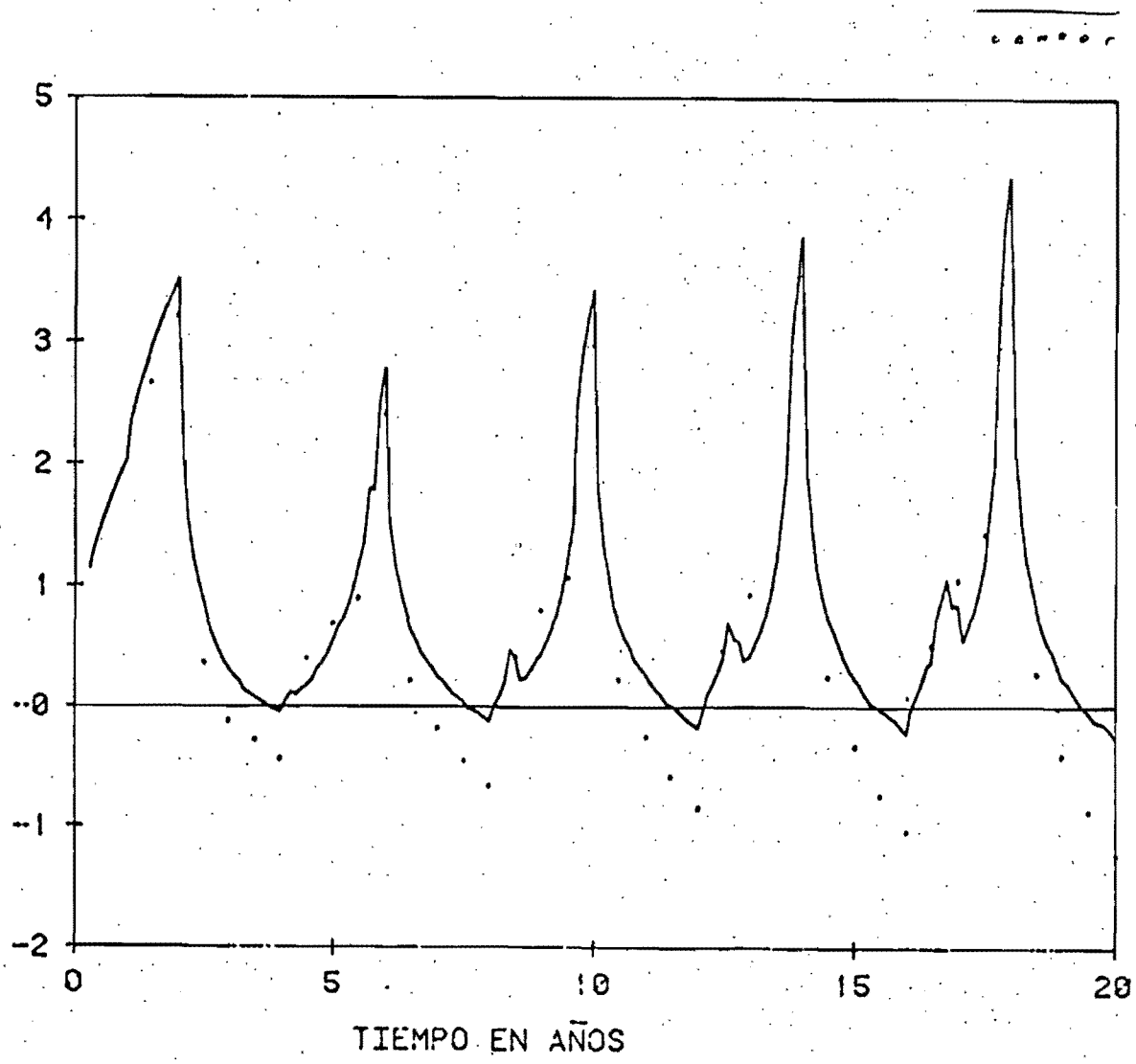


FIG 28 Comparación de caudales drenados

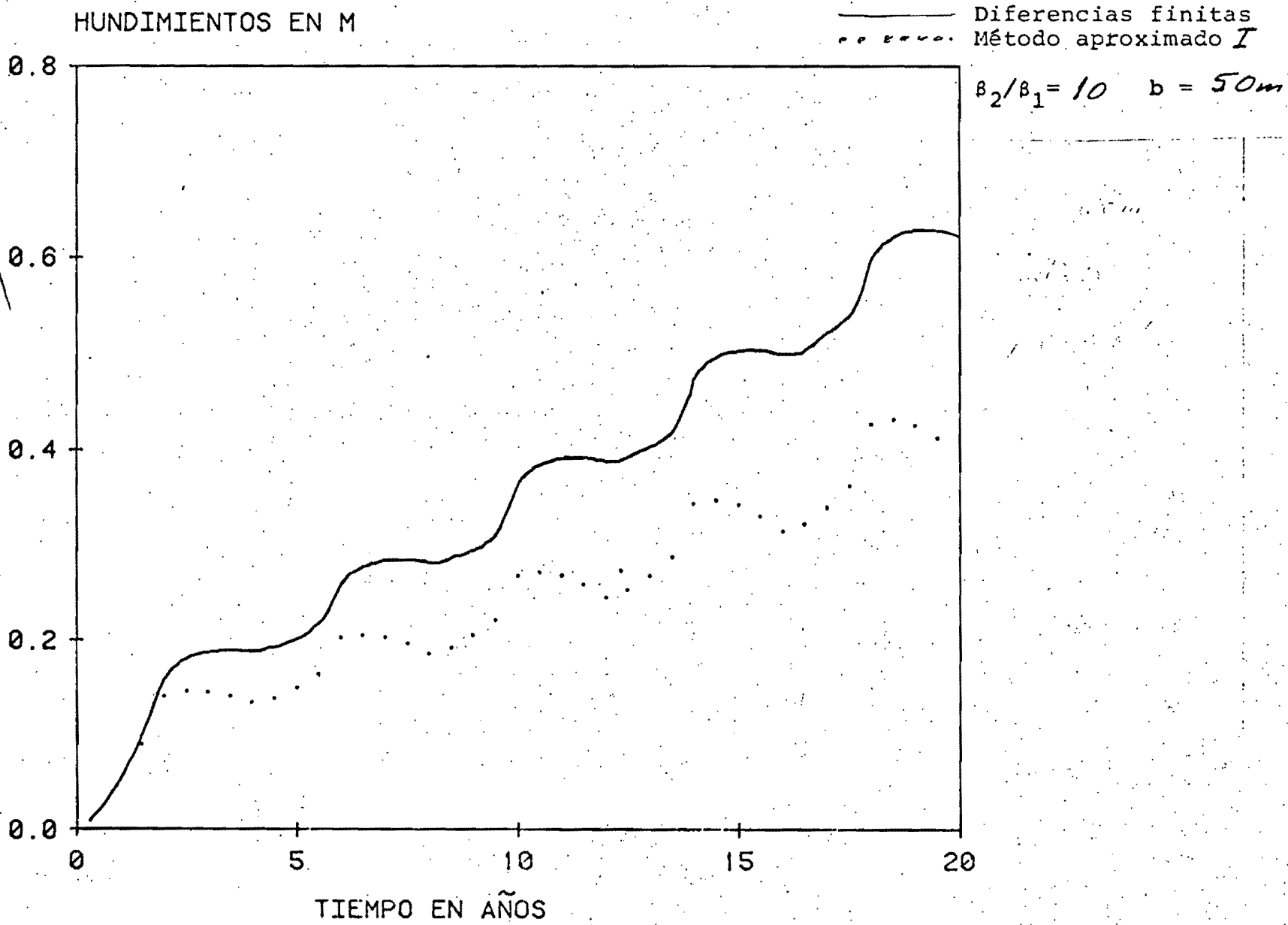
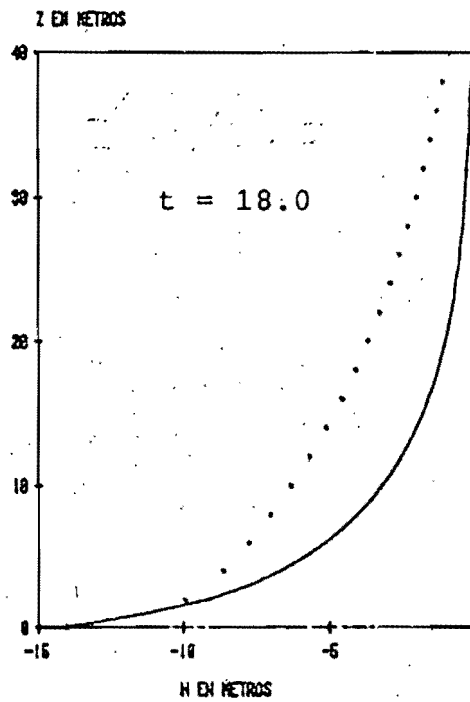
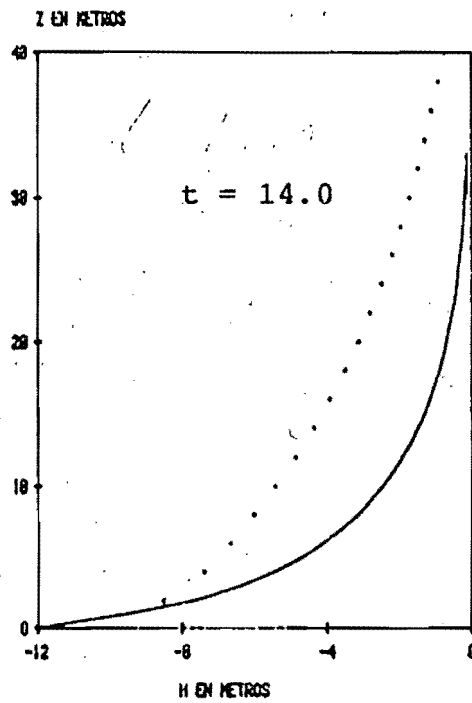
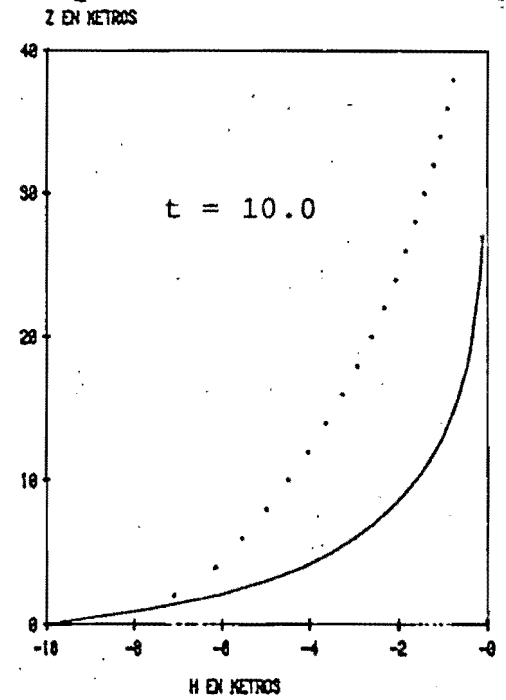
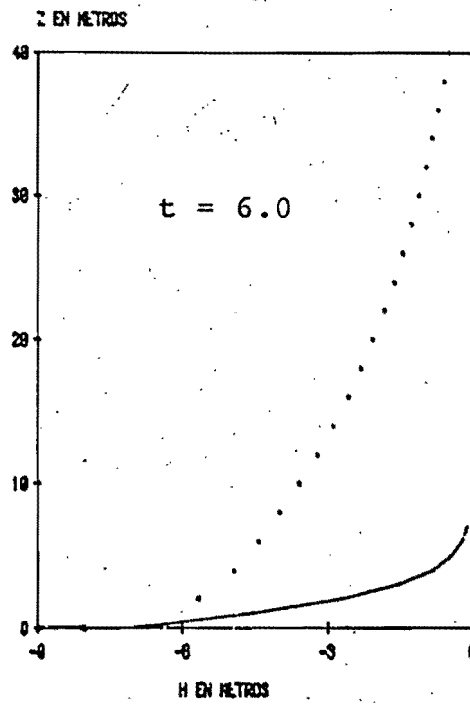
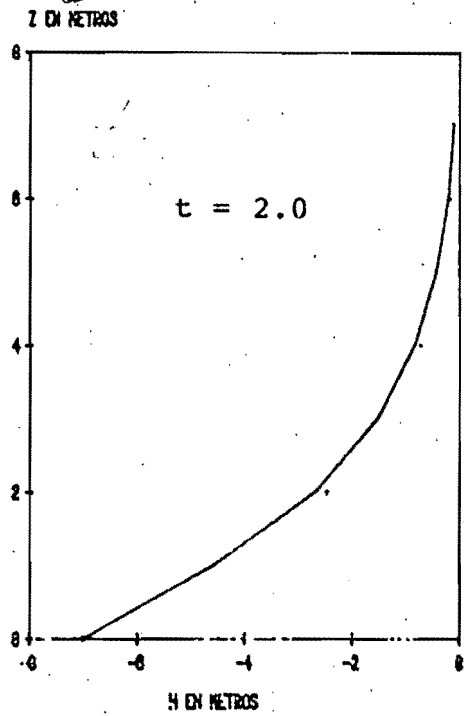


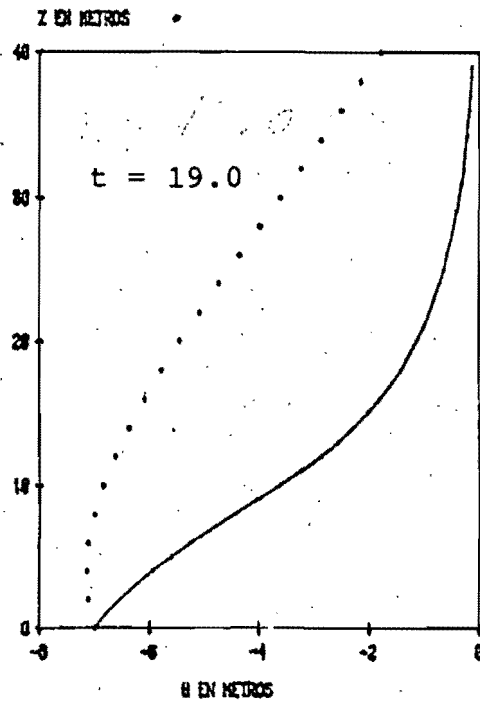
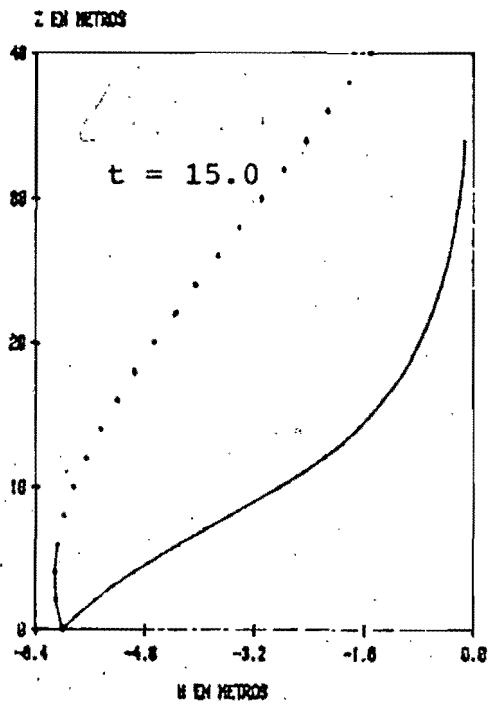
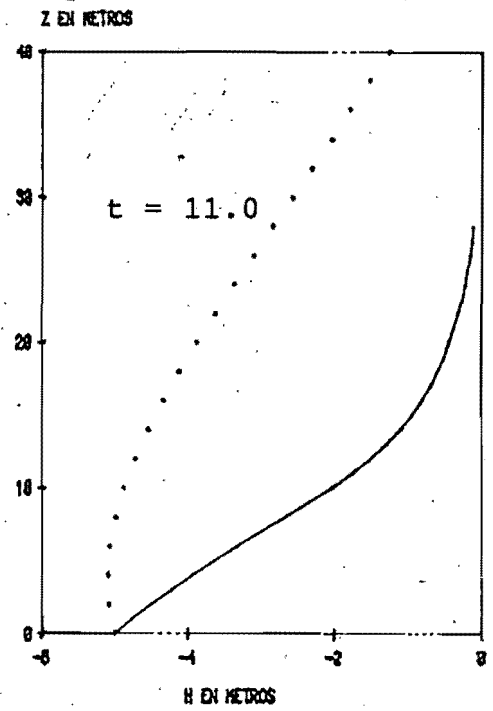
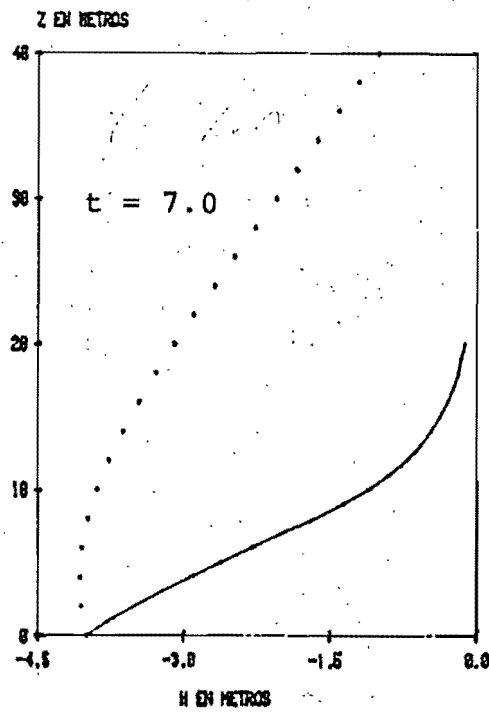
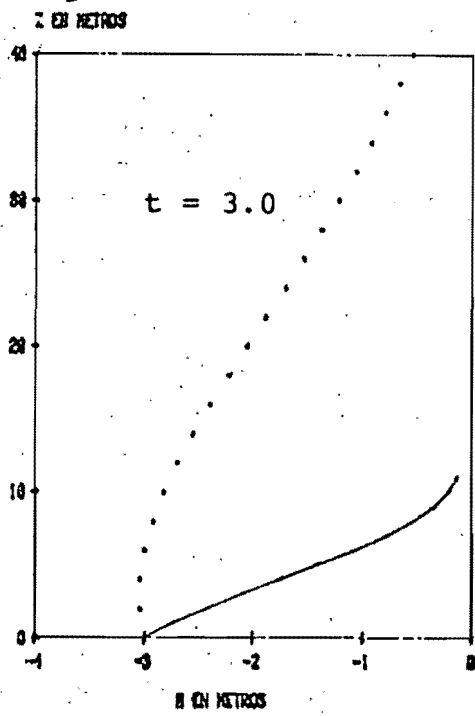
FIG 29 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 Método aproximado I

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50m$

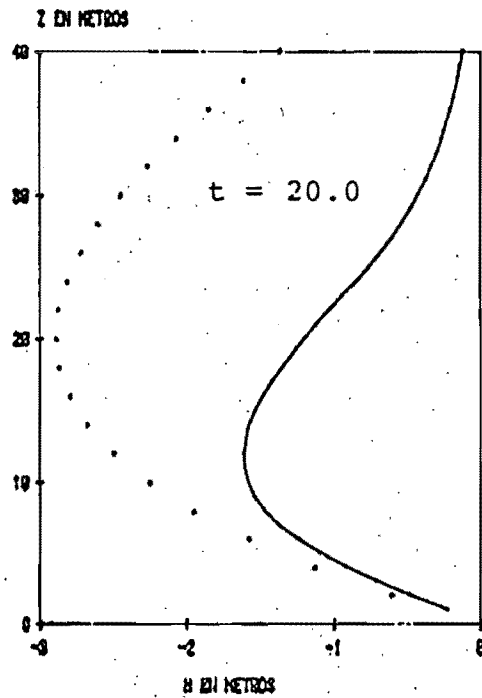
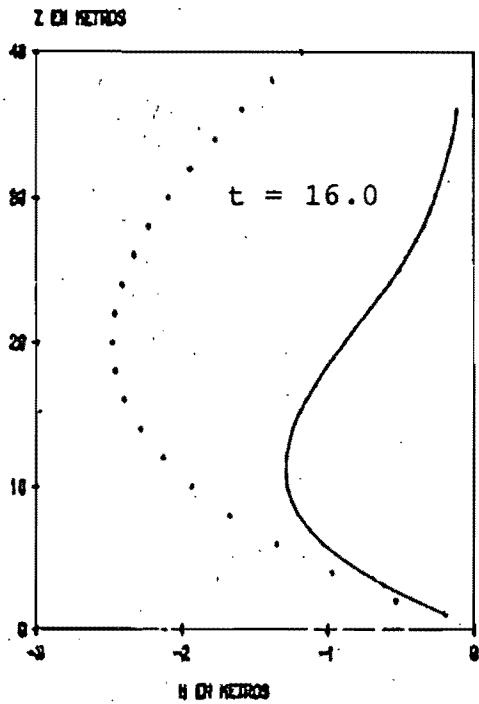
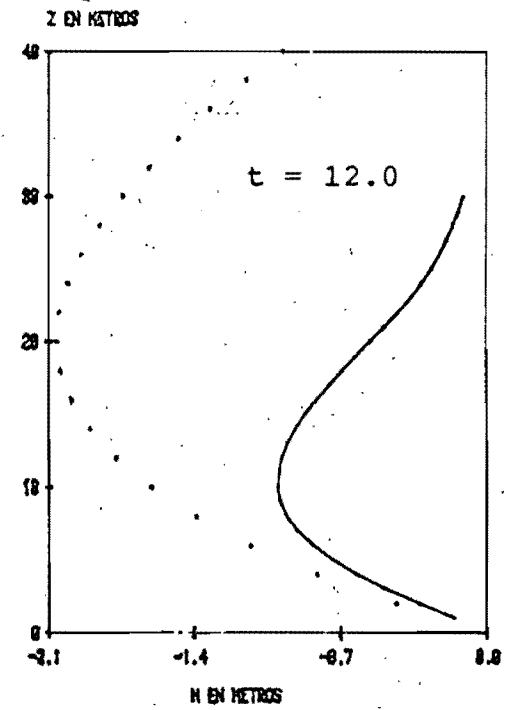
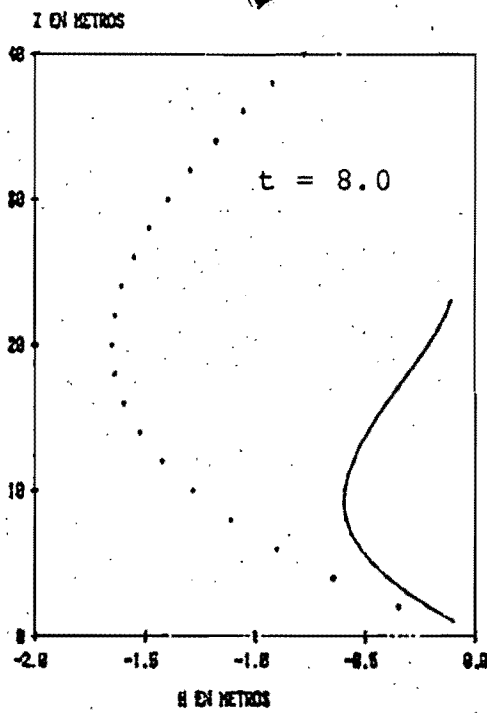
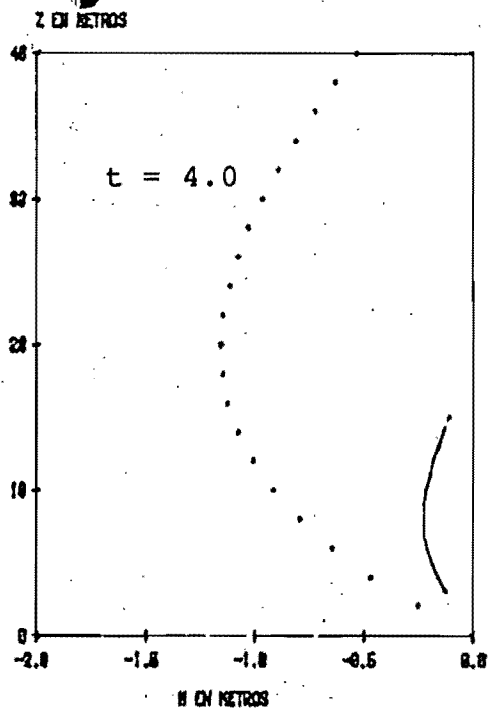
FIG 30 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



— Diferencias finitas
 Método aproximado I

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50\text{ m}$

FIG 31 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)

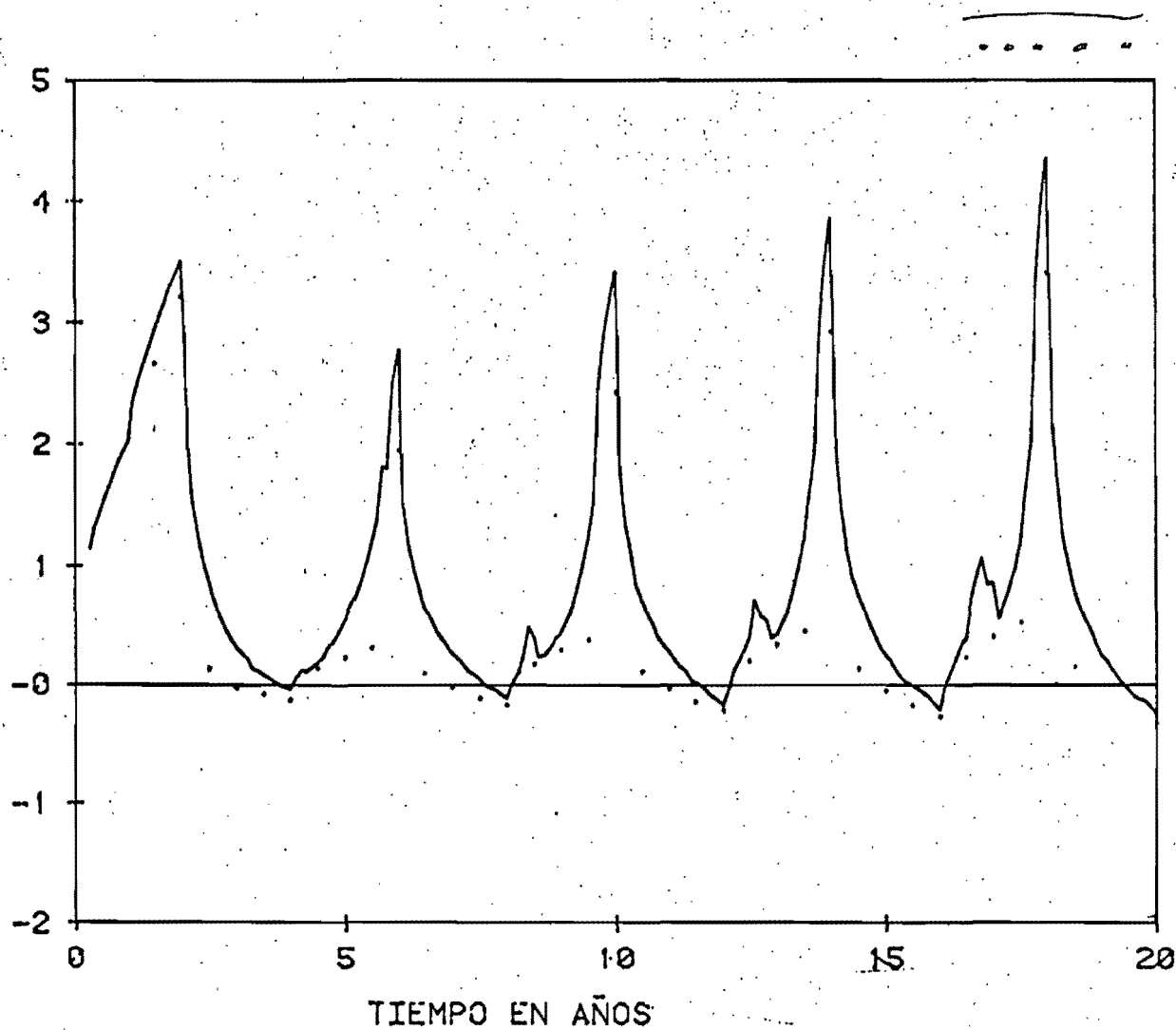


— Diferencias finitas
 Método aproximado I

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50m$

FIG 32 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M /S
 $\times 10^{-9}$



