

No. C.S.	.....
No. AD.	.....
FECHA	.....
PROC.	.....

0311

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DEL DOCTORADO

ANALISIS ELASTICO DE LA CIMENTACION DE PRESAS BOVEDA

BIBLIOTECA DE LA  
DIVISION DEL DOCTORADO

Tesis para obtener el grado  
de Doctor en Ingenieria  
(estructuras) que presenta  
el Ing. Civil Enrique Javier  
Salazar Resines.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTO

El autor desea expresar su profundo agradecimiento a las personas que intervinieron en el desarrollo de este trabajo.

Al Dr. Emilio Rosenblueth por su paciente labor como director de la tesis y sus valiosas críticas y sugerencias en todas las etapas de esta investigación.

Al Dr. Ismael Herrera por sus justas observaciones del planteamiento matemático del problema,

Al Ing. Jorge I. Bustamante por su decidido interés en la Solución numérica del problema.

Asimismo extiende su reconocimiento al Dr. Melchor Rodríguez C. por los conocimientos básicos adquiridos en su clase de elasticidad y al pasante

Antonio Olivera por su eficiente labor en el desarrollo de los programas del método propuesto en el trabajo.

## INDICE

1. INTRODUCCION	1
2. PROBLEMA ELASTICO	
2.1. Ecuaciones de la elasticidad	3
2.2. Solución de Muki	4
2.3. Medio seminfinito	6
2.4. Aproximación	7
2.5. Esfuerzos y desplazamientos	9
2.6. Condiciones de frontera	17
2.7. Sistema de ecuaciones	18
3. VARIACION DE LOS DESPLAZAMIENTOS CON EL TIEMPO	20
4. EJEMPLOS NUMERICOS. PROGRAMAS	23
5. DISCUSION Y CONCLUSIONES	23
APENDICE	
A.1. Notación tensorial	33
A.2. Componentes físicas	34
A.3. Derivadas covariantes referidas al sistema cilíndrico	35
A.4. Ecuaciones de Navier	37
REFERENCIAS	40

## INDICE DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Sistema de referencia	41
2. Desplazamientos	41
3. Prescripción de esfuerzos	41
4. Regiones en las que se prescriben los esfuerzos	42
5. Ejemplos numéricos	43
6. Desplazamientos $u$ en el arco $\overline{O'DE}$	44
7. Desplazamientos $w$ en el arco $\overline{O'DE}$	44
8. Desplazamientos $u$ en la recta $\overline{O'A}$	45
9. Desplazamientos $w$ en la recta $\overline{O'A}$	45
10. Desplazamientos $u$ en el arco $\overline{O'BC}$	46
11. Desplazamientos $w$ en el arco $\overline{O'BC}$	47
12. Malla tridimensional para el planteamiento con diferencias finitas	48

## 1. INTRODUCCION

### 1.1 Resumen

Este trabajo presenta un método aproximado para calcular los desplazamientos de la superficie que limita un medio seminfinito. En todos los puntos de la superficie se prescriben los esfuerzos. El medio se supone elástico lineal, homogéneo e isótropo.

El propósito del trabajo es representar el estado de esfuerzos y desplazamientos de la cimentación de una presa bóveda. El medio estará constituido por la masa rocosa sujeta, en su exterior, a las presiones que le transmite la presa y a las presiones hidrostáticas de la masa de agua retenida por la propia cortina.

El análisis se aborda siguiendo el planteamiento de Muki(Ref.1) del problema elástico. Se utiliza un sistema de referencia cilíndrico y en él se representan las ecuaciones de Navier, relaciones esfuerzos-desplazamientos, etc. Se plantean dos funciones de desplazamientos, por medio de las cuales se reduce el sistema de las tres ecuaciones diferenciales de desplazamientos a dos ecuaciones diferenciales, una armónica y la otra biarmónica. La solución de estas se obtiene desarrollando en serie de Fourier respecto a una de las coordenadas y empleando la transformación integral de Hankel respecto a otra coordenada.

En el planteamiento de Muki se establece una serie de Fourier cuyos coeficientes se expresan en términos de integrales de funciones de Bessel. Obtiene después Muki relaciones entre los desplazamientos y los esfuerzos con dichas soluciones en serie. Dada la complejidad de estas expresiones, los problemas que resuelve analíticamente Muki son sumamente restringidos.

Para el problema en cuestión, se adopta una solución aproximada del planteamiento de Muki, restringido al medio seminfinito. Ello da lugar a una simplificación de las integrales que representan los coeficientes del desarrollo. Estas integrales se expresan en serie con lo cual las soluciones finales (las fun-

ciones de desplazamientos) quedan representadas por series infinitas dobles.

Para evitar una complejidad excesiva, en este trabajo se conservan sólo los primeros términos de los desarrollos en serie que representan a los coeficientes. Se obtienen las expresiones para el cálculo de los esfuerzos y desplazamientos. Mediante estas expresiones se plantean relaciones entre los esfuerzos de un volumen interior del medio y los esfuerzos en una superficie elemental cualquiera. Estas relaciones contienen constantes que habrán de determinarse de los esfuerzos prescritos en la frontera. Para ello se obliga a que las ecuaciones de los esfuerzos satisfagan el esfuerzo medio prescrito en un conjunto finito de subregiones de la frontera. Se obtiene así un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en los coeficientes.

Los coeficientes obtenidos se sustituyen en las ecuaciones de desplazamientos y se calculan estos en la región que ocupa la cimentación.

En el ejemplo que se presenta en el texto, se considera un valle cilíndrico circular sujeto a los esfuerzos que en esta superficie resultan al aplicar en la frontera plana de un medio seminfinito una carga concentrada. Los esfuerzos y desplazamientos en la superficie cilíndrica se calculan con las fórmulas de Boussinesq. Se aplica el método propuesto considerando la frontera cilíndrica con los esfuerzos así calculados. Se comparan los resultados del método presentado y lo calculado con las fórmulas de Boussinesq a través de los desplazamientos. Se señalan en el texto los programas para calculadora IBM 650 que se utilizaron para plantear y resolver el sistema de ecuaciones.

Se describe la posibilidad de extender el procedimiento para considerar además las deformaciones como funciones del tiempo. En este paso se admite comportamiento lineal. Se considera la posibilidad de variación de las presiones en las laderas con el tiempo y se presentan dos casos particulares: respectivamente, estado de esfuerzos y módulo de Poisson constantes.

## 2. PROBLEMA ELASTICO

### 2.1 Ecuaciones de la elasticidad

En el texto se presentarán únicamente los resultados; la obtención de las ecuaciones así como algunas verificaciones se presentarán en el apéndice. Puesto que la solución del problema elástico se efectúa utilizando las funciones de Bessel, las ecuaciones se refieren a un sistema de referencia cilíndrico (Fig. 1).

El análisis elástico se plantea a partir de las ecuaciones de desplazamientos de Navier (Ecs. A28\*).

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{v}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

en las cuales

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{2.2}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\tag{2.3}$$

$u$ ,  $v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  (Fig. 2).

$\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{2.4}$$

\* La A antepuesta a un número significa que el concepto en cuestión se halla en el apéndice.

## 2.2 Solución de Mukí

Propone Mukí reducir el sistema (2.1), (Ref. 1 pág. 402) a dos ecuaciones diferenciales parciales una biarmónica y la otra armónica.

$$\begin{aligned}\nabla^4 \phi &= 0 \\ \nabla^2 \psi &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

quedando definidos los desplazamientos por las ecuaciones

$$\begin{aligned}u &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v &= \frac{\partial^2 \phi}{r \partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ w &= 2(1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Se verificó que las ecuaciones (2.6) satisficieran el sistema (2.1), para lo cual fue necesario considerar las ecuaciones (2.5).

Sustituyendo (2.6) en las expresiones que representan la ley de Hooke (Ecs. A20), se obtienen los esfuerzos en términos de las funciones de desplazamientos:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_r}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_\theta}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{z}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \frac{\sigma_z}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} &= \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \frac{\tau_{zr}}{2\mu} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{r \partial \theta \partial z} \\ \frac{\tau_{r\theta}}{2\mu} &= \frac{\partial^2}{r \partial \theta \partial z} \left( \frac{\phi}{r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} (*)\end{aligned}$$

\*En esta ecuación la Ref. (1) tiene un error en los términos que contienen a  $\psi$

Se verificó que las ecuaciones (2.7) satisficieran las ecuaciones de equilibrio (Ref. 6 pág. 184).

Enseguida propone Muki un desarrollo en serie de Fourier de las funciones  $\Phi = \Phi(r, \theta, z)$  y  $\Psi = \Psi(r, \theta, z)$  respecto a la coordenada angular  $\theta$  :

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(r, z) \cos m \theta \\ \Psi(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(r, z) \sin m \theta\end{aligned}\quad (2.8)$$

En realidad cada serie debiera contener términos en  $\sin m\theta$  y  $\cos m\theta$  ; sin embargo es relativamente sencillo obtener las soluciones completas en términos de (2.8) (Ref. 1 pág. 403).

Admitiendo que cada término de la serie satisface las ecuaciones (2.5) se obtienen, después de sustituir el término emésimo y dividir entre  $\cos m\theta$  y  $\sin m\theta$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_m^4 \Phi_m &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi_m = 0 \\ \nabla_m^2 \Psi_m &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_m = 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

De las propiedades de las derivadas de la transformada de Hankel (Ref. 7 Secc. 10) se deducen

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} r \nabla_m^4 \Phi_m J_m(\xi r) dr &= \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 \int_0^{\infty} r \Phi_m J_m(\xi r) dr = 0 \\ \int_0^{\infty} r \nabla_m^2 \Psi_m J_m(\xi r) dr &= \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) \int_0^{\infty} r \Psi_m J_m(\xi r) dr = 0\end{aligned}\quad (2.10)$$

Haciendo en estas expresiones

$$\begin{aligned}G_m(\xi, z) &= \int_0^{\infty} r \Phi_m(r, z) J_m(\xi, r) dr \\ H_m(\xi, z) &= \int_0^{\infty} r \Psi_m(r, z) J_m(\xi, r) dr\end{aligned}\quad (2.11)$$

(Transformadas de Hankel de orden  $m$  de  $\Phi_m$  y  $\Psi_m$  respectivamente) se obtienen

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 G_m(\xi, z) &= 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) H_m(\xi, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones diferenciales ordinarias (en el campo de la transformada de Hankel) son,

$$\begin{aligned} G_m(\xi, z) &= [A_m(\xi) + B_m(\xi)z] e^{\xi z} + [C_m(\xi) + D_m(\xi)z] e^{-\xi z} \\ H_m(\xi, z) &= E_m(\xi) e^{\xi z} + F_m(\xi) e^{-\xi z} \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.3 Medio seminfinito

Restringiendo el problema a un medio seminfinito con los esfuerzos especificados en la superficie exterior, se tendrá que, si la dirección positiva del eje  $z$  se considera orientada hacia el interior del medio, cuando  $z$  tiende a infinito los esfuerzos y los desplazamientos deben tender a cero. Estas condiciones de frontera se cumplirán cuando  $\Phi_m$  y  $\Psi_m$  tiendan a cero (o a una constante) al tender  $z$  a infinito. De (2.11) se tendrá que si  $\Phi_m(r, \omega) = \Psi_m(r, \omega) = 0$  entonces  $G_m(\xi, \infty) = H_m(\xi, \infty) = 0$  lo cual se verifica si en (2.13)

$$A_m = B_m = E_m = 0 \quad (2.14)$$

Sustituyendo (2.14) en (2.13),

$$\begin{aligned} G_m(\xi, z) &= [C_m(\xi) + D_m(\xi)z] e^{-\xi z} \\ H_m(\xi, z) &= F_m(\xi) e^{-\xi z} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aplicando a (2.15) la inversión de Hankel se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, z) &= \int_0^\infty \xi G_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \\ \Psi_m(r, z) &= \int_0^\infty \xi H_m(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \end{aligned}$$

y sustituyendo (2.15),

$$\begin{aligned}\Phi_m(r, z) &= \int_0^{\infty} [C_m(\xi) + D_m(\xi)z] \xi e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi \\ \Psi_m(r, z) &= \int_0^{\infty} F_m(\xi) \xi e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi\end{aligned}\quad (2.16)$$

La determinación de las funciones  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  se efectúa en el campo de la transformada de Hankel. Para esto habrá que sustituir (2.16) en (2.8) y estas a su vez sustituirlas en (2.7) o (2.6) según que se especifiquen las condiciones de esfuerzos o desplazamientos. A continuación deberán transformarse las condiciones de frontera y determinar  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$ . Este procedimiento se ha utilizado para resolver el problema de Boussinesq por medio de las transformadas de Hankel (Ref. 7) y algunos otros problemas particulares asociados a un medio seminfinito con una frontera plana.

#### 2.4 Aproximación

En el presente caso debido a la irregularidad de la superficie que limita al medio, resulta inaplicable el método analítico; en su lugar se recurre a un método aproximado para la determinación de  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$ .

Puesto que  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  son funciones arbitrarias de  $\xi$ , resulta que cualquier función de  $\xi$  que se considere satisface las ecuaciones (2.9) y por lo tanto la armónica y biarmónica (2.5). Sin embargo, no cualquier función puede dar una expresión simple después de sustituirla en (2.16) e integrar. Analizando, por ejemplo, algunas transformadas de Hankel en una tabla (Ref. 8) se observa que el resultado puede estar dado en términos de funciones gama, confluentes hipergeométricas, etc. Aparentemente las antitransformadas más sencillas para las ecuaciones (2.16) resultan desarrollando  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  en series de

potencias. En este trabajo se optó por dicho desarrollo.

