



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONFIGURACIONES DE  
EQUILIBRIO DE POBLACIONES  
AUTOGRAVITANTES DE  
ESTRELLAS BAJO ESQUEMAS DE  
GRAVEDAD MODIFICADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

GUSTAVO ENRIQUE GARCÍA DE JESÚS

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Xavier Nicolás Hernández Doring



2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno  
García  
de Jesús  
Gustavo Enrique  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
407063363
2. Datos del tutor  
Dr  
Xavier Nicolás  
Hernández  
Doring
3. Datos del sinodal 1  
Dra  
Myriam  
Mondragón  
Ceballos
4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar
5. Datos del sinodal 3  
Dra  
Enriqueta  
Hernández  
Saldaña
6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Francisco Javier  
Sánchez  
Salcedo
7. Datos del trabajo escrito  
CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO DE POBLACIONES AUTOGRAVITANTES DE ESTRELLAS BAJO ESQUEMAS DE GRAVEDAD MODIFICADA  
81 p  
2012



CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO DE  
POBLACIONES AUTOGRAVITANTES DE  
ESTRELLAS BAJO ESQUEMAS DE  
GRAVEDAD MODIFICADA

Gustavo Enrique García de Jesús



*Dedicado a  
las tres personas que han marcado mi vida:  
mi mamá, mi papá y mi hermano.*



# Agradecimientos

Me gustaría hacer un agradecimiento muy especial a mi mamá Gisela, a quien quiero y aprecio mucho. Siempre he valorado todo el esfuerzo y cada sacrificio que ella ha hecho para lograr sacarnos adelante a mi hermano y a mí, porque a lo largo de mi vida se ha convertido en una madre y un padre al mismo tiempo, además de brindarme su cariño y apoyo en cada momento de mi carrera, por estar siempre a mi lado para darme ánimos cada vez que se me presentaban obstáculos que parecían insuperables. Siempre estaré en deuda contigo.

A mi papá Francisco, aunque su estancia a mi lado fue breve, lo recuerdo con mucho cariño. Él me mostró que cuando uno cae debe aprender a levantarse, aún sigo poniendo en práctica su consejo, me ha funcionado muy bien. Se que en estos momentos se sentiría orgulloso de mí.

A Francisco Ignacio, quien se ha convertido en mi ejemplo a seguir, con quien he compartido los momentos más felices y difíciles de mi vida. Por enseñarme todo lo que sé, por su apoyo incondicional en cada jornada del día, hay cosas que no hubiera podido lograr sin su ayuda. Las cosas saldrán bien hermano, ánimo lo mejor está por venir.

A una persona sumamente especial para mí, quien ha estado a mi lado desde que yo era un niño. Sigo considerando que encontrarlo en mi camino no fue coincidencia. Por apoyarme a mí y a mi hermano, pero en especial por ayudar a mi mamá. Valoro demasiado todos estos años en los que ha compartido parte de su vida con nosotros. Lo quiero mucho Don Rubén.

A toda mi familia, en especial a mis abuelitos Ignacio y Barbarita, quienes algún día me dijeron que les gustaría vivir muchos años más para verme lograr muchas cosas a futuro, les prometo que así será. Sus sabios consejos, me han sido de mucha ayuda.

A mi tío Omar de Jesús, por ayudarme a dar el primer paso en mi vida universitaria, por sus buenos consejos e incontables motivaciones.

A mi prima Carla Isabel, por brindarme siempre su confianza y cariño, por hacerme ver que siempre tenemos una segunda oportunidad para comenzar de nuevo.

A mis dos grandes amigos de toda una vida, Vladimir e Iván, con quienes he crecido día tras día. Sus muestras de apoyo me han enseñado que no es necesario vivir en el mismo lugar para darme cuenta de que cuento con ustedes hermanos.

A mis amigos Héctor, Mijail, Malinalli, David, Antonio, Ricardo y Rosa, con quienes he compartido las más grandes experiencias dentro y fuera de la Facultad.

A mi buen amigo y colega Luis Abraham, por ofrecerme su amistad y confianza, la cual valoro mucho.

A Fernando Cornejo, por haberme invitado a formar parte del camino de la docencia en la Facultad.

A mi querida maestra Elena de Oteyza de Oteyza, a quien admiro mucho, por compartir sus enseñanzas conmigo y darme la oportunidad de colaborar con ella.

A mi maestro y amigo Daniel Mayoral, porque supo guiarme durante mi inicio y termino de mi carrera, dándole respuesta a mis múltiples preguntas.

A mi tutor, el Dr. Xavier Hernández Doring, por haberme permitido realizar mi tesis bajo su asesoría. Por su ayuda y dedicación en cada momento de la elaboración de mi tesis. Es un excelente investigador a quien respeto y admiro mucho.

A mis sinodales, la Dra. Myriam Mondragón, el Dr. Leonardo Patiño, la Dra. Enriqueta Hernández y el Dr. Francisco Javier Sánchez, por todos sus acertados comentarios y valiosas sugerencias a mi tesis, las cuales hicieron posible la elaboración de un trabajo escrito interesante.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Astronomía, lugares que se convirtieron en parte importante de mi formación universitaria.

*Ofrezco esta obra como los principios matemáticos de la filosofía, porque todo el problema filosófico parece consistir en lo siguiente: investigar las fuerzas de la naturaleza a partir de los fenómenos de los movimientos, y entonces, partiendo de estas fuerzas, demostrar los otros fenómenos.*

**Newton, Prefacio de los *Principia* (1686).**

*¿Qué es lo que hace girar a los planetas alrededor del Sol? En tiempos de Kepler algunas personas respondían a esta pregunta diciendo que había ángeles detrás de ellos batiendo sus alas y empujando a los planetas a lo largo de la órbita. Como verá, la respuesta no está muy lejos de la verdad. La única diferencia es que los ángeles están situados en una dirección distinta y sus alas empujan hacia adentro.*

**R. P. Feynman, *The Character of Physical Law* (1965).**



# Prefacio

La necesidad de un componente de materia oscura para explicar la dinámica de sistemas autogravitantes de estrellas, se ha visto cuestionada por la incapacidad de demostrar experimentalmente la existencia de este componente. Los modelos de gravedad modificada representan una alternativa para explicar la dinámica de estos sistemas, sin la necesidad de introducir un componente exótico, suponiendo que la *Ley de Gravitación Universal* de Newton no se cumple a escalas de aceleraciones pequeñas, del orden de  $10^{-10} m/s^2$ .

La tendencia a modificar las expresiones que rigen la dinámica galáctica data de la década de 1960. Sin embargo, la propuesta desarrollada desde 1983 por Mordehai Milgrom, a la que llamó *Dinámica Newtoniana Modificada* (MOND, por sus siglas en inglés M**O**dified Newtonian Dynamics), parece constituirse en elemento fundamental del entendimiento de la dinámica propia de sistemas galácticos. Esta modificación introduce una aceleración de escala  $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} m/s^2$ , esta aceleración de escala muestra la existencia de un régimen Newtoniano y un régimen MONDiano. La propuesta MOND permite predecir el movimiento de una partícula prueba en el campo de una distribución de masa arbitraria, tal como una galaxia. MOND y la Materia Oscura fueron inicialmente propuestas para explicar un fenómeno similar: la discrepancia de masa en sistemas galácticos. La materia oscura no describe de forma correcta los resultados alcanzados por MOND en la descripción de la fenomenología galáctica. Hoy en día se tiene una versión del paradigma de la Materia Oscura: el modelo de Materia Oscura Fría, pero este nuevo modelo no puede predecir realmente la discrepancia de masa en los sistemas galácticos, así como también es incapaz de predecir la fracción de bariones presentes en una galaxia.

El éxito de las predicciones realizadas por MOND implica que sólo los bariones determinan los campos de aceleración de objetos galácticos. Esto entra en conflicto con las expectativas en el paradigma de la Materia Oscura Fría, debidas a la formación y a la evolución de los objetos galácticos, debido a que bariones y Materia Oscura se comportan muy diferentes durante la evolución.

Resultados recientes sobre el aplanamiento de las curvas de rotación de galaxias espirales, la dispersión de velocidades de las galaxias enanas esferoidales, las lentes gravitacionales debidas a grupos masivos de galaxias, han sido modelados

de manera satisfactoria en términos de una modificación a la Ley de Gravitación Universal. Se presenta por lo tanto un buen acuerdo con la dinámica observada dentro de las escalas galácticas sin el requerimiento de la materia oscura.

En este trabajo se hicieron pruebas de los modelos de gravedad modificada en poblaciones autogravitantes de estrellas, fijándonos en las recientes mediciones de dinámica estelar en las regiones externas de cúmulos globulares de nuestra galaxia.

En particular, se realizó el estudio de la galaxia NGC 4649, la cual es una galaxia elíptica masiva que pertenece a la constelación de Virgo. Esta galaxia fue modelada como una población de estrellas autogravitantes en configuraciones de equilibrio con simetría esférica, bajo un esquema de gravedad modificada, realizando para ello una modificación a la ley de gravitación de Newton. La ley de fuerzas que se propone en este trabajo escrito, reproduce los límites Newtoniano (aceleraciones mayores comparadas con  $a_0$ ) y MONDiano (aceleraciones menores comparadas con  $a_0$ ) de forma correcta. Así mismo, fue posible obtener un perfil de dispersión de velocidades y un perfil de luminosidad superficial para esta galaxia elíptica masiva, ambos consistentes con los datos observacionales. El modelo propuesto también permitió determinar la masa total y luminosidad total de la galaxia NGC 4649 en buen acuerdo con los valores que han sido reportados.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Materia Oscura . . . . .	7
1.1.1. Modelo de Materia Oscura Fría . . . . .	12
1.2. Modelos de Gravedad Modificada . . . . .	14
1.3. MODified Newtonian Dynamics (MOND) . . . . .	15
1.3.1. Propuesta Inercial de MOND . . . . .	15
1.3.2. Propuesta Gravitacional de MOND . . . . .	16
1.3.3. Velocidad de Rotación de Galaxias Espirales . . . . .	17
1.3.4. Relación de Tully-Fisher como una consecuencia de MOND	20
1.3.5. Logros y Dificultades de la propuesta MOND . . . . .	20
1.4. Teoría <i>AQUadractic Lagrangian</i> (AQUAL) . . . . .	22
1.5. Teorías MOND Relativistas . . . . .	25
<b>2. Ley de Fuerzas de Gravedad Extendida</b>	<b>27</b>
2.1. Ley de Fuerzas . . . . .	27
2.2. El Modelo de Fuerza . . . . .	33
2.3. Restricciones a Teorías de Gravedad Modificada usando el Sistema Tierra-Luna . . . . .	38
2.4. Formulación Relativista de la Ley de Fuerzas . . . . .	41
2.5. Configuraciones de Equilibrio . . . . .	42
2.5.1. Ecuación de Estado . . . . .	44
2.5.2. Ecuación de Equilibrio Hidrostático para un Sistema Auto- gravitante . . . . .	45
2.6. Ejemplos de Configuraciones de Equilibrio . . . . .	49
<b>3. Resultados</b>	<b>59</b>
3.1. Forma de los Perfiles de Brillo de Galaxias Elípticas . . . . .	59
3.2. Función de Sérsic para el Perfil de Brillo Superficial . . . . .	61
3.3. Tratamiento de la Galaxia Elíptica Masiva NGC 4649 Bajo Esque- mas de Gravedad Modificada . . . . .	64
<b>4. Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>



# Índice de figuras

1.1.	Curva de Rotación típica de una Galaxia Espiral. . . . .	18
2.1.	La figura muestra el perfil de densidad volumétrico de equilibrio isotérmico para un modelo de muestra, tomando una densidad central $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ , una dispersión de velocidad constante $\sigma = 7 km s^{-1}$ y un índice $n = 4$ en la ley de fuerzas. . . . .	50
2.2.	La figura muestra el perfil de masa que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), tomando los valores $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ y $\sigma = 7 km s^{-1}$ , se obtiene una masa total, $M_{tot}$ , de $3.65 \times 10^6 M_\odot$ , y un radio volumétrico a media masa de $0.35 kpc$ . . . . .	51
2.3.	La figura muestra el perfil de densidad superficial de masa proyectado que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), dados los valores de $n = 4$ , $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ y $\sigma = 7 km s^{-1}$ . . . . .	52
2.4.	La figura muestra el perfil de masa proyectada, la cual se calcula a partir de los valores obtenidos de la densidad superficial de masa, $\Sigma(R)$ , del modelo que se propone. . . . .	53
2.5.	La figura muestra el perfil de densidad volumétrico de equilibrio isotérmico para un modelo de muestra, tomando una densidad central $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ , una dispersión de velocidad constante $\sigma = 9.5 km s^{-1}$ y un índice $n = 6$ en la ley de fuerzas. . . . .	54
2.6.	La figura muestra el perfil de masa que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), tomando los valores $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ y $\sigma = 9.5 km s^{-1}$ , se obtiene una masa total, $M_{tot}$ , de $1.39 \times 10^7 M_\odot$ , y un radio a media masa volumétrico de $0.54 kpc$ . . . . .	55
2.7.	La figura muestra el perfil de densidad superficial de masa proyectada que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), dados los valores de $n = 6$ , $\rho_0 = 0.1 M_\odot pc^{-3}$ y $\sigma = 9.5 km s^{-1}$ . . . . .	56
2.8.	La figura muestra el perfil de masa proyectada, la cual se calcula a partir de los valores obtenidos de la densidad superficial de masa, $\Sigma(R)$ , del modelo que se propone. . . . .	57

3.1.	La figura muestra el mejor ajuste de la función de Sérsic en su forma logarítmica, $\mu(R)$ (línea continua), para el perfil de brillo superficial de la galaxia elíptica masiva NGC 4649. También se muestra el perfil de brillo superficial utilizando fotometría [43](puntos $\diamond$ ) y los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe [45](puntos con barras de error Poissonianas). . . . .	63
3.2.	La figura muestra la forma de la dispersión de velocidad volumétrica (curva continua), $\sigma(r)$ , que se utiliza para el modelo de la galaxia elíptica masiva NGC 4649. . . . .	67
3.3.	La figura muestra el perfil de densidad de masa volumétrica de la galaxia NGC 4649 para el modelo de mejor ajuste a $\Sigma(R)$ y $\sigma(R)$ . La línea vertical indica el punto donde $x = 1$ . . . . .	68
3.4.	La figura muestra el perfil de masa volumétrica para el mejor ajuste del modelo para la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde $x = 1$ . . . . .	69
3.5.	La figura muestra el mejor ajuste del perfil radial de la dispersión de velocidad proyectado (curva continua), $\sigma_p(R)$ , utilizando el modelo propuesto para la galaxia elíptica masiva NGC 4649. Así mismo se muestra el perfil de dispersión de velocidad medida a partir de rendija larga reportados en [47], adaptado a partir de datos de rendija larga cinemática reportados en [48](puntos $\diamond$ ) y el perfil que se obtiene usando PNe [45](puntos con barras de error). También se muestra una estimación de los perfiles de máxima y mínima dispersión de velocidad consistente con los rangos de error de los datos observados (curvas punteadas). . . . .	71
3.6.	La figura muestra el perfil de densidad superficial proyectado de la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde $x = 1$ . . . . .	72
3.7.	La figura muestra el perfil de masa proyectada obtenido para la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde $x = 1$ . . . . .	73
3.8.	La figura muestra el mejor ajuste del perfil de brillo superficial de la galaxia NGC 4649 que se obtiene con el modelo que se propone (curva continua gruesa), así mismo se muestra el mejor ajuste para el perfil de brillo superficial utilizando la función de Sérsic (curva continua delgada) y los perfiles de máximo (curva punteada superior) y mínimo brillo superficial (curva punteada inferior) consistentes con los rangos de error de los parámetros de la función de Sérsic que reproducen los perfiles de brillo de la galaxia NGC 4649. También se muestra el perfil de brillo superficial utilizando fotometría [43](puntos $\diamond$ ) y los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe [45](puntos con barras de error Poissonianas). La línea vertical indica el punto donde $x = 1$ . . . . .	75

# Capítulo 1

## Introducción

*“Si he tenido una visión más amplia, es porque me he subido a los hombros de gigantes”*

**Isaac Newton.**

Desde su aparición sobre la Tierra, el hombre ha tratado de entender el movimiento de los cuerpos celestes, y tal vez, éste es el proceso más interesante en la historia de la ciencia.

El Astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) escribió numerosas obras de astronomía en las que daba una descripción detallada del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Kepler realizó el descubrimiento de las leyes del movimiento planetario, como resultado del análisis cuidadoso de las mediciones astronómicas y datos recabados por Tycho Brahe (1546-1601) sobre las posiciones de los planetas en su movimiento a través de la bóveda celeste. Estas leyes denominadas *leyes de Kepler*, son una descripción cinemática del movimiento de los planetas alrededor del Sol [1]. Las leyes de Kepler son:

**Primera ley de Kepler:** Los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, en donde el Sol ocupa uno de sus focos.

**Segunda ley de Kepler:** La línea que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

**Tercera ley de Kepler:** El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media desde el Sol.

La siguiente etapa en la historia de la Astronomía fue una discusión de la dinámica del movimiento planetario y un esfuerzo por determinar la interacción responsable de tal movimiento.

Isaac Newton (1643-1727) fue el encargado de construir una teoría del movimiento. El análisis del movimiento realizado por Newton se resume en sus famosas “tres leyes del movimiento”. En su obra los *Principia* (publicado en 1687) se encuentra

todo el trabajo de Newton sobre el movimiento. Las tres leyes de movimiento de Newton son las leyes clásicas básicas que explican el movimiento de los cuerpos. Las *tres leyes de Newton* son [2]:

**Primera Ley (inercia):** Si ninguna fuerza neta actúa sobre una partícula, es posible seleccionar un conjunto de sistemas de referencia, llamados inerciales, tales que observada la partícula desde los mismos, su movimiento se produce sin cambio de velocidad, esto es, un cuerpo se mueve con velocidad constante hasta que una fuerza externa actúa sobre el mismo. La tendencia de un cuerpo a evitar un cambio en su movimiento se llama *inercia*.

**Segunda ley (ecuación de movimiento):** Observado desde un sistema de referencia inercial, la razón de cambio que sufre el momento lineal de una partícula equivale a la fuerza neta que actúa sobre la misma:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ . El momento lineal es el producto de la masa por la velocidad de la partícula:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . La segunda ley de Newton es una de las leyes más importantes y fundamentales de la física clásica.

**Tercera ley (acción y reacción):** Siempre que una partícula A ejerce una fuerza sobre otra partícula B, se tiene que B ejerce simultáneamente una fuerza sobre A que es igual en magnitud y en dirección pero de sentido contrario:  $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ .

Además de formular las tres leyes de movimiento, Newton estudió el movimiento de los cuerpos celestes (en particular los planetas y la luna). Reflexionó acerca de la fuerza que actúa para conservar a la Luna en su órbita casi circular alrededor de la Tierra.

Newton se puso a también a pensar en el problema de la aceleración que sufren los cuerpos al caer, concluyendo que debía ejercerse una fuerza sobre ellos, la llamada *fuerza de gravedad*. Cada objeto sobre la superficie de la Tierra siente ésta fuerza de gravedad y, sin importar dónde se encuentre, ésta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra. Dado este resultado Newton concluyó que era la Tierra la que ejerce la fuerza gravitacional sobre los cuerpos en su superficie. Newton se dio cuenta de que la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto decrecía con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra, además se dio cuenta de que ésta fuerza no dependía únicamente de su distancia sino también de su masa, resultando ser directamente proporcional a ella.

Newton dió un paso más en su análisis de la gravedad. Determinó que la fuerza necesaria para mantener los diferentes planetas en sus órbitas alrededor del Sol disminuía con el inverso del cuadrado de su distancia al Sol. Esto le hizo creer

---

que era también la fuerza gravitacional que actuaba entre el Sol y cada uno de los planetas la responsable de mantenerlos en sus respectivas órbitas. Y si la gravedad actuaba entre esos cuerpos celestes, debía también hacerlo entre todos los objetos.

La expresión matemática de la fuerza de atracción gravitacional es:

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Se puede establecer la ley de gravitación universal de Newton diciendo que:

*La fuerza  $\mathbf{F}$  que ejerce un objeto de masa  $M$ , sobre otro objeto de masa  $m$ , es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$ , que las separa.*

La constante  $G$  que aparece en la ecuación (1.1) es una constante universal que debe medirse experimentalmente y tiene el mismo valor numérico para todos los objetos. El valor de  $G$  debe ser muy pequeño debido a que no nos damos cuenta de la existencia de ninguna fuerza entre objetos de tamaño ordinario. En 1798, Henri Cavendish (1731-1810) midió por primera vez la fuerza entre dos objetos ordinarios, logrando de esta manera determinar el valor de  $G$ . Su valor en el Sistema Internacional de Unidades (SI) es de  $6.67428 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ .

Newton logró demostrar que las leyes de Kepler podían derivarse matemáticamente a partir de sus leyes de movimiento y de su ley de gravitación universal. También demostró que para cualquier forma razonable para la ley de la fuerza gravitacional (ec. (1.1)), sólo una que dependa del cuadrado inverso de la distancia es totalmente consistente con las tres leyes de Kepler. Newton utilizó las leyes de Kepler como una prueba en favor de su ley de gravitación universal [2].

El descubrimiento de las tres leyes de movimiento y de la ley de gravitación universal de Newton ha sido uno de los mayores logros del pensamiento humano. Gracias a estas leyes, Newton fue capaz de describir el movimiento de los cuerpos sobre la Tierra y qué era lo que producía su movimiento. El movimiento de los planetas alrededor del Sol, y el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra fueron explicados sobre las mismas bases, esto es, los movimientos de los cuerpos celestes y de los cuerpos terrestres obedecen las mismas leyes. La mecánica de Newton con sus tres leyes del movimiento y la ley de gravitación Universal fueron consideradas la base del funcionamiento del Universo.

A la Fuerza de Gravedad (ec. (1.1)) se le asocia una aceleración utilizando la ecuación de movimiento (dada por la segunda ley de Newton):

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (1.2)$$

Esto resulta importante debido a que a escalas galácticas, del orden de  $10^4$  parsecs (1 parsec  $\equiv 1 \text{ pc} \equiv 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$ ), la fuerza dominante es la fuerza de gravedad. Un objeto que se mueve describiendo una trayectoria circular de radio  $r$ , con rapidez uniforme  $v$ , sufre una *aceleración centrípeta* (se le llama aceleración centrípeta debido a que se dirige hacia el centro del círculo) dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.3)$$

Las galaxias son objetos gravitacionales puros; ya que en ellos sólo interviene la inercia y la fuerza gravitacional. En cambio, en las estrellas, el equilibrio del objeto se logra combinando la fuerza gravitacional con las fuerzas nucleares. Las estrellas, cerca de 100 000 millones en una galaxia, forman un campo gravitacional que las mantiene juntas, pero al girar alrededor de sí mismas, la fuerza centrífuga del movimiento en torno a la galaxia compensa esta fuerza gravitacional, de esta manera las estrellas se encuentran en un equilibrio estable (equilibrio centrífugo), al girar alrededor de la galaxia.

La única herramienta que tienen los astrónomos para estudiar y describir un sistema estelar, es conocer de una manera correcta las características y comportamiento de la luz que proviene de los objetos de estudio, esto, debido a que la luz siendo una onda electromagnética, viaja y se propaga en el espacio. Los sistemas estelares varían en más de catorce órdenes de magnitud en tamaño y masa, de estrellas binarias, grupos de estrellas que contienen entre  $10^2$  y  $10^6$  estrellas, galaxias que contienen de  $10^5$  a  $10^{12}$  estrellas, hasta enormes grupos que contienen miles de galaxias. Al considerar un objeto astronómico en particular, formado por estrellas, gas y polvo, los astrónomos buscan determinar parámetros físicos tales como la masa total y la luminosidad total del mismo. Existen dos maneras de determinar la masa estelar de un objeto astronómico: la primera es a partir de la masa luminosa,  $M_L$ , que se obtiene al realizar un estudio de la luminosidad del objeto y la otra es a partir de la masa dinámica,  $M_D$ , que se determina por medio de la dinámica del objeto en estudio.

Resulta ser que el Sol es una estrella normal, de la cual ya se conoce su masa total  $M_{\odot} = 1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}$  y su luminosidad total bolométrica (la razón de energía total integrada sobre todas las longitudes de onda)  $L_{\odot} = 3.845 \times 10^{26} \text{ W}$  [3]. Así mismo, se tiene que las galaxias están formadas en promedio por estrellas

de tipo Sol. Si se observa una galaxia cualquiera cuya luminosidad es  $n$  veces la luminosidad del Sol, se tiene que a primera aproximación la galaxia tiene  $n$  veces la masa del Sol.

Pero al efectuar un análisis exacto, resulta importante tomar en cuenta la presencia de otros componentes bariónicos, tales como polvo y gas, la presencia de una distribución de masas en las poblaciones estelares y variaciones en sus propiedades luminosas como funciones de la edad y metalicidad para estimar la masa asociada al componente luminoso de una galaxia, la cual llamaremos la masa luminosa  $M_L$ .

En cambio, para determinar la masa dinámica  $M_D$ , se toma en cuenta la energía cinética  $K$  de un sistema estelar de masa  $M$ , la cual está dada por [3]:

$$K = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle, \quad (1.4)$$

donde  $\langle v^2 \rangle$  es el promedio de las velocidades al cuadrado de un sistema de estrellas.

