1003

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

VIBRACION LIBRE EN CASCARONES CILINDRICOS RIGIDIZADOS

T E S I S

POR

LEON JAIRO ARANGO BEDOYA

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(E S T R U C T U R A S)

CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D.F. 1988

VIBRACION LIBRE EN CASCARONES CILINDRICOS RIGIDIZADOS

TESIS DE MAESTRIA EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)

LEON JAIRO ARANGO BEDOYA

CIUDAD DE MEXICO, MAYO DE 1988

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

Profr. JOSE LUIS URRUTIA GALICIA
P r e s e n t e

Comunico a usted que a propuesta del COORDINADOR DE LA SECCION DE ESTRUCTURAS ha sido designado como director de tesis del alumno(a) LEON JAIRO ARANGO BEDOYA para obtener el grado de M EN I EN ESTRUCTURAS.

Mucho he de agradecerle su comunicación, por escrito, de la aceptación a esta designación y el nombre de la tesis a desarrollar.

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 7 de diciembre de 1987
EL JEFE DE LA DIVISION

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

E.5.1

Ciudad universitaria, 25 de Abril de 1988.

DR. FEDERICO KUHLMANN RODRIGUEZ.
P r e s e n t e

Por este conducto me permito someter a su consideración el tema "*Vibración Libre en Cascarones Cilíndricos Rigidizados*" para que el alumno LEON JAIRO ARANGO BEDOYA lo desarrolle como tesis para obtener el grado de M EN I EN ESTRUCTURAS.

Sin más por el momento, agradezco la atención que se brinde a la presente.

Atentamente,

José Luis Urrutia G.

DR. J.L. URRUTIA GALICIA.
Coordinación de Mecánica Aplicada.
Instituto de Ingeniería.

VIBRACION LIBRE EN CASCARONES CILINDRICOS RIGIDIZADOS

Créditos asignados a la tesis: 11

APROBADO POR EL JURADO:

Presidente: ING. NEFTALI RODRIGUEZ CUEVAS

Vocal: DRA. SONIA E. RUIZ GOMEZ

Secretario: DR. JOSE LUIS URRUTIA GALICIA

Suplente: DR. ROBERTO GOMEZ MARTINEZ

Suplente: DR. GONZALO ALDUNCIN GONZALEZ

Dedico este trabajo con mucho cariño y agradecimiento :

a mis padres,

Sra. LUZ BEDOYA DE A.

Sr. F. JAVIER ARANGO.

Que con su paciencia, cariño y sacrificio obtuve el apoyo necesario para lograr con éxito mis estudios en el extrangero y así alcanzar una de las metas más anheladas de mi vida.

a mis hermanos,

quienes indirectamente y en todo momento representan la fuerza que me anima a cristalizar todo lo que emprendo.

Quiero presentar un reconocimiento muy especial al DR. JOSE LUIS URRUTIA GALICIA por la eficiente asesoría y acertada dirección en la elaboración de este trabajo. Así mismo le expreso el más profundo agradecimiento por la confianza que siempre depositó en mí, lo que me anima a continuar la línea de investigaciones que nos hemos propuesto.

Agradezco a cada uno de los mienbros del jurado por sus comentarios y sugerencias a esta tesis.

Quiero hacer llegar un reconocimiento al INSTITUTO DE INGENIERIA y a todas las personas que laboran en este prestigioso y reconocido centro de investigación de México, por facilitarme los medios necesarios para lograr con éxito este trabajo.

INDICE

NOMENCLATURA

A	Punto arbitrario en la pared de un cascarón cilíndrico circular.
E	Módulo de Young.
l, r	Longitud y radio de un cilindro, ver figura 3.1.
m, n	Número de onda en las direcciones longitudinal y circunferencial de un cascarón cilíndrico.
t	Espesor de un cascarón cilíndrico circular sin atiesadores. variable del tiempo.
z	Distancia de un punto arbitrario de la pared de un cascarón a la superficie media del mismo, $z<t/2$.
N_x, N_ϕ	Fuerzas normales, longitudinal y circunferencial, por unidad de longitud.
$N_{x\phi}, N_{\phi x}$, Q_x, Q_ϕ	Fuerzas cortantes, circunferencial, longitudinal y radiales, por unidad de longitud.
$M_{x\phi}, M_\phi$	Momentos flexionantes, en la dirección longitudinal, por unidad de longitud.
$M_{\phi x}, M_x$	momentos flexionantes, en dirección circunferencial, por unidad de longitud.
P_x, P_ϕ, P_r	Fuerzas externas, por unidad de área.
r/t, l/r	Relaciones radio-espesor y longitud-radio
$\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$	Desplazamiento de un punto sobre la superficie media de un cascarón cilíndrico circular.
$\mathcal{U}_A$	Desplazamiento de A en el sentido del incremento de x
$\mathcal{V}_A$	Desplazamiento de A a lo largo de una circunferencia de radio $(r+z)$, en el sentido del incremento de s_ϕ.
$\mathcal{W}_A$	Desplazamiento radial positivo de A, positivo hacia afuera del cascarón cilíndrico, como se ve en la figura 3.2.a.
x, S_ϕ, r	Ejes coordenados del sistema de referencia.
ρ , ν	Densidad del material del cascarón, en $lb*seg^2/in^4$, y Módulo de Poisson, respectivamente.
ω_{mn}	Frecuencia natural del modo (m,n).
in	Pulgadas.

INDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Página

Página

TABLAS

CAPITULO I

INTRODUCCION

Existen estructuras de cascarones cilíndricos sometidas a la acción de cargas dinámicas que originan problemas de vibración a una frecuencia determinada o dentro de un intervalo relativamente amplio, conteniendo una multitud de frecuencias. Para lograr frecuencias suficientemente altas o alejadas de una frecuencia excitadora, y evitar problemas de resonancia, que dañarían seriamente las instalaciones, es necesario reforzar estas estructuras con atiesadores longitudinales y circunferenciales.

Debido a que la literatura técnica existente es muy extensa, y algunas investigaciones son discutibles, se logró establecer un método de cálculo, basado en el análisis de W.FLÜGGE[1] para cascarones cilíndricos circulares, con el cual se podrá diseñar y distribuir anillos y atiesadores para aumentar la frecuencia fundamental y disminuir la densidad[2] de las frecuencias naturales en tuberías de cualquier material, longitud, radio y espesor de pared.

En 1987, la referencia 2 presenta un análisis paramétrico de frecuencias naturales mínimas para cilindros isotrópicos y ortotrópicos con el modelo matemático desarrollado por DONNELL[3]. En esta tesis se presenta un nuevo análisis con el modelo de W.FLÜGGE[1], que conducirá a un análisis más aproximado de las frecuencias naturales mínimas, asociado al problema de vibración libre de cáscarones cilíndricos circulares. Se elaboraron nomogramas muy prácticos para diseño y fórmulas fáciles de programar para el cálculo de frecuencias naturales de cilindros de cualquier longitud l, radio r, y espesor t, en las que se observa claramente las mejores formas de elevar frecuencias naturales y mejorar el comportamiento dinámico de estas estructuras.

Finalmente, se dan las observaciones y recomendaciones especiales que se sugieren para una adecuada aplicación de los resultados del presente análisis.

CAPITULO II

REVISION BIBLIOGRAFICA

Se han publicado muchos artículos de investigación en los que se presenta el estudio de vibraciones libres a fin de diseñar estructuras con un comportamiento dinámico adecuado.

El estudio de vibraciones libres y frecuencias naturales de estructuras continuas como placas, cilindros o conos es en realidad complejo, lo que obliga a investigadores a hacer simplificaciones en los análisis teóricos y a los diseñadores a utilizar tablas o fórmulas aproximadas, obteniendo así resultados que predicen en forma aproximada el comportamiento real de la estructura, por lo que muchas de estas teorías presentan serias restricciones en su aplicación, como se verá más adelante.

BARON y BLEICH[4] presentaron en 1954 una serie de tablas para un cálculo rápido de frecuencias y modos de vibrar en cascarones cilíndricos delgados, infinitamente largos, y simplemente apoyados.

En algunos desarrollos téoricos, los cascarones son tratados como membranas sin tener en cuenta rigideces flexionantes. Los efectos de flexión son introducidos subsecuentemente como correcciones adicionales. El desarrollo de las ecuaciones está basado en las expresiones energéticas para cascarones cilíndricos, fundamentadas en el hecho de que la energía almacenada puede ser expresada como una función de los desplazamientos $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, así:

$$P = P_1 + P_2 = T$$

En donde

P = *Energía almacenada en el cascarón.*

P_1 = *Energía de deformación de la membrana.*

P_2 = *Energía de deformación por flexión.*

T = *Energía cinética.*

Las tablas son válidas para cascarones con $r \leq l \leq 10r$, $0 \leq n \leq 6$, $m=1$, $r/t > 30$ y $1 \leq l/r \leq 10$. siendo l la longitud de la semionda longitudinal. Como se observa, el intervalo de aplicación de las tablas es muy limitado y en ningún caso presentan un análisis de frecuencias naturales mínimas correspondientes a un número n dado, ni tampoco se formulan expresiones que indiquen una ley de variación definida de los resultados obtenidos, lo que dificulta la comparación de las frecuencias de este estudio con las obtenidas con el modelo de FLÜGGE, desarrollado en el presente trabajo. Para demostrar estas discrepancias se presenta la tabla 2.1 ilustrando algunos valores de frecuencias, en c.p.s., de ambas teorías.

TABLA 2.1

FRECUENCIAS NATURALES SEGUN BARON-BLEICH Y FLUGGE

n	l/r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	ω_B	77	52	34	23	17	13	10	8	6	5
	ω_F	190	85	46	29	20	14	10	8	6	5
2	ω_B	59	30	17	10	7	5	4	3	2	2
	ω_F	108	37	18	11	7	5	4	3	2	2

ω_B es la frecuencia de **BARON-BLEICH** en C.P.S.
ω_F es la frecuencia de **FLUGGE** en C.P.S.

V.I. WEINGARTEN[5] presenta datos de dos experimentos con cascarones cónicos de igual longitud y radio, variando sólo el espesor, para diferentes condiciones de apoyo en sus extremos. Paralelamente, realizó una investigación teórica basada en las ecuaciones lineales modificadas de DONNELL, en la que supuso que influía mayormente el efecto de la inercia radial para el cálculo de frecuencias naturales. Los demás efectos de las inercias, longitudinal y circunferencial, se supusieron despreciables para $n>3$ e independientes de m para $n>14$. Con respecto a ese trabajo, los valores de frecuencias calculadas a partir del análisis teórico fueron menores a los obtenidos experimentalmente, debido a un cierto grado de empotramiento en los apoyos de los bordes de los especímenes ensayados, pero para $n\leq4$ los experimentos siguieron el comportamiento teórico de manera aceptable.

LEISSA e IYER[6] estudiaron en 1981 la respuesta de un cascarón cilíndrico circular sometido a una presión radial sinusoidal considerando además un amortiguamiento histerético. En este análisis se consideró al módulo de Young como un número complejo $E^* = E(1+i\eta)$ (para un material isotrópico), en donde η es el factor de pérdidas.

En el desarrollo teórico, LEISSA e IYER utilizaron, para el equilibrio dinámico, ecuaciones diferenciales en función de los desplazamientos y de las masas inerciales en tres direcciones espaciales. Haciendo uso de operadores diferenciales, se llegó a un sistema desacoplado de tres ecuaciones para $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, que equilibraron las presiones excitadoras en las direcciones axial, circunferencial y radial, respectivamente. Con base en este sistema se elaboró un programa de computadora para calcular los desplazamientos máximos por el método de aproximaciones sucesivas o de prueba y error. Se estudiaron tres tipos de cilindros en acero con módulo de Poisson ν=0.25, así: El primero con valores de los parámetros $(l/r)/m=2$ y $r/t=20$, un segundo cascarón con $(l/r)/m$ y r/t iguales a 20 y un tercero con $(l/r)/m=2$ y $r/t=500$, con los que, para cada modo (m,n), se obtuvieron tres parámetros adimensionales de frecuencias Ω (ver referencia 6), en donde la menor está asociada a la dirección transversal, y la máxima amplitud a la dirección de aplicación de la carga. Se continuó el estudio variando n de 0 a 10 y η de 0.001 a 0.1, con los que se determinaron las amplitudes radiales máximas para cada valor de n y η. En las tablas 3, 4 y 6 de la referencia 6, se presentan los resultados para los tres cilindros analizados, con los cuales se ve que para n=1, n=3 y n=8 se dan las mayores amplitudes radiales, asociadas a las frecuencias mínimas en cada caso. Este hecho coincide con los resultados proporcionados por las formulaciones alcanzadas en esta tesis, en las que al sustituirse los parámetros de estos cilindros en la ecuación (3.23), se llega a los mismos valores enteros de n obtenidos en esa publicación.

Ese artículo resulta ser una de las investigaciones más recientes encontradas durante la realización del presente estudio. Su planteamiento teórico es distinto al desarrolado aquí. Sin embargo, a pesar de que su principal objetivo era encontrar los desplazamientos máximos en vibraciones forzadas de cilindros, el número de cascarones analizados fué muy reducido y no se pudo llegar a fórmulas de análisis de vibración forzada ni de vibración libre.

En la referencia 2 se utilizó la ecuación desarrollada por W.SOEDEL[3] para cilindros isotrópicos y ortotrópicos, simplemente apoyados, basada en las ecuaciones de DONNELL-MUSHTARI-VLASOV. Esta ecuación resultó ser una de las expresiones más simples que se encuentran en la literatura para cascarones cilíndricos circulares, y sin embargo, resultó ser aproximada en un cierto intervalo, como se verá más adelante. Dicha ecuación se reescribe de acuerdo con la fórmula 2.1[3].

$$\omega_{mn}^{2} = \frac{E}{\rho r^{2}}\left\{ \frac{\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^{4}}{\left[\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^{2} + n^{2}\right]^{2}} + \frac{\left(\frac{t}{r}\right)^{2}}{12(1-\nu^{2})}\left[\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^{2} + n^{2}\right]^{2} \right\} \qquad (2.1)$$

Se presentó un análisis paramétrico de frecuencias para cilindros isotrópicos en el que comprobó que cualquier fórmula para las frecuencias naturales ω_{mn} de un cascarón cilíndrico ortotrópico o isotrópico conduce al cálculo de una cantidad invariante $(\omega_{mn} r)^{2}$ para cualquier familia de cilindros con idénticas relaciones (l/r) y (r/t), que mide, en cierto modo, la validez, precisión e intervalo de aplicabilidad de la ecuación (2.1). En la tabla 2.2 se comparan las frecuencias naturales, según SOEDEL y FLÜGGE(objeto del presente estudio), de dos grupos diferentes de cilindros isotrópicos con idénticas relaciones l/r y r/t. Se comprueba nuevamente que, efectivamente, la constante $(\omega_{mn} r)^{2}$ queda fija e invariante para valores fijos de l/r y r/t. En la tabla 2.3 se resumen y comparan los resultados de un análisis paramétrico de cilindros con $5 \leq l/r \leq 40$ y $25 \leq r/t \leq 400$, usando las teorías de SOEDEL[3] y FLÜGGE[1]. En la figura 3.9 se graficaron los resultados de la tabla 2.3 en escala doble-logarítmica, y se pudo observar que la fórmula de frecuencias de SOEDEL, basada en las ecuaciones de DONNELL-MUSHTARY-VLASOV, no convergen o lo hacen aleatoriamente para $l/r \geq 10$. Se comprobó que el valor mínimo del parámetro $(\omega_{mn} r)^{2}$ ocurre para m=1 y para un valor n determinado.

La figura 3.10 muestra el paralelismo de las rectas para $m=1$ y diferentes valores de r/t, notándose que la separación entre éstas sigue un comportamiento logarítmico. Los perfiles de las rectas para $m=2,3,4,...,$ son idénticos a los de $m=1$, como se demostró• en la refrencia 2, sólo que desplazados paralelamente hacia arriba sobre el eje de la onda longitudinal m, para un valor l/r dado, tal como se muestra en la figura 3.11. En esta figura se nota la ausencia del número de onda circunferencial n, lo que será objeto de estudio en los siguientes capítulos. Se observa, además, que este nomograma fué construido para estructuras cilíndricas de acero, por lo que se tratarán de elaborar fórmulas válidas para otros materiales.