Diferencias finitas
Método aproximado I
 $B_2/B_1 = 100$ $B = 50m$

FIG 33 Comparación de caudales drenados

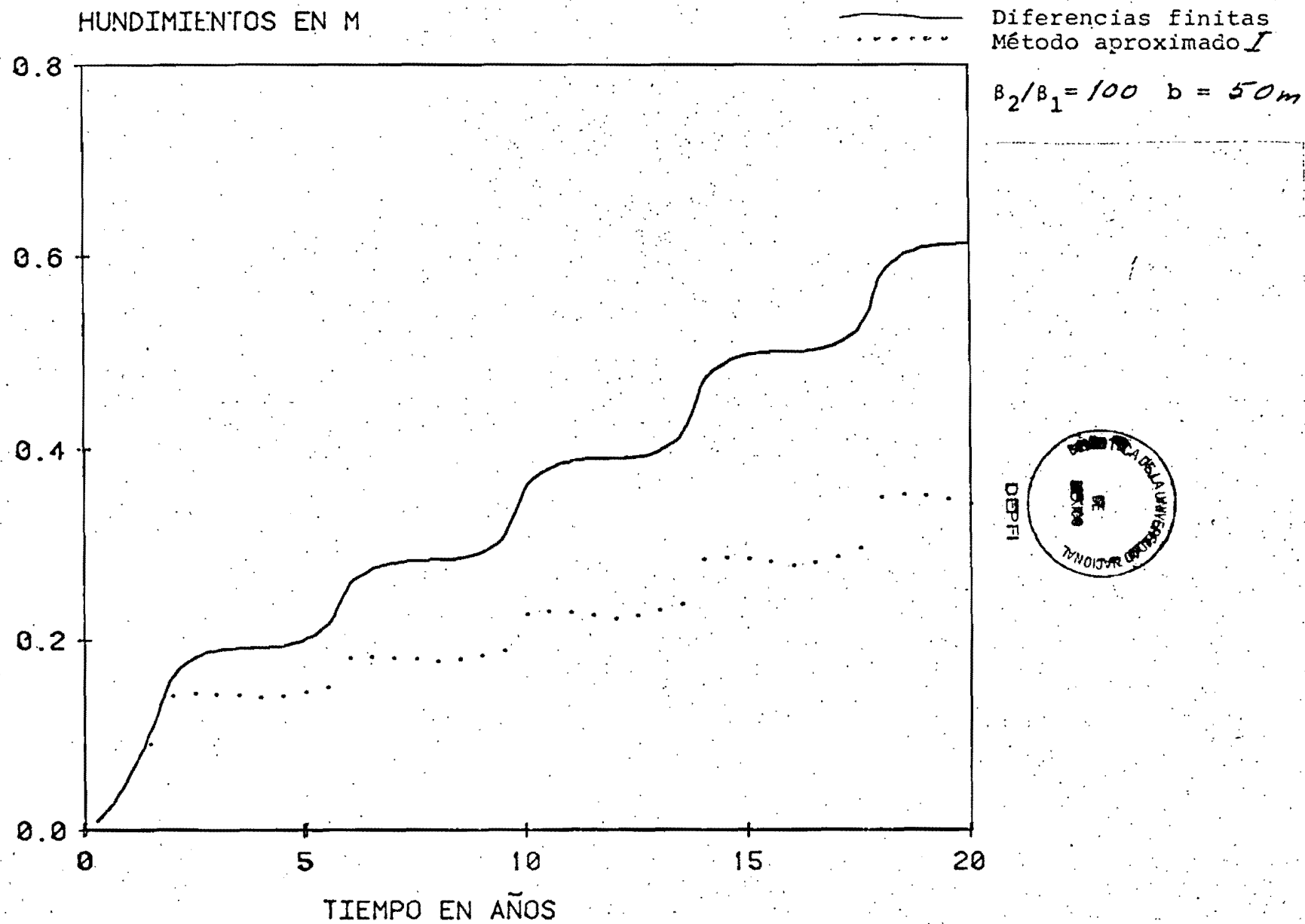
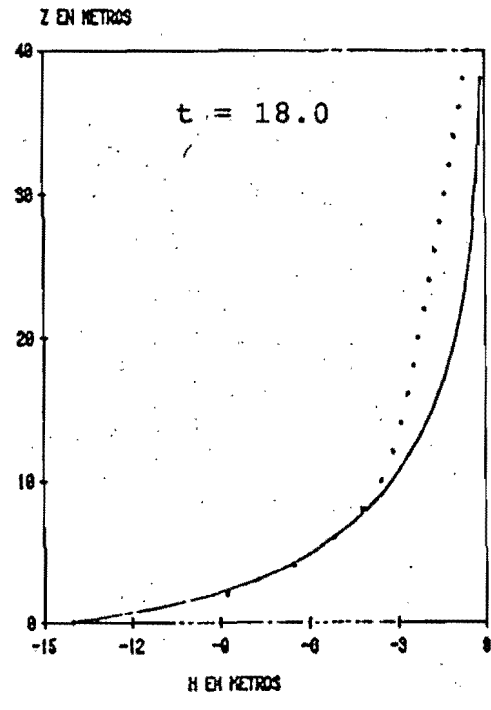
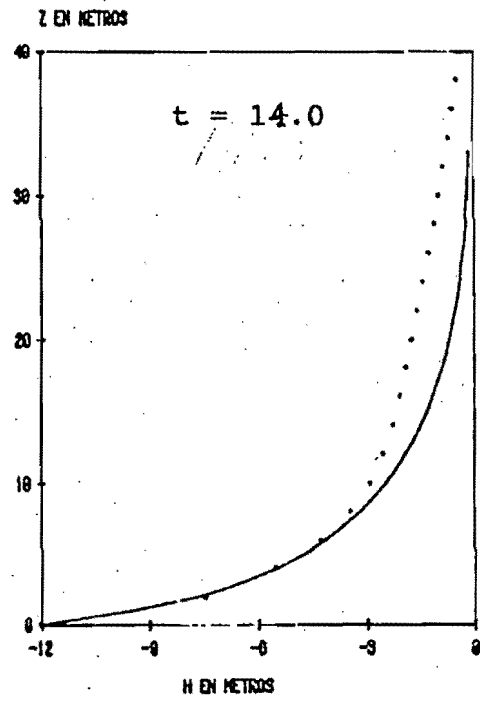
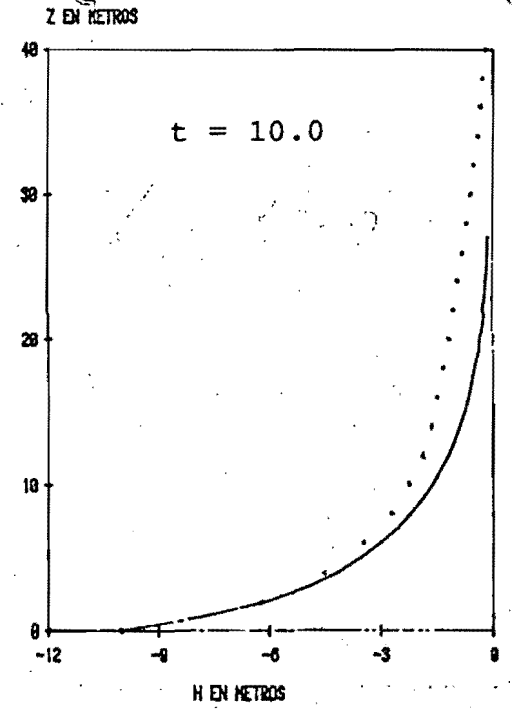
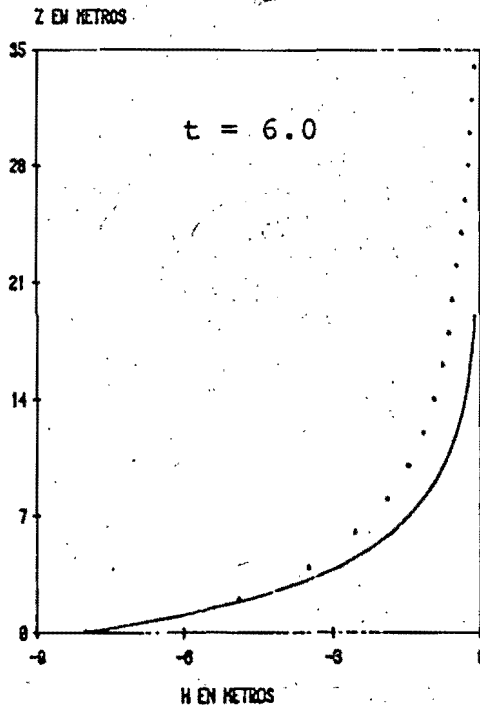
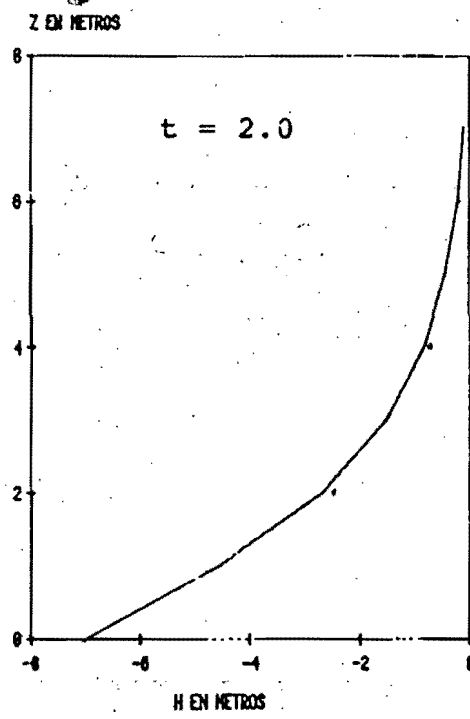


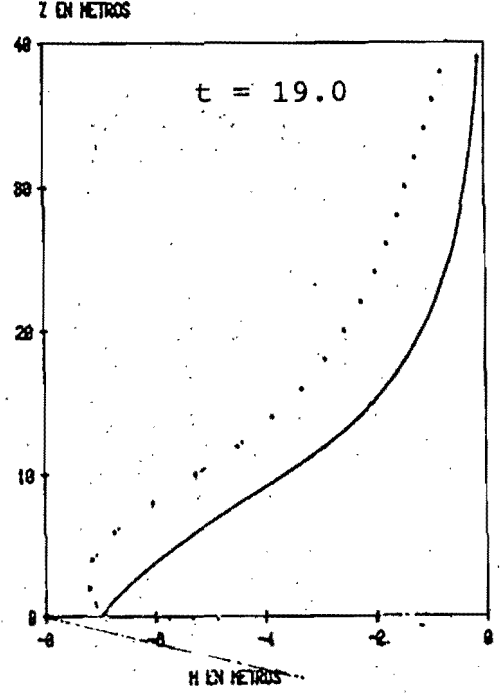
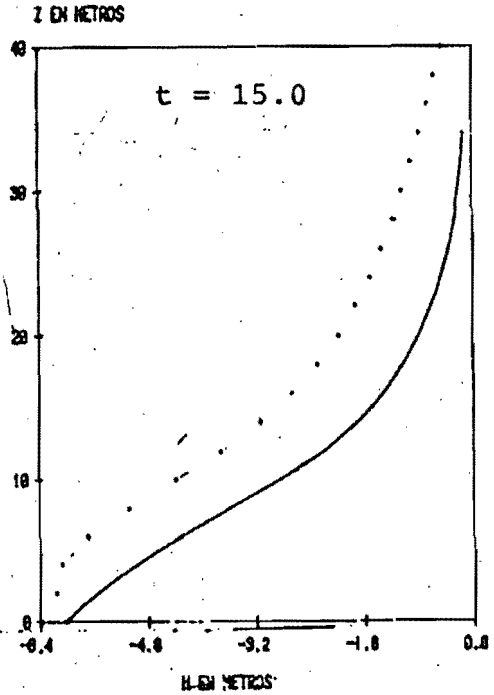
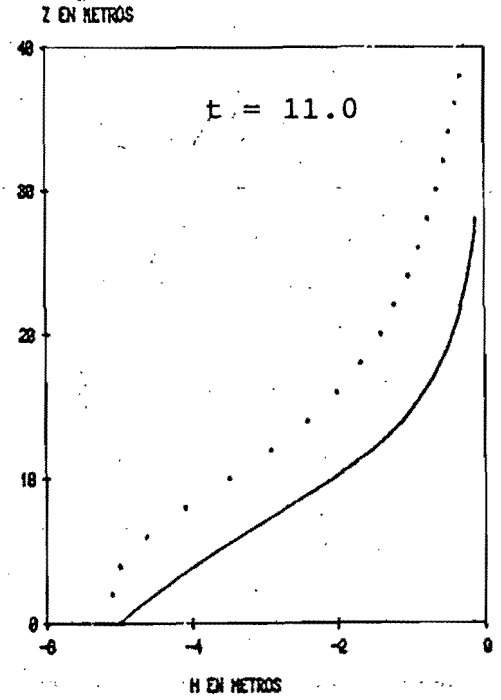
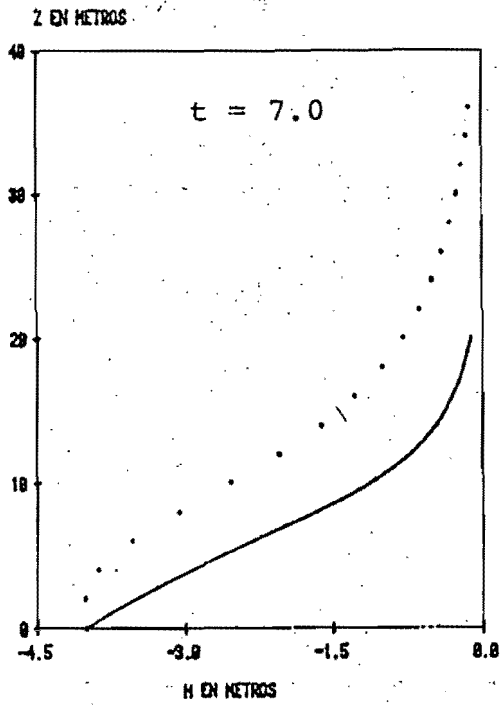
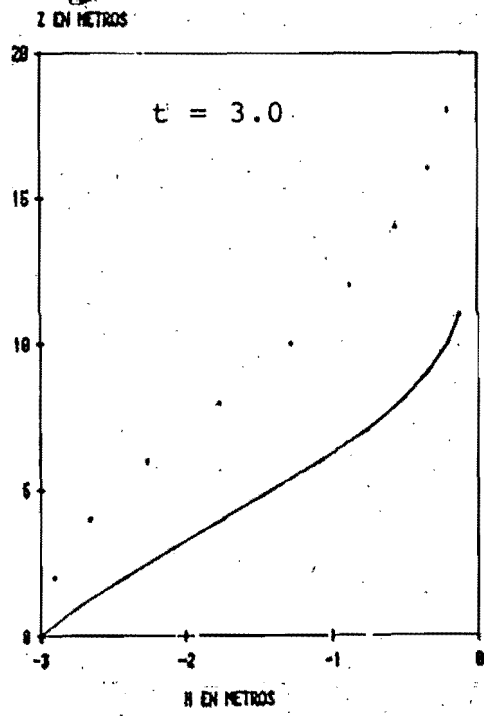
FIG 34 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 Método aproximado //

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50m$

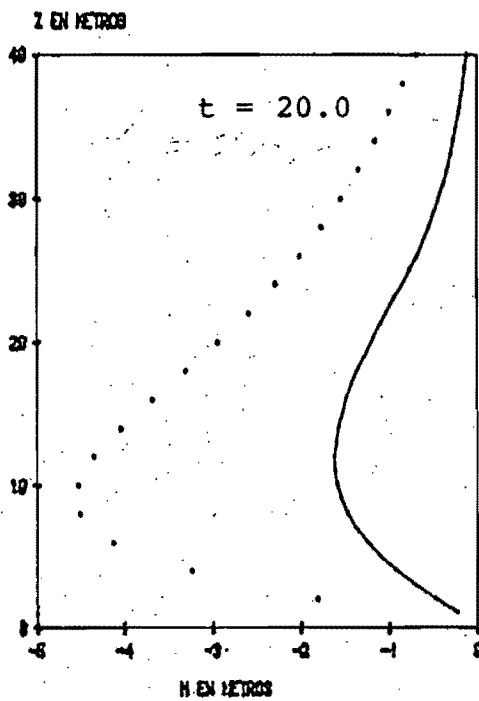
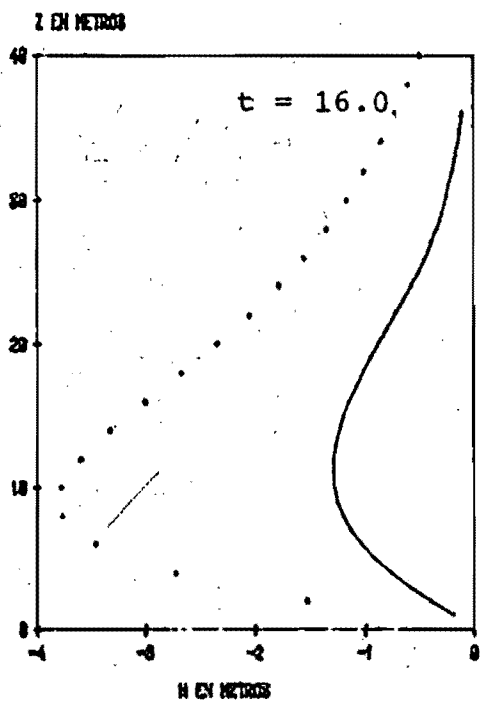
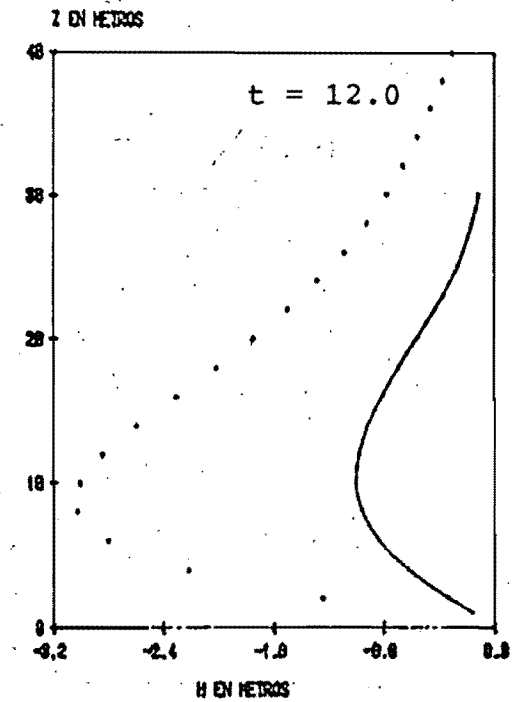
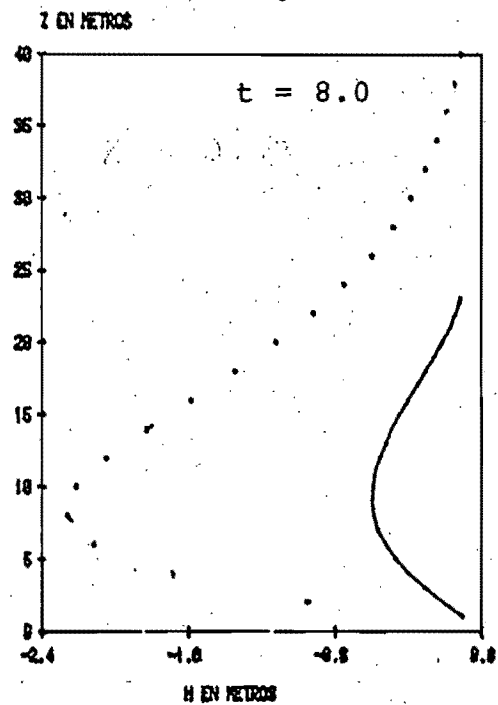
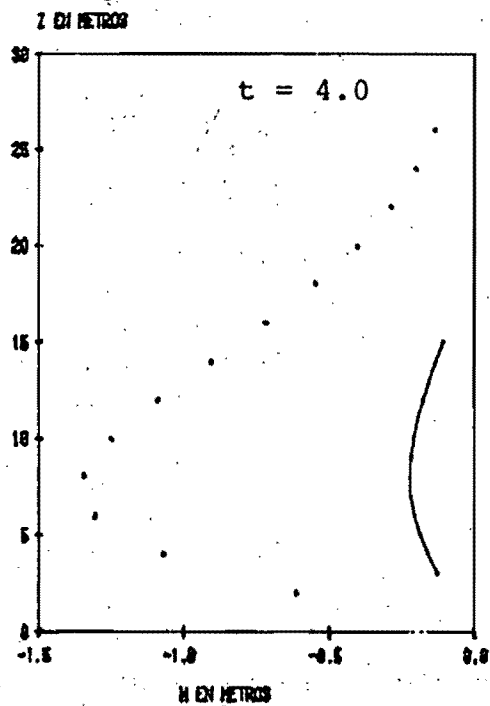
FIG 35 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



— Diferencias finitas
 Método aproximado II

$B_2/B_1 = 100 \quad b = 50m$

FIG 36 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)



Diferencias finitas
Método aproximado II

$$B_2/B_1 = 100 \quad b = 50m$$

FIG 37. Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M /S
*10⁻⁹

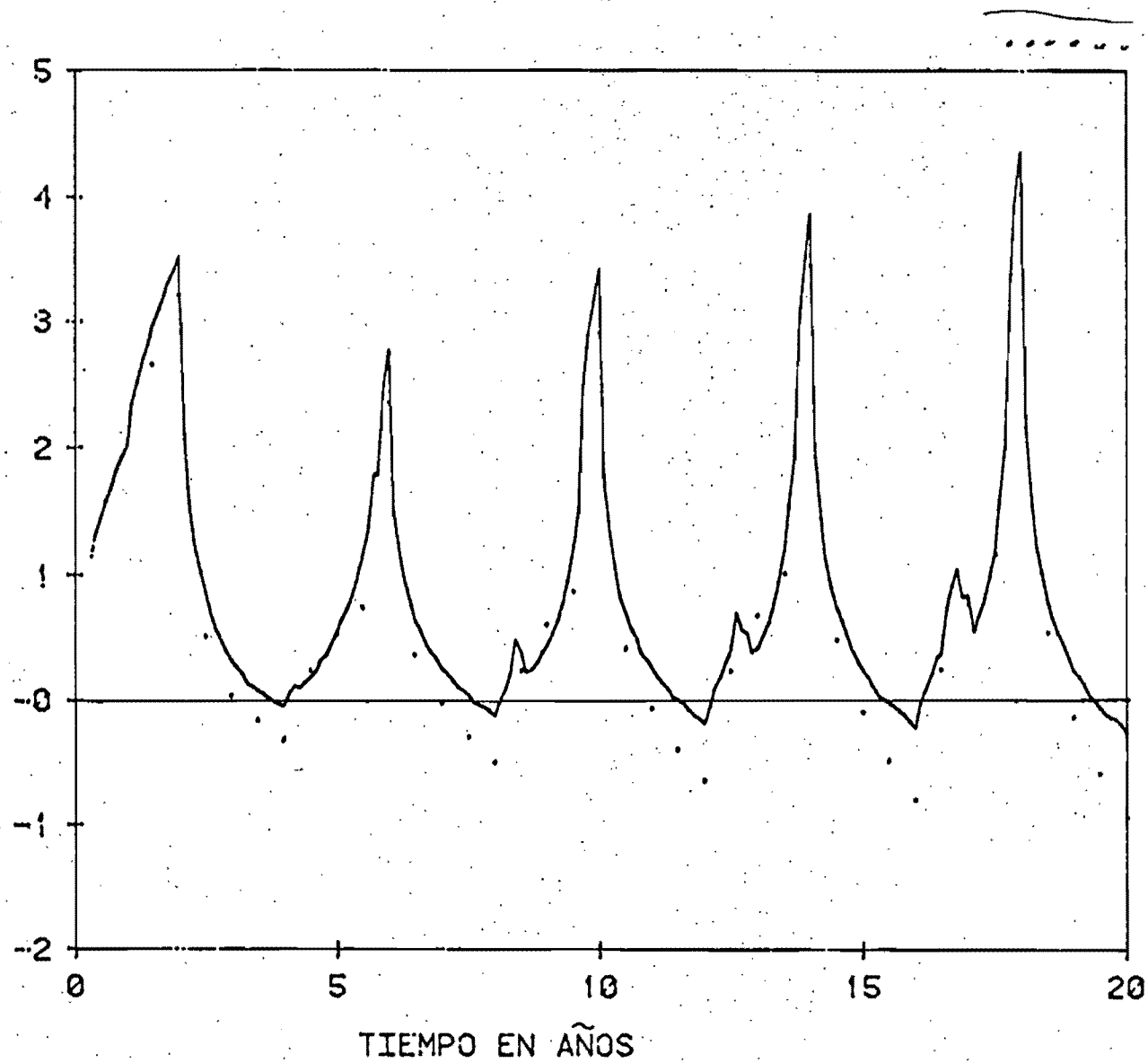
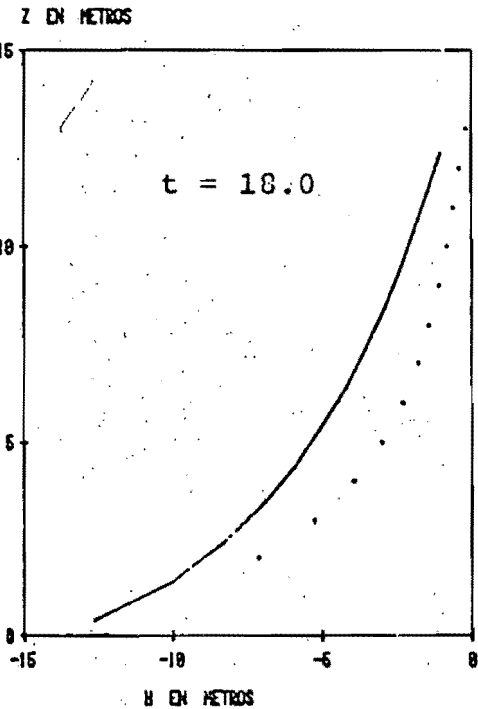
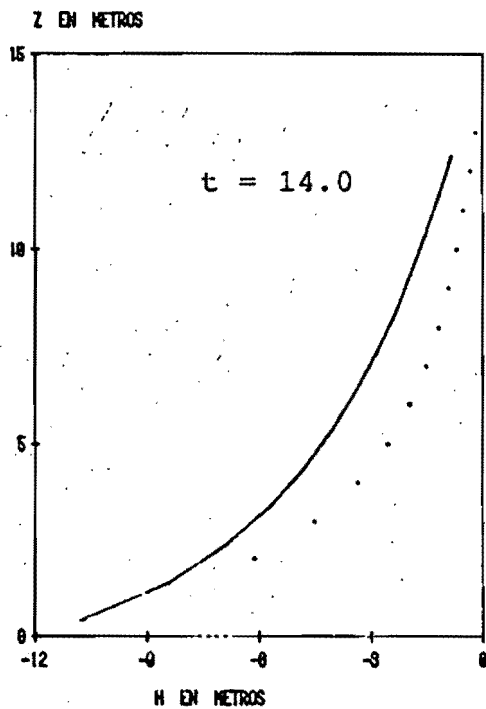
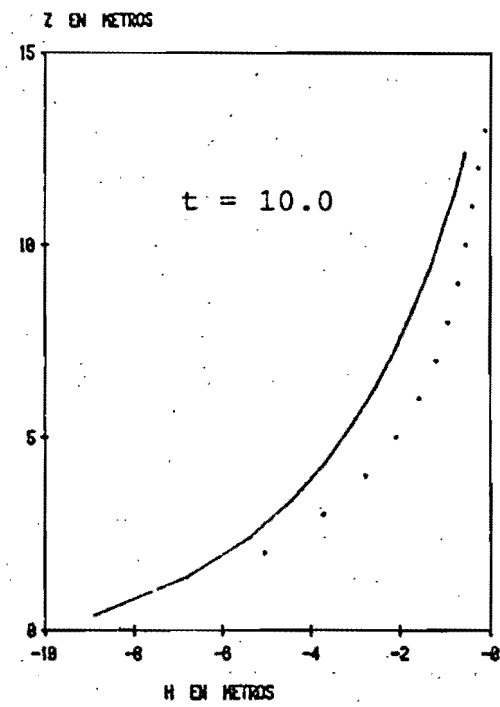
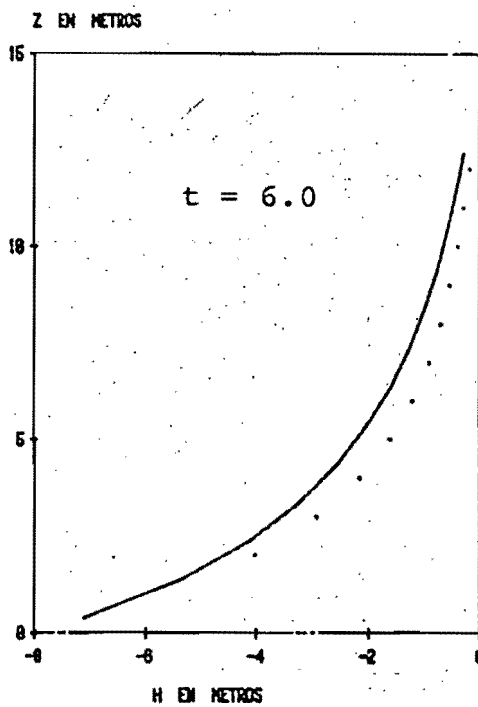
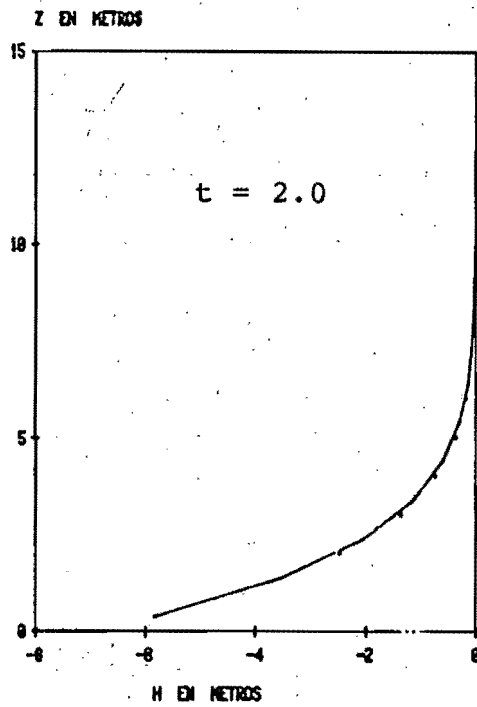