Algunas veces resulta conveniente caracterizar el tamaño de un sistema estelar haciendo uso de su radio gravitacional,  $r_g$ , el cual se define como:

$$r_g \equiv \frac{GM^2}{|W|}, \quad (1.5)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación de Newton,  $M$  la masa del sistema y  $W$  su energía potencial,  $r_g$  resulta ser el radio que contiene la mitad de la masa, o en términos de observables, la mitad de la luminosidad [3].

Utilizando el teorema del virial en su forma escalar, que dice que *dos veces la energía cinética más la energía potencial es igual a cero* ( $2K + W = 0$ ), para una configuración de estado estacionario y la definición de  $r_g$  (ec. (1.5)), es posible obtener una relación para la masa total del objeto.

Al relacionar la ecuación (1.4) con el teorema del virial se tiene que:

$$M\langle v^2 \rangle + W = 0, \quad (1.6)$$

La energía potencial de amarre del sistema estelar,  $W < 0$ , está dada por:

$$W = -\frac{GM^2}{r_g}. \quad (1.7)$$

Al sustituir la ecuación (1.7) en la ecuación (1.6), y despejando  $\langle v^2 \rangle$  se obtiene el promedio de las velocidades al cuadrado de un sistema de estrellas en términos

de  $G$ ,  $M$  y  $r_g$ :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{GM}{r_g}, \quad (1.8)$$

o bien puede escribirse en términos del potencial gravitacional  $W$ :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{-W}{M} = \frac{|W|}{M}. \quad (1.9)$$

Esta última ecuación es la que se resuelve para obtener el valor de la masa dinámica, considerando  $M = M_D$ , del sistema galáctico.

Si se realiza el cociente de la masa dinámica  $M_D$  sobre la luminosidad,  $L$ , para el caso de poblaciones puramente estelares se obtiene un cociente  $M/L$  en unidades solares (Masa solar  $M_\odot$  y Luminosidad solar  $L_\odot$ ) con un valor de  $1 \sim 7$  [5], [6].

Se ha encontrado, que en el caso del Sistema Solar, en la vecindad del Sol y en cúmulos globulares; la masa luminosa es igual a la masa dinámica, esto es,  $M_L = M_D$ , pero cuando se realiza el mismo análisis, por ejemplo, para cúmulos de galaxias, se encuentra que  $M_D \simeq 20M_L$ , esto es, en estos sistemas galácticos existe una discrepancia de masa.

Al considerar una muestra de estrellas, es posible relacionar la masa estelar con la luminosidad total suponiendo una función de luminosidad, la distribución relativa de estrellas de diferentes masas y luminosidades. Así mismo se realiza la suposición de que los procesos de formación estelar son similares en todos los sistemas; entonces, al realizar el cálculo de los cocientes  $M/L$  en regiones de baja densidad de estrellas, como son las partes externas de una galaxia o cúmulos de galaxias, se obtendrán cocientes  $M/L$  aproximadamente iguales a los de otra población.

El hecho de que el cociente  $M/L$  no varía fuertemente se encuentra sustentado por los modelos de evolución química de la Vía Láctea y la vecindad solar, los cuales resultan consistentes con las observaciones realizadas y con los principios básicos de formación estelar y galáctica [7]. Sin embargo, cuando se extrapola a escalas galácticas, la mayoría de los sistemas tienen cocientes  $M/L$  mucho más grandes de lo que se observa en las partes centrales de las galaxias. Resulta que estos cocientes son mucho más grandes que los asociados a poblaciones estelares normales ( $\simeq 2-5$  en unidades solares), pero en otros casos la diferencia resulta ser mayor a un orden de magnitud. Esto condujo a que se formularan algunas hipótesis para explicar tal discrepancia de masa en sistemas estelares, tales como:

1. El proceso de formación estelar en regiones de baja densidad de masa origina predominantemente estrellas y objetos de baja luminosidad. Esta opción fue descartada hace mucho tiempo por consideraciones cosmológicas.

2. Hay masa que no brilla y no interactúa con la radiación electromagnética, lo que implica que existe alguna partícula elemental desconocida. Este material exótico que se desconoce y que podría resultar responsable de esta anomalía es la denominada *materia oscura*.

## 1.1. Materia Oscura

En el año de 1846 el matemático francés Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) predijo la existencia de un planeta extra de los que ya se conocían, se trataba de Neptuno, esto como explicación a las desviaciones encontradas en la órbita de Urano con respecto al movimiento puramente Kepleriano. Poco tiempo después el planeta fue descubierto por el astrónomo alemán Johann Gottfried Galle (1812-1910) en 1846. En ese mismo año Le Verrier descubrió *la precesión anómala* que se presenta en el perihelio de Mercurio y en 1859 Le Verrier analizó las siguientes opciones para dar una explicación a esta anomalía:

1. Un campo gravitacional producido por una materia invisible, lo cual implicaba la introducción de un nuevo objeto, Vulcano. Aunque la trayectoria completa de este objeto fue calculada, el planeta nunca se observó.
2. La existencia de una falta de precisión en observaciones astronómicas [8].
3. Efectuar un cambio a la ley de gravitación de Newton. La precesión de Mercurio puede explicarse postulando que la fuerza gravitacional va como  $\frac{1}{r^n}$  con  $n=2.0000001574$ , donde  $r$  es la distancia en la ecuación (1.1), y realizando una modificación de un 10 % a la masa de Venus. Otra modificación a la ley de gravitación universal que es capaz de explicar fenómenos como éste fue elaborada por el mismo Isaac Newton y publicado en los *principia*, donde él consideró una generalización de una fuerza gravitacional dada por:

$$F = \frac{br^p + cr^q}{r^3}, \quad (1.10)$$

donde  $b$ ,  $c$ ,  $p$  y  $q$  son constantes. Al utilizar esta generalización Le Verrier logró explicar la precesión de Mercurio (1876) pero haciendo uso de Vulcano. El problema no quedó resuelto satisfactoriamente hasta que Albert Einstein (1879-1955) mostró este fenómeno como una consecuencia natural de la Teoría General de la Relatividad formulada por él.

En 1932, el astrónomo holandés Jan H. Oort (1900-1992) [9], analizó el movimiento de estrellas localizadas en una región cercana al disco de la Vía Láctea. Estudió la influencia gravitacional del disco sobre estas estrellas y de esta manera determinó la masa del disco galáctico. La masa que calculó resultó ser dos veces

mayor a la cantidad de materia visible en forma de estrellas y nebulosas. Este resultado fue interpretado como una evidencia de la presencia de materia oscura en las galaxias.

En 1933 el físico y astrónomo suizo Fritz Zwicky (1898-1974) se encontró con que la masa necesaria para mantener ligado gravitacionalmente al Cúmulo de Coma [10] calculada a través de las leyes de la Dinámica Newtoniana excedía el contenido de este en materia luminosa. Así mismo, se dio cuenta de que muchas galaxias pertenecientes al cúmulo de Coma se movían a velocidades sumamente altas, dadas estas velocidades, el cúmulo debería desintegrarse y todas las galaxias deberían salir disparadas debido a su fuerza centrífuga. Se tenían evidencias sólidas de que estos cúmulos son configuraciones estables, por lo que Zwicky concluyó que, para que ésta ejerciera una mayor fuerza gravitacional que compensara la fuerza centrífuga del movimiento de las galaxias alrededor del cúmulo, los cúmulos deben contener materia no luminosa, logrando así que esta materia los mantenga en equilibrio [11]. El resultado obtenido por Zwicky orientó el trabajo de astrónomos y cosmólogos hacia lo que, hoy se conoce como el *Paradigma de la Materia Oscura*. Tal paradigma establece la existencia de materia (que puede ser bariónica o no) que, aunque aumenta el contenido masivo de la galaxia o de un cúmulo de ellas, no es detectable a través de su emisión, toda vez que se trata de cuerpos poco brillantes, no visibles desde la Tierra o que sencillamente no emiten en ninguna longitud de onda.

En 1974, Jaan Einasto, Ants Kaasik y Enn Saar [12], del Observatorio W. Struve de Astrofísica, de Estonia, emprendieron un estudio sobre un grupo de galaxias espirales, para encontrar la masa  $M$  como función del radio de las galaxias. Pensaban que la discrepancia de masa en los cúmulos de galaxias se debía a que las masas de las galaxias estaban subestimadas. Dado que las galaxias espirales contienen hidrógeno moviéndose en el plano de la galaxia en órbitas aproximadamente circulares, calcularon la masa contenida hasta el radio  $R$  de la galaxia en regiones más alejadas del centro, así mismo, calcularon la distribución de masa de la población estelar conocida, esto es, de la materia luminosa contenida en la galaxia hasta el radio  $R$ , al final obtuvieron que las distribuciones de masa no coincidían con los resultados que ellos esperaban. Supusieron entonces que las galaxias debían de contener una población masiva aún no detectada, a la que llamaron *halos*.

A finales de la década de 1970, Vera C. Rubin, W. Kent Ford y Norbert Thonnard [13], obtuvieron las curvas de rotación (velocidades de rotación de las estrellas alrededor de la galaxia) de 10 galaxias espirales de diferentes tipos, basados en la clasificación de Hubble. Vera Rubin y colaboradores observaron algo semejante

en otras galaxias. Utilizando un telescopio, midieron la cantidad de estrellas que había en una galaxia. Si se cuentan las estrellas en una galaxia, es posible obtener una buena estimación de cuánta materia hay en la galaxia.

Se sabe que la masa de casi todo el sistema estelar está concentrada en las estrellas. Por lo que si se sabe cuánta materia hay, puede conocerse la fuerza gravitacional que ejercen todas estas estrellas sobre sí mismas.

Para que las galaxias se encuentren en equilibrio con su rotación, esto es, que las estrellas giren durante mucho tiempo alrededor de la galaxia sin chocar o ser lanzadas al exterior, se debe cumplir que la fuerza gravitacional de todas las estrellas sea igual que la fuerza centrífuga de su rotación. Para medir la velocidad a la que las estrellas se movían, Vera Rubin utilizó el mismo método que utilizó Hubble para medir la velocidad con la que se alejan las galaxias unas de otras, es decir, el corrimiento al rojo. Vera Rubin comparó el resultado de las velocidades obtenidas según la fuerza gravitacional y el resultado observado con el corrimiento al rojo. Encontró que ambas observaciones tenían una marcada discrepancia entre sí. Las curvas de rotación eran aproximadamente planas; estrellas a muy diferentes distancias del centro de la galaxia giran con la misma velocidad circular, aún cuando la distribución de materia luminosa indica que esta velocidad debe decaer rápidamente entre más alejada esté una estrella del centro de la galaxia. La “planicidad” resultó muy evidente en las curvas de rotación de una cantidad enorme de galaxias, lo cual implica que un incremento en el radio conlleva a un crecimiento lineal en la masa. Todas las galaxias tienen materia luminosa con un comportamiento muy diferente: después de un cierto radio, un incremento en el radio implica un decrecimiento en la materia luminosa. Esta planicidad de las curvas de rotación llevó a los astrónomos a considerar que las galaxias contienen materia no luminosa no detectable y que trasciende los límites visibles de las galaxias, cuyos efectos gravitacionales causan la planicidad de las curvas de rotación. También observaron que para galaxias de la misma luminosidad la velocidad circular decrece: es mayor en las galaxias más ovaladas y menor en las galaxias más extendidas. Además para galaxias del mismo tipo, pero de diferentes luminosidades, la velocidad circular decrece con la intensidad luminosa [11].

Las curvas de rotación son el método más directo utilizado para medir la distribución de masa dinámica de una galaxia.

La fuerza gravitacional que siente una partícula de masa  $m$ , ubicada a una distancia  $R$  de una galaxia es:

$$F_G = m \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (1.11)$$

donde  $M(R)$  es la masa contenida hasta el radio  $R$ .

Así mismo, ésta partícula experimenta una fuerza centrífuga dada por:

$$F_c = \frac{mv^2}{R}. \quad (1.12)$$

Para órbitas circulares de equilibrio centrífugo (la fuerza gravitacional es igual a la fuerza centrífuga,  $F_G = F_c$ ), se obtiene que:

$$\frac{mv^2}{R} = m \frac{GM(R)}{R^2}, \quad (1.13)$$

despejando la velocidad  $v$  de la ecuación anterior se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (1.14)$$

donde  $v$  es la velocidad de una partícula prueba de masa  $m$ , ubicada a una distancia  $R$ , del centro de la galaxia y  $M(R)$  es la masa acumulada de la galaxia hasta un radio  $R$ . La masa acumulada de una galaxia, hasta un radio  $R$ , se obtiene por medio de la ecuación:

$$M(R) = 4\pi \int_0^R R'^2 \rho(R') dR'. \quad (1.15)$$

Suponiendo una densidad de masa constante  $\rho(R) = \rho_0$ , la masa total acumulada resulta ser:

$$M(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0. \quad (1.16)$$

Sustituyendo la ecuación (1.16) en la ecuación (1.14) se obtiene:

$$v = R \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho_0}. \quad (1.17)$$

Si ahora suponemos una densidad de masa dada por  $\rho(R) = \rho_1/R^2$ , donde  $\rho_1$ , es una constante (con unidades de masa/distancia), y ulizando la ecuación (1.15), la masa total acumulada es:

$$M(R) = \frac{4\pi}{3} R \rho_1. \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.18) en la ecuación (1.14) se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G \rho_1}. \quad (1.19)$$

Si se quieren ajustar las curvas de rotación de distribuciones con simetría esférica, suponiendo una densidad de masa constante:  $\rho(R) = cte$ , se tendrá  $M(R) \propto R^3$

y  $v \propto R$ , y para la parte plana de las curvas de rotación se hace la siguiente suposición para la densidad de masa:  $\rho = cte/R^2$ , teniéndose en este caso que  $M(R) \propto R$  y  $v = cte$  [3].

El problema es que la masa luminosa decae exponencialmente con el radio y se tiene la necesidad de una nueva sustancia (Materia Oscura) o en su contraparte modificar las leyes de gravitación. Los componentes que conforman un sistema astronómico se mueven en relación unos con otros sin poder alejarse entre ellos porque están amarrados al jalón gravitacional del resto del sistema y eso evita la dispersión del sistema.

Existe una lista enorme de candidatos para la materia oscura, entre los que sobresalen:

1. Alguna partícula elemental desconocida, los candidatos principales son los *WIMPs*, el cual es un calificativo asignado a partículas masivas débilmente interactuante, estas partículas sólo interactúan gravitacionalmente con la materia bariónica, un barión es un fermión fuertemente interactuante. El uso del término “materia bariónica” para materia ordinaria es convencional, pero es menos que ideal por varias razones: (*i*) la materia ordinaria incluye electrones, los cuales son leptones no bariones, (*ii*) la desconocida partícula de materia oscura es probable a ser más pesada que alguna partícula bariónica, (*iii*) no es claro si debe contarse a los neutrinos como materia ordinaria o como materia oscura, ya que tienen masa e interactúan débilmente, lo que los identifica como *WIMPs*. Otros candidatos son las partículas aún más exóticas llamadas *axiones*, las cuales son partículas neutras y muy ligeras.
2. Objetos macroscópicos no luminosos, tal como estrellas de neutrones o agujeros negros, los cuales usualmente son llamados *MACHOs* (por sus siglas en inglés *MAssive Compact Halo Objects*).

Mediciones de la profundidad óptica para lentes gravitacionales (los cúmulos de galaxias actúan como lentes que distorsionan la luz emitida por cuásares y galaxias de fondo, esto es debido a la curvatura de la luz por efectos gravitacionales) a través del halo no admite *MACHOs* en el rango  $10^{-7} - 30M_{\odot}$  como el componente dominante de materia oscura, y argumentos dinámicos indirectos sugieren que más objetos compactos y masivos son excluidos. Por otro lado, las partículas débilmente interactuante, hipotéticamente masivas y neutras podrían haberse formado de forma natural en la etapa del Universo temprano, en aproximadamente el número requerido para hacer una contribución sustancial a la densidad total del Universo. La mayoría de los físicos y astrónomos consideran que los halos oscuros están compuestos de *WIMPs* [3].

La materia ordinaria, estrellas, polvo, gas interestelar, MACHOS, etc., sea luminosa u oscura, deriva casi toda de su masa de bariones y por lo tanto usualmente de le denomina *materia bariónica*, para distinguirla de la *materia no bariónica* como los WIMPs.

La densidad de bariones ordinarios y la radiación en el Universo se estima que son equivalentes aproximadamente a un átomo de hidrógeno por metro cúbico de espacio. Sólo aproximadamente el 5% de la densidad de energía total en el Universo (inferido de los efectos gravitacionales) se puede observar directamente. Se estima que en torno al 23% está compuesto de materia oscura, esto es, la materia oscura es ocho veces más abundante que la materia ordinaria, una cuarta parte de la densidad total del Universo y el componente principal para la formación de estructura en el Universo.

El problema de la materia oscura surge tanto por el desajuste que existe en las masas de las galaxias, como en las estructuras cósmicas. Esta discrepancia de masa es omnipresente. Aparece prácticamente en todos los sistemas, desde galaxias enanas hasta galaxias normales y de grupos de galaxias hasta supercúmulos extensos.

A pesar de su supuesta presencia dominante, varias décadas de múltiples esfuerzos experimentales a nivel mundial, no han logrado una detección directa de esta hipotética componente.

### 1.1.1. Modelo de Materia Oscura Fría

Por más de una década, muchos cosmólogos favorecen la propuesta de un modelo alternativo, en donde las partículas elementales que dominan son de larga vida, frías y no colisionan.

Larga vida significa que el tiempo de vida de las partículas debe ser comparable con la edad presente del universo, que es alrededor de 14 billones de años. Fría hace referencia a que las partículas son no relativistas al inicio de la época de materia dominante y por tanto estos pueden agruparse gravitacionalmente. Esto es posible ya que en la época dominada por la materia el horizonte de Hubble (*el Horizonte de Hubble sirve para determinar la distancia a la que las galaxias se alejan de nosotros a la velocidad de la luz, pero esa distancia crece al mismo tiempo que el universo*) era mucho más pequeño que hoy en día y el agrupamiento sólo ocurre a escalas más pequeñas que el horizonte de Hubble. Los primeros objetos que formaron grupos de halos de materia oscura, eran mucho mas pequeños que la Vía Láctea y mucho menos masivos. Como el Universo se expandió y el horizonte de Hubble creció, varios de los primeros halos surgieron y formaron

estructuras a gran escala. El resultado es la jerarquía de estructura alcanzando hasta varios órdenes de magnitud en volumen y masa, en concordancia con lo observado. Partículas sin colisión significa que la sección transversal de interacción entre partículas (materia oscura y materia ordinaria) es muy pequeña, tanto que pueden ser despreciable para densidades encontradas en halos de materia oscura. Las partículas están sujetas gravitacionalmente a otras y viajan sin impedimentos en órbitas de halos con un amplio espectro de excentricidades [4].

Materia oscura fría y sin colisiones ha sido favorecida por varias razones: Primero, simulaciones numéricas en la formación de estructura con materia oscura fría y sin colisión están de acuerdo con la mayoría de las observaciones de estructura. Segundo, para una subclase especial conocida como WIMPs (partículas masivas con interacciones débiles), existe una explicación natural de por qué tienen el requisito de abundancia.

Simulaciones numéricas basadas en Materia Oscura Fría predicen:

1. Una sobreproducción en subestructuras galácticas (galaxias pequeñas, irregulares, enanas esferoidales) giran alrededor dentro de unidades más grandes, lo cual no se observa en el Universo; también predice la existencia de cúmulos de estrellas en regiones del espacio intergaláctico, lo cual tampoco se observa.
  - El número de halos esperados varía violentamente como el inverso de la masa, así varios sistemas de enanas, similares a la nube de Magallanes, deberían encontrarse más lejos.
  - El efecto de lentes en pequeños halos, debe ser evidente en la distribución de brillo de múltiples imágenes de una galaxia dada, pero la evidencia actual es inconclusa.
  - En los halos pequeños que giran alrededor de la Vía Láctea y otros sistemas, debería abultarse el ancho de los discos delgados en las galaxias normales por más de lo observado.
2. Los perfiles de densidad de los halos de materia oscura deberían exhibir un pico, en el núcleo, en el cual la densidad aumenta de manera abrupta conforme la distancia decrece al centro, en contraste con las regiones centrales de varios sistemas observados (todas las galaxias ya hubiesen colapsado en agujeros negros desde hace mucho tiempo).
  - Cúmulos de galaxias, como los observados en los estudios de lentes gravitacionales, tienen menos cúspides en los núcleos que los encontrados en modelos computacionales de halos masivos de materia oscura.

- Galaxias espirales ordinarias, como la Vía Láctea, tiene mucho menos materia oscura de la esperada en sus partes internas, como algunos sistemas de bajo brillo superficial.
- Galaxias enanas, como Sculptor y Draco, tienen densidades aproximadamente uniformes en sus núcleos, en contraste con el pico en los perfiles de densidad.
- Simulaciones hidrodinámicas producen discos de galaxias demasiado pequeños y con momento angular muy pequeño comparado con las observaciones.
- Varias superficies de brillo en galaxias espirales exhiben barras que rotan, las cuales son normalmente estables sólo si la densidad en el núcleo es más pequeña que la predicha.

Existe por lo tanto una discrepancia entre las predicciones de altas densidades y las observaciones en las partes internas de los halos con densidades bajas de materia oscura, empezando por los cúmulos gigantes de galaxias ( $M \geq 10^{15} M_{\odot}$ ) hasta los más pequeños sistemas de enanas observados ( $M < 10^9 M_{\odot}$ ). Se han propuesto varias ideas para resolver las discrepancias aparentes. Se ha propuesto que esta discrepancia se debe a un proceso dinámico que ocurre a través de la interacción entre materia oscura y la materia bariónica cerca del núcleo, que puede reducir las concentraciones centrales de materia oscura. Aún así las predicciones teóricas del pico en los perfiles de densidad no son tan certeras como se hubieran supuesto [4].

## 1.2. Modelos de Gravedad Modificada

Si se decide mantener invariantes las leyes de la física, resulta que la materia oscura es la única explicación a la discrepancia de masa que existe, pero si en lugar de eso, se efectúa un cambio a las leyes estándares; se obtiene que no es necesaria la hipótesis de la materia oscura. Los movimientos de un sistema galáctico se describen en física newtoniana por una ecuación particular, donde se combinan dos leyes básicas: la segunda ley de Newton (que relaciona a la fuerza con la aceleración) y la ley de atracción gravitacional de Newton (la cual relaciona la fuerza de gravedad sentida con las masas de los cuerpos y la separación entre ellas). Se tiene que la aceleración de un cuerpo en una órbita depende de la velocidad del cuerpo y del radio de la órbita. Estas leyes newtonianas explican precisamente la trayectoria de un cohete y los movimientos de los planetas, pero una vez que se extrapola a galaxias se presentan algunos problemas e inconsistencias con los datos observacionales, un ejemplo claro son las curvas de rotación, entonces si se modifica la ley de fuerzas se espera evitar la necesidad de incluir la materia oscura.

## 1.3. MODified Newtonian Dynamics (MOND)

### 1.3.1. Propuesta Inercial de MOND

Desde 1960 algunos teóricos se dieron a la tarea de encontrar en las leyes de la dinámica el origen de la discrepancia de masas en sistemas galácticos en vez de buscar material exótico faltante. En primera instancia, la propuesta denominada *Dinámica Newtoniana Modificada* (MOND) (por sus siglas en inglés *MODified Newtonian Dynamics*) surgió como una modificación a la segunda ley de Newton. Esta fue formulada por Mordehai Milgrom en 1983 [14], cuando la aceleración del sistema es pequeña, del orden de  $\simeq 10^{-10} m/s^2$ .

La modificación a la Ley de Inercia propuesta por Milgrom es:

$$\mathbf{F} = m\mu\left(\frac{|\mathbf{a}|}{a_0}\right)\mathbf{a}, \quad (1.20)$$

donde  $\mathbf{F}$  es un campo de fuerza estático arbitrario, el cual depende de las fuentes que lo producen,  $m$  es la masa gravitacional de la partícula prueba que es acelerada y  $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} m/s^2$  es una aceleración de escala. En el caso de la gravedad, se tiene que  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}_N$ , donde  $\mathbf{g}_N = -\nabla\varphi_N$  y  $\varphi_N$  es el potencial gravitacional que se obtiene de la ecuación de Poisson para una densidad de masa  $\rho$ :

$$\nabla^2\phi_N = 4\pi G\rho. \quad (1.21)$$

Los detalles de la función  $\mu$  todavía se desconocen, solamente se tiene su comportamiento en los límites de aceleración, dados por:

$$\mu\left(\frac{|\mathbf{a}|}{a_0}\right) \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{si } |\mathbf{a}| \gg a_0 \\ |\mathbf{a}|/a_0, & \text{si } |\mathbf{a}| \ll a_0. \end{cases}$$

Esta modificación introduce una constante,  $a_0$ , con dimensiones de aceleración, así mismo, propone que la dinámica Newtoniana estándar es una buena aproximación sólo para aceleraciones que son mucho más grandes que  $a_0$ , pues para aceleraciones grandes  $\mu(a/a_0) \rightarrow 1$ , y la ecuación (1.20) se reduce a la ecuación (1.2). Pero cuando la aceleración es pequeña comparada con  $a_0$ , la fuerza se vuelve proporcional al cuadrado de la aceleración, esto debido a que en el caso de aceleraciones muy pequeñas comparadas con  $a_0$ , la propuesta es que la función  $\mu(a/a_0) \rightarrow a/a_0$ , de tal manera que la ecuación (1.20) se reduce a:

$$\mathbf{F} = m\frac{|\mathbf{a}|}{a_0}\mathbf{a}. \quad (1.22)$$

Para explicar las aceleraciones observadas en galaxias, MOND propone que una fuerza más pequeña produce una mayor aceleración, por lo tanto, la masa produce una aceleración mayor a grandes distancias de lo que sucede en la dinámica

newtoniana, eliminando así la necesidad de materia oscura.