Sea la expresión integral,

$$X_m(r, z) = \int_0^{\infty} f_m(\xi) \xi e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi \quad (2.17)$$

Supóngase

$$f_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \quad (2.18)$$

entonces (2.17) resulta

$$X_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \xi^{n+1} e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi \quad (2.19)$$

De una tabla de transformadas se obtuvo la integral (Ref. 8, pág. 28).

$$X_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{r^m} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} P^m(r, z) \quad (2.20)$$

en la cual

$$P^m(r, z) = (r^2 + z^2)^{-1/2} \left[ (r^2 + z^2)^{1/2} - z \right]^m \quad (2.21)$$

Considerando (2.20) en (2.16)

$$\Phi_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n (C_m + D_m z)}{r^m} \cdot \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} P^m(r, z) \quad (2.22)$$

$$\Psi_m(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n F_m}{r^m} \cdot \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} P^m(r, z)$$

Sustituyendo (2.22) en (2.8) se obtienen

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{C_{mn} + D_{mn} z}{r^m} \cdot \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} P^m(r, z) \cos m\theta \quad (2.23)$$

$$\Psi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{F_{mn}}{r^m} \cdot \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} P^m(r, z) \sin m\theta$$

Observando (2.21), (2.7) y (2.6) se concluye que los términos de la serie, respecto a  $n$ , se complican seriamente en cuanto  $n$  crece. Por otro lado, si al restringir el desarrollo, en  $n$  se consideran sólo unos cuantos términos, la representación de las funciones de desplazamientos resulta incompleto respecto a  $r$  o  $z$ . Sin embargo, si las variaciones de los esfuerzos y desplazamientos, en la frontera, no tienen cambios bruscos o singularidades es posible que la aproximación sea suficiente cuando menos para la determinación aproximada de los desplazamientos en la superficie exterior.

Como aproximación se tomarán sólo los términos  $n = 0$  de la serie en  $n$ . Denominando  $C_m$  a  $C_{m0}$ ,  $D_m$  a  $D_{m0}$  y  $F_m$  a  $F_{m0}$  se tiene, para (2.22),

$$\begin{aligned}\Phi_m(r, z) &= (C_m + D_m z) \frac{z + m(r^2 + z^2)^{1/2}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{r} [(r^2 + z^2)^{1/2} - z] \right\}^m \\ \Psi_m(r, z) &= F_m \frac{z + m(r^2 + z^2)^{1/2}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{r} [(r^2 + z^2)^{1/2} - z] \right\}^m\end{aligned}\quad (2.24)$$

Se verificó que (2.24) satisficiera (2.9). Sustituyendo (2.24) en (2.8) se obtienen

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, z) &\cong \sum_{m=0}^{\infty} (C_m + D_m z) \frac{z + m(r^2 + z^2)^{1/2}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{r} [(r^2 + z^2)^{1/2} - z] \right\}^m \cos m\theta \\ \Psi(r, \theta, z) &\cong \sum_{m=0}^{\infty} F_m \frac{z + m(r^2 + z^2)^{1/2}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{r} [(r^2 + z^2)^{1/2} - z] \right\}^m \sin m\theta\end{aligned}\quad (2.25)$$

Estas son las soluciones aproximadas que se proponen en este trabajo.

## 2.5 Esfuerzos y desplazamientos

Para el cálculo de los esfuerzos, y de los desplazamientos deben sustituirse (2.25) en (2.7) y (2.6) respectivamente. Sin

embargo, se prefiere utilizar las formas integrales de  $\Phi_m$  y  $\Psi_m$  dadas en (2.16) por resultar más sencillas las operaciones. Entonces, sustituyendo (2.16) en (2.8) y estas en (2.7) y (2.6) se obtienen

$$u = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [U_{m+1} - V_{m-1}] \cos m \theta$$

$$v = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [U_{m+1} + V_{m-1}] \sin m \theta \quad (2.26)$$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [(1-2\nu) G_m^{(2)} - 2(1-\nu) G_m^{(0)}] \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_r}{2\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu G_m^{(3)} + (1-\nu) G_m^{(1)} - \frac{m+1}{2r} U_{m+1} - \frac{m-1}{2r} V_{m-1} \right] \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_\theta}{2\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu G_m^{(3)} - \nu G_m^{(1)} + \frac{m+1}{2r} U_{m+1} + \frac{m-1}{2r} V_{m-1} \right] \sin m \theta$$

$$\frac{\sigma_z}{2\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} [(1-\nu) G_m^{(3)} - (2-\nu) G_m^{(1)}] \cos m \theta \quad (2.27)^*$$

$$\frac{\partial \theta z}{2\mu} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu G_{m+1}^{(2)} + (1-\nu) G_{m+1}^{(0)} + H_{m+1}^{(1)} + \nu G_{m-1}^{(2)} + (1-\nu) G_{m-1}^{(0)} - H_{m-1}^{(1)} \right] \sin m \theta$$

$$\frac{\partial z r}{2\mu} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \nu G_{m+1}^{(2)} + (1-\nu) G_{m+1}^{(0)} + H_{m+1}^{(1)} - \nu G_{m-1}^{(2)} - (1-\nu) G_{m-1}^{(0)} - H_{m-1}^{(1)} \right] \cos m \theta$$

$$\frac{\partial r \theta}{2\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ H_m^{(0)} - \frac{m+1}{2r} U_{m+1} + \frac{m-1}{2r} V_{m-1} \right] \sin m \theta$$

en las cuales\*\*

$$U_{m+1} = G_{m+1}^{(1)} + 2 H_{m+1}^{(0)}$$

$$V_{m-1} = G_{m-1}^{(1)} - 2 H_{m-1}^{(0)}$$

$$G_m^{(0)} = \int_0^{\infty} \xi^3 G_m J_m(\xi r) d\xi$$

$$G_m^{(1)} = \int_0^{\infty} \xi^3 \frac{dG_m}{dz} J_m(\xi r) d\xi$$

$$G_m^{(2)} = \int_0^{\infty} \xi \frac{d^2 G_m}{dz^2} J_m(\xi r) d\xi$$

$$G_m^{(3)} = \int_0^{\infty} \xi \frac{d^3 G_m}{dz^3} J_m(\xi r) d\xi$$

\*Se verificaron las expresiones análogas que da Muki. Se encontró que todas verifican a pesar del error consignado en las ecuaciones (2.7)

\*\*En las expresiones de  $\Phi_m$  y  $\Psi_m$  aparecen solo funciones de Bessel de orden  $m$ . En las que aquí se consignan aparecen funciones de orden  $m$ ,  $m+1$  y  $m-1$ ; esto se debe a que las derivadas de  $J_m(\xi r)$  respecto a  $r$  se expresaron en términos de  $J_m$ ,  $J_{m-1}$  y  $J_{m+1}$  pues así convenía (Ref. 9).

$$G_{m+1}^{(0)} = \int_0^\infty \xi^4 G_m J_{m+1}(\xi r) d\xi$$

$$G_{m+1}^{(1)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{dG_m}{dz} J_{m+1}(\xi r) d\xi$$

$$G_{m+1}^{(2)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{d^2 G_m}{dz^2} J_{m+1}(\xi r) d\xi$$

$$G_{m-1}^{(0)} = \int_0^\infty \xi^4 G_m J_{m-1}(\xi r) d\xi$$

$$G_{m-1}^{(1)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{dG_m}{dz} J_{m-1}(\xi r) d\xi$$

$$G_{m-1}^{(2)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{d^2 G_m}{dz^2} J_{m-1}(\xi r) d\xi \quad (2.28)$$

$$H_m^{(0)} = \int_0^\infty \xi^3 H_m J_m(\xi r) d\xi$$

$$H_{m+1}^{(0)} = \int_0^\infty \xi^2 H_m J_{m+1}(\xi r) d\xi$$

$$H_{m-1}^{(0)} = \int_0^\infty \xi^2 H_m J_{m-1}(\xi r) d\xi$$

$$H_{m+1}^{(1)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{dH_m}{dz} J_{m+1}(\xi r) d\xi$$

$$H_{m-1}^{(1)} = \int_0^\infty \xi^2 \frac{dH_m}{dz} J_{m-1}(\xi r) d\xi$$

Obteniendo las derivadas que en (2.28) se especifican de las funciones  $G_m$  y  $H_m$  dadas en (2.15) y empleando la transformación de Hankel (Ref. 8)

$$\int_0^\infty \xi^p e^{-\xi z} J_\nu(\xi r) d\xi = (-1)^p \frac{1}{r^p} \frac{d^p}{dz^p} P_\nu(r, z) \quad (2.29)$$

se obtienen,

$$G_m^{(0)} = -(C_m + D_m z) \frac{1}{r_m} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^m$$

$$G_m^{(1)} = -\frac{D_m}{r_m} \frac{d^3}{dz^3} p^m - (C_m + D_m z) \frac{1}{r_m} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^m$$

$$G_m^{(2)} = -\frac{2D_m}{r_m} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^m - (C_m + D_m z) \frac{1}{r_m} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^m$$

$$G_m^{(3)} = -\frac{3D_m}{r_m} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^m - (C_m + D_m z) \frac{1}{r_m} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^m$$

$$G_{m+1}^{(0)} = (C_m + D_m z) \frac{1}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^{m+1}$$

$$G_{m+1}^{(1)} = \frac{D_m}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^2}{dz^2} p^{m+1} + (C_m + D_m z) \frac{1}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m+1}$$

$$G_{m+1}^{(2)} = \frac{2D_m}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m+1} + (C_m + D_m z) \frac{1}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^{m+1}$$

$$G_{m-1}^{(0)} = (C_m + D_m z) \frac{1}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^{m-1}$$

(2.29)

$$G_{m-1}^{(1)} = \frac{D_m}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^2}{dz^2} p^{m-1} + (C_m + D_m z) \cdot \frac{1}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m-1}$$

$$G_{m-1}^{(2)} = \frac{2D_m}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m-1} + (C_m + D_m z) \cdot \frac{1}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^4}{dz^4} p^{m-1}$$

$$H_m^{(0)} = -\frac{F_m}{r_m} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^m$$

$$H_{m+1}^{(1)} = \frac{F_m}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^2}{dz^2} p^{m+1}$$

$$H_{m-1}^{(0)} = \frac{F_m}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^2}{dz^2} p^{m-1}$$

$$H_{m+1}^{(1)} = \frac{F_m}{r_{m+1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m+1}$$

$$H_{m-1}^{(1)} = \frac{F_m}{r_{m-1}} \cdot \frac{d^3}{dz^3} p^{m-1}$$

La ecuación (2.21) se puede escribir

$$p^\nu = R^{-1} (R-z)^\nu \quad (2.30)$$

en la cual

$$R = (r^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.31)$$

$$\nu = m, m-1, m+1$$

Efectuando las derivadas requeridas en (2.29) se tienen

$$\frac{d^2 p^\nu}{dz^2} = R^{-3} (R-z)^\nu \left[ 3 \left( \frac{z}{R} \right)^2 + 3 \nu \frac{z}{R} + (\nu+1)(\nu-1) \right] \quad (2.32)$$

$$\frac{d^3 p^\nu}{dz^3} = -R^{-4} (R-z)^\nu \left[ 15 \left( \frac{z}{R} \right)^3 + 15 \nu \left( \frac{z}{R} \right)^2 + (2\nu^2 - 3) \frac{z}{R} + \nu(\nu-2)(\nu+2) \right]$$

$$\frac{d^4 p^\nu}{dz^4} = -R^{-5} (R-z)^\nu \left[ 105 \left( \frac{z}{R} \right)^4 + 105 \nu \left( \frac{z}{R} \right)^3 + 45(\nu^2 - 2) \left( \frac{z}{R} \right)^2 + 5\nu(2\nu^2 - 1) \frac{z}{R} + (\nu-3)(\nu+3)(\nu-1)(\nu+1) \right]$$

Sustituyendo (2.32) en (2.29) y estas a su vez en (2.26) y (2.27) se obtienen

a) Desplazamientos

$$\begin{aligned} \frac{U}{z_0} = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^7 \left(\frac{r}{z}\right)^5 \xi^3} \left\{ \left(m \frac{R}{z}\right)^3 + 2 \left(m \frac{R}{z}\right)^2 \left[ 1 - 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] + m \frac{R}{z} \left[ 1 - 12 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\frac{r}{z}\right)^4 \right] - 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 3 - 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] \right\} \cos m \Theta + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^7 \left(\frac{r}{z}\right)^5 \xi^4} \left\{ \left(m \frac{R}{z}\right)^3 + 3 \left(m \frac{R}{z}\right)^2 \left[ 1 - \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] + m \frac{R}{z} \left[ 2 - 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 4 - \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] \right\} \cos m \Theta + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m F_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^3 \left(\frac{r}{z}\right)^5 \xi^3} \left\{ 2m \frac{R}{z} + 2 \right\} \cos m \Theta \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v}{z_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^5 \left(\frac{r}{z}\right)^3 \xi^3} \left\{ -\left(m \frac{R}{z}\right)^2 - m \frac{R}{z} \left[ 2 - \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - 1 + 2 \left(\frac{r}{z}\right) \right\} \sin m \theta + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m C_m \phi}{\left(\frac{R}{z}\right)^5 \left(\frac{r}{z}\right)^4 \xi^4} \left\{ -\left(m \frac{R}{z}\right)^2 - 3 \left(m \frac{R}{z}\right) + \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right\} \sin m \theta - \\
&- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 F_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^5 \left(\frac{r}{z}\right)^4 \xi^4} \left\{ \left(m \frac{R}{z}\right)^2 + m \frac{R}{z} \left[ 1 - 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right\} \sin m \theta
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{z_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^3} \left\{ -\left(m \frac{R}{z}\right)^3 - 2 \left(m \frac{R}{z}\right)^2 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 4 \right] - m \frac{R}{z} \left[ 17 + 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] \right. \\
&+ \left. 7 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 10 \right\} \cos m \theta + \\
&+ 4 \nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^5 \xi^3} \left\{ \left(m \frac{R}{z}\right)^2 + 3 \left(m \frac{R}{z}\right) - \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \right\} \cos m \theta + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} \left\{ -\left(m \frac{R}{z}\right)^3 - 6 \left(m \frac{R}{z}\right)^2 - m \frac{R}{z} \left[ 11 - 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - 6 + \right. \\
&+ \left. 9 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right\} \cos m \theta
\end{aligned} \tag{2.35}$$

en las cuales

$$\xi = \frac{z}{z_0} \tag{2.36}$$

$z_0$  = longitud constante utilizada para expresar en forma adimensional los desplazamientos.

