Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

Anillos de Burnside y sus aplicaciones.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Alejandra Fabiola Huitrado Mora

Director: Dr. Gerardo Raggi Cárdenas

Morelia, Michoacán - 10 de octubre de 2012.

Índice general

Agradecimientos

A mis padres Raquel Mora y Francisco Javier Huitrado, por todo lo que me han dado para salir adelante.

A mis hermanas Ada y Raquel, por los consejos y fortaleza que me dieron.

A mi director de tesis, Dr. Gerardo Raggi, por los conocimientos que me brindó no sólo para este trabajo sino para toda la maestría. Y por la paciencia y confianza que tuvo hacia mí siempre.

A los sinodales por los comentarios y observaciones que me ayudaron a mejorar.

A los profesores, de los cuales tuve oportunidad de aprender además de sus cursos, a valorar el trabajo.

A mis amigos y compañeros, sin los cuales hubiera sido muy difícil mi estancia.

INTRODUCCIÓN

Sea G un grupo finito, el anillo de Burnside $B(G)$ es uno de los anillos de representación fundamentales de G.

Este trabajo se divide en tres capítulos. Comenzamos con la notación necesaria para el desarrollo del trabajo. Continua con operaciones en G-conjuntos que luego son extendidas a nuestro anillo, lo cual lo hace un objeto universal cuando estudiamos la categoría de G-conjuntos. Algunas caracterizaciones de los G-conjuntos nos permiten más adelante entonces darle la estructura de anillo.

Definimos $B(G)$ y establecemos operaciones con lo cual es un anillo conmutativo y podemos estudiar el espectro primo y los idempotentes primitivos. Algunas de las aplicaciones de esta sección son resultados conocidos aunque generalizados y se usan en su demostración propiedades de $B(G)$ que además son útiles más adelante. Al estudiar los idempotentes y espectro primo obtenemos fórmulas y resultados muy útiles sobre como calcular elementos específicos y ver entonces como se ven los elementos idempotentes de $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

El último capítulo hace uso de la topología algebraica para analizar invariantes ligados para estructurar G-conjuntos, tales como G-copos o G-conjuntos simpliciales. Se comienza con una pequeña introducción definiendo términos como *complejo de cadenas*, *grupo de homología*. Se define también la *característica de Euler-Poincaré* pues se establecen propiedades entre ésta y un primer invariante, el de *Lefschetz*. Otros invariantes del capítulos son el de *Möbius* y el de *Steinberg*, ambos definidos por el invariante de Lefschetz pero cada uno para G-copos específicos y los cuales podemos ver como generalizaciones para la categoría de G-conjuntos de nociones clásicas, digamos la función de Möbius para un copo o el módulo de Steinberg de un grupo de Chevalley. Para todos estos invariantes se tienen diversas propiedades.

Capítulo 1

Propiedades básicas de G-conjuntos

1. Notación

Sea G un grupo finito. La categoría de los G-conjuntos finitos será denotada por G-set. Sus objetos serán los G-conjuntos finitos con una acción izquierda, los morfismos aplicaciones G-equivariantes y la composición la usual.

Si H es un subgrupo de G y g es un elemento de G, la notación ${}^{g}H$ simboliza gHg^{-1} y similarmente H^g es para $g^{-1}Hg$. El normalizador de H en G es denotado por $N_G(H)$. El conjunto de clases gH con $g \in G$ es denotado por G/H. Éste es un G-conjunto con la multiplicación por la izquierda. Un conjunto de representantes en G de G/H es denotado por $[G/H]$.

Si X es un G-conjunto, dado $x \in X$ denotaremos al estabilizador en G de x por G_x. El conjunto de órbitas de un subgrupo H de G en X es denotado por $H\backslash X$, y $[H\backslash X]$ denota un conjunto de representantes en X de $H\backslash X$.

El conjunto de clases de conjugación de subgrupos de G es denotado por s_G, y un conjunto de representantes de s_G es denotado por $[s_G]$. Si H y K son subgrupos de G, entonces $H\backslash G/K$ es el conjunto de clases dobles HxK para $x \in G$ y $[H\backslash G/K]$ denota un conjunto de representantes en G de estas clases dobles. La notación $H =_G K$ (respectivamente $H \subseteq_G K$) significa que existe un elemento $x \in G$ tal que $H^x = K$ (respectivamente $H^x \subseteq G$).

La cardinalidad de un conjunto S es denotada por $|S|$.

Si p es un número primo, el subgrupo normal más pequeño N de G tal que G/N es un $p-$grupo es denotado por $O^p(G)$. Éste es el subgrupo de G generado por los p'-elementos, i.e. los elementos de orden primo relativo a p.

Más generalmente, si π es un conjunto de primos, la notación $O^\pi(G)$ es para el subgrupo normal más pequeño N de G tal que G/N es un π-grupo soluble. El grupo G es llamado π-perfecto si $O^\pi(G) = G$. Si G en si mismo es un π-grupo, entonces es claro ver que el grupo $O^\pi(G)$ es el límite de la serie derivada de G. En particular, si π es el conjunto de todos los primos, entonces un grupo es π-perfecto si y sólo si éste es perfecto, i.e. igual a su subgrupo derivado. Los $O^\pi(G)$ tienen muchas propiedades y algunas de éstas son usadas en las demostraciones, como por ejemplo que

$O^\pi(O^\pi(H)) = O^\pi(H)$. Esto pues $O^\pi(O^\pi(H)) \trianglelefteq O^\pi(H)$. Ahora bien sabemos que $|H/O^\pi(O^\pi(H))| = [H : N_H(O^\pi(O^\pi(H)))] = [H : O^\pi(H)]$, por lo anterior. Consideremos ahora la siguiente sucesión exacta

$$1 \to \frac{O^\pi(H)}{O^\pi(O^\pi(H))} \to \frac{H}{O^\pi(O^\pi(H))} \to \frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))} \to 1.$$

Entonces $H/O^\pi(O^\pi(H))$ es soluble si y sólo si $\frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))}$ y $\frac{O^\pi(H)}{O^\pi(O^\pi(H))}$ son solubles, pero

$$\frac{H/O^\pi(O^\pi(H))}{O^\pi(H)/O^\pi(O^\pi(H))} \simeq H/O^\pi(H)$$

por lo tanto $H/O^\pi(O^\pi(H))$ es soluble y además es un π-grupo, con lo cual $O^\pi(H) \leq O^\pi(O^\pi(H)) \leq O^\pi(H)$; y por lo tanto $O^\pi(O^\pi(H)) = O^\pi(H)$. Otra propiedad útil es que dado M un grupo finito y $N \trianglelefteq M$, entonces $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{O^\pi(M)N}{N}$. Esto pues por una parte $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{H}{N}$ para algún $N \leq H \trianglelefteq M$. Entonces $\frac{M/N}{H/N} \simeq M/H$ es un π-grupo soluble, entonces $O^\pi(M) \subseteq H$. Por lo tanto $O^\pi(M)N \subseteq HN$, pero $N \leq H$, y así $O^\pi(M)N \subseteq H$ con lo cual finalmente $O^\pi(M)N/N \subseteq H/N = O^\pi(M/N)$. Por otra parte sabemos que ya que $O^\pi(M)$ y N son normales en M, entonces su producto también lo es y por lo tanto

$$\frac{O^\pi(M)N}{O^\pi(M)} \trianglelefteq \frac{M}{O^\pi(M)}$$

y dado que $M/O^\pi(M)$ es soluble entonces $\frac{M}{O^\pi(M)} \Big/ \frac{O^\pi(M)N}{O^\pi(M)} \simeq M/O^\pi(M)N$ es soluble. Pero además $O^\pi(M)N/N \trianglelefteq M/N$ y su cociente acabamos de ver es soluble y π-grupo, por lo tanto $O^\pi\left(\frac{M}{N}\right) \leq \frac{O^\pi(M)N}{N} \leq O^\pi(\frac{M}{N})$. Un poco más de notación en este capítulo será, si consideramos π un conjunto de primos denotaremos por $|G|_\pi$ la parte π-ésima del orden de G, esto es, que sólo aparecen primos de π. Y análogamente la parte π'-ésima, se denotará $|G|_{\pi'}$ y será la parte del orden de G en la cual sólo aparecen primos que no pertenecen a π. De forma similar si $a_\pi \in G$ será un π-elemento, es decir, que su orden tiene sólo elementos de π y análogamente $a_{\pi'}$ no tiene primos de π en su orden.

Denotaremos el grupo cíclco de orden n como C_n. El grupo trivial será denotado por $\mathbb{I}$.

2. Operaciones en G-conjuntos

Cuando X es un G-conjunto y H es un subgrupo de G, se puede ver a X como un H-conjunto a través de la restricción de la acción. Este H-conjunto es denotado por $\mathrm{Res}^G_H X$. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de G-conjuntos, $\mathrm{Res}^G_H f$ denotará la aplicación f vista como un morfismo de H-conjuntos. Esto define un *funtor restricción* $\mathrm{Res}^G_H : G\text{-set} \longrightarrow H\text{-set}$.