Resulta que en la Tierra, y en general en todo el sistema solar, no es posible medir los efectos de MOND, debido a que se está en un sistema donde la aceleración es de tipo newtoniana y es muy grande en comparación con la aceleración de escala  $a_0$ . Sería necesario irse mucho más lejos que la órbita de Plutón para comenzar a medir los efectos de MOND.

### 1.3.2. Propuesta Gravitacional de MOND

La propuesta MOND también puede describirse como una modificación a la ley de gravedad sin alterar la ley de inercia ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ), teniéndose para el caso de gravedad,  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{g}$  es un campo gravitacional modificado, el cual es derivado del campo gravitacional newtoniano  $\mathbf{g}_N$  utilizando la relación [15]:

$$\mu\left(\frac{g}{a_0}\right)\mathbf{g} = \mathbf{g}_N. \quad (1.23)$$

Es importante mencionar que la ecuación (1.20) no es igual a la ecuación (1.23), pero ambas resultan ser equivalentes únicamente cuando actúan fuerzas gravitacionales. La función  $\mu$  de la ecuación (1.23) no presenta una forma general, sólo se asume a ser monótona en su argumento y satisface que  $\mu \approx 1$  cuando  $g \gg a_0$  y  $\mu \approx g/a_0$  cuando  $g \ll a_0$ .

Se han propuesto distintas formas de la función de interpolación  $\mu$ , esto con el objetivo de describir la dinámica de ciertos sistemas galácticos al utilizar la ecuación (1.23), algunas de ellas son ( $x := g/a_0$ ):

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x} [16],$$

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} [17],$$

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1} [18],$$

$$\mu(x) = \frac{6x}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi^2}{6x}} \frac{z}{e^z - 1} dz [19].$$

Cuando se presentan casos de simetría esférica, plana o cilíndrica,  $\mathbf{g}$  está dada por la ecuación (1.23) y es derivable de un potencial  $\varphi$  ( $\mathbf{g} = -\nabla\varphi$ ), cabe mencionar que en un caso más general donde no hay simetría esto no es cierto.

Las propuestas de MOND dadas por las ecuaciones (1.20) y (1.23) pueden interpretarse como un aspecto no newtoniano y no lineal de la gravedad a un nivel no relativista. Así mismo ambas no pueden ser consideradas como una teoría, sino únicamente como un esquema fenomenológico.

### 1.3.3. Velocidad de Rotación de Galaxias Espirales

Las variables que describen algunos sistemas dinámicos, como las galaxias espirales son básicamente tres: la masa (cantidad de materia bariónica existente en estos sistemas), la velocidad de rotación galáctica y el radio (medido a partir de su centro). Relacionando estas cantidades físicas es posible calcular su masa a partir de mediciones dinámicas una vez supuesta una ley de gravedad.

A continuación vamos a calcular la velocidad de rotación típica de una galaxia espiral utilizando únicamente la dinámica Newtoniana. Para ello pensemos en una estrella muy lejos del centro de la galaxia, en buena aproximación la estrella experimenta la fuerza de atracción gravitacional dada por:

$$F_G = \frac{GMm}{r^2}, \quad (1.24)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  la masa de la galaxia,  $m$  la masa de la estrella y  $r$  la distancia entre el centro de la galaxia y la estrella. Así mismo, se tiene que la estrella experimenta una fuerza centrífuga dada por:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}. \quad (1.25)$$

La condición de equilibrio centrífugo, que nos dice que  $F_G = F_c$ , se puede expresar como:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}. \quad (1.26)$$

Tomando la aproximación a una órbita circular y cancelando el término  $m$  en ambos lados de la ecuación (1.26), se encuentra que la aceleración sentida por la partícula es:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (1.27)$$

donde finalmente se obtiene la velocidad como función del radio dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (1.28)$$

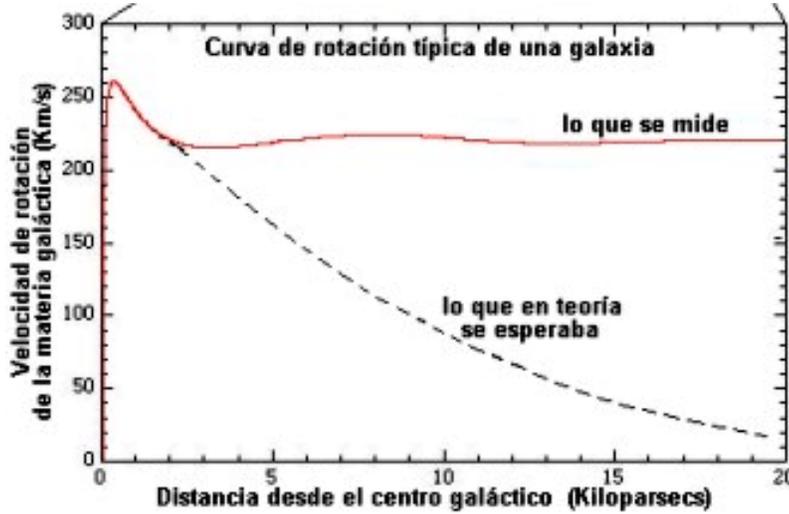


Figura 1.1: Curva de Rotación típica de una Galaxia Espiral.

Se deduce entonces que en base a la dinámica Newtoniana, la velocidad tangencial es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio ( $v \propto 1/\sqrt{r}$ ), esto es justo lo que pasa en el sistema solar: Mercurio orbita más rápido que la Tierra, que a su vez orbita más rápido que Saturno. La mayor parte de la masa en el sistema solar está contenida en el Sol y la velocidad orbital de los planetas decrece para los planetas externos. La situación es radicalmente diferente para distancias suficientemente grandes desde el centro de la Galaxia (escalas galácticas), la velocidad orbital se incrementa desde el centro de la Galaxia hasta alcanzar un máximo  $\simeq 220 \text{ km/s}$  a unos  $4 \text{ kpc}$  del centro, nivel al cual permanece prácticamente constante para distancias mayores. Con la Teoría de Newton se tiene como resultado que las curvas de rotación deben disminuir a radios muy grandes, un hecho que no concuerda con los datos experimentales que se obtienen de las observaciones. En la figura (1.1) se muestra un esquema representativo de la curva de rotación típica de una galaxia espiral, donde también se observa la diferencia que se tiene entre los datos experimentales y lo que predice la dinámica Newtoniana.

Sin embargo, si ahora se aplica la teoría MOND, se tiene que la fuerza sentida por la partícula de masa  $m$  es:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = m\mu \left( \frac{a}{a_0} \right) a. \quad (1.29)$$

Considerando que a una distancia lejana se tiene que las aceleraciones son menores

que  $a_0$ , se tiene entonces la siguiente aproximación

$$\frac{a}{a_0} \leq 1 \implies \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) \approx \frac{a}{a_0}. \quad (1.30)$$

Entonces aunque la fuerza gravitacional que siente la estrella de masa  $m$  no cambia, su aceleración resulta ser:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{ma^2}{a_0}. \quad (1.31)$$

Despejando la aceleración  $a$  en la ecuación anterior se obtiene que esta es igual a:

$$a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}. \quad (1.32)$$

Tomando la aproximación a una órbita circular e igualando a la aceleración centrífuga, la ecuación (1.32) se reduce a:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}. \quad (1.33)$$

Finalmente se obtiene que la velocidad circular de la estrella es:

$$v = (GMa_0)^{1/4}. \quad (1.34)$$

En base a este resultado se tiene, entonces, que las curvas de velocidad se aplanan de manera asintótica a un valor constante  $v_f$  después de un cierto radio [20]. Se ha observado que las aceleraciones de estrellas y nubes de gas en las afueras de galaxias espirales tienden a ser menores que  $a_0$  [21]. La propuesta MOND unifica los dos hechos generales de la fenomenología de galaxias espirales:

1. *Las curvas de rotación de galaxias espirales son asintóticamente planas.*
2. *La masa bariónica observada en una galaxia espiral es proporcional a la cuarta potencia de su velocidad de rotación asintótica, esto es,  $M = (Ga_0)^{-1}v_f^4$ .*

Se han realizado observaciones suficientemente detalladas para comparar predicciones teóricas y MOND ajusta notablemente bien, tomando cocientes masa-luminosidad relevantes para poblaciones estelares y fracciones de gas para todo tipo de galaxias [22]. En cambio, para materia oscura al comparar con las observaciones, es necesario ajustar de manera *ad hoc* la cantidad y distribución de materia oscura.

### 1.3.4. Relación de Tully-Fisher como una consecuencia de MOND

Un hecho experimental relevante de la dinámica de galaxias espirales es la relación de Tully-Fisher, la cual es una relación entre la velocidad circular y la luminosidad. Esta relación fue publicada por los astrónomos R. Brent Tully y J. Richard Fisher en 1977 y permite estimar la distancia a la que se encuentra una galaxia espiral a partir de la anchura de las líneas del espectro. Esta relación, derivada de forma empírica, establece que la luminosidad de una galaxia es proporcional a una potencia  $n$ , de su velocidad máxima de rotación ( $L \propto v^n$ ) que, a su vez, se determina a partir de la anchura de las líneas espectrales, en particular de la línea a 21 cm, emitida por el hidrógeno neutro de la galaxia. Se encuentra que  $n$  es función de la banda en que se mida  $L$ , pero para contenido bariónico total  $n = 4$  [23], MOND puede predecir esta relación, ya que la velocidad de una estrella en el campo de una galaxia, a algún radio determinado, está dado por la ecuación (1.34). Introduciendo la razón de masa-luminosidad, que se define como  $\Upsilon := M/L$ , se tiene que:

$$M = \Upsilon L. \quad (1.35)$$

Sustituyendo la ecuación (1.35) en la ecuación (1.34) y despejando la luminosidad,  $L$ , se obtiene que la relación entre la luminosidad y la velocidad circular es:

$$L = (Ga_0\Upsilon)^{-1}v_f^4. \quad (1.36)$$

La cual es la conocida relación de Tully-Fisher. De esta manera una modificación a la dinámica de Newton en un régimen de aceleraciones del orden de  $a_0$ , permite explicar la fenomenología dinámica de las galaxias sin invocar ningún hipotético componente exótico.

### 1.3.5. Logros y Dificultades de la propuesta MOND

Cabe destacar que la fenomenología predicha por MOND, sus aplicaciones y pruebas en sistemas galácticos: galaxias de todo tipo, grupos de galaxias, cúmulos y supercúmulos, son discutidos en [24] y [25]. A continuación se mencionan los hechos fenomenológicos que la formulación MOND puede explicar de manera satisfactoria [26]:

1. Las curvas de rotación de galaxias son asintóticamente planas.
2. La velocidad de rotación de una galaxia es proporcional a la raíz cuarta de su masa bariónica total: La relación de Tully-Fisher bariónica. La constante de proporcionalidad es  $(Ga_0)^{1/4}$ .
3. Galaxias con altas densidades superficiales centrales correspondientes a aceleraciones más grandes que  $a_0$  no deberían mostrar discrepancia de masa en

las partes interiores. La discrepancia debería aparecer solamente más allá de ciertos radios, siempre y cuando la aceleración sea comparable con  $a_0$ .

4. En Galaxias de Bajo Brillo Superficial (LSB), las cuales tienen densidad superficial baja, la discrepancia de masa, debe empezar ya en el centro [27].
5. Esferas cuasi-isotérmicas autogravitantes no pueden tener una aceleración media que exceda  $a_0$  con implicaciones para todo el sistema galáctico.
6. La distribución de la materia visible (bariónica) en cada galaxia determina fuertemente el campo de aceleración de una galaxia. Esto debe sostenerse a pesar de las historias de formación, evolución e interacción que las diversas galaxias han experimentado.

Para evitar los problemas que se presentan con la ley de conservación del momento, el uso de la propuesta MOND está limitada a describir objetos luminosos en presencia de un campo estático producido por un cuerpo masivo. Ya que si se aplican las ecuaciones de MOND a un sistema de N-cuerpos surgen algunos problemas serios, en particular se encuentra que el momento no se conserva. La fórmula MOND no puede utilizarse directamente para describir la fuerza entre dos masas en movimiento el uno alrededor del otro, por ejemplo, el movimiento de una galaxia binaria, ya que en la formulación MOND esto implicaría que el centro de masa del sistema binario podría acelerarse, como consecuencia de esto el momento no se conservaría [21]. Uno de los mayores problemas de MOND, es que se postula que en sistemas como cúmulos abiertos, el Principio de Equivalencia Fuerte no se cumple, esto es porque MOND postula que la masa inercial de un objeto, y no la masa gravitacional depende del campo a la que está sometida, es decir, que un campo externo puede modificar la dinámica interna de tales sistemas [15] (sin embargo, la evidencia experimental no es contundente), lo que impide que MOND sea compatible con la Relatividad General.

Parecería que la dificultad de MOND es teórica, sin embargo, algunos resultados experimentales parecen complicar aún más el panorama. Entre otros, el comportamiento de galaxias como DDO 47 [28] sugiere que la discrepancia de las curvas de rotación, habitualmente grande en galaxias normales no parece ser igual en galaxias enanas (de las que DDO 47 es una de ellas) lo que deja la descripción de MOND aparentemente sin piso, así como el de la galaxia VIRGOHI21 [29] cuya dinámica, de ser un sistema ligado gravitacionalmente está fuera del alcance de MOND. Milgrom reconoce [30] que MOND puede no ser una solución única al problema de discrepancias, a pesar de ajustar muy bien los datos experimentales para un gran número de galaxias espirales.

### 1.4. Teoría *AQUadratic Lagrangian* (AQUAL)

MOND surgió como una relación empírica que describe de manera adecuada la fenomenología de las galaxias pero sin llegar a ser una teoría de campo fundamental. Era necesario realizar una modificación a la acción para el campo gravitacional con el fin de garantizar la conservación de la energía y el momento como consecuencias inmediatas. El siguiente paso fue proponer una generalización de la teoría basada en una formulación variacional. Una modificación al lagrangiano de la gravedad Newtoniana y la introducción de la aceleración de escala  $a_0$  de Milgrom resultó ser una propuesta muy apropiada para encontrar una teoría de campo. Con los mismos principios y requerimientos de MOND, esta teoría llamada *AQUAL* (por sus siglas en inglés *AQUAdratic Lagrangian*) [15] se desarrolla a partir de un lagrangiano modificado que modifica la ecuación de Poisson (ec. (1.21)).

Se sabe que en el caso de gravedad Newtoniana, una partícula prueba se mueve con una aceleración igual a  $\mathbf{g}_N = -\nabla\varphi_N$ , donde  $\varphi_N$  corresponde al potencial gravitacional Newtoniano. El potencial  $\varphi_N$ , se obtiene al resolver la ecuación de Poisson  $\nabla^2\varphi_N = 4\pi G\rho$ , donde  $\rho$ , es la densidad de masa visible que produce  $\varphi_N$ .

La ecuación de Poisson (ec. (1.21)) puede derivarse del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_N = - \int d^3r [\rho\varphi_N + (8\pi G)^{-1}|\nabla\varphi_N|^2]. \quad (1.37)$$

Para efectuar una modificación a esta teoría, vamos a hacer uso de que existe un sólo potencial,  $\phi$  (al que llamaremos el potencial modificado), del cual es posible derivar una aceleración dada por  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ . Vamos a considerar, al igual que en el caso de gravedad Newtoniana, que  $\phi$  es atractivo y es arbitrario hasta una cierta constante aditiva. La modificación más general y apropiada de  $\mathcal{L}_N$  que cumple con estas características es [15]:

$$\mathcal{L} = - \int d^3r \left\{ \rho\phi + (8\pi G)^{-1}a_0^2 f\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{a_0^2}\right) \right\}, \quad (1.38)$$

donde  $f(\chi^2)$  es alguna función arbitraria pero positiva, con  $\chi = |\nabla\phi|/a_0$ . Se observa que es necesaria una escala para la aceleración, a menos que se esté en el caso newtoniano. La parte cinética del Lagrangiano  $\mathcal{L}$ , es la más general que depende únicamente de las primeras derivadas de  $\phi$ , y resulta consistente con la isotropía del espacio (únicamente aparece  $|\nabla\phi|$ ) [21].

La teoría AQUAL se reduce a la teoría de Newton en el caso límite cuando:

$$f\left(\frac{|\nabla\phi|^2}{a_0^2}\right) \rightarrow \frac{|\nabla\phi|^2}{a_0^2}.$$

Ya que en éste límite el lagrangiano  $\mathcal{L}$  se reduce a  $\mathcal{L}_N$ , del cual se obtiene la ecuación de Poisson para  $\varphi_N$  (ec. (1.21)).

Variando  $\mathcal{L}$  con respecto a  $\phi$ , de tal manera que la variación implica que  $\phi$  desaparece en la frontera, es posible obtener una ecuación de Poisson modificada con la siguiente forma:

$$\nabla \cdot [\mu (|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi] = 4\pi G\rho, \quad (1.39)$$

la cual resulta ser la ecuación que determina el potencial modificado  $\phi$  (ecuación de campo) y en donde:

$$\mu(\chi) \equiv \frac{df(\chi^2)}{d(\chi^2)}. \quad (1.40)$$

Para recuperar el caso en el que se tiene una partícula de prueba con una aceleración  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ , basta con hacer uso de las condiciones de frontera  $|\nabla\phi| \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$  en la ecuación (1.39).

La función  $\mu$  de la ecuación (1.40) puede identificarse con la función  $\mu$  de Milgrom que se tiene en la propuesta MOND (ec. (1.23)), por la siguiente razón:

Es posible escribir la ecuación de campo modificado en términos del campo Newtoniano no modificado  $\mathbf{g}_N = -\nabla\varphi$ . Comparando la ecuación AQUAL (ec. (1.39)) con la ecuación de Poisson (1.21) para una misma densidad de masa  $\rho$ , se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot [\mu (|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi] = \nabla^2\varphi_N.$$

Igualando la ecuación anterior a cero se obtiene:

$$\nabla \cdot [\mu (|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi] - \nabla^2\varphi_N = 0,$$

esta última ecuación puede reescribirse como:

$$\nabla \cdot [\mu (|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi - \nabla\varphi_N] = 0. \quad (1.41)$$

Utilizando el siguiente resultado de Cálculo Vectorial:

*Sea  $\mathbf{A}$  un campo vectorial, la divergencia del rotacional de  $\mathbf{A}$  es cero:*

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

La expresión que aparece entre paréntesis de la ecuación (1.41) puede entonces escribirse como:

$$\mu (|\nabla\phi|/a_0) \nabla\phi - \nabla\varphi_N = \nabla \times \mathbf{h}, \quad (1.42)$$

o en forma equivalente como:

$$\mu(|\nabla\phi|/a_0)\nabla\phi = \nabla\varphi_N + \nabla \times \mathbf{h}, \quad (1.43)$$

donde  $\mathbf{h}$  es un campo vectorial que puede calcularse. Cuando se trabaja con objetos ubicados a grandes distancias de un cuerpo masivo de masa  $M$ , el campo vectorial  $\mathbf{h}$  decae más rápido con la distancia  $r$ , en comparación con lo que ocurre con los dos términos de la ecuación (1.43) [15]. La ecuación de campo (ec. (1.39)) es no lineal y muy difícil de resolver en un caso general. Sin embargo, en situaciones con simetría esférica, plana o cilíndrica y aplicando el Teorema de Gauss a la ecuación (1.39), el término con rotacional de la ecuación (1.43) desaparece y esta se reduce a:

$$\mu(|\nabla\phi|/a_0)\nabla\phi = \nabla\varphi_N, \quad (1.44)$$

que es la formulación MOND (ec. (1.23)), identificando los términos  $\mathbf{g}_N = -\nabla\varphi_N$  y  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ , este último resultado nos indica que la teoría AQUAL reproduce la formulación MOND, se puede decir entonces, que la fórmula de MOND (ec. (1.23)), es una aproximación genérica de la ecuación AQUAL (ec. (1.39)). Es importante mencionar, que el término  $\nabla \times \mathbf{h}$  generalmente no desaparece en situaciones de baja simetría [31].

Es posible mostrar que la teoría AQUAL (ec. (1.39)), presenta los límites Newtoniano y MONDiano de manera correcta. Si se asume que  $f(\chi^2) \rightarrow \chi^2$  cuando  $|\nabla\phi| \gg a_0$  se sigue de la ecuación (1.40) que  $\mu(\chi)$  es constante e igual a 1, en este caso, se recupera el régimen Newtoniano. En cambio, si se toma  $f(\chi^2) \rightarrow \frac{4}{5}\chi^{5/2}$  cuando  $|\nabla\phi| \ll a_0$ , se tiene que  $\mu(|\nabla\phi|/a_0) \rightarrow |\nabla\phi|/a_0$ , que corresponde al régimen MONDiano.

Una teoría basada en un Lagrangiano, el cual no depende explícitamente de las coordenadas, direcciones o del tiempo, tal como ocurre con el lagrangiano de la teoría AQUAL (ec. (1.38)), automáticamente conserva el momento lineal, el momento angular y la energía [15], esto es, las leyes de conservación se obtienen de la simetría que presenta este lagrangiano bajo traslaciones espaciales y rotaciones espaciales. Además la teoría AQUAL engloba el principio de equivalencia débil: *todos los cuerpos, independientemente de su estructura interna, y a partir de las mismas condiciones iniciales, siguen la misma curva en un campo gravitacional*, hecho que no sucede con la formulación MOND [21].

## 1.5. Teorías MOND Relativistas

Milgrom desarrolló MOND como una teoría no relativista de la gravedad, con el fin de explicar la planitud de las curvas de rotación de las galaxias espirales. Ésta propuesta se ha utilizado para explicar una gran variedad de fenómenos astrofísicos, sin recurrir a la existencia de un componente de materia oscura.

Con los años se ha tratado de formular una extensión relativista de MOND. Aunque la mayoría de los sistemas astronómicos con una discrepancia de aceleración significativa no son en extremo relativistas, existen dos excepciones sumamente importantes. Por un lado, la parte de la Cosmología, la cual es importante en sí misma y funciona como un marco para el proceso de formación de las galaxias, la cosmología requiere por lo tanto de un tratamiento relativista. Las lentes gravitacionales generadas por galaxias y grupos de galaxias, las cuales se han convertido en la herramienta astronómica más destacada en las últimas dos décadas, y puesto que éstas revelan una discrepancia de aceleración, es comúnmente necesaria la postulación de materia oscura. Debido a que la luz se propaga con velocidad  $c$ , la propuesta MOND no relativista no puede formular el problema de las lentes gravitacionales. Existe una versión relativista de la propuesta AQUAL, la cual conserva las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General como una herramienta para derivar la métrica del espacio-tiempo  $g_{\alpha\beta}$ , del tensor de energía momento de la materia (una de estas componentes representa la densidad de materia). En esta formulación toda la materia es tratada por igual, lo cual implica que el principio de equivalencia débil se cumpla, pero dado que la métrica que determina la dinámica del campo gravitacional es diferente de la experimentada por materia, el principio de equivalencia fuerte se viola. Esto resulta ser esencial, porque de otra manera se llegaría a la Teoría de la Relatividad General como la teoría relativista de la gravedad, y la Relatividad General en el límite no relativista tiende a la teoría Newtoniana y no a la formulación MOND [21].

La teoría más estudiada y con un mayor éxito es la propuesta formulada por Jacob Bekenstein en 2004 [18], denominada *TeVes* (por sus siglas en inglés *Tensor-Vector-Scalar*). *TeVes* se encuentra basada en la propuesta MOND, ya que para bajas velocidades, campo débil y bajas aceleraciones comparadas con  $a_0$ , *TeVes* conserva la estructura de la propuesta de Milgrom, y para aceleraciones grandes comparadas con  $a_0$ , conserva la forma newtoniana usual.

Las principales características de la propuesta TeVeS son:

- La Gravedad en TeVeS está descrita por una métrica  $g_{\alpha\beta}$ , tal como ocurre en Relatividad General, más un campo vectorial  $\omega_\alpha$ , y un campo escalar  $\phi$  (en otras formulaciones el campo escalar es eliminado).

- La materia está acoplada a una combinación de los campos, denominada la métrica física  $\tilde{g}_{\alpha\beta} \equiv e^{-2\phi}(g_{\alpha\beta} + \omega_\alpha\omega_\beta) - e^{2\phi}\omega_\alpha\omega_\beta$ .
- La métrica  $g_{\alpha\beta}$  está regida por la acción de Hilbert-Einstein, el campo vectorial (restringido a tener una longitud unitaria) por la acción Maxwelliana, y la acción escalar puede escribirse como:

$$S_s = -\frac{1}{2Gk\hat{k}} \int Q \left[ \hat{k} \left( g^{\alpha\beta} - \omega^\alpha\omega^\beta \right) \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \right] (-g)^{1/2} d^4x$$

- Existen tres constantes:  $k$ ,  $\hat{k}$ , y un parámetro  $K$  que aparece en la acción del vector, así mismo, una función libre  $Q(x)$ , la cual genera la función de interpolación de MOND en el límite no relativista.
- Para sistemas no relativistas *TeVes* reproduce la fenomenología MOND no relativista con el potencial MOND, dado por la suma de dos potenciales, uno que satisface la ecuación de Poisson (ec. (1.21)), y otro que satisface la ecuación (1.39) con  $a_0 \propto k\hat{k}^{-1/2}$ .
- Para campo débil ( $\phi \ll c^2$ ), *TeVes* está en acuerdo con la fórmula estándar de la Relatividad General pero con el potencial MOND, el cual se deriva de la ecuación (1.39).