TABLA 2.2

PARAMETRO DE FRECUENCIA FUNDAMENTAL

onda longitudinal m=1

cascarón	*l* *	*r* *	*t* *	*l/r*	*r/t*	frecuencia ω_{mn} SOEDEL	frecuencia ω_{mn} FLUGGE
						**n=4	**n=4
1	7.874	3.937	0.078	2	50	1446	1391.22
2	15.704	7.874	0.016	2	50	723	695.61
3	400.000	200.000	4.000	2	50	28	27.39
			invariante $(\omega_{mn} r)^2$			32.0E6	30.0E6
						**n=7	**n=7
4	400.00	200.00	0.5	2	400	9.89	9.68
5	800.00	400.00	1.0	2	400	4.95	4.84
6	1600.00	800.00	2.0	2	400	2.47	2.42
			invariante $(\omega_{mn} r)^2$			3.91E6	3.75E6

* Las dimensiones se dan en pulgadas.

** El valor de n corresponde a la frecuencia natural mínima.

La frecuencia ω_{mn} se da en C.P.S.

El invariante $(\omega_{mn} r)^2$ en (ciclos*pulgadas/segundo)^2

TABLA 2.3

ANALISIS PARAMETRICO

Onda longitudinal m=1

l *	r *	t *	l/r	r/t	ω_{mn} SOEDEL	ω_{mn} FLUGGE	$(\omega_{mn} r)^2$*E+6 SOEDEL	$(\omega_{mn} r)^2$*E+6 FLUGGE
400	200	8.0	2	25	42.0	38.73	70.16	60.0000
1000	200	8.0	5	25	17.0	15.49	11.56	9.6000
400	40	1.6	10	25	44.0	38.37	3.13	2.4000
1000	25	1.0	40	25	17.1	15.49	0.19	0.1500
400	200	4.0	2	50	28.0	27.39	32.41	30.0000
1000	200	4.0	5	50	11.0	10.95	5.20	4.8000
400	40	0.8	10	50	28.0	27.39	1.22	1.2000
600	40	0.8	15	50	21.0	18.26	0.73	0.5300
800	40	0.8	20	50	19.7	13.69	0.62	0.3000
1600	40	0.8	40	50	6.9	6.35	0.08	0.0750
400	200	2.0	2	100	20.0	19.36	15.78	15.0000
2000	200	2.0	10	100	4.3	3.89	0.74	0.6000
3000	200	2.0	15	100	2.6	2.58	0.27	0.2700
4000	200	2.0	20	100	2.2	1.94	0.19	0.1500
6000	200	2.0	30	100	1.8	1.29	0.13	0.0670
8000	200	2.0	40	100	1.1	0.96	0.05	0.0370
400	200	1.0	2	200	14.0	13.69	7.79	7.5000
1000	200	1.0	5	200	5.5	5.48	1.22	1.2000
2000	200	1.0	10	200	2.8	2.74	0.31	0.3000
3000	200	1.0	15	200	2.0	1.83	0.16	0.1300
4000	200	1.0	20	200	1.4	1.37	0.08	0.0750
6000	200	1.0	30	200	1.1	0.91	0.04	0.0330
8000	200	1.0	40	200	2.2	0.69	0.19	0.0190
600	300	1.0	2	300	7.6	7.45	5.17	5.0000
1500	300	1.0	5	300	3.1	2.98	0.86	0.8000
3000	300	1.0	10	300	1.5	1.49	0.20	0.2000
4500	300	1.0	15	300	1.1	0.99	0.11	0.0900
6000	300	1.0	20	300	1.0	0.74	0.09	0.0500
9000	300	1.0	30	300	1.1	0.50	0.12	0.0222
12000	300	1.0	40	300	0.5	0.37	0.02	0.0125
800	400	1.0	2	400	5.0	4.84	3.91	3.7500
2000	400	1.0	5	400	2.0	1.94	0.62	0.6000
4000	400	1.0	10	400	1.0	0.97	0.17	0.1500
6000	400	1.0	15	400	1.5	0.64	0.36	0.0670
8000	400	1.0	20	400	1.5	0.49	0.36	0.0380
12000	400	1.0	30	400	1.5	0.32	0.36	0.0170
16000	400	1.0	40	400	0.5	0.24	0.05	0.0094

La frecuencia ω_{mn} en C.P.S.

* Las dimensiones se dan en pulgadas

El invariante $(\omega_{mn} r)^2$ en $(C.P.S.*in)^2$

CAPITULO III

TEORIA GENERAL PARA UN CASCARON CILINDRICO CIRCULAR

Un cilindro circular es generado por una línea recta que sigue una trayectoria circular paralela a la dirección original. Estas líneas se denominan generatrices y mantienen una misma dirección. Todo plano que sea normal a las generatrices intersecta al cilindro con una curva circular denominada perfil, Ver figura 3.1.

3.1. *ANALISIS DE FLEXION PARA UN CASCARON CILINDRICO SIMPLEMENTE APOYADO*

3.1.1. EQUILIBRIO ESTATICO

Por simplicidad de la presentación, se empezará con el planteamiento de la ecuación de equilibrio para el caso estático. Posteriormente, mediante pequeños cambios, se pasará a las ecuaciones dinámicas.

Se considera un elemento diferencial de un cilindro circular formado por dos caras adyacentes ϕ y $d\phi$, y por dos perfiles adyacentes x y $x+dx$, (figura 3.2), en las que se indican la direción y sentido de las fuerzas y momentos, por unidad de longitud, al igual que las fuerzas de superficie, por unidad de área, mismas que satisfacen seis condicones de equilibrio cuyas ecuaciones se establecen a continuación, y en las que las derivadas, con respecto a las direcciones coordenadas x/r y S_ϕ, estarán representadas, respectivamente, por:

$$\frac{r\partial()}{\partial x} = ()' \qquad\qquad \frac{\partial()}{\partial\phi} = (\dot{\ })$$

El equilibrio de fuerzas en la dirección longitudinal x se da según la figura 3.2.a, y es:

$$\left[N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx-N_x\right]ds_\phi + \left[N_{\phi x}+\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial s_\phi}ds_\phi-N_{\phi x}\right]dx + [P_x]\, dx\,ds_\phi = 0$$

si $\quad ds_\phi=r\,d\phi \quad$ y $\quad \partial s_\phi=r\,\partial_\phi \quad$ entonces

$$\left[r\frac{\partial N_x}{\partial x}\right]dx\,d_\phi + \left[\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial\phi}\right]dx\,d_\phi + [rP_x]\, dx\,d_\phi=0 \qquad \text{por lo tanto}$$

$$N_x' + \dot{N}_{\phi x} + rP_x = 0 \qquad (3.1.a)$$

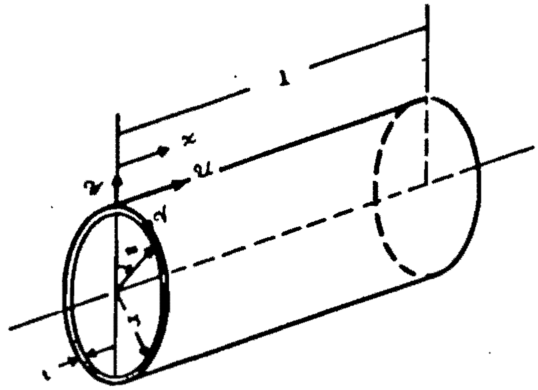


Fig.3.1 Cascarón cilíndrico circular y sistema coordenado.

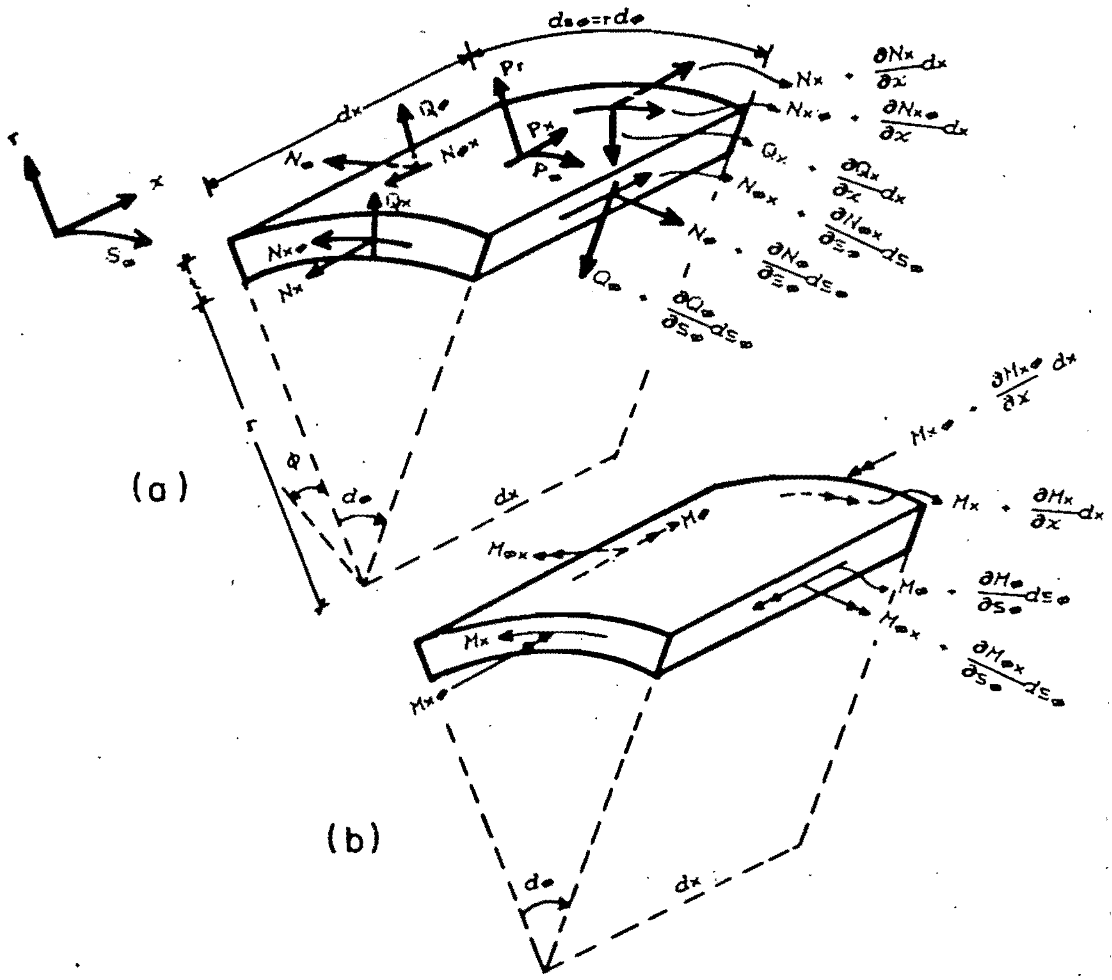


Fig.3.2 Elemento diferencial de un cascarón cilíndrico circular.

Para el equilibrio en la dirección circunferencial S_ϕ, figura 3.2.a, se dan componentes adicionales de la fuerza Q_ϕ, cuya dirección y sentido se representan en la figura 3.3.a.

$$\left[N_\phi+\frac{\partial N_\phi}{\partial s_\phi}ds_\phi-N_\phi\right]dx + \left[N_{x\phi}+\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x}dx-N_{x\phi}\right]ds_\phi - \left[Q_\phi+\frac{\partial Q_\phi}{\partial s_\phi}ds_\phi+Q_\phi\right]dx\frac{d\phi}{2}$$

$$+[P_\phi]\,dx\,ds_\phi=0$$

Efectuando operaciones algebraicas y simplificaciones se llega a:

$$\dot{N_\phi} + N'_{x\phi} - Q_\phi + rP_\phi = 0 \qquad (3.1.b)$$

El equilibrio en la dirección radial r, se da según se ilustra en las figuras 3.2.a y 3.3.b.

$$\left[Q_\phi-Q_\phi-\frac{\partial Q_\phi}{\partial s_\phi}ds_\phi\right]\cos\frac{d\phi}{2}dx + \left[Q_x-Q_x-\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right]ds_\phi + \left[-N_\phi-N_\phi-\frac{\partial N_\phi}{\partial s_\phi}\right]\frac{d\phi}{2}dx$$

$$+ [P_r]\,ds_\phi dx=0$$

Por lo tanto

$$\dot{Q_\phi} + Q'_x + N_\phi - rP_r = 0 \qquad (3.1.c)$$

Equilibrio de momentos en la dirección longitudinal x. Figuras 3.2.b y 3.3.c.

$$\left[M_\phi-M_\phi-\frac{\partial M_\phi}{\partial s_\phi}ds_\phi\right]dx + \left[M_{x\phi}-M_{x\phi}-\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x}dx\right]ds_\phi + Q_\phi dx\,ds_\phi = 0$$

$$\dot{M_\phi} + M'_{x\phi} - rQ_\phi = 0 \qquad (3.1.d)$$

Equilibrio de momentos en la dirección circunferencial S_ϕ.

$$\left[M_x+\frac{\partial M_x}{\partial x}dx-M_x\right]ds_\phi + \left[M_{\phi x}+\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial s_\phi}ds_\phi-M_{\phi x}\right]dx - Q_x ds_\phi dx = 0$$

$$M'_x + \dot{M}_{\phi x} - rQ_x = 0 \qquad (3.1.e)$$

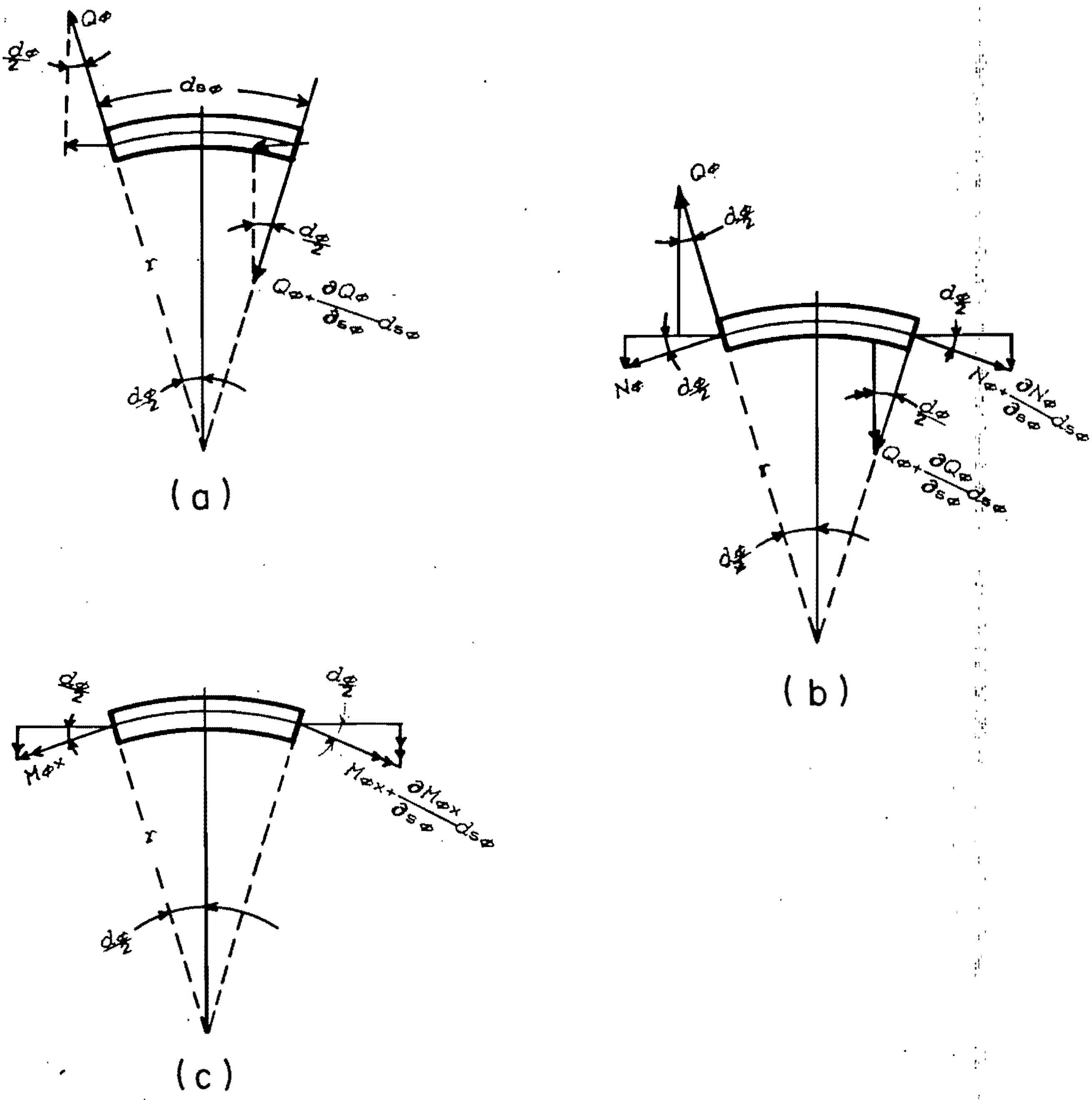


Fig.3.3 Componentes de fuerzas de la figura 3.2 .