$$\phi_2 = \left[ \frac{\frac{z}{z_0} - 1}{\frac{r}{z}} \right]^m \tag{2.37}$$

Se verificó que (2.33) a (2.35) satisficieran las ecuaciones de Navier (2.1) tomando en cuenta (2.6).

b) Esfuerzos

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2\mu} = 2\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \zeta^4} \left\{ -m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + m \frac{R}{z} \left[ 11 - 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - 3 \left[ 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] \right\} \cos m \theta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \zeta^4} \left\{ -m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 + m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 1 - 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] + m \frac{R}{z} \left[ 2 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 12 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right] + 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 3 \right] \cos m \theta - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \zeta^5} \left\{ m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 + 2m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] + \right. \right. \quad (2.38) \\ \left. \left. + m \frac{R}{z} \left[ 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] - 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 4 \right] \right\} \cos m \theta + \right.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^5 \zeta^4} 2m \left[ -m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + 3m \left(\frac{R}{z}\right) \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right] \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_r}{2\mu} = 2\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \zeta^4} \left\{ m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + m \frac{R}{z} \left[ 11 - 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - \right. \\ \left. - 3 \left[ 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] \right\} \cos m \theta + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_m}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^9 \zeta^4} \left\{ m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 - m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ 9 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 18 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 28 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - m \frac{R}{z} \left[ 6 \left(\frac{r}{z}\right)^6 - 72 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 28 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 24 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 72 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 9 \right] \right\} \cos m \theta - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^9 \zeta^5} \left\{ -m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 + 2m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - \right. \quad (2.39) \\ - m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 12 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 34 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] -$$

$$- m \frac{R}{z} \left[ 68 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 39 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] + \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 12 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 81 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 12 \right] \left. \right\} x$$

$\cos m \theta -$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^5 \zeta^4} 2m \left[ -m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + 3m \left(\frac{R}{z}\right) \left(\frac{r}{z}\right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right] \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_x}{2\mu} = -2\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} \left\{ m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + m \frac{R}{z} \left[ 11 - 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] - 3 \left[ 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] \right\} \cos m \theta \quad (2.40)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^9 \xi^5} \left\{ m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 + m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 11 \right] + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ -4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 41 \right] - m \frac{R}{z} \left[ 4 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 48 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 61 \right] - 15 \left[ 5 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] \right\} \cos m \theta -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{R}{z}\right)^9 \xi^5} \left\{ -m \left(\frac{R}{z}\right)^4 - 10m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + 5m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 7 \right] + 5m \frac{R}{z} \left[ 11 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 10 \right] - 9 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 72 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 24 \right\} \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_{\theta r}}{2\mu} = 2\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right) \left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} \left\{ m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 - 3m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - m \frac{R}{z} \times \right. \\ \left. \times \left[ 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] + 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 4 \right] \right\} \cos m \theta - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right) \left(\frac{R}{z}\right)^9 \xi^4} \left\{ m^4 \left(\frac{R}{z}\right)^4 + 2m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ 3 - 2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[ 11 - 34 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right] + m \frac{R}{z} \left[ 16 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 83 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 6 \right] + 15 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \left[ 3 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 4 \right] \right\} \cos m \theta \quad (2.41)$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m \phi_{2m}}{\left(\frac{r}{z}\right) \left(\frac{R}{z}\right)^5 \xi^4} \left\{ m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + 3m \left(\frac{R}{z}\right) - \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \right\} \cos m \theta$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} m \left\{ -m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 5 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - \right. \\ \left. - m \frac{R}{z} \left[ 3 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - 8 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 8 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right\} \sin m \theta +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^5} m \left\{ -m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] + \right.$$

$$+ m \frac{R}{z} \left[ 16 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right] - 4 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \right\} \sin m \theta +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)^2 \left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} \left\{ -m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \right] + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + \right.$$

$$+ m \frac{R}{z} \left[ -8 \left(\frac{r}{z}\right)^4 + 9 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 2 \right] - 15 \left(\frac{r}{z}\right)^4 \right\} \sin m \theta \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{\theta z}}{2\mu} = & 2\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{R}{z}\right)^5 \xi^4} m \left\{ -m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 - 3m \left(\frac{R}{z}\right) + \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right\} \sin m \theta + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^5} m \left\{ m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 - m \frac{R}{z} \left[ 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 11 \right] - 9 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + \right. \\
& \left. + 6 \right\} \sin m \theta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^5} m \left\{ m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^2 + 6m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 - m \frac{R}{z} \left[ 4 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - 11 \right] - 9 \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 6 \right\} \sin m \theta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m \phi_2}{\left(\frac{r}{z}\right)\left(\frac{R}{z}\right)^7 \xi^4} \left\{ -m^3 \left(\frac{R}{z}\right)^3 - \right. \\
& \left. - 3m^2 \left(\frac{R}{z}\right)^2 \left[ \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 1 \right] - m \frac{R}{z} \left[ 13 \left(\frac{r}{z}\right)^2 - 2 \right] + 3 \left(\frac{r}{z}\right)^4 - 12 \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right\} \sin m \theta
\end{aligned} \quad (2.43)^*$$

en las cuales  $\phi_2$  y  $\xi$  se expresan como en (2.36) y (2.37)

## 2.6 Condiciones de frontera

Para especificar las condiciones de frontera se necesitan relacionar los esfuerzos que actúan en las caras de un elemento de volumen ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$  y  $\tau_{\theta z}$ ) con los esfuerzos  $R, \theta$  y  $Z$  que actúan en una superficie elemental definida por la normal  $\gamma$  (Fig. 3):

$$R = \sigma_r (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \operatorname{sen} \theta) + \tau_{\theta r} (\cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta) + \tau_{zr} \cos \gamma \quad (2.44)$$

$$\theta = \tau_{r\theta} (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \operatorname{sen} \theta) + \sigma_\theta (\cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta) + \tau_{z\theta} \cos \gamma$$

$$Z = \tau_{rz} (\cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \operatorname{sen} \theta) + \tau_{\theta z} (\cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \operatorname{sen} \theta) + \sigma_z \cos \gamma$$

Aquí  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los ángulos directores de la normal respecto al sistema de referencia fijo  $x, y, z$  (Fig. 3).

En la frontera se especifican  $R, \theta$  y  $Z$ , de tal manera que al sustituir (2.38) a (2.43) en (2.44) se obtienen relaciones para la determinación de  $C_m, D_m$  y  $F_m$  de la siguiente forma

\*Se verificó que las expresiones (2.38) a (2.43) satisficieran las ecuaciones de equilibrio referidas a un sistema de referencia cilíndrico (Ref. 3).

$$\begin{aligned}
 R(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [C_m f_m^R(r, \theta, z, \alpha, \beta) + D_m g_m^R(r, \theta, z, \alpha, \beta) + F_m h_m^R(r, \theta, z, \alpha, \beta)] \\
 \Theta(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [C_m f_m^\Theta(r, \theta, z, \alpha, \beta) + D_m g_m^\Theta(r, \theta, z, \alpha, \beta) + F_m h_m^\Theta(r, \theta, z, \alpha, \beta)] \\
 Z(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} [C_m f_m^Z(r, \theta, z, \alpha, \beta) + D_m g_m^Z(r, \theta, z, \alpha, \beta) + F_m h_m^Z(r, \theta, z, \alpha, \beta)]
 \end{aligned} \tag{2.45}^*$$

en las cuales  $f_m$ ,  $g_m$  y  $h_m$  son funciones conocidas que resultan de sustituir la ecuación de la superficie frontera  $S(r, \theta, z) = 0$  y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  directores de la normal en cada punto de dicha superficie. Con los valores de  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  que resulten de (2.45) se calculan los desplazamientos sustituyéndolos en las ecuaciones (2.33 - 35).

## 2.7 Sistema de ecuaciones

Para resolver numéricamente el problema se propone el siguiente método:

- La superficie  $S(r, \theta, z) = 0$  se subdivide en un conjunto finito de subregiones  $s_1$ . De hecho sólo se considera una porción finita de  $S$ :  $S_1$  tal que las cargas sobre las regiones más alejadas de esta superficie no tengan prácticamente influencia sobre los desplazamientos en la superficie  $S_2$  de la cimentación (Fig. 4). El conjunto de superficies  $s_1$  cubre totalmente a  $S_1$ .
- En cada subregión  $S_k$  se consideran los Puntos  $P_{1k}$ ,  $P_{2k}$ , ...,  $P_{jk}$  para los cuales se determinan  $f_m$ ,  $g_m$  y  $h_m$  como funciones de  $r_{jk}$ ,  $\theta_{jk}$ ,  $z_{jk}$ ,  $\alpha_{jk}$  y  $\beta_{jk}$ .
- Se especifican en cada punto  $P_{jk}$  los esfuerzos  $R$ ,  $\Theta$  y  $Z$ .
- Se limitan las series infinitas de (2.45) al término  $N-1$ , esto es, se consideran los  $N$  términos:  $m = 0, 1, \dots, N-1$

$$R_{jk} = \sum_{m=0}^{N-1} [C_m f_m^R + D_m g_m^R + F_m h_m^R]_{jk} \tag{2.46}$$

\*En estas expresiones se han indicado solo dos ángulos directores ( $\alpha, \beta$ ) debido a que los tres no son independientes:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

y análogamente para  $\Theta$  y  $Z$ .

- e) En el método numérico se tratarán de utilizar los esfuerzos medios de cada subregión  $S_k$  para especificar las condiciones de frontera. Si cada subregión se elige de manera que no haya cambios bruscos del estado de esfuerzos, se tendrá una aproximación razonable del esfuerzo medio promediando los esfuerzos correspondientes a todos los puntos  $P_{j,k}$ . Para ello en cada  $S_k$  se sustituyen  $f_m, g_m, h_m$  y  $R, \Theta$  y  $Z$ , por los promedios,  $\bar{f}_m, \bar{g}_m, \bar{h}_m, \bar{R}, \bar{\Theta}$  y  $\bar{Z}$ .
- f) Se establece el número suficiente de ecuaciones para determinar  $C_m, D_m$  y  $F_m$ .

$$\begin{aligned}\bar{R}(S_k) &= \sum_{m=0}^{N-1} [C_m \bar{f}_m^R(S_k) + D_m \bar{g}_m^R(S_k) + F_m \bar{h}_m^R(S_k)] \\ \bar{\Theta}(S_k) &= \sum_{m=0}^{N-1} [C_m \bar{f}_m^\Theta(S_k) + D_m \bar{g}_m^\Theta(S_k) + F_m \bar{h}_m^\Theta(S_k)] \\ \bar{Z}(S_k) &= \sum_{m=0}^{N-1} [C_m \bar{f}_m^Z(S_k) + D_m \bar{g}_m^Z(S_k) + F_m \bar{h}_m^Z(S_k)]\end{aligned}\quad (2.47)$$

en el cual las incógnitas son

$$\begin{aligned}C_0, C_1, C_2, \dots, C_{N-1} \\ D_0, D_1, D_2, \dots, D_{N-1} \\ F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}\end{aligned}$$

o sea  $3N$  cantidades desconocidas. Por tanto, para un sistema compatible y determinado  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

La obtención de las funciones  $f_m, g_m, h_m$ , así como el cálculo de  $R, \Theta, Z, \bar{f}_m, \bar{g}_m, \bar{h}_m$  y la solución del sistema (2.47) está programado para calculadora digital IBM 650.

Eligiendo áreas elementales rectangulares es conveniente seleccionar los puntos  $P_{j,k}$  de tal manera que sea posible obtener numéricamente el volumen de esfuerzos, por ejemplo con las fórmulas de Simpson.

### 3. Variación de los desplazamientos con el tiempo

El efecto del tiempo en los desplazamientos se planteará idealizando la roca como un material viscoelástico lineal. En estas condiciones, si los esfuerzos aplicados fueran independientes del tiempo (o si guardaran proporcionalidad en todo instante) y si el coeficiente de Poisson de la roca se tomara también como independiente del tiempo, el estado de esfuerzos en todo instante sería idéntico al que se obtiene de la solución elástica lineal despreciando efectos del tiempo. Las deformaciones se obtendrían a partir de la solución elástica con un módulo de elasticidad reducido. Si los esfuerzos aplicados varían según una ley arbitraria del tiempo puede acudir a una solución en términos de transformadas de Laplace que simplifica el problema y permite considerar coeficientes de Poisson variables. En efecto, sea

$$\bar{f}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

la transformada de Carson-Laplace de la función  $f$ , donde  $t$ =tiempo. Se puede demostrar (Ref. 10, p. 103) que las relaciones elásticas siguen siendo válidas cuando las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$  son funciones del tiempo, con tan solo sustituir estas constantes, los desplazamientos y los esfuerzos por sus correspondientes transformadas de Carson-Laplace. En particular, en las ecuaciones (A20), (2.5 a 2.7), (2.33 a 2.35) y (2.38 a 2.43) bastará con sustituir  $\lambda, \mu, u, v, w, \sigma_{\theta}, \sigma_r, \dots, \sigma_{re}$  por  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{u}, \bar{v}$ , etc.

Para determinar las funciones  $C_m, D_m$  y  $F_m$  deberán prescribirse las cargas  $R, \Theta$  y  $Z$  en cada punto de la frontera  $S$ , en función del tiempo. Deberán enseguida transformarse las cargas para obtener  $\bar{R}, \bar{\Theta}$  y  $\bar{Z}$ , con lo que se podrán establecer expresiones de la misma forma que las (2.45). Sin embargo aparecen  $\bar{u}(p)$  y  $\bar{v}(p)$  en las funciones  $f_m, g_m$  y  $h_m$ , que sólo son funciones de  $r, \theta$  y  $z$ . Conviene por tanto escribir,

$$\bar{R}(r, \theta, z, p) = 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{C}_m I_m^R + \bar{D}_m J_m^R + 2\bar{\nu} \bar{D}_m K_m^R + \bar{F}_m H_m^R) \quad (3.1)$$

y expresiones análogas para  $\bar{\Theta}$ ,  $\bar{Z}$ , donde  $\bar{C}_m$ ,  $\bar{D}_m$  y  $\bar{F}_m$  son funciones de  $p$ ;  $I_m$ ,  $J_m$ ,  $K_m$  y  $H_m$  son funciones de  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  y se obtienen de (2.38) a (2.44), y  $\bar{R}$ ,  $\bar{\Theta}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{\mu}$  y  $\bar{\nu}$  son funciones conocidas de  $p$ .