El enfoque dado por *TeVes* requiere el uso de vectores, tensores y campos escalares para conseguir una descripción autoconsistente, esto sin duda implica que las matemáticas empleadas por *TeVes* son muy complicadas. Además, esta propuesta no puede reproducir fenómenos astrofísicos cruciales (incompatibilidad de las curvas de rotación con las lentes gravitacionales [32]).

## Capítulo 2

# Ley de Fuerzas de Gravedad Extendida

*Si se deduce universalmente, mediante experimentos y observaciones astronómicas, que todos los cuerpos que están alrededor de la Tierra gravitan hacia la Tierra... proporcionalmente a la cantidad de materia que realmente poseen; que de igual manera la Luna...gravita hacia la Tierra... y todos los planetas gravitan entre sí; y los cometas en cierta manera hacia el Sol; debemos, como consecuencia de esta regla, deducir universalmente que todos los cuerpos, cualesquiera que sean, están dotados de un principio de gravitación mutua.*

Isaac Newton, *Principia* (1686).

### 2.1. Ley de Fuerzas

En recientes publicaciones sobre la dispersión de velocidades de las galaxias enanas esferoidales locales, el aplanamiento de las curvas de rotación de galaxias espirales, las lentes gravitacionales debidas a grupos masivos de galaxias y hasta la materia cosmológicamente inferida contenida en el universo, se han modelados exitosamente en términos de un cambio de la ley de gravedad, en ausencia de materia oscura [36]. Esto sugiere tomar como evidencia empírica la aparición de una escala fundamental de aceleración  $a_0 \simeq 1.2 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ .

En [37] se ha explorado la teoría MOND no como una modificación a la segunda ley de Newton (ec. (1.20)), sino como una modificación a la ley de fuerza gravitacional de Newton (ec. (1.23)), encontrándose un buen acuerdo con la dinámica observada dentro de las escalas galácticas sin el requerimiento de la materia oscura.

En [38] se mostró que bajo teorías de gravedad modificada, estrellas binarias con separaciones físicas más allá de 700 UA pueden exhibir curvas de rotación asintóticamente planas y una relación de Tully-Fisher tal y como sucede con sistemas galácticos en el mismo régimen de aceleración. Así mismo, en [39] se

mostró que es posible construir modelos dinámicos con simetría esférica para Cúmulos Galácticos Globulares utilizando una ley de fuerza Newtoniana modificada la cual reproduce la fenomenología MOND y la cual también satisface todas las restricciones observacionales.

Para realizar el análisis de la ley de Gravedad Modificada que se utilizó en este trabajo, consideremos la aceleración  $\mathbf{a}$ , sentida por una partícula de prueba debida a la presencia de una masa puntual  $M$ . El tratamiento que se realizó fue a un nivel no relativista. Mostraremos que la constante de gravedad de Newton  $G$  y el teorema fundamental del análisis dimensional de Buckingham (o simplemente Teorema II de Buckingham) completan la descripción del problema. El Teorema II de Buckingham establece que dada una relación física, la cual puede expresarse mediante una ecuación que relaciona  $\mathbf{n}$  magnitudes físicas (o variables), con cada variable expresada en términos de  $\mathbf{k}$  cantidades físicas, cada una de las cantidades físicas dimensionalmente independientes, la ecuación original puede escribirse como una ecuación de  $\mathbf{n-k}$  números adimensionales, los cuales son construidos con las magnitudes físicas originales. Esto es, si se tiene una ecuación física que muestra la relación que existe entre las variables involucradas en un cierto problema, el Teorema II de Buckingham nos asegura que existe una función  $F$  tal que:

$$F(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) = 0,$$

en donde  $\Phi_i$ , representa las  $\mathbf{n}$  magnitudes físicas, las cuales se expresan en términos de  $\mathbf{k}$  unidades físicas independientes. Entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\tilde{F}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0,$$

en donde los  $\Pi_i$ , son los parámetros adimensionales que se construyen de  $(\mathbf{n-k})$  ecuaciones de la forma:

$$\Pi_i = \Phi_1^{m_1} \Phi_2^{m_2} \dots \Phi_n^{m_n},$$

los  $m_i$  son ciertos exponentes a determinar.

Vamos a aplicar el Teorema II de Buckingham a la ecuación (2.11), esto es, vamos a relacionar la magnitud de la aceleración sentida por la partícula prueba,  $a$ , en función de las variables  $a_0$ ,  $G$ ,  $M$  y  $r$ . En este caso tenemos una relación del tipo:

$$F(a, a_0, G, M, r) = 0. \quad (2.1)$$

Se tienen 5 variables relevantes, lo que significa que  $\mathbf{n} = 5$ . Estas cinco variables no son dimensionalmente independientes, ya que desde el punto de vista dimensional, están escritas en términos de masa  $[M]$ , longitud  $[L]$  y tiempo  $[T]$ :

$$[a] = LT^{-2},$$

$$\begin{aligned}
[a_0] &= LT^{-2}, \\
[G] &= M^{-1}L^3T^{-2}, \\
[M] &= M, \\
[r] &= L,
\end{aligned}$$

en este caso se tiene por lo tanto que  $\mathbf{k} = 3$ , ya que todas las magnitudes se reducen a sólo tres magnitudes dimensionales independientes. Esto implica que existen  $\mathbf{n} - \mathbf{k} = 2$ , combinaciones adimensionales tales que la relación (2.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\tilde{F}(\Pi_1, \Pi_2) = 0. \quad (2.2)$$

Ahora vamos a escoger de forma arbitraria 3 de las 5 magnitudes originales y vamos a considerarlas como “básicas”, y formaremos junto con las otras dos consideradas como “dependientes”, productos adimensionales. En este caso vamos a tomar como básicas a las variables  $G$ ,  $a_0$  y  $r$  (puede considerarse cualquier otra combinación). Buscamos exponentes enteros tales que los siguientes productos sean adimensionales:

$$\Pi_1 = G^\alpha a_0^\beta r^\gamma a, \quad (2.3)$$

$$\Pi_2 = G^\mu a_0^\nu r^\sigma M. \quad (2.4)$$

La condición de adimensionalidad para  $\Pi_1$  nos lleva a:

$$M^0 L^0 T^0 = (M^{-1}L^3T^{-2})^\alpha (LT^{-2})^\beta (L)^\gamma (LT^{-2})^1 = M^{-\alpha} L^{3\alpha+\beta+\gamma+1} T^{-2\alpha-2\beta-2}.$$

Esto conduce al sistema de ecuaciones:

$$0 = -\alpha,$$

$$0 = 3\alpha + \beta + \gamma + 1,$$

$$0 = -2\alpha - 2\beta - 2.$$

La solución que se obtiene es:  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$  y  $\gamma = 0$ . Al sustituir estos valores en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\Pi_1 = \frac{a}{a_0}. \quad (2.5)$$

La condición de adimensionalidad para  $\Pi_2$  nos lleva a:

$$M^0 L^0 T^0 = (M^{-1}L^3T^{-2})^\mu (LT^{-2})^\nu (L)^\sigma (M)^1 = M^{-\mu+1} L^{3\mu+\nu+\sigma} T^{-2\mu-2\nu-2}.$$

Esto conduce al sistema de ecuaciones:

$$0 = -\mu + 1,$$

$$0 = 3\mu + \nu + \sigma,$$

$$0 = -2\mu - 2\nu.$$

La solución que se obtiene es:  $\mu = 1$ ,  $\nu = -1$  y  $\sigma = -2$ . Al sustituir estos valores en la ecuación (2.4) se obtiene:

$$\Pi_2 = \frac{GM}{a_0 r^2}. \quad (2.6)$$

La relación buscada es:

$$\tilde{F}\left(\frac{a}{a_0}, \frac{GM}{a_0 r^2}\right) = 0. \quad (2.7)$$

Asumiendo condiciones de diferenciabilidad sobre la función anterior,  $\tilde{F}$ , la cual cumple con la condición:

$$\tilde{F}(\Pi_1, \Pi_2) = 0. \quad (2.8)$$

Se puede hacer uso del Teorema de la Función Implícita para obtener la siguiente relación:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2). \quad (2.9)$$

Al sustituir los valores obtenidos de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  en la ecuación anterior, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{a}{a_0} = f\left(\frac{GM}{a_0 r^2}\right). \quad (2.10)$$

Dada la relación obtenida por el Teorema de Buckingham (ec. (2.10)), se propone que el valor absoluto de la aceleración,  $a$ , sentida por una partícula prueba localizada a una distancia  $r$ , de una masa puntual  $M$ , está dada por [37]:

$$a = a_0 f(x), \quad (2.11)$$

con

$$x := l_M/r, \quad (2.12)$$

y donde

$$l_M := \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Al comparar la ecuación (2.11) con la ecuación (2.10), se puede notar que hemos considerado por conveniencia los parámetros adimensionales,  $\Pi_1^*$  y  $\Pi_2^*$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Pi_1^* &= \Pi_1 = \frac{a}{a_0}, \\ \Pi_2^* &= \sqrt{\Pi_2} = \frac{1}{r} \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La aceleración propuesta en la ecuación (2.11) converge a la aceleración gravitacional de Newton cuando la función  $f(x) = x^2$ , ya que en este caso la ecuación (2.11) se reduce a:

$$a = \frac{GM}{r^2}, \quad (2.14)$$

y a la aceleración de MOND cuando la función  $f(x) = x$ , pues en este caso la ecuación (2.11) se reduce a:

$$a = \frac{(GMa_0)^{1/2}}{r}. \quad (2.15)$$

Estos dos ejemplos de las funciones  $f(x)$ , representan el acercamiento a una teoría extendida no relativista de la gravedad. El problema principal que se presenta es: ¿cómo encontrar una función  $f(x)$ , la cual tomando en cuenta los límites apropiados, converja al límite Newtoniano y al límite MONDiano? .

Notamos que el puro análisis dimensional con la introducción de una aceleración de escala  $a_0$ , determina exactamente la forma dimensional que debe tener la aceleración. En términos muy generales, esto también muestra que la introducción de  $a_0$ , significa que la gravedad tiene una escala característica de masa-longitud  $l_M$ , la cual hace posible la construcción de la ecuación (2.11). Con todo esto, la aceleración resulta ser únicamente una función de la  $x$  [37].

La escala de masa-longitud  $l_M$ , funciona como un punto de transición del régimen MONDiano (sistemas con aceleraciones pequeñas comparadas con  $a_0$ ) al régimen Newtoniano (sistemas con aceleraciones grandes comparadas con  $a_0$ ). En [40] se mostró que una distribución de masa, cuya longitud es mucho mayor que su masa-longitud  $l_M$  asociada, está en el régimen MONDiano (ya que en este caso  $x \ll 1$ ) y una distribución de masa cuya longitud es mucho menor que su escala masa-longitud, está en el régimen Newtoniano (ya que en este caso  $x \gg 1$ ). El caso  $x = 1$  puede considerarse, de manera aproximada, como el punto donde ocurre la transición del régimen Newtoniano al régimen MONDiano.

En la sección 1.6 del capítulo 1, hemos visto que la forma física de MOND está dada por un modelo AQUAL y sus variaciones reproducen la ecuación de movimiento. Para simetrías especiales (esférica, plana o cilíndrica), esta aproximación da el importante resultado de que el valor absoluto de la aceleración que siente una partícula de prueba en la presencia de una masa puntual  $M$ , está dada por:

$$a\mu(a/a_0) = |\nabla\varphi_N| = \frac{GM}{r^2}. \quad (2.16)$$

En esta última ecuación, el potencial escalar Newtoniano se representa por  $\varphi_N$  y la función de interpolación  $\mu(a/a_0)$  que aparece en la ecuación (2.16) es tal que,  $\mu(a/a_0) \simeq 1$  en el límite Newtoniano, el cual corresponde al caso de grandes aceleraciones, esto es,  $a \gg a_0$  y  $\mu(a/a_0) \simeq a/a_0$  en el límite MONDiano, que corresponde

a bajas aceleraciones,  $a \ll a_0$ , relacionando la ecuación (2.16) con la ecuación (2.11), se sigue que:

$$\mu(a/a_0) = \frac{1}{a_0 f(x)} \frac{GM}{r^2}, \quad (2.17)$$

sustituyendo la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12) y elevando al cuadrado se obtiene que:

$$x^2 = \frac{GM}{a_0 r^2}, \quad (2.18)$$

al sustituir la ecuación (2.18) en la ecuación (2.17), la función de interpolación se escribe como:

$$\mu(a/a_0) = \frac{x^2}{f(x)}. \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) muestra de manera implícita, que el formalismo MOND puede expresarse de manera equivalente a una modificación en la fuerza gravitacional dada en la ecuación (2.11). La propuesta MOND se ha abordado generalmente a través de modificaciones dinámicas. Únicamente usaremos la constante  $a_0$  para tener consistencia con las modificaciones dinámicas. Se tiene que la fuerza adimensional  $f(x)$  que aparece en la ecuación (2.11) depende únicamente de la razón  $l_M/r$  [37].

Vamos ahora a extender la ecuación (2.11) a una forma vectorial. Sabemos que la formulación AQUAL se satisface por el modelo que aquí se propone (ec. (2.11)), así mismo su ecuación de campo que está dada por la fórmula de Poisson modificada (ec. (1.39)). Cuando se tienen sistemas con un alto grado de simetría, se tiene que [15]:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{a_0}\right) \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\frac{1}{a_0} \nabla \varphi_N = -\frac{G}{a_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (2.20)$$

donde hemos utilizado la ecuación (1.23) y el hecho de que  $\mathbf{a} = -\nabla \varphi_N$ . En la ecuación anterior  $\rho(\mathbf{r})$ , representa la densidad de materia en el punto  $\mathbf{r}$ . Además, la fórmula vectorial de la ecuación (2.11) debe ser necesariamente de la forma:

$$\mathbf{a} = a_0 f(x) \mathbf{e}_a, \quad (2.21)$$

donde el vector unitario  $\mathbf{e}_a$ , apunta en la dirección de la aceleración  $\mathbf{a}$ . Sustituyendo la ecuación (2.21) en la ecuación (2.20) se obtiene:

$$f(x) \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) \mathbf{e}_a = -\frac{G}{a_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.22)$$

Sustituyendo la ecuación (2.19) en la ecuación anterior se obtiene:

$$x^2 \mathbf{e}_a = -\frac{G}{a_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (2.23)$$

Esta descripción generaliza las relaciones anteriores, en el sentido de que una masa puntual  $M$ , puede sustituirse directamente por  $M(\mathbf{r})$ . La magnitud de la ecuación (2.23) es la fórmula que se utiliza para calcular la variable  $x$ , para una distribución de densidad de masa  $\rho(\mathbf{r})$ .

## 2.2. El Modelo de Fuerza

Mostraremos una forma razonable de obtener la función  $f(x)$  que aparece en la ecuación (2.11), realizando una exploración simple del régimen Newtoniano y MONDiano. Pidiendo que la fuerza gravitacional adimensional  $f(x)$ , que siente una partícula prueba sea analítica, esta puede escribirse como una serie de potencias convergente de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n x^n. \quad (2.24)$$

En el límite Newtoniano la función  $f(x)$ , debe ser de la forma:

$$f(x) = c_N x^2. \quad (2.25)$$

En cambio, para el límite MONDiano esta función debe ser de la forma:

$$f(x) = c_M x. \quad (2.26)$$

Dada la expresión que tiene la variable  $x$  en la ecuación (2.24), que explícitamente está dada por:

$$x = \frac{1}{r} \left( \frac{GM}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Es necesario para recuperar el límite Newtoniano de manera correcta, tomar  $c_N = 1$  en la ecuación (2.25), dada esta elección se obtiene que la fuerza gravitacional adimensional en el régimen Newtoniano es:

$$f(x) = x^2 = \frac{GM}{a_0 r^2}, \quad (2.28)$$

y para recuperar el límite MONDiano se debe tomar  $c_M = 1$  en la ecuación (2.26), para obtener una fuerza gravitacional adimensional en el régimen MONDiano esta dada por:

$$f(x) = x = \frac{1}{r} \left( \frac{GM}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Motivados por el hecho de que  $c_N = c_M = 1$ , desarrollamos una propuesta de un tipo muy particular, tomando todos los coeficientes  $c_n$  que aparecen en la serie

de potencias (ec. (2.24)) iguales a uno, tanto para el régimen Newtoniano ( $x \gg 1$ ) y el régimen MONDiano ( $x \ll 1$ ), esto es,  $c_n = 1$  para toda  $n$  de la serie. No hay un argumento fundamental para afirmar que es la única forma posible, pero esta propuesta resulta ser conveniente y reproduce los límites Newtoniano y MONDiano de forma correcta.

Ahora vamos a concentrarnos sólo en el régimen Newtoniano, esto es, cuando  $x \gg 1$ . Primero realizamos una expansión alrededor de este límite de la forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{n=2} x^n = \left(\frac{l_M}{r}\right)^2 + \left[\left(\frac{l_M}{r}\right)^1 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^0 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^{-1} + \dots\right] \\ &= \left(\frac{l_M}{r}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^{-1} + \left(\frac{l_M}{r}\right)^{-2} + \left(\frac{l_M}{r}\right)^{-3} + \dots\right\} \\ &= x^2 (1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se ha comenzado la serie desde  $n = -\infty$  hasta  $n = 2$  para tener el límite Newtoniano apropiado, los términos  $[x^1 + x^0 + x^{-1} + \dots]$  que aparecen en la ecuación anterior pueden verse como una corrección al límite Newtoniano. Si se toma el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  se obtiene la aceleración Newtoniana, por lo que al tomar en cuenta todos los términos de la serie geométrica para  $x > 1$  se tiene que:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x^3}{x-1}. \quad (2.31)$$

Ahora vamos a considerar el régimen MONDiano en el que  $x \ll 1$  y explorar la correspondiente expansión dada por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a_0}\right) &= \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n = \left(\frac{l_M}{r}\right)^1 + \left[\left(\frac{l_M}{r}\right)^2 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^3 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^4 + \dots\right] \\ &= \left(\frac{l_M}{r}\right)^1 \left\{1 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^1 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^2 + \left(\frac{l_M}{r}\right)^3 + \dots\right\} \\ &= x (1 + x + x^2 + x^3 + \dots). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En este caso se comenzó la serie desde  $n = 1$  hasta  $n = \infty$  para tener el límite MONDiano apropiado. Los términos  $[x^2 + x^3 + x^4 + \dots]$  que aparecen en la ecuación anterior pueden considerarse como una corrección al límite MONDiano. Se observa que el régimen MOND se obtiene en el límite, cuando  $x \rightarrow 0$  y de esta forma la serie geométrica de la ecuación (2.32) para  $x < 1$  está dada por:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{x}{1-x}. \quad (2.33)$$

De esto se tiene entonces que la ecuación (2.30) se puede pensar como la serie para las potencias negativas y la ecuación (2.32) como una serie para las potencias positivas de la misma relación. La cosa interesante a notar es que ambas pueden ser continuas analíticamente para todos los valores de  $x$ . Para los casos límites, el signo menos en el denominador de ambas ecuaciones (2.31) y (2.33) puede ser cambiado por un signo positivo. Ya que estamos interesados en la serie analítica completa, podemos proponer una fórmula de aceleración general dada por la suma o resta de la ecuación (2.31) y (2.33) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_{\pm} = \frac{x \pm x^3}{1 \pm x}. \quad (2.34)$$

Notemos que esta última ecuación tiende al régimen de aceleración Newtoniana cuando  $x \rightarrow \infty$  y al límite de aceleración MONDiana cuando  $x \rightarrow 0$ . De hecho, debido a la simetría del numerador y del denominador de la ecuación (2.34), se puede postular una relación más general dada por [37]:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_{\pm} = x \frac{1 \pm x^{n+1}}{1 \pm x^n}. \quad (2.35)$$

Esta última relación satisface los límites de aceleración Newtoniano y MONDiano cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow 0$ , respectivamente. Notemos también que para el caso  $n = 1$  con un signo menos se obtiene:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_{-} = x \frac{1 - x^2}{1 - x} = x \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = x(1 + x), \quad (2.36)$$

este resultado es el mismo que se obtiene al tomar dos veces el caso  $n = 0$  con un signo más:

$$2 \left(\frac{a}{a_0}\right)_{+} = 2x \left(\frac{1 + x}{1 + 1}\right) = 2x \left(\frac{1 + x}{2}\right) = x(1 + x), \quad (2.37)$$

y ambos corresponden al estado base de Bekenstein de la fórmula de aceleración [18]. Esta ha demostrado ser útil para el modelaje dinámico de galaxias dSph [36], pero no para nuestra propia galaxia [16]. La función de aceleración (ec. (2.35)) no tiene singularidades, ya que de acuerdo a la regla de l'Hôpital  $(a/a_0)_{-} \rightarrow (n+1)/n$

cuando  $x \rightarrow 1$ , tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{a_0} \right)_- &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^{n+2}}{1 - x^n}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - (n+2)x^{n+1}}{-nx^{n-1}}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{nx^{n-1}} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(n+2)x^{n+2}}{n}, \\
&= \frac{-1}{n} + \frac{n+2}{n}, \\
&= \frac{n+1}{n}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

De hecho, para ver esto directamente, notemos que para el signo menos se sigue de la ecuación (2.35) que:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{a}{a_0} \right)_- &= x \frac{(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)}{(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1})}, \\
&= x \frac{(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)}{(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1})}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Al tomar el límite en la ecuación (2.39) cuando  $x \rightarrow 1$  se obtiene que  $(a/a_0)_- \rightarrow (n+1)/n$ . Podemos notar que el lado derecho de la ecuación (2.35) puede expandirse como una serie si se realiza una expansión binomial al término del denominador de la forma:

$$(1 \pm y)^{-n} = 1 \mp \frac{ny}{1!} + \frac{n(n+1)y^2}{2!} \mp \dots (|y| < 1), \tag{2.40}$$

para el caso donde  $x < 1$ , se toma  $y = x^n$  en la ecuación (2.40), y para el caso donde  $x > 1$ , se toma  $y = \frac{1}{x^n}$  en la ecuación (2.40).

El lado derecho de la ecuación (2.35) con un signo menos puede expandirse como una serie de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{a}{a_0} \right)_- &= x \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x^n} = x(1 - x^{n+1})(1 - x^n)^{-1}, \\
&= (x - x^{n+2})(1 + x^n + x^{2n} + \dots), \\
&= x + x^{n+1} - x^{n+2} + x^{2n+1} - x^{2n+2} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

para  $x < 1$ , y se obtiene la siguiente expansión:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{a_0}\right)_- &= x \frac{1-x^{n+1}}{1-x^n} = x(1-x^{n+1})(1-x^n)^{-1}, \\
&= (x-x^{n+2}) \left(-x^n \left(1-\frac{1}{x^n}\right)\right)^{-1}, \\
&= \left(\frac{x^{n+2}-x}{x^n}\right) \left(1-\frac{1}{x^n}\right)^{-1}, \\
&= (x^2-x^{1-n}) (1+x^{-n}+x^{-2n}+\dots), \\
&= x^2-x^{1-n}+x^{2-n}-x^{1-2n}+x^{2-2n}+\dots, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

para  $x > 1$ .

Si ahora elegimos el signo positivo en el lado derecho de la ecuación (2.35) obtenemos la siguiente expansión:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{a_0}\right)_+ &= x \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} = x(1+x^{n+1})(1+x^n)^{-1}, \\
&= (x+x^{n+2})(1-x^n+x^{2n}-\dots), \\
&= x-x^{n+1}+x^{n+2}+x^{2n+1}-x^{2n+2}+\dots, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

para  $x < 1$ , y se obtiene la siguiente expansión:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{a_0}\right)_+ &= x \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} = x(1+x^{n+1})(1+x^n)^{-1}, \\
&= (x+x^{n+2}) \left(x^n \left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right)^{-1}, \\
&= \left(\frac{x+x^{n+2}}{x^n}\right) \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1}, \\
&= (x^2+x^{1-n}) (1-x^{-n}+x^{-2n}-\dots), \\
&= x^2+x^{1-n}-x^{2-n}-x^{1-2n}+x^{2-2n}+\dots, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

para  $x > 1$ . Esto muestra que el régimen Newtoniano y MONDiano se alcanzan en el límite correcto independientemente del valor de  $n$ .