Para el equilibrio de momentos en la dirección radial r, ver figuras 3.2.a , 3.2.b y 3.3.c.

$$\left[-N_{x\phi}\right]ds_{\phi}dx + \left[N_{\phi x}\right]dx\,ds_{\phi} + \left[-M_{\phi x}-M_{\phi x}-\frac{\partial M_{\phi x}}{\partial s_{\phi}}ds_{\phi}\right]dx\,d\frac{\phi}{2} = 0$$

Simplificando

$$rN_{x\phi} - rN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \qquad (3.1.f)$$

Agrupando las seis ecuaciones de equilibrio se tiene que:

$$N_x' + \dot{N}_{\phi x} + rP_x = 0 \qquad (3.1.a)$$

$$\dot{N}_{\phi} + N_{x\phi}' - Q_{\phi} + rP_{\phi} = 0 \qquad (3.1.b)$$

$$\dot{Q}_{\phi} + Q_x' + N_{\phi} - rP_r = 0 \qquad (3.1.c)$$

$$\dot{M}_{\phi} + M_{x\phi}' - rQ_{\phi} = 0 \qquad (3.1.d)$$

$$M_x' + \dot{M}_{\phi x} - rQ_x = 0 \qquad (3.1.e)$$

$$rN_{x\phi} - rN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \qquad (3.1.f)$$

Del sistema de ecuaciones anterior se pueden eliminar las fuerzas de corte transversal Q_x y Q_{ϕ}, sustituyendo las ecuaciones (3.1.d) y (3.1.e) en (3.1.b) y (3.1.c). De esta forma se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones de equilibrio en función de las fuerzas normales, longitudinales y circunferenciales,de las fuerzas de corte y de momentos, al igual que de las fuerzas superficiales.

$$N_x' + \dot{N}_{\phi x} + rP_x = 0 \qquad (3.2.a)$$

$$r\dot{N}_{\phi} + rN_{x\phi}' - \dot{M}_{\phi} - M_{x\phi}' + P_{\phi}r^2 = 0 \qquad (3.2.b)$$

$$\ddot{M}_{\phi} + \dot{M}_{x\phi}' + \dot{M}_{\phi x}' + M_x'' + rN_{\phi} - P_r r^2 = 0 \qquad (3.2.c)$$

$$rN_{x\phi} - rN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \qquad (3.2.d)$$

Puesto que este grupo de cuatro ecuaciones contiene aún ocho esfuerzos resultantes desconocidos, el problema es estáticamente indetermninado, por lo que es necesario estudiar el cascarón deformado.

3.1.2 RELACIONES CINEMATICAS EN UN CASCARON CILINDRICO CIRCULAR DEFORMADO

La deformación de un cilindro se describe por las tres componentes del desplazamiento ($\mathcal{U}_A$, $\mathcal{V}_A$, $\mathcal{W}_A$) de un punto arbitrario A a una distancia z , sobre la normal a un punto A_o en la superficie media y con las mismas coordenadas x, S_ϕ de A_o. $\mathcal{U}_A, \mathcal{V}_A, \mathcal{W}_A$ son funciones de x, s_ϕ y del tiempo t.

Se trata de establecer las relaciones cinemáticas entre los desplazamientos $\mathcal{U}_A$, $\mathcal{V}_A$, y $\mathcal{W}_A$ del punto A y los correspondientes valores $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, y $\mathcal{W}$ del punto A_o. Tales relaciones dependen del hecho de suponer[1]:

1) todos los puntos sobre una normal a la superficie media del cascarón permanecen en ella antes y después de la deformación del cilindro,por lo que se desprecia toda deformación debida a Q_x y Q_ϕ.

2) La distancia z de un punto cualquiera a la superficie media, permanece constante antes y después de la deformación de la pared del cilindro, por lo que el esfuerzo σ_z es despreciable comparado con los esfuerzos normales σ_x y σ_ϕ. En este caso las deformaciones y los esfuerzos en esta dirección carecen de significado siempre y cuando el cilindro sea delgado.

3) Todos los desplazamientos son muy pequeños, comparados con el radio r de curvatura de la superficie media, por lo que su primera derivada es despreciable comparada con la unidad.

De la figura 3.4.a se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} = \frac{\mathcal{W}'}{r}$$

$$\mathcal{U}_A = \mathcal{U} - z\frac{\mathcal{W}'}{r} \qquad (3.3.a)$$

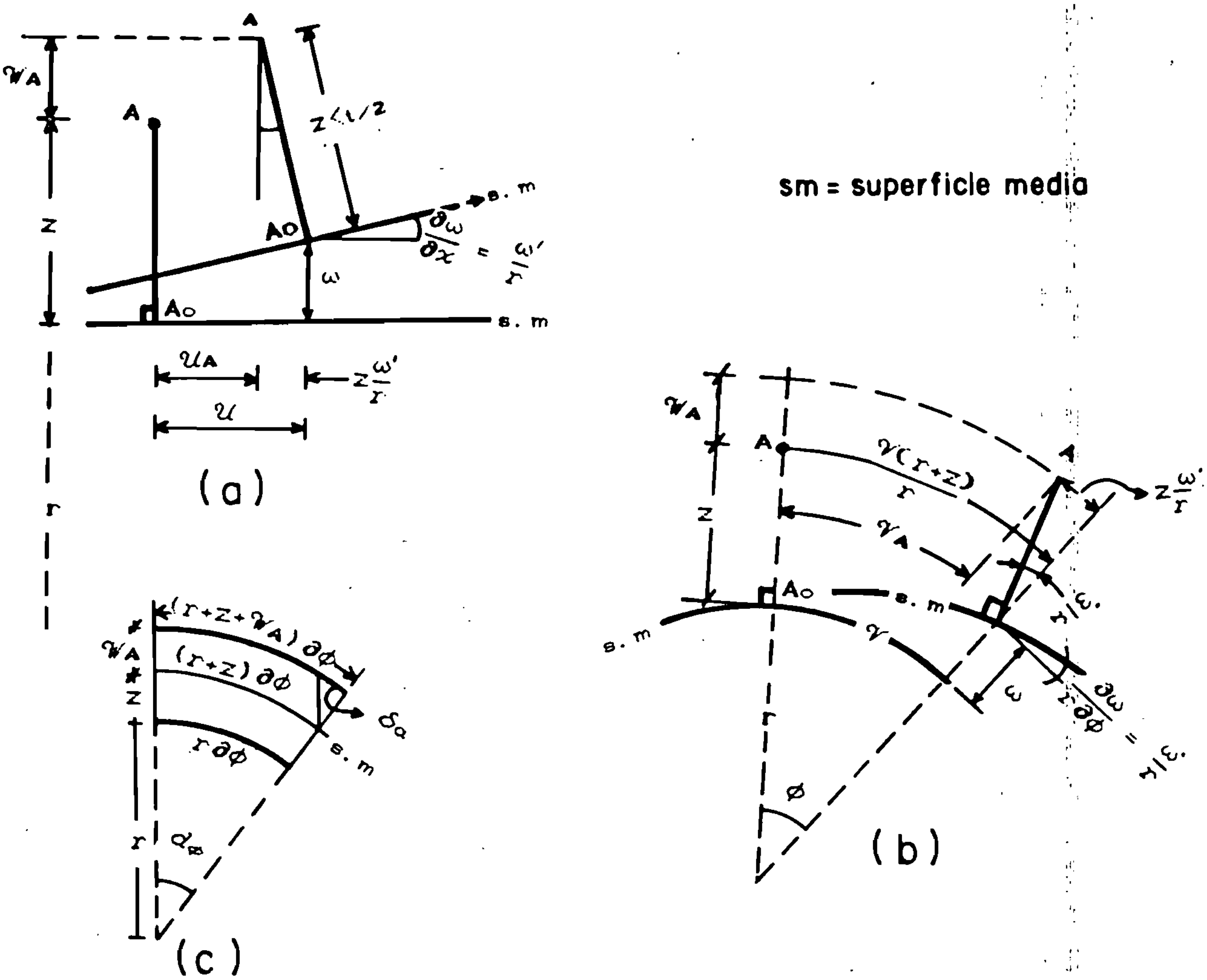


Fig.3.4 Desplazamientos de los puntos A y A_o.

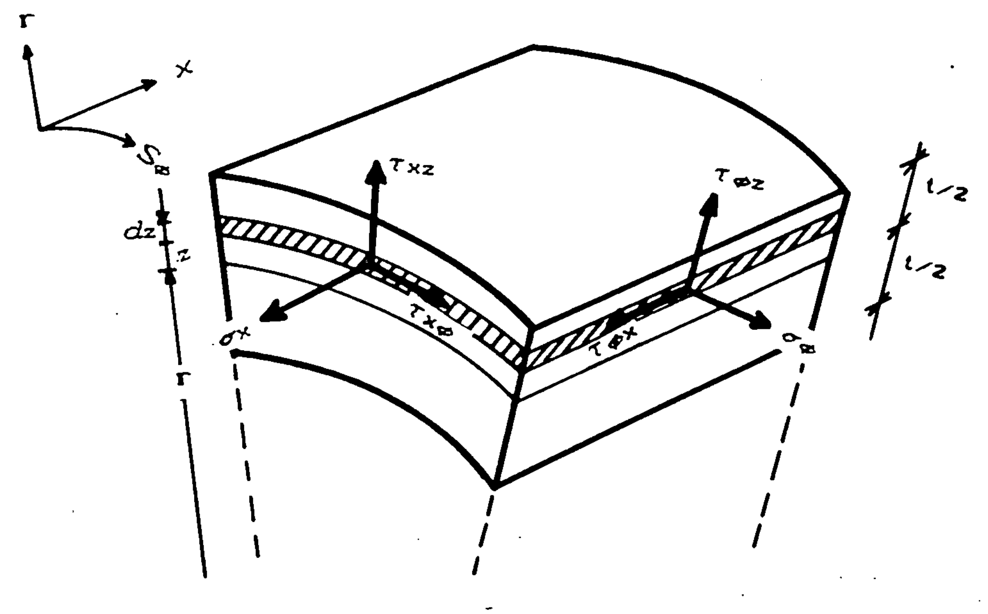


Fig.3.5 Esfuerzo en un elemento diferencial de un cascarón cilíndrico circular.

De la figura 3.4.b

$$\mathcal{V}_A = \mathcal{V}\frac{(r+z)}{r} - z\frac{\mathcal{W}^{\cdot}}{r} \qquad (3.3.b)$$

$$\mathcal{W}_A = \omega \qquad (3.3.c)$$

El siguiente paso es encontrar las deformaciones unitarias $\epsilon_x, \epsilon_\phi$ y $\gamma_{x\phi}$ en el punto A, fuera de la superficie media.

$$\epsilon_{x(z)} = \frac{\partial \mathcal{U}_A}{\partial x} = \frac{\mathcal{U}_A'}{r} \qquad (3.4.a)$$

La deformación unitaria del punto A, en la dirección circunferencial, se establece según la figura 3.3.c y en dos pasos, a saber:

a) Al incrementarse el radio r a $(r+z)$, su arco será:

$$\partial s_{\phi(z)} = (r+z)\,\partial\phi$$

Por lo tanto

$$\epsilon_{\phi 1} = \frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial s_{\phi(z)}} = \frac{\partial \mathcal{V}_A}{(r+z)\,\partial\phi} = \frac{\dot{\mathcal{V}}_A}{r+z}$$

b) Al aumentar el radio de curvatura a $(r+z+\mathcal{W})$ y teniendo presente la hipótesis 1, el desplazamiento radial es paralelo en todos sus puntos, fuera de la superficie media, tal como se ilustra en la figura 3.4.c.

$$\delta a = (r+z+\mathcal{W}_A)\,\partial\phi - (r+z)\,\partial\phi = \mathcal{W}_A\,\partial\phi$$

$$\epsilon_{\phi 2} = \frac{\delta a}{\partial s_{\phi(z)}} = \frac{\mathcal{W}_A\,\partial\phi}{(r+z)\,\partial\phi} = \frac{\mathcal{W}_A}{r+z}$$

Por lo tanto, las deformaciones circunferencial, ϵ_ϕ, y angular $\gamma_{x\phi}$, de un punto A, serán:

$$\epsilon_\phi = \epsilon_{\phi 1} + \epsilon_{\phi 2} = \frac{\mathcal{V}_A + \mathcal{W}_A}{r+z} \qquad (3.4.b)$$

$$\gamma_\phi = \frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}_A}{\partial s_{\phi(z)}} = \frac{\partial \mathcal{V}_A}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}_A}{(r+z)\,\partial\phi} = \frac{\mathcal{V}_A}{r} + \frac{\mathcal{U}_A}{r+z} \qquad (3.4.c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.3) en las expresiones (3.4), se llega a:

$$\epsilon_x = \frac{\mathcal{U}}{r} - z\frac{\mathcal{W}}{r^2} \qquad (3.5.a)$$

$$\epsilon_\phi = \frac{\mathcal{V}}{r} + \frac{z}{r}\,\frac{\mathcal{W}}{r+z} + \frac{\mathcal{W}}{r+z} \qquad (3.5.b)$$

$$\gamma_{x\phi} = \frac{\mathcal{U}}{r+z} + \frac{(r+z)\mathcal{V}}{r^2} - \frac{\mathcal{W}}{r}\left(\frac{z}{r} + \frac{z}{r+z}\right) \qquad (3.5.c)$$

El tercer paso es determinar los esfuerzos σ_x, σ_ϕ y $\tau_{x\phi}$. De la teoría de la membrana[8], se tiene:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\epsilon_x + \nu\epsilon_\phi\right] \qquad (3.6.a)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\epsilon_\phi + \nu\epsilon_x\right] \qquad (3.6.b)$$

$$\tau_{x\phi} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\gamma_{x\phi} \qquad (3.6.c)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.5) en el sistema (3.6) se obtienen los esfuerzos en el punto A en función de los desplazamientos del punto A_o, en la superficie media, y con las mismas coordenadas x, S_ϕ de A.

El último paso es introducir estas expresiones en las definiciones que para N y M se establecen a continuación.

De la figura 3.5 se deducen las siguientes relaciones[1] :

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left[1+\frac{z}{r}\right] dz \qquad (3.7.a) \qquad\qquad N_{\phi x} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\phi x} dz \qquad (3.7.d)$$

$$N_\phi = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\phi dz \qquad (3.7.b) \qquad\qquad M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left[1+\frac{z}{r}\right] z dz \qquad (3.7.e)$$

$$N_{x\phi} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\phi} \left[1+\frac{z}{r}\right] dz \qquad (3.7.c) \qquad\qquad M_\phi = -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\phi x dz \qquad (3.7.f)$$

$$M_{x\phi} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\phi} \left[1+\frac{z}{r}\right] z dz \qquad (3.7.g) \qquad\qquad M_{\phi x} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\phi x}(z) dz \qquad (3.7.h)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.5) en (3.6) y (3.7) se llega a:

$$N_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-t/2}^{t/2} \left[\epsilon_x + \nu\epsilon_\phi\right] \left[1+\frac{z}{r}\right] dz = \frac{E}{r(1-\nu^2)} \left[\left[\mathcal{U}' + \nu\mathcal{V}' + \nu\mathcal{W}\right] t - \frac{\mathcal{W}'' t^3}{12 r^2}\right]$$

Si $\qquad D = \dfrac{Et}{1-\nu^2} \qquad$ y $\qquad K = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

$$N_x = \frac{D}{r}\left[\mathcal{U}' + \nu\mathcal{V}^{\cdot} + \nu\mathcal{W}\right] - \frac{K}{r^3}\mathcal{W}'' \qquad (3.8.a)$$

Análogamente, para N_ϕ y $N_{\phi x}$ se tiene:

$$N_\phi = \frac{E}{1-\nu^2}\int_{-t/2}^{t/2}\left[\epsilon_\phi + \nu\epsilon_x\right]dz$$

$$N_\phi = \frac{E}{r(1-\nu^2)}\left\{\left[\mathcal{V}^{\cdot} + \nu\mathcal{U}'\right]t - \mathcal{W}^{\cdot\cdot}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{z}{r+z}dz + \mathcal{W}\int_{-t/2}^{t/2}\frac{z}{r+z}dz\right\}$$

En donde $\qquad \displaystyle\int_{-t/2}^{t/2}\frac{z}{r+z}dz = t - r\ln\frac{2r+t}{2r-t} = \frac{t^3}{12r^2}$

$$\int_{-t/2}^{t/2}\frac{1}{r+z}dz = \ln\frac{2r+t}{2r-t} = t + \frac{t^3}{12r^2}$$