FIG 3g Comparación de caudales drenados





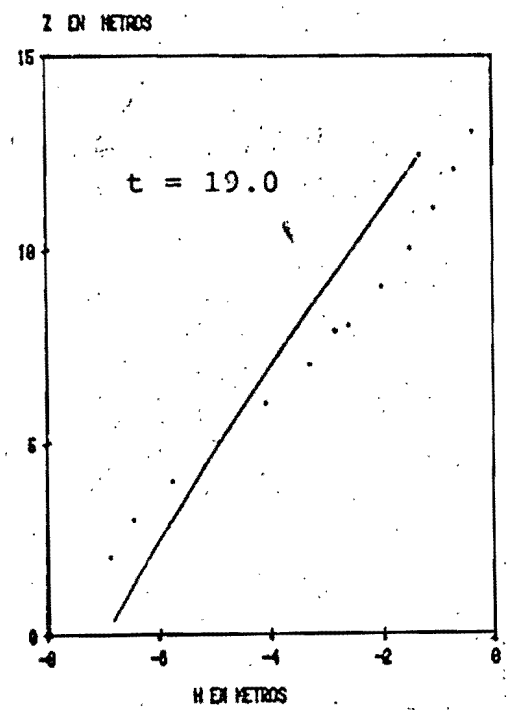
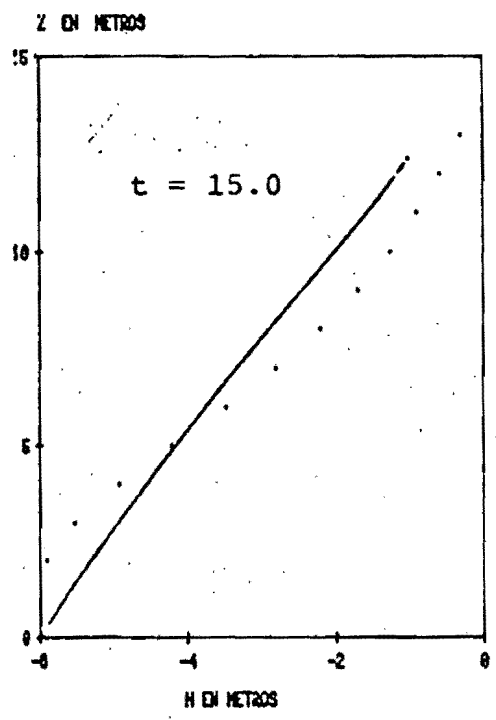
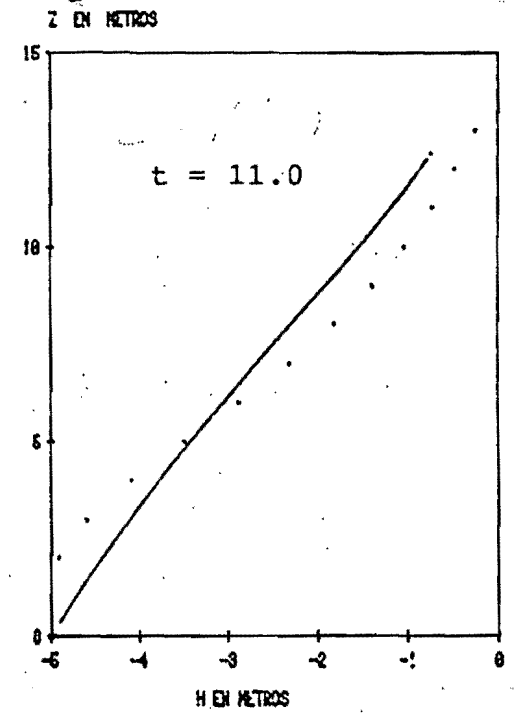
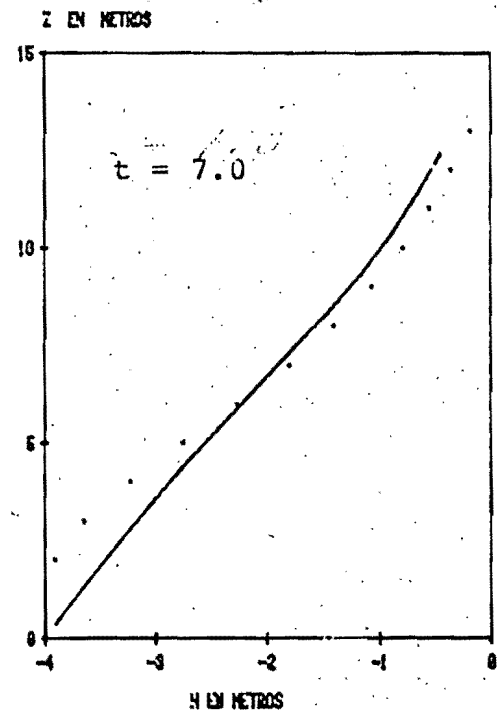
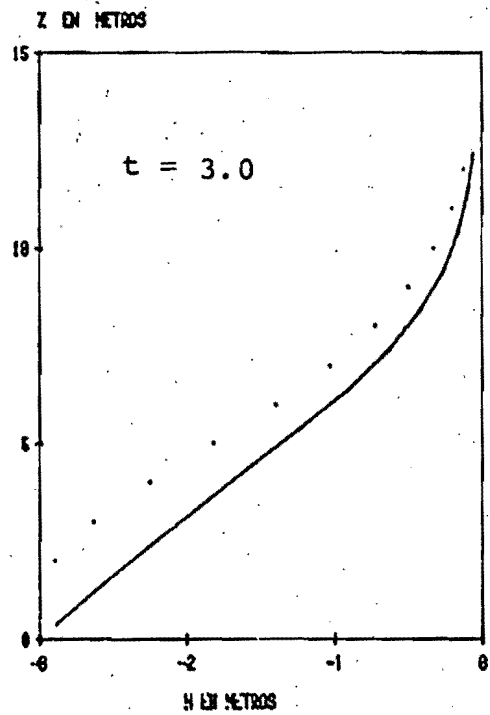
 Diferencias finitas
 Método aproximado III
 $\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 15m$

FIG 39 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)





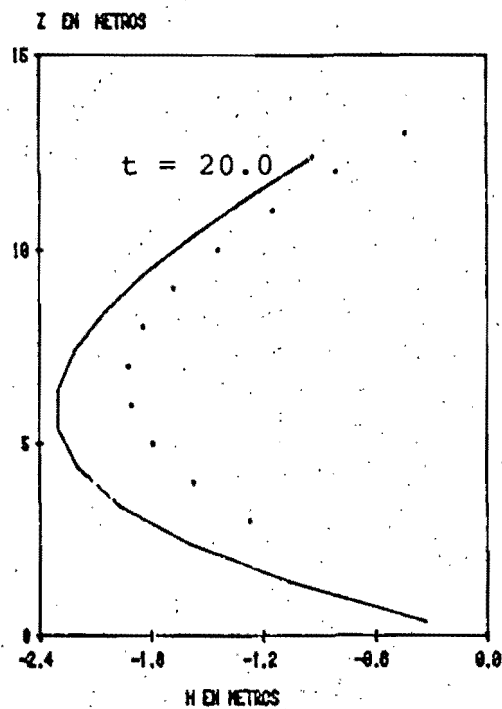
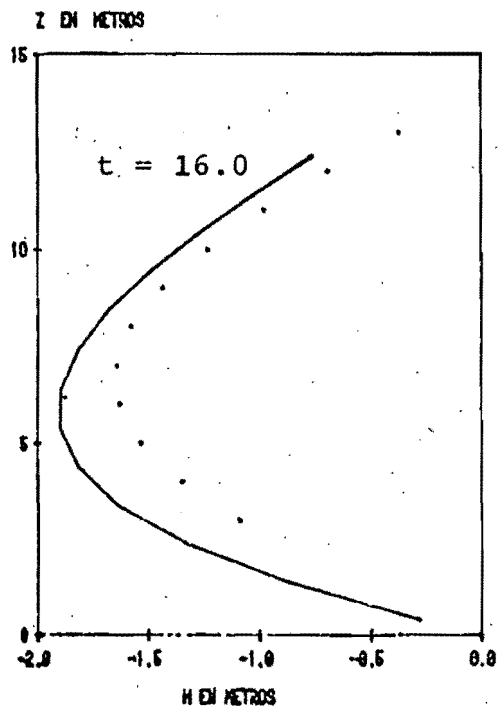
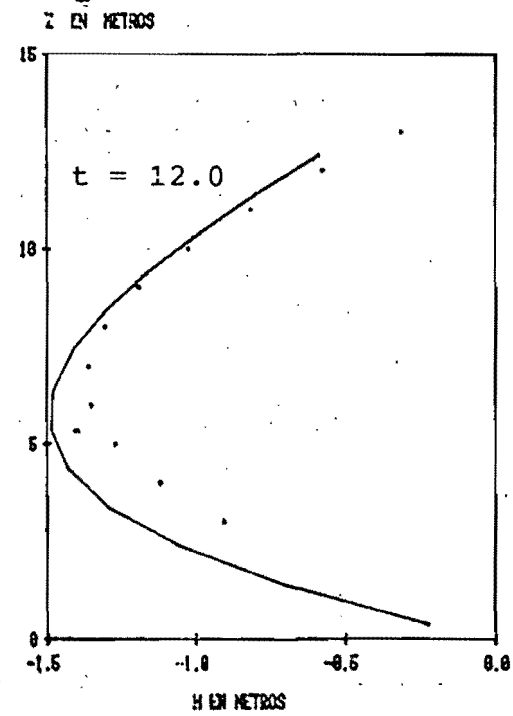
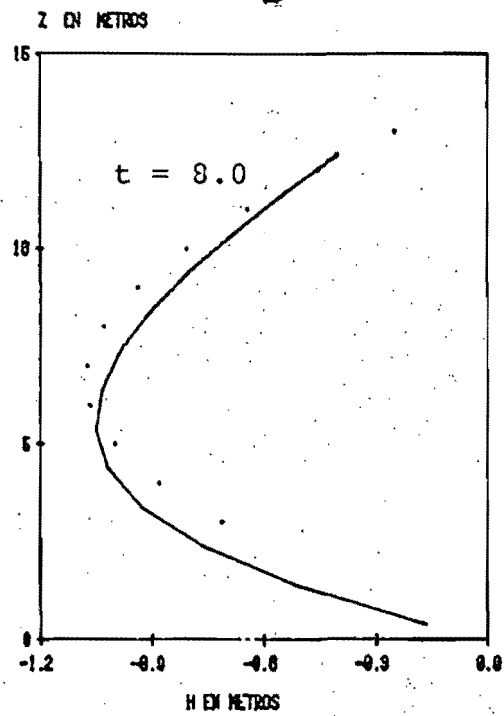
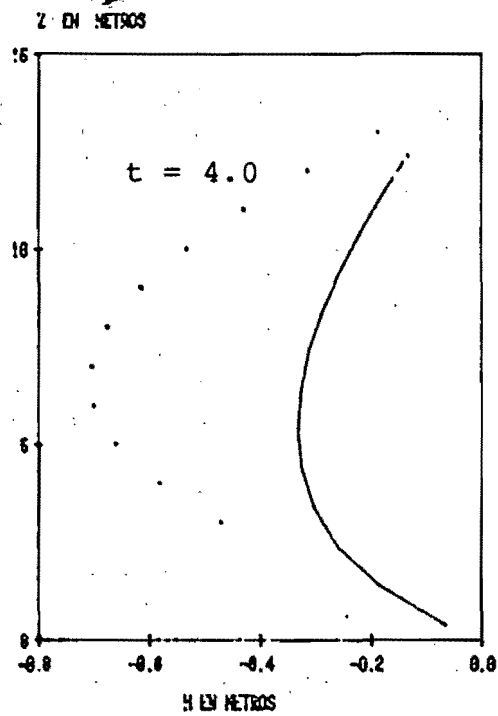
 Diferencias finitas
 Método aproximado *III*
 $\beta_2/\beta_1 = 1.0$ $b = 15m$

FIG 40 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)



Diferencias finitas
Método aproximado III

$$\beta_2/\beta_1 = 10 \quad b = 15m$$

FIG 41 Comparación
de perfiles
de carga en
la vertical
(máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M/S
*10⁻⁹

— Diferencias finitas
..... Método aproximado III

$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 15m$

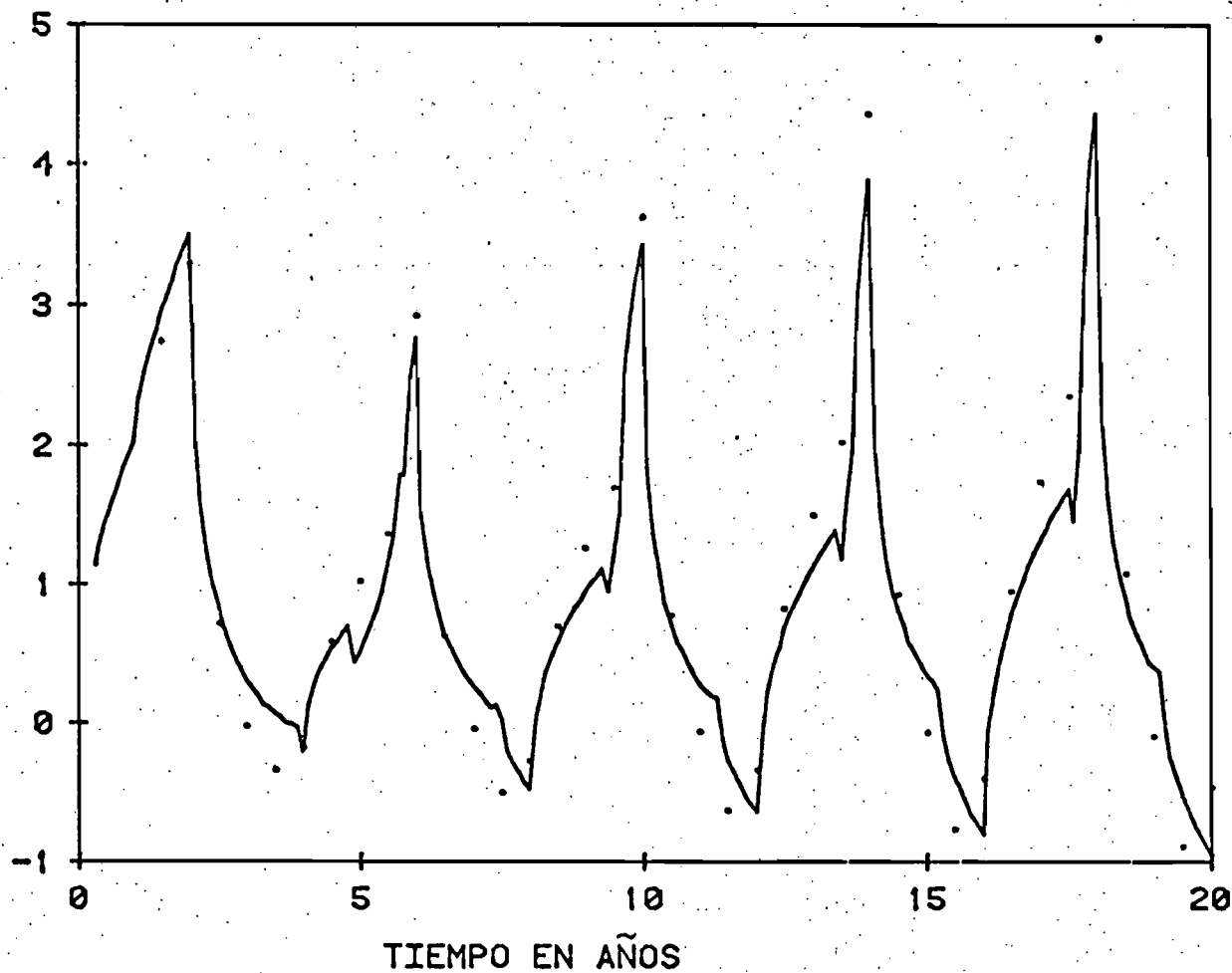


FIG 42 Comparación de caudales drenados

— Diferencias finitas
..... Método aproximado III

$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 15m$

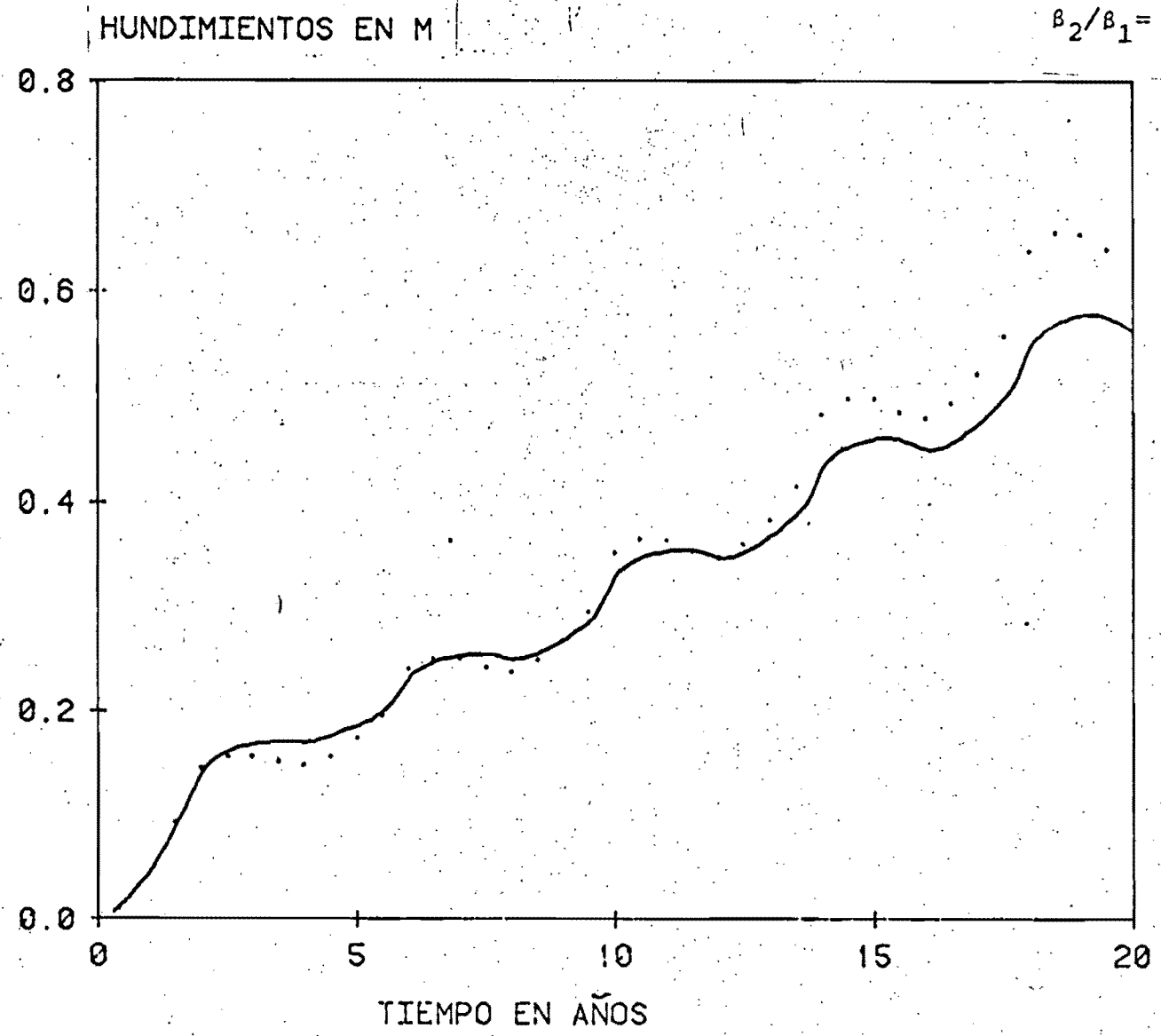
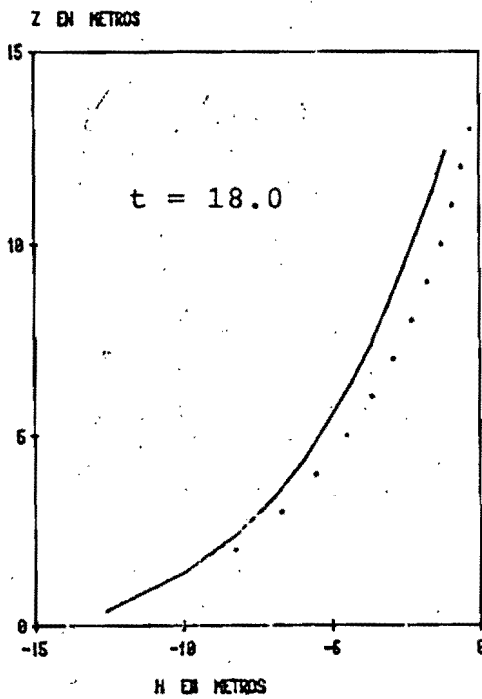
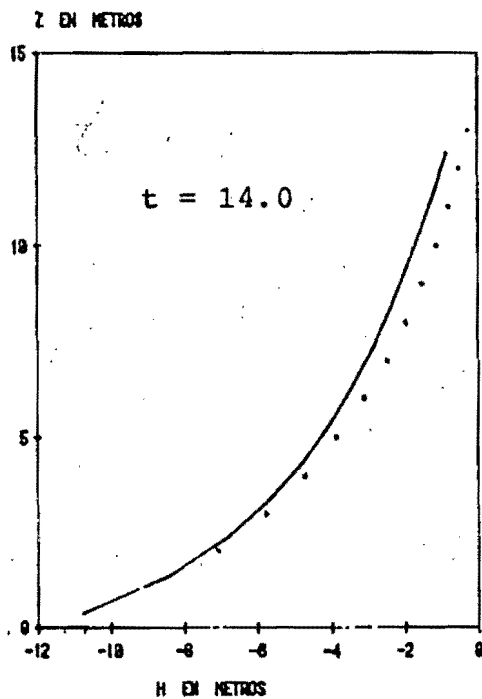
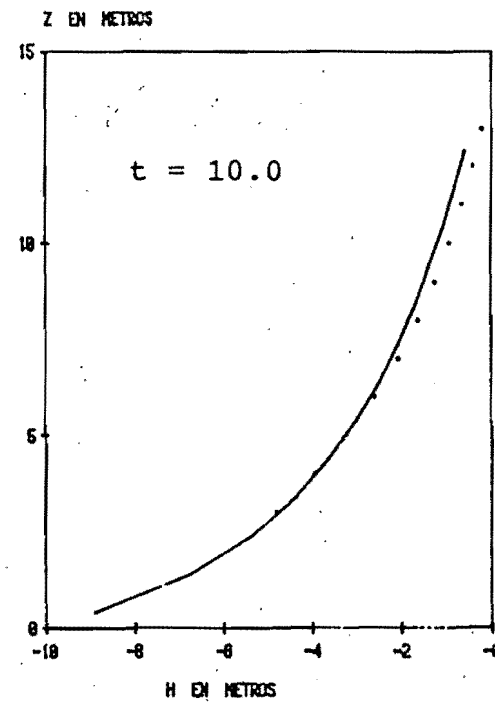
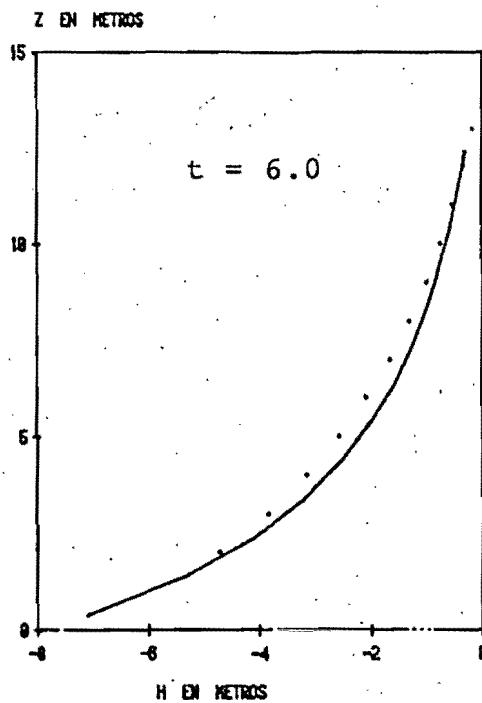
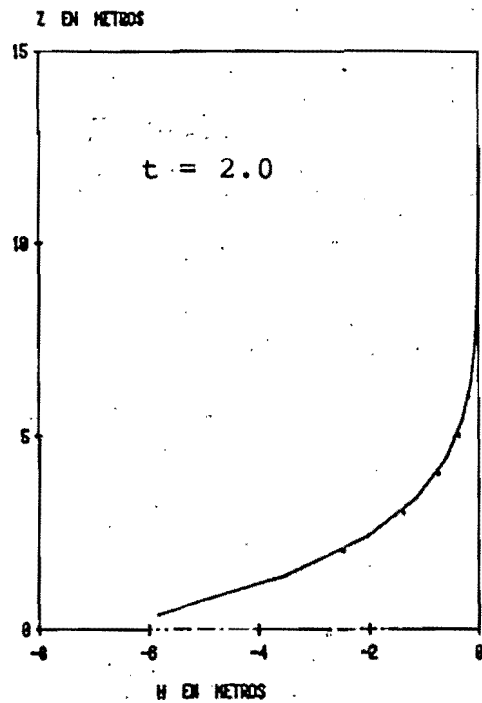