El caso extremo que resulta de tomar  $n \rightarrow \infty$  corresponde a la función:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_e = \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ (Régimen MONDiano)} \\ x^2, & \text{para } x \geq 1 \text{ (Régimen Newtoniano)}. \end{cases}$$

Esta fórmula de la aceleración no se utiliza debido a la discontinuidad de la primera derivada en  $x = 1$ , pero sirve como una referencia para entender que la aceleración

real debe pasar sin problemas del régimen Newtoniano al régimen MONDiano. También como se ha señalado en [40], el punto donde  $x = 1$  representa aproximadamente la transición del régimen Newtoniano al régimen MONDiano. En el modelo propuesto, este es estrictamente válido en el caso extremo, cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Con el fin de fijar el parámetro  $n$  y la elección del signo en la ecuación (2.35), se deben construir diferentes funciones de interpolación MOND  $\mu(a/a_0)$ , para esta fórmula de aceleración y compararlas con el mejor modelo para nuestra Galaxia presentada por [16]. Para hacer esto, se deben sustituir las ecuaciones (2.35) y (2.11) en la ecuación (2.19). Al realizar estas sustituciones la función de interpolación que se obtiene es:

$$\mu(a/a_0) = \frac{x^2}{f(x)} = x^2 \left( x \frac{1 \pm x^{n+1}}{1 \pm x^n} \right)^{-1} = x \frac{1 \pm x^n}{1 \pm x^{n+1}}. \quad (2.45)$$

La función  $\mu(a/a_0)$  que aparece en la ecuación (2.45) se obtiene resolviendo numéricamente la función de aceleración dada por  $(a/a_0)$  como función del parámetro  $x$ , tomando un valor fijo de  $n$ .

En [37] se mostró que este ejercicio resulta en la restricción  $n > 4$ , mientras que en [39] se mostró que un ajuste a perfiles de brillo y dispersión de velocidad de cúmulos globulares requieren un índice  $n > 8$ .

### 2.3. Restricciones a Teorías de Gravedad Modificada usando el Sistema Tierra-Luna

El enfoque dado por las teorías de gravedad modificada al problema de la masa faltante en las galaxias, requiere la introducción de una función de interpolación que debe determinarse por medio de observaciones y experimentos. El valor exacto del producto  $GM$  de la Tierra (*la cantidad  $GM$ , es el producto de la constante gravitacional y la masa de un cuerpo astronómico dado, como el Sol o la Tierra, este producto se conoce como el parámetro gravitacional estándar, el valor del producto  $GM$  se conoce con más exactitud que cada factor de forma independiente*) medida por el *Lunar Laser Ranging (LLR, por sus siglas en inglés)* y por diversos satélites artificiales de la Tierra, incluyendo el seguimiento preciso de los satélites *LAGEOS*, restringen firmemente la forma de esta función, por lo que al no describir de manera satisfactoria los datos observados, la mayor parte de estas funciones propuestas se pueden refutar [41]. Los resultados que se obtienen implican que la transición del régimen newtoniano al régimen MONDiano es más abrupta de lo que comúnmente se piensa, y consistente con nuestra propuesta de tomar un índice  $n > 4$  en la ley de fuerzas (ec.(2.45)).

### 2.3. Restricciones a Teorías de Gravedad Modificada usando el Sistema Tierra-Lu89

La segunda ley de la dinámica Newtoniana en presencia de la aceleración gravitacional de la tierra ha sido probada en el laboratorio hasta una aceleración del orden de  $10^{-14}m/s^2$ . En la realización de los experimentos que se han llevado a cabo no se ha observado ninguna desviación. Sin embargo, estos experimentos no se realizan en un sistema inercial con respecto al sistema de *Fondo Cósmico de Microondas* (*CMB*), (por sus siglas en inglés, *Cosmic Microwave Background*). Estos son considerados en un sistema acelerado con respecto al sistema *CMB*: la Tierra. Así que no suponen ningún resultado concluyente sobre MOND [41].

Vamos a estudiar las restricciones que el sistema Tierra-Luna introduce sobre la función dada en la ecuación (2.45). Al hacerlo, tomamos en cuenta el valor exacto de la razón de masa del sistema *Sol/(Tierra+Luna)* medida por el *LLR*, junto con los valores del *GM* Solar y del *GM* Lunar obtenidos de naves espaciales en órbita lunar. Dados estos valores se obtiene la masa gravitacional efectiva de la Tierra (*La masa gravitacional efectiva se define como el campo gravitacional multiplicado por  $r^2$ , donde  $r$  es la distancia medida a partir del centro de la Tierra*) en un marco de referencia centrado en la Tierra con una precisión de una parte en  $10^8$ , obteniéndose un valor igual a:

$$GM_{Tierra}^{LLR}(r_{LD}) = 398600,443 \pm 0,004 \frac{km^3}{s^2}, \quad (2.46)$$

donde  $r_{LD}$  representa la distancia Lunar, esto es, la distancia promedio entre la Tierra y la Luna. La masa gravitacional efectiva de la Tierra también ha sido medida por varios satélites artificiales Terrestres, incluyendo el seguimiento preciso de los satélites *LAGEOS* orbitando la Tierra en órbitas casi circulares, con semiejes aproximadamente el doble del radio de la Tierra, en este caso se obtiene que la masa gravitacional efectiva de la Tierra es:

$$GM_{Tierra}^{LAGEOS}(2r_{Tierra}) = 398600,4419 \pm 0,0002 \frac{km^3}{s^2}, \quad (2.47)$$

donde  $r_{Tierra}$  representa el radio de la Tierra. Para mostrar que las ecuaciones (2.46) y (2.47) restringen la función  $\mu(x)$ , y por consiguiente a la función  $f(x)$ , primero tenemos que calcular el campo gravitacional del sistema Tierra-Luna en el modelo de *AQUAL*. Al hacerlo se observa que la solución general al modelo *AQUAL* puede expresarse en términos del correspondiente potencial gravitacional Newtoniano  $\varphi_N$ , dado por la ecuación:

$$\mu \left( \frac{|\nabla\phi|}{a_0} \right) \nabla\phi = \nabla\varphi_N + \nabla \times \mathbf{h}, \quad (2.48)$$

donde el campo vectorial  $\mathbf{h}$ , se identifica mediante la relación:

$$0 = \nabla \times \nabla\phi = \nabla \times \left( \frac{\nabla\varphi_N + \nabla \times \mathbf{h}}{\mu \left( \frac{|\nabla\phi|}{a_0} \right)} \right). \quad (2.49)$$

El sistema Tierra-Luna es considerado en buena aproximación como un sistema de dos cuerpos. Además, si se toma en cuenta el hecho de que la masa de la Luna es mucho más pequeña que la masa de la Tierra y que los momentos gravitacionales más grandes pueden despreciarse, esto bajo la suposición de que el campo gravitacional Newtoniano alrededor de la Tierra es esférico [15], se tiene que el término  $\nabla \times \mathbf{h}$  en la ecuación (2.48) desaparece para el sistema Tierra-Luna. Así que la aceleración gravitacional cerca de la tierra que se obtiene en el modelo AQUAL es:

$$\mu \left( \frac{|\nabla\phi|}{a_0} \right) \nabla\phi = \nabla\varphi_N. \quad (2.50)$$

Recordando que cerca de la Tierra la función de interpolación es de la forma  $\mu \approx 1$ , la ecuación (2.50) puede resolverse de forma perturbativa para  $\nabla\phi$ , obteniéndose el siguiente resultado:

$$\nabla\phi \approx \frac{1}{\mu \left( \frac{|\nabla\varphi_N|}{a_0} \right)} \nabla\varphi_N. \quad (2.51)$$

Utilizando el hecho de que  $\nabla\varphi_N = \hat{r} \frac{GM_{Tierra}}{r^2}$ , la ecuación anterior se reescribe como:

$$\nabla\phi \approx \frac{\hat{r}}{\mu \left( \frac{GM_{Tierra}}{a_0 r^2} \right)} \frac{GM_{Tierra}}{r^2}. \quad (2.52)$$

Notamos que la ecuación (2.46) representa el término  $r^2 \nabla\phi$  a la distancia Lunar, por lo que de la ecuación (2.52) se deduce que:

$$\frac{GM_{Tierra}}{\mu \left( \frac{GM_{Tierra}}{a_0 r_{LD}^2} \right)} = 398600,443 \pm 0,004 \frac{km^3}{s^2}, \quad (2.53)$$

mientras que la ecuación (2.47) representa el término  $r^2 \nabla\phi$  a una distancia  $r = 2r_{Tierra}$ , por lo que en este caso se obtiene de la ecuación (2.52) que:

$$\frac{GM_{Tierra}}{\mu \left( \frac{GM_{Tierra}}{4a_0 r_{Tierra}^2} \right)} = 398600,4419 \pm 0,0002 \frac{km^3}{s^2}. \quad (2.54)$$

La consistencia entre las ecuaciones (2.53) y (2.54) exige que:

$$\left| \frac{1}{\mu(x_{LD})} - \frac{1}{\mu(x_{2rT})} \right| < 10^{-8}, \quad (2.55)$$

donde

$$x_{LD} = \frac{GM_{Tierra}}{a_0 r_{LD}^2} = 2,7 \times 10^7, \quad (2.56)$$

y

$$x_{2rT} = \frac{GM_{Tierra}}{4a_0 r_{Tierra}^2} = 2,4 \times 10^{10}, \quad (2.57)$$

en el que la distancia lunar (LD) se toma como 384,400 kilómetros y el radio de la Tierra se toma como 6,371 kilómetros.

La ecuación (2.55) es la restricción del sistema Lunar sobre las funciones  $\mu(x)$  y  $f(x)$ . Si se calcula el valor de  $|\frac{1}{\mu(x_{LD})} - \frac{1}{\mu(x_{2r_T})}|$  utilizando la función dada en la ecuación (2.45) con  $n = 3$  y el signo menos (-) en el numerador y en el denominador, se obtiene que:

$$|\frac{1}{\mu(x_{LD})} - \frac{1}{\mu(x_{2r_T})}| < 5,9 \times 10^{-23}. \quad (2.58)$$

Observamos por lo tanto que la elección de esta función (ec. (2.45)) resulta compatible con el sistema Lunar. Este resultado permite interpretar que la transición del régimen Newtoniano al régimen MONDiano del modelo AQUAL tendría que ser más abrupto de lo que comúnmente se piensa [41].

En [41] también se muestra que numerosas otras propuestas de funciones  $\mu(x)$  que se encuentran en la literatura, quedan descartadas por esta restricción.

## 2.4. Formulación Relativista de la Ley de Fuerzas

En [33] se mostró que una métrica extendida de la gravedad,  $f(\chi)$  (con  $\chi := L_M^2 R$ , donde  $R$  es el escalar de Ricci y  $L_M$  define una longitud fija dada por los parámetros de la teoría, la forma explícita de  $L_M$  es usualmente obtenida al tomar el límite no relativista de la teoría), derivada de primeros principios, es capaz de reproducir MOND en el régimen no relativista. Con esta nueva formulación se tiene que la gravedad Newtoniana aparece en el límite de campo débil de la Relatividad General, y la Dinámica Newtoniana Modificada (MOND) aparece en el límite de campo débil de la propuesta formulada en [33]. La métrica extendida que se propone en [33] ha sido probada con éxito en una gran variedad de escenarios cosmológicos [34], [35].

En [33] se asume que una masa puntual  $M$  localizada en el origen de coordenadas genera un campo gravitacional relativista in el régimen MONDiano y que el formalismo de una métrica describe las ecuaciones de campo. El problema está caracterizado por las siguientes cantidades: la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , la masa del objeto central que genera el campo gravitacional  $M$ , la constante de gravitación universal  $G$  y la constante de aceleración de Milgrom  $a_0$ . Con éstos parámetros, es posible construir dos longitudes fundamentales:

$$r_g := \frac{GM}{c^2}, \quad (2.59)$$

y

$$l_M := \left( \frac{GM}{a_0} \right)^{1/2} \quad (2.60)$$

El radio gravitacional  $r_g$ , es una longitud que aparece una vez que los efectos relativistas son introducidos en una teoría de la gravedad. La escala de masa-longitud  $l_M$ , como fue descrita en la sección 2.1, resulta ser una longitud característica que aparece en una teoría gravitacional cuando los efectos MONDianos son apreciables. De igual manera vimos que en el régimen no relativista, una partícula prueba localizada a una coordenada radial  $r$  del origen obedece la dinámica MONDiana cuando  $l_M/r \ll 1$ , y cuando  $l_M/r \gg 1$  el campo gravitacional es newtoniano. Cuando los efectos relativistas son tomados en cuenta para describir el campo gravitacional, la relatividad general es recuperada en el límite  $l_M/r \gg 1$ , y la versión relativista de MOND es obtenida cuando  $l_M/r \ll 1$ . Se muestra entonces que la búsqueda de una descripción métrica de la teoría conduce a considerar la dependencia de escala de la gravedad.

En [33] se mostró que el régimen impuesto por la siguiente ecuación:

$$l_M \gg r_g, \quad (2.61)$$

es precisamente el régimen en el cual los efectos MONDianos pueden aparecer en una teoría relativista de la gravedad. El resultado que se obtiene es una generalización de los resultados presentados en [37] en el régimen de campo débil para el cual  $l_M \ll r$ , al combinar este resultado con la ecuación (2.61) se obtiene que  $r \gg l_M \gg r_g$ . Se muestra también que la teoría Newtoniana de la gravedad es recuperada en el límite  $l_M \gg r \gg r_g$ .

## 2.5. Configuraciones de Equilibrio

Las galaxias elípticas masivas son enormes conglomerados de estrellas. Se tiene que la comprensión de la distribución de masa en las galaxias elípticas masivas es vital para la obtención de restricciones sobre modelos dinámicos.

En este trabajo se realiza el estudio de la galaxia elíptica masiva NGC 4649 (también conocida como Messier 60 o M60), la cual pertenece a la constelación de Virgo. Esta galaxia fue descubierta por Johann Gottfried en 1779. M60 es una de las galaxias elípticas gigantes del cúmulo de Virgo y es la tercera en brillo tras las galaxias M49 y M87, pertenecientes a este cúmulo también.

Se modela a la galaxia NGC 4649 como una población de estrellas autogravitantes en configuración de equilibrio con simetría esférica, bajo una ley de fuerza gravitacional Newtoniana modificada. Se tiene que para una partícula prueba a

una distancia  $r$ , del centro de una distribución de masa esféricamente simétrica,  $M(r)$ , la ley de fuerza adimensional  $f(x)$ , que en este trabajo se utilizó, está dada por:

$$f(x) = x \left( \frac{1 - x^n}{1 - x^{n-1}} \right), \quad (2.62)$$

donde  $x = l_M/r$  y  $l_M = (GM(r)/a_0)^{1/2}$ . El valor absoluto de la aceleración,  $a$ , sentida por una partícula prueba localizada a una distancia  $r$ , de una masa puntual  $M$ , está dada entonces por:

$$a = a_0 x \left( \frac{1 - x^n}{1 - x^{n-1}} \right). \quad (2.63)$$

En la ley de fuerzas (ec. (2.62)) el índice  $n$  media lo abrupto de la transición entre el régimen Newtoniano y el régimen MONDiano. En este trabajo se tomó un índice  $n = 10$ , debido a que con este índice se obtuvieron los mejores ajustes para el modelo de la galaxia NGC 4649, tomando en cuenta de que en [39] se mostró que para esta ley de fuerzas, un ajuste a perfiles de dispersión de velocidades y brillo de cúmulos globulares requiere un índice mayor a 8.

Vamos a comenzar el estudio observando la validez de los teoremas de Newton para distribuciones de materia con simetría esférica, los cuales se enuncian a continuación:

1. *La fuerza gravitacional que siente un observador en el interior de una cáscara esférica es cero.*
2. *La contribución del campo en un punto exterior en la esfera es el mismo que se produciría si toda la masa estuviera concentrada en el centro.*

En [37] también se mostró que una condición suficiente para que los Teoremas de Newton sean válidos para el caso de distribuciones de masa con simetría esférica, para alguna ley de fuerza modificada, es únicamente que  $f$  pueda escribirse como una función exclusivamente de  $x$  [37]. Este resultado se utilizará en lo que sigue para construir modelos de equilibrio.

### 2.5.1. Ecuación de Estado

Para relacionar la presión y la densidad de un gas o un fluido, se necesita de una ecuación de estado, esto es,  $p = p(\rho, s)$  o bien  $p = p(\rho, T)$ , siendo  $p$  la presión,  $\rho$  la densidad,  $s$  la entropía específica y  $T$  la temperatura del gas o del fluido. Para el propósito de este trabajo resulta suficiente considerar el caso más simple de una ecuación de estado barotrópica, en donde la presión se encuentra determinada únicamente por la densidad:

$$p = p(\rho). \quad (2.64)$$

El ejemplo más importante de ecuaciones de estado barotrópicas, se presenta cuando el fluido es adiabático, esto es, tiene una entropía específica constante. La entropía específica es:

$$s = \frac{k_B}{m} \ln \left( \frac{T^{\frac{q+3}{2}}}{\rho} \right) + \text{const.}, \quad (2.65)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $m$  es la masa de una sola molécula y  $q$  representa los grados de libertad internos de las partículas.

Uno de los fluidos más simples, es el gas ideal, cuya ecuación de estado es:

$$p = \frac{\rho k_B T}{m}, \quad (2.66)$$

en donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m$  es la masa de una sola molécula.

Hay dos casos importantes en el cual el gas ideal es barotrópico:

1. Si la temperatura del gas es constante en cualquier punto del gas, esto es,  $T = T_0$ . Cuando esto sucede se dice que el fluido es isotérmico. En este caso la ecuación de estado es:

$$p = K\rho, \quad (2.67)$$

donde  $K = k_B T_0 / m$ .

2. Si el fluido es adiabático (entropía específica constante), la ecuación (2.65) implica que:

$$\rho \propto T^{\frac{q+3}{2}} = T^{\frac{1}{(\gamma-1)}}, \quad (2.68)$$

donde hemos reemplazado  $q$  por una nueva constante  $\gamma \equiv (q+5)/(q+3)$ . Utilizando ahora la ecuación de estado del gas ideal (ec. (2.66)), se obtiene:

$$p = K\rho^\gamma, \quad (2.69)$$

donde  $K$  es una constante que depende de la entropía específica. Una ecuación de estado barotrópica con la forma de la ecuación (2.69), es conocida como una ecuación de estado politrópica. La ecuación de estado isotérmica (ec. (2.67)), es politrópica con  $\gamma = 1$ .

### 2.5.2. Ecuación de Equilibrio Hidrostático para un Sistema Autogravitante

Partimos de la ecuación de equilibrio hidrostático para una ecuación de estado politrópico dada por:

$$p = K\rho^\gamma, \quad (2.70)$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad y  $\gamma$  es la razón de calores específicos. La ecuación que gobierna la estructura de una esfera de gas ideal autogravitante e isotérmica puede derivarse de la ecuación de equilibrio hidrostático, la cual está dada por:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\nabla\phi, \quad (2.71)$$

donde  $p$  y  $\rho$  son la presión y la densidad del gas politrópico, respectivamente.

Al sustituir la ecuación de estado para el gas politrópico (ec. (2.70)), suponiendo que  $K = K(r)$  y el hecho de que  $a = \nabla\phi$ , la ecuación (2.71) se convierte en:

$$K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr} + \rho^\gamma\frac{dK}{dr} = -a\rho. \quad (2.72)$$

Tomando en cuenta el valor de la aceleración  $a$ , dada por la ecuación (2.11), la ecuación anterior se reescribe como:

$$K\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{d\rho}{dr} + \rho^\gamma\frac{dK}{dr} = -\rho a_0 f(x), \quad (2.73)$$

o bien como:

$$K\gamma\rho^{\gamma-2}\frac{d\rho}{dr} + \rho^{\gamma-1}\frac{dK}{dr} = -a_0 f(x). \quad (2.74)$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad dada por:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (2.75)$$

La cual se escribe de forma equivalente como:

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM(r)}{dr}, \quad (2.76)$$

donde  $M(r)$  es la masa total contenida hasta un radio  $r$ .

De la ecuación anterior es fácil ver que:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d^2M(r)}{dr^2} - \frac{2}{4\pi r^3} \frac{dM(r)}{dr}. \quad (2.77)$$

Ahora sustituimos en la ecuación (2.74) la ecuación de continuidad (ec. (2.76)) y la ecuación (2.77) para obtener:

$$K\gamma \left( \frac{1}{4\pi r^2} \right)^{\gamma-2} \left[ \frac{dM(r)}{dr} \right]^{\gamma-2} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d^2 M(r)}{dr^2} - \frac{2}{4\pi r^3} \frac{dM(r)}{dr} \right) + \left[ \frac{1}{4\pi r^2} \right]^{\gamma-1} \left[ \frac{dM(r)}{dr} \right]^{\gamma-1} \frac{dK}{dr} = -a_0 f(x). \quad (2.78)$$

Hemos utilizado la correspondencia entre configuraciones politropicas de equilibrio hidrostático y sistemas estelares autogravitantes, la cual no depende de la forma de la ecuación de Poisson. Tomamos ahora la condición para un gas isotrópico isotérmico dada por [3]:

$$K = \sigma^2(r) \text{ y } \gamma=1,$$

Tomar  $\gamma = 1$ , implica que la ecuación de estado de una esfera de gas politrópico es de la forma  $p = K\rho$ . Esta es la ecuación de estado de un gas isotérmico que determina la estructura de una esfera isotérmica de gas ideal autogravitante. Con esto podemos escribir la ecuación (2.78) de la siguiente manera:

$$\sigma^2(r) \left( \frac{1}{4\pi r^2} \right)^{-1} \left[ \frac{dM(r)}{dr} \right]^{-1} \left( \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d^2 M(r)}{dr^2} - \frac{2}{4\pi r^3} \frac{dM(r)}{dr} \right) + 2\sigma(r) \frac{d\sigma(r)}{dr} = -a_0 f(x). \quad (2.79)$$

Factorizando términos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\sigma^2(r) \left[ -\frac{2}{r} + \frac{d^2 M(r)}{dr^2} \left( \frac{dM(r)}{dr} \right)^{-1} \right] + 2\sigma(r) \frac{d\sigma(r)}{dr} = -a_0 f(x). \quad (2.80)$$

Al sustituir la ley de fuerza adimensional  $f(x)$ , dada por la ecuación (2.62), la ecuación de equilibrio hidrostático queda como:

$$\sigma^2(r) \left[ -\frac{2}{r} + \frac{d^2 M(r)}{dr^2} \left( \frac{dM(r)}{dr} \right)^{-1} \right] + 2\sigma(r) \frac{d\sigma(r)}{dr} = -a_0 x \left( \frac{1-x^n}{1-x^{n-1}} \right). \quad (2.81)$$

Esta ecuación se resuelve numéricamente. El objetivo de la ecuación (2.81) es obtener una relación de la masa  $M(r)$  como función del radio  $r$ . Utilizando el valor de la masa y los cocientes de masa-luminosidad,  $M/L$ , es posible calcular la luminosidad total de las galaxias elípticas gigantes.

Se obtiene, por lo tanto, una ecuación diferencial de segundo orden para  $M(r)$ , donde  $\sigma(r)$  representa la dispersión de velocidad isotrópica Maxwelliana para la población de estrellas, la cual dejaremos variar con el radio. La ecuación anterior (ec. (2.81)) es una generalización del tratamiento presentado en [36], en el modelado de galaxias dSph, las cuales están caracterizadas por perfiles de dispersión

de velocidad planos. Así mismo se obtuvieron modelos con masas totales y radios a media masa consistentes con las observaciones.

Tomando en cuenta las condiciones iniciales:

1. Una densidad central constante  $\rho_0$ ,
2.  $M(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ ,
3.  $dM(r)/dr \rightarrow 4\pi r^2 \rho_0$  cuando  $r \rightarrow 0$ ,

se resolvió numéricamente la ecuación (2.81).

Se tiene que la expresión Newtoniana de la ecuación (2.62) aparece para aceleraciones grandes comparadas con  $a_0$ , esto es,  $a \gg a_0$  o equivalentemente  $x \gg 1$ . Si uno impone condiciones isotérmicas globales, como una dispersión de velocidades constante,  $\sigma$ ,  $\sigma(r) \equiv \sigma$  y busca una solución de ley de potencias para la masa total encerrada hasta un cierto radio  $r$ , de la forma:

$$M(r) = M_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^m, \quad (2.82)$$

con  $M_0$  y  $r_0$  constantes, se obtienen los siguientes resultados:

$$f(x) = x^2 = \frac{GM(r)}{a_0 r^2}, \quad (2.83)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{M_0 m}{r_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m-1}, \quad (2.84)$$

$$\frac{d^2 M(r)}{dr^2} = \frac{M_0 m(m-1)}{r_0^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m-2}. \quad (2.85)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.83), (2.84) y (2.85) en la ecuación (2.80) se obtiene que la ecuación de equilibrio hidrostático es [39]:

$$\sigma^2 \left[ \frac{m-3}{r} \right] = -\frac{GM_0}{r^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^m. \quad (2.86)$$

Al tomar  $m = 1$  en la ecuación anterior, se obtiene el halo isotérmico estándar, dado por:

$$M(r) = M_0 \left( \frac{r}{r_0} \right) = 2\sigma^2 r / G, \quad (2.87)$$

con una velocidad de equilibrio centrífugo constante  $v^2 = 2\sigma^2$  y extensión infinita.