Por lo tanto,

$$N_\phi = \frac{E}{r(1-\nu^2)}\left[(\mathcal{V}^{\cdot} + \mathcal{W} + \nu\mathcal{U}')t + (\mathcal{W}^{\cdot\cdot} + \mathcal{W})\frac{t^3}{12r^2}\right]$$

$$N_\phi = \frac{D}{r}\left[\mathcal{V}^{\cdot} + \mathcal{W} + \nu\mathcal{U}'\right] + \frac{K}{r^3}\left[\mathcal{W} + \mathcal{W}^{\cdot\cdot}\right] \qquad (3.8.b)$$

Para la fuerza $N_{\phi x}$

$$N_{\phi x} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\phi x} = \frac{E}{2(1+\nu)}\int_{-t/2}^{t/2}\left[\frac{\mathcal{U}^{\cdot}}{r+z} + \frac{r+z}{r^2}\mathcal{V}' - \frac{\mathcal{W}'^{\cdot}}{r}\left(\frac{z}{r} + \frac{z}{r+z}\right)\right]dz$$

$$N_{\phi x} = \frac{E}{2r(1-\nu)}\left[\mathcal{U}^{\cdot}r\ln\frac{2r+t}{2r-t} + t\mathcal{V}' + t\mathcal{W}'^{\cdot} - \mathcal{W}'^{\cdot}\left(t^3 + \frac{t}{12r^2}\right)\right]$$

$$N_{\phi x} = \frac{E}{2r(1+\nu)}\left[\mathcal{U}^{\cdot}\left(t + \frac{t^3}{12r^2}\right) + t\mathcal{V}' + t\mathcal{W}'^{\cdot} - \mathcal{W}'^{\cdot}\left(t - \frac{t^3}{12r^2}\right)\right]$$

$$N_{\phi x} = \frac{D}{r}\,\frac{1-\nu}{2}\left[\mathcal{U}^{\cdot} + \mathcal{V}'\right] + \frac{K}{r^3}\,\frac{1-\nu}{2}\left[\mathcal{U}^{\cdot} + \mathcal{W}'^{\cdot}\right] \qquad (3.8.c)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se llega al siguiente sistema, el cual representa las leyes elásticas de un cascarón cilíndrico.[1]

$$N_x = \frac{D}{r}\left[\mathcal{U}' + \nu\dot{\mathcal{V}} + \nu\mathcal{W} \right] - \frac{K}{r^3}\mathcal{W}'' \tag{3.9.a}$$

$$N_\phi = \frac{D}{r}\left[\dot{\mathcal{V}} + \mathcal{W} + \nu\mathcal{U}' \right] + \frac{K}{r^3}\left[\mathcal{W} + \ddot{\mathcal{W}} \right] \tag{3.9.b}$$

$$N_{\phi x} = \frac{D}{r}\,\frac{(1-\nu)}{2}\left[\dot{\mathcal{U}} + \mathcal{V}' \right] + \frac{K}{r^3}\,\frac{(1-\nu)}{2}\left[\dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{W}}' \right] \tag{3.9.c}$$

$$N_{x\phi} = \frac{D}{r}\,\frac{(1-\nu)}{2}\left[\dot{\mathcal{U}} + \mathcal{V}' \right] + \frac{K}{r^3}\,\frac{(1-\nu)}{2}\left[\mathcal{V}' - \dot{\mathcal{W}}' \right] \tag{3.9.d}$$

$$M_\phi = \frac{K}{r^2}\left[\mathcal{W} + \ddot{\mathcal{W}} + \nu\mathcal{W}'' \right] \tag{3.9.e}$$

$$M_x = \frac{K}{r^2}\left[\mathcal{W}'' + \nu\ddot{\mathcal{W}} - \mathcal{U} - \nu\dot{\mathcal{V}} \right] \tag{3.9.f}$$

$$M_{\phi x} = \frac{K}{r^2}(1-\nu)\left(\dot{\mathcal{W}}' + \frac{1}{2}\dot{\mathcal{U}} - \frac{1}{2}\mathcal{V}' \right) \tag{3.9.g}$$

$$M_{x\phi} = \frac{K}{r^2}(1-\nu)\left[\dot{\mathcal{W}}' - \mathcal{V}' \right] \tag{3.9.h}$$

La sexta condición de equilibrio de las ecuaciones (3.1) es una consecuecia inmediata de la relación $\tau_{x\phi}=\tau_{\phi x}$, por lo que resulta una identidad en (3.9) al expresar los esfuerzos resultantes en función de los desplazamientos $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$, de la superficie media del cascarón.

Con (3.2.a-c) se llega a tres ecuaciones diferenciales para $\mathcal{U},\mathcal{V}$, y $\mathcal{W}$.

Sustituyendo (3.9.a-h) en (3.2a-c) y si $\quad k = \dfrac{K}{Dr^2}$,

se tiene que:

En (3.2a)

$$\frac{D}{r}\left[\mathcal{U}''+\nu\dot{\mathcal{V}}'+\nu\mathcal{W}'\right] - \frac{K}{r^3}\mathcal{W}''' + \frac{D}{r}\,\frac{1-\nu}{2}\left[\ddot{\mathcal{U}}+\dot{\mathcal{W}}'\right] + \frac{K}{r^3}\,\frac{1-\nu}{2}\left[\ddot{\mathcal{U}}+\ddot{\mathcal{W}}'\right] + P_x r = o.$$

$$\frac{D}{r^2}\left\{\mathcal{U}'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}} + \frac{1+\nu}{2}\dot{\mathcal{V}}' + \nu\mathcal{W}' + k\left(\frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}} - \mathcal{W}''' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{W}}'\right)\right\} + F_x = o \tag{3.10.a}$$

En (3.2.b)

$$\frac{D}{r^2}\left\{\frac{1+\nu}{2}\dot{\mathcal{U}}' + \ddot{\mathcal{V}} + \frac{1-\nu}{2}\mathcal{V}'' + \dot{\mathcal{W}} + k\left[\frac{3}{2}(1-\nu)\mathcal{V}'' - \frac{3-\nu}{2}\dot{\mathcal{W}}''\right]\right\} + P_\phi = o \tag{3.10.b}$$

De (3.2.c)

$$\frac{D}{r^2}\left\{\nu\mathcal{U}' + \dot{\mathcal{V}} + \mathcal{W} + k\left[\frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}}' - \mathcal{U}''' - \frac{3-\nu}{2}\dot{\mathcal{V}}'' + \mathcal{W}^{iv} + 2\ddot{\mathcal{W}}'' + \ddot{\ddot{\mathcal{W}}} + 2\ddot{\mathcal{W}} + \mathcal{W}\right]\right\} + P_r = o \tag{3.10.c}$$

Agrupando las relaciones anteriores se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales para un cascarón cilíndrico circular en flexión, simplemente apoyado.

$$\frac{D}{r^2}\left\{\mathcal{U}'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}} + \frac{1+\nu}{2}\dot{\mathcal{V}}' + \nu\mathcal{W}' + k\left(\frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}} - \mathcal{W}''' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{W}}'\right)\right\} + F_x = 0 \tag{3.10.a}$$

$$\frac{D}{r^2}\left\{\frac{1+\nu}{2}\dot{\mathcal{U}}' + \ddot{\mathcal{V}} + \frac{1-\nu}{2}\mathcal{V}'' + \dot{\mathcal{W}} + k\left[\frac{3}{2}(1-\nu)\mathcal{V}'' - \frac{3-\nu}{2}\dot{\mathcal{W}}''\right]\right\} + F_\phi = 0 \tag{3.10.b}$$

$$\frac{D}{r^2}\left\{\nu\mathcal{U}' + \dot{\mathcal{V}} + \mathcal{W} + k\left(\frac{1-\nu}{2}\ddot{\mathcal{U}}' - \mathcal{U}''' - \frac{3-\nu}{2}\dot{\mathcal{V}}'' + \mathcal{W}^{iv} + 2\ddot{\mathcal{W}}'' + \ddddot{\mathcal{W}} + 2\ddot{\mathcal{W}} + \mathcal{W}\right)\right\} + F_r = 0 \tag{3.10.c}$$

La solución de (3.10.a-c) será posible si las cargas de superficie F_x, F_ϕ y F_r son distribuidas de acuerdo con:

$$F_x = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{xmn} \operatorname{Cos}\frac{\lambda x}{r} \operatorname{Cos} n\phi \tag{3.11.a}$$

$$F_\phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\phi mn} \operatorname{Sen}\frac{\lambda x}{r} \operatorname{Sen} n\phi \tag{3.11.b}$$

$$F_r = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{rmn} \operatorname{Sen}\frac{\lambda x}{r} \operatorname{Cos} n\phi \tag{3.11.c}$$

con $\lambda = \frac{m\pi r}{l}$

La forma de $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, que satisface las condiciones de frontera de un cilindro simplemente apoyado (funciones coordenadas), se presenta a continuación:

$$\mathcal{U} = \mathbb{U}mn\text{Cos}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi \qquad (3.12.a)$$

$$\mathcal{V} = \mathbb{V}mn\text{Sen}\frac{\lambda x}{r}\text{Sen}\,n\phi \qquad (3.12.b)$$

$$\mathcal{W} = \mathbb{W}mn\text{Sen}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi \qquad (3.12.c)$$

Al sustituir (3.11) y (3.12) en (3.10) se eliminan los factores trigonométricos, y se logra así un número infinito de sistemas de tres ecuaciones lineales, desacopladas, para $\mathbb{U}mn$, $\mathbb{V}mn$, $\mathbb{W}mn$, como sigue[7]:

$$\frac{D}{r^2}\left[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2(1+k)\right]\mathbb{U}mn\text{Cos}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi + \frac{D}{r^2}\left[-\frac{1+\nu}{2}\lambda n\right]\mathbb{V}mn\text{Cos}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi +$$

$$\frac{D}{r^2}\left\{-\nu\lambda - k\left[\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}\lambda n^2\right]\right\}\mathbb{W}mn\text{Cos}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}xmn\text{Cos}\frac{\lambda x}{r}\text{Cos}\,n\phi$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{D}{r^2}\left[\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2(1+k)\right]\mathbb{U}mn + \frac{D}{r^2}\left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda n\right)\mathbb{V}mn +$$

$$\frac{D}{r^2}\left[-\nu\lambda - k\left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}\lambda n^2\right)\right]\mathbb{W}mn = \mathbb{P}xmn \qquad (3.13.a)$$

Las otras dos ecuaciones lineales se obtienen en forma similar.

De (3.10.b)

$$\frac{D}{r^2}\left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda n\right)\mathbb{U}mn + \frac{D}{r^2}\left[n^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2(1+3k)\right]\mathbb{V}mn +$$

$$\frac{D}{r^2}\left[n + \frac{3-\nu}{2}k\lambda^2 n\right]\mathbb{W}mn = \mathbb{P}\phi mn \qquad (3.13.b)$$

De (3.10.c)

$$\frac{D}{r^2}\left[-\nu\lambda - k\left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}\lambda n^2\right)\right]\mathbb{U}_{mn} + \frac{D}{r^2}\left(n + \frac{3-\nu}{2}k\lambda^2 n\right)\mathbb{V}_{mn} +$$

$$\frac{D}{r^2}\left[1 + k\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 n^2 + n^4 - 2n^2 + 1\right)\right] = \mathbb{P}_{rmn} \qquad (3.13.c)$$

El sistema de ecuaciones (3.13) también puede expresarse como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbb{U}_{mn} \\ \mathbb{V}_{mn} \\ \mathbb{W}_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_x \\ \mathbb{P}_\phi \\ \mathbb{P}_r \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

En donde ,

$$K_{11} = \frac{D}{r^2}\left\{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2(1+k)\right\} = \frac{D}{r^2}\left\{\left[\frac{m\pi r}{l}\right]^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2\left(1 + \frac{t^2}{12r^2}\right)\right\}$$

(3.15.a)

$$K_{22} = \frac{D}{r^2}\left[n^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2(1+3k)\right] = \frac{D}{r^2}\left\{n^2 + \frac{1-\nu}{2}\left[\frac{m\pi r}{l}\right]^2\left(1 + \frac{t^3}{4r^2}\right)\right\}$$

(3.15.b)

$$K_{33} = \frac{D}{r^2}\left[1 + k\left(\lambda^4 + 2\lambda^2 n^2 + n^4 - 2n^2 + 1\right)\right]$$

$$= \frac{D}{r^2}\left\{1 + \frac{t^3}{12r^2}\left\{\left[\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^2 + n^2\right]^2 - 2n^2 + 1\right\}\right\} \qquad (3.15.c)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{D}{r^2}\left(- \frac{1+\nu}{2}\lambda n\right) = \frac{D}{r^2}\left[- \frac{1+\nu}{2}\left(\frac{m\pi r}{l}\right)n\right] \qquad (3.15.d)$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{D}{r^2}\left[-\nu\lambda - k\left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}\lambda n^2\right)\right]$$

$$= \frac{D}{r^2}\left\{-\nu\left(\frac{m\pi r}{l}\right) - \frac{t^3}{12r^2}\left[\left(\frac{m\pi r}{l}\right)^3 - \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi r}{l}\right)n^2\right]\right\}$$

(3.15.e)

3.1.3 *EQUILIBRIO DINAMICO*

A partir de las ecuaciones operacionales (3.14), de equilibrio estático, y teniendo en cuenta las igualdades (3.16) y (3.17), se obtiene el sistema (3.18) de tres ecuaciones, para vibración libre, de un cascarón cilíndrico simplemente soportado. Por lo tanto, se tomarán en cuenta las fuerzas de inercia asociadas, respectivamente, a los desplazamientos longitudinal, transversal y circunferencial.

Es fácil demostrar que, en las ecuaciones de equilibrio dinámico, las cargas (3.11) y los desplazamientos (3.12) están afectados por el factor: $e^{i\omega t}$. Así, si $\mathbb{P}_x$, $\mathbb{P}_\phi$, y $\mathbb{P}_r$ son reemplazados por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x &= \mathbb{P}_x(x,\phi,t) = \mathbb{P}_x(x,\phi)\, e^{i\omega t} \\ \mathbb{P}_\phi &= \mathbb{P}_\phi(x,\phi,t) = \mathbb{P}_\phi(x,\phi)\, e^{i\omega t} \\ \mathbb{P}_r &= \mathbb{P}_r(x,\phi,t) = \mathbb{P}_r(x,\phi)\, e^{i\omega t} \end{aligned} \qquad (3.16)$$

En donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(x,\phi) &= \rho t \omega^2 \mathbb{U}_{mn} \\ \mathbb{P}_\phi(x,\phi) &= \rho t \omega^2 \mathbb{V}_{mn} \\ \mathbb{P}_r(x,\phi) &= \rho t \omega^2 \mathbb{W}_{mn} \end{aligned} \qquad (3.17)$$

las ecuaciones (3.14) y (3.17) nos conducirá al sistema:

$$\begin{bmatrix} \rho t\omega^2 - K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & \rho t\omega^2 - K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & \rho t\omega^2 - K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{mn} \\ \mathbb{V}_{mn} \\ \mathbb{W}_{mn} \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.18)$$

Para obtener una solución diferente a la trivial, el determinante de la ecuación (3.18) se hace igual a cero, dando lugar a una ecuación característica de la siguiente forma:

$$\omega^6 + a_1\omega^4 + a_2\omega^2 + a_3 = 0 \tag{3.19}$$

En donde:

$$a_1 = -\frac{1}{\rho t}\left[K_{11} + K_{22} + K_{33}\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho t)^2}\left[K_{11}K_{33} + K_{22}K_{33} + K_{11}K_{22} - K_{23}^2 - K_{12}^2 - K_{13}^2\right]$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho t)^3}\left[K_{11}K_{23}^2 + K_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2K_{12}K_{23}k_{13} - K_{11}K_{22}k_{33}\right]$$

Las soluciones de (3.19), en radianes/segundo, son:

$$\omega_{1mn}^2 = -\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2}\,\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{3} - \frac{a_1}{3} \tag{3.20.a}$$

$$\omega_{2mn}^2 = -\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2}\,\mathrm{Cos}\frac{\alpha+2\pi}{3} - \frac{a_1}{3} \tag{3.20.b}$$

$$\omega_{3mn}^2 = -\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3a_2}\,\mathrm{Cos}\frac{\alpha+4\pi}{3} - \frac{a_1}{3} \tag{3.20.c}$$

En donde:

$$\alpha = \operatorname{Cos}^{-1}\left[\frac{27a_3 + 2a_1^3 - 9a_1a_2}{2\sqrt{(a_1^2 - 3a_2)^3}}\right]$$

Se nota que, a toda combinación (m,n) le corresponden tres frecuencias ω_{kmn} (con k=1,2,3). La más baja ω_{1mn}, normalmente está asociada a la componente transversal del movimiento, mientras que las otras dos, axial y circunferencial, resultan ser de un orden de magnitud mayor.[3] En consecuencia, a todo modo de vibrar (m,n) le corresponden tres combinaciones diferentes de las amplitudes $\mathbb{U}_{kmn}$, $\mathbb{V}_{kmn}$, $\mathbb{W}_{kmn}$. de las funciones coordenadas de (3.21).