Ahora si Z es un H-conjunto el G-conjunto inducido $\mathrm{Ind}^G_H Z$ es definido como $G \times_H Z$, i.e. el cociente del producto cartesiano $G \times Z$ por la acción derecha de H dada por $(g, x).h = (gh, h^{-1}x)$ para $g \in G$, $h \in H$, $x \in Z$. La acción izquierda de G en $G \times_H X$ es inducida por su acción izquierda en $G \times Z$ dada por $g'.(g, x) = (g'g, x)$, para $g', g \in G$ y $x \in Z$. Si $f : Z \to T$ es un morfismo de H-conjuntos, entonces $\mathrm{Ind}_H^G f$ es el morfismo de G-conjuntos de $\mathrm{Ind}_H^G Z$ a $\mathrm{Ind}_H^G T$ definida por $(\mathrm{Ind}_H^G f)([g,x]) = [g, f(x)]$. Esto define un *funtor inducción* $\mathrm{Ind}_H^G : H\text{-set} \to G\text{-set}$.

Lema 1.1. *Si Z es isomorfo a H/K para algún subgrupo K de H, entonces $\mathrm{Ind}_H^G Z$ es isomorfo a G/K.*

Demostración. Consideremos $\varphi : Z \to H/K$ isomorfismo de H-conjuntos, con $\varphi(x) = hK$, $h \in H$ y sea entonces $\widetilde{\varphi} : \mathrm{Ind}_H^G Z \to G/K$ dada por $\widetilde{\varphi}([g,x]) = g\varphi(x) = ghK$.

Veamos que está bien definida. Sea $[g', x']$ otro representante de la clase $[g,x]$, entonces $\exists h' \in H$ tal que $(g,x).h' = (gh', h'^{-1}x) = (g', x')$ i.e. $g' = gh'$ y $x' = h'^{-1}x$, asi pues por un lado $\widetilde{\varphi}([g,x]) = g\varphi(x)$ y por el otro $\widetilde{\varphi}([g',x']) = g'\varphi(x')$. Sustituyendo g' y x' tenemos

$$\widetilde{\varphi}([g',x']) = gh'\varphi(h'^{-1}x) = gh'h'^{-1}\varphi(x) = g\varphi(x) = \widetilde{\varphi}([g,x])$$

Por lo tanto está bien definida.

Veamos ahora que es de G-conjuntos. Sea $g' \in G$, entonces

$$\widetilde{\varphi}(g'.[g,x]) = \widetilde{\varphi}([g'g,x]) = g'g\varphi(x) = g'.\widetilde{\varphi}([g,x])$$

Consideremos ahora $\widetilde{\varphi}^{-1} : G/K \to \mathrm{Ind}_H^G Z$ que toma gK y lo lleva a $[g, \varphi^{-1}(K)]$. Veamos que está bien definida. Sea $g'K$ otro representante de la clase entonces $g' = gk$ para algún $k \in K$, entonces $\widetilde{\varphi}^{-1}(gK) = [g, \varphi^{-1}(K)]$ y $\widetilde{\varphi}^{-1}(g'K) = [g', \varphi^{-1}(K)] = [gk, \varphi^{-1}(K)] = [g, k\varphi^{-1}(K)] = [g, \varphi^{-1}(kK)] = [g, \varphi^{-1}(K)]$. Por lo tanto, la aplicación está bien definida.

Así pues dado $[g,z] \in \mathrm{Ind}_H^G Z$ tenemos que

$$\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}([g,z]) = \widetilde{\varphi}^{-1}(g\varphi(z)) = \widetilde{\varphi}^{-1}(ghK) = [gh, \varphi^{-1}(K)] = [g, h\varphi^{-1}(K)] = [g, \varphi^{-1}(hK)] = [g,z]$$

por lo tanto $\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ind}_H^G Z}$. Finalmente dado $gK \in G/K$

$$\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(gK) = \widetilde{\varphi}([g, \varphi^{-1}(K)]) = g\varphi\varphi^{-1}(K) = gK$$

por lo tanto $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \mathrm{Id}_{G/K}$. Y así $\mathrm{Ind}_H^G Z \simeq G/K$ ❑

El conjunto de puntos fijos de H en X es denotado por X^H. Éste es visto como un $N_G(H)/H$-conjunto. Si $f : X \to Y$ es un morfismo de G-conjuntos, entonces la restricción de f a X^H es denotado por f^H. Este es un morfismo de $N_G(H)/H$-conjuntos de X^H a Y^H, pues dado $x \in X^H$ y $g \in N_G(H)$ tenemos que $f(gx) = gf(x)$ pues f es de G-conjuntos. Veamos que $f(x) \in Y^H$. Sea $h \in H$ entonces $hf(x) = f(hx) = f(x)$ por lo tanto $f(x) \in Y^H$ y por lo tanto f es de $N_G(H)/H$-conjuntos. Y por último éste define un *funtor de puntos fijos* $f^H : G\text{-set} \to N_G(H)/H\text{-set}$

Cuando H es un subgrupo normal de G, cualquier G/H-conjunto puede ser visto como un G-conjunto por inflación, y cualquier morfismo de G/H-conjuntos puede ser visto como un morfismo de G-conjuntos. Esta operación define un *funtor inflación* $\mathrm{Inf}_{G/H}^{G} : G/H\text{-set} \to G\text{-set}$.

Bajo las mismas condiciones, si X es un G-conjunto, entonces el conjunto de órbitas $H\backslash X$ de H en X puede ser visto como un G/H-conjunto y cualquier morfismo de G-conjuntos induce un morfismo de G/H-conjuntos entre los conjuntos correspondientes de órbitas. Esto define un *funtor deflación* $\mathrm{Def}_{G/H}^{G} : G\text{-set} \to G/H\text{-set}$.

Finalmente, sea H un subgrupo de G, y x un elemento de G. Si Z es un H-conjunto, entonces el grupo ${}^{x}H$ actua en Z por ${}^{x}h.z = hz$, donde ${}^{x}h \in {}^{x}H$ y $z \in Z$, y hz es calculado en el H-conjunto Z. Esto da un ${}^{x}H$-conjunto denotado por ${}^{x}Z$ o $c_{x,H}(Z)$. Si $f : Z \to T$ es un morfismo de H-conjuntos, entonces $c_{x,H}(f)$ es la aplicación f, vista como un morfismo de ${}^{x}H$-conjuntos de ${}^{x}Z$ a ${}^{x}T$. Esto define un *funtor conjugación* $c_{x,H} : H\text{-set} \to {}^{x}H\text{-set}$.

Estos funtores tienen propiedades obvias de transitividad. Más aun, ellos están relacionados por varias identidades. Entre ellas:

Proposición 1.2. *Sea G un grupo finito, y H y K subgrupos de G.*

1. *(Fórmula de Mackey) Si Z es un H-conjunto, entonces existe un isomorfismo de K-conjuntos*
$$\mathrm{Res}_{K}^{G}\mathrm{Ind}_{H}^{G}Z \cong \bigsqcup_{x\in[K\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{K\cap {}^{x}H}^{K}\,{}^{x}\mathrm{Res}_{K^{x}\cap H}^{H}Z.$$
2. *(Identidad de Frobenius) Si X es un G-conjunto y Z es un H-conjunto, entonces existe un isomorfismo de G-conjuntos*
$$X \times \mathrm{Ind}_{H}^{G}Z \cong \mathrm{Ind}_{H}^{G}((\mathrm{Res}_{H}^{G}X) \times Z).$$
y en particular para cualquier G-conjunto X, existe un isomorfismo de G-conjuntos
$$X \times (G/H) \cong \mathrm{Ind}_{H}^{G}\mathrm{Res}_{H}^{G}X$$
3. *Si Z es un H-conjunto, entonces existe un isomorfismo de $N_G(K)/K$-conjuntos*
$$(\mathrm{Ind}_{H}^{G}Z)^{K} \cong \bigsqcup_{\substack{x\in[N_G(K)\backslash G/H]\\ K^{x}\subseteq H}} \mathrm{Ind}_{N_{{}^{x}H}(K)/K}^{N_G(K)/K}({}^{x}Z)^{K}$$

Demostración.

1. Sea $S = [K\backslash G/H]$ que denote un conjunto elegido de representantes de clases dobles $K\backslash G/H$ y consideremos la aplicación
$$\varphi : \mathrm{Res}_{K}^{G}\mathrm{Ind}_{H}^{G}Z \to \bigsqcup_{x\in S} \mathrm{Ind}_{K\cap {}^{x}H}^{K}\ {}^{x}\mathrm{Res}_{K^{x}\cap H}^{H}Z$$

que manda el elemento $[g, z]$ del lado izquierdo, con $g \in G$ y $z \in Z$, al elemento $[k, hz]_x$ de la componente $x \in S$ del lado derecho, si g puede ser escrito como $g = kxh$, para algún $k \in K$ y $h \in H$. Veamos que efectivamente este es el isomorfismo requerido.

Primero veamos que está bien definido, sea $[g, z] \in \mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H Z$, entonces $\varphi([g, z]) = [k, hz]_x$, y sea $[g', z'] = [g, z]$ entonces existe $h' \in H$ tal que $(g, z).h' = (gh', h'^{-1}z) = (g', z')$. Entonces $g' = gh' = kxhh'$ y $z' = h'^{-1}z$. Así pues por un lado $\varphi([g, z]) = [k, hz]_x$ y por otro $\varphi([g', z']) = \varphi([gh', h'^{-1}z]) = [k, (hh')h'^{-1}z]_x = [k, hz]_x$. Por lo tanto si está bien definida.

Ahora veamos que es morfismo de K-conjuntos. Sea $k' \in K$, entonces

$$\varphi(k'.[g, z]) = \varphi([k'g, z]) = [k'k, hz]_x = k'.[k, hz]_x = k'\varphi([g, z])$$

Por lo tanto sí es de K-conjuntos.