En el límite MONDiano, cuando se tienen sistemas con aceleraciones pequeñas comparadas con  $a_0$ ,  $a \ll a_0$  o equivalentemente  $x \ll 1$ , se tiene que:

$$f(x) = \frac{1}{r} \left( \frac{GM(r)}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (2.88)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.84), (2.85), (2.88) y (2.82) en la ecuación (2.80) se obtiene:

$$\sigma^2 \left[ \frac{m-3}{r} \right] = - \frac{(GM_0 a_0)^{1/2}}{r} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m/2}. \quad (2.89)$$

Tomando el caso  $m = 0$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$M(r) = M_0, \quad (2.90)$$

y

$$\sigma^2 = \frac{(GM_0 a_0)^{1/2}}{3}. \quad (2.91)$$

Relacionando la ecuación (1.34) con la ecuación (2.91) se obtiene:

$$v^2 = 3\sigma^2. \quad (2.92)$$

En el límite MONDiano se obtiene la relación de Tully-Fisher, donde la velocidad circular de equilibrio escala con la raíz cuarta de la masa, con velocidades de rotación las cuales permanecen uniformemente planas después de que la distribución de masa converge y los halos isotérmicos son naturalmente limitados en extensión. Es interesante notar que en este límite la proporcionalidad entre la velocidad de rotación circular y la dispersión de velocidades se modifica ligeramente si se compara con el caso Newtoniano, la constante de proporcionalidad cambia de 2 a 3, para los cuadrados de las velocidades [39].

En unidades astrofísicas y utilizando las ecuaciones (2.91) y (2.92) en el límite de baja aceleración (régimen MONDiano) de un halo globalmente isotérmico en equilibrio gravitacional se obtiene:

$$\sigma = 0,2 \left( \frac{M_0}{M_\odot} \right)^{1/4} \text{ km/s}, \quad (2.93)$$

$$v = 0,35 \left( \frac{M_0}{M_\odot} \right)^{1/4} \text{ km/s}, \quad (2.94)$$

para la dispersión de velocidades y las velocidades de equilibrio centrífugo de un halo de masa total  $M_0$  respectivamente.

## 2.6. Ejemplos de Configuraciones de Equilibrio

Se utilizó la correspondencia entre configuraciones politropicas de equilibrio hidrostático y sistemas estelares autogravitantes para resolver la ecuación (2.81). Una vez que se dan los valores para la dispersión de velocidades,  $\sigma$ , y para la densidad central,  $\rho_0$ , la solución de la ecuación (2.81) da los perfiles de masa volumétrica y de densidad de masa volumétrica. El perfil de densidad de masa volumétrica se encuentra caracterizado por una masa total finita, esto se puede observar en el perfil de masa volumétrica que se obtiene, el cual converge a un valor constante a partir de un cierto radio. Los valores que se tomaron en las dos pruebas para la dispersión de velocidades, son valores que han sido observados para algunos sistemas galácticos, como es el caso del grupo de galaxias enanas esferoidales [36].

A continuación mostramos todo el proceso de selección de las ecuaciones para dos casos de prueba.

En la figura (2.1) se muestra una gráfica de  $\log(\rho)$  vs  $\log(r)$  para una solución numérica de la ecuación (2.81), tomando una dispersión de velocidades constante  $\sigma = 7 \text{ km s}^{-1}$ , una densidad central  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$  y un índice en la ley de fuerzas (ec. (2.62)),  $n = 4$ . Así mismo se obtiene una masa total,  $M_{tot}$ , de  $3.65 \times 10^6 M_{\odot}$ , y un radio volumétrico a media masa (radio que contiene la mitad de la masa total) de  $0.35 \text{ kpc}$ .

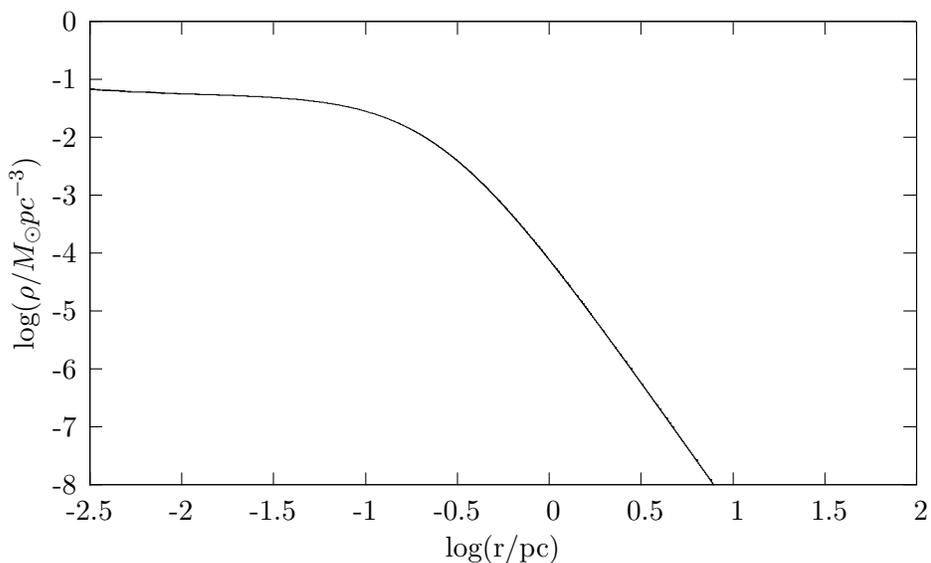


Figura 2.1: La figura muestra el perfil de densidad volumétrica de equilibrio isotérmico para un modelo de muestra, tomando una densidad central  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ , una dispersión de velocidad constante  $\sigma = 7 \text{ km s}^{-1}$  y un índice  $n = 4$  en la ley de fuerzas.

La figura (2.2) muestra el correspondiente perfil de masa volumétrico obtenido en la solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81). En esta figura se puede observar cómo para un cierto radio el perfil de masa volumétrico comienza a ser plano.

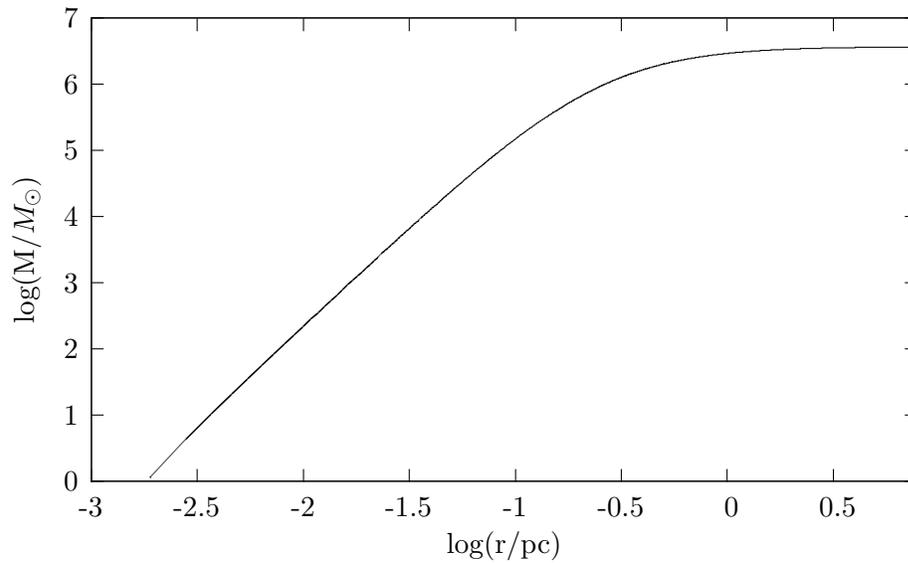


Figura 2.2: La figura muestra el perfil de masa que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), tomando los valores  $\rho_0 = 0.1 M_\odot \text{pc}^{-3}$  y  $\sigma = 7 \text{ km s}^{-1}$ , se obtiene una masa total,  $M_{tot}$ , de  $3.65 \times 10^6 M_\odot$ , y un radio volumétrico a media masa de  $0.35 \text{ kpc}$ .

Una vez que se encontraron los perfiles volumétricos, la densidad de masa volumétrica  $\rho(r)$ , se proyectó a lo largo de una dimensión (no importa en que dirección se efectúe la proyección debido a que se tiene simetría esférica) para obtener un perfil de densidad superficial de masa proyectada,  $\Sigma(R)$ . El perfil que se obtiene se muestra en la figura (2.3).

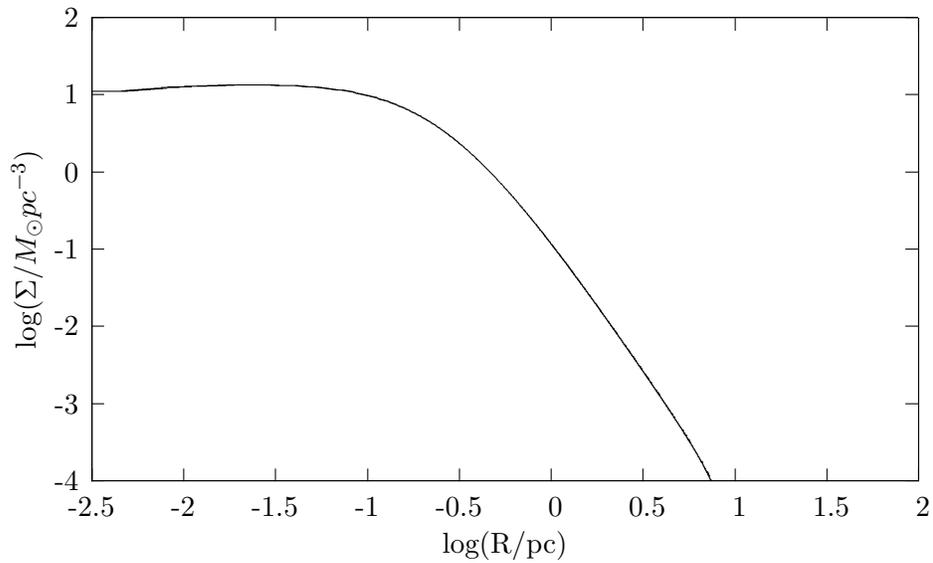


Figura 2.3: La figura muestra el perfil de densidad superficial de masa proyectado que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), dados los valores de  $n = 4$ ,  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot}\text{pc}^{-3}$  y  $\sigma = 7 \text{ km s}^{-1}$ .

Haciendo uso de los valores obtenidos de la densidad superficial de masa proyectada,  $\Sigma$ , como función del radio  $R$ , se realizó un programa de integración numérica para obtener el valor de la masa total proyectada interna a distintos radios del modelo que se propone en este trabajo, obteniéndose así el perfil de masa proyectada que se muestra en la figura (2.4). Al igual que en el caso volumétrico se observa que para un cierto radio el perfil de masa proyectada comienza a volverse plano. En este caso se obtiene una masa proyectada total de  $3.59 \times 10^6 M_{\odot}$ , de esta manera, el error en la integración numérica es del orden de  $\frac{0.06}{3.65} \approx 1.6\%$ .

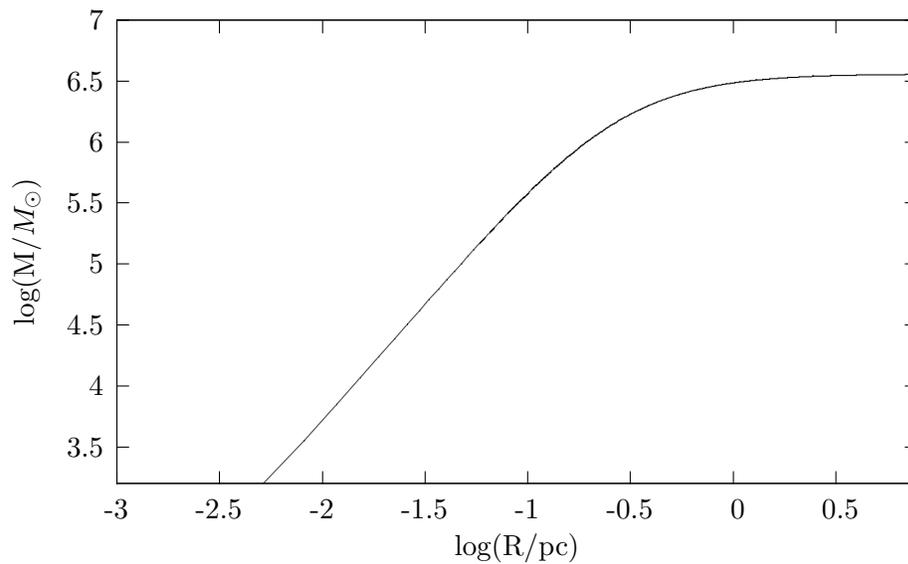


Figura 2.4: La figura muestra el perfil de masa proyectada, la cual se calcula a partir de los valores obtenidos de la densidad superficial de masa,  $\Sigma(R)$ , del modelo que se propone.

En la figura (2.5) se muestra una gráfica de  $\log(\rho)$  vs  $\log(r)$  para una nueva solución numérica de la ecuación (2.81), tomando ahora una dispersión de velocidad constante  $\sigma = 9.5 \text{ km s}^{-1}$ , una densidad central  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$  y un índice en la ley de fuerzas (ec. (2.62)),  $n = 6$ . Así mismo se obtiene una masa total,  $M_{tot}$ , de  $1.39 \times 10^7 M_{\odot}$ , y un radio a media masa volumétrico (radio que contiene la mitad de la masa total) de  $0.54 \text{ kpc}$ .

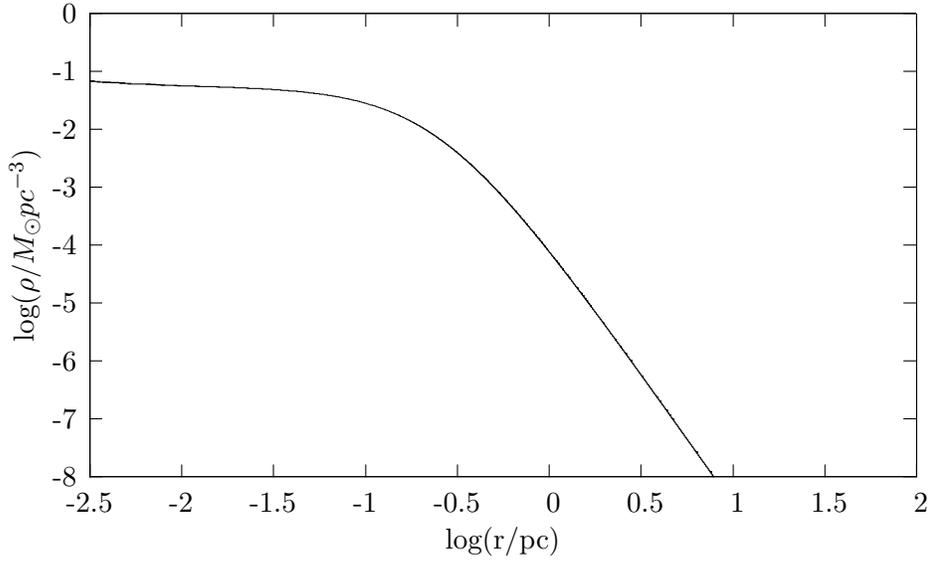


Figura 2.5: La figura muestra el perfil de densidad volumétrica de equilibrio isotérmico para un modelo de muestra, tomando una densidad central  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{pc}^{-3}$ , una dispersión de velocidad constante  $\sigma = 9.5 \text{ km s}^{-1}$  y un índice  $n = 6$  en la ley de fuerzas.

La figura (2.6) muestra el correspondiente perfil de masa volumétrico obtenido en la solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), en esta figura se puede observar como para un cierto radio el perfil de masa volumétrico comienza a ser plano.

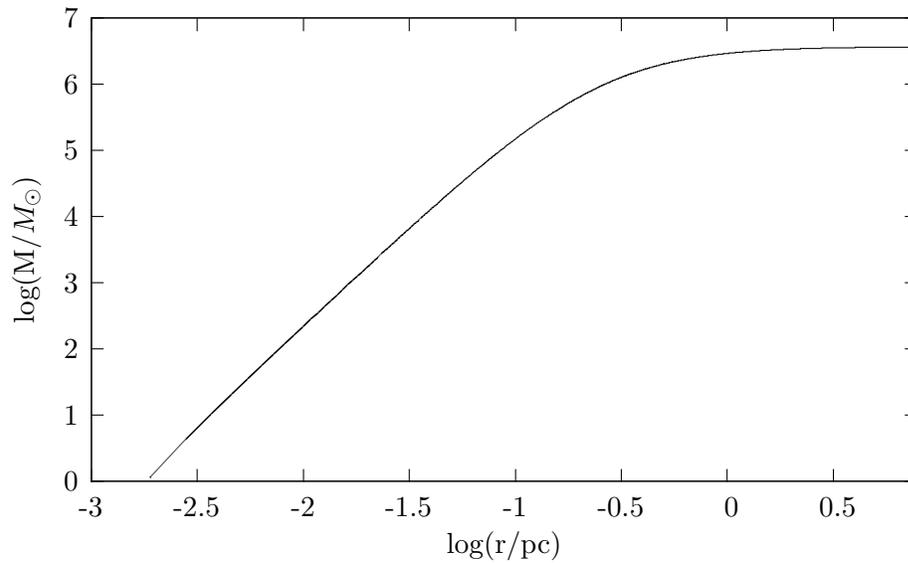


Figura 2.6: La figura muestra el perfil de masa que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), tomando los valores  $\rho_0 = 0.1 M_\odot \text{pc}^{-3}$  y  $\sigma = 9.5 \text{ km s}^{-1}$ , se obtiene una masa total,  $M_{tot}$ , de  $1.39 \times 10^7 M_\odot$ , y un radio a media masa volumétrica de  $0.54 \text{ kpc}$ .

El perfil de densidad superficial de masa proyectada,  $\Sigma(R)$ , que se obtienen utilizando esta nueva configuración de equilibrio se muestra en la figura (2.7).

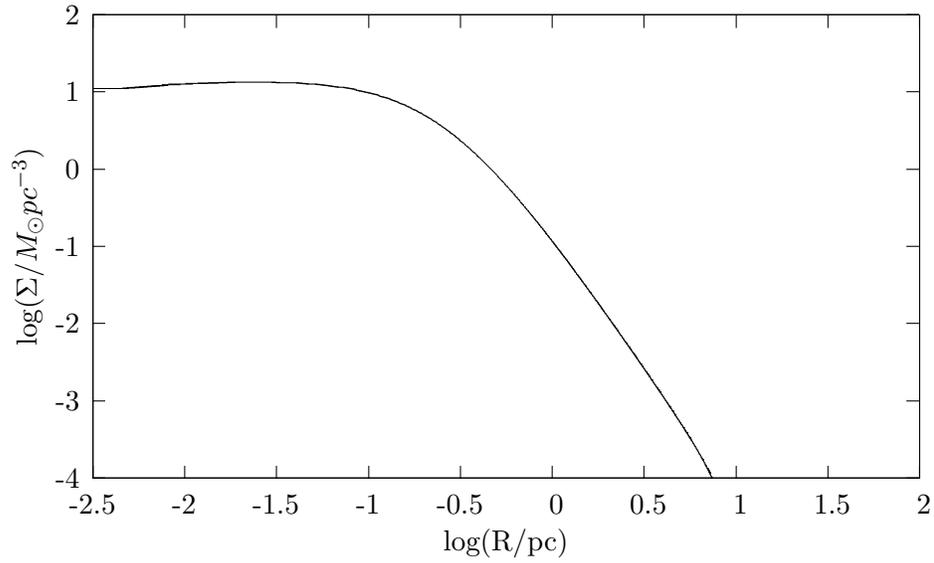


Figura 2.7: La figura muestra el perfil de densidad superficial de masa proyectada que se obtiene para una solución de equilibrio isotérmico de la ecuación (2.81), dados los valores de  $n = 6$ ,  $\rho_0 = 0.1 M_{\odot}pc^{-3}$  y  $\sigma = 9.5 km s^{-1}$ .

El perfil de masa proyectada que se obtienen con esta nueva configuración de equilibrio se muestra en la figura (2.8). Al igual que en el caso volumétrico se observa que para un cierto radio el perfil de masa proyectada comienza a volverse plano. En este caso se obtiene una masa proyectada total de  $1.37 \times 10^7 M_{\odot}$ , de esta manera el error en la integración numérica es del orden de  $\frac{0,02}{1,39} \approx 1.4\%$ .

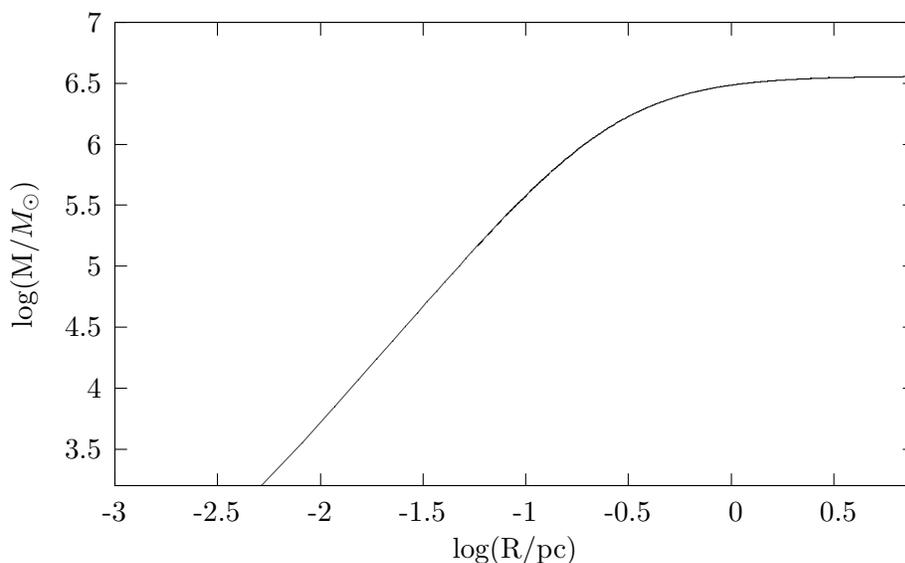


Figura 2.8: La figura muestra el perfil de masa proyectada, la cual se calcula a partir de los valores obtenidos de la densidad superficial de masa,  $\Sigma(R)$ , del modelo que se propone.

Se tienen entonces soluciones completas de la ecuación (2.81) que producen perfiles de densidad caracterizados por una masa total finita. En contraste con lo que sucede en sistemas Newtonianos, donde las configuraciones isotérmicas tienen una masa total infinita, bajo la ley de gravedad propuesta, configuraciones isotérmicas autogravitantes serán naturalmente acotadas en sus masas y tendrán un radio medio total bien definido y finito,  $r_{hm}$ , para caracterizar las configuraciones de equilibrio resultantes.



# Capítulo 3

## Resultados

*Decirnos que cada especie de cosas está dotada de una cualidad específica oculta, mediante la cual actúa y produce efectos manifiestos, es no decirnos nada. Pero deducir dos o tres principios generales de movimiento, a partir de los fenómenos, y después decirnos cómo las propiedades y acciones de todas las cosas corpóreas se comportan, a partir de aquellos principios manifestados sería un gran avance en filosofía, aunque las causas de aquellos principios no fueran descubiertas todavía.*

Isaac Newton, *Opticks* (1730).

### 3.1. Forma de los Perfiles de Brillo de Galaxias Elípticas

Una medida de la distribución de estrellas en el disco galáctico de una galaxia es el brillo superficial, esto es, la luminosidad estelar total emitida por unidad de área del disco. El brillo superficial indica lo fácilmente observable que es un objeto astronómico. Se tiene que el brillo superficial de una galaxia elíptica disminuye con el radio, resultando que las partes más externas de la galaxia sean casi indetectables. Observaciones de discos galácticos de algunas galaxias, sugieren que el brillo superficial es aproximadamente una función exponencial del radio, de la forma:

$$I(R) = I_d \exp(-R/R_d). \quad (3.1)$$

La longitud de escala del disco  $R_d$  es difícil de medirse en la Vía Láctea, debido a la posición de la Tierra dentro del disco. Medidas recientes indican que para nuestra galaxia, la longitud  $R_d$ , tiene un valor entre 2 y 3 *kpc*.

Durante el estudio de las galaxias elípticas se han realizado varios intentos para encontrar buenas representaciones empíricas de los perfiles de luz de las galaxias, con el objetivo de utilizarse como una herramienta para su clasificación cuantitativa y como recurso para identificar sus componentes y sus interacciones, así mismo, para usarse como una prueba de los modelos y predicciones de las simulaciones

numéricas que se hacen para modelar sistemas galácticos como galaxias.

Entre las propuestas para representar los perfiles de luz de galaxias elípticas y de los componentes esferoidales de las galaxias de disco, la ley  $R^{1/4}$  introducida por de Vaucouleurs en 1984, ha ganado una popularidad que se ha confundido a menudo con la universalidad, pues en algunos sistemas presenta ciertas inconsistencias [42]. La fórmula  $R^{1/4}$  propuesta por de Vaucouleurs tiene la siguiente forma:

$$I(R) = I_e \exp \left\{ -k \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \right\}, \quad (3.2)$$

donde  $I(R)$  es el brillo superficial al radio  $R$ . Esta fórmula tiene dos parámetros únicos: un radio característico  $R_e$  y una escala de brillo  $I_e$ . La constante  $k$  que aparece en la ecuación (3.2) generalmente se elige por un camino tal que  $R_e$  resulta ser el radio que contiene la mitad de la luminosidad total; resulta entonces que  $k=7.6692$  [42]. Los parámetros  $R_e$  y  $I_e$  reciben el nombre de radio efectivo y brillo superficial efectivo, respectivamente.