$$\begin{bmatrix} u_{kmn} \\ v_{kmn} \\ w_{kmn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{kmn}\operatorname{Cos}\frac{\lambda x}{r}\operatorname{Cos}n\phi \\ \mathbb{V}_{kmn}\operatorname{Sen}\frac{\lambda x}{r}\operatorname{Sen}n\phi \\ \mathbb{W}_{kmn}\operatorname{Sen}\frac{\lambda x}{r}\operatorname{Cos}n\phi \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

Para ilustrar este concepto se propone lo siguiente:

Ejemplo 3.1: Supongamos un cascarón cilíndrico en acero, simplemente apoyado. Se desea calcular las frecuencias fundamentales, en cada dirección, para cada modo (m,n), de acuerdo con los siguientes datos:

$E = 29.E+6 \text{ lb/in}^2$
$\rho = 7.34 \text{ E-4 lb.seg}^2/\text{in}^4$
$r = 100.\text{in}$
$l = 200.\text{in}$
$t = 1.0 \text{ in}$
$\nu = 0.3$
$1 \le m \le 5$
$1 \le n \le 15$

La figura 3.6 presenta las frecuencias naturales en cada dirección del cascarón cilíndrico del ejemplo 3.1, calculadas, respectivamente, con las ecuaciones (3.20a-c) y dadas en la tabla 3.1. Como se puede ver las frecuencias en el sentido transversal, (i=1), resultan ser de un orden de magnitud relativamente menor que las correspondientes a las de las otras dos direcciones (i=2 y i=3). Si se fija $m=1$ y un valor de n arbitrario, por ejemplo $n=5$ *(para los cuales se da la frecuencia dominante)*, se puede determinar una frecuencia en cada dirección, tal como se muestra en la tabla 3.1 y en la figura 3.6. Si cada una de estas frecuencias se sustituyen en la ecuación (3.18), se obtienen tres vectores **A**, **B**, **C**, ortogonales entre sí, con componentes $\mathbb{U}_{kmn}$, $\mathbb{V}_{kmn}$, y $\mathbb{W}_{kmn}$, que vienen a ser la solución de cada frecuencia. Por lo tanto, para $\mathbb{W}_{kmn}=1$ se obtienen tres vectores cuyas componentes presentan valores relativos a la amplitud radial $\mathbb{W}_{kmn}$.

$\omega_1=38.73$ c.p.s. $\qquad \omega_2=1034$ c.p.s. $\qquad \omega_3=1766$ c.p.s.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.0506\\-0.2030\\1.0000\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}9.246\\2.614\\1.000\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1.612\\5.317\\1.000\end{bmatrix}$$

El vector **A** es la resultante de las amplitudes ortonormales de cada una de las funciones coordenadas, ecuación (3.21), cuando el cilindro del ejemplo 3.1 vibra en el modo $(m,n)=(1,5)$ con la frecuencia dominante ω_{1mn} = 38.73 c.p.s.

Sustituyendo en la ecuación (3.21) las componentes del vector **A**, para m=1, n=5 y $\phi=\pi/4$, se llega al siguiente sistema de ecuaciones, en función de la variable x, solamente.

$$\mathcal{U} = -0.0506 \mathrm{Cos}\, n\phi\, \mathrm{Cos}\, m\pi x/l = -0.036 \mathrm{Cos}\, \pi x/l$$

$$\mathcal{V} = -0.2030 \mathrm{Sen}\, n\phi\, \mathrm{Sen}\, m\pi x/l = 0.143 \mathrm{Sen}\, \pi x/l \qquad (3.21.a)$$

$$\mathcal{W} = 1.0000 \mathrm{Cos}\, n\phi\, \mathrm{Sen}\, m\pi x/l = -0.707 \mathrm{Sen}\, \pi x/l$$

En la figura 3.7 se ilustran las configuraciones, en tres direcciones perpendiculares, de los puntos de un cilindro cuando vibra en el modo (1,5).

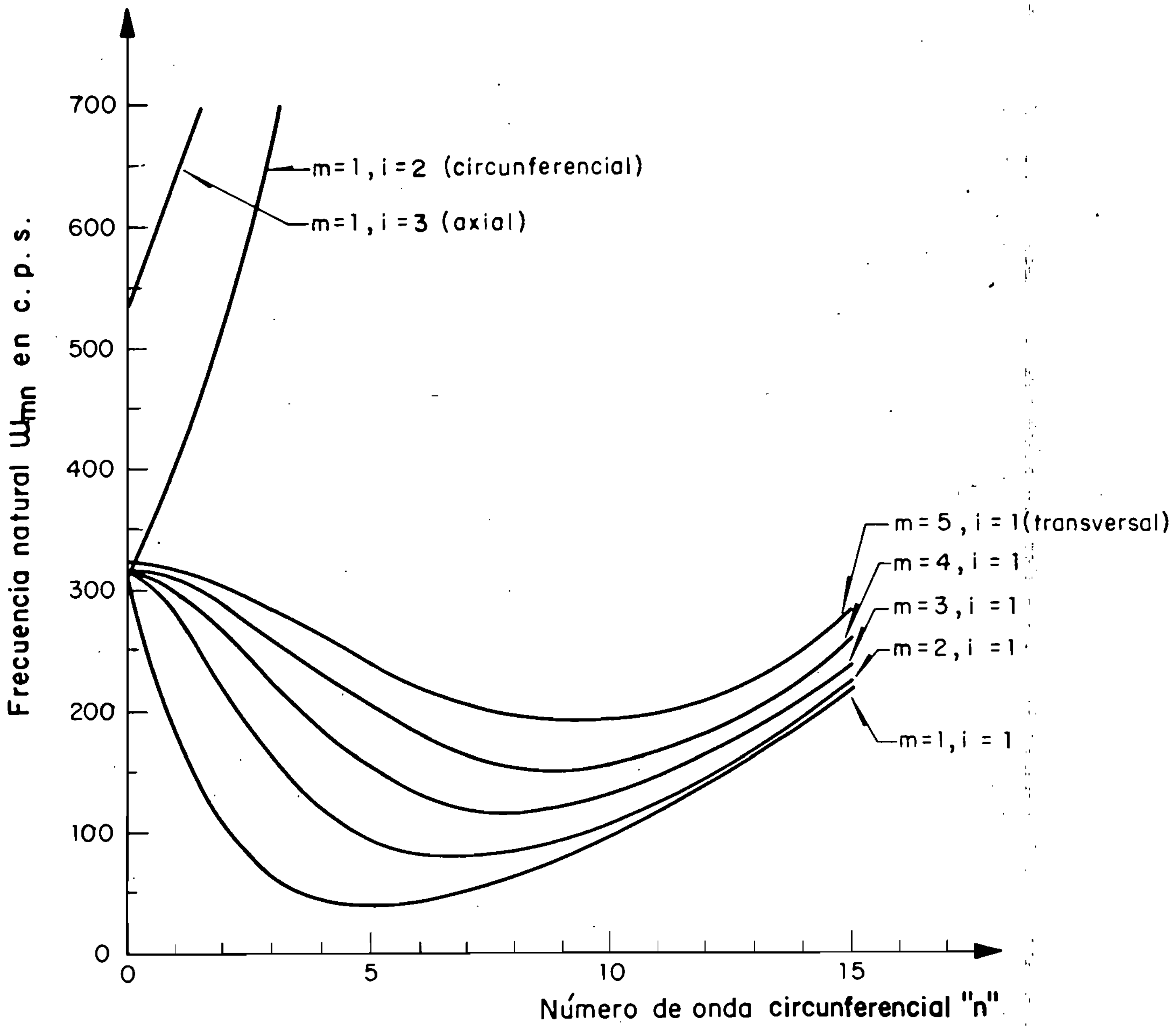


Fig 3.6 Frecuencias naturales en tres direcciones ortogonales para el cilindro del ejemplo 3.1

TABLA 3.1

Frecuencias fundamentales para el cilindro del ejemplo 3.1

n	ω_1 m=1	ω_2 m=1	ω_3 m=1
0	307.83	308.20	535.32
1	189.95	413.85	646.09
2	108.59	531.41	880.93
3	64.93	682.11	1158.94
4	43.93	852.97	1456.92
5	38.73*	1034.07	1765.79
6	40.58	1220.50	2081.16
7	50.07	1409.94	2400.66
10	96.92	1986.90	3372.76
15	216.33	2959.28	5012.45
20	383.85	3936.09	6661.19

n	ω_1 m=2	ω_1 m=3	ω_1 m=4	ω_1 m=5
0	314.91	316.38	318.20	321.53
1	280.37	301.59	310.13	316.56
2	216.59	265.53	288.57	302.77
3	160.34	223.05	259.49	282.90
4	119.60	184.08	228.88	260.34
5	93.30	152.90	201.03	238.17
6	77.46*	130.85	178.52	218.81
7	75.78	118.12*	162.76	203.97
10	107.40	128.71	154.92*	194.58*
15	223.73	236.78	255.91	201.07
20	390.97	403.00	420.10	442.36

Las frecuencias ω_{kmn} en C.P.S., calculadas con las ecuaciones (3.20a-c).

* Valor mínimo de ω_{kmn}

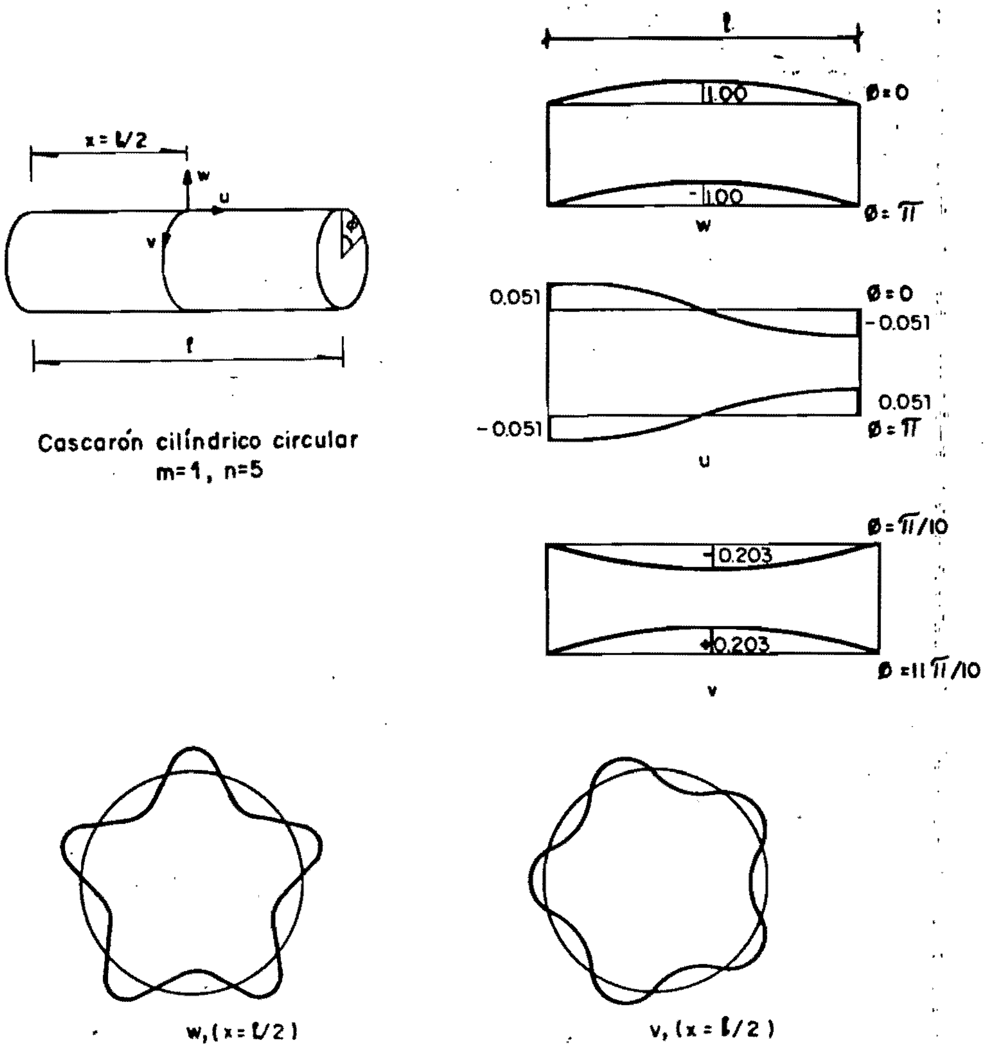


Fig.3.7 Configuración del modo fundamental de vibración (1,5) para el cilindro del ejemplo 3.1

En la tabla 3.2 se presentan los valores de frecuencias naturales correspondiente a un análisis con m=1 y n variable, de ocho cilindros con diferente longitud, semejantes al del ejemplo 3.1. Estos resultados se graficaron en la figura 3.8, en la que se observa que para cada valor de (l/r) existe un número n para el cual se da una frecuencia natural mínima. En términos generales, a cualquier cilindro con (l/r),(r/t),r,m y n dados, le corresponde un único valor de frecuencia mínima.

TABLA 3.2

Frecuencias para cilindros con

r/t=100, r=100 y m=1

ω_{mn}

n / l/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	314.9	280.4	216.6	160.3	120.0	93.3	79.2	*77.5	80.8
2	307.8	190.0	108.5	64.9	43.9	*38.7	40.6	50.1	63.2
3	205.4	123.6	60.3	33.4	*25.8	26.9	35.3	47.0	61.0
4	154.1	85.2	37.5	*19.3	19.8	24.2	34.0	46.2	60.5
5	123.3	61.8	25.3	*15.5	16.0	23.4	33.6	45.9	60.2
12	51.4	14.0	*6.4	7.7	14.0	22.6	33.1	45.5	60.0
25	24.6	*3.1	2.8	7.3	13.9	22.5	33.1	45.5	59.9
50	12.3	*1.5	2.6	7.3	13.9	22.5	33.0	45.5	59.8

Todas las dimensiones en pulgadas

ω_{mn} se da en C. P. S.

* frecuencia minima

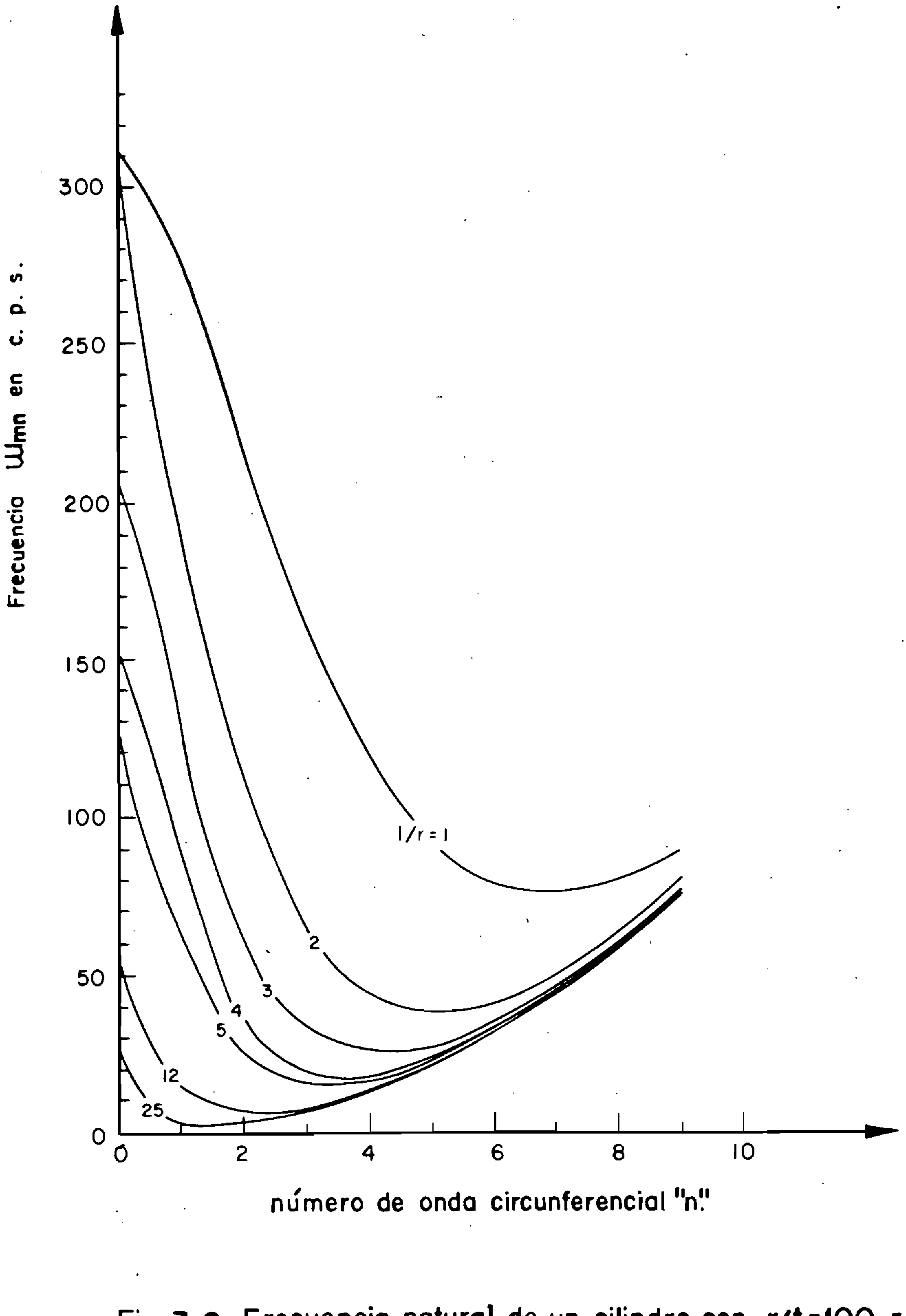


Fig.3.8 Frecuencia natural de un cilindro con r/t = 100, r = 100 in
m = 1 , n y l/r variables.