Consideremos ahora

$$\psi : \bigsqcup_{x \in S} \mathrm{Ind}^K_{K \cap {}^xH} \, {}^x\mathrm{Res}^H_{K^x \cap H} Z \to \mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H Z$$

dada por $\psi([k, {}^x z]_x) = [kx, z]$.

Veamos que está bien definida. Sea $[k', {}^x z']_x$ otro representante de la clase $[k, {}^x z]_x$, entonces existe ${}^xh \in K \cap^x H$ tal que $(k', {}^x z') = (k, {}^x z).{}^xh = (k({}^xh), ({}^xh^{-1})^x z) = (k^x h, {}^x(h^{-1}z))$. Así que por un lado

$$\psi([k, {}^x z]_x) = [kx, z]$$

y por otro lado

$$\psi([k', {}^x z']_x) = [k'x, z'] = [k({}^xh)x, h^{-1}z] = [kxh, h^{-1}z] = [kx, z] = \psi([k, z]_x)$$

Por lo tanto está bien definida.

Tomemos ahora $[g, z] \in \mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H Z$, entonces si $g = kxh$ para algún $k \in K$ y algún $h \in H$

$$\psi \circ \varphi([g, z]) = \psi([k, hz]_x) = [kx, hz] = [kxhh^{-1}, hz] = [kxh, z] = [g, z]$$

Por lo tanto $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Res}^G_K \mathrm{Ind}^G_H Z}$. Si ahora tenemos $[k, z]_x \in \bigsqcup_{x \in S} \mathrm{Ind}^K_{K \cap {}^xH} \, {}^x\mathrm{Res}^H_{K^x \cap H} Z$, entonces

$$\varphi \circ \psi([k, z]_x) = \varphi([kx, z]) = [k, z]_x$$

por lo tanto $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\bigsqcup_{x \in S} \mathrm{Ind}^K_{K \cap {}^xH} \, {}^x\mathrm{Res}^H_{K^x \cap H} Z}$. Con lo cual φ y ψ son inversas una de la otra y entonces φ es el isomorfismo deseado.

2. Consideremos la aplicación

$$\varphi : X \times \mathrm{Ind}^G_H Z \to \mathrm{Ind}^G_H((\mathrm{Res}^G_H X) \times Z)$$

que manda el elemento $(x, [g, z]) \in X \times \mathrm{Ind}_H^G Z$ al elemento $[g, (g^{-1}x, z)]$. Veamos que es el isomorfismo requerido.

Primero veamos que está bien definida. Sea $[g', z']$ otro representante de la clase $[g, z]$ entonces existe $h \in H$ tal que $(g', z') = (g, z).h = (gh, h^{-1}z)$. Entonces veamos que $(x, [g, z])$ y $(x, [g', z'])$ van a parar al mismo elemento. Por un lado $\varphi((x, [g, z])) = [g, (g^{-1}x), z]$ y por otra parte $\varphi((x, [g', z'])) = [g', (g'^{-1}x, z')] = [gh, (h^{-1}g^{-1}x, h^{-1}z)] = [gh, h^{-1}.(g^{-1}x, z)] = [g, (g^{-1}, z)]$. Por lo tanto sí está bien definida.

Veamos ahora que es de G-conjuntos. Sea $a \in G$, entonces $\varphi(a.(x, [g, z])) =$
$= \varphi(a.x, a.[g, z]) = \varphi((ax, [ag, z])) = [ag, (g^{-1}a^{-1}ax, z)] = [ag, (g^{-1}x, z)] = a.[g, (g^{-1}x, z)] = a.\varphi((x, [g, z]))$.

Consideremos ahora la aplicación

$$\psi : \mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G X) \times Z) \to X \times \mathrm{Ind}_H^G Z$$

que toma el elemento $[g, (x, z)] \in \mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G X) \times Z)$ y lo manda a $(gx, [g, z])$.
Sea $[g', (x', z')]$ otro representante de la clase, entonces existe $h \in H$ tal que $(g', (x', z')) = (g, (x, z)).h = (gh, h^{-1}.(x, z)) = (gh, (h^{-1}x, h^{-1}z))$. Así pues $\psi([g', (x', z)]) = (g'x', [g', z']) = (ghh^{-1}x, [gh, h^{-1}z]) = (gx, [g, z]) = \psi([g, (x, z)])$. Por lo tanto está bien definida.

Ahora sólo resta ver que φ y ψ son inversa una de la otra. Para esto sea $(x, [g, z]) \in X \times \mathrm{Ind}_H^G Z$ entonces

$$\psi \circ \varphi((x, [g, z])) = \psi([g, (g^{-1}x, z)]) = (gg^{-1}x, [g, z]) = (x, [g, z])$$

Por lo tanto, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{X \times \mathrm{Ind}_H^G Z}$. Ahora bien, dado $[g, (x, z)] \in \mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G X) \times Z)$, se tiene que

$$\varphi \circ \psi([g, (x, z)]) = \varphi((gx, [g, z])) = [g, (g^{-1}gx, z)] = [g, (x, z)]$$

Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G X) \times Z}$. Con lo cual son inversas y por lo tanto φ es el isomorfismo buscado.

En particular si $Z = H/H$, $\mathrm{Ind}_H^G Z \simeq G/H$ y entonces

$$X \times G/H \simeq \mathrm{Ind}_H^G((\mathrm{Res}_H^G X) \times H/H) \simeq \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G X)$$

3. Notemos que $(\mathrm{Ind}_H^G Z)^K = (\mathrm{Res}_{N_G(K)}^G \mathrm{Ind}_H^G Z)^K$, pues como conjuntos son el mismo. Además del lado izquierdo es un $N_G(K)/K$-conjunto y del lado derecho es un $N_{N_G(K)}(K)/K$-conjunto, es decir $N_G(K)/K$-conjunto. Usamos entonces la fórmula de Mackey (1.) y basta considerar el caso $K \trianglelefteq G$. En tal caso, el elemento $[g, z]$ de $\mathrm{Ind}_H^G Z$ es invariante por K si y sólo si para todo $k \in K$, $k.[g, z] = [kg, z] = [g, z]$, es decir, existe $h \in H$ tal que $(kg, z) = (g, z).h = (gh, h^{-1}z)$. Entonces $kg = gh$ y $z = h^{-1}z$. De esto y de que estamos suponiendo $K \trianglelefteq G$

entonces $K^g = K \subseteq H$ y $z \in Z^H$. Por lo tanto $(\mathrm{Ind}_H^G Z)^K$ es vacío si $K^g \nsubseteq H$ y es igual a $\mathrm{Ind}_{H/K}^{G/K} Z^K$ de otra forma. Así aplicando la fórmula de Mackey se tiene

$$(\mathrm{Ind}_H^G Z)^K = (\mathrm{Res}_{N_G(K)}^G \mathrm{Ind}_H^G Z)^K \simeq \left(\bigsqcup_{x \in [N_G(K)\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{N_G(K)\cap {}^xH}^{N_G(K)} {}^x Res_{N_G(K)^x \cap H}^H Z \right)^K$$

$$\simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K)\backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \left(\mathrm{Ind}_{N_{^xH}(K)}^{N_G(K)} {}^x Res_{N_G(K)^x \cap H}^H Z \right)^K \simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K)\backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \mathrm{Ind}_{N_{^xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} \left({}^x Res_{N_G(K)^x \cap H}^H Z \right)^K$$

$$\simeq \bigsqcup_{\substack{x \in [N_G(K)\backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \mathrm{Ind}_{N_{^xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^x Z)^K$$

Como queríamos probar.

❏

3. Caracterización de G-conjuntos

Lema 1.3. *Sea G un grupo finito,*

1. *Cualquier G-conjunto es una unión disjunta de G-conjuntos transitivos. Si X es un G-conjunto transitivo, y si $x \in X$, entonces la aplicación*

$$gG_x \in G/G_x \mapsto g.x \in X$$

es un isomorfismo de G-conjuntos

2. *Si H y K son subgrupos de G, entonces la aplicación $f \mapsto f(H)$ es una correspondencia uno a uno entre el conjunto de homomorfismos de G-conjuntos de G/H a G/K y el conjunto de clases $xK \in G/K$ tal que $H \subseteq^x K$. En particular, los G-conjuntos G/H y G/K son isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G.*

Demostración.

1. Sabemos que si X es un G-conjunto entonces X es la unión disjunta de órbitas, las cuales son G-conjuntos transitivos.

   Sea ahora $\varphi : G/G_x \to X$ definida como sigue, $\varphi(gG_x) = g.x$. Primero veamos que está bien definida. Para esto, sea $g'G_x = gG_x$ entonces existe $h \in G_x$ tal que $g' = gh$ y asi $\varphi(g'G_x) = g'.x = (gh).x = g.(h.x) = g.x = \varphi(gG_x)$ pues $h \in G_x$.

   Ahora que es de G-conjuntos; sea $g' \in G$ entonces $\varphi(g'gG_x) = (g'g).x = g'.(g.x) = g'.\varphi(gG_x)$.