Para establecer la correspondencia entre el estado de esfuerzos y  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  en función del tiempo se antitransforman la ecuación (3.1) y las análogas para  $\Theta$  y  $Z$ :

$$2 \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{R(\tau)}{\mu(t-\tau)} d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ C_m(t) I_m^R + D_m(t) J_m^R + K_m^R \frac{d}{dt} \int_0^t D_m(\tau) \nu(t-\tau) d\tau + F_m(t) H_m^R \right] \quad (3.2)$$

etc. Si se conocen los esfuerzos  $R$ ,  $\Theta$  y  $Z$  en función de  $t$  en cada subregión podrán cuantificarse los primeros miembros de (3.2). En los segundos miembros aparece la función desconocida  $D_m$ , lo que da lugar en (3.2) a un sistema de tres ecuaciones lineales integrales cuya solución lleva a resolver el problema.

Si se supone  $\nu$  constante se obtiene, de (3.2),

$$2 \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{R(\tau)}{\mu(t-\tau)} d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ C_m(t) I_m^R + D_m(t) M_m^R + F_m(t) H_m^R \right] \quad (3.3)$$

y análogamente para  $\Theta$  y  $Z$ . (En esta expresión  $I_m$ ,  $M_m$  y  $H_m$  son las mismas funciones que  $f_m$ ,  $g_m$  y  $h_m$  salvo por el factor  $2\mu$ ).

El sistema (3.3) podrá resolverse numéricamente en cada caso particular para una serie de instantes  $t = 0, t_1, t_2, \dots$ , obteniéndose así los valores, correspondientes a esos instantes, de  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$ . Con estos y con los valores de  $\mu$  que corresponden a los mismos instantes podrán calcularse en las ecuaciones (2.33) a (2.35) los desplazamientos correspondientes.

Si además,  $R$ ,  $\Theta$  y  $Z$  son independientes del tiempo, (3.3) restituye la solución elástica como se enunció arriba.

#### 4. Ejemplos numéricos. Programas.

Con el objeto de examinar las diferentes etapas de la aplicación práctica del método se resolvieron algunos problemas cuyos estados de esfuerzos y geometría fueron relativamente simples. En términos de la solución de estos problemas se señalan algunas características del método, de los programas que se utilizaron en dicha solución y más adelante se hace una discusión para establecer su aplicabilidad práctica.

Simultáneamente se pretendió verificar la solución del método propuesto comparándolo con los resultados obtenidos con el método de Boussinesq. Para lograr esto, se consideró un valle cilíndrico circular, Fig. 5, sujeto al estado de esfuerzos que resulta de aplicar una carga concentrada,  $P$ , en la superficie plana de un medio seminfinito. El problema consistió entonces en comparar los desplazamientos obtenidos con los de Boussinesq.

Para determinar los coeficientes de las fórmulas de los desplazamientos se subdividió la superficie en un conjunto de áreas elementales. La capacidad de la calculadora digital resultó insuficiente para considerar un número razonablemente elevado de áreas elementales. Esto dió lugar a que dichas áreas resultaran demasiado grandes para la prescripción de los esfuerzos medios. Resultó, por ejemplo, que la coordenada angular  $\theta$  tenía una variación, dentro de cada área, del orden de  $90^\circ$ . Como las soluciones están dadas en términos de  $m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , se obtuvieron fuertes variaciones de los esfuerzos, los cuales, no obstante que se obligó a que el esfuerzo medio fuera igual al obtenido con Boussinesq, diferían radicalmente de estos últimos en cada punto del área elemental. Esto condujo a que los desplazamientos medios fueran sustancialmente distintos.

Con el objeto de verificar los programas que se elaboraron\*

---

\*Programas elaborados por el Ing. Antonio Olivera S. bajo la dirección del Ing. Jorge I. Bustamante.

para el método se introdujo una simplificación adicional: se consideró simetría en las condiciones de carga y geometría. Esta simplificación fué posible debido a la simetría de las fórmulas de los esfuerzos y desplazamientos respecto al eje  $z$ .

Se eligieron las superficies de revolución que resultan de hacer girar respecto al eje  $z$  los arcos  $\overline{O'DE}$ ,  $\overline{O'BC}$  y la recta  $\overline{O'A}$ . Fig. 5. Los esfuerzos prescritos en estas superficies de revolución fueron nuevamente los debidos a la carga  $P$ .

Se emplearon las fórmulas (2.38) a (2.43) con  $\theta = 0$  para prescribir los esfuerzos a lo largo de  $\overline{O'DE}$ ,  $\overline{O'BC}$  y  $\overline{O'A}$ , Fig. 5. Los datos numéricos del problema, en relación con la figura 5, fueron los siguientes:

$$a = 75 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ ton}$$

En las direcciones  $x$ ,  $y$ , y de la bisectriz se especificaron los esfuerzos sobre  $\overline{O'DE}$ ,  $\overline{O'A}$  y  $\overline{O'BC}$  empezando desde un punto vecino a  $O'$ . Se dividieron los arcos en seis intervalos y cada uno de estos en ocho subintervalos. Se determinaron numéricamente las funciones que intervienen en las expresiones de los esfuerzos en cada uno de estos puntos. Cada serie se limitó a seis términos.

Se calcularon los esfuerzos debido a la carga  $P$  con las fórmulas de Boussinesq. Se integraron numéricamente las expresiones de los esfuerzos  $R$ ,  $\theta$  y  $Z$ , expresiones (2.45); se determinó el valor medio de los esfuerzos en estas ecuaciones y se igualaron con los valores medios de los esfuerzos calculados con Boussinesq.

Con esto se obtuvieron tres sistemas de 18 ecuaciones algebraicas en cada dirección para la determinación de los coeficientes  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$ .

Se procedió a la solución del sistema de ecuaciones algebraicas.

#### Programas\*

Para la solución del problema se utilizaron los siguientes programas:

\*Estos programas están archivados en la Sección de Análisis Numérico del Instituto de Ingeniería, UNAM.

- 0651.1T para generar las funciones asociadas al coeficiente  $D_m$   
 065.2T para las de los coeficientes de  $C_m$ .  
 065.3T para las de los coeficientes  $F_m$ .  
 057.T para el cálculo de los esfuerzos y desplazamientos me-  
 dios de Boussinesq.  
 5.2.00 para la solución del sistema de ecuaciones.  
 5.2.003 para la verificación de la solución del sistema.  
 060.1T para el cálculo de los esfuerzos en cada punto.  
 061 T para el cálculo de los desplazamientos en cada punto.

La solución no verificó al sistema en el primer intento de-  
 bido al elevado rango de variación de las funciones que inter-  
 vienen en la solución. Por ello hubo necesidad de plantear el  
 sistema con doble precisión, 16 cifras significativas, y más  
 adelante se requirieron iteraciones hasta que no hubo variación  
 cuando menos en las primeras cuatro cifras significativas.

Es posible que este comportamiento defectuoso del sistema  
 sea principalmente atribuible al sistema de referencia elegido.  
 En efecto las fórmulas (2.38) a (2.43), presentan dos caracte-  
 rísticas importantes:

1. Tienen un eje de singularidades (eje  $z$ ). Para  $r=0$  los es-  
 fuerzos tienden a infinito.
2. El haber transformado las expresiones de esfuerzos originales  
 a las (2.38) a (2.43) presentadas en forma dimensional da  
 lugar a que, desde el punto de vista numérico, las soluciones  
 queden indefinidas en  $z = 0$ .

En las Figs. 6,7,8,9,10 y 11 se presentan los resultados de  
 aplicar el método para  $\theta = 0$ ; estos se comparan con los de  
 Boussinesq. De la comparación resaltan fundamentalmente tres  
 hechos. Una tendencia sistemática hacia el infinito de los des-  
 plazamientos en  $r = 0$ , una mejor concordancia en las regiones  
 intermedias y un comportamiento irregular lejos del origen.  
 Las discrepancias entre los desplazamientos son excesivas, y se  
 atribuyen principalmente a la elección del sistema de referen-  
 cia. Como ya se dijo el eje  $z$  ( $r=0$ ) es un eje de singularidades  
 para las funciones de los esfuerzos. Físicamente esto corres-

pondería a un conjunto de cargas concentradas con puntos de aplicación en el eje  $z$ . La presencia de estas cargas ficticias es inevitable; por lo tanto es conveniente reducir a un mínimo aceptable su influencia sobre la región de interés alejando suficientemente el origen de dicha región. En el ejemplo la influencia del eje de singularidades no se limita solamente a perturbar los resultados en la vecindad de  $r = 0$  sino que debido a que en el establecimiento del sistema de ecuaciones para  $C_m$ ,  $D_m$  y  $F_m$  se utilizan los valores numéricos de las funciones de  $r$  y  $z$ , calculadas alrededor de  $r = 0$ , su influencia se propaga en todo el intervalo de prescripción dando lugar, a las discrepancias mencionadas en los desplazamientos.

La influencia de la indeterminación de las funciones en  $z = 0$  puede fácilmente evitarse trasladando el sistema arriba del plano  $M$ . En el planteamiento del ejemplo numérico sólo se especificaron las condiciones de frontera dentro de las líneas  $\overline{O'A}$ ,  $\overline{O'BC}$  y  $\overline{O'DE}$ . Respecto a estas dos últimas cabe señalar que para lograr una mejor aproximación es necesario especificar además las condiciones de esfuerzos nulos en la prolongación de estas líneas sobre el plano  $M$ , lo cual será factible cuando el origen del sistema se localice arriba de dicho plano.

Para juzgar la utilidad del método desarrollado en este trabajo, desde el punto de vista numérico deberá elegirse un ejemplo sencillo, de solución conocida en el que se eviten las condiciones indeseables mencionadas.

## 5. Discusión y conclusiones

Todo problema elástico queda completamente establecido con las condiciones de frontera y las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad o las de desplazamientos. Sin embargo, la solución directa de estos sistemas de ecuaciones diferenciales es muy complicada; por lo cual es usual transformarlas en otras más simples, por ejemplo, ecuaciones diferenciales armónicas y biarmonicas. Los esfuerzos y los desplazamientos quedan ahora determinados indirectamente a través de funciones de esfuerzos o de desplazamientos. Dos planteamientos de este tipo son las llamadas soluciones de Neuber-Papkovitch y la de Galerkin. La primera se establece mediante funciones armónicas y la segunda con funciones biarmonicas. La condición más sobresaliente que se impone a estos planteamientos es que el problema elástico quede representado en forma completa. Se ha establecido que son necesarias cuatro funciones armónicas independientes para representar totalmente el problema (Ref. 11). Es todavía materia de discusión si en general estas pueden reducirse a tres o si ello solamente es válido para ciertas formas de la frontera (Ref. 11).

Se puede demostrar que las funciones biarmonicas son equivalentes a una combinación lineal de funciones armónicas (Ref. 6). Esto da lugar a que existan diversas alternativas para establecer el problema elástico utilizando combinaciones de funciones armónicas y biarmonicas. Tal es el caso en el planteamiento de Muki (Ref. 1), base del método propuesto en este trabajo; Muki utiliza una función armónica y una biarmonica para establecer el problema elástico general. Queda por demostrar si esta representación es completa; de no ser así, se impondrán restricciones en cuanto al tipo de problemas que es factible resolver.

Paralelamente al planteamiento con funciones armónicas existen métodos analíticos adecuados para obtener la solución de estos problemas. Entre ellos destacan los que utilizan las transformaciones integrales de Fourier y Hankel (Ref. 7).

Por otro lado, la solución general del problema elástico no ha podido obtenerse hasta la fecha y los métodos señalados son sólo aplicables a casos en que la forma de la frontera y las condiciones de la misma son congruentes con el método. Por ejemplo, la solución de Muki, que emplea la transformación de Hankel, es apropiada para el tratamiento de medios seminfinitos con condiciones mixtas en la frontera plana  $z=0$ . Estas condiciones originan un problema dual de ecuaciones integrales el cual ha sido resuelto con anterioridad (Ref. 1 y 7).

En el problema de los desplazamientos de las laderas la forma del valle y las condiciones de esfuerzo prescritas son demasiado complejas para pretender que fuera aplicable un método analítico.

Se pasa ahora a examinar las posibilidades de resolver el problema con métodos numéricos. Estos pueden dividirse en dos grupos: método de diferencias finitas y métodos de coeficientes indeterminados (Ref. 12).

Para aplicar los métodos de diferencias finitas se requiere una discretización del medio y la expresión de las ecuaciones diferenciales que gobiernan al problema por medio de ecuaciones de diferencias. En este caso es necesario limitar el medio en todas direcciones, lo cual requiere hacer ciertas hipótesis sobre el estado de esfuerzos en una amplia zona de la frontera. Por ejemplo habría que auxiliarse de las soluciones de Boussinesq y Cerruti para prescribir los esfuerzos en las superficies que limiten al medio Fig. 12. El problema se establecería en términos de un sistema de ecuaciones algebraicas de orden muy elevado, posiblemente no menor de 15.000.

En la actualidad se han resuelto sistemas de ecuaciones de órdenes aún mayores utilizando métodos iterativos (Ref. 13). El tipo de sistemas, en banda, que se ha tratado con estos métodos difiere del que se obtendría en este caso. Es muy posible que existan métodos para resolver sistemas de esta magnitud con calculadoras digitales, pero, es seguro que el tiempo de calculadora necesario para resolverlo sea tan grande que económicamente resulte prohibitiva esta solución.

El segundo grupo de métodos consiste esencialmente en suponer una combinación lineal de funciones independientes, cada una de las cuales satisface las condiciones de frontera o las ecuaciones diferenciales.

Las diferencias entre los métodos estriban en la forma de definir los parámetros de la combinación lineal. En todos ellos se debe satisfacer un requisito adicional: las funciones deben formar un conjunto completo (Ref. 14).