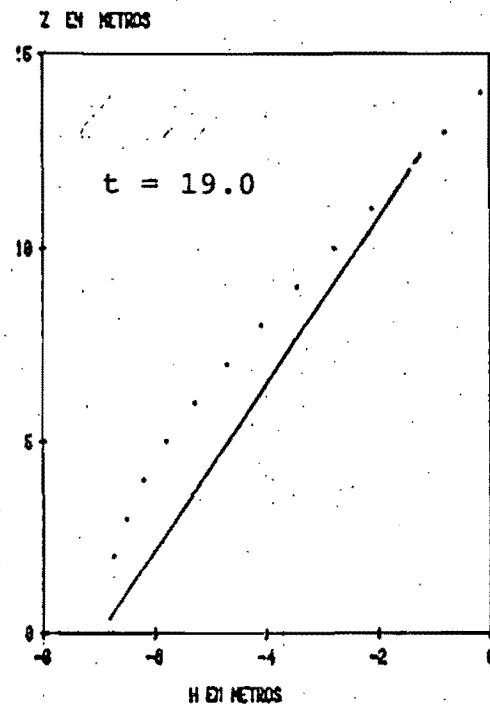
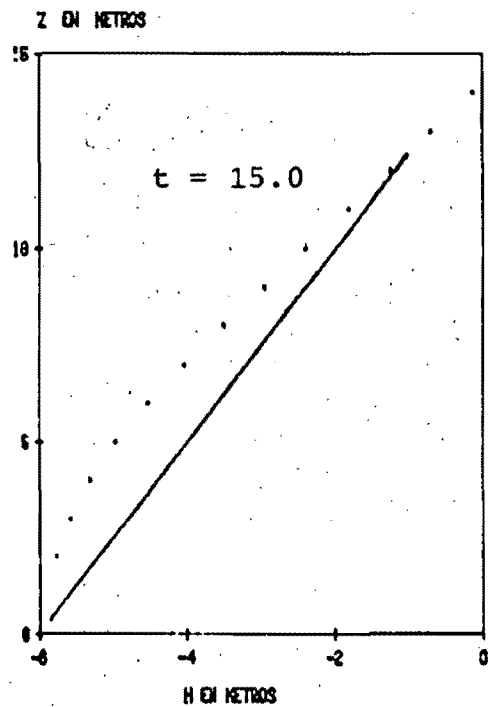
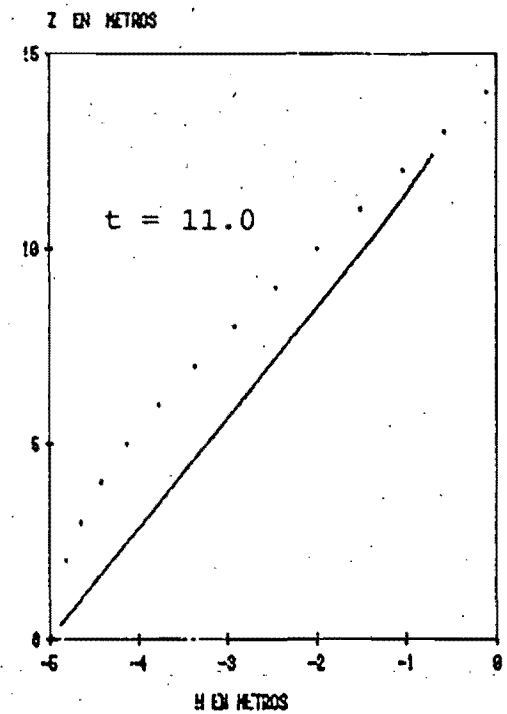
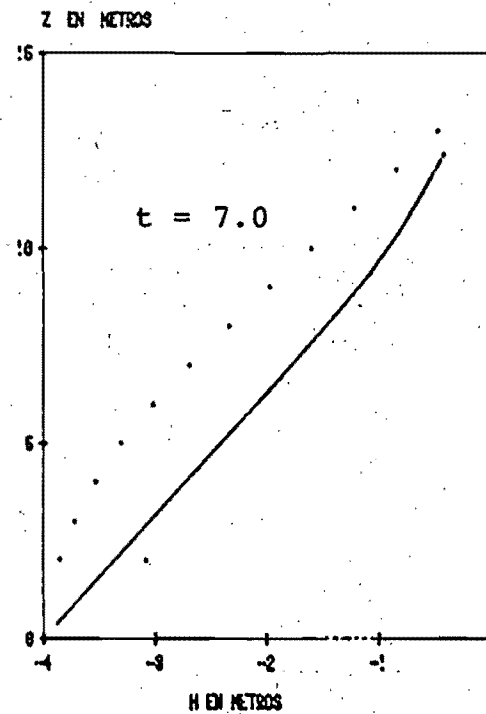
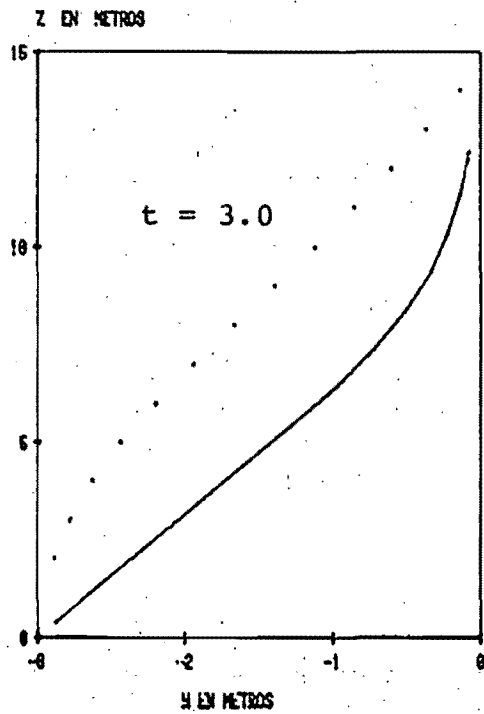
FIG 43 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 Método aproximado III

$B_2/B_1 = 100$ $b = 15m$

FIG 44 Comparación de perfiles de carga en la vertical (minina)



Diferencias finitas
Método aproximado III

$$B_2/B_1 = 100 \quad b = 15m$$

FIG 45 Comparación
de perfiles
de carga en
la vertical
(media)

GASTOS UNITARIOS EN M/S
 $\times 10^{-9}$

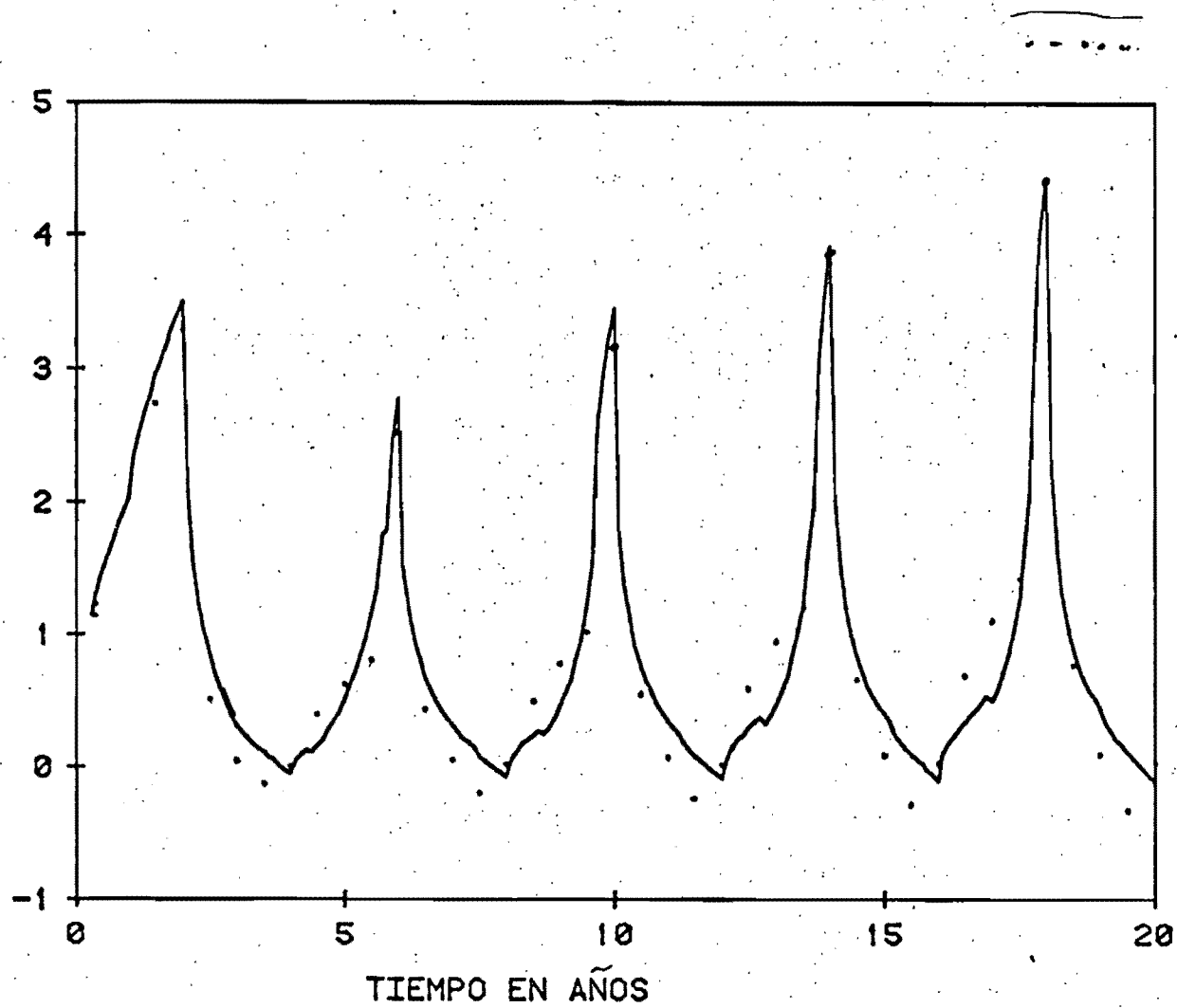


FIG 46 Comparación de caudales drenados

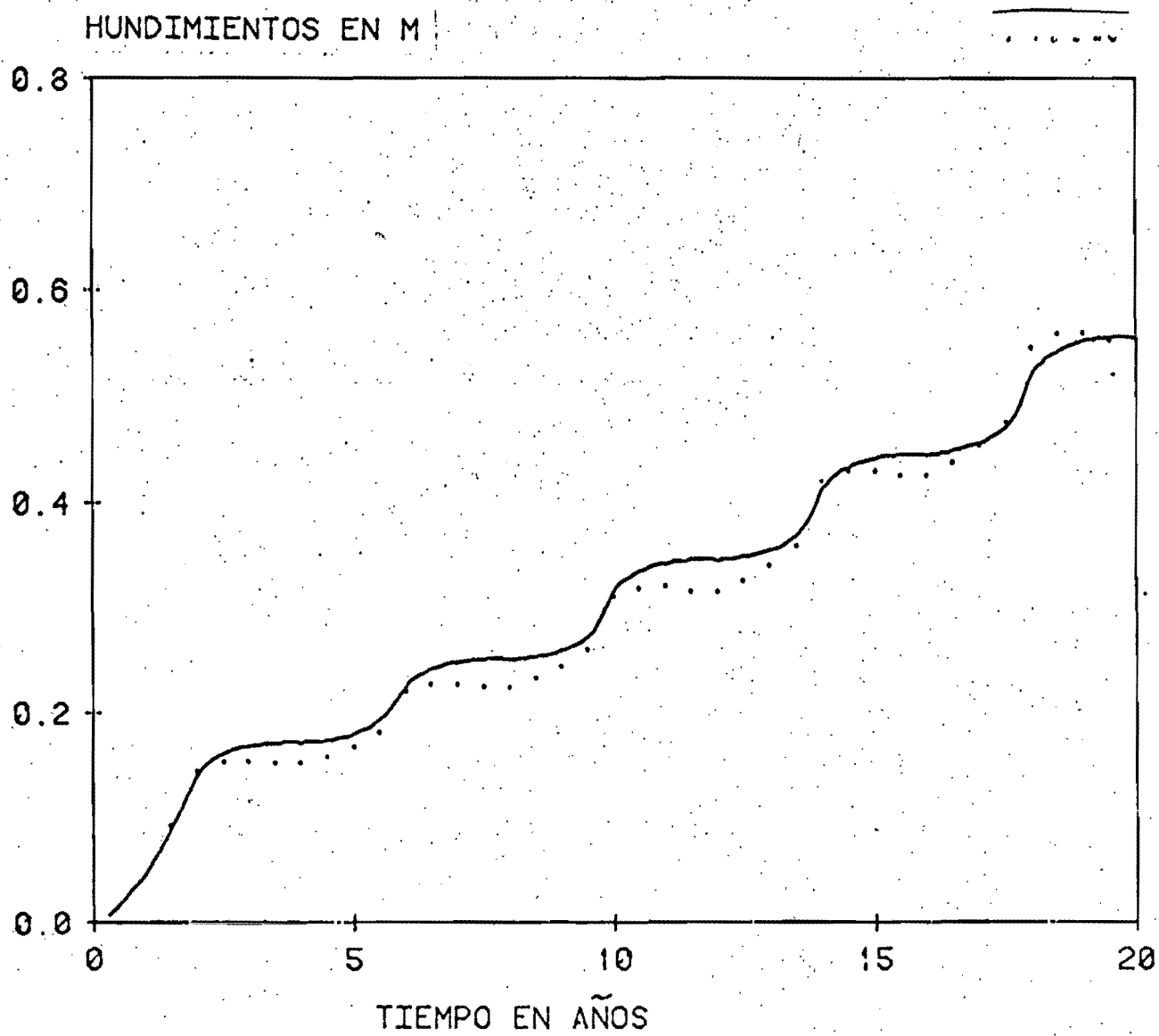
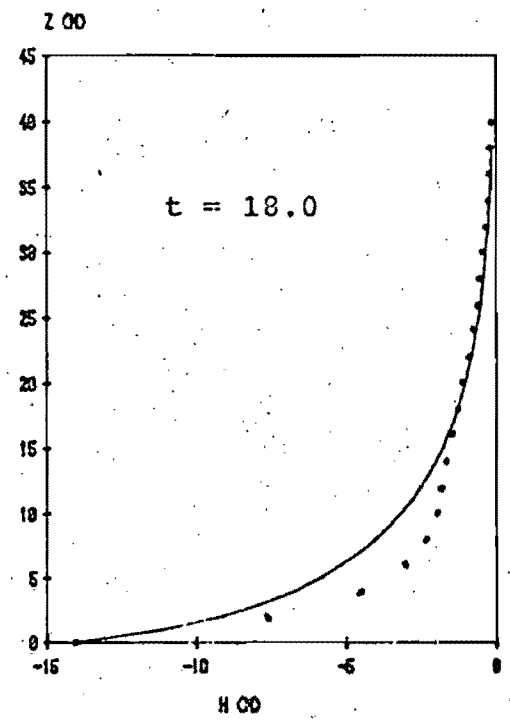
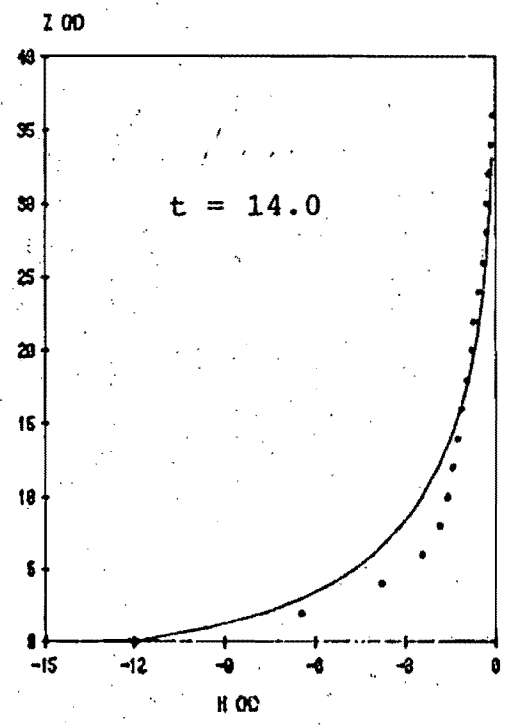
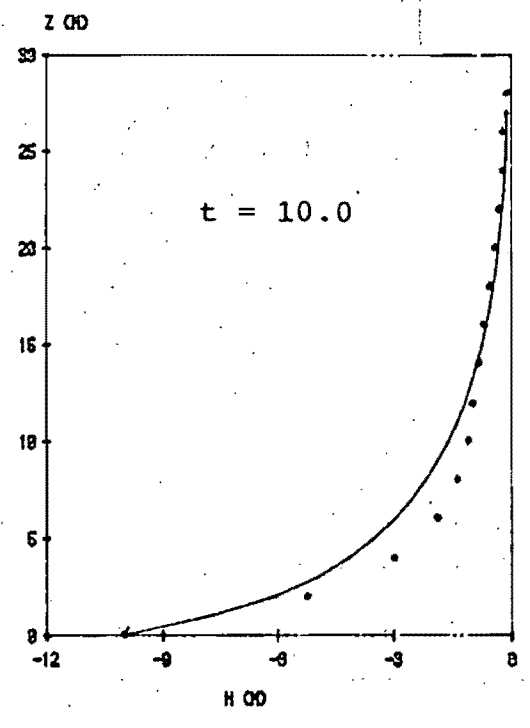
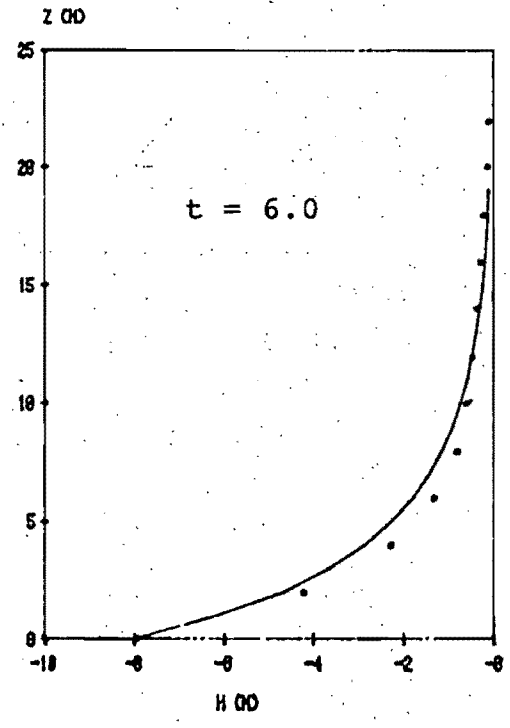
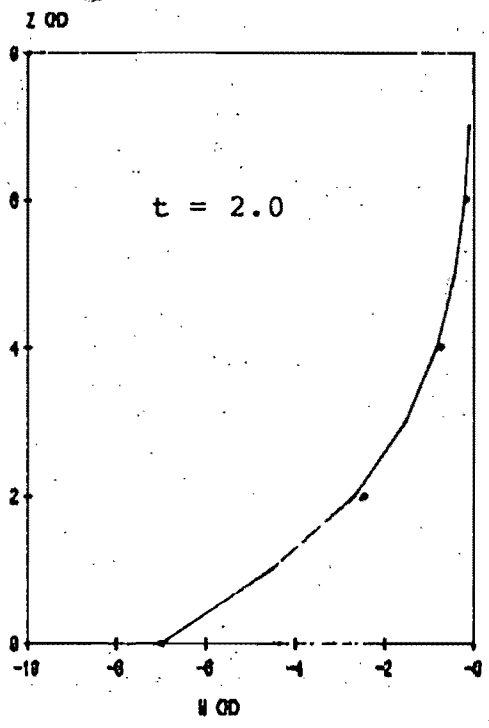


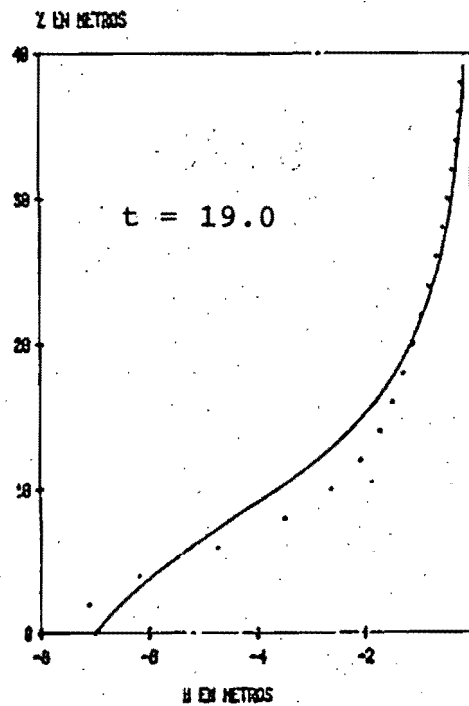
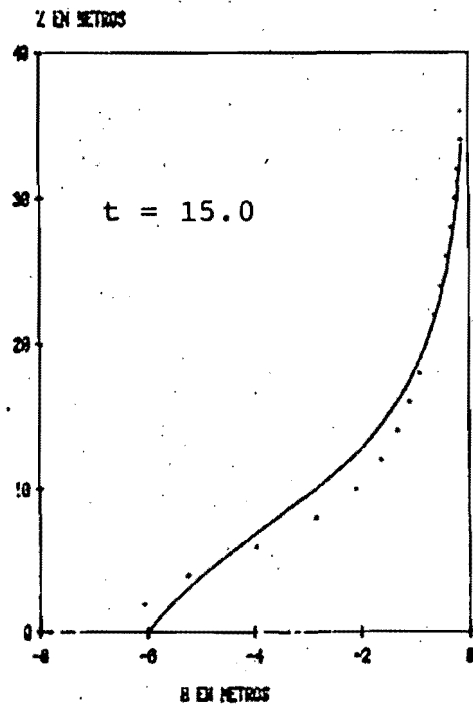
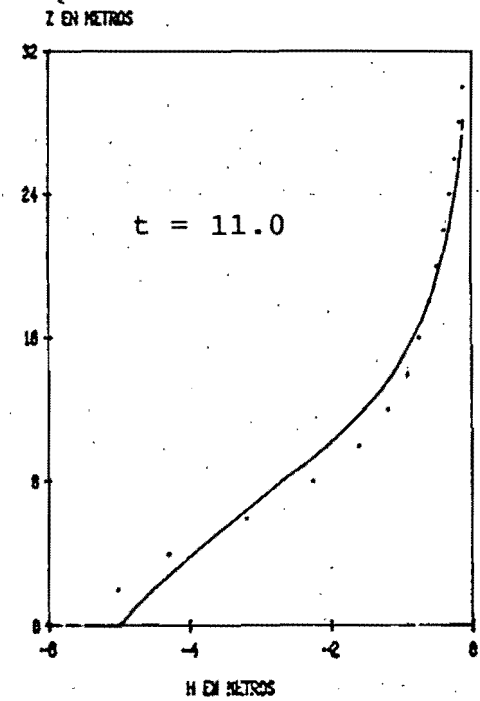
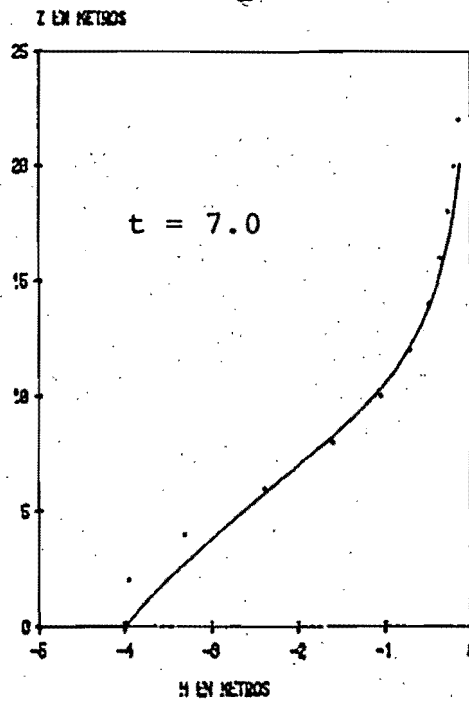
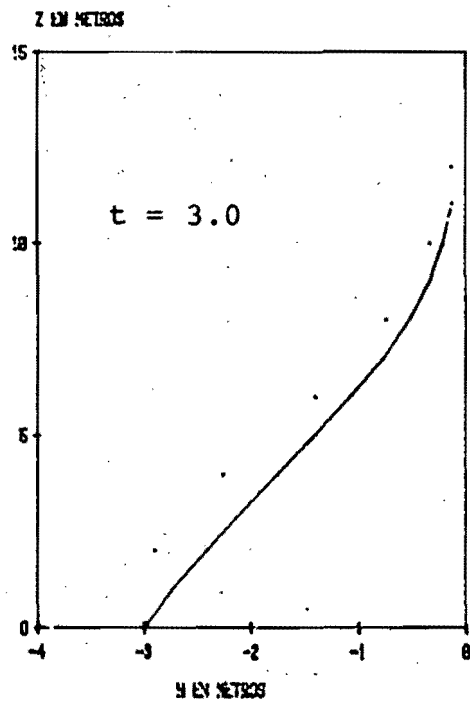
FIG 47 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 - - - - - Método aproximado