Resta ver que es biyectiva. Asi pues consideremos $\psi : X \to G/G_x$ definida como sigue, dado $y \in X$ y considerando que X es transitivo, entonces existe $g \in G$ tal que $y = g.x$ con lo cual $\psi(y) = gG_x$. Ahora bien, dado $y \in X$ tenemos que $\varphi \circ \psi(y) = \varphi(\psi(y)) = \varphi(gG_x) = g.x = y$. Por lo tanto $\varphi \circ \psi = id_X$. Y finalmente dado $gG_x \in G/G_x$, $\psi \circ \varphi(gG_x) = \psi(\varphi(gG_x)) = \psi(g.x) = gG_x$ pues ya existe $g \in G$ tal que $g.x = g.x$. Por lo tanto $\psi \circ \varphi = id_{G/G_x}$. Y de esto y lo anterior concluimos que φ es biyectiva y por lo tanto isomorfismo de G-conjuntos.

2. Consideremos $\phi : \mathrm{Hom}(G/H, G/K) \to G/K$. Es claro que si f y g son elementos de $\mathrm{Hom}(G/H, G/K)$ con $H \subseteq^x K$, tales que $\phi(f) = \phi(g)$ entonces $f(H) = g(H)$ y por lo tanto $f = g$. Por lo tanto ϕ es una correspondencia uno a uno.

   Ahora bien si G/H y G/K son isomorfos entonces por lo anterior $H \subseteq^x K$ y $K \subseteq^x H$ equivalentemente ${}^xK \subseteq H$, por lo tanto ${}^xK = H$ es decir, $H =_G K$

❑

Se puede caracterizar un G-conjunto salvo isomorfismo usando el siguiente teorema fundamental de Burnside.

Teorema 1.4. *(Burnside). Sean G un grupo finito, y X y Y G-conjuntos finitos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los G-conjuntos X y Y son isomorfos.*
2. *Para cualquier subgrupo H de G, los conjuntos X^H y Y^H tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Dado que cualquier isomorfismo de G-conjuntos $f : X \to Y$ induce una biyección $f^H : X^H \to Y^H$ en los conjuntos de puntos fijos para cualquier subgrupo H de G, se tiene que 1. implica 2.

Para mostrar que 2. implica 1., notemos que se sigue del lema 1.3 que cualquier G-conjunto X puede ser escrito salvo isomorfismo como

$$X = \bigsqcup_{K \in [s_G]} a_K(X) G/K \tag{3.1}$$

para algún $a_K(X) \in \mathbb{N}$, donde $a_K(X)G/K$ denota la unión disjunta de $a_K(X)$ copias de G/K.

Si suponemos 2., entonces para cualquier $H \in [s_G]$,

$$\left|X^H\right| = \left|\bigsqcup_{K \in [s_G]} a_K(X)(G/K)^H\right| = \sum_{K \in [s_G]} a_K(X) \left|(G/K)^H\right| =$$

$$= \sum_{K\in[s_G]} a_K(Y)\left|(G/K)^H\right| = \left|\bigsqcup_{K\in[s_G]} a_K(Y)(G/K)^H\right| = \left|Y^H\right|$$

Entonces

$$\sum_{K\in[s_G]} (a_K(X) - a_K(Y))\left|(G/K)^H\right| = 0$$

La matriz m de este sistema de ecuaciones está dada por

$$m(H,K) = |(G/K)^H| = |\{xK \in G/K \mid H^x \subseteq K\}|$$

para $H, K \in [s_G]$. En particular la entrada $m(H,K)$ es no cero si y sólo si algún conjugado de H está contenido en K.

Si el conjunto $[s_G]$ tiene un orden total $\leq$ tal que $H \leq K$ implica $|H| \leq |K|$, entonces la matriz m es triangular superior, con coeficientes en la diagonal no ceros $m(H,H) = [N_G(H) : H]$. Esto es que si $[s_G] = \{H_1 = \mathbb{I}, H_2, \ldots, H_n = G\}$, con $H_1 \leq H_2, \leq \cdots, \leq H_n$, entonces

$$m = \begin{pmatrix} \left|(G/H_1)^{H_1}\right| & \left|(G/H_2)^{H_1}\right| & \ldots & \left|(G/H_n)^{H_1}\right| \\ \left|(G/H_1)^{H_2}\right| & \left|(G/H_2)^{H_2}\right| & \ldots & \left|(G/H_n)^{H_2}\right| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left|(G/H_1)^{H_n}\right| & \left|(G/H_2)^{H_n}\right| & \ldots & \left|(G/H_n)^{H_n}\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |G| & \left|(G/H_2)^{H_1}\right| & \ldots & 1 \\ 0 & [N_G(H_2) : H_2] & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

En particular m es no singular, y al poder invertirla se sigue de la última suma que $a_K(X) = a_K(Y)$, para cualquier $K \in [s_G]$, y los G-conjuntos X y Y son isomorfos. Se sigue también que los enteros $a_K(X)$ en la descomposición 3.1 están determinados de manera única por X. ❑

Definición 1.5. La matriz anterior m (o algunas veces su transpuesta) es llamada la *tabla de marcas* del grupo G.

Aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 1.6. Sea p un número primo y $G = C_p$, entonces $[s_G] = \{\mathbb{I}, C_p\}$ y por lo tanto

$$m = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.7. Si $G = S_3$, $[s_G] = \{\mathbb{I}, \langle(12)\rangle, \langle(123)\rangle, S_3\}$

$$m = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Anillo de Burnside

1. Definición

La siguiente definición del anillo de Burnside del grupo G es una generalización axiomática de las ideas y técnicas de Burnside. Ésta aparece en un artículo de Solomon ([**10**]).

Definición 2.1. (Solomon). El *anillo de Burnside* $B(G)$ de G es el grupo de Grothendieck de la categoría de G-conjuntos, por las relaciones dadas por la descomposición en unión disjunta de G-conjuntos. La multiplicación en $B(G)$ es inducida por el producto directo de G-conjuntos.

Esto significa que $B(G)$ es el $\mathbb{Z}$-modulo libre con base el conjunto de clases de equivalencia de G-conjuntos finitos cociente por las relaciones identificando la clase de la unión disjunta $X \sqcup Y$ de dos G-conjuntos X y Y a la suma de la clase de X y la clase de Y.

El producto directo de G-conjuntos es conmutativo y distributivo con respecto a la unión disjunta, salvo isomorfismos. Por lo tanto este induce por bilinealidad una estructura de anillo conmutativo en $B(G)$. La clase del conjunto $\bullet$ de cardinalidad 1 es una unidad para esta estructura de anillo.

Así pues dado que $B(G) = K_0(G)$ entonces $B(G)$ es ya un grupo abeliano con la suma. Claramente dados $A, B, C \in \mathrm{Ob}G$-set, se tiene que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ y $A \times B \simeq B \times A$.

Ahora bien verifiquemos que $(A \sqcup B) \times C = (A \times C) \sqcup (B \times C)$. Sea $(x, y) \in (A \sqcup B) \times C$ entonces o bien $x \in A$ o $x \in B$, sin pérdida de generalidad supongamos $x \in A$ entonces $(x, y) \in A \times C$ pero $(x, y) \notin B \times C$ con lo cual $(x, y) \in (A \times C) \sqcup (B \times C)$ Similarmente sea $(z, w) \in (A \times C) \sqcup (B \times C)$ entonces o bien $(z, w) \in A \times C$ o $(z, w) \in B \times C$, sin pérdida de generalidad supongamos lo primero, entonces $(z, w) \notin B \times C$, con lo cual $z \notin B$ o $w \notin C$, pero ya que $(z, w) \in A \times C$ entonces $w \in C$ por lo tanto $z \notin B$ y asi $(z, w) \in (A \sqcup B) \times C$. Ya que el producto es conmutativo la otra distributividad es análoga a ésta.

Finalmente ya que $A \simeq A \times \bullet$, entonces $\bullet$ es neutro multiplicativo. Con lo cual $B(G)$ es un anillo conmutativo con unidad

Dos G-conjuntos finitos A y B tienen la misma imagen en $B(G)$ si y sólo si existen sucesiones de G-conjuntos finitos X_i, Y_i, para $1 \leq i \leq m$, y Z_j, T_j, para $1 \leq j \leq n$ y un isomorfismo de G-conjuntos.

$$A \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} X_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} Y_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} (Z_j \sqcup T_j)\right) \simeq B \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} (X_i \sqcup Y_i)\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} Z_j\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{n} T_j\right)$$

Sabemos que $B(G) = K_0(G) = \mathcal{F}(G)/R$ donde $R = \langle |A \sqcup B| - |A| - |B| \rangle$. Sean A y B tales que $[A] = [B] \in B(G)$ entonces $|A| - |B| \in R$ y así

$$|A| - |B| = \sum_{i=1}^{m} (|X_i \sqcup Y_i| - |X_i| - |Y_i|) - \sum_{j=1}^{n} \left(|Z_j \sqcup T_j| - |Z_j| - |T_j|\right)$$

Entonces

$$|A| + \sum_{i=1}^{m} |X_i| + \sum_{i=1}^{m} |Y_i| + \sum_{j=1}^{n} |Z_j \sqcup T_j| = |B| + \sum_{i=1}^{m} |X_i \sqcup Y_i| + \sum_{j=1}^{n} |Z_j| + \sum_{j=1}^{n} |T_j|$$

con lo cual existe $C \in \mathrm{Ob}G-\mathrm{set}$ tal que $A \sqcup C \simeq B \sqcup C$

Tomando puntos fijos en ambos lados se tiene que para cualquier subgrupo H de G, ocurre que $\left|A^H\right| = \left|B^H\right|$ y el teorema de Burnside 1.4 implica que A y B son isomorfos como G-conjuntos. En lo siguiente, un G-conjunto A y su imagen en $B(G)$ serán identificados.