Debido a las complicaciones en la forma del valle y de las condiciones de carga quedan prácticamente descartados los métodos en los que las funciones elegidas deben satisfacer las condiciones de frontera. Si a esto se agrega la condición de que el sistema sea completo no hay duda que estos métodos son inaplicables para este problema.

Queda por examinar el caso en que las funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales (Método de Trefftz). En el trabajo se expone un método basado en el de Muki (Refs. 1 y 4) en el cual las funciones propuestas verifican las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, no se puede decir nada respecto a que el sistema, ecuaciones (2.23), sea o no completo. En general este es el obstáculo más serio del método de Trefftz aplicado a problemas de elasticidad tridimensional (Ref. 6). Como se explica en el trabajo la obtención de las funciones mencionadas se realiza a través de las soluciones de Muki, las cuales están expresadas como series infinitas de integrales. Estas series se transforman en series dobles las cuales no obstante ser más sencillas que las propuestas por Muki, siguen siendo aún complicadas para su aplicación práctica. Debido a que no es posible asegurar que las series de integrales, o las series dobles sean sistemas completos en las regiones de interés del problema, no tiene objeto continuar el desarrollo con las soluciones generales; por ello se decidió conservar sólo una de las dos series en las que se expresaron las soluciones. Con esto se obtuvieron fórmulas útiles para generar combinaciones de funciones linealmente independientes que satisficieran las ecuaciones diferenciales del problema elás-

tico. Debe entonces señalarse que, excepto por que verifican las ecuaciones diferenciales, las funciones son por lo demás arbitrarias.

La solución final se expresa por medio de una serie de funciones trigonométricas cuyos coeficientes son funciones de dos coordenadas. Las restricciones impuestas al problema afectarán a los coeficientes de estos desarrollos en serie, los cuales además dependerán de la forma de las fronteras.

Las constantes de integración se determinan a partir de los esfuerzos medios prescritos en las áreas elementales en las que se dividió previamente el valle y como estas condiciones de esfuerzos, la forma del valle y las funciones son más o menos arbitrarios las series tendrán en general un comportamiento irregular pudiendo, inclusive, ser divergentes. En el método numérico propuesto sólo se toman unos cuantos términos de las series para prescribir las condiciones de frontera. Como los coeficientes del desarrollo pueden incrementarse al crecer el índice de la serie es posible que se presenten fuertes variaciones de los esfuerzos dentro de cada área elemental al variar el argumento de las funciones trigonométricas del desarrollo. Este no será el caso de los esfuerzos reales; por lo tanto los desplazamientos calculados y los reales podrán diferir sustancialmente. Si no es completa la representación este efecto podrá no amortiguarse al tomar más términos en la serie. Aún manteniendo el argumento fijo pueden obtenerse variaciones en los esfuerzos que de esta manera se prescriban puesto que los coeficientes no satisfacen las condiciones impuestas a los coeficientes de Fourier.

En la solución de Boussinesq es admisible la superposición de los esfuerzos prescritos en una porción de la frontera  $z = 0$  debido a que en el resto del plano resultan nulos los esfuerzos. La parte superior del medio seminfinito y la extensión hasta el infinito en  $z = 0$  más allá de la zona en que se prescribieron los esfuerzos no tienen influencia sobre el medio en consideración.

En el caso presente:

1. Debido al comportamiento irregular de la serie pueden aparecer condiciones de esfuerzos más allá de la zona de prescripción y estos esfuerzos pueden ser de tal magnitud que afecten considerablemente el estado de desplazamiento en el área de la cimentación.
2. Como no es posible prescribir el estado de esfuerzos en cada punto del valle y las soluciones pueden continuarse analíticamente arriba de la frontera, es de esperarse una interacción ficticia entre el medio superior y el inferior que influirá sobre el estado de desplazamiento calculado.

De lo expuesto anteriormente puede concluirse que debido al desconocimiento actual para formar conjuntos completos de funciones para construir la solución general del problema elástico tridimensional sólo resulta factible resolver adecuadamente problemas particulares.

La proposición de funciones que satisfacen sólo parcialmente los requisitos impuestos por los métodos aproximados de solución dan lugar a que no sea posible preveer ni el comportamiento, ni la aproximación de la solución.

Hasta ahora se han señalado las inconveniencias que resultan de tratar de resolver el problema a partir del planteamiento general del problema elástico. Para resolver dicho problema en el trabajo se admitió que el medio era elástico, isotrópico y homogéneo. A pesar de estas hipótesis simplificadoras el problema resulta muy complicado. El hecho es que, salvo en casos muy particulares, el medio rocoso es marcadamente heterogéneo, frecuentemente estratificado, es anisótropo y está agrietado. Además parecen ser inadecuadas las pruebas de campo y de laboratorio que se efectúan para determinar el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson. En efecto, las pruebas que usualmente se realizan afectan un volumen de mucho menor orden que el que afectan la cimentación de la presa y el agua retenida. De esta manera los valores obtenidos que sirven de base para el cálculo de los desplazamientos pueden diferir radicalmente de los valores reales.

Debido a esta situación lo más que podría obtenerse a partir de la solución del problema elástico sería una idea cualitativa de la distribución de desplazamientos. Pero, como se ha señalado, es tan complicado el proceso que no se justifica su aplicación al problema que en este trabajo se pretendió resolver. El principal valor del trabajo realizado debe buscarse en que señala la importancia, las dificultades y otras peculiaridades del problema, facilitando quizás, indirectamente, su solución por otros caminos.

Actualmente para estimar los desplazamientos de la cimentación de una presa se utiliza el método de F. Vogt (Ref. 15).

El método consiste en tomar la proyección del valle sobre un plano horizontal y en él considerar aplicadas las cargas transmitidas por la presa. En este método se considera el medio elástico, homogéneo e isotrópico. Para la determinación de los desplazamientos se utilizan básicamente las expresiones de Boussinesq y de Cerruti.

Las simplificaciones impuestas al método de Vogt son de tal envergadura que aun para la determinación cualitativa de los desplazamientos resulta burdo. No obstante es posible introducir algunas modificaciones simples que no compliquen al método. Por ejemplo, es posible considerar, aunque sólo parcialmente, el efecto de la curvatura del valle calculando los desplazamientos a distintos sistemas de referencia. Es factible también considerar el efecto de las áreas cargadas vecinas a una determinada área elemental. Esta superposición puede tomar en cuenta, aunque sólo localmente, el efecto de la presión hidrostática sobre las laderas en la vecindad de la cimentación. El conocimiento de los movimientos que puedan ocurrir en la cimentación es de trascendencia para el análisis y diseño de la presa bóveda.

Ante la actual situación no parecen justificarse algunos refinamientos de cálculo de recientemente se han propuesto para analizar las presas bóveda, mientras no se tenga un conocimiento más preciso de los movimientos de la cimentación. Ello no obsta para que se sigan abordando diversos aspectos del problema, pero más bien como trabajos de investigación que pretendiendo hallar en ese estudio una base para aplicación inmediata.

Se considera que para fines de diseño es insuficiente la precisión del método de Vogt, aun con las modificaciones propuestas; en todo caso este método podrá ser útil en la elaboración de anteproyectos. Parece ser entonces que por ahora el único camino razonable para fines de diseño debe descansar esencialmente en el uso de modelos.

En los modelos experimentales se tratan de reproducir las características mecánicas de las rocas y la topografía del valle. La representación no es, sin embargo, totalmente satisfactoria pues, como se ha señalado, existen problemas en la determinación de las constantes mecánicas. Asimismo se se tienen problemas en la determinación del estado de agrietamiento y en su reproducción; en la representación de la acción de la gravedad, en la precisión de las mediciones, etc. No obstante en las condiciones presentes, seguramente existen menos discrepancias entre el modelo y el prototipo que las que podrían existir entre los resultados de un análisis elástico y el prototipo.

APENDICE AA.1. Notación tensorial (Ref. 2)

Convención de suma: la repetición de índices indica una suma en todo el rango de variación de los índices.

$\Theta_i$  coordenadas curvilíneas. En el sistema de referencia cilíndrico, Fig. 1

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= r \\ \Theta_2 &= \Theta \\ \Theta_3 &= z\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

$g^ij, g_{ij}$  tensores métricos. En el sistema cilíndrico

$$\begin{aligned}g^{11} &= g_{11} = 1 \\ g^{22} &= \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{\Theta_1^2} = \frac{1}{r^2} \\ g^{33} &= g_{33} = 1\end{aligned}$$

todos los demás son cero.

(A.2)

$\Gamma_{jk}^i$  símbolos de Christoffel de segunda clase. En el sistema cilíndrico,

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -\Theta_1 = -r \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\Theta_1} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

todos los demás son cero

(A.3)

$U_i$ : componentes tensoriales del vector desplazamiento

$$A_{i|j} = A_{i,j} - \Gamma_{ij}^s A_s \quad (\text{primera derivada covariante del tensor } A_i) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}A_{i|j|k} &= A_{i,jk} - \Gamma_{ij,k}^\alpha A_\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha A_{\alpha,k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_{\alpha,j} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta A_\beta - \\ &- \Gamma_{jk}^\alpha A_{i,\alpha} + \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\gamma A_\gamma\end{aligned}$$

(A.5)

(segunda derivada covariante del tensor  $A_i$ )

La coma indica derivada parcial respecto a la coordenada identificada con el índice posterior a la coma. Por ejemplo  $A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial \theta_j}$

$\sigma_{ij}$  : tensor de esfuerzos

$e_{ij}$  : tensor de deformaciones

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.6})$$

Ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda g_{ij} \Delta + 2\mu e_{ij} \quad (\text{A.7})$$

$\lambda, \mu$ : parámetros de Lamé,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.8})$$

$E$  : módulo de elasticidad

$\nu$  : coeficiente de Poisson

$$\Delta = g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \quad : \text{dilatación} \quad (\text{A.9})$$

#### A.2 Componentes físicas (Ref. 2)

Del vector  $A_s$

$$A_i^F = \sqrt{g^{ii}} A_i \quad (\text{no se suma en } i) \quad (\text{A.10})$$

En el sistema cilíndrico

$$A_1 = A_1^F$$

$$A_2 = \theta_1 A_2^F = r A_2^F$$

$$A_3 = A_3^F \quad (\text{A.11})$$

Del tensor de esfuerzos  $\sigma^{ij}$

$$\sigma_{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ii}}} \quad (\text{no se suma en } i, j) \quad (\text{A.12})$$

Relación entre tensores de esfuerzos covariantes y contravariantes

$$\tau^{\alpha\beta} = g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \tau_{\nu\mu} \quad (\text{A.13})$$

En el sistema cilíndrico,

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= (g^{11})^2 \tau_{11} = \tau_{11} \\ \tau^{22} &= (g^{22})^2 \tau_{22} = \frac{1}{\theta^4} \tau_{22} = \frac{1}{r^2} \tau_{22} \\ \tau^{33} &= (g^{33})^2 \tau_{33} = \tau_{33} \\ \tau^{21} &= \tau^{12} = g^{11} g^{22} \tau_{12} = \frac{1}{\theta^2} \tau_{12} = \frac{1}{r^2} \tau_{12} = \frac{1}{r^2} \tau_{21} \\ \tau^{31} &= \tau^{13} = g^{11} g^{33} \tau_{13} = \tau_{13} = \tau_{31} \\ \tau^{32} &= \tau^{23} = g^{22} g^{33} \tau_{23} = \frac{1}{\theta^2} \tau_{23} = \frac{1}{r^2} \tau_{23} = \frac{1}{r^2} \tau_{32} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_r = \sqrt{\frac{g_{11}}{g^{11}}} \tau^{11} = \tau^{11} = \tau_{11} \\ \sigma_{22} &= \sigma_\theta = \frac{1}{r^2} \tau_{22} \\ \sigma_{33} &= \sigma_z = \tau_{33} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{1}{r} \tau_{12} = \frac{1}{r} \tau_{21} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{rz} = \tau_{zr} = \tau_{13} = \tau_{31} \\ \sigma_{32} &= \sigma_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \frac{1}{r} \tau_{32} = \frac{1}{r} \tau_{23} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

### A.3 Derivadas covariantes referidas al sistema cilíndrico

De (A.4) se obtiene

$$u_{1|1} = u_{1,1} - \Gamma_{11}^3 u_3 = u_{1,1} \quad (\text{A.16})$$

$$u_{2|2} = u_{2,2} - \Gamma_{22}^3 u_3 = u_{2,2} + \Theta_1 u_1$$

$$u_{3|3} = u_{3,3} - \Gamma_{33}^3 u_3 = u_{3,3}$$

De (A.9) y (A.16) se obtiene

$$\Delta = u_{1,1} + \Theta_1^{-2} u_{2,2} + \Theta_1^{-1} u_{1,1} + u_{3,3} \quad (\text{A.17})$$

De (A.11) y (A.17)

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

en la cual  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes físicas del vector desplazamiento (Fig. 2).

$$u_{1|2} = u_{1,2} - \Gamma_{12}^2 u_2 = u_{1,2} - \frac{1}{r} u_2 = \frac{\partial u}{\partial \theta} - v$$

$$u_{2|1} = u_{2,1} - \Gamma_{12}^2 u_2 = \frac{\partial}{\partial r} (vr) - v = r \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$u_{1|3} = u_{1,3} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{A.19})$$

$$u_{2|3} = u_{2,3} = r \frac{\partial v}{\partial z}$$

Sustituyendo (A.16), (A.18) y (A.19) en (A.7) se obtiene la ley de Hooke referida al sistema cilíndrico:

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\sigma_\theta = \lambda \Delta + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right)$$

$$\sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \frac{\mu}{r} \left( r \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

A.4 Ecuaciones de Navier (Ref. 3)

Las ecuaciones de Navier para un medio, en el que no se incluyen las fuerzas de cuerpo, se expresan tensorialmente

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \Delta_{,i} = 0 \quad (\text{A.21})$$

en las cuales

$$\nabla^2 u_i = g^{\alpha\beta} u_{i|\alpha\beta} \quad (\text{A.22})$$

y  $\Delta$  tiene la expresión dada en (A.17).