3.2 ANALISIS PARAMETRICO DE FRECUENCIAS

Con el fin de establecer la influencia del número de onda en la dirección circunferencial, se analizaron 1200 estructuras cilíndricas, en forma semejante a las de la figura 3.8, para m=1, tal que para cada cilindro, con (r/t) entre 10 y 5000, se hallaron las frecuencias mínimas variando (l/r) entre 1 y 80. Este mismo procedimiento se repitió para m=2,3,4 y 5. En todos los casos se comprobó que existe una cantidad invariante, $(\omega_{mn}r)^2$, para todas aquellas estructuras cilíndricas con idénticos valores de (r/t),(l/r) y m.Por ejemplo, si:

a) r/t=100, l/r=2, m=2 y r=100.in ➔ ω_{mn} = 77.46 C.P.S.

b) r/t=100, l/r=2, m=2 y r=60.0in ➔ ω_{mn} = 129.10C.P.S.

En ambos casos el parámetro $(\omega_{mn} r)^2$ = 6.0E+7 $(C.P.S*in)^2$

En la figura 3.9 se dibujaron, en escala doble-logarítmica, los contornos del parámetro de frecuencias $(\omega_{mn} r)^2$ para m=1 y diferentes valores de (l/r), (r/h) y n. Los resultados obtenidos con la ecuación (2.1) de SOEDEL[3], se representan con líneas discontinuas en las cuales la convergencia se da para valores de l/r<10, mientras que para l/r≥10 las frecuencias se comportan aleatoriamente, debido a que la ecuación (2.1) únicamente considera el efecto de la fuerza inercial transversal de un cilindro simplemente apoyado. Este caso resulta importante, pues en la literatura común se da por cierto que las ecuaciones se DONNELL son válidas para cascarones largos, lo que se contradice con lo expresado anteriormente. Las líneas rectas continuas representan los contornos para diez valores de (r/t), obtenidos con la ecuación (3.20.a). Se observa que todos los puntos quedan contenidos en las rectas paralelas, para cualquier relación (l/r), por lo que se garantiza la convergencia del análisis desarrollado en este trabajo.

La figura 3.10, en escala doble-logarítmica, muestra que la separación entre las rectas, correspondientes a diferentes valores (r/t), sigue un comportamiento logarítmico, y en la figura 3.11 se nota que todos los perfiles (r/t) para m=2,3,4,5, se desplazan paralela y simultáneamente hacia arriba sobre un eje (l/r) dado. En este caso se fijó (l/r)=2 sobre el que se dibujó un nuevo eje coordenado de onda longitudinal m. Al ser los grupos de contornos (r/t) idénticos para un m dado, sólo debe colocarse sobre el eje de la onda longitudinal el valor m que se desea analizar. En la figura 3.11 se toma como origen el punto A de la figura 3.10 para (r/t)=500 y m=1. Se presenta ahora el parámetro de frecuencias mínimas $(\omega_{mn} r)^2$ para cualquier valor de m

Por otro lado, se comprobó que la frecuencias naturales más bajas o fundamentales de un cascarón cilíndrico circular se dan para el número de onda longitudinal m=1, asociado con otros números de ondas circunferenciales n, ver figura 3.6. En este estudio se presenta la forma como se combina m y n para lograr un valor mínimo de frecuencia natural. Para ello se procesó, en la computadora, suficiente información que condujo a definir franjas (o intervalos del número de onda transvesal n), sobre las cuales es posible encontrar el valor mínimo de frecuencias naturales asociadas a los valores de r/t, l/r, m y n, (ver figura 3.12). Por ejemplo, para un cilindro r/t=50, l/r=5 y m=1, la figura 3.12 muestra que para n=2, el parámetro de frecuencia fundamental $(\omega_{mn} r)^2$ = 4.80E+6 $(\mathrm{c.p.s.in})^2$ asociado al modo (m, n)=(1,2).

Cuando en la dirección longitudinal se consideraron la segunda y tercera onda(m=2 y m=3), se procedió a otros análisis paramétricos, para definir el rango de aplicación del número de onda n, cuya solución se muestra en la figura 3.13. Se comprobó que los perfiles que limitan las franjas n son los mismos que los de la figura 3.12, sólo que desplazados hacia la derecha, paralela y simultáneamente. Por lo tanto, se da origen a un nuevo eje coordenado horizontal para m, sobre el que se desplaza un grupo de franjas n idénticas al conjunto de franjas de la figura 3.12. Sólo debe colocarse sobre el eje horizontal el valor de m que se desee analizar. En la figura 3.13 se toma como origen el punto B de la figura 3.12, correspondiente a la banda n=10, por lo que se tienen ahora los parámetros de frecuencia pertenecientes al modo (3,n).

Se hace notar que el paralelismo de todos los[2] contornos de frecuencias exhibido en las figuras 3.11[2] 3.12 y 3.13, indica que la onda m=1 en el sentido longitudinal, combinada con otras ondas n, está asociada siempre a la frecuencia más baja o fundamental de cualquier cascarón cilíndrico circular. La consideracion de que cuando m=1 se obtiene el modo fundamental, ha sido hasta hace poco[2] una hipótesis de carácter intuitivo.[2]

3.2.1 FORMULACIONES OBTENIDAS AL PROBLEMA DE FRECUENCIAS EN CASCARONES CILINDRICOS DELGADOS.

Con base en 6000 datos obtenidos, se logró establecer las leyes de variación de todos los parámetros que intervienen en el análisis de vibración libre de cilindros. Al graficarse las rectas (r/t) en escala doble-logarítmica , se observó que la separación entre éstas sigue un comportamiento logarítmico y el valor del parámetro de frecuencias $(\omega_{mn} r)^2$ es inversamente proporcional a (r/t) para valores de (l/r) y m fijos. En términos generales, el parámetro $(\omega_{mn} r)^2$ varía en proporción directa con el cuadrado de m e inversamente proporcional con (r/t) y $(l/r)^2$, ver fórmula (3.25). La constante de proporcionalidad depende del módulo de Young, del módulo de Poisson y de la masa específica del material. La fórmula general para determinar la frecuencia natural mínima de un cascarón cilíndrico circular de material isotrópico, de cualquier longitud l, radio r, y espesor de pared t, está dado por:

$$(\omega_{mn} r)^2 = \frac{D}{\rho r}\left[\frac{9m}{7(l/r)}\right]^2 \qquad (3.22)$$

En donde $D = \dfrac{Et}{12(1-\nu^2)}$

y $(\omega_{mn} r)$ en (C.P.S.*in)

Asociada a la ecuación (3.22) se encontró que la expresión que proporciona el valor de n correspondiente a la frecuencia mínima ω_{mn}, es la parte entera de la siguiente ecuación:

$$n = \text{ENTERO DE}\left[3340(1-\nu^2)\frac{\left[\frac{\rho}{81E}(r/t)\right]^{1/4}}{\left[\frac{l/r}{m}\right]^{1/2}}\right] \qquad (3.23)$$

Una vez determinado n(como número real) en (3.23), se puede conocer el parámetro de frecuencia mimima con la ecuación siguiente, como fórmula alternativa de diseño, en la que sólo se requieren los valores de m, n, y l/r.

$$(\omega_{mn} r)^2 = \frac{398}{9} \frac{D}{\rho t} \left[\frac{m}{n(l/r)}\right]^4 \qquad (3.24)$$

Si un cilindro es fabricado en acero, se tiene que:

$E = 29.E+6 \ lb/in^2$
$\rho = 7.34E-4 \ lb*seg/in^4$
$\nu = 0.30$

Por lo tanto, al sustitir E , ρ y ν en (3.22),(3.23) y (3.24) se obtiene que los parámetros de frecuencia y modos de vibrar de cilindros de acero están dados por:

$$(\omega_{mn} r)^2 = \frac{6000}{(r/t)} \left[\frac{m}{l/r}\right]^2 *E+6 \qquad (3.25)$$

$$n = \text{ENTERO DE} \frac{\left[\frac{80}{3}(r/t)\right]^{1/4}}{\left(\frac{l/r}{m}\right)^{1/2}} \qquad (3.26)$$

$$(\omega_{mn} r)^2 = \left[\frac{20m}{n(l/r)}\right]^4 *E+6 \qquad (3.27)$$

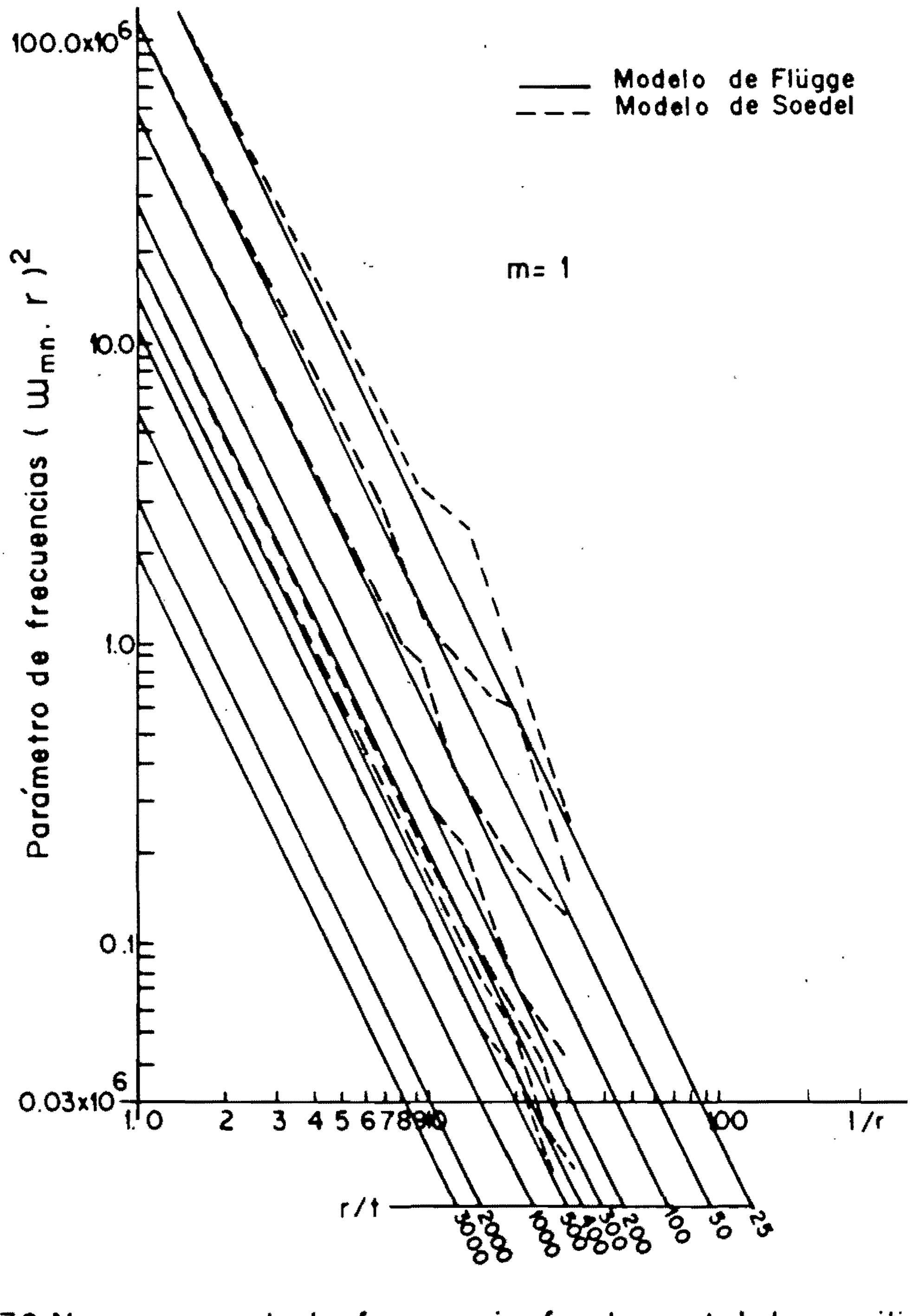


Fig.39 Nomograma de la frecuencia fundamental de un cilindro según Flügge y Soedel.

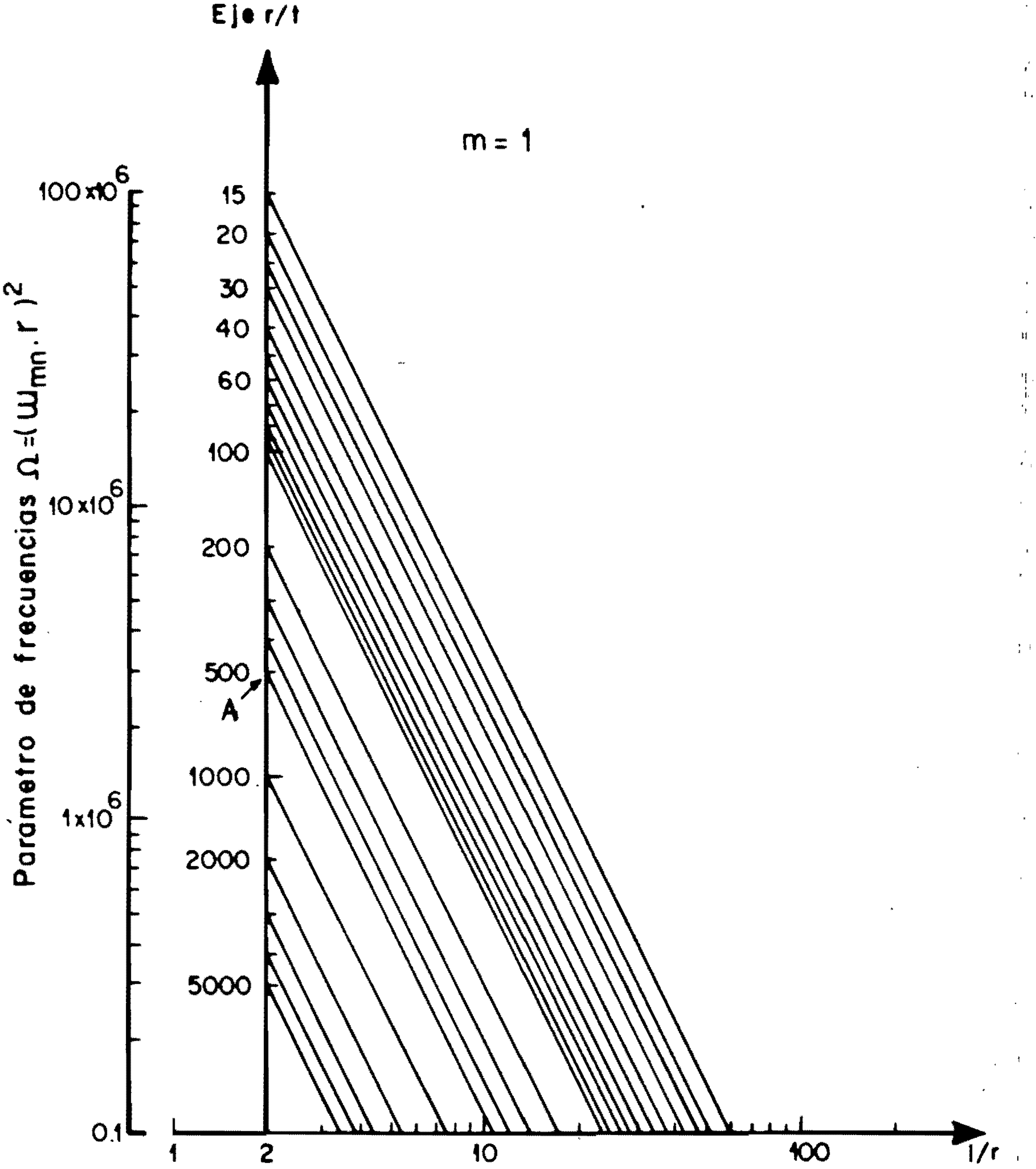


Fig. 3.10 Nomograma para el cálculo de la frecuencia fundamental de un cilindro. Modo (1, n).