Del teorema de Burnside 1.4 se sigue que cualquier G-conjunto X puede ser escrito de manera única salvo isomorfismo como

$$X \simeq \bigsqcup_{H \in [s_G]} a_H(X) G/H$$

Por lo tanto $B(G)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base indexada por los elementos G/H, para $H \in [s_G]$. En esta base, la ley de multiplicación puede ser descrita por

$$(G/H).(G/K) = \sum_{x \in [H \backslash G/K]} G/(H \cap^x K). \tag{1.1}$$

Ésta se sigue de la proposición 1.2, aplicando la identidad de Frobenius al considerar $X = G/K$

$$(G/H) \times (G/K) \simeq \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G G/K$$

pero $G/K = \mathrm{Ind}_K^G K/K$, entonces

$$(G/H) \times (G/K) \simeq \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G K/K$$

Y a partir de la fórmula de Mackey

$$\mathrm{Res}^G_H \mathrm{Ind}^G_K K/K \simeq \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} \mathrm{Ind}^H_{H\cap {}^xK} {}^x\mathrm{Res}^K_{H^x\cap K} K/K$$

considerando que ${}^x\mathrm{Res}^K_{H^x\cap K} K/K \simeq K/K$ se tiene

$$\mathrm{Res}^G_H \mathrm{Ind}^G_K K/K \simeq \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} \mathrm{Ind}^H_{H^x\cap K} K/K \simeq \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} H/(H\cap^x K)$$

Por lo tanto

$$(G/H)\times(G/K) \simeq \mathrm{Ind}^G_H\left(\bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} H/(H\cap^x K)\right) = \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} \mathrm{Ind}^G_H H/(H\cap^x K) \simeq \bigsqcup_{x\in[H\backslash G/K]} G/(H\cap^x K)$$

Finalmente, las operaciones en G-conjuntos definidas en la sección 2 del capítulo 1 todas conmutan con uniones disjuntas. Por lo tanto pueden ser extendidas al anillo de Burnside: los elementos de $B(G)$ pueden ser vistos como una diferencia formal $X - Y$ de dos G-conjuntos finitos. Si $F : G\text{-set} \to H\text{-set}$ denota uno de los funtores de restricción, inducción, puntos fijos, inflación, deflación o conjugación, entonces F induce un homomorfismo de grupos, todavia denotado por F, de $B(G)$ a $B(H)$, definido por

$$F(X - Y) = F(X) - F(Y)$$

para cualquiera dos G-conjuntos finitos X y Y.

Así por ejemplo, si H es un subgrupo de G, existe un homomorfismo de restricción

$$\mathrm{Res}^G_H : B(G) \to B(H).$$

Este homomorfismo es de hecho un morfismo de anillos (con unidad). Pues $\mathrm{Res}^G_H(X\times Y) = \mathrm{Res}^G_H X \times \mathrm{Res}^G_H Y$ para X y Y G-conjuntos. Y $\mathrm{Res}^G_H \bullet = \bullet$.

En el caso especial $H = \mathbb{I}$, dado que $B(G) \simeq \mathbb{Z}$, esto da una extensión de la cardinalidad a la aplicación $X \mapsto |X| = \mathrm{Res}^G_{\mathbb{I}} X$ de $B(G)$ a $\mathbb{Z}$.

Similarmente, existe un homomorfismo inducción

$$\mathrm{Ind}^G_H : B(H) \to B(G)$$

Este no es un morfismo de anillos en general, pues $\mathrm{Ind}^G_H(X\times Y)$ no necesariamente es lo mismo que $\mathrm{Ind}^G_H X \times \mathrm{Ind}^G_H Y$.

Si H es un subgrupo de G, existe un homomorfismo de puntos fijos $X \mapsto X^H$

$$f^H : B(G) \to B(N_G(H)/H)$$

que es de hecho un homomorfismo de anillos, dado que $f^H(X \times Y) = (X \times Y)^H$ y con una doble contención tenemos que dado $(x, y) \in (X \times Y)^H$, se tiene que para $h \in H$, $h.(x, y) = (h.x, h.y) = (x, y)$ entonces $h.x = x$ y $h.y = y$, es decir, $x \in X^H$ y $y \in Y^H$. Por lo tanto, $(X \times Y)^H \subseteq X^H \times Y^H$. Por otra parte, dado $(x, y) \in X^H \times Y^H$ entonces para cualquier $h \in H$ se tiene $h.(x, y) = (h.x, h.y) = (x, y)$ y asi $X^H \times Y^H \subseteq (X \times Y)^H$. Por lo tanto ambos conjuntos son iguales.

Cuando H es un subgrupo normal de G, existe un homomorfismo inflación

$$\mathrm{Inf}_{G/H}^{G} : B(G/H) \to B(G)$$

que es un homomorfismo de anillos. Pues como en casos anteriores $\mathrm{Inf}_H^G(X \times Y) \simeq \mathrm{Inf}_H^G X \times \mathrm{Inf}_H^G Y$.

Finalmente, si x es un elemento de G, existe un homomorfismo conjugación $Z \mapsto^x Z$ de $B(H)$ a $B(^xH)$, que es un homomorfismo de anillos, esto ya que $c_{x,H}(X \times Y) =^x (X \times Y) =^x X \times^x Y = c_{x,H}(X) \times c_{x,H}(Y)$.

La siguiente en una extensión obvia de la proposición 1.2:

Proposición 2.2. *Sea G un grupo finito, y H y K subgrupos de G.*

1. *(Fórmula de Mackey) Si $Z \in B(G)$, entonces en $B(K)$*

$$\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G Z = \sum_{x \in [K\backslash G/H]} \mathrm{Ind}_{K \cap {}^xH}^{K} {}^x\mathrm{Res}_{K^x \cap H}^{H} Z.$$

2. *(Identidad de Frobenius) Si $X \in B(G)$ y $Z \in B(H)$, entonces en $B(G)$*

$$X.\mathrm{Ind}_H^G Z = \mathrm{Ind}_H^G \left((\mathrm{Res}_H^G X).Z \right)$$

y en particular para cualquier $X \in B(G)$

$$X.(G/H) = \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G X.$$

3. *Si $Z \in B(H)$, entonces en $B(N_G(K)/K)$*

$$(\mathrm{Ind}_H^G Z)^K = \sum_{\substack{x \in [N_G(K)\backslash G/H] \\ K^x \subseteq H}} \mathrm{Ind}_{N_{^xH}(K)/K}^{N_G(K)/K} ({}^xZ)^K$$

2. Puntos fijos como homomorfismos de anillos

El anillo $B(G)$ es finitamente generado como $\mathbb{Z}$-módulo, por lo tanto en un anillo noetheriano. El teorema de Burnside 1.4 puede ser interpretado como sigue: cada subgrupo H de G define un homomorfismo de anillos $\phi_H^G : B(G) \to \mathbb{Z}$ por $\phi_H^G(X) = |X^H|$. El kernel de ϕ_H^G es un ideal primo, dado que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero, y la intersección de todos estos kernels para subgrupos H de G es cero. En particular, el anillo $B(G)$ es reducido, esto es, que su único elemento nilpotente es el 0.

Consideremos $g \in G$ y $f : X^H \to X^{H^g}$ aplicación de conjuntos dada por $x \mapsto g^{-1}xg$. Veamos que $f(x) \in X^{H^g}$. Entonces para $h^g \in H^g$, $h^g f(x) = g^{-1}hgg^{-1}xg = g^{-1}hxg = g^{-1}xg = f(x)$ pues $x \in X^H$. Por lo tanto $f(x) \in X^{H^g}$. Ahora, claramente es inyectiva pues dados $x, x' \in X^H$ tal que $f(x) = f(x')$, entonces $g^{-1}xg = g^{-1}x'g$ y asi $x = x'$. Ahora bien dado $y \in X^{H^g}$ existe $gyg^{-1} \in X^H$ tal que $f(gyg^{-1}) = y$, por lo tanto f es sobreyectiva y entonces una biyección, con lo cual $|X^H| = |X^{H^g}|$ para cualquier g en G. Ahora bien, sean H y K conjugados en G, entonces existe $g \in G$ tal que $H = K^g$ y entonces $\phi_H^G(X) = |X^H| = |X^{K^g}| = |X^K| = \phi_K^G(X)$. Por lo tanto $\phi_H^G = \phi_K^G$ y entonces la aplicación producto

$$\Phi = \prod_{H \in [s_G]} \phi_H^G : B(G) \to \prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$$

es inyectiva. Más aún, esta aplicación Φ es una aplicación entre $\mathbb{Z}$-módulos libres que tienen el mismo rango. Por lo tanto el cokernel de Φ es finito.