$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50m$

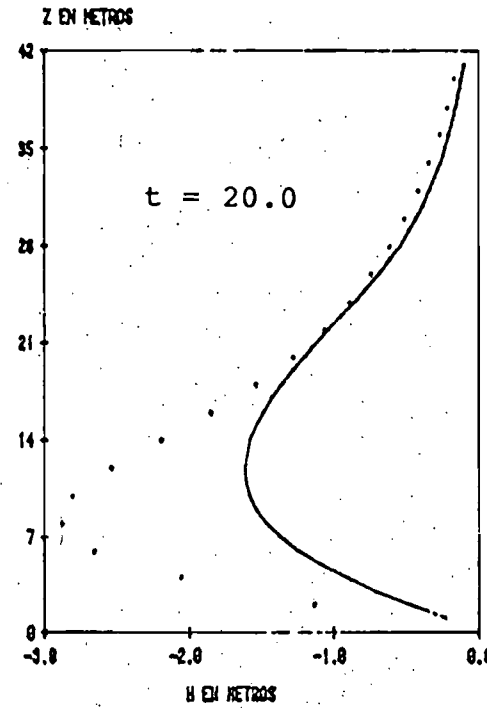
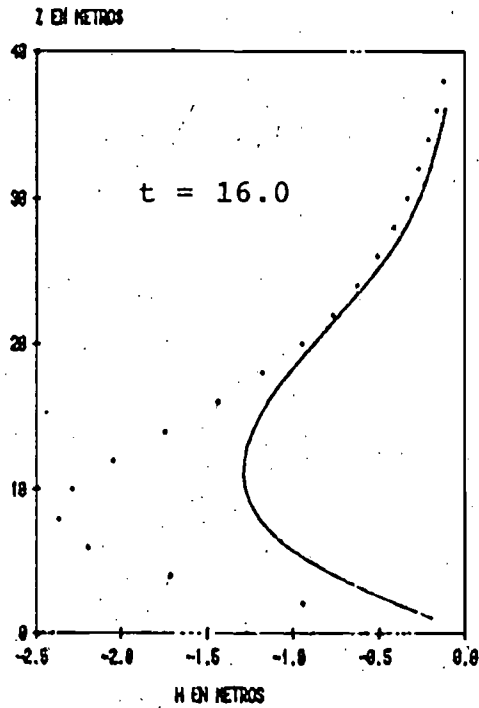
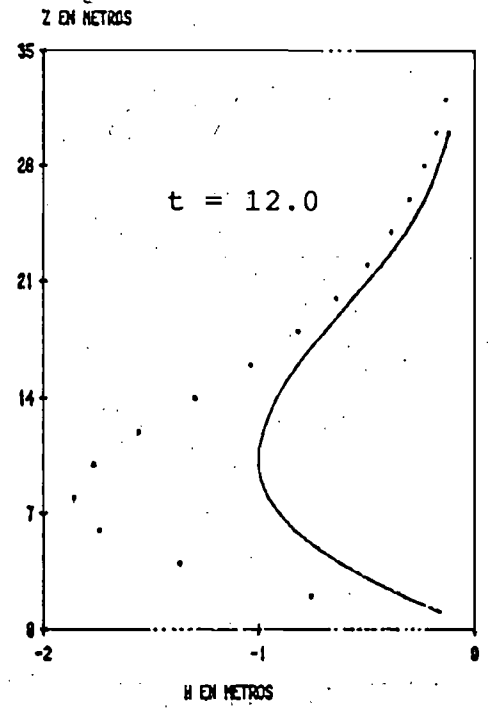
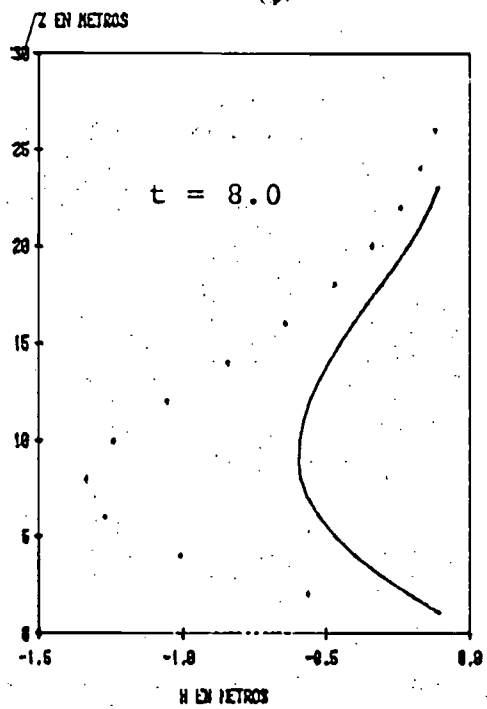
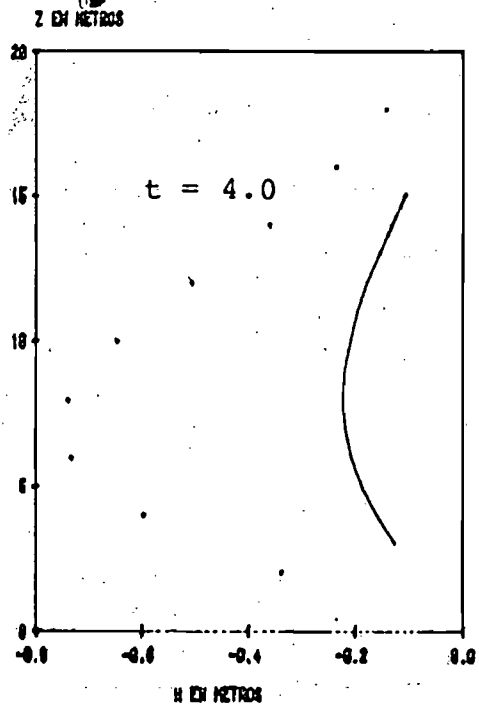
FIG 48 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



— Diferencias finitas
 Método aproximado III

$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50 \text{ m}$

FIG 49 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)



Diferencias finitas
 Método aproximado III
 $B_2/B_1 = 10$ $b = 50m$

FIG 50 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

GASTOS UNITARIOS EN M /S
*10⁻⁹

— Diferencias finitas
..... Método aproximado III

$\beta_2/\beta_1 = 10$ $b = 50m$

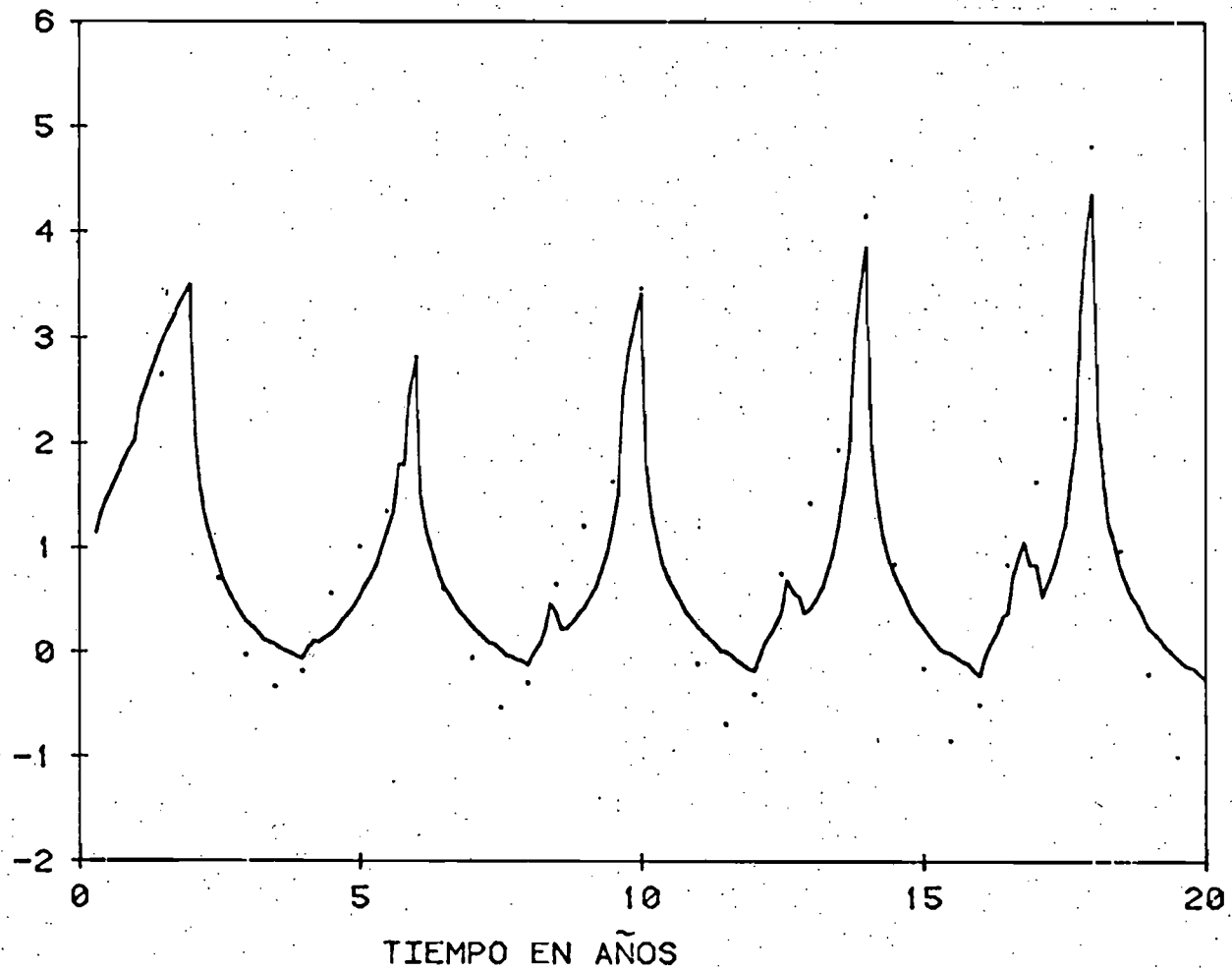


FIG 5/ Comparación de caudales drenados

HUNDIMIENTOS EN M

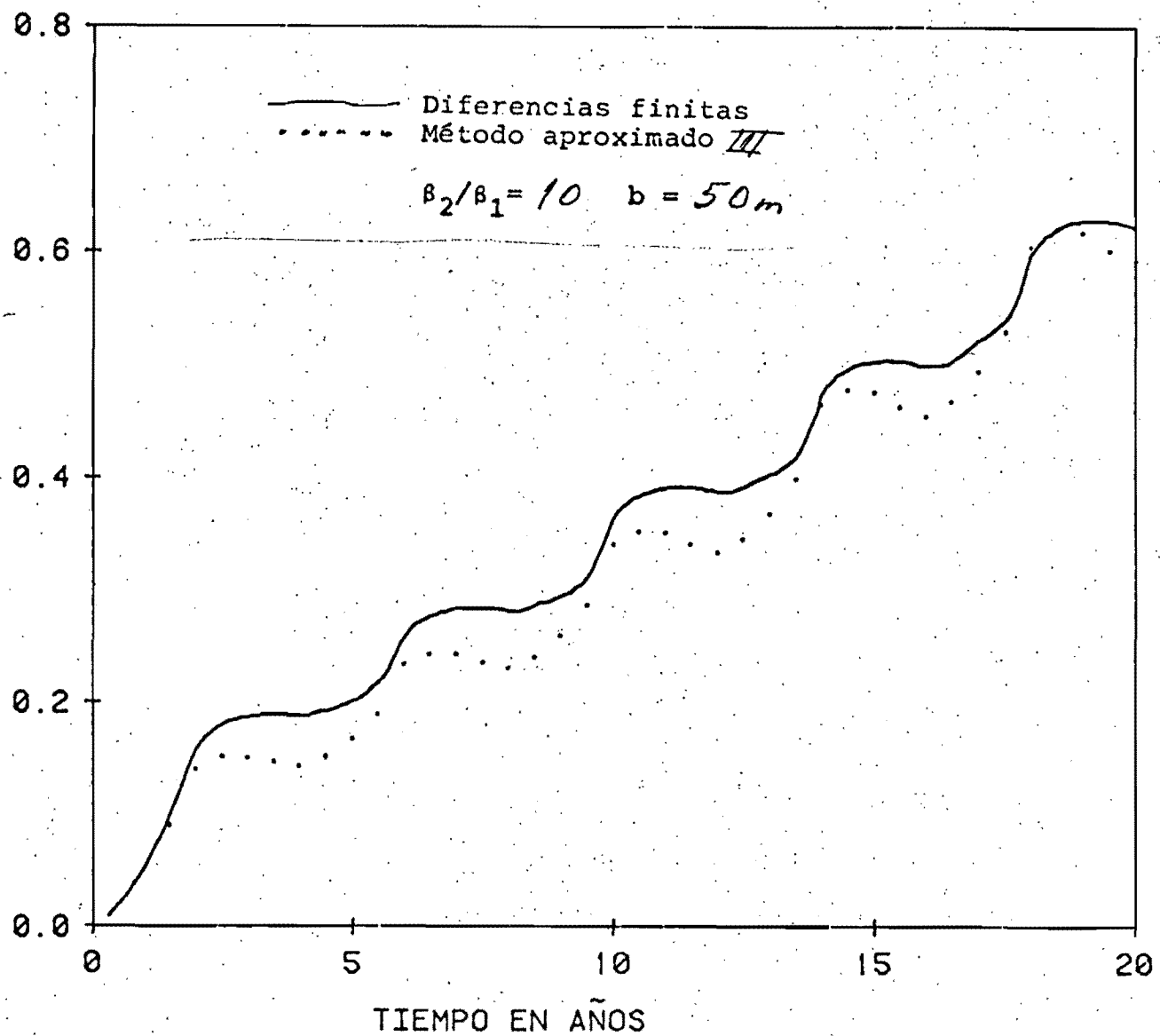
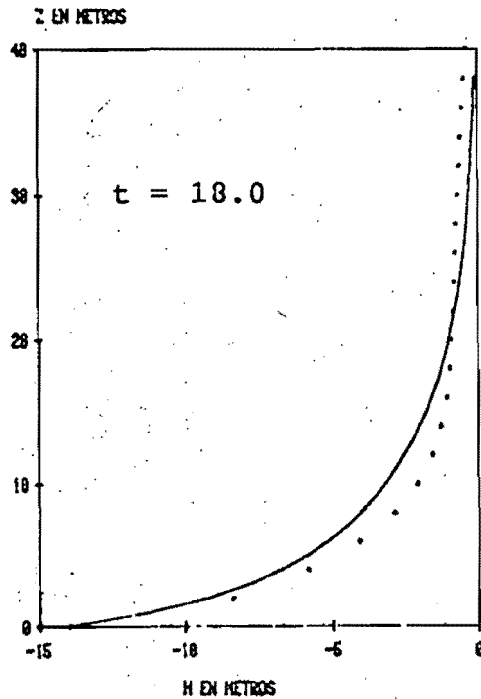
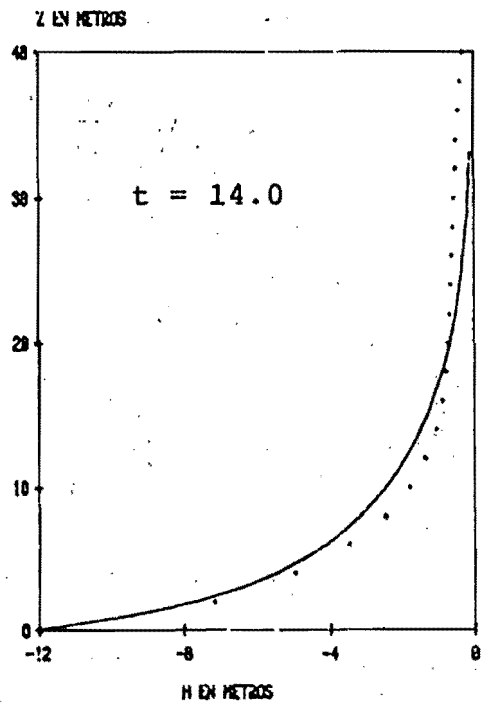
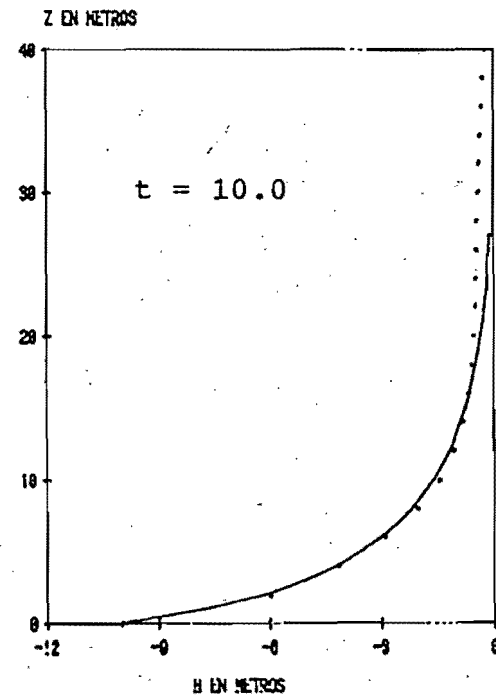
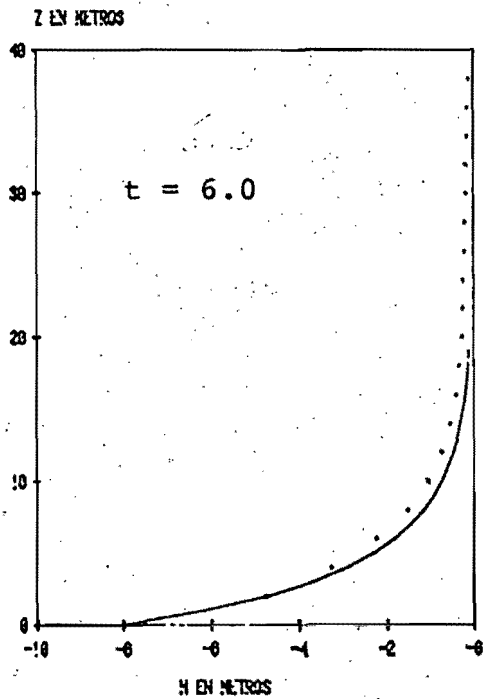
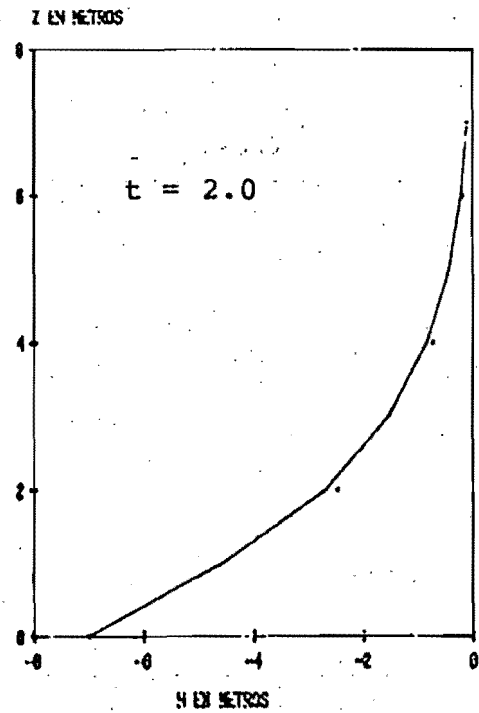


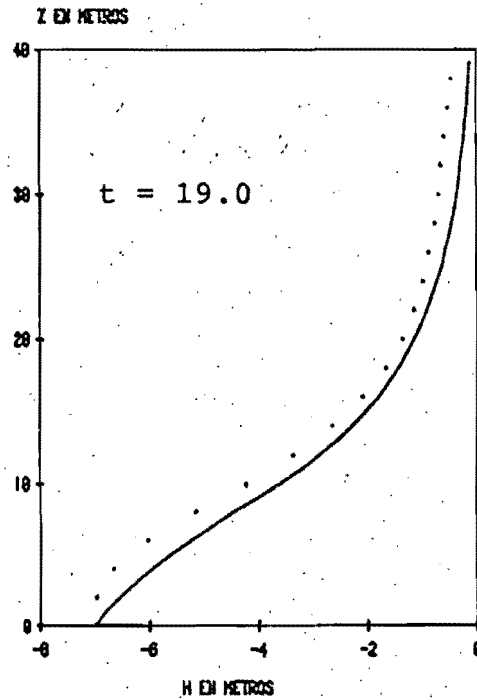
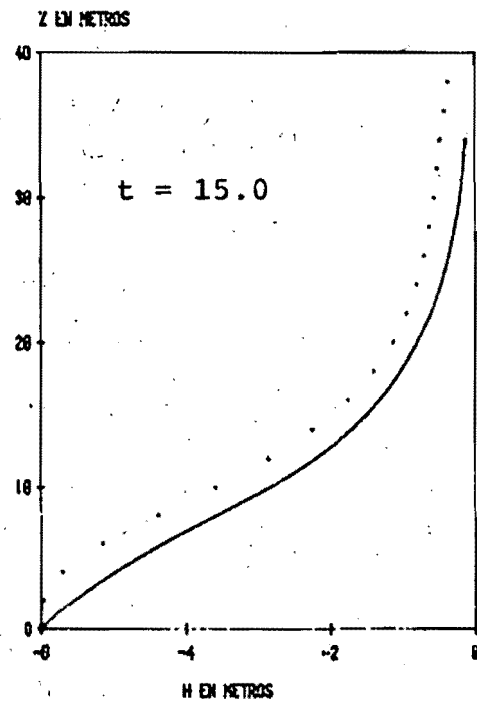
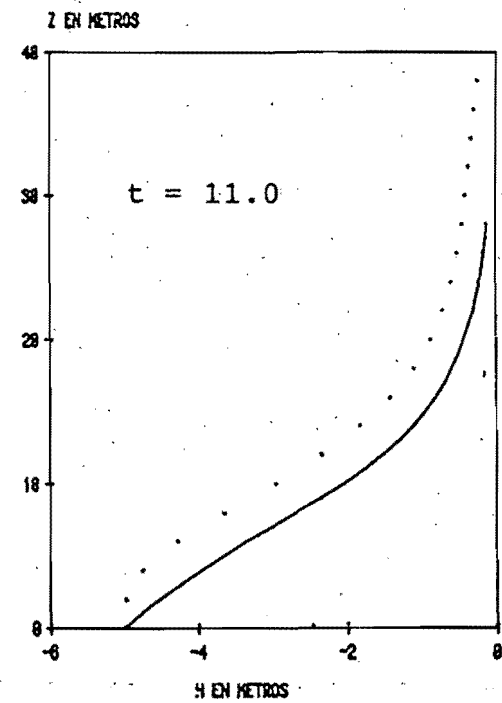
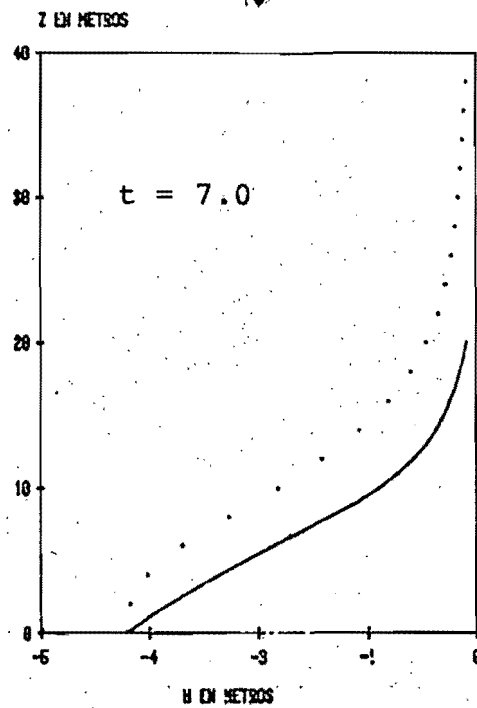
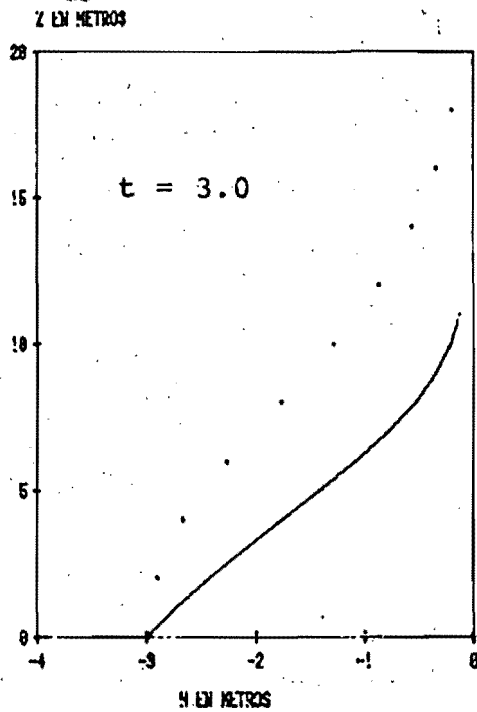
FIG 52 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 Método aproximado

$$\beta_2/\beta_1 = 100 \quad b = 50m$$

FIG 53 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)



Diferencias finitas
Método aproximado

$$\beta_2/\beta_1 = 100 \quad b = 50m$$

FIG 54 Comparación
de perfiles
de carga en
la vertical
(media)