Para el sistema cilíndrico de referencia

$$\nabla^2 u_i = g^{11} u_{i|11} + g^{22} u_{i|22} + g^{33} u_{i|33}$$

Sustituyendo (A.2) se tiene

$$\nabla^2 u_i = u_i = u_{i|11} + \frac{1}{r^2} u_{i|22} + u_{i|33} \quad (\text{A.23})$$

Utilizando (A.5) para el cálculo de las 2as. derivadas covariantes se obtienen

$$u_{i|11} = u_{i,11}$$

$$u_{i|22} = u_{i,22} - \frac{2}{r} u_{2,2} - u_i + r u_{i,1}$$

$$u_{i|33} = u_{i,33}$$

$$u_{2|11} = u_{2,11} - \frac{2}{r} u_{2,1} + \frac{2}{r^2} u_2$$

(A.24)

$$u_{2|22} = u_{2,22} + 2r u_{1,2} + r u_{2,1} - 2u_2$$

$$u_{2|33} = u_{2,33}$$

$$u_{3|11} = u_{3,11}$$

$$u_{3|22} = u_{3,22} + r u_{3,1}$$

$$u_{3|33} = u_{3,33}$$

Sustituyendo (A.24) en (A.23) se obtienen

$$\nabla^2 u_1 = u_{1,11} + \frac{1}{r^2} u_{1,22} + u_{1,33} - \frac{2}{r^3} u_{2,2} - \frac{1}{r^2} u_1 + \frac{1}{r} u_{1,1} \quad (\text{A.25})$$

$$\nabla^2 u_2 = u_{2,11} + \frac{1}{r^2} u_{2,22} + u_{2,33} - \frac{1}{r} u_{2,1} + \frac{2}{r} u_{1,2}$$

$$\nabla^2 u_3 = u_{3,11} + \frac{1}{r^2} u_{3,22} + u_{3,33} + \frac{1}{r} u_{3,1}$$

Considerando en (A.25) las relaciones (A.11) se obtienen

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2}$$

Como la definición usual del Laplaciano en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.26})$$

se escribirá

$$\nabla_t^2 u = \nabla^2 u - \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right)$$

$$\nabla_t^2 u = r \nabla^2 v - \frac{1}{r} \left( v - 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla_t^2 w = \nabla^2 w$$

(A.27)

Sustituyendo en (A.21) y dividiendo entre  $\mu$ :

$$\nabla^2 u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) = 0$$

$$\nabla^2 v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{v}{r} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\nabla^2 w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$$

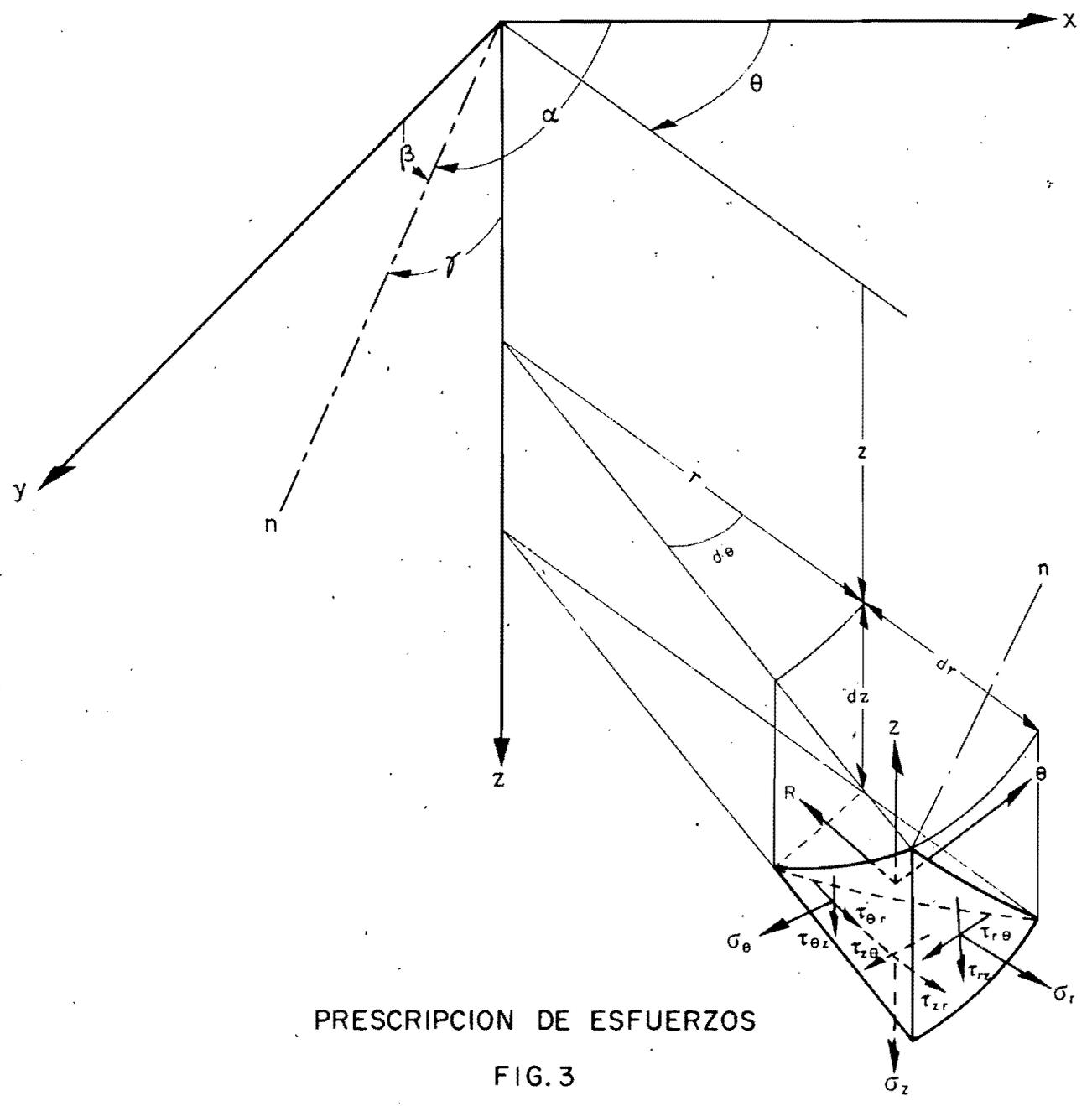
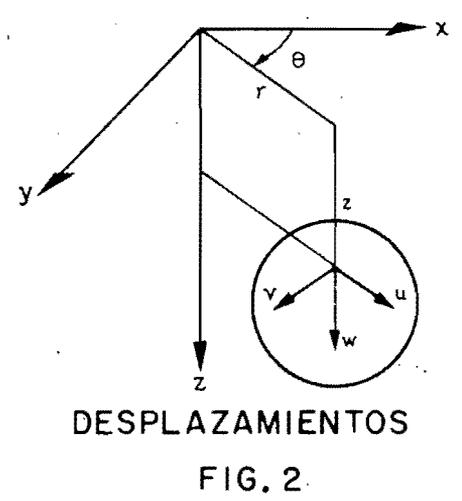
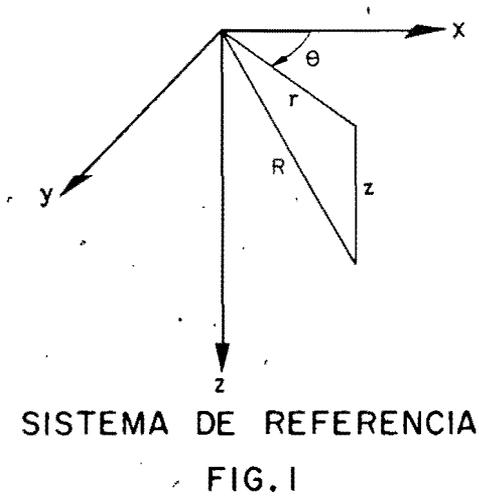
(A.28)

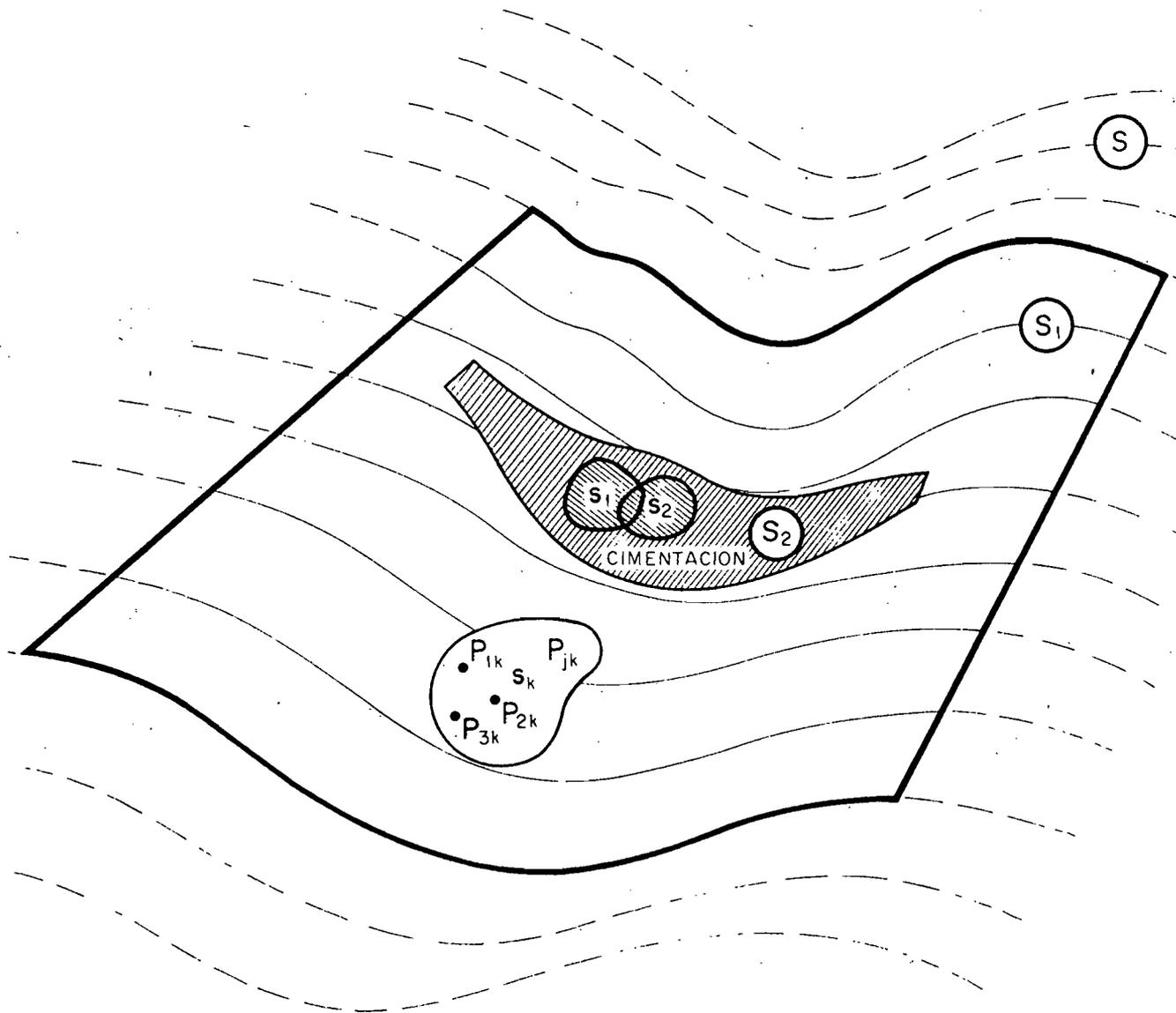


DEPFI

Referencias

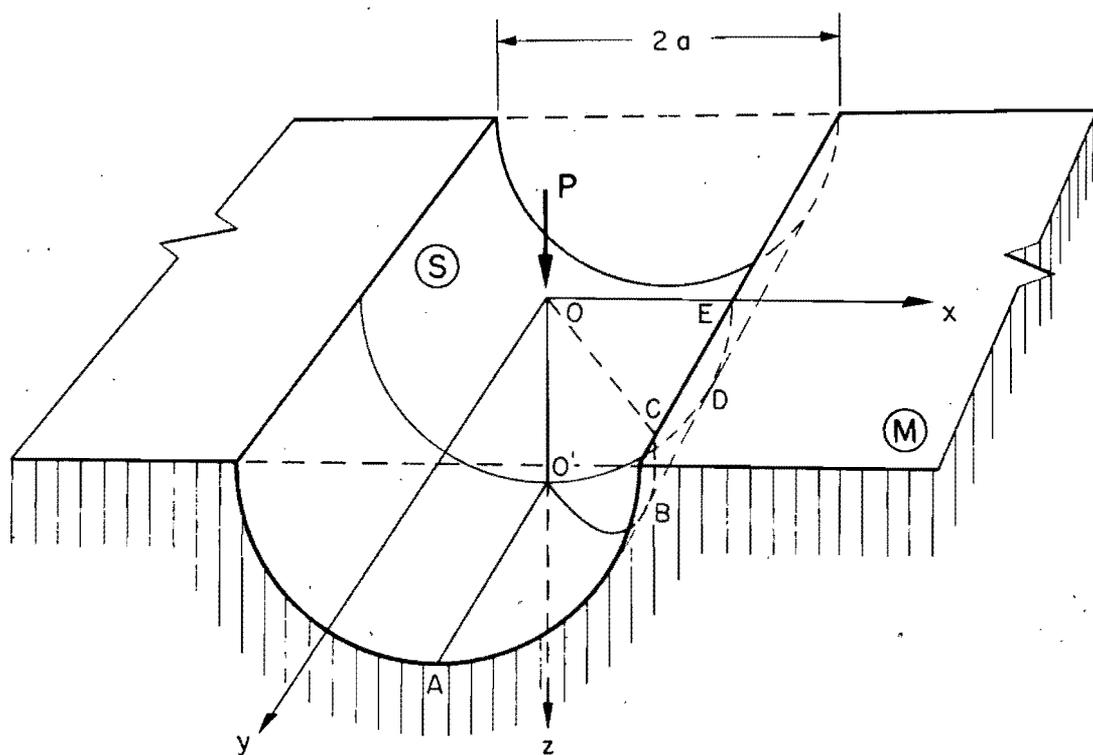
1. Muki, R. "Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate". Capitulo VIII del libro "Progress in solid mechanics", Vol. 1 North-Holland Publishing Co. 1960.
2. Green, A.E. y Zerna, W. "Theoretical elasticity". Oxford 1960.
3. Sokolnikoff, I. S. "Tensor analysis". John Wiley 1958.
4. Muki, R. "On the Sneddon's method by Hankel transforms for the three dimensional problems of elasticity theory". Proc. of the fifth Japan National Congress for Applied Mechanics. 1955.
5. Westergaard, H.M. "Theory of elasticity and plasticity". Harvard Monographs in Applied Science. No. 3 John Wiley. 1952.
6. Sokolnikoff, I.S. "Mathematical theory of elasticity". (2a. edición). McGraw-Hill. 1956.
7. Sneddon, I.N. "Fourier transforms". McGraw-Hill 1951.
8. Bateman, H. "Tables of integral transforms". Bateman Manuscript project. Vol. 2. McGraw-Hill 1954.
9. Hildebrand, F.B. "Advanced calculus for engineers". Prentice-Hall, Inc. 7a. impresión. 1957.
10. Persoz, B. "Introduction a l'etude de la rhéologie". Dunod, Paris, 1960.
11. Sternberg, E. "On some recent developments in the linear theory of elasticity". Structural Mechanics. Proceedings of the first symposium of naval structural mechanics. Pergamon Press 1960.
12. Crandall, S.H. "Engineering analysis". Mc Graw Hill. 1956.
13. Varga, R.S. "Matrix iterative analysis". Prentice Hall. Series in automatic computation. 1962.
14. Shuleshko, P. "A new method of solving boundary value problems of mathematical physics". Austral J. Appl.Sci. Vol. 10. p. 1-16. 1959.
15. Bureau of Reclamation "Trial load method of analyzing arch dams". Part V. Technical investigations. Bull. 1. 1938.