Es importante mencionar que la fórmula  $R^{1/4}$  ha tenido éxito en reproducir, con una exactitud sobresaliente, los perfiles de luminosidad de muchas galaxias elípticas. La ley  $R^{1/4}$ , ha sido comúnmente utilizada como una referencia para probar e interpretar los resultados que se obtienen de algunos modelos numéricos realizados para ciertas galaxias elípticas. A pesar de que estos modelos reproducen buenos perfiles de densidad de brillo, hace falta todavía una base física para esta ley [42].

El estudio de fotometría moderna de galaxias ha mostrado, sin embargo, que para una gran fracción de galaxias elípticas y esferoidales, la ley  $R^{1/4}$  es únicamente una primera aproximación, siendo su ajuste bueno, únicamente en un intervalo limitado de radios.

Debido a estos hechos, se ha realizado el estudio de una fórmula más general que la de de Vaucouleurs, esto es, una ley de potencias en la cual el exponente es un parámetro libre de la forma  $1/n$  [43], [44]. Resulta que la introducción de un parámetro libre trae como consecuencia importante una mejor representación de los perfiles de brillo de las galaxias.

### 3.2. Función de Sérsic para el Perfil de Brillo Superficial

El que existan galaxias elípticas en una fracción de galaxias luminosas, depende de la densidad local de galaxias, que van del 10 % en regiones de baja densidad de estrellas, hasta un 40 % en los centros de densos grupos de galaxias.

Las curvas de nivel de brillo superficial constante (también llamadas isofotos) para galaxias elípticas, son aproximadamente elipses, con un cociente ( $b/a$ ) entre su semieje mayor  $a$ , y semieje menor  $b$ , que va desde 1.0 a 0.3. La elipticidad asociada a estas curvas de nivel de brillo superficial constante es  $\epsilon \equiv 1 - b/a$ .

El brillo superficial de una galaxia elíptica decae suavemente con el radio, hasta que las partes más alejadas son prácticamente indetectables a la luz del cielo. Debido a que las galaxias no tienen un borde exterior bien definido, sus tamaños deben ser definidos con mucho cuidado. Una medida útil para medir su tamaño, es el *radio efectivo*,  $R_e$ , esto es, el radio de la curva de nivel de brillo superficial constante que contiene la mitad de la luminosidad total, para el caso de una galaxia elíptica, se toma la media geométrica del eje mayor y eje menor medidos de la isofoto. El radio efectivo es medido en el plano del cielo, no debe ser confundido con el radio a media luz, el cual es el radio de una esfera que contiene la mitad de la luminosidad [3].

Varias fórmulas empíricas se han utilizado para ajustar los perfiles de brillo superficial de galaxias elípticas. Una de las más utilizadas, es la ley de Sérsic (propuesta por Sérsic en 1968), la cual corresponde a ser la forma más simple de la ley  $R^{1/n}$ . La ley de Sérsic está dada por la siguiente fórmula:

$$I(R) = I_0 10^{(-R^{1/n})}. \quad (3.3)$$

Introduciendo el radio efectivo  $R_e$ , ésta ecuación puede reescribirse como:

$$I(R) = I_e 10^{\left\{-b_n \left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/n} - 1\right]\right\}}, \quad (3.4)$$

donde  $I_e \equiv$  “brillo efectivo”, corresponde al brillo superficial al radio efectivo  $R_e$ . Para  $n = 1$  la función de Sérsic se reduce al perfil exponencial (ec. (3.1)) que describe la distribución de brillo superficial de discos de galaxias.

La forma logarítmica de la función de Sérsic (3.4) es:

$$\mu(R) = \mu_e + c_n \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right], \quad (3.5)$$

con  $c_n = 2.5b_n$  y  $\mu_e = -2.5\log(I_e)$ . El parámetro  $n$  se conoce como el índice de Sérsic, el cual está correlacionado con la luminosidad de la galaxia elíptica, las galaxias elípticas muy luminosas tienen un índice  $n \simeq 6$  y las de poca luminosidad tienen un índice  $n \simeq 2$ . El valor medio de este intervalo es  $n = 4$ , el cual define la ley  $R^{1/4}$  de de Vaucouleurs (ec. (3.2)).

El coeficiente  $b_n$ , se elige de tal manera que  $R_e \equiv$  “radio efectivo” contiene la mitad de la luminosidad total que se obtiene en el modelo de la galaxia. Este coeficiente debe ser determinado numéricamente de la siguiente condición:

$$\int_0^{R_e} RI(R)dR = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} RI(R)dR. \quad (3.6)$$

Tomando en cuenta el intervalo de los índices de Sérsic,  $0.5 \leq n \leq 16.5$ , se efectúa una integración numérica del modelo de una galaxia con la ley  $R^{1/n}$ , dando la fórmula de aproximación para el término  $b_n$  de la ecuación (3.4), la aproximación que se obtiene es:

$$b_n \simeq 0,868n - 0,142. \quad (3.7)$$

La luminosidad total puede expresarse como una función de los parámetros del brillo efectivo,  $I_e$ , y el radio efectivo  $R_e$ , la relación que se obtiene es [42]:

$$L_T = K_n I_e R_e^2. \quad (3.8)$$

La constante  $K_n$  que aparece en la ecuación (3.8), se obtiene de la siguiente relación:

$$\log K_n = 0,030[\log(n)]^2 + 0,441\log(n) + 1,079. \quad (3.9)$$

Los términos  $b_n$  y  $K_n$  que aparecen en las ecuaciones (3.7) y (3.9) presentan una dispersión rms de 0.014 [42].

La ley  $R^{1/n}$  se ha ajustado para obtener los perfiles de brillo de algunas galaxias pertenecientes a la constelación de Virgo, entre las galaxias a las cuales se ha realizado el ajuste con la ley  $R^{1/n}$  se encuentra la galaxia elíptica masiva NGC 4649 [43] que se estudia en este trabajo, este resultado servirá para compararlo con el que obtuvimos de nuestro modelo aquí presentado.

Para la galaxia elíptica masiva NGC 4649 los parámetros de la función de Sérsic tienen los siguientes valores [43]: Un índice Sérsic  $n = 5.361_{-0,324}^{+0,377}$ , un radio efectivo  $R_e = 132.047_{-9,298}^{+11,622}$  *arcsec* y  $\mu_e = 22.414_{-0,153}^{+0,179}$  *mag/arcsec*<sup>2</sup>.

En la figura (3.1) se muestra el mejor ajuste de la función de Sérsic en su forma logarítmica (ec. (3.5)) para el perfil de brillo superficial que se obtiene para la galaxia elíptica masiva NGC 4649 utilizando los valores de los parámetros  $n$ ,

$R_e$  y  $\mu_e$  que se mencionan en el párrafo anterior. También se muestra el perfil de brillo superficial medidos con el uso de fotometría reportados en [43] así como los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe reportados en [45].

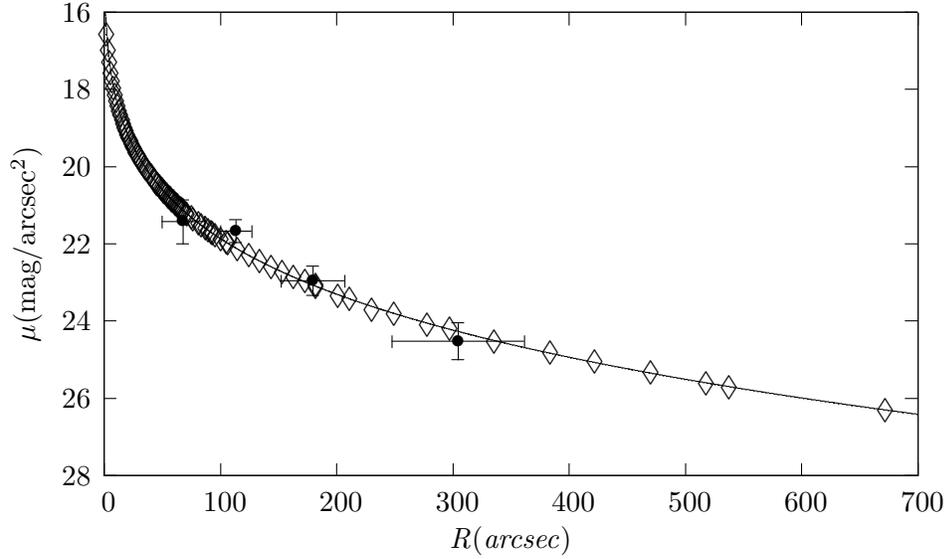


Figura 3.1: La figura muestra el mejor ajuste de la función de Sérsic en su forma logarítmica,  $\mu(R)$  (línea continua), para el perfil de brillo superficial de la galaxia elíptica masiva NGC 4649. También se muestra el perfil de brillo superficial utilizando fotometría [43] (puntos  $\diamond$ ) y los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe [45] (puntos con barras de error Poissonianas).

Resulta difícil definir de forma precisa la luminosidad total de una galaxia debido a que las partes más alejadas de una galaxia son complicadas de observarse y por consiguiente obtener datos medibles. Una buena aproximación para obtener la luminosidad total de una galaxia, es definir un modelo de luminosidad, esto se efectúa ajustando el perfil de brillo superficial de la función de Sérsic (ec. (3.4)), y posteriormente estimar la luminosidad total utilizando la siguiente ecuación [3]:

$$L_{tot} = \int I(R) d^2 R. \quad (3.10)$$

Para obtener un valor estimado de la luminosidad total de la galaxia elíptica masiva NGC 4649 haciendo uso de la función de Sérsic  $I(R)$  (ec. (3.4)), se hizo

uso de la ecuación (ec. (3.10)) en la siguiente forma:

$$L_{tot} = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} RI(R)dR. \quad (3.11)$$

Los límites de integración correspondientes a la integral dada en la ecuación (3.11) para la galaxia NGC 4649 que se asignaron fueron  $R_0 = 0.1 \text{ kpc}$  y  $R_1 = 650 \text{ kpc}$ , ya que en este intervalo ya se observa un perfil de masa plano, esto es, el perfil de masa converge a una masa total finita.

La luminosidad total que se obtiene para la galaxia elíptica masiva NGC 4649 utilizando la ecuación (3.11) es  $L_{tot} = 1.23 \times 10^{11} L_{\odot}$ , y tomando en cuenta el cociente Masa-Luminosidad asociado a esta galaxia,  $(M/L)_V = 8$  [46], se encuentra que la masa total para esta galaxia es  $M_{tot} = 9.84 \times 10^{11} M_{\odot}$ .

### 3.3. Tratamiento de la Galaxia Elíptica Masiva NGC 4649 Bajo Esquemas de Gravedad Modificada

Durante el estudio de la galaxia NGC 4649 vamos a suponer que esta se encuentra a una distancia de  $16.83 \text{ Mpc}$  [49] y por lo tanto  $1 \text{ arcsec} = 82 \text{ pc}$  y  $1 \text{ kpc} = 12 \text{ arcsec}$ . Así mismo suponemos un radio efectivo  $R_e = 10.5 \text{ kpc}$  [43]. Denotamos el radio en 3D por  $r$  y el radio proyectado por  $R$ .

La galaxia NGC 4649 se modela como una población de estrellas autogravitantes en configuraciones de equilibrio con simetría esférica. La ley de fuerza adimensional  $f(x)$  que se utilizó en el modelo de esta galaxia es:

$$f(x) = a_0 x \left( \frac{1 - x^{10}}{1 - x^9} \right), \quad (3.12)$$

la cual es la ley de fuerza dada en la ecuación (2.62) con un índice  $n = 10$ .

La ecuación de equilibrio hidrostático (ec. (2.81)) para este modelo puede escribirse entonces como:

$$\sigma^2(r) \left[ -\frac{2}{r} + \frac{d^2 M(r)}{dr^2} \left( \frac{dM(r)}{dr} \right)^{-1} \right] + 2\sigma(r) \frac{d\sigma(r)}{dr} = -a_0 x \left( \frac{1 - x^{10}}{1 - x^9} \right), \quad (3.13)$$

donde  $\sigma(r)$  representa la dispersión de velocidad isotrópica Maxwelliana para la población de estrellas, la cual se permite que varíe con el radio.

Para el caso de la galaxia NGC 4649 se requiere tomar un exponente alto en la ley de fuerzas (ec. (2.62)),  $n = 10$ , esto muestra que existe una transición

relativamente marcada para la ley de fuerza generalizada, la cual sin embargo, permanece continua y diferenciable en todos los puntos por construcción. Esto concuerda con los límites observados a las desviaciones de la dinámica Newtoniana aplicada al sistema solar, modelos para las curvas de rotación Galáctica, y modelos de equilibrio para las dSphs locales, como se mostró en [37] para la ley de fuerza generalizada, con tal que  $n > 4$ . En [39] modelando cúmulos globulares se obtuvo un índice  $n > 8$ . Esencialmente, esto implica que la transición entre el régimen Newtoniano y el MONDiano debe ser bastante abrupta. De hecho dada la forma de la ecuación (2.62), el modelo final se vuelve independiente de  $n$  para cualquier valor de  $n$  mayor que 10.

Se resolvió numéricamente la ecuación (3.13) para  $M(r)$ , una vez que se adoptó un modelo para la dispersión de velocidades volumétrica  $\sigma(r)$ , tomando en este caso las siguientes condiciones iniciales:  $M(r) \rightarrow 0$  y  $dM/dr = 4\pi r^2 \rho_0$  cuando  $r \rightarrow 0$ , así mismo se tomó una densidad de masa volumétrica central  $\rho_0 = 1.5 \times 10^{11} M_{\odot} kpc^{-3}$ .

Las recientes observaciones de dispersión de velocidad que se muestran en [51] proporcionan únicamente el perfil de dispersión de velocidades proyectados y no el perfil de dispersión de velocidades volumétrico,  $\sigma(r)$ , que es el que se requiere para resolver la ecuación (3.13). El perfil de dispersión de velocidades proyectado y al que llamaremos  $\sigma_p(R)$ , se obtiene del perfil de dispersión de velocidad volumétrico,  $\sigma(r)$ , mediante una integral pesada por la densidad local  $\rho(r)$  a lo largo de la línea de visión, donde  $R$  es la coordenada radial proyectada sobre el plano del cielo:

$$\sigma_p(R) = \frac{\int_0^R \rho(r') \sigma(r') dr'}{\Sigma(R)}, \quad (3.14)$$

donde  $\Sigma(R)$ , es el perfil de densidad superficial de masa proyectado.

Lo primero que se realizó fue elegir una función para el perfil de dispersión de velocidades volumétrica,  $\sigma(r)$ , la cual consideraremos dependiente del radio, esto con el objetivo de obtener un buen perfil de dispersión de velocidades proyectado,  $\sigma_p(R)$ , utilizando la ecuación (3.14). Este perfil  $\sigma(r)$ , es el que será ajustado en el modelo de tal manera que se obtenga un buen perfil proyectado  $\sigma_p(R)$ , que sea consistente con las observaciones.

La forma de la función de dispersión de velocidades volumétrica,  $\sigma(r)$ , que se utilizó para resolver la ecuación (3.13) para el modelaje de la galaxia NGC 4649 presenta la siguiente forma:

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp\left(-\frac{r}{r_\sigma}\right). \quad (3.15)$$

Dada la función  $\sigma(r)$  y tomando en cuenta la ecuación (3.13) se puede observar que hay tres parámetros libres en el modelo que se propone,  $\rho_0$ ,  $\sigma_1$  y  $r_\sigma$ . Estos parámetros se fijan mediante un ajuste con los datos observados para la galaxia elíptica masiva NGC 4649.

A esta función de dispersión de velocidades volumétrica (ec. (3.15)), fue a la que se le realizaron ajustes a los parámetros que la forman utilizando las propiedades de la galaxia que han sido reportadas. Los valores de los parámetros de este modelo fueron determinados de tal manera que se obtuviera un buen ajuste al perfil de dispersión de velocidades proyectado  $\sigma_p(R)$ , que fuera consistente con los datos observados.

El parámetro  $\sigma_0$  que aparece en la ecuación (3.15), se obtiene directamente de las observaciones realizadas para el valor asintótico de la medida del perfil de dispersión de velocidades proyectada para dicha galaxia. Para nuestro modelo, los parámetros de la función correspondiente a la dispersión de velocidades (ec. (3.15)) tienen los siguientes valores:  $\sigma_0 = 175 \text{ km/s}$ ,  $\sigma_1 = 235 \text{ km/s}$  y  $r_\sigma = 8.5 \text{ kpc}$ .

En la figura (3.2) se muestra la forma de la función de dispersión de velocidades volumétrica como función del radio,  $\sigma(r)$ .

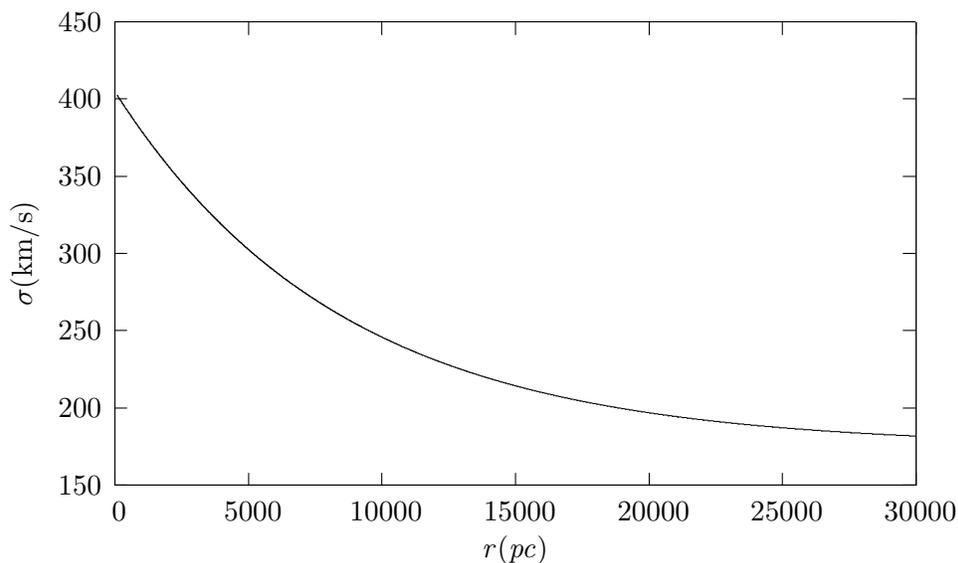


Figura 3.2: La figura muestra la forma de la dispersión de velocidad volumétrica (curva continua),  $\sigma(r)$ , que se utiliza para el modelo de la galaxia elíptica masiva NGC 4649.

Para modelar a la galaxia elíptica masiva NGC 4649 se tomaron valores que ya han sido reportados para la dispersión de velocidades de este sistema [51], que fijan uno de los parámetros necesarios para el modelo. Una vez que se tiene la forma de la función para la dispersión de velocidad volumétrica,  $\sigma(r)$ , y la densidad central,  $\rho_0$ , la solución de la ecuación (3.13) proporciona los perfiles volumétricos para la densidad,  $\rho(r)$ , y la masa,  $M(r)$ , del modelo propuesto para esta galaxia elíptica.

En las figuras (3.3) a (3.5) se muestran los modelos de mejor ajuste para la galaxia elíptica masiva NGC 4649. En la figura (3.3) se muestra el perfil de densidad de masa volumétrica que se obtiene del modelo propuesto para esta galaxia. El perfil de densidad de masa volumétrica que se obtiene implica un perfil de masa que converge a una masa total finita, así mismo, presenta un radio a media masa finito incluso para el perfil volumétrico asintóticamente plano  $\sigma(r)$ , que adoptamos.

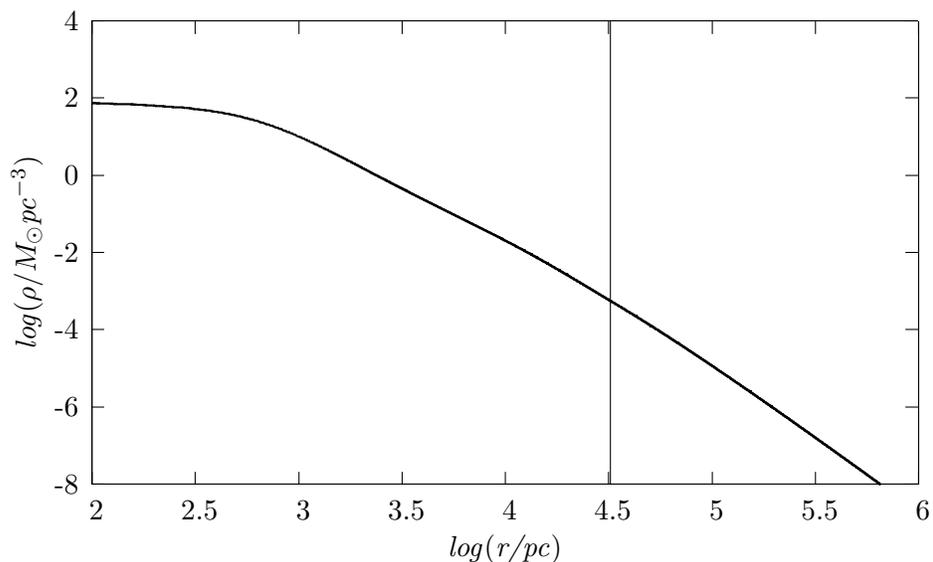


Figura 3.3: La figura muestra el perfil de densidad de masa volumétrica de la galaxia NGC 4649 para el modelo de mejor ajuste a  $\Sigma(R)$  y  $\sigma(R)$ . La línea vertical indica el punto donde  $x = 1$ .

En la figura (3.4) se muestra el perfil de masa volumétrica para nuestro modelo de la galaxia elíptica masiva NGC 4649. Al cruzar el umbral  $x = 1$  (equivalente a  $a = a_0$ ), indicado por la línea vertical, aparece una inclinación del perfil. Esto da lugar a una masa total finita y un radio a media masa finito, en contraste con la situación en gravedad clásica, donde aparecen perfiles de masa extendidos infinitamente. Observamos que únicamente cerca del 31 % de la masa total se encuentra más allá del umbral  $x = 1$ , resulta entonces que esta fracción está distribuida sobre una área más grande, teniendo por tanto una densidad de masa superficial mucho más pequeña que la de las regiones centrales interior al umbral  $x = 1$ , en donde la gravedad Newtoniana es correctamente válida. Estos perfiles finitos aparecen en los tipos de leyes de gravedad modificada que se han tratado rigurosamente para configuraciones de equilibrio isotérmico tomando una dispersión de velocidad constante,  $\sigma(r) = \sigma_0$ .

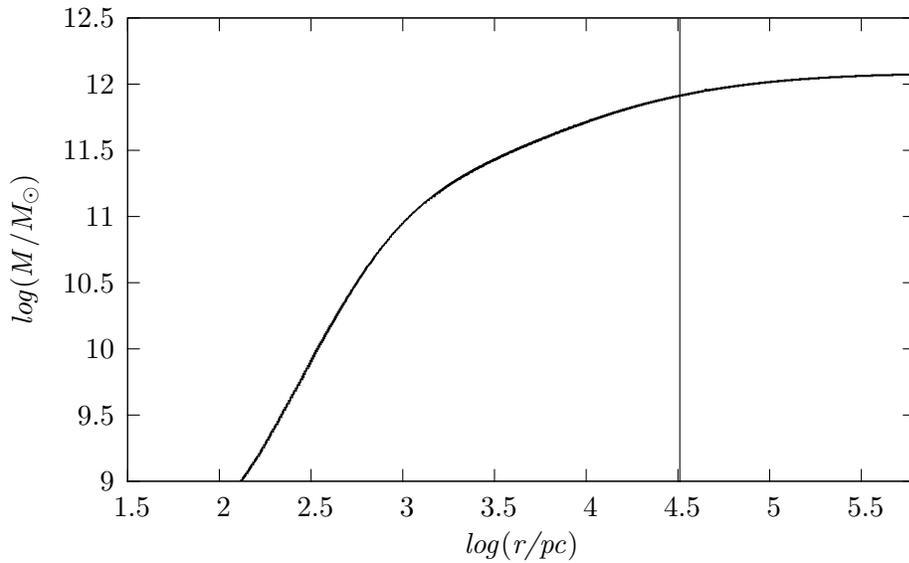


Figura 3.4: La figura muestra el perfil de masa volumétrica para el mejor ajuste del modelo para la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde  $x = 1$ .

Las dos figuras (3.3) y (3.4) que corresponden al perfil de densidad de masa volumétrica y al perfil de masa volumétrica que se obtienen para el mejor ajuste del modelo de la galaxia elíptica masiva NGC 4649 muestran la consistencia física que tiene el modelo que asumimos. Se tiene entonces que la integración de la ecuación (3.13) produce un perfil de masa volumétrica consistente con el que podría aparecer bajo la dinámica Newtoniana en la región interior a  $x = 1$ , donde la ley de fuerza converge precisamente a la expresión estándar.

Finalmente, un perfil de dispersión de velocidad radial proyectado,  $\sigma_p(R)$ , se construye a través de una proyección pesada por la densidad local  $\rho(r)$  del perfil de dispersión de velocidad volumétrica,  $\sigma(r)$ , del modelo que se propone. En la figura (3.5) se muestra el perfil de dispersión de velocidad proyectado,  $\sigma_p(R)$ , obtenido del modelo realizado para la galaxia NGC 4649, así mismo se muestra también el perfil de dispersión de velocidad medida a partir de la rendija larga reportados en [47], adaptado a partir de datos de la rendija larga cinemática reportados en [48] y el perfil que se obtiene usando PNe en [45]. También se muestra una estimación de los perfiles de máxima y mínima dispersión de velocidad consistente con los rangos de error de los datos observados.