GASTOS UNITARIOS EN M / S
 $\times 10^{-9}$

— Diferencias finitas
..... Método aproximado III
 $B_2/B_1 = 100 \quad b = 50m$

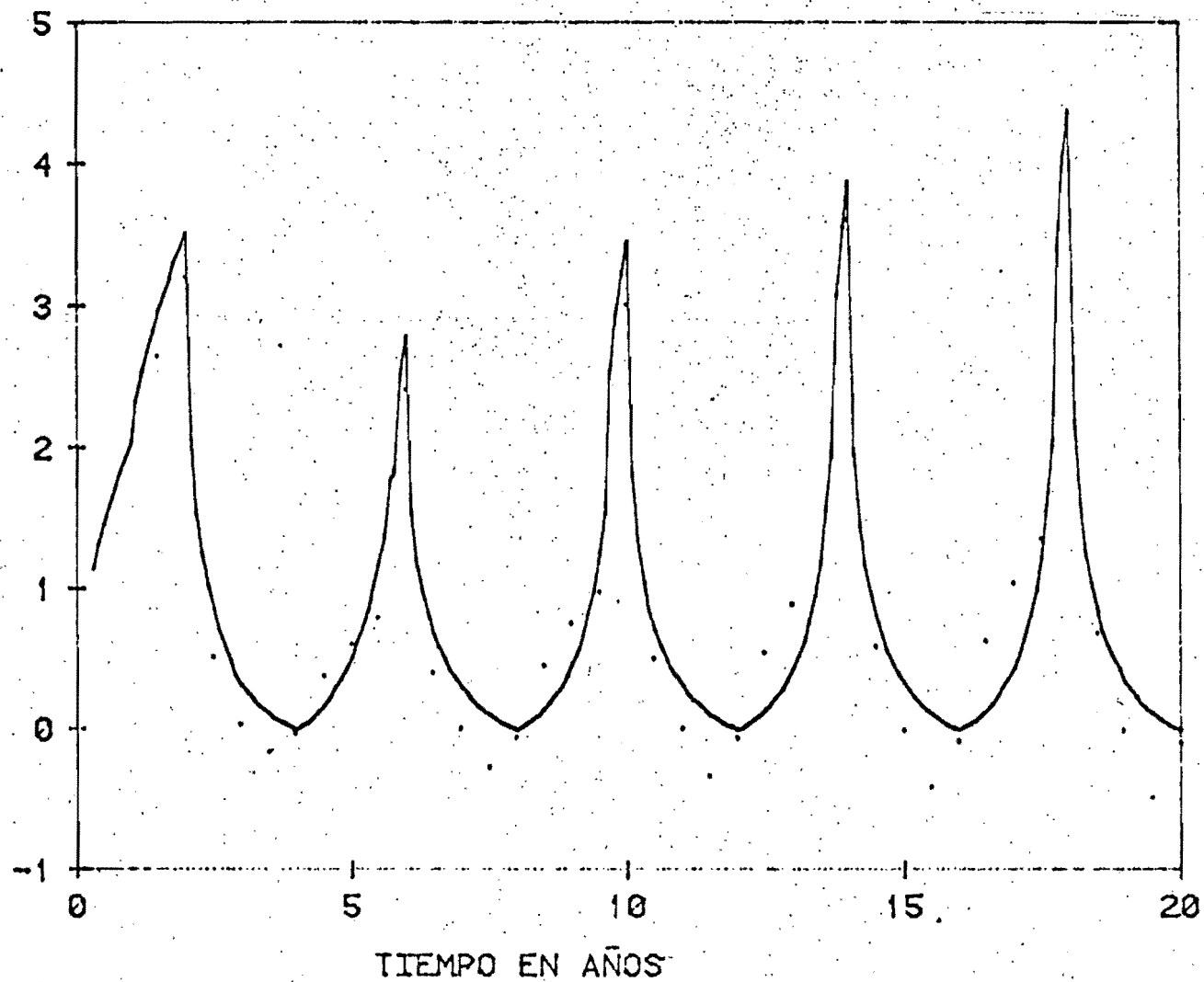


FIG 55 Comparación de caudales drenados

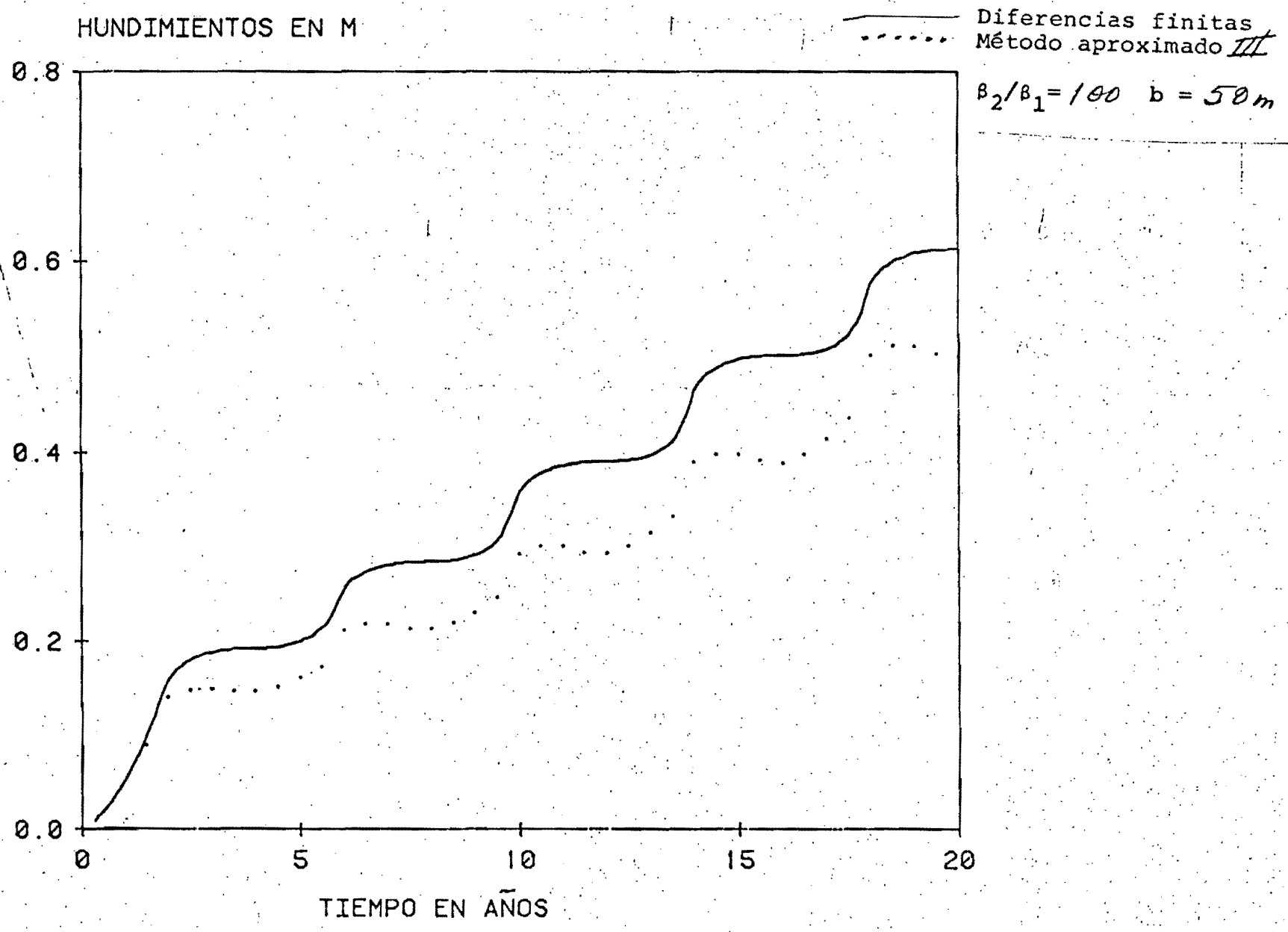
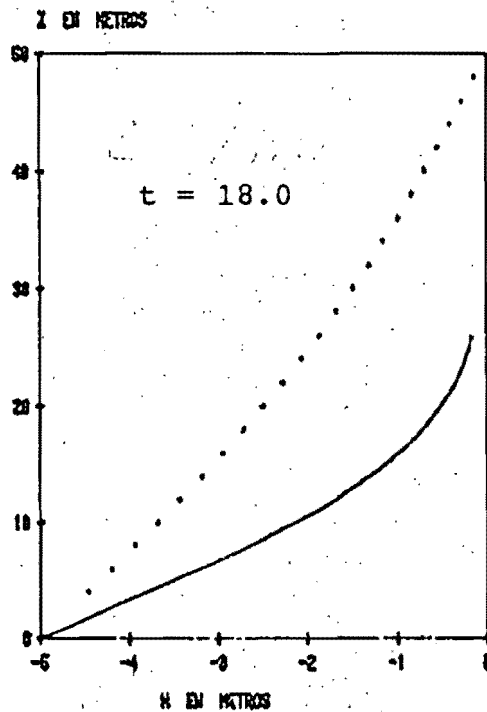
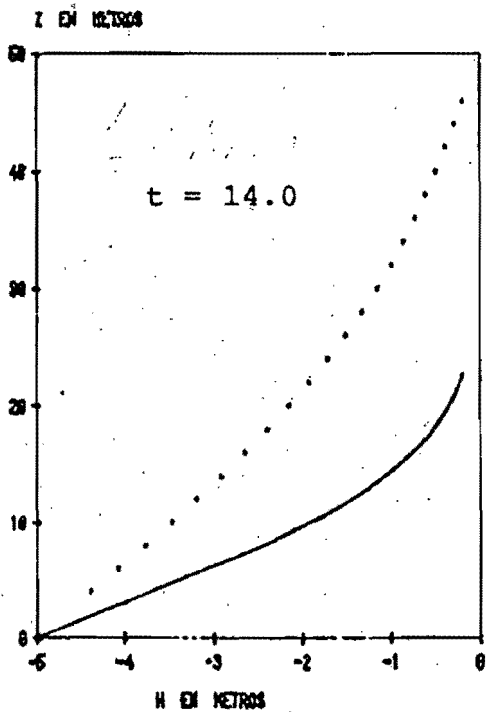
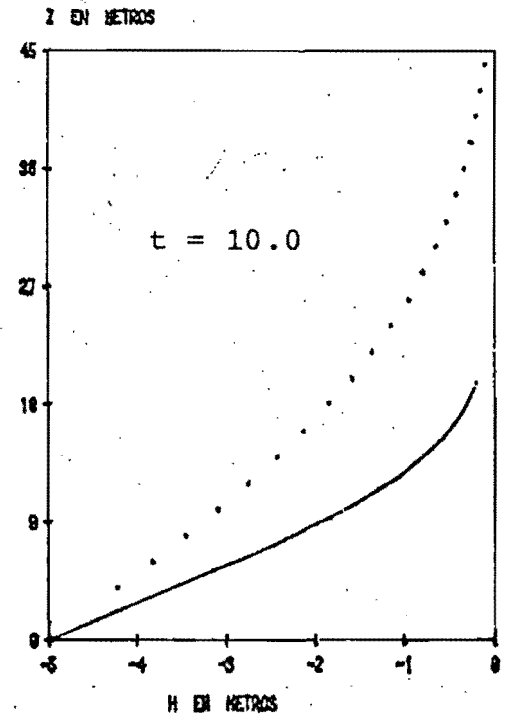
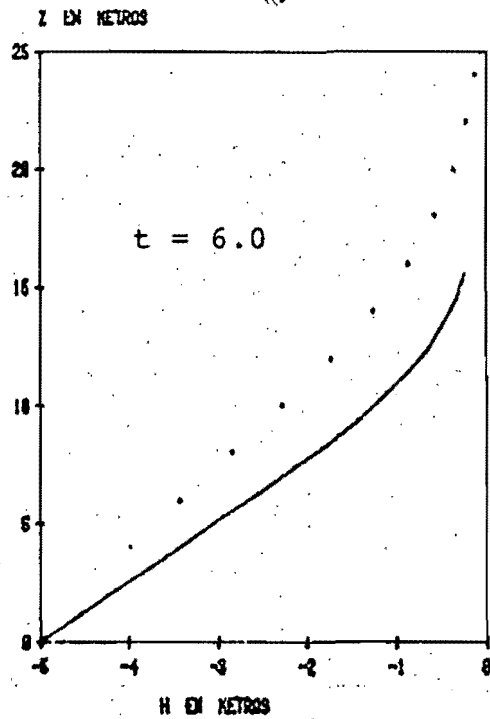
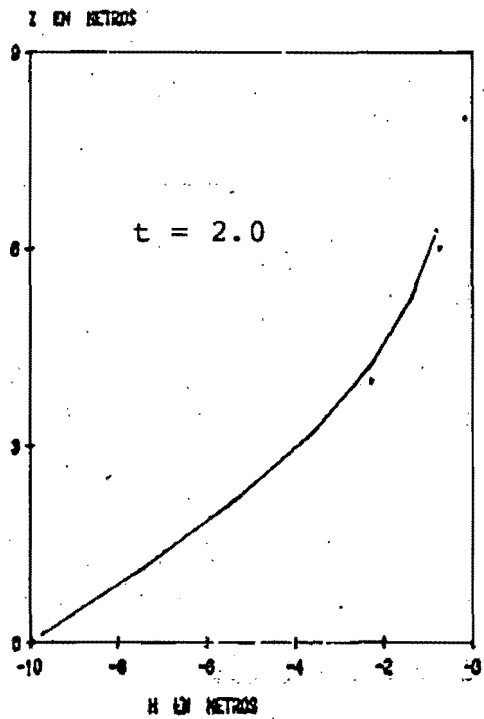


FIG 56 Comparación de hundimientos



— Diferencias finitas
 Método aproximado III

$B_2/B_1 = 100$ $b = 50m$

FIG 57 Comparación de perfiles de carga en la vertical (mínima)

Recuperación en la frontera de -10 a -5 m de carga hidráulica

GASTOS UNITARIOS EN M/S
*10⁻⁹

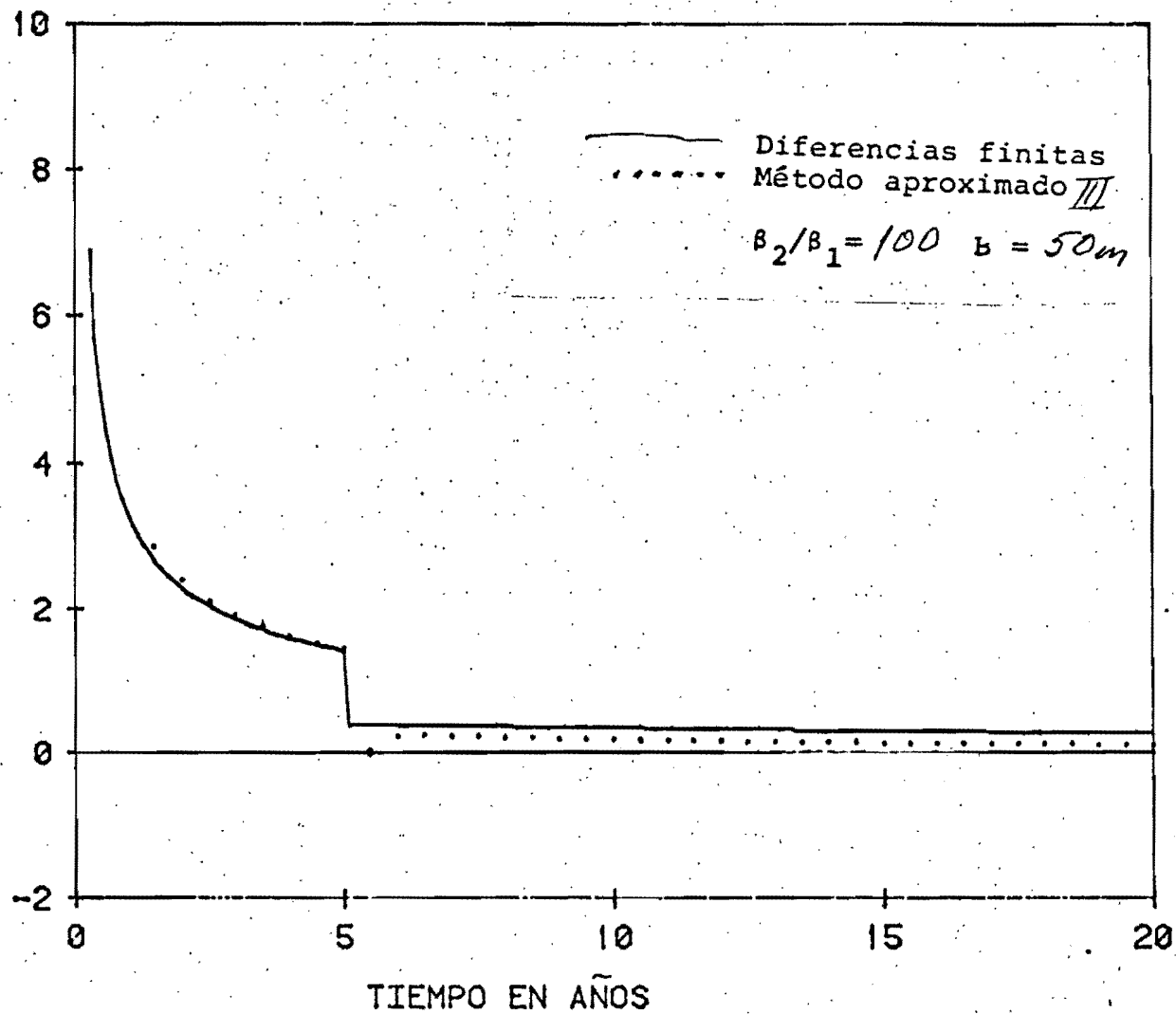
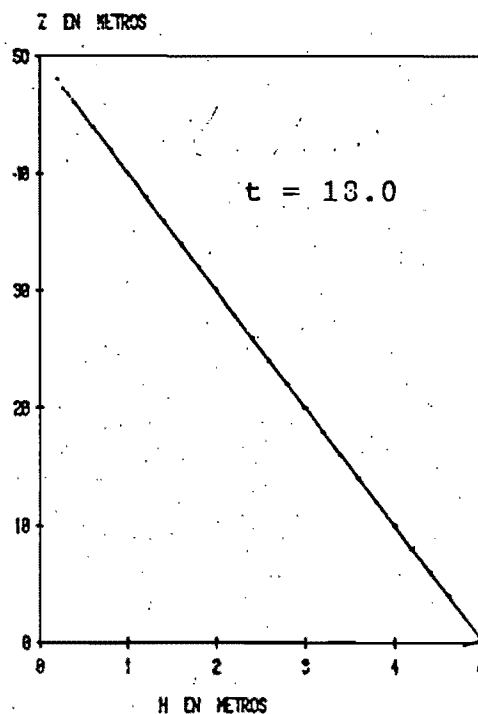
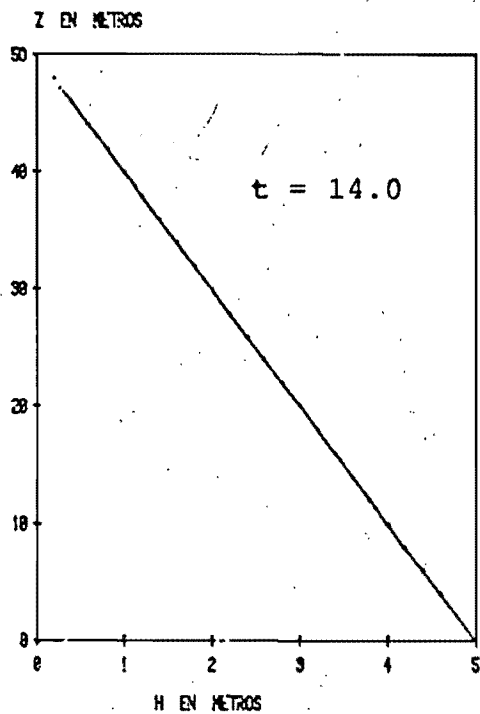
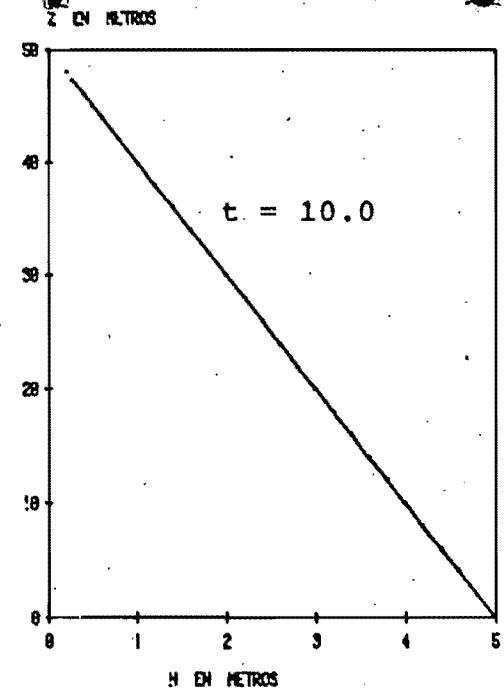
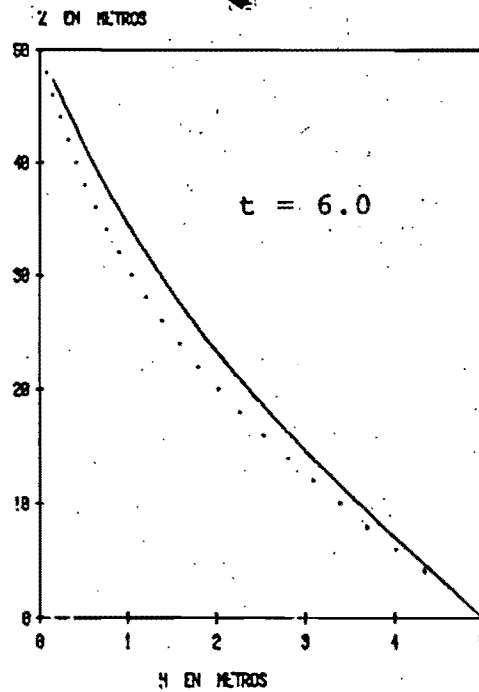
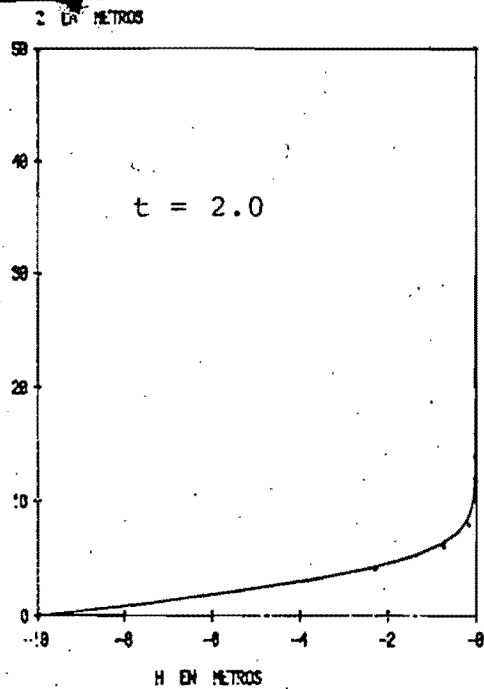


FIG 58 Comparación de caudales drenados
Recuperación en la frontera de -10 a -5 m
de carga hidráulica



Diferencias finitas
Método aproximado III

$$B_2/B_1 = 100 \quad b = 50m$$

FIG 59 Comparación
de perfiles
de carga en
la vertical
(mínima)
Recuperación en la fron-
tera de -10 a +5 m de
carga

GASTOS UNITARIOS EN M/S
*10⁻⁹

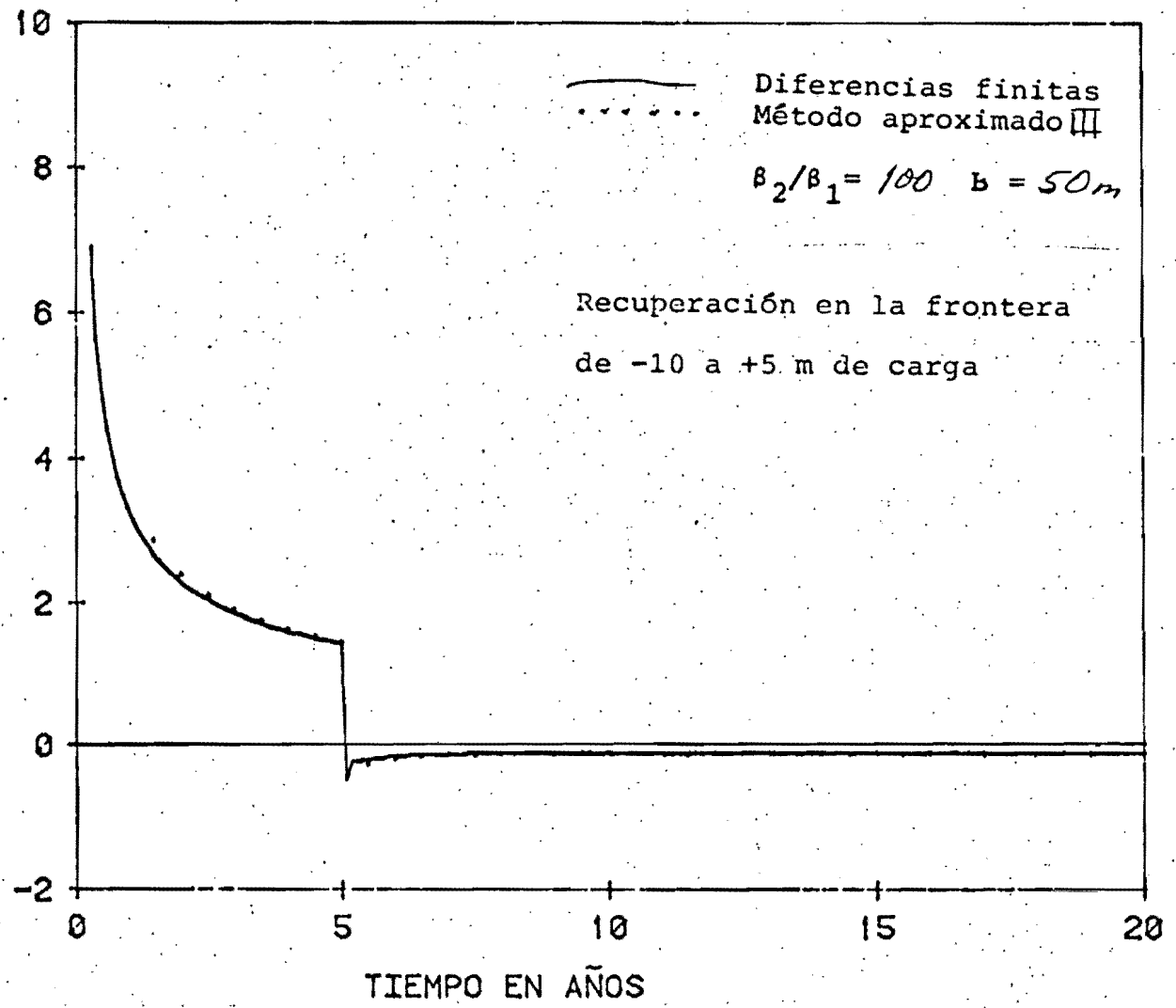
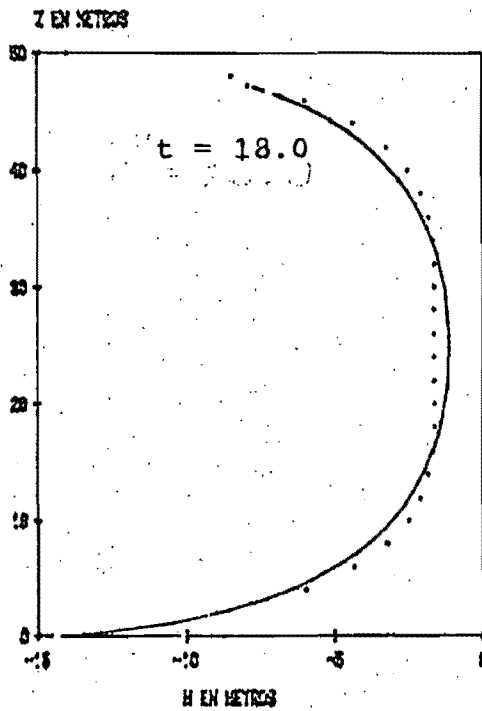
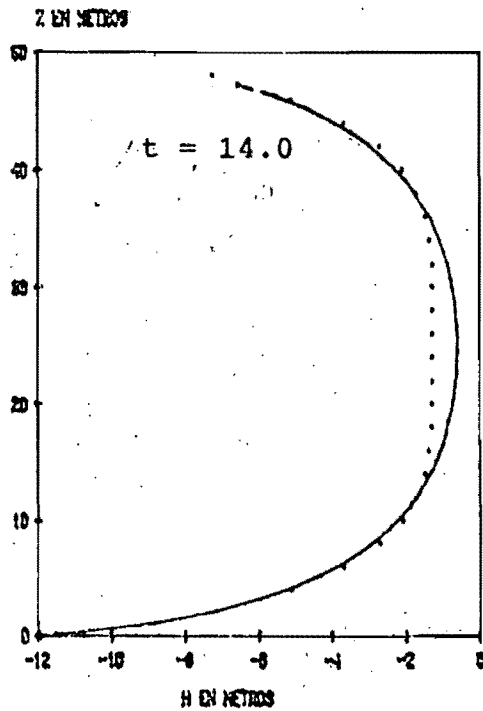
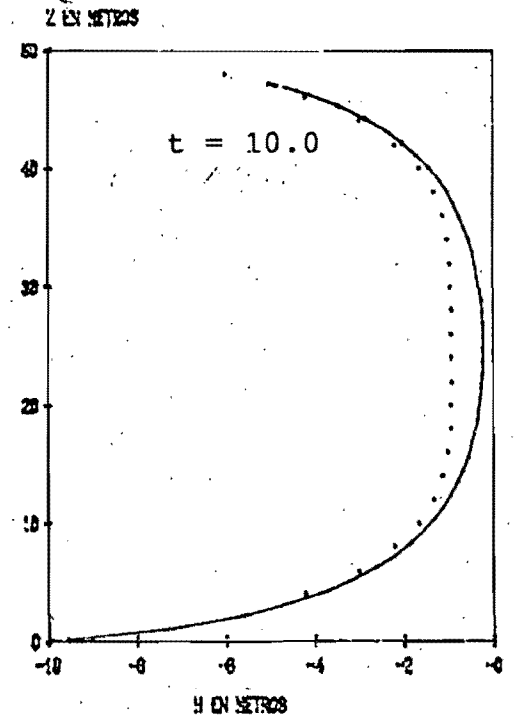
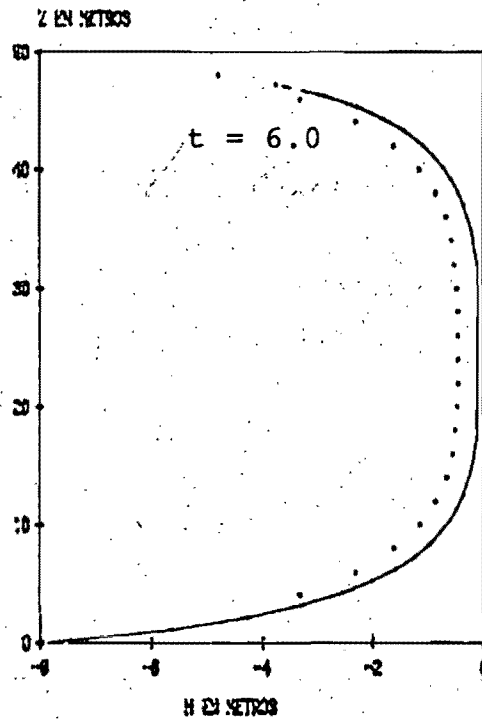
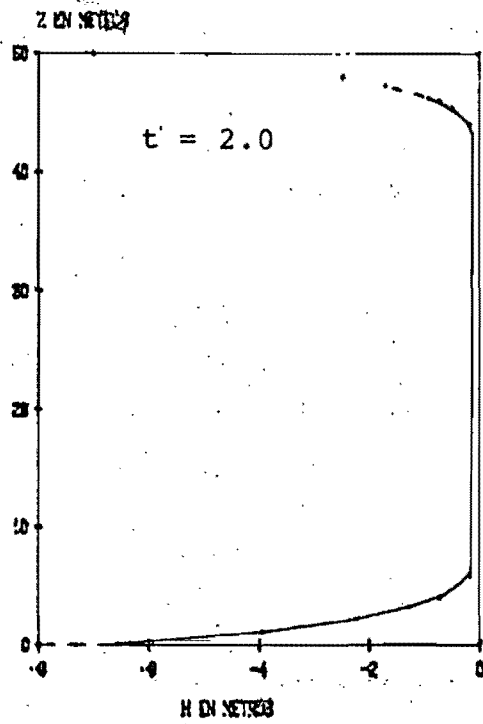