REGIONES EN LAS QUE SE PRESCRIBEN LOS ESFUERZOS

FIG.4



EJEMPLOS NUMERICOS

FIG. 5

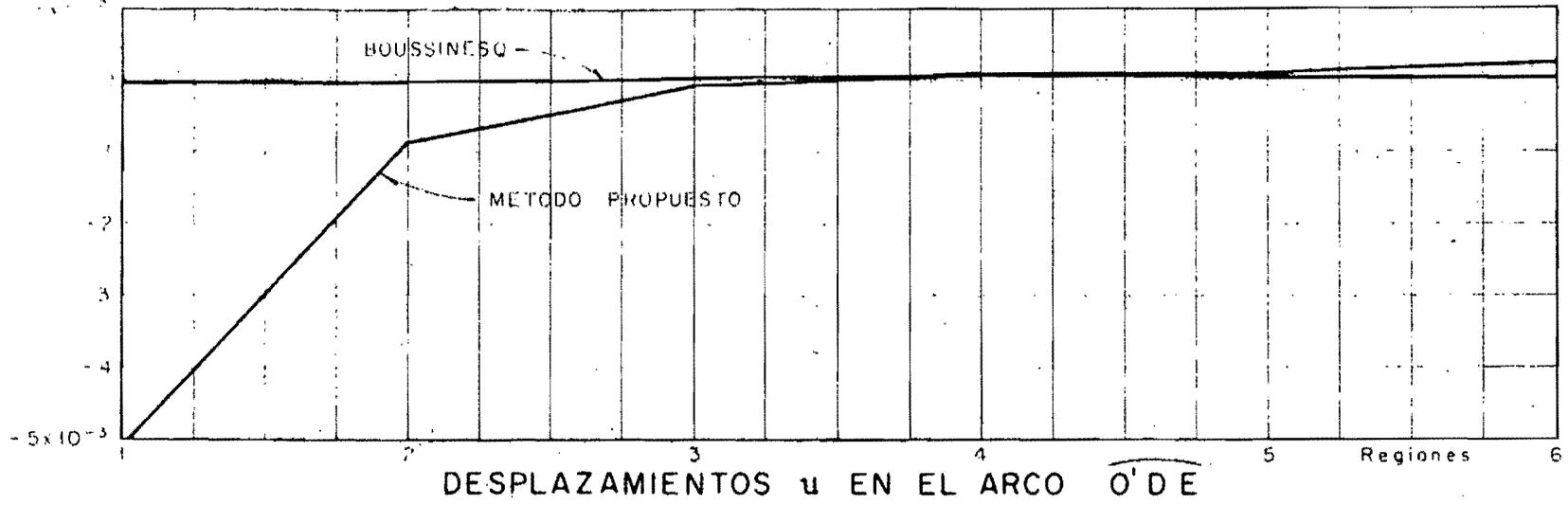


FIG. 6

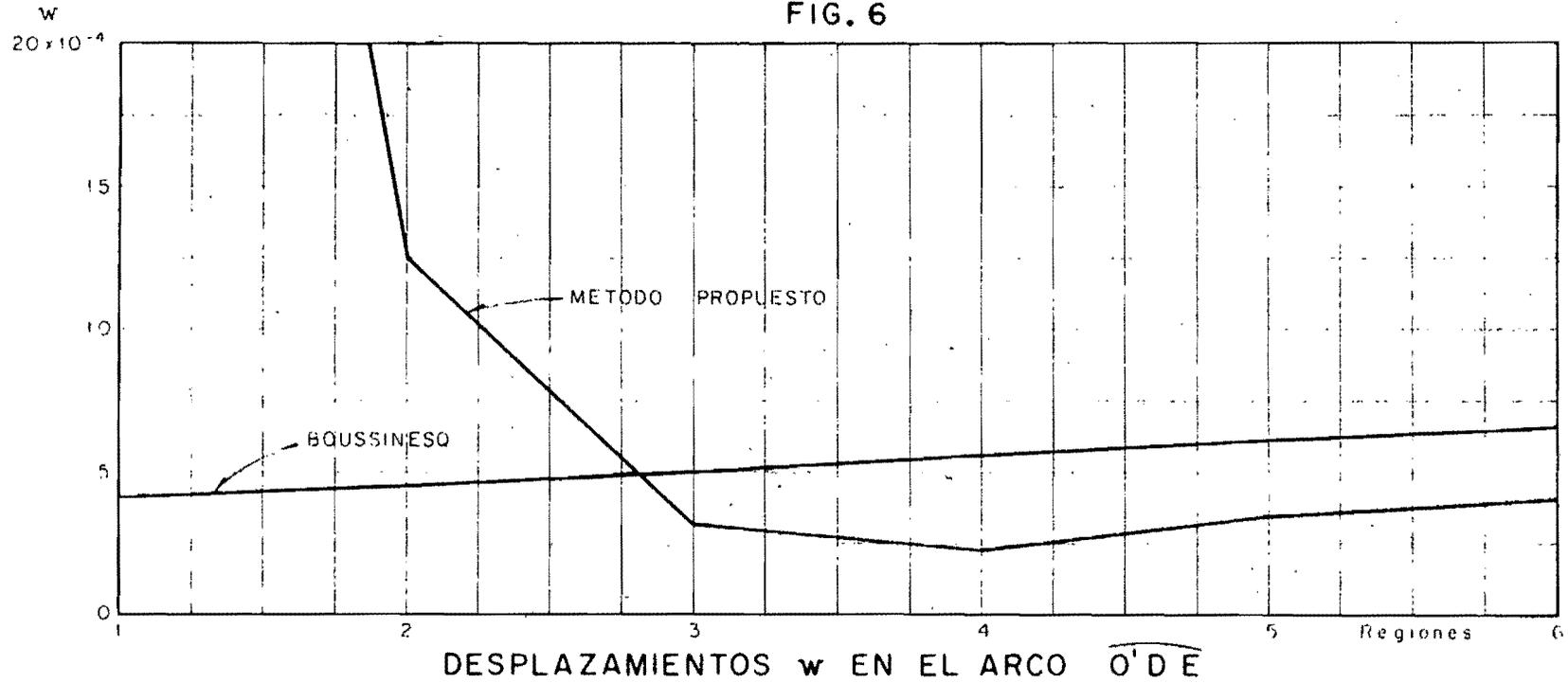


FIG. 7

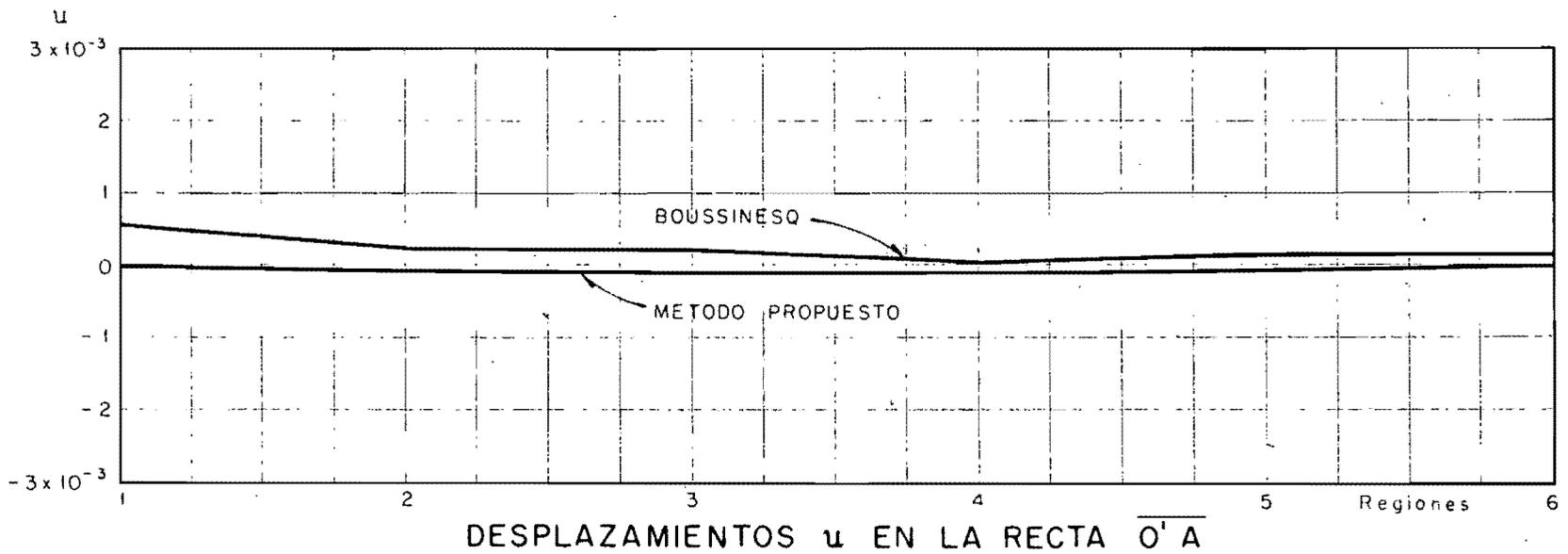


FIG. 8

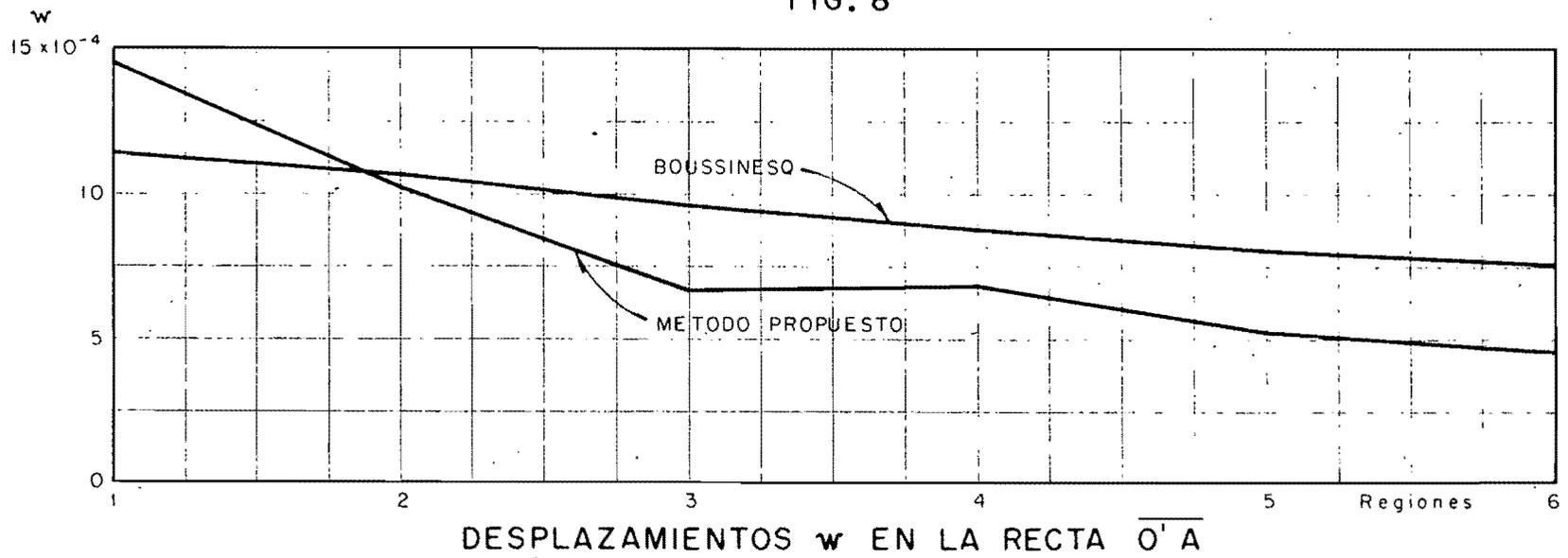
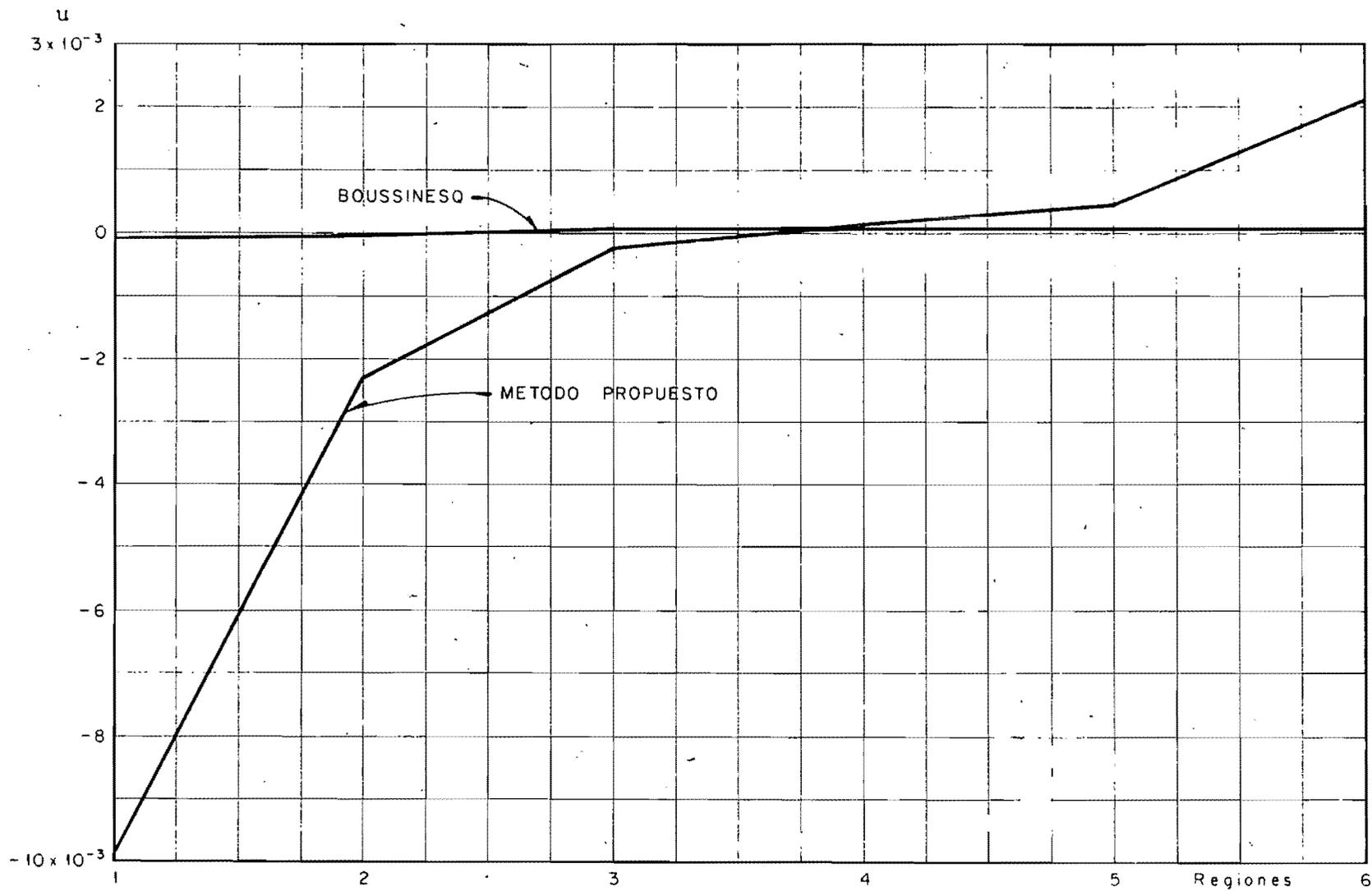