La matriz m de Φ con respecto a la base $\{G/H\}_{H \in [s_G]}$ y a la base canónica $\{e_H\}_{H \in [s_G]}$ de $\prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$ es la tabla de marcas del grupo G. Recordando de la definición 1.5 que para $H, K \in [s_G]$

$$m(H,K) = |(G/K)^H| = |\{xK \in G/K \mid H^x \subseteq K\}|.$$

La cardinalidad del cokernel de Φ es el determinante de m, por lo tanto es igual a

$$|\mathrm{Coker}(\Phi)| = \prod_{H \in [s_G]} [N_G(H) : H].$$

Este cokernel fue descrito por Dress ([**5**]):

Teorema 2.3. *(Dress) Sea G un grupo finito. Para H y K en $[s_G]$, sea*

$$n(K,H) = |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K\rangle =_G H\}|.$$

Entonces el elemento $y = \sum_{H \in [s_G]} y_H e_H$ de $\prod_{H \in [s_G]} \mathbb{Z}$ está en la imagen de Φ si y sólo si para cualquier $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K,H) y_H \equiv 0 \mod |N_G(K)/K|$$

Demostración. Primero sea X un G-conjunto finito, y sea $y = \Phi(X)$. Entonces con la notación del teorema $y = \sum_{H \in [s_G]} y_H e_H = \sum_{H \in [s_G]} |X^H| e_H$ y así $y_H = |X^H|$ para todo $H \in [s_G]$, por lo tanto para cualquier $K \in [s_G]$

$$\sum_{H \in [s_G]} n(K,H) y_H = \sum_{H \in [s_G]} \left|X^H\right| |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x, K\rangle =_G H\}| =$$

$$= \sum_{H\in[s_G]} \left|X^{\langle x,K\rangle}\right| |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x,K\rangle =_G H\}| = \sum_{xK\in N_G(K)/K} \left|X^{\langle x,K\rangle}\right| = \sum_{xK\in N_G(K)/K} \left|\left(X^K\right)^x\right|$$

pues notemos que $X^{\langle x,K\rangle} = \left(X^K\right)^x$ conjuntivísticamente, pues un elemento de $\langle x, K\rangle$ es de la forma $x^m k$ con $k \in K$ y algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces dado $y \in \left(X^K\right)^x$, $x^m ky = x^m y = y$ por lo tanto $y \in X^{\langle x,K\rangle}$, inversamente dado $y \in X^{\langle x,K\rangle}$ para $k \in K$ y x, se tiene $xky = x(ky) = xy = y$. Por lo tanto $y \in \left(X^K\right)^x$ y en consecuencia $\left(X^K\right)^x = X^{\langle x,K\rangle}$.

Ahora para cualquier grupo finito L actuando en un conjunto finito Z se tiene

$$|L \times L\backslash Z| = |L||L\backslash Z| = |L|\left|\bigsqcup_{z\in Z} L_z/L\right| = |L|\sum_{z\in Z}\frac{|L_z|}{|L|} = \sum_{z\in Z}|L_z| = |\{(l,z)\in L\times Z \mid l.z = z\}| = \sum_{l\in L}\left|Z^l\right|.$$

Aplicando esto a $L = N_G(K)/K$ y $Z = X^K$ da

$$\sum_{H\in[s_G]} n(K,H)y_H = |N_G(K)/K|\left|N_G(K)\backslash X^K\right| \equiv 0 \mod |N_G(K)/K|$$

Por linealidad, esto probará la parte de suficiencia del teorema.

Aplicando esto a $X = G/M$, para algún $M \in [s_G]$, muestra que existe una matriz t indexada por $[s_G]\times[s_G]$, con entradas en $\mathbb{Z}$, tal que para $K \in [s_G]$

$$\sum_{H\in[s_G]} n(K,H)m(H,K) = |N_G(K)/K|t(K,M).$$

Ahora por el orden en $[s_G]$ tenemos que la matriz n es triangular superior y los coeficientes de su diagonal son $n(K,K) = |\{xK \in N_G(K)/K \mid \langle x,K\rangle =_G K\}| = 1$, y ya que m también es triangular superior, entonces t lo es, y despejando de la suma

$$t(K,K) = m(K,K)/|N_G(K)/K| = 1.$$

En particular t por ser triangular superior con unos en la diagonal es invertible (sobre $\mathbb{Z}$).

Ahora supongamos que el elemento $y = \sum_{H\in[s_G]} y_H e_H \in \prod_{H\in[s_G]} \mathbb{Z}$ satisface las congruencias del teorema. Dado que el Coker(Φ) es finito, existe un número racional r_M, para $M \in [s_G]$, tal que

$$y = \sum_{M\in[s_G]} r_M\Phi(G/M) = \sum_{M\in[s_G]} r_M\left|(G/M)^H\right| e_H.$$

En otras palabras para cada $H \in [s_G]$

$$y_H = \sum_{M\in[s_G]} |(G/M)^H| r_M.$$

Por lo tanto para cada $K \in [s_G]$

$$\sum_{H\in[s_G]} n(K,H)y_H = \sum_{H\in[s_G]} n(K,H) \sum_{M\in[s_G]} \left|(G/M)^H\right| r_M = \sum_{H\in[s_G]}\sum_{M\in[s_G]} n(K,H)m(H,M)r_M$$

pero $|N_G(K)/K|t(K,M) = \sum_{H\in[s_G]} n(K,H)m(H,M)$, sustituimos y entonces

$$\sum_{H\in[s_G]} n(K,H)y_H = |N_G(K)/K| \sum_{M\in[s_G]} t(K,M)r_M$$

Por hipótesis la suma del lado izquierdo es un múltiplo de $|N_G(K)/K|$, por lo tanto existen enteros z_K tal que para todo $K \in [s_G]$

$$\sum_{M\in[s_G]} t(K,M)r_M = z_K$$

Dado que t es invertible sobre $\mathbb{Z}$, tenemos que $r_K \in \mathbb{Z}$ para toda M y así $y \in Im(\Phi)$. ❑

3. Aplicaciones

Tenemos ahora algunas aplicaciones. Sea X un G-conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos

$$\begin{pmatrix} X \\ n \end{pmatrix} = \{Y \subseteq X \mid |Y| = n\}$$

Éste es un G-conjunto con la siguiente acción, dado $g \in G$ $g.Y = gY$. En esta sección y a reserva de señalar lo contrario p será un número primo. Tenemos entonces el siguiente lema:

Lema 2.4. *Sea $U \leq G$, $q \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\left|\begin{pmatrix} G \\ q \end{pmatrix}^U\right| = \begin{cases} 0 & si \ \ |U| \nmid q \\ \begin{pmatrix} [G:U] \\ q/|U| \end{pmatrix} & si \ \ |U| \mid q \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que

$$\left|\begin{pmatrix} G \\ q \end{pmatrix}^U\right| = |\{Y \subseteq G \mid |Y| = q, uY = Y \ \ \forall u \in U\}| = |\{Y \subseteq G \mid |Y| = q, Y = \bigsqcup_{i=1}^{r} Uy_i\}|$$

Notemos que

$$q = |Y| = \left|\bigsqcup_{i=1}^{r} Uy_i\right| = \sum_{i=1}^{r} |Uyi| = \sum_{i=1}^{r} |U| = r|U|$$

pues claramente $U \simeq Uy_i$ para todo $i = 1 \ldots r$, por lo tanto $r = q/|U|$. Considerando ahora la biyección entre

$$\binom{G}{q}^U \to \binom{G/U}{r}$$
$$Y \to \{Uy_1, \ldots Uy_r\}$$

entonces

$$\left|\binom{G}{q}^U\right| = \left|\left\{\overline{Y} \subseteq G/U : \left|\overline{Y}\right| = \frac{q}{|U|}\right\}\right|$$

Observemos que el conjunto de la derecha es vacío si $|U| \nmid q$ y por lo tanto su cardinalidad nula. Si por el contrario no es vacío, su cardinalidad será el número de subconjuntos de G/U posibles de cardinalidad r, es decir las combinaciones de $[G : U]$ tomadas $r = q/|U|$ a la vez. Por lo tanto

$$\left|\binom{G}{q}^U\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } |U| \nmid q \\ \binom{[G:U]}{\frac{q}{|U|}} & \text{si } |U| \mid q \end{cases}$$

❑

Lema 2.5. *Sea $X \in B(G)$, $H \leq G$, $X = \sum_{K \in [s_G]} a_K G/K$ con $a_K \in \mathbb{Z}$. $H \in [s_G]$ es maximal con $\left|X^H\right| \neq 0$ si y sólo si $a_H \neq 0$ y H es maximal con esta propiedad. En este caso $\left|X^H\right| = a_H \left|\frac{N_G(H)}{H}\right|$.*

Demostración. Supongamos $H \in [s_G]$ maximal tal que $\left|X^H\right| \neq 0$, entonces

$$0 \neq \left|X^H\right| = \left|\left(\sum_{K \in [s_G]} a_K G/K\right)^H\right| = \sum_{K \in [s_G]} a_K \left|(G/K)^H\right|$$

pero sabemos que para $K \lneqq H$, $\left|(G/K)^H\right| = 0$, por lo tanto la suma anterior la podemos reescribir como

$$\left|X^H\right| = \sum_{\substack{K \in [s_G] \\ H \leq K}} a_K \left|(G/K)^H\right| \neq 0$$

Por lo tanto, existe $K \geq_G H$ tal que $a_K \neq 0$. Sea $H \leq_G K_0$ maximal con $a_{K_0} \neq 0$, entonces

$$\left|X^{K_0}\right| = \left|\sum_{K \in [s_G]} a_K (G/K)^{K_0}\right| = a_{K_0} \left|(G/K_0)^{K_0}\right| = a_{K_0} \left|\frac{N_G(K_0)}{K_0}\right| \neq 0$$

pero ya que H es maximal con la propiedad de que $\left|X^H\right| \neq 0$, entonces $K_0 \leq H$ y por lo tanto $H = K_0$ con lo cual $\left|X^H\right| = a_H \left|\frac{N_G(H)}{H}\right|$.