FIG 60 Comparación de caudales drenados





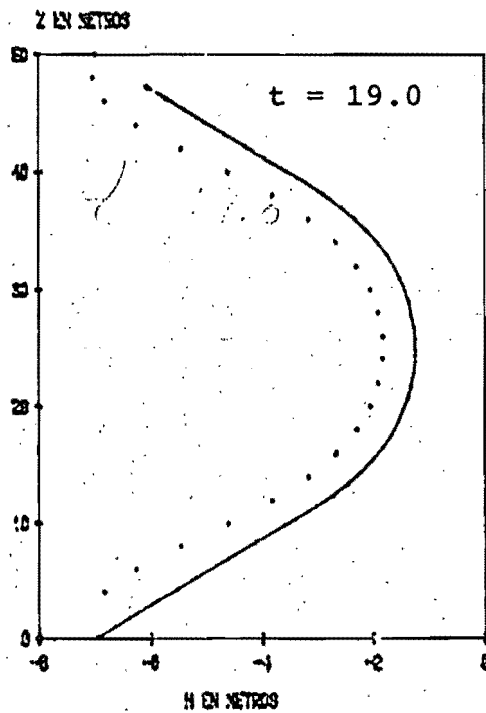
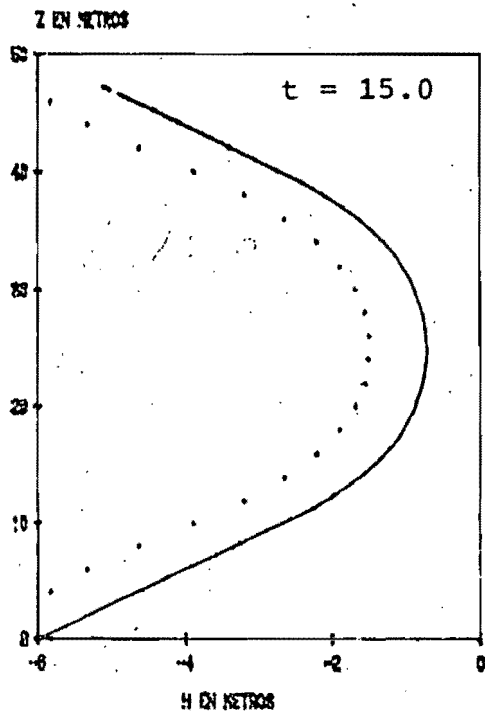
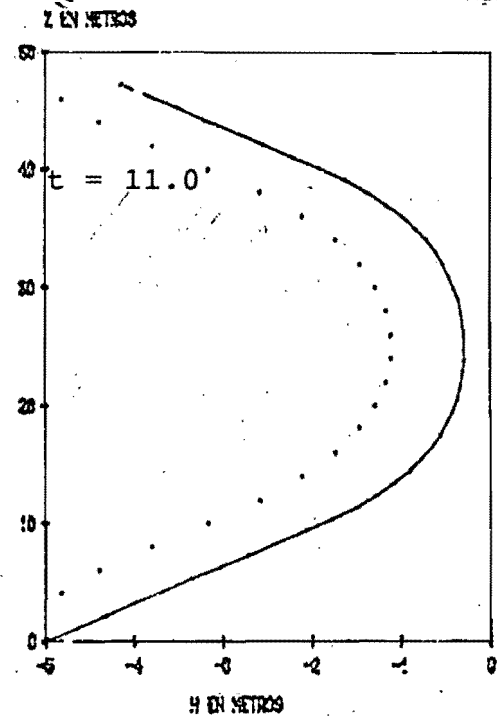
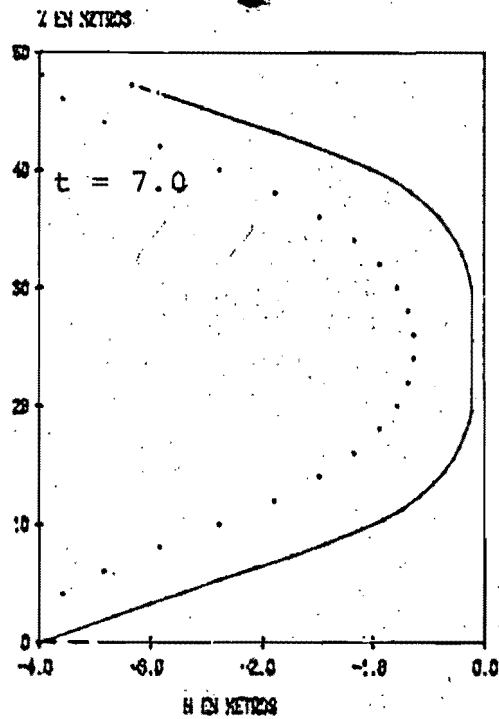
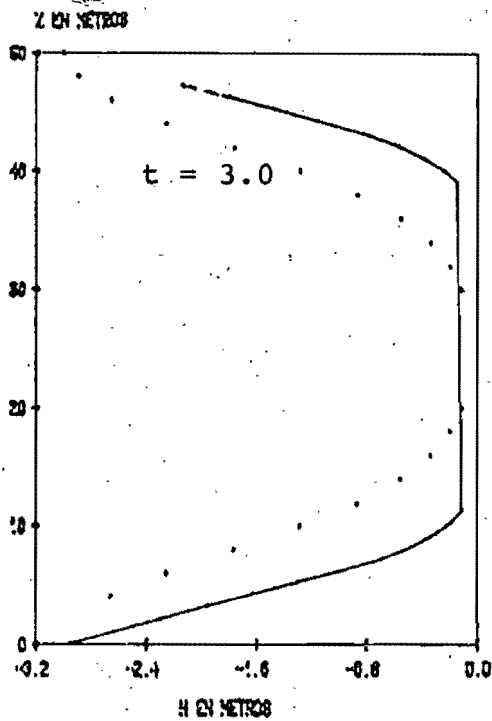
 Diferencias finitas
 Método aproximado III
 $B_2/B_1 = 100$ $b = 50m$

FIG 6.1 Comparación
 de perfiles
 de carga en
 la vertical
 (mínima)
 Variación cíclica de
 cargas en las dos fronte-
 ras





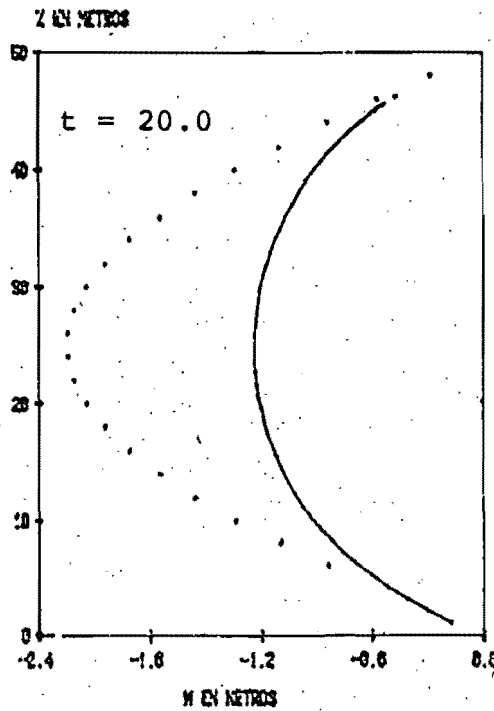
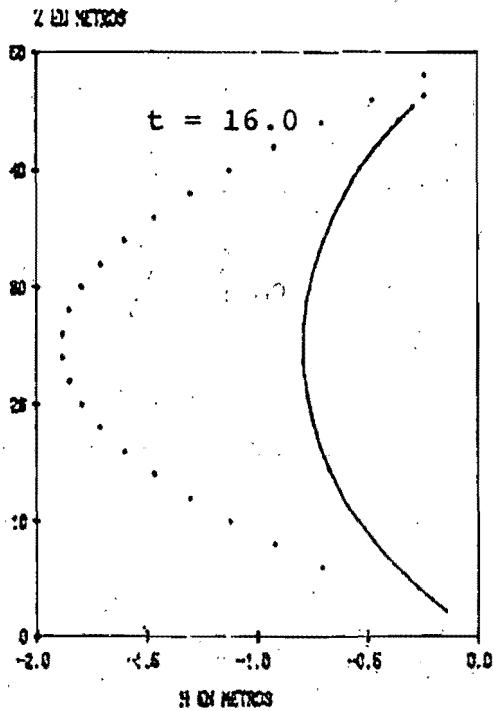
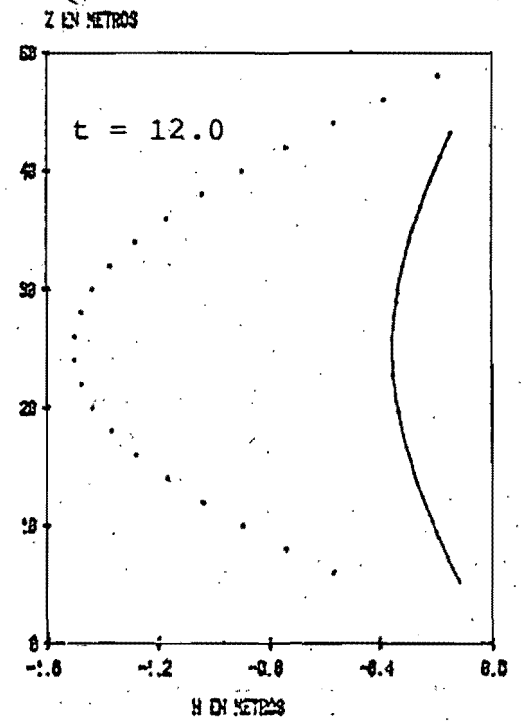
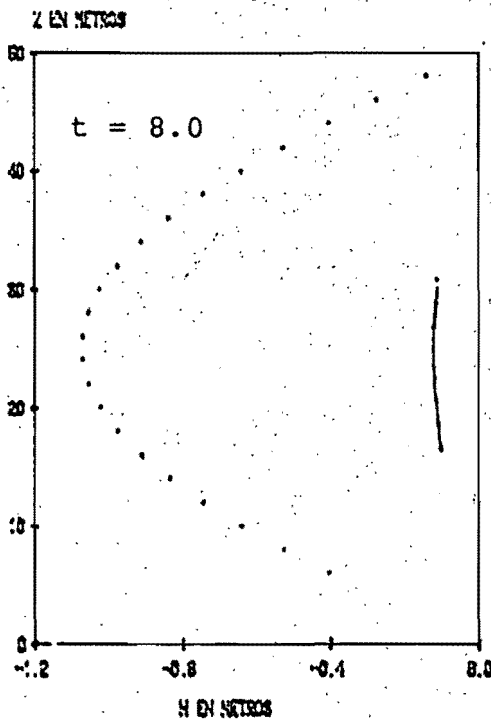
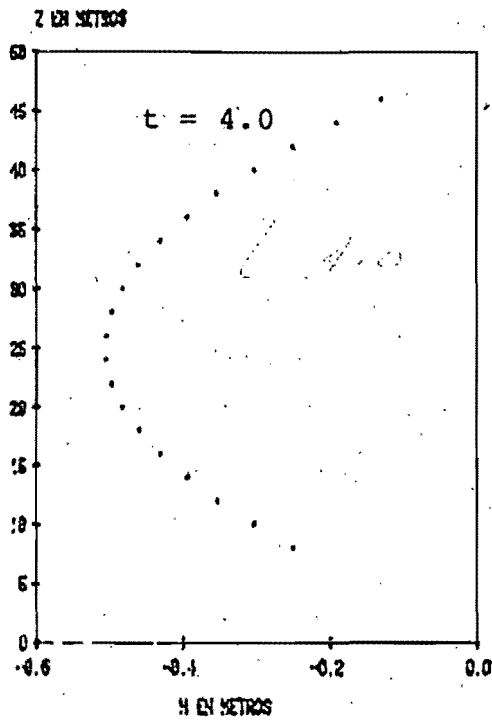
 Diferencias finitas
 Método aproximado III
 $\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50m$

FIG 62 Comparación de perfiles de carga en la vertical (media)

Variación cíclica de cargas en las dos fronteras



— Diferencias finitas
 ••••• Método aproximado

$\beta_2/\beta_1 = 100$ $b = 50m$

FIG 63 Comparación de perfiles de carga en la vertical (máxima)

Variación cíclica de cargas en las dos fronteras

GASTOS UNITARIOS EN M/S
 $\times 10^{-9}$

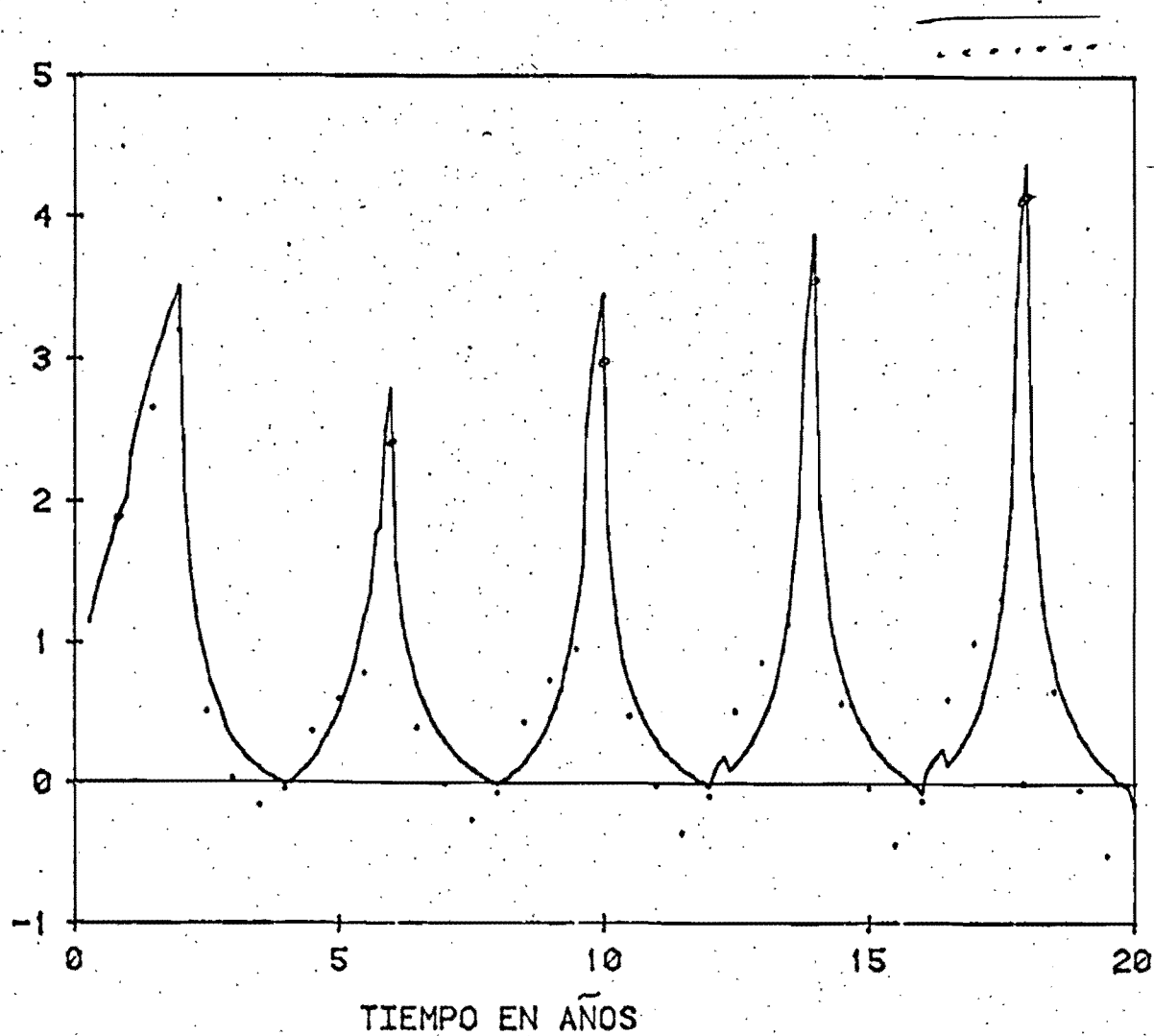


FIG 64 Comparación de caudales drenados

NIVELES PIEZOMETRICOS EN M

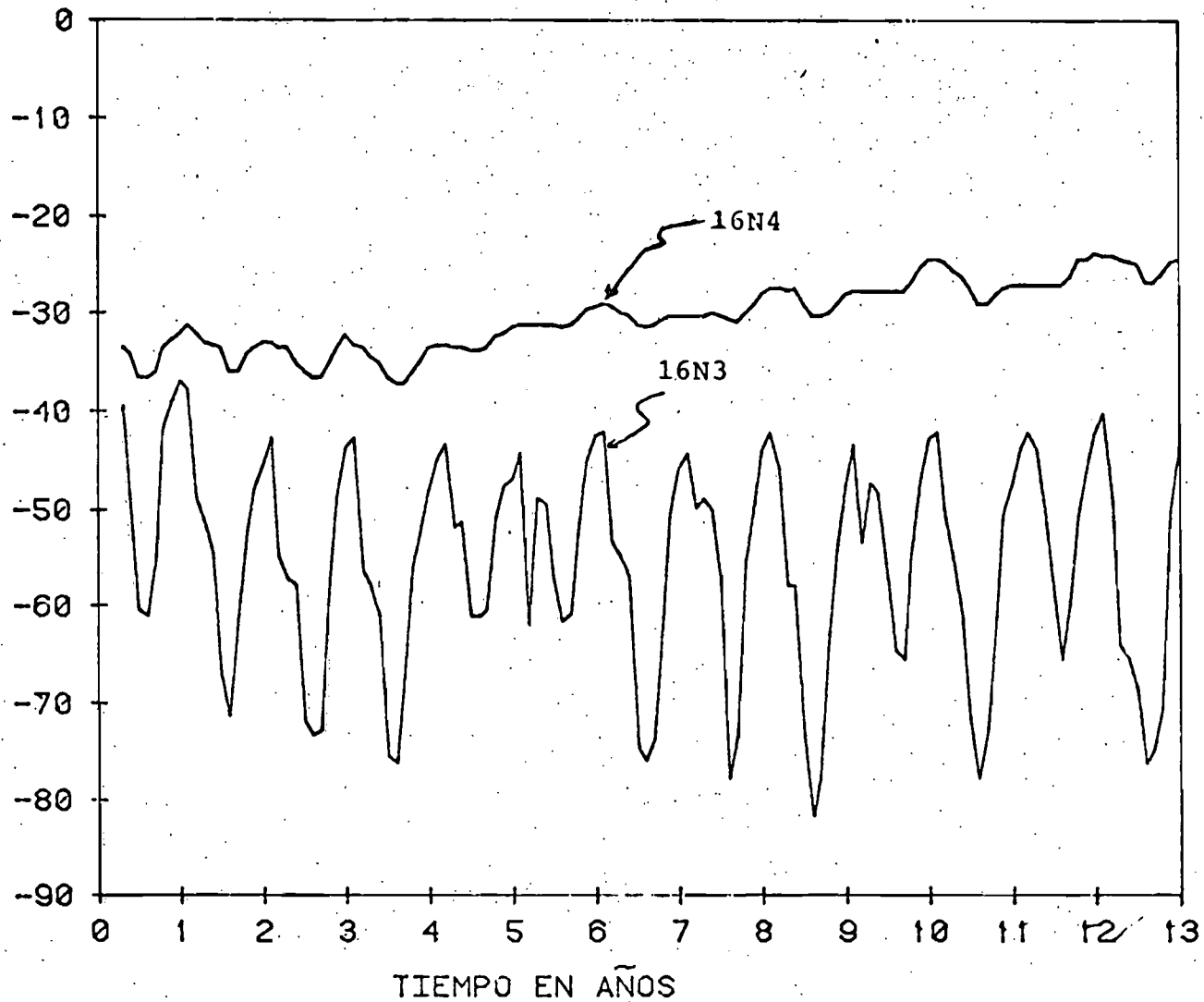


Fig 65. Niveles piezométricos observados en las dos fronteras de un acuitardo en Pixley, California. (Lofgren 1978)

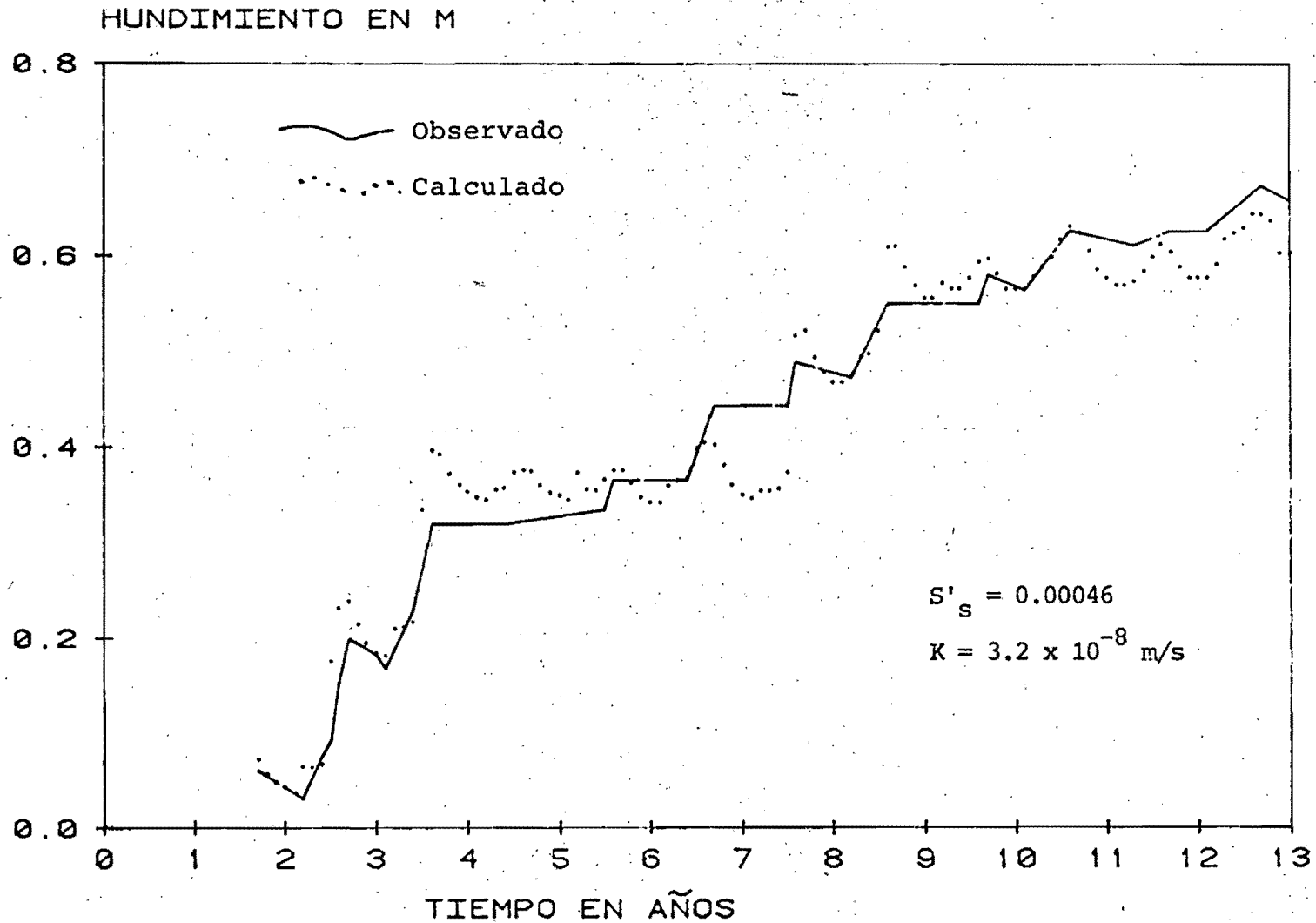


Fig 66 Consolidación del acuitardo en Pixley, California (Lofgren, 1978)

HUNDIMIENTOS EN M

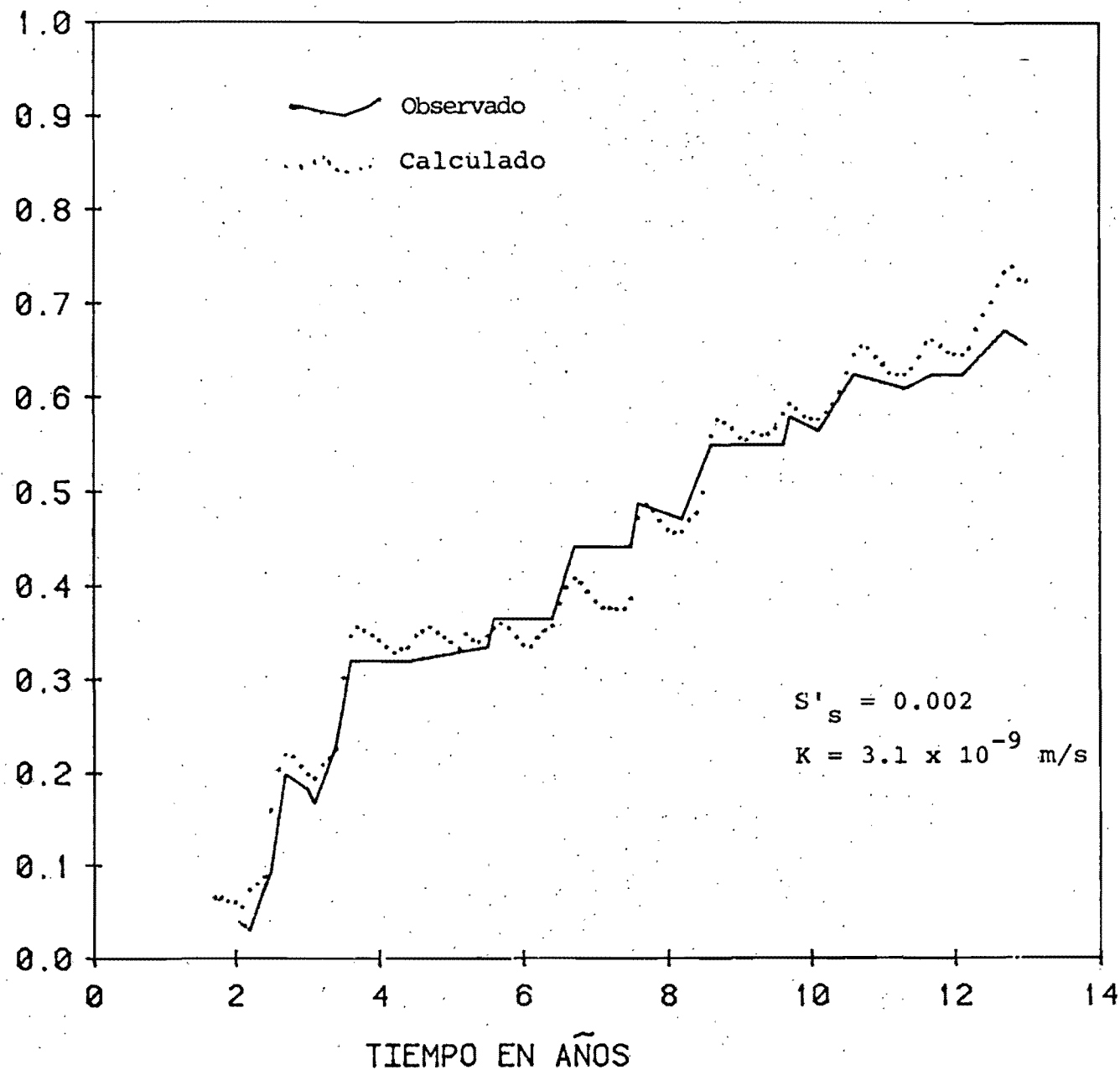


Fig 67 Consolidación del acuitardo en Pixley, California (Lofgren, 1978)