FIG. 9



DESPLAZAMIENTOS  $u$  EN EL ARCO  $\widehat{O'BC}$

FIG. 10

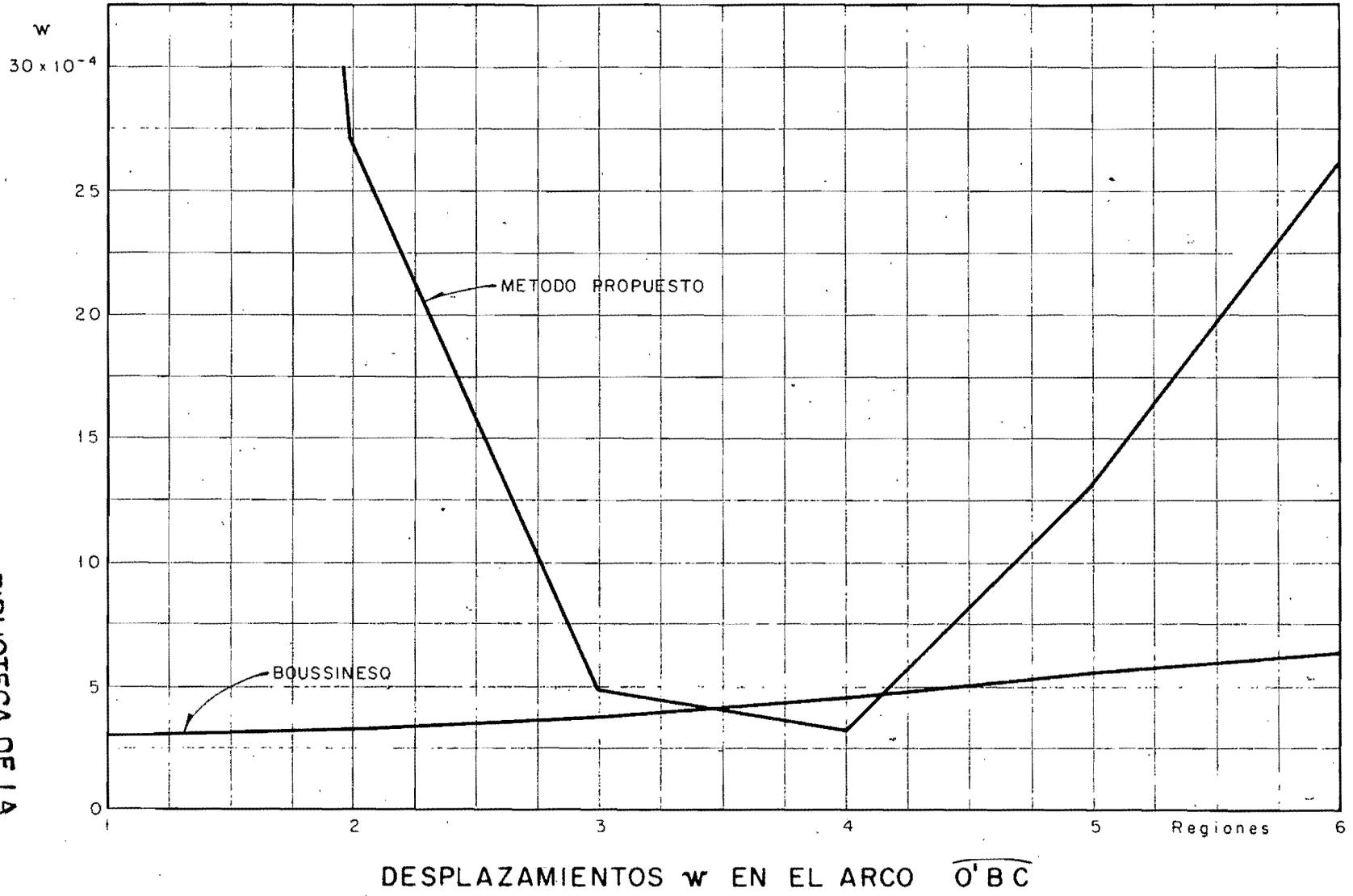
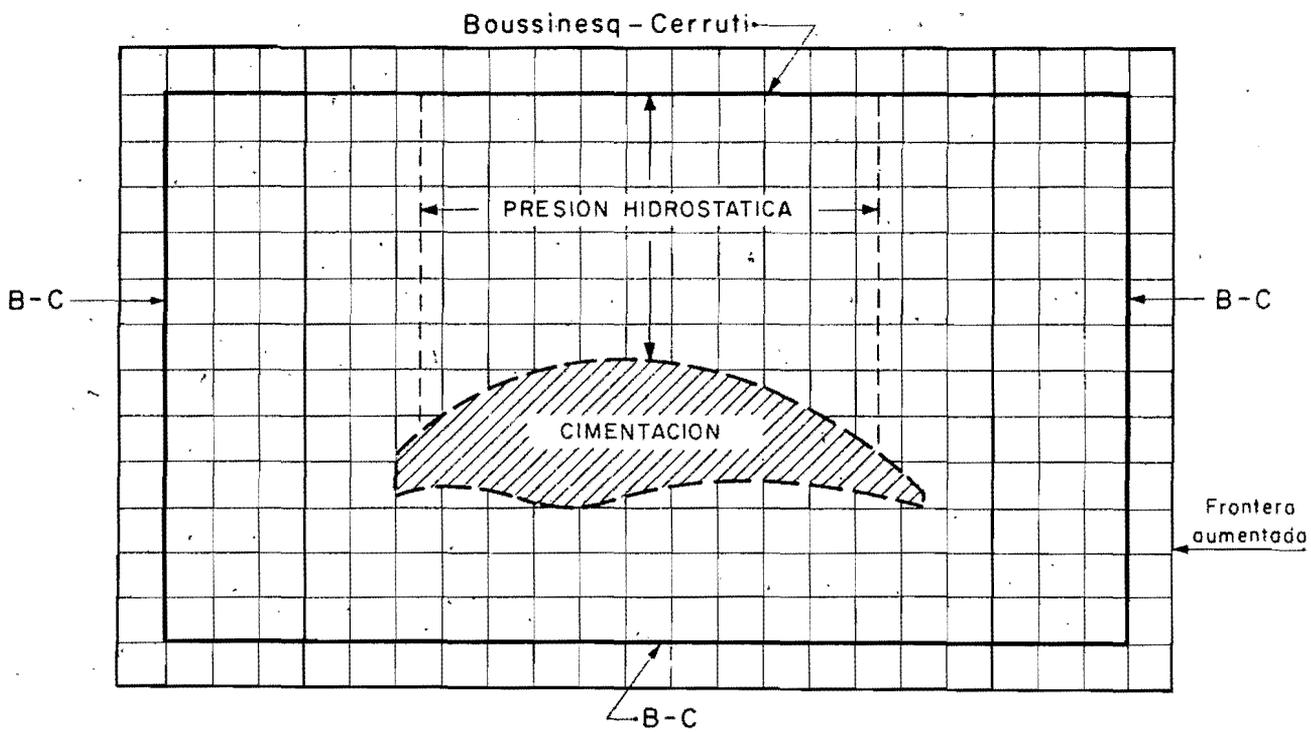
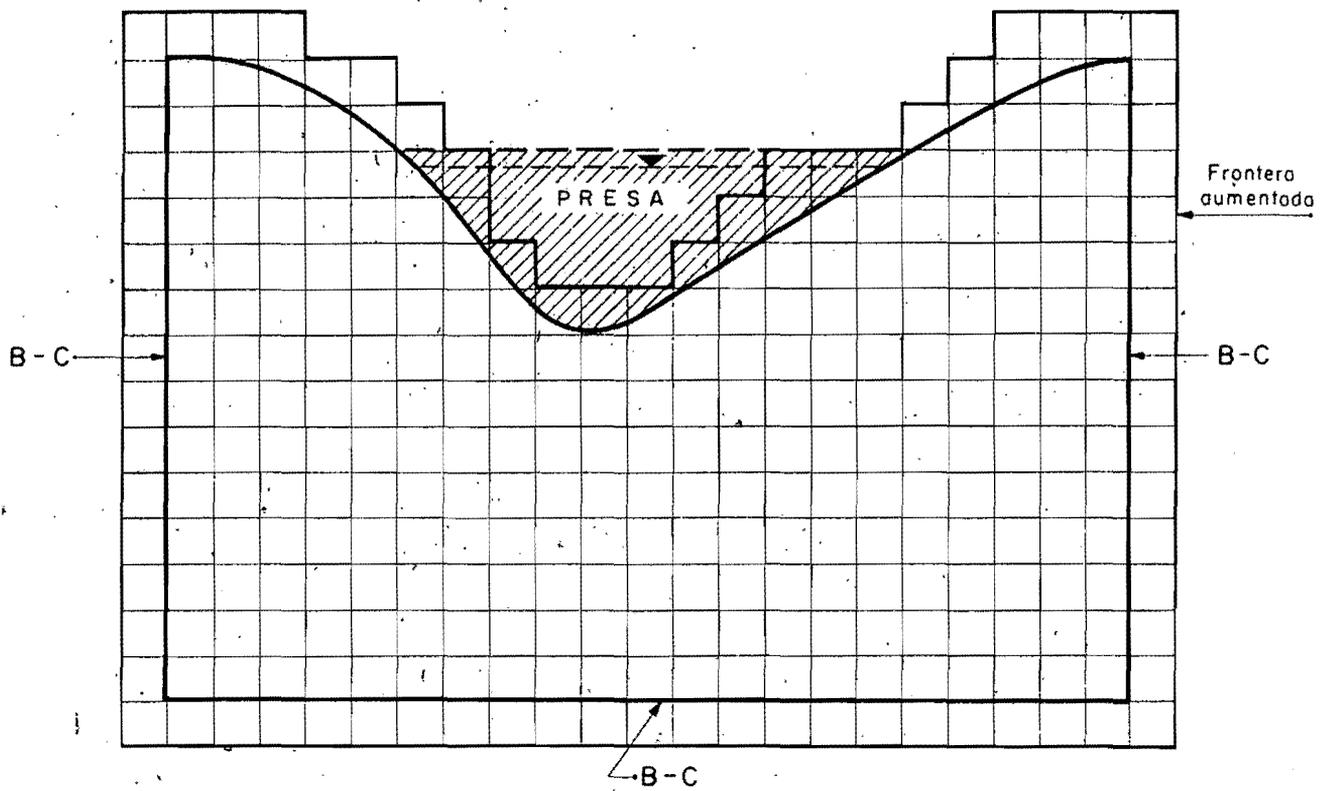


FIG. 11



MALLA TRIDIMENSIONAL PARA EL PLANTEAMIENTO  
CON DIFERENCIAS FINITAS

FIG. 12