Sea ahora H tal que $a_H \neq 0$ y que sea maximal con esta propiedad. Entonces

$$\left|X^H\right| = \sum_{\substack{K\in[s_G]\\ H\leq K}} a_K \left|(G/K)^H\right| = a_H \left|(G/H)^H\right| = a_H \left|\frac{N_G(H)}{H}\right|.$$

Además H es maximal pues si suponemos que existe H_0 maximal tal que $\left|X^{H_0}\right| \neq 0$ y que contiene propiamente a H, entonces

$$0 \neq \left|X^{H_0}\right| = a_{H_0} \left|\frac{N_G(H_0)}{H_0}\right|$$

es decir, $a_{H_0} \neq 0$, contradiciendo la maximalidad de H con esta propiedad. ❏

Lema 2.6. *Sea $C = C_n$ entonces el conjunto*

$$\left\{\binom{C}{d} \mid d \text{ divide a } n\right\}$$

es base de $B(C)$.

Demostración. Sabemos que una base para $B(C)$ es $\{C/C_t \mid t \text{ divide a } n\}$, entonces

$$\binom{C}{d} = \sum_{t|n} a_{C_t} C/C_t$$

Sea $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a_{C_e} \neq 0$ maximal. Por los lemas anteriores

$$0 \neq \left|\binom{C}{d}^{C_e}\right| = \binom{[C:C_e]}{d/|C_e|} = \binom{[C:C_e]}{d/e}$$

entonces $e \mid d$ y por lo tanto $C_e \subseteq C_d$.

Pero por otra parte tenemos que

$$\left|\binom{C}{d}^{C_d}\right| = \binom{[C:C_d]}{d/d} = \binom{n/d}{1} = \frac{n}{d} \neq 0$$

Por lo tanto $e = d$ por maximalidad de e y entonces

$$a_{C_d}\left|\frac{N_C(C_d)}{C_d}\right| = a_{C_d}\left|\frac{C}{C_d}\right| = \left|\binom{C}{d}^{C_d}\right| = \frac{n}{d}$$

entonces $a_{C_d} = 1$ y por lo tanto

$$\binom{C}{d} = C/C_d + \sum_{\substack{t|n\\ t\neq d}} a_{C_t} C/C_t$$

Lo que implica que al considerar la matriz $(a_{C_t})_{t|n}$, tenemos que es triangular superior con unos en la diagonal, por lo tanto $\left\{\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix} \mid d \text{ divide a } n\right\}$ es base. ❑

Tenemos ahora el siguiente teorema de Dress:

Teorema 2.7. *(Dress) Sea G un grupo finito. Dado $H \leq G$, denotemos $C_H = C_{|H|}$ y $C = C_G$, entonces existe*

$$\alpha : B(C) \to B(G)$$

homomorfismo de anillos tal que $\forall H \leq G$ ocurre $\left|(\alpha(X))^H\right| = \left|X^{C_H}\right|$

Demostración. Sea $\alpha : B(C) \to B(G)$ dado en la base por $\alpha\left(\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} G \\ d \end{pmatrix}$ y extendida linealmente. Veamos que es de anillos con unidad. Para esto basta ver que $\left|(\alpha(X))^H\right| = \left|X^{C_H}\right|$ para todo $X \in B(C)$ y todo $H \leq G$. Pues si esto vale tendríamos que.

$$\left|(\alpha(XY))^H\right| = \left|(XY)^{C_H}\right| = \left|X^{C_H}Y^{C_H}\right| = \left|X^{C_H}\right|\left|Y^{C_H}\right| =$$
$$= \left|\alpha(X)^H\right|\left|\alpha(Y)^H\right| = \left|(\alpha(X)\alpha(Y))^H\right| \quad \forall H \leq G$$

Entonces $\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y)$. Y tendríamos también

$$\left|\alpha(1_{B(C)})\right| = \left|1_{B(C)}^{C_H}\right| = 1 = \left|1_{B(G)}\right| \quad \forall H \leq G$$

por lo tanto $\alpha(1_{B(C)}) = 1_{B(G)}$. Ya que $| * |$ es lineal basta ver que lo satistace para la base, es decir,

$$\left|\left(\alpha\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^H\right| = \left|\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H}\right| \quad \forall H \leq G \quad \forall d \mid n$$

Pero

$$\left|\left(\alpha\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^H\right| = \left|\begin{pmatrix} G \\ d \end{pmatrix}^H\right| = \begin{cases} \begin{pmatrix} [G:H] \\ d/|H| \end{pmatrix} & \text{si } \ |H| \mid d \\ 0 & \text{si } \ |H| \nmid d \end{cases}$$

y

$$\left|\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H}\right| = \begin{cases} \begin{pmatrix} [C:C_H] \\ d/C_H \end{pmatrix} & \text{si } \ |C_H| \mid d \\ 0 & \text{si } \ |C_H| \nmid d \end{cases}$$

Pero notemos que $|C_H| = |H|$ y $|C| = |G|$, por lo tanto

$$\left|\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}^{C_H}\right| = \left|\left(\alpha\begin{pmatrix} C \\ d \end{pmatrix}\right)^H\right|$$

□

Corolario 2.8. *Para todo $d \mid |G|$ existe $X_d \in B(G)$ con*

$$\left|X_d^U\right| = \begin{cases} d & si \;\; d \mid [G:U] \\ 0 & si \;\; d \nmid [G:U] \end{cases}$$

Demostración. Consideremos $\alpha : B(C) \to B(G)$ del teorema anterior con $C = C_{|G|}$.

Sea $C/C_{\frac{|G|}{d}} \in B(C)$, entonces consideremos $X_d = \alpha\left(C/C_{\frac{|G|}{d}}\right)$. Entonces por el teorema 2.7

$$\left|X_d^U\right| = \left|\left(C/C_{\frac{|G|}{d}}\right)^{C_U}\right| = \frac{\left|N_C(C_{\frac{|G|}{d}})\right|}{\left|C_{\frac{|G|}{d}}\right|} m(C_U, C_{\frac{|G|}{d}})$$

pero $m(C_U, C_{\frac{|G|}{d}}) = 1$ si $C_U \leq C_{\frac{|G|}{d}}$, y ya que C es cíclico esto ocurre si $|C_U| = |U|$ divide a $|C_{\frac{|G|}{d}}| = \frac{|G|}{d}$. Entonces

$$\left|X_d^U\right| = \begin{cases} \frac{|G|}{|G|/d} & \text{si } |U| \,\Big|\, \frac{|G|}{d} \\ 0 & \text{si } |U| \nmid \frac{|G|}{d} \end{cases} = \begin{cases} d & \text{si } d \,\Big|\, \frac{|G|}{|U|} \\ 0 & \text{si } d \nmid \frac{|G|}{|U|} \end{cases}$$

□

Corolario 2.9. *(Sylow) Si $d \mid |G|$ entonces*

$$\operatorname{mcd}\left(\{[G:H] \mid d \text{ divide a } [G:H], H \leq G\}\right) = d$$

Demostración. Tenemos que

$$X_d = \sum_{H \in [s_G]} a_H G/H$$

Si $a_H \neq 0$, sea $H \leq H_0$ con $a_{H_0} \neq 0$ maximal. Entonces por el lema 2.5, por un lado $0 \neq \left|X_d^{H_0}\right| = a_{H_0}\left|\frac{N_G(H_0)}{H_0}\right|$ y por el corolario 2.8, $0 \neq \left|X_d^{H_0}\right| = d$ y $d|[G:H_0]$ pero ya que $H \leq H_0$ entonces $[G:H_0] \mid [G:H]$ y por lo tanto $d \mid [G:H]$. Con lo cual, $X_d = \sum_{d|[G:H]} a_H G/H$. Y así,

$$d = \left|X_d^1\right| = \left|\sum_{d|[G:H]} a_H G/H\right| = \sum_{d|[G:H]} a_H |G/H| = \sum_{d|[G:H]} a_H [G:H]$$

□

Corolario 2.10. *Sea G un grupo finito. Si $p^a \mid |G|$ entonces existe $P \leq G$ tal que $|P| = p^a$*

Demostración. Tenemos que el orden de G se puede escribir como $|G| = p^a d$ con

$$d = \operatorname{mcd}\left(\{[G:H] \mid d \text{ divide a } [G:H], H \leq G\}\right),$$

pues

$$d \mid [G:H] \Leftrightarrow |H| \left| \frac{|G|}{d} = p^a \right.$$

entonces

$$\frac{|G|}{p^a} = \operatorname{mcd}\{\frac{|G|}{|H|} \mid \ |H| \text{ divide a } p^a\} = \frac{|G|}{\operatorname{mcd}\{|H| \ : \ |H| \mid p^a\}}$$

y por lo tanto

$$p^a = \operatorname{mcd}\{|H| \ : \ |H| \mid p^a\}$$

con lo cual existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^a$ ❑

Corolario 2.11. *(Sylow) Sea G un grupo finito y $p^a \mid |G|$, entonces*

$$|\{H \leq G \mid |H| = p^a\}| \equiv 1 \mod p$$

.