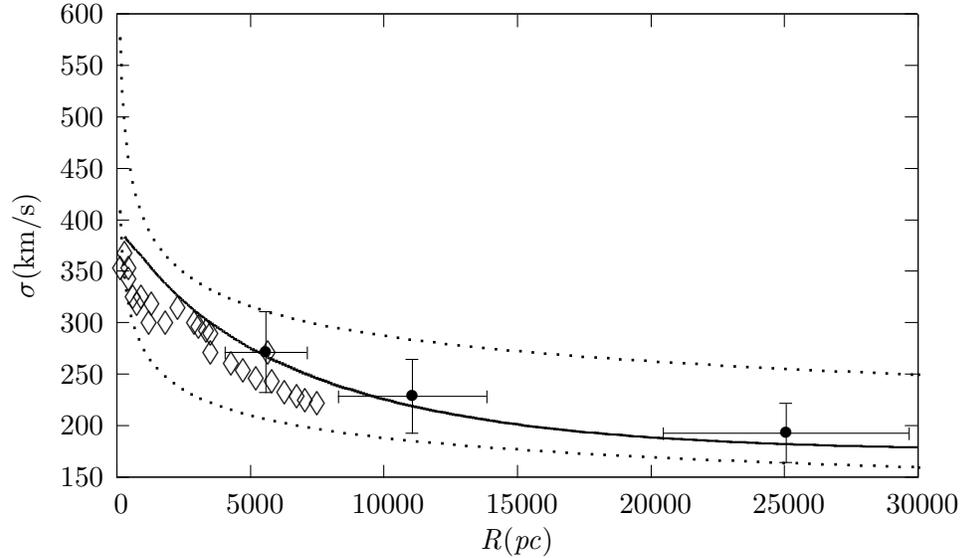


Figura 3.5: La figura muestra el mejor ajuste del perfil radial de la dispersión de velocidad proyectado (curva continua),  $\sigma_p(R)$ , utilizando el modelo propuesto para la galaxia elíptica masiva NGC 4649. Así mismo se muestra el perfil de dispersión de velocidad medida a partir de rendija larga reportados en [47], adaptado a partir de datos de rendija larga cinemática reportados en [48](puntos  $\diamond$ ) y el perfil que se obtiene usando PNe [45](puntos con barras de error). También se muestra una estimación de los perfiles de máxima y mínima dispersión de velocidad consistente con los rangos de error de los datos observados (curvas punteadas).

Se encuentra por lo tanto que el perfil de dispersión de velocidad proyectado,  $\sigma_p(R)$ , que se obtiene con el modelo que se propone, resulta consistente con los datos observados que se tienen reportados.

Una vez que se tiene el perfil de densidad de masa volumétrica,  $\rho(r)$ , este se proyecta a lo largo de una dimensión para obtener un perfil de densidad de masa proyectado,  $\Sigma(R)$ . El perfil de densidad de masa superficial proyectada para la galaxia elíptica masiva NGC 4649 se muestra en la figura (3.6).

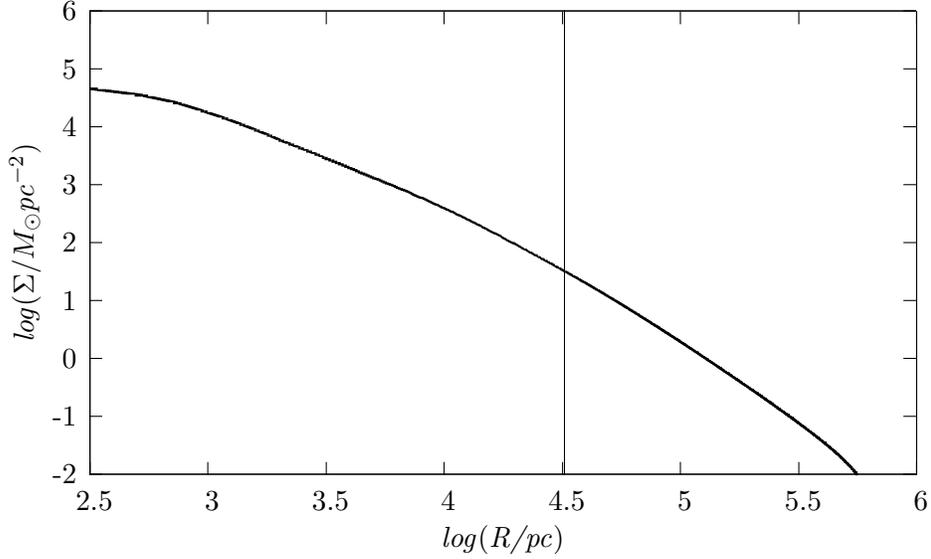


Figura 3.6: La figura muestra el perfil de densidad superficial proyectado de la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde  $x = 1$ .

Utilizando los valores de la densidad superficial de masa proyectada,  $\Sigma$ , como función del radio  $R$ , se realizó un programa que efectuara una integración numérica (ec. (3.16)) para obtener la masa  $M(R)$ , interna a una superficie gaussiana esférica con centro en el centro de la galaxia para distintos radios, así mismo se calculó el radio a media masa proyectado,  $R_{hm}$ . El perfil de masa proyectada que se obtuvo a partir del perfil de densidad de masa proyectado se muestra en la figura (3.7).

La integral para obtener el valor de la masa total está dada por:

$$M_{tot}(R) = 2\pi \int_{R_0}^{R_m} R\Sigma(R)dR. \quad (3.16)$$

Los límites de integración son:  $R_0 = 0.1 \text{ kpc}$  y  $R_m = 6.5 \text{ kpc}$ , debido a que para este radio el perfil de masa comienza a volverse plano, esto es, converge a una masa total finita. Al realizar la integral se obtiene para la galaxia elíptica NGC 4649 una masa total igual a  $M_{tot} = 1.09 \times 10^{12}M_{\odot}$  y un radio a media masa

$R_{hm} = 14.2 \text{ kpc}$ . Esta masa compara muy bien con las inferencias observacionales directas de una masa total  $M_{tot} = 9.84 \times 10^{11} M_{\odot}$  mencionadas previamente [46].

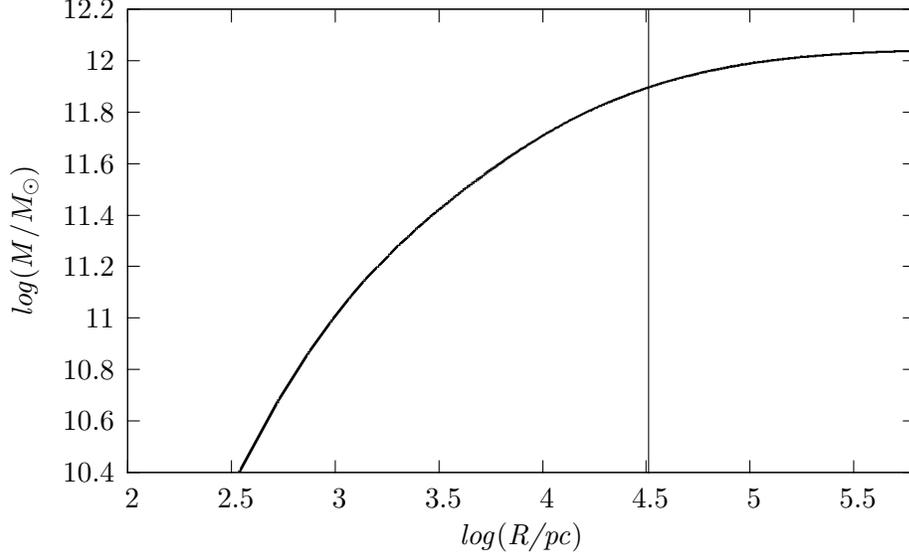


Figura 3.7: La figura muestra el perfil de masa proyectada obtenido para la galaxia NGC 4649. La línea vertical indica el punto donde  $x = 1$ .

La masa total que se obtuvo del modelo dinámico descrito, resulta ser consistente con los resultados de los modelos de población estelar y sus errores. El valor de la masa total que se obtuvo del modelo dinámico produce un ajuste muy cercano a la predicción de Milgrom (1994) [50],  $\sigma^4 = 0.471(GMa_0)$ .

Utilizando la ecuación (2.93), y el valor de la masa total de la galaxia NGC 4649 que se obtiene, se encuentra que el valor  $\sigma$  de la predicción de Milgrom es:

$$\sigma = (0,2) \left( \frac{1,09 \times 10^{12} M_{\odot}}{M_{\odot}} \right)^{1/4} \text{ km/s} = 204,36 \text{ km/s}, \quad (3.17)$$

se obtiene por lo tanto un valor de  $\sigma$ , que es muy cercano al valor que se reporta para esta galaxia, el cual resulta ser  $\sigma = 195 \pm 30.36 \text{ km/s}$  [51]. En el modelo propuesto (ec. (3.15)) se tomó un valor asintótico de  $\sigma_0 = 175 \text{ km/s}$ , resultando ser consistente con los datos observados, pues está dentro de los límites de error de la medición.

Se tiene entonces que los datos son consistentes con la predicción genérica de gravedad modificada:  $\sigma_0^4 = 0.471(Ga_0 M_{tot})$  [50], otorgándole credibilidad a la interpretación de estas medidas como evidencia para efectuar modificaciones en la ley de gravedad.

Ahora vamos a hacer un cálculo de la luminosidad total de la galaxia elíptica masiva NGC 4649, esto a partir de su masa total obtenida con el modelo propuesto y de la relación  $(M/L)$  en la banda del visible, que puede estimarse a partir de los modelos evolutivos de síntesis de poblaciones. Esto se ha hecho en la literatura reciente. Utilizando el cociente masa-luminosidad asociado a esta galaxia,  $(M/L)_V = 8$  [46], y el valor obtenido de la masa total con el mejor ajuste del modelo, es posible obtener la luminosidad total de la galaxia por medio de la siguiente relación:

$$L_{tot} = \frac{M_{tot}}{(M/L)_V} = \frac{M_{tot}}{8}. \quad (3.18)$$

Al sustituir los valores de  $(M/L)_V = 8$  y  $M_{tot} = 1.09 \times 10^{12} M_\odot$  en la ecuación anterior, se obtiene una luminosidad total para la galaxia NGC 4649 de  $L_{tot} = 1.36 \times 10^{11} L_\odot$ . Se puede observar por tanto que los valores de luminosidad total y masa total obtenidos con nuestro modelo son muy parecidos a los valores que se obtuvieron utilizando la función de Sérsic, los cuales resultan ser  $M_{tot} = 9.84 \times 10^{11} M_\odot$  y  $L_{tot} = 1.23 \times 10^{11} L_\odot$ . Esta galaxia se estudió en [52] utilizando MOND y dinámica Newtoniana clásica. Utilizando el cociente masa-luminosidad en la banda del azul, con un valor igual a  $(M/L)_B = 7$ , en [52] se obtiene un buen ajuste del perfil de dispersión de velocidades. Y considerando que la galaxia NGC 4649 se encuentra a una distancia de  $17.30 \text{ Mpc}$ , se encuentra que la masa total para esta galaxia es del orden de  $\sim 10^{12} M_\odot$  y por consiguiente tiene una luminosidad total del orden de  $\sim 10^{11} L_\odot$ , valores que resultan ser del mismo orden a los obtenidos con nuestro modelo.

El perfil de densidad superficial de masa proyectada  $\Sigma(R)$  que se obtuvo en el modelaje de la galaxia NGC 4649 fue utilizado para obtener el perfil de densidad de brillo superficial, al que se denotará por  $L_\star(R)$ , esto con el objetivo de compararlo con el perfil de brillo superficial observado que se tiene para esta galaxia, esto una vez que la razón masa-luminosidad,  $M/L$ , es supuesta. Para obtener el perfil de densidad de brillo superficial se tomó el cociente de los valores de la densidad superficial de masa proyectado y del valor del cociente masa-luminosidad en la banda del visible:

$$L_\star(R) = \frac{\Sigma(R)}{(M/L)_V} = \frac{\Sigma(R)}{8}, \quad (3.19)$$

esto para que el perfil de densidad brillo superficial este en unidades de  $L_\odot pc^{-2}$ .

En la figura (3.8) se muestra el mejor ajuste del perfil de brillo superficial con el modelo propuesto y el que se obtiene utilizando la función de Sérsic. También se muestra el perfil de brillo superficial medidos con el uso de fotometría en [43] y los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe en [45]. Así como se muestran los perfiles de máximo y mínimo brillo superficial consistentes con los rangos de error de los parámetros de la función de Sérsic que reproducen los perfiles de brillo superficial de la galaxia NGC 4649 (líneas discontinuas). Los perfiles de máximo y mínimo brillo superficial se obtuvieron tomando los valores del índice de Sérsic  $n$ , el radio efectivo  $R_e$  y  $\mu_e$  [43] que maximizan ( $n = 5.738$ ,  $R_e = 122.749 \text{ arcsec}$  y  $\mu_e = 22.593$ ) y minimizan ( $n = 5.037$ ,  $R_e = 143.669 \text{ arcsec}$  y  $\mu_e = 22.261$ ) los valores de  $I(R)$ .

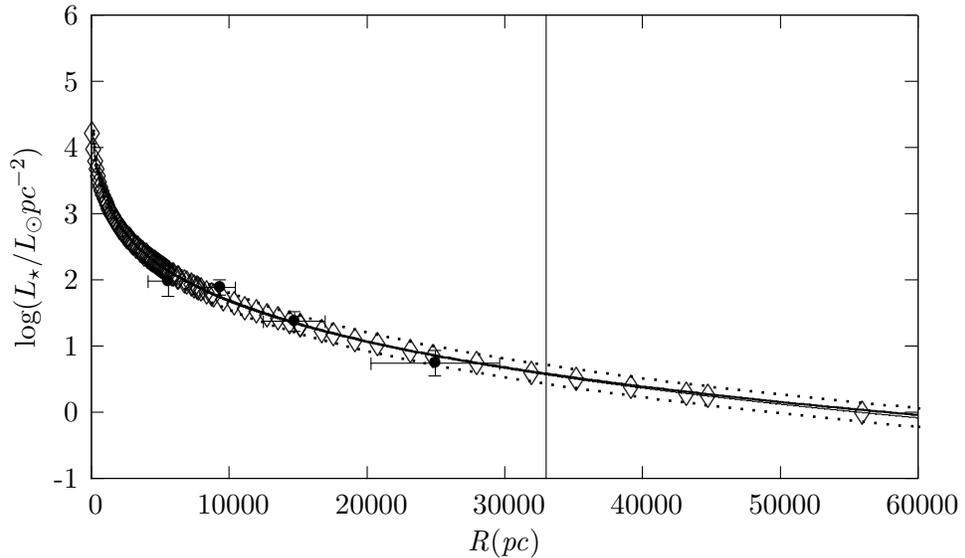


Figura 3.8: La figura muestra el mejor ajuste del perfil de brillo superficial de la galaxia NGC 4649 que se obtiene con el modelo que se propone (curva continua gruesa), así mismo se muestra el mejor ajuste para el perfil de brillo superficial utilizando la función de Sérsic (curva continua delgada) y los perfiles de máximo (curva punteada superior) y mínimo brillo superficial (curva punteada inferior) consistentes con los rangos de error de los parámetros de la función de Sérsic que reproducen los perfiles de brillo de la galaxia NGC 4649. También se muestra el perfil de brillo superficial utilizando fotometría [43](puntos  $\diamond$ ) y los datos observados para el perfil de brillo superficial usando PNe [45](puntos con barras de error Poissonianas). La línea vertical indica el punto donde  $x = 1$ .

Como puede observarse en la figura 3.8, el mejor ajuste del perfil de brillo superficial obtenido con el modelo que proponemos es similar al ajuste obtenido utilizando la función de Sérsic, los cuales se ajustan de forma satisfactoria con los datos observados, dándole así credibilidad al modelo que hemos asumido basándonos en una modificación a la ley de gravedad.

# Capítulo 4

## Conclusiones

*Y así la Naturaleza estará de acuerdo con sí misma y será muy sencilla, realizando todos los grandes movimientos de los cuerpos celestes por atracción de la gravedad... y casi todos los pequeños movimientos de sus partículas por algunas otras Fuerzas atractivas y repulsivas...*

**Isaac Newton, *Opticks* (1730).**

En este trabajo se presentó una propuesta de una Teoría de Gravedad Modificada que busca una formulación general a un nivel no relativista y como una alternativa a la hipótesis de la materia oscura. Además, se tiene que una modificación de la ley de gravedad presenta una mayor ventaja para la claridad física del fenómeno que se estudia.

La inclusión de la constante de aceleración de Milgrom,  $a_0$ , dentro de una teoría gravitacional, muestra que una expresión muy general para la aceleración sentida por una partícula puede construirse, obteniéndose de esta manera resultados consistentes con las observaciones.

Además, se ha puesto de manifiesto que con la adición de la constante de aceleración  $a_0$  de Milgrom, toda relación física debe ser, al menos, función del parámetro  $x$  que se define en la ecuación (2.12), en acuerdo con el teorema de Buckingham de análisis dimensional.

La inclusión de  $a_0$  en una teoría de la gravedad significa que una escala masa-longitud característica,  $l_M$ , se ha añadido. Esta escala indica aproximadamente la transición entre el régimen MONDiano (sistemas con aceleraciones pequeñas comparadas con  $a_0$ ) y el régimen Newtoniano (sistemas con aceleraciones mucho mayores que  $a_0$ ). Esto es, en el régimen no relativista, una partícula prueba localizada a una distancia  $r$ , de una masa puntual  $M$ , obedece la dinámica MONDiana cuando  $l_M/r \ll 1$ , y cuando  $l_M/r \gg 1$  el campo gravitacional es newtoniano.

Haciendo uso de una ley de Fuerza Newtoniana Modificada, fue posible construir un modelo de la galaxia elíptica masiva NGC 4649; esta galxia se modeló como una población de estrellas autogravitantes en configuraciones de equilibrio con simetría esférica. Los resultados obtenidos con este modelo resultan ser consistentes con las observaciones y datos que han sido reportados.

Utilizando el modelo que aquí se propone se obtuvieron buenos ajustes para el perfil de brillo superficial y para el perfil de dispersión de velocidades los cuales resultan ser consistentes con los datos observados. La masa total y la luminosidad total estimada con el modelo propuesto para la galaxia elíptica masiva NGC 4649 y considerando un cociente de masa-luminosidad en la banda del visible  $(M/L)_V = 8$ , son de  $1.09 \times 10^{12} M_\odot$  y  $1.36 \times 10^{11} L_\odot$  respectivamente. Estos valores obtenidos comparan muy bien con los valores que han sido reportados para esta galaxia, en particular con los valores que se obtienen utilizando la función de Sérsic, cuyos valores son  $M_{tot} = 9.84 \times 10^{11}$  y  $L_{tot} = 1.23 \times 10^{11}$ . Se obtuvo además para esta galaxia un radio a media masa finito (radio que contiene la mitad de la masa total)  $R_{hm} = 14.2 \text{ kpc}$ .

El modelo resultante está caracterizado por una región Newtoniana interior, que transita sin problemas a una región de gravedad modificada exterior al cruzar el umbral correspondiente a  $x = 1$  o bien cuando la aceleración es  $a = a_0$ . El perfil de dispersión de velocidad transita de una región interior que decae radialmente a una región exterior de dispersión de velocidad plana.

Comparando el modelo de población estelar de la galaxia elíptica masiva NGC 4649 para deducir la masa total estelar estimada, mostramos que el valor asintótico del perfil de dispersión de velocidad medido,  $\sigma_p(R \rightarrow \infty)$ , y la masa total para este sistema,  $M_{tot}$ , son consistentes con la predicción genérica de gravedad modificada para un escalamiento  $\sigma_p^4(R \rightarrow \infty) \propto M_{tot}$ .

# Bibliografía

- [1] Alonso M., Finn E. J., 1986, *Física Volumen I, Mecánica*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, E.U.A.
- [2] Giancoli D. C., 1988, *Física General, Volumen I*, Prentice Hall Hispanoamericana.
- [3] Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics*, 2nd edn. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [4] Vázquez González, J. Alberto, *Formación de Galaxias con Materia Oscura*, 2005
- [5] Queloz D., Dubath P., Pasquini L., 1995, *Astron. Astroph.*, **300**, 31
- [6] Romanowsky A. J., Douglas N. G., Arnaboldi M., et al. 2003, *Science*, **301**, 1696
- [7] Carigi L., 2003, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **339**, 825
- [8] Zakharov A. F., Capozziello S., De Paolis F., Ingrosso G., Nucita A. A., 2009, *SSRv*, **148**, 301
- [9] Oort J. H., 1940, *Astroph. Jour.*, **91**, 273
- [10] Zwicky F., 1938, *Astroph. Jour.*, **86**, 217
- [11] Matos T., 2004, *¿DE QUÉ ESTÁ HECHO EL UNIVERSO? Materia oscura y energía oscura*, Fondo de Cultura Económica, México.
- [12] Einasto J., Saar E., Chernin A., 1974, *nature*, **252**, 111
- [13] Rubin C. Vera, Ford W. K., 1980, *Astroph. Jour.*, **238**, 471
- [14] Milgrom M., 1983, *Astroph. Jour.*, **270**, 365
- [15] Bekenstein J., Milgrom M., 1984, *Astroph. Jour.*, **286**, 7
- [16] Famaey B., Binney J., 2005, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **363**, 603
- [17] Milgrom M., 1983, *Astroph. Jour.*, **270**, 365
- [18] Bekenstein J. D., 2004, *Phys. Rev. D.*, **70**, 083509

- 
- [19] Li X., Chang Z., 2011, *Commun. Theor. Phys.*, **55**, 733
- [20] Sanders R. H., 2001, *astro-ph/0106558*
- [21] Bekenstein J. D., 2007, *arXiv:astro-ph/0701848*
- [22] de Blok W. J. G., McGaugh Stacy S., Rubin Vera C., 2001, *Astroph. Jour.*, **122**, 2396
- [23] Reyes R., Mandelbaum R., Gunn J. E., Pizagno J., Lackner C. N., 2011, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **417**, 2347
- [24] Milgrom M., 1998, *astro-ph/9810302*
- [25] Sanders, R. H., McGaugh, S. S., 2002, *astro-ph/0204521*
- [26] Milgrom M., 2002, *arXiv:astro-ph/0207231*
- [27] Milgrom M., 1983, *Astroph. Jour.*, **270**, 384
- [28] Gentile G., et al., *astro-ph/0506538*
- [29] Funkhouser S., *astro-ph/0503104*
- [30] Milgrom M., 2002, *Scientific American*, **287(2)**, 42
- [31] Brada R., Milgrom M., 1995, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **276**, 453
- [32] Ferreas I., Mavromatos N. E., Sakellariadou M., Yusaf M. F., 2009, *Phys. Rev. D.*, **80**, 103506
- [33] Bernal T., Capozziello S., Hidalgo J. C., Mendoza S., 2011, *Eur. Phys. J. C.*, **71**, 1794
- [34] Capozziello S., Faraoni V., 2010, *Fundamental Theories of Physics, Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer.
- [35] Sotiriou T. P., Faraoni V., 2010, *Reviews of Modern Physics*, **82**, 451
- [36] Hernandez X., Mendoza S., Suarez T., Bernal T., 2010, *Astron. Astroph.*, **514**, A101
- [37] Mendoza S., Hernandez X., Hidalgo J. C., Bernal T., 2011, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **411**, 226
- [38] Hernandez X., Jimenez M. A., Allen C., 2012, *The European Physical Journal C*, **72**, 1884

- 
- [39] Hernandez X., Jimenez M. A., 2012, *Astroph. Jour.*, **750**, 9
- [40] Milgrom M., Sanders R. H., 2008, *Astroph. Jour.*, **678**, 131
- [41] Qasem E., 2011, *arXiv:1112.4652*
- [42] Caon N., Capaccioli M., D'Onofrio M., 1993, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **265**, 1013
- [43] Kormendy J., Fisher D. B., Cornell M. E., Bender R., 2009, *Astroph. Jour.*, **182**, 216
- [44] Trujillo I., Graham Alister W., Caon N., 2001, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **326**, 869
- [45] Teodorescu A. M., Mendez R. H., Bernardi F., Thomas J., Das P., Gerhard O., 2011, *Astroph. Jour.*, **736**, 65
- [46] Bridges T., Gebhardt K., Sharples R., Faifer F. R., Forte J. C., Beasley M. A., Zepf S. E., Forbes D. A., Hanes D. A., Pierce M., 2006, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **373**, 157
- [47] Pinkney J. et al., 2003, *Astroph. Jour.*, **596**, 903
- [48] De Bruyne V., Dejonghe H., Pizzella A., Bernardi M., Zeilinger W. W., 2001, *Astroph. Jour.*, **546**, 903
- [49] Tonry J. L., Dressler A., Blakeslee J. P., Ajhar E. A., Fletcher A. B., Luppino G. A., Metzger M. R., Moore C. B., 2001, *Astroph. Jour.*, 546, 681
- [50] Milgrom M., 1994, *Astroph. Jour.*, **429**, 540
- [51] Das P., Gerhard O., Mendez R. H., Teodorescu A. M., Lorenzi F., 2011, *Mon. Not. Roy. Ast. Soc.*, **415**, 1244
- [52] Samurović S., Ćirković M. M., 2009, *Publ. Astron. Obs. Belgrade*, **86**, 341-345