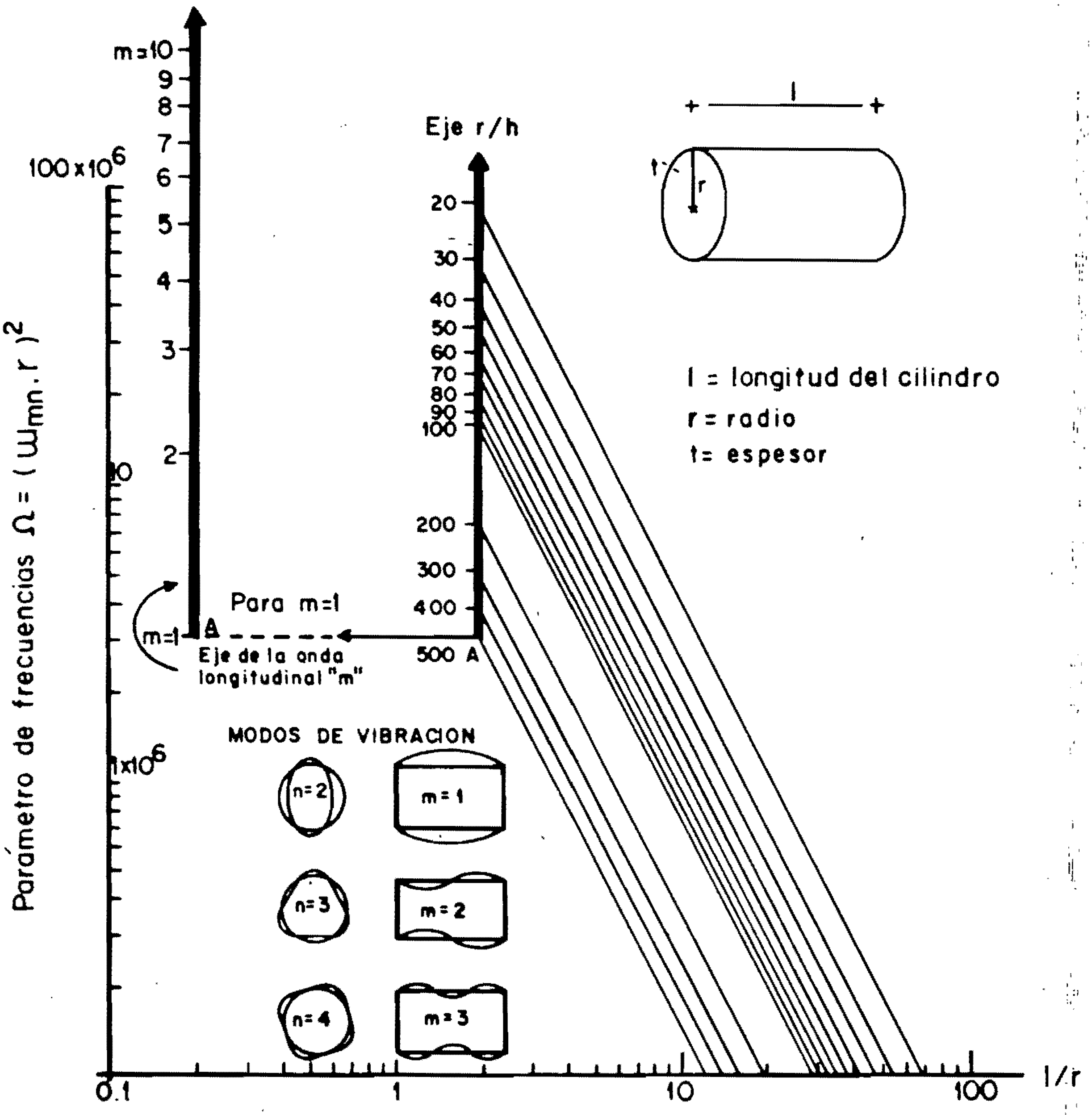


Fig.3.11 Nomograma para el cálculo de la frecuencia fundamental de cualquier cilindro.

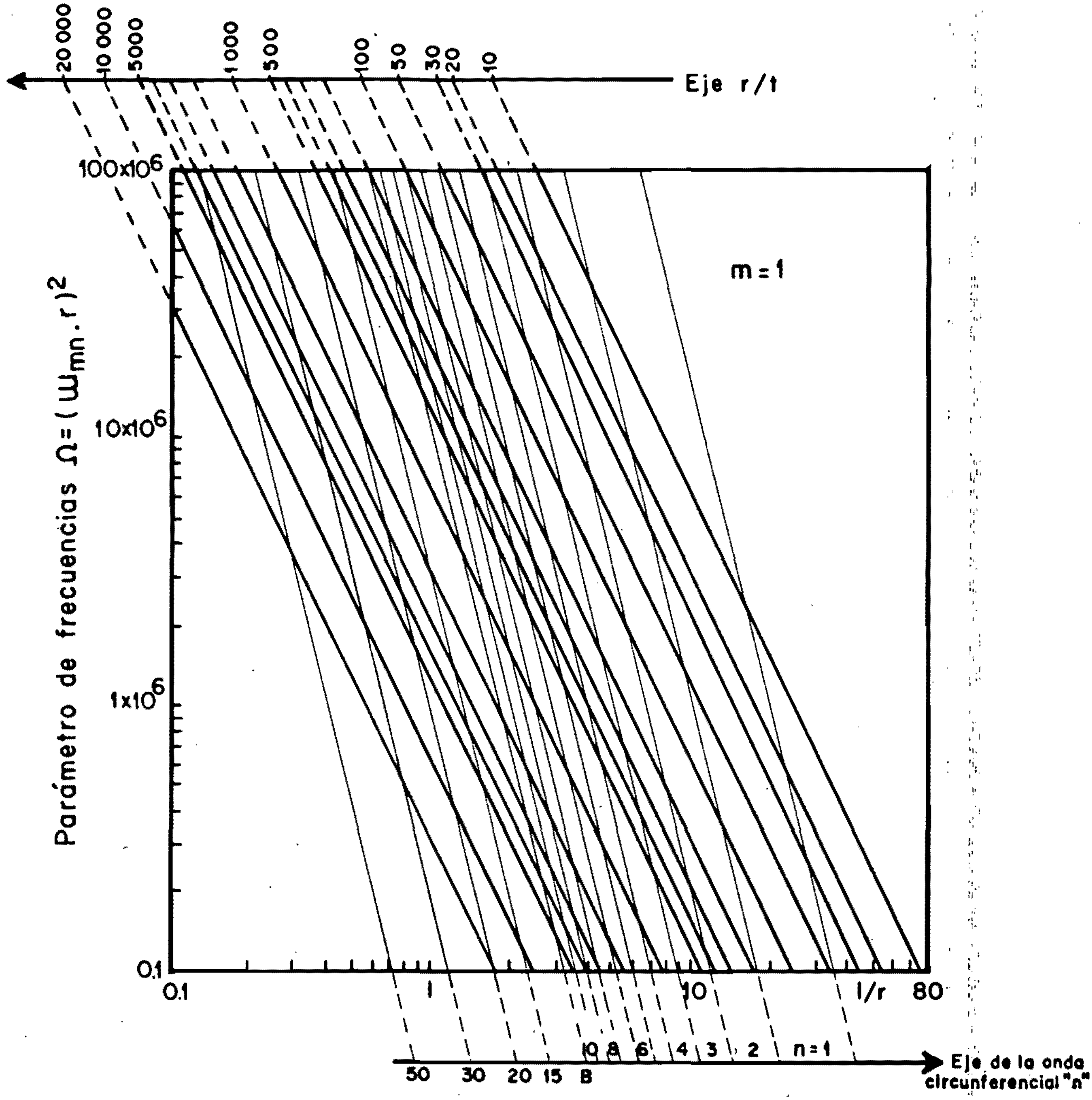


Fig. 3.12 Número de onda circunfererencial n asociado al parámetro de la frecuencia fundamental de un cilindro.

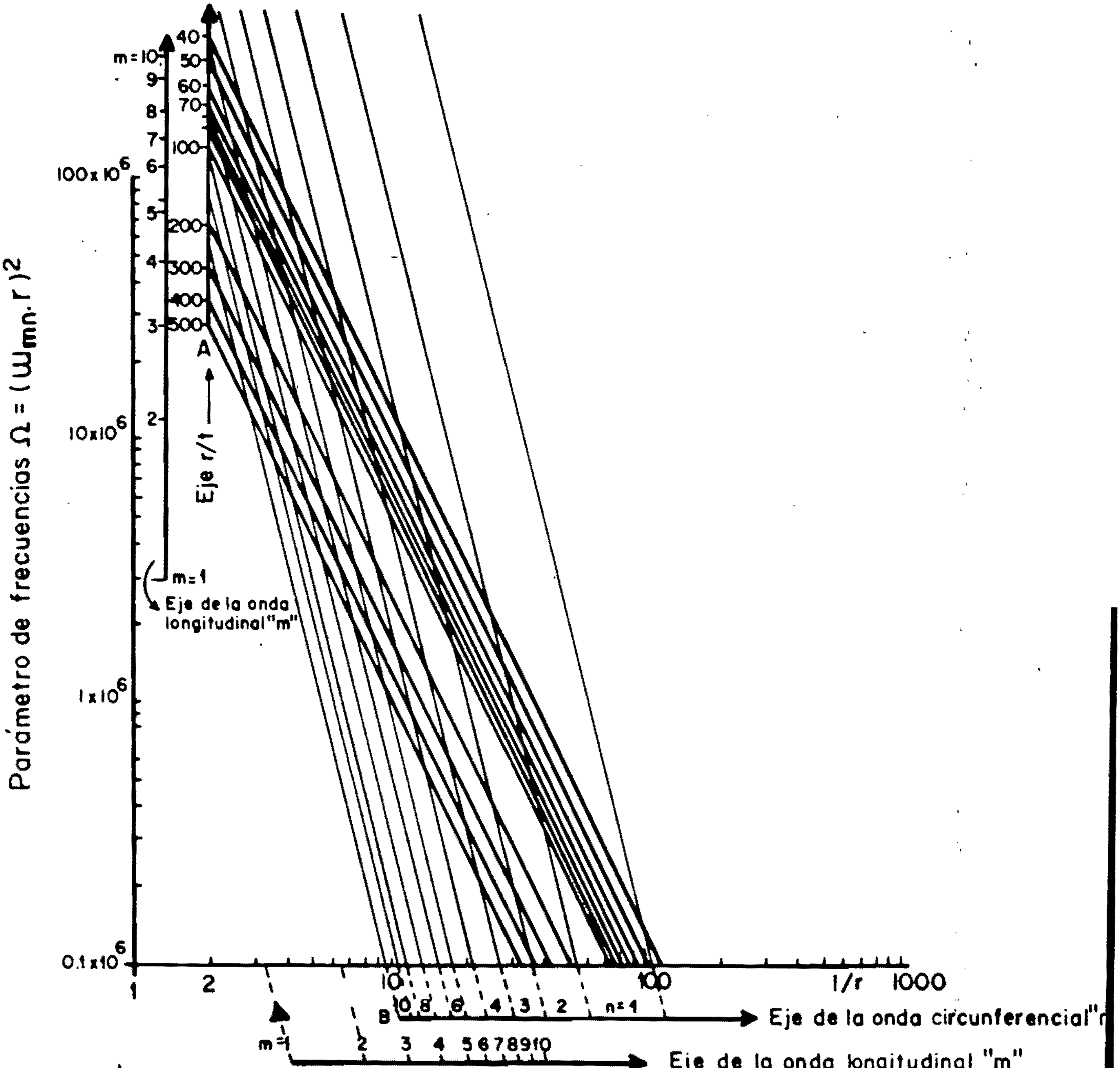


Fig.3.13 Nomograma de la frecuencia fundamental de cualquier cilindro para todo Modo (m, n).

3.2.2 *FRECUENCIAS NATURALES DE CASCARONES CILINDRICOS RIGIDIZADOS CON ANILLOS, ATIESADORES LONGITUDINALES Y/O SOPORTES INTERMEDIOS*

En la sección 3.2 se trató el análisis paramétrico de estructuras cilíndricas, isotrópicas, simplemente apoyadas, con frecuencias fundamentales bajas que regularmente requieren ser aumentadas con la incorporación de anillos, atiesadores longitudinales, y/o soportes intermedios arriostrados(ver fig.3.14). Para elevar estas frecuencias y satisfacer ciertos requisitos dinámicos de diseño, se complementa el análisis tratando el problema ortotrópico del mismo, haciendo uso de la expresión siguiente que considera la rigidez dominante, de flexión, como una medida equivalente de la rigidez en las direcciones circunferencial y longitudinal de un cilindro reforzado con elementos rigidizantes.

$$\frac{E\,t_e^3}{12(1-\nu^2)} = K + \frac{E\,I_i}{S_i} \qquad \text{con } i=1,2 \tag{3.28}$$

En donde

t_e es el espesor equivalente.

t es el espesor original

EI_i/S_i rigidez de anillos y atiesadores longitudinales, por unidad de longitud.

S_1, S_2 separación entre atiesadores y anillos, respectivamente.

I_1, I_2 momentos de inercia de los atiesadores y anillos, respectivamente, con cualquier forma y respecto a la tangente a la superficie media del cascarón cilíndrico.

$K=Et^3/12(1-\nu^2)$ es la rigidez de flexión, por unidad de longitud del cilindro original.

Si se sustituye K en la expresión (3.28) y mediante simplificaciones se logra la siguiente ecuación que define la separación, en dos direcciones ortogonales, de elementos rigidizantes en función de los momentos de inercia respectivos.

$$S_i = \frac{12(1-\nu^2)}{t_e^3 - t^3} I_i \qquad \text{con } i=1,2 \qquad (3.29)$$

Si el diseñador necesita elevar la frecuencia natural mínima de un cilindro, incorporando atiesadores y anillos, puede hacer uso de las fórmulas (3.22), para cualquier material, (3.25) o la figura 3.13, para estructuras de acero. El procedimiento de diseño se explica en el ejemplo 3.2.

3.2.2.1 Densidad de Frecuencias

Este tema ha recibido la atención de investigadores que estudian las consecuencias de no poner atención a la llamada *DENSIDAD DE FRECUENCIAS*. En pocas palabras, el concepto de densidad de frecuencias consiste en determinar el número de frecuencias naturales entre dos frecuencias fijas. Con respecto a esto, el objetivo sería obtener una estructura con frecuencias naturales lo más separadas unas de otras. Se logra así un intervalo con pocas frecuencias naturales o, equivalentemente, con una densidad baja de frecuencias, calculadas con la siguiente fórmula.

$$\delta = \frac{\text{número de frecuencias naturales}}{\text{intervalo de frecuencias}}$$

En donde δ es la densidad de frecuencias

Ejemplo 3.2

En la referencia 2 se analizó un cascarón en acero, con los siguientes datos en pulgadas:

l = 176.02
r = 103.46
t = 0.375
$I_1 = I_2 = 27.0\ in^4$

Se requiere diseñar un cascarón con una frecuencia fundamental de 93.0 HZ y calcular su densidad de frecuencias. Se dispone de elementos rigidizantes con una sección rectangular de 6" x 3/8".

Se determina el valor de los parámetros que intervienen en el análisis.

$r/t = 275.89$

$l/r = 1.70$

$m = 1$ (*frecuencias mínimas*)

A continuacion se define paso a paso el proceso de diseño.

PASO 1. Se calcula la frecuencia natural mínima del cilindro original no atiezado, con la gráfica 3.13. Para mayor precisión y facilidad de cálculo se utilizará la fórmula (3.25).

$$\omega_{mn} = \left[\frac{6.0 \times 10^9}{(r/t)}\right]^{1/2} \frac{m}{l} = 26.49\ \text{HZ}.$$

Con la expresión (3.26) se determina el valor entero de n asociado a la frecuencia anterior.

$$n = \text{ENTERO DE}\left\{\frac{\left[\frac{80}{3}(275.89)\right]^{1/4}}{\left(\frac{1.70}{1}\right)^{1/2}}\right\} = 7$$

Por lo tanto el cilindro original vibra en el modo $(m,n)=(1,7)$ a una frecuencia mínima de 26.49 HZ.