HUNDIMIENTOS EN M

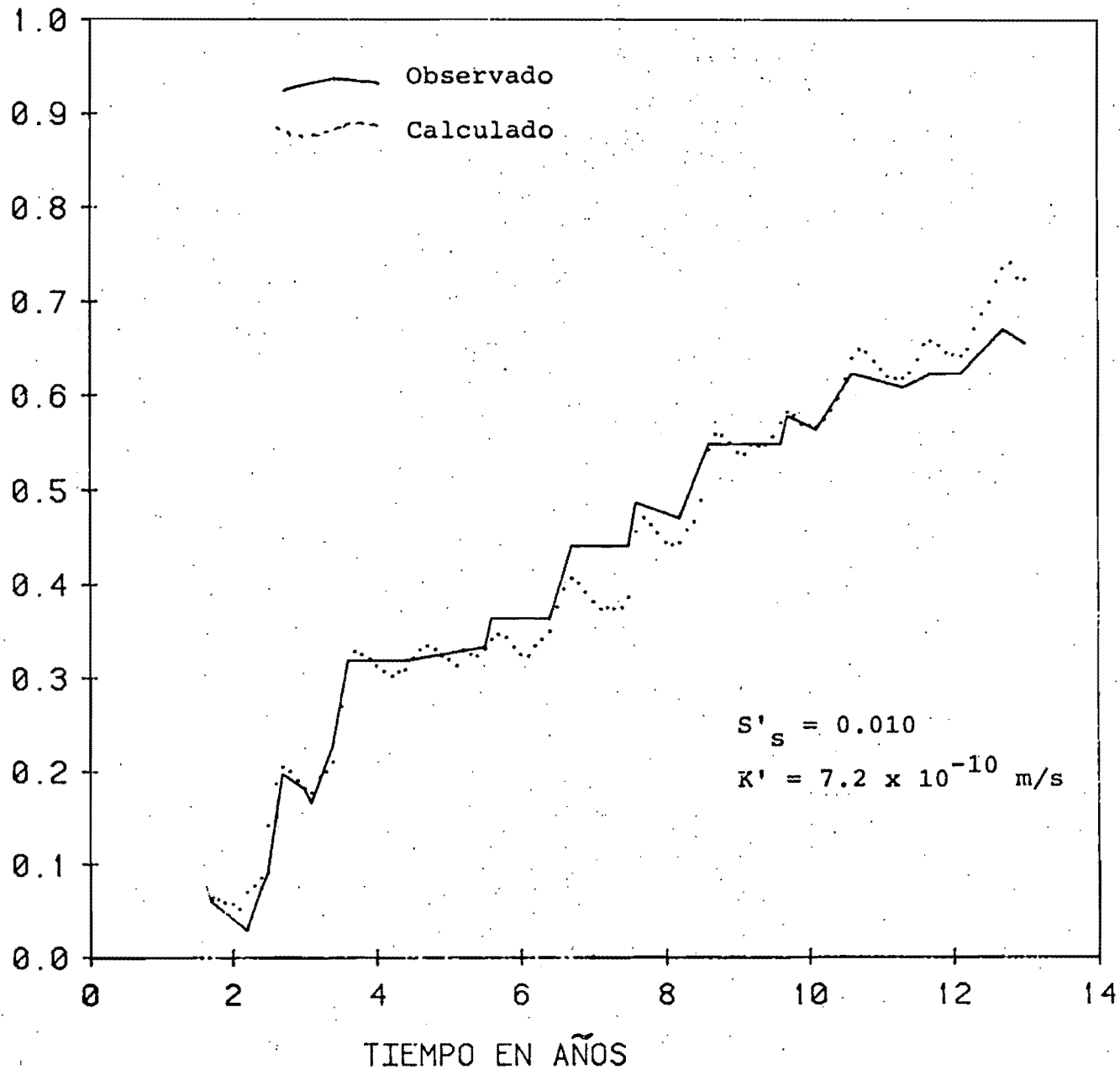


Fig 68 Consolidación del acuitardo en Pixley, California (Lofgren, 1978)

A P E N D I C E

1. SOLUCION A LA ECUACION DE FLUJO EN EL ACUITARDO CON ALMACENAMIENTO VARIABLE DE INTERVALO EN INTERVALO DE TIEMPO

Por facilidad de exposición se considerará el caso de un acuitardo limitado por dos acuíferos, en uno de los cuales se mantiene el nivel piezométrico constante.

Sin embargo, esto no es limitante ya que la metodología puede aplicarse a cualquier condición de frontera.

La ecuación de flujo vertical en el acuitardo es

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{S_s'}{K'} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad 0 \leq t \leq \infty; \quad 0 \leq z \leq b \quad (A1a)$$

con condiciones iniciales:

$$H(z, 0) = 0 \quad \text{en} \quad 0 < z \leq b \quad (\text{A1b})$$

$$H(0, 0) = \Delta H_1 \quad \text{en} \quad z = 0$$

condiciones de frontera:

$$H(0, t) = \Delta H_1 \quad (\text{A1c})$$

$$H(b, t) = 0 \quad 0 \leq t < \infty \quad (\text{A1d})$$

y condición límite

$$H(z, \infty) = \Delta H_1 (1 - z/b) \quad (\text{A1e})$$

donde

H carga piezométrica; $H = z + p/\gamma$

S'_s coeficiente de almacenamiento específico del acuitardo

K' permeabilidad hidráulica del acuitardo

z coordenada vertical

t tiempo

p presión de poro o del agua

γ peso específico del agua

b espesor del acuitardo

La solución a este sistema puede obtenerse por el método de separación de variables y desarrollo en series de Fourier..

Dada la condición límite en $t \rightarrow \infty$ conviene suponer la solución del tipo

$$H(z, t) = \Delta H_1 (1 - z/b) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n V_n \quad (\text{A2})$$

donde W_n es sólo función de z y V_n sólo función de t y cada producto satisface a las ecs (1).

Sustituyendo (A2) en (A1a), tomando el término enésimo de la serie y dividiendo entre $V_n W_n$ se obtiene

$$\frac{1}{W_n} \frac{\partial^2 W_n}{\partial z^2} = \frac{S_s'}{K'} \frac{1}{V_n} \frac{\partial V_n}{\partial t} = P \quad (\text{A3})$$

Si el primer miembro es sólo función de z y el segundo sólo función de t y son iguales, deben serlo a una constante, que se ha llamado P . De (A3) se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{S_s'}{K'} \frac{dV_n}{dt} - P V_n = 0 \quad (\text{A4})$$

$$\frac{d^2 W_n}{dz^2} - W_n P = 0 \quad (\text{A5})$$

La solución de (A4) es inmediata:

$$V_n = C_1 e^{PK't/S_s'}$$

en la que si P es negativa, la función V_n cumple con la con-

dición límite en $t \rightarrow \infty$.

La (A5) es una ecuación diferencial de coeficientes constantes con ecuación característica $\alpha^2 - P = 0$; $\alpha = \pm \sqrt{P}$.

Si $P < 0$ la solución general de (A5) es:

$$W_n = C_2 \operatorname{sen} \lambda z + C_3 \operatorname{cos} \lambda z \quad ; \quad \lambda = \sqrt{-P}$$

Para cumplir con la condición (Alc) se necesita que $C_3 = 0$ y para que $H(b, t) = 0$, $\lambda b = n\pi$, o sea, $\lambda = n\pi/b$.

La ec (A2) se escribe entonces

$$H(z, t) = \Delta H_1 \left(1 - \frac{z}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi \frac{z}{b} e^{-n^2 \pi^2 \beta t}$$

donde a_n reúne a las constantes C_1 y C_2 y $\beta = \frac{k'}{S_s' b^2}$

La condición (Alb) permite el cálculo de las a_n ya que si

$$H(z, 0) = 0 :$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\pi \frac{z}{b} = -\Delta H_1 \left(1 - \frac{z}{b}\right)$$

y las a_n son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función $-\Delta H_1 \left(1 - \frac{z}{b}\right)$ en $0 < z \leq b$:

$$a_n = \frac{1}{b} \int_0^b \Delta H_1 \left(\frac{z}{b} - 1\right) \operatorname{sen} n\pi \frac{z}{b} dz = -\frac{2\Delta H_1}{n\pi}$$

y finalmente

$$H(z, t) = \Delta H_1 \left[\left(1 - \frac{z}{b}\right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n\pi \frac{z}{b}}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 \beta t} \right] \quad (\text{A6})$$

Para extender esta solución al caso en que el coeficiente S'_s es variable, se tratará el problema como si fuera lineal entre intervalos de tiempo, partiendo del perfil de cargas al inicio de cada intervalo.

Así, las ecs (A1) para el segundo intervalo de tiempo (que se considerará constante) son:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{S'_s}{K'} \frac{\partial H}{\partial t} \quad ; \quad \Delta t \leq t < \infty \quad (\text{A7a})$$

$$H(z, \Delta t) \text{ dado por (A6) con } \beta = \beta_1 ; \quad 0 < z < \infty \quad (\text{A7b})$$

$$H(0, \Delta t) = \Delta H_1 + \Delta H_2 \quad \text{en } z = 0$$

$$H(0, t) = \Delta H_1 + \Delta H_2 \quad ; \quad \Delta t \leq t < \infty \quad (\text{A7c})$$

$$H(b, t) = 0 \quad ; \quad \Delta t \leq t < \infty \quad (\text{A7d})$$

$$H(z, \infty) = (\Delta H_1 + \Delta H_2) \left(1 - z/b\right) \quad (\text{A7e})$$

donde

ΔH_2 es el incremento de la carga en el 2o. intervalo de tiempo

$$\beta_1 = K' / (S_{s_1}' b^2)$$

y el origen del tiempo se ha corrido a $t = \Delta t$. El fenómeno transitorio se desarrollará ahora con el nuevo coeficiente del almacenamiento S_{s_2}' o sea con una nueva $\beta_2 = K' / (S_{s_2}' b^2)$; para obtener una solución a estas nuevas ecuaciones conviene tomar eso en cuenta y como se hizo en el primer intervalo, suponer la solución del tipo

$$H(z, t - \Delta t) = (\Delta H_2 + \Delta H_1) \left(1 - \frac{z}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n W_n$$

Los pasos son los mismos que antes, sólo que en la obtención de los coeficientes de la serie se presenta una condición diferente:

$$H(z, t - \Delta t) = (\Delta H_2 + \Delta H_1) \left(1 - \frac{z}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} e^{-n^2 \pi^2 \beta_2 (t - \Delta t)}$$

y como ahora se cumple la condición (A7b) en $t = \Delta t$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} = -\Delta H_2 \left(1 - \frac{z}{b}\right) - 2\Delta H_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 \beta_1 \Delta t}$$

por lo que

$$a_n = \frac{1}{b} \int_0^b -\Delta H_2 \left(1 - \frac{z}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} dz - \frac{2\Delta H_1}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2 \pi^2 \beta_1 \Delta t} dz$$

de donde resulta:

$$a_n = -\frac{2\Delta H_2}{n\pi} - \frac{2\Delta H_1}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\beta_1\Delta t}$$

y finalmente:

$$H(z, t - \Delta t) = (\Delta H_1 + \Delta H_2) \left(1 - \frac{z}{b}\right) - 2\Delta H_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\beta_2(t-\Delta t)} \\ - 2\Delta H_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2\pi^2\beta_1\Delta t - n^2\pi^2\beta_2(t-\Delta t)}$$

Se puede continuar en la misma forma para otros intervalos de tiempo que, si se toman constantes entre variaciones de la carga H y el coeficiente β último, al final de cada intervalo resulta que:

$$H(z, t) = \sum_{n=1}^k \Delta H_i \left(1 - \frac{z}{b}\right) - 2\Delta H_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 \sum_{j=i}^k \beta_j \cdot \Delta t} \quad (\text{A9})$$

Por último, si la variación en el tiempo de H y β es continua se tendrá

$$H(z, t) = \int_0^t \left[\frac{\partial H}{\partial t} \right]_z \left(1 - \frac{z}{b} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \frac{n\pi z}{b}}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 \int_0^t \beta dz_1} \right) dz \quad (\text{A10})$$

De interés para la simulación del comportamiento del acuífero es el flujo por unidad de área (velocidad) entre el acuífero y el acuífero que está dado por $q_1 = -K' \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0}$

$$q_1 = \frac{K'}{b} \int_0^t \left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]_z \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 \int_0^t \beta dz_1} \right) dz \quad (\text{A11})$$

El flujo por la frontera superior es

$$q_2 = -K' \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_{z=b}$$

que resulta

$$q_2 = \frac{K'}{b} \int_0^t \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_z \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \int_0^t \beta dz_1} \right) dz \quad (A12)$$

En el caso particular que β sea constante se obtiene la solución dada por Herrera y Rodarte (1973), o sea, las ecs (2) del texto principal.

2. EVALUACION NUMERICA DE LAS SERIES INFINITAS PARA EL CALCULO DE LOS GASTOS UNITARIOS

El gasto unitario drenado al acuífero se obtiene numéricamente al derivar la ec (20) del texto respecto a Z y multiplicar la derivada por K' :

$$q_1 = -K' \left. \frac{\partial H}{\partial Z} \right|_{z=0} = \frac{K'}{b} \left[(H_0 - H_k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,k} \right] \quad (A13)$$

donde

$$I_{n,k} = e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} I_{n,k-1} + p_{n,i} (H_k - H_{k-1})$$

Herrera y Yates (1977) proponen el truncamiento de la serie infinita a un número finito de términos y el traslado del residuo al origen para mantener el gasto total; sin embargo, para tiempos muy cortos el número de términos resulta excesivo por lo

que Chen y Herrera (1982) evitan este problema con una transformación del argumento de integración que es aplicable sólo para tiempos cortos. En la presente aplicación esto resulta inconveniente porque el cambio en el valor de β puede llevar el problema de tiempos cortos a tiempos largos y viceversa en la misma vertical. Por esta razón se propone aquí un método alternativo que resulta en cierta forma similar al cambio de argumento de Chen y Herrera y que es aplicable para todo tiempo.

Una aproximación al valor de una serie se obtiene al considerar sus términos como una función discontinua de los números enteros n de tal manera que la suma puede aproximarse con el área bajo la curva continua que une los extremos de las ordenadas $\varphi(n)$ centradas sobre intervalos unitarios de n (ver fig. A.1):

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} \varphi(i) \approx \int_{n_1}^{n_2} \varphi(i) di + \frac{1}{2} \varphi(n_2) + \frac{1}{2} \varphi(n_1)$$

$$\approx \int_{n_1-1}^{n_2+1} \varphi(i) di - \frac{1}{2} \varphi(n_2) - \frac{1}{2} \varphi(n_1)$$

(A14)

Se incluyen la mitad de los valores extremos porque la integración no los tome en cuenta.

La aproximación dada por la integral depende de la función de n que se integre y que define el número de términos de la serie que tienen valor; si por ejemplo sólo hay un término apreciablemente diferente de cero, la aproximación por la integral será muy pobre y a la inversa si hay más términos significativos.

Esto se verá más claramente con la función que aquí se trata, que es $\varphi(n) = e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} I_{n,k}$.

Los dos factores de esta función son decrecientes al crecer n de modo que bastará con definir los límites de aplicabilidad del criterio integral de uno de ellos para que el de su producto lo cumpla con más razón. Si se supone así que $I_{n,k-1}$ es constante, una primera parte de la serie en la ec(A13) se calcula como

$$2 I_{n,k-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t}$$

El doble de la serie tiene el valor equivalente:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} = -1 + \frac{1}{(\pi \beta \Delta t)^{1/2}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{\beta \Delta t}} \right) \quad (A15)$$

y su estimación con la ec(A14) es:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} \approx 2 \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} dn - 1$$

$$\approx \frac{2}{\pi (\beta \Delta t)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} d(n \pi / \sqrt{\beta \Delta t}) - 1$$

y como

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2}$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} \approx \frac{1}{(\pi \beta \Delta t)^{1/2}} - 1$$

que resulta igual a la (15A) si no se toma en cuenta $2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{\beta \Delta t}}$ lo que puede hacerse para $\beta \Delta t < 0.20$, cometiendo un error menor que un uno por ciento. Por otra parte, para valores mayores que 0.20, la serie se puede calcular directamente con solo dos términos con errores del mismo orden.

La aproximación de la serie por medio de una integral tiene el objetivo de luego evaluar la integral por fórmulas de cuadratura gaussiana. En especial, las integrales del tipo $\int_0^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ se calculan utilizando los ceros de los polinomios de Hermite:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{i=1}^N W_i f(x_i) \quad (A17)$$

donde

X_i ceros de los polinomios de Hermite

W_i peso para la función calculada en X_i

Como el argumento $\beta \Delta t$ puede pasar en general de ser menor que 0.20 a ser mayor, será necesario actualizar en todo momento, además de los N términos de la fórmula de Hermite, los dos primeros términos de la serie ($n=1$ y 2) y utilizarlos alternativamente en el cálculo de q dependiendo del valor de $\beta \Delta t$ en el intervalo de tiempo. Esto no representa ningún problema y tiene la ventaja de que siempre se manejan $N+2$ términos en la actualización de las $I_{n,k}$. En la presente aplicación se utilizaron los pesos y abcisas de Hermite para un polinomio de grado 20, que para la parte positiva del eje resulta en $N=10$.

En la evaluación de la suma de los segundos términos de $I_{n,k}$ puede seguirse el mismo método de aproximación por una integral cuando los pesos usados son P_{n2} y P_{n3} ya que tienen también una exponencial (ecs 18 y 19 del texto principal). Para el peso P_{n1} , en cambio, resulta más sencillo encontrar el factor total de la diferencia ($H_k - H_{k-1}$) (ec A13) integrando directamente el término correspondiente en la ec 16:

$$\frac{K'}{b} \frac{(H_k - H_{k-1})}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta_k (t+\Delta t - z)} dz$$

$$= \frac{K'}{b} \frac{(H_k - H_{k-1})}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta_k (\Delta t - z)} dz$$

donde se hizo el cambio de variable $\tau = \tau_1 + t$; la integración directa se hace utilizando la aproximación que del integrando da la ec (16A) hasta $\beta \Delta t = 0.20$ y agregando su aproximación con dos términos de la serie de 0.20 en adelante.

La metodología descrita se comparó con la de la suma de un gran número de términos para el caso del bombeo cíclico estudiado en el texto principal y los resultados se muestran en la fig A2, en la que se vé la buena concordancia.

En el cálculo del efecto de la frontera opuesta a la tratada o del gasto en ella q_2 (ec A12) aparece la serie alterna:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t}$$

que se puede separar en la diferencia de dos series con términos positivos, a cada una de las cuales se les aplica el procedimiento numérico descrito arriba:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2 \pi^2 \beta \Delta t} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \beta \Delta t}$$

(A18)

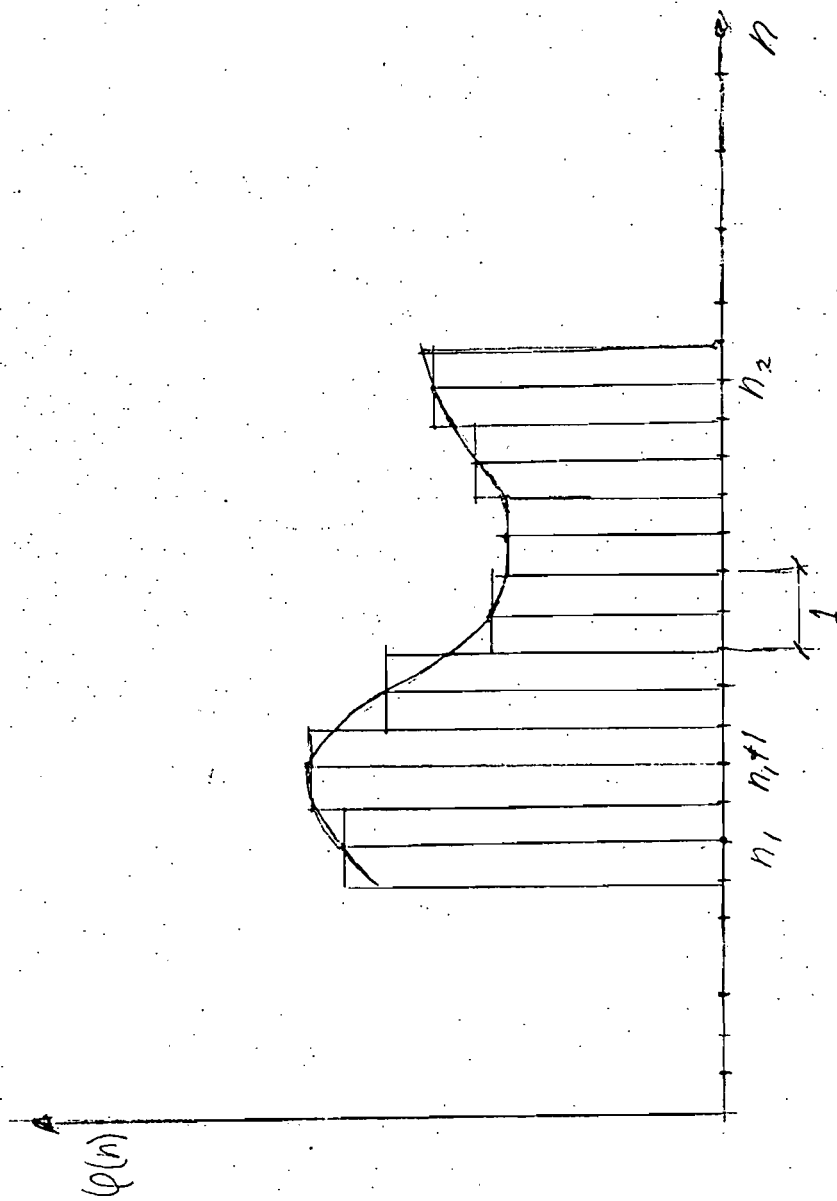


Fig A1 Aproximación de una serie por una integral

GASTOS UNITARIOS EN M/S
*10⁻⁹

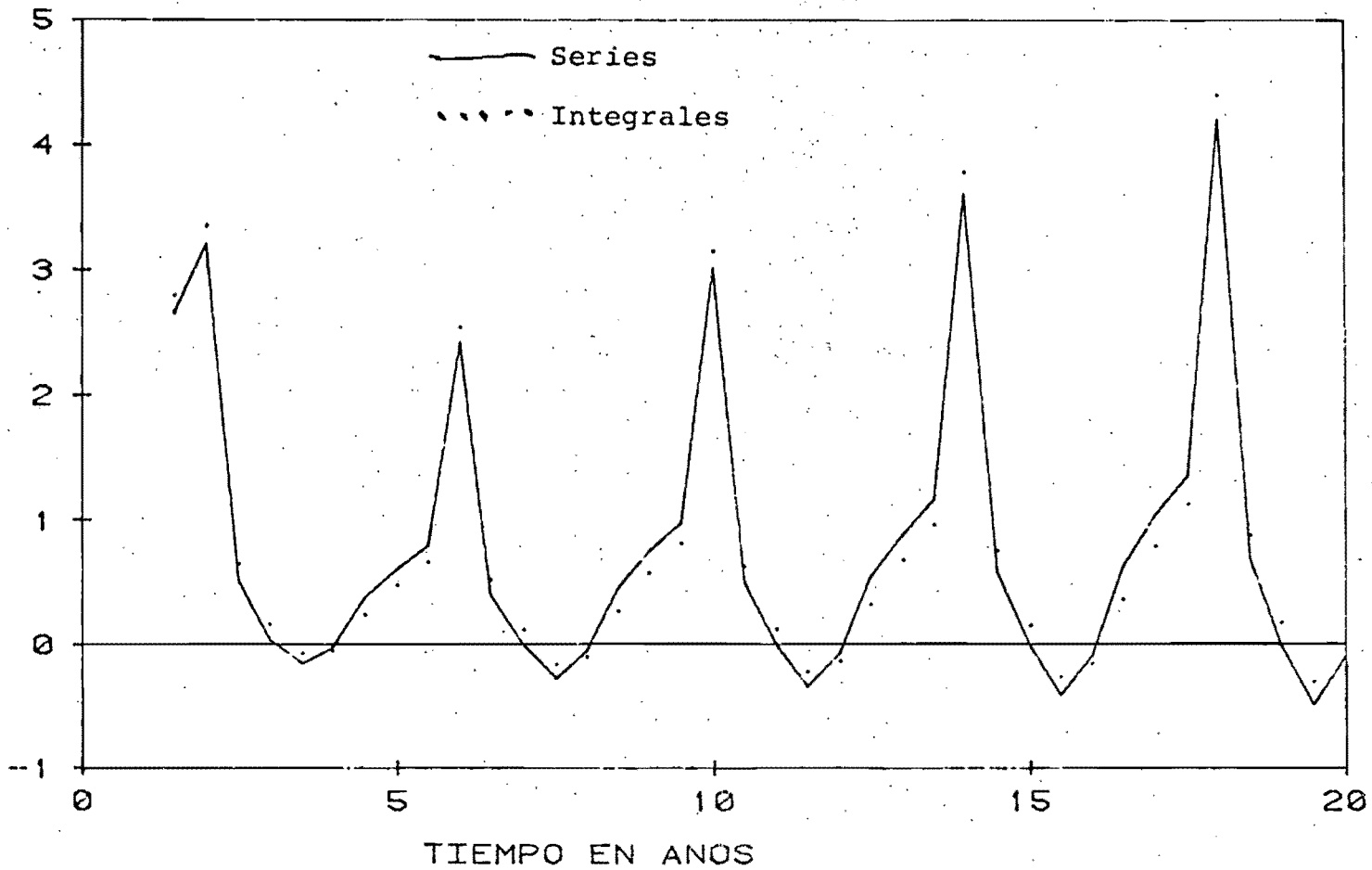


Fig A2 Comparación del cálculo de caudales drenados con series y con integrales