En la tabla 3.3(ref.2), el valor mínimo de ω_{mn} es 27.0 HZ en el modo $(m,n)=(1,7)$, calculados con la ecuación de frecuencias desarrollada por W.Soedel.[3] Se calcularon 180 frecuencias con $1\le m \le 15$, $1\le n\le 12$ y se determinó el intervalo de frecuencias entre 0 y 421 HZ. Por lo tanto, la densidad de frecuencias entre estos dos límites es:

$$\delta = \frac{180}{(421 - 0)} = 0.43$$

PASO 2. Se require elevar la frecuencia fundamental hasta 93 HZ. Para esto se calcula el espesor equivalente t_e, despejando el parámetro r/t_e de la fórmula (3.25), como sigue:

$$r/t_e = \frac{6.0 \times 10^9}{(\omega_{mn} r)^2}\left[\frac{m}{l/r}\right]^2 = \frac{6.0 \times 10^9}{(93.0 \times 103.46)^2}\left[\frac{1}{1.7}\right]^2 = 22.42$$

por lo tanto $t_e = 4.61$ in

Con la fórmula (3.26) se conoce el modo fundamental del cilindro equivalente (cilindro original rigidizado), calculado como sigue:

$$n = \text{ENTERO DE}\left\{ \frac{\left[\frac{80}{3}(22.42)\right]^{1/4}}{\left(\frac{1.7}{1}\right)^{1/2}} \right\} = 3$$

Por lo tanto, el cilindro equivalente vibra en el modo (1,3) con una frecuencia fundamental de 93 HZ.

Para conformar el cilindro equivalente se requiere reforzar ahora el original con atiesadores longitudinales y circunferenciales de sección rectangular 6"x 3/8" ($I = I_1 = I_2 = 27\ in^4$).

Con la fórmula (3.29) se fija la separación entre atiesadores longitudinales y anillos, respectivamente, como sigue:

$$S_1 = S_2 = \frac{12(1-\nu^2)}{t_e^3 - t^3}\, I = \frac{12(1 - 0.3^2)}{(4.61)^3 - (0.375)^3}\, 27 = 3.0''$$

Conocidas las medidas de las secciones y la separación máxima de los elementos rigidizantes, queda definido el cilindro equivalente.

La tabla 3.4(ref.2) contiene las frecuencias naturales del cilindro equivalente reforzado con anillos y atiesadores longitudinales . Se observa que, además de elevar la frecuencia fundamental a 93 HZ, la densidad de frecuencias, para el mismo intervalo de las frecuencias de excitación(de 0 a 421 HZ), es de δ = 37/421 = 0.09, con sólo 37 ocasiones en las que entraría en resonancia el cilindro rigidizado.

PASO 3. Si se desea elevar aún más la frecuencia fundamental y reducir más la densidad de frecuencias del cilindro equivalente, solamente se requiere dividir su longitud en J veces con J-1 soportes intermedios arriostrados.

Con la fórmula (3.25) se calculan las frecuencias fundamentales para diferentes valores de J, como se indica a continuación. En este caso el parámetro 1/r se transforma en (1/r)/J.

$$\omega^{*}_{mn} = \left[\frac{6.0 \times 10^{9}}{(r/t)\times r^{2}}\right]^{1/2}\left[\frac{m}{(1/r)/J}\right] = J*\omega_{mn} \qquad (3.30)$$

En donde:

ω_{mn} es la frecuencia fundamental del cilindro original atiesado(cilindro equivalente).

ω^{*}_{mn} es la frecuencia fundamental del cilindro original atiesado, rigidizado con soportes intermedios.

Al considerar el cilindro equivalente($r/t=22.42$, $\omega_{mn}=93$HZ) se pueden conocer la frecuencia amplificada y la densidad de frecuencias al incorporar soportes intermedios. Para ilustrar esta afirmación, consideremos los siguientes casos:

Para J=1(diseño original atiesado sin soportes intermedios), la nueva frecuencia se determina con la expresión (3.30), como sigue:

$$\omega^{*}_{mn} = J*\omega_{mn} = 93.0 \text{ HZ}$$

En el paso 2 se estableció que $\delta = 0.09$

Para J=2(un soporte intermedio).

$$\omega^{*}_{mn} = 186.0 \text{ HZ}$$

En la tabla 3.5(ref.2) existen 15 posibilidades de resonancia dentro del intervalo establecido en el problema, por lo tanto:

$$\delta = 15/421 = 0.03$$

Para J=4(tres soportes intermedios)

$$\omega^{*}_{mn} = 372.0 \text{ HZ}$$

En la tabla 3.6(ref.2) hay 7 frecuencias naturales dentro del intervalo dado, por lo tanto, la densidad de frecuencias en este caso es:

$$\delta = 7/421 = 0.01$$

TABLA 3.3

PASO	J	ω_{mn}	# DE FRECUENCIAS NATURALES	INTERVALO DE FRECUENCIAS	δ
1		26.49	180	421-0	0.43
2		93.00	37	421-0	0.09
3	1	* 93.00	37	421-0	0.09
	2	*186.00	15	421-0	0.03
	4	*372.00	7	421-0	0.01

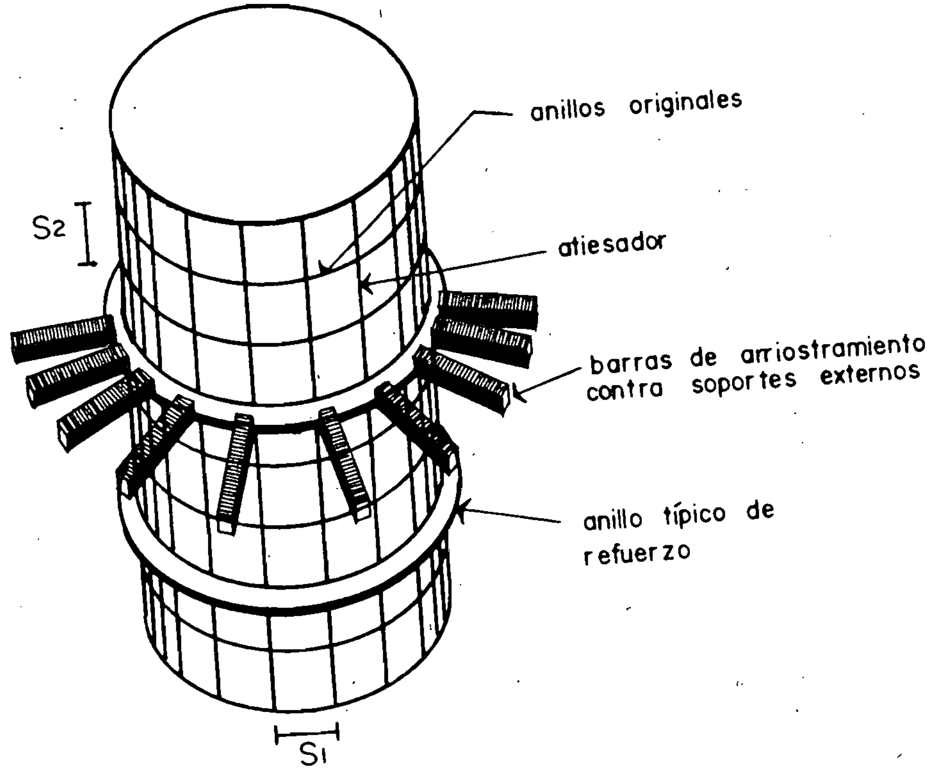
* Frecuencia fundamental del cilindro equivalente con soportes intermedios.

ω_{mn} y EL INTERVALO DE FRECUENCIAS se dan en HZ.

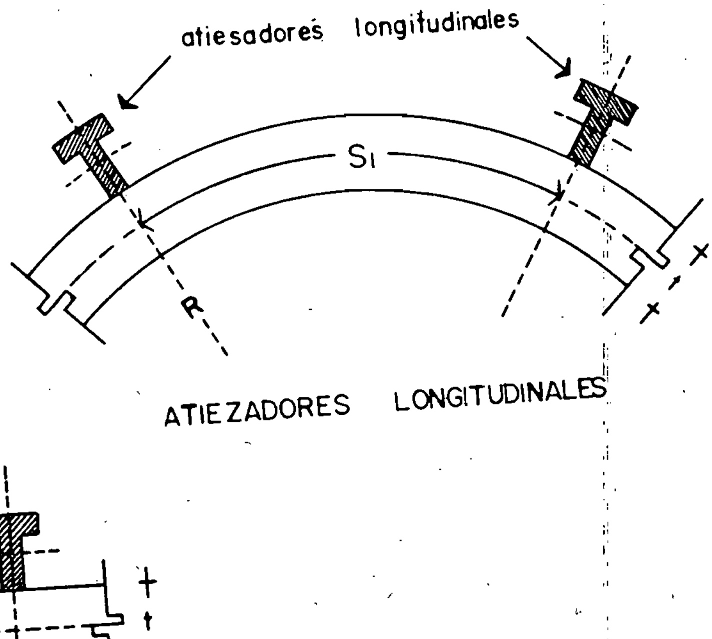
En la tabla 3.3 los pasos 1 y 2 corresponden al diseño del cilindro del ejemplo 3.2 mediante la incorporación de anillos y atiesadores longitudinales. Para que haya un aumento considerable en la frecuencia fundamental y una reducción importante de la densidad de frecuencias, se requiere de un gran aumento de la masa mediante la adición de estos elementos rigizantes. En el paso 3 las frecuencias se elevaron sensiblemente y se bajó notablemente su densidad cuando se utilizaron anillos de refuerzo adicionales como soportes intermedios(fig.3.14), que en cierto modo resultan ser más eficientes por su poca masa. En ambos casos, la frecuencia fundamental se incrementó considerablemente y las frecuencias naturales quedaron más espaciadas unas de otras, haciendo que la estructura fuera menos suseptible a perturbaciones de cualquier naturaleza.

Observación:

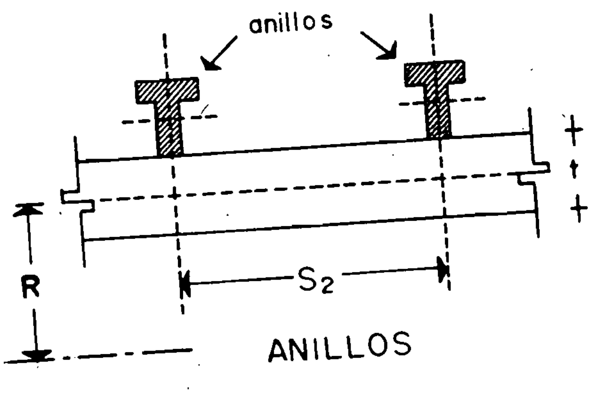
En el ejemplo anterior, si en lugar de secciones rectangulares de los elementos rigidizantes se utilizara sección T, con la misma cantidad de material, se lograrían mejores resultados al obtener frecuencias más altas y densidades más pequeñas.



CILINDRO RIGIDIZADO



ATIEZADORES LONGITUDINALES



ANILLOS

FIG. 3.14 ELEMENTOS RIGIDIZANTES EN UN CASCARON CILINDRICO

CAPITULO IV

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES DE DISEÑO

Las conclusiones que se derivan de este trabajo se refieren fundamentalmente a medir el alcance, aplicabilidad y confiabilidad del método de análisis desarrollado, basado en el modelo matemático de W.FLÜGGE[1].

En la referencia 2 se puso en duda el intervalo de aplicación de la ecuación (2.1) de SOEDEL[9], basada en las ecuaciones simplificadas de DONNELL. En esta teoría, al plantearse las ecuaciones de equilibrio dinámico, sólo se tuvo en cuenta la fuerza de inercia en la dirección transversal, y se adoptaron simplificaciones que condujeron a problemas de convergencia de los resultados obtenidos, sobre todo en el estudio de cilindros largos. Ver figura 3.9.

En el desarrollo teórico de este trabajo, el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio incluyó el efecto de las fuerzas de inercia en las tres direcciones de análisis. Este aspecto fué determinante para que los resultados obtenidos por la ecuación (3.20.a) fueran convergentes al graficarse sobre una línea recta en escala bilogarítmica, tal como se ilustra en la figura 3.10, y se observó que los parámetros que intervienen en el análisis, r/t, l/r, m, y n tienen una relación logarítmica bien definida con el parámetro de frecuencias naturales $(\omega_{mn} r)^2$. Estas relaciones se presentan para cualquier material de acuerdo con las ecuaciones (3.22) y (3.24), aplicables a cilindros isotrópicos de cualquier dimensión y a conos con ángulos del semivértice menores del 17°.[2] La ecuación (3.23) proporciona el valor entero de n para el cual se da el valor mínimo dado por (3.22) y por (3.24), mientras que para estructuras de acero la fórmula (3.26) hace lo propio con las ecuaciones (3.25) y (3.27). Por otro lado, el parámetro de frecuencias naturales resulta ser una cantidad invariante en cilindros con idénticas relaciones (r/t) y [(l/r)/m], y su valor varía proporcionalmente con el cuadrado de *m* para (r/t) y (l/r) fijos, ver figura 3.13 y ecuación (3.25), mientras que la constante de proporcinalidad depende de las propiedades mecánicas del material.

En el nomograma de la figura 3.13 se resumen todos los resultados del análisis paramétrico realizado en este trabajo para cascarones cilíndricos circulares de acero. En esta figura se puede determinar fácilmente el modo y la frecuencia mínima en la que puede vibrar un cilindro de acero si se conocen las dimensiones del mismo. Como alternativa de diseño, se puede llegar a los mismos resultados, y con mayor precisión, si se utiliza la expresión (3.26) o la (3.27) previo cálculo de n con (3.26).

En términos prácticos las fórmulas (3.22) a la (3.27) resultan ser expresiones generales simples, muy precisas y de fácil aplicación en el diseño de cascarones cilíndricos circulares, construidos con diferentes materiales, y conos con ángulos del semivértice menores a 17º.

En la sección 3.2.2 se complementa el análisis con el estudio de cilindros rigidizados. En este caso las frecuencias naturales de un cascarón cilíndrico circular o cónico se incrementan al utilizar atiesadores longitudinales y anillos que en cierto modo rigidizan la estructura pero con un aumento considerable de masa, lo que los hace ineficientes. En cambio, los soportes intermedios(anillos de refuerzos) resultan ser más efectivos al adicionarse a estos elementos rigidizantes, lográndose incrementar la frecuencia natural mínima en la misma proporción en la que se divide su longitud. En ambos casos se obtienen reducciones importantes en la densidad de frecuencias.

En términos generales, los resultados obtenidos én este trabajo, han conducido a presentar nomogramas y fórmulas exactas, prácticas y confiables, con un intervalo de aplicación muy amplio que se traducirán en economía en tiempo de análisis y de diseño de estructuras circulares y cónicas de pared delgada, tales como tuberías de desfogue, aviones construidos con materiales ligeros de gran resistencia, chimeneas y todo tipo de estructuras cilíndricas o cónicas que requieran un control adecuado de las vibraciones y desplazamientos.

Se espera que este estudio se proyecte en nuevos análisis en los que los resultados logrados aquí sirvan de punto de partida para la solución de problemas dinámicos en los que se requiera conocer varias de las formas naturales de vibración de un cascarón y evitar que una perturbación produzca daños en la estructura. Alguna de las investigaciones que se pueden adelantar, basadas en este trabajo serían, entre otras, por ejemplo, el análisis de la respuesta de un cascarón cilíndrico sometido a la acción de cargas variables en magnitud y posición; o el estudio de vibraciones libres y forzadas con condiciones diferentes de apoyos en sus extremos; o un análisis más profundo del contenido de frecuencias dentro de un intervalo dado.

REFERENCIAS

1. W. FLUGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Velag,N Y Heidelberg Berlin, 1973.

2. J.L. URRUTIA-GALICIA, *Vibración Libre en Conos y Cilindros*, I. de I., Octubre, 1987.

3. W. SOEDEL, *Vibrations of Plates and Shells*, Marcel Dekker Inc., N.Y. 1981.

4. M. L. BARON and H.H.BLEICH, *Tables for Frequencies and Modes of Free Vibration of Infinitely Long Thin Cylindrical Shells*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, June, 1954, pp 178-184.

5. V.I. WEINGARTEN, *Free Vibrations of Conical Shells*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, August, 1965.

6. A.W. LEISSA and K.M. IYER, *Modal Response of Circular Cylindrical Shells with Structural Damping*, Journal of Sound and Vibration, (1981)77(1), pp 1-10.

7. S. TIMOSHENKO, *Vibrations Problems in Engineering*; D.Van Nostrand Company, Inc.,1956.

8. S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*; Mc Graw Hill International, 1959.