Demostración. Sea $d = \frac{|G|}{p^a}$, entonces

$$X_d = \sum_{d|[G:H]} a_H G/H$$

y por el corolario 2.8

$$d = \sum_{d|[G:H]} a_H [G:H]$$

dividimos ambos lados por d, y ya que cada sumando es divisible por d tiene sentido hacerlo del lado derecho, con lo cual tenemos

$$1 = \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ d|[G:H]}} a_H \frac{[G:H]}{d}$$

pero $\frac{|G|}{p^a} \left| \frac{|G|}{|H|} \right. \Leftrightarrow |H| \mid p^a$ entonces $\frac{|G|/|H|}{|G|/p^a} = \frac{p^a}{|H|}$, con lo cual se tiene que

$$1 = \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ d|[G:H]}} a_H \frac{p^a}{|H|} \equiv \sum_{\substack{H \in [s_G] \\ |H| = p^a \\ a_H \neq 0}} a_H \mod p$$

pero ya que $a_H \neq 0$, entonces $|H| = p^a$ es maximal y por lo tanto

$$a_H = \frac{\left|X_d^H\right|}{[N_G(H):H]} = \frac{d}{[N_G(H):H]} = \frac{[G:H]}{[N_G(H):H]} = [G:N_G(H)]$$

por lo tanto

$$1 \equiv \sum_{\substack{H\in[s_G]\\|H|=p^a}} [G : N_G(H)] = |\{H \leq G \mid |H| = p^a\}| \mod p$$

❏

Corolario 2.12. *Sea G un p-grupo, entonces* $|X^1| \equiv |X^G| \mod p$*, para todo G-conjunto X.*

Demostración. Escribimos a X como combinación lineal de la base

$$X = \sum_{H\in[s_G]} a_H G/H$$

entonces

$$|X^1| = \sum_{H\in[s_G]} a_H[G : H] \equiv a_G = |X^G| \mod p$$

pues dado que G es p-grupo todos los índices de subgrupos propios es una potencia de p y sólo queda a_G. ❏

Corolario 2.13. *Sean G un grupo finito,* $V \leq G$ *p-grupo y* $U \leq G$ *subgrupo con* $p \nmid [G : U]$ *entonces* $V \leq_G U$*. En particular los grupos de Sylow son conjugados.*

Demostración. Consideremos G/U como V-conjunto. Entonces por el lema anterior inmediato

$$\left|(G/U)^V\right| \equiv \left|(G/U)^1\right| = [G : U] \not\equiv 0 \mod p$$

Por lo tanto $V \leq_G U$.

En particular si tomamos $V \leq G$ y $V' \leq G$ p-subgrupos de Sylow. Aplicado a $U = V'$, tenemos que $V \leq_G V'$. Y por otro lado aplicado a $U = V$, $V' \leq_G V$. Por lo tanto, $V =_G V'$. ❏

Lema 2.14. *(Frobenius) Sea X un G-conjunto. Entonces*

$$\sum_{g\in G} |X^g| = |G||G\backslash X|$$

Demostración. Tenemos que

$$\sum_{g\in G} |X^g| = \sum_{\substack{g\in G\\x\in X}} |\{(g, x) \mid gx = x\}| = \sum_{x\in X} |\{g \in G \mid gx = x\}| = \sum_{x\in X} |G_x|$$

$$\sum_{x\in X} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|\mathrm{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x\in[G\backslash X]} 1 = |G||G\backslash X|$$

□

Corolario 2.15. *Sea G finito y $g \in G$. Entonces* $\sum_{g\in G} \left|X^{\langle g\rangle}\right| \equiv 0$ *mod* $|G|$ *para todo* $X \in B(G)$.

Demostración. Es inmediata del lema anterior. □

Corolario 2.16. *(Frobenius) Para todo* $m \mid |G|$ *se tiene que* $|\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0$ *mod* m

Demostración. Sea $X = X_{|G|/m} \in B(G)$, por el corolario anterior

$$\sum_{g\in G} \left|X^{\langle g\rangle}\right| \equiv 0 \mod |G|$$

Pero recordemos que

$$\left|X^{\langle g\rangle}\right| = \begin{cases} \frac{|G|}{m} & \text{si } \frac{|G|}{m} \,\Big|\, \frac{|G|}{|\langle g\rangle|} \\ 0 & \text{si } \frac{|G|}{m} \nmid \frac{|G|}{|\langle g\rangle|} \end{cases}$$

pero $\frac{|G|}{m} \,\Big|\, \frac{|G|}{|\langle g\rangle|}$ si y sólo si $|\langle g\rangle| \mid m$, con lo cual

$$\sum_{g\in G} \left|X^{\langle g\rangle}\right| = \sum_{\substack{g\in G\\ g^m=1}} \frac{|G|}{m} = \frac{|G|}{m} |\{g \in G \mid g^m = 1\}|$$

por lo tanto $|\{g \in G \mid g^m = 1\}| \equiv 0 \mod m$ □

4. Idempotentes

La aplicación Φ de la sección previa es una aplicación inyectiva entre $\mathbb{Z}$-módulos libres que tienen el mismo rango. Por lo tanto cuando tensorizamos con $\mathbb{Q}$ resulta un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras.

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G) \xrightarrow{\simeq} \prod_{H\in[s_G]} \mathbb{Q}$$

y en particular el álgebra $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ es semi-simple, esto es que es suma de simples. Ésta se denotará por $\mathbb{Q}B(G)$. La componente $\mathbb{Q}\phi_H^G$ de $\mathbb{Q}\Phi$ continuará siendo escrita $X \mapsto \left|X^H\right|$, así que en general $\left|X^H\right|$ será un número racional para $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Más generalmente, todas las notaciones definidas para $B(G)$ serán extendidas sin cambio a $\mathbb{Q}B(G)$.

La imagen inversa por $\mathbb{Q}\Phi$ de los elementos indexados por H de la $\mathbb{Q}$-base canónica de $\prod_{H\in[s_G]} \mathbb{Q}$ es denotada por e_H^G. Si H' es conjugado de H en G, también se establece que $e_{H'}^G = e_H^G$ pues al ser conjugados $\left|X^H\right| = \left|X^{H'}\right|$. Con esta notación para cualquier par de subgrupos H y K de G, se tiene

$$\left|(e_H^G)^K\right| = \begin{cases} 1 & \text{si } H =_G K. \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

El conjunto de elementos e_H^G, para $H \in [s_G]$, es el conjunto de idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}B(G)$. Estos idempotentes han sido calculados explícitamente por Gluck ([**7**]), y más tarde independientemente por Yoshida ([**14**]). Esto se puede hacer usando el siguiente lema:

Lema 2.17. *Sea G un grupo finito*

1. *Sea H un subgrupo de G. Entonces para cualquier* $X \in \mathbb{Q}B(G)$
$$X.e_H^G = |X^H|e_H^G.$$
Inversamente, si $Y \in \mathbb{Q}B(G)$ *es tal que* $X.Y = |X^H|Y$ *para cualquier* $X \in \mathbb{Q}B(G)$*, entonces* $Y \in \mathbb{Q}e_H^G$.
2. *Sea H un subgrupo propio de G. Entonces* $\mathrm{Res}_H^G e_G^G = 0$*. Inversamente, si* $Y \in \mathbb{Q}B(G)$ *es tal que* $\mathrm{Res}_H^G Y = 0$ *para cualquier subgrupo propio H de G, entonces* $Y \in \mathbb{Q}e_G^G$.
3. *Sea H un subgrupo de G, y sea* $y \in G$*. Entonces*
$$\mathrm{Res}_H^G e_H^G = e_H^H, \quad e_H^G = \frac{1}{[N_G(H):H]}\mathrm{Ind}_H^G e_H^H, \quad {}^y e_H^H = e_{{}^yH}^{{}^yH}.$$

Demostración.

1. Dado que e_H^G es la preimagen de una base bajo un isomorfismo de $\mathbb{Q}-$álgebras, entonces el conjunto de estos elementos, para $H \in [s_G]$, es una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}B(G)$, por lo tanto para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$, existen racionales r_H, para $H \in [s_G]$, tal que
$$X = \sum_{H\in[s_G]} r_H e_H^G.$$
Tomamos puntos fijos y cardinalidad en ambos lados para un subgrupo $K \in [s_G]$ tenemos que
$$\left|X^K\right| = \left|\left(\sum_{H\in[s_G]} r_H e_H^G\right)^K\right| = \sum_{H\in[s_G]} r_H \left|(e_H^G)^K\right|$$
pero recordamos que si $H \neq_G K$, entonces $\left(e_H^G\right)^K = 0$ y considerando que $e_H^G = e_K^G$ si $H =_G K$ se tiene que $\left|X^K\right| = r_H\left|(e_H^G)^K\right| = r_K$. Tendremos entonces que para todo $K \in [s_G]$
$$X.e_K^G = \left(\sum_{H\in[s_G]} |X^H|e_H^G\right).e_H^G = \sum_{H\in[s_G]} |X^H|e_H^G.e_K^G = |X^K|e_K^G$$
pues estos elementos son idempotentes.

Sea ahora Y un elemento de $\mathbb{Q}B(G)$ que verifica que $X.Y = |X^H|Y$ para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Entonces en particular, $e_K^G.Y = |(e_K^G)^H|Y = 0$ si $K \neq_G H$, por lo tanto

$$Y.Y = \left(\sum_{H\in[s_G]} |Y^H| e_H^G\right).Y = \sum_{H\in[s_G]} |Y^H| e_H^G.Y = |Y^K| e_K^G.Y$$

es decir, $Y = |Y^H|e_H^G$, con lo cual es un múltiplo racional de e_H^G.

2. Sea H un subgrupo propio de G. Entonces para cualquier subgrupo K de H,

$$\left|(\mathrm{Res}_H^G e_G^G)^K\right| = \left|\left(e_G^G\right)^K\right| = 0$$

dado que $|(\mathrm{Res}_H^G X)^K| = |X^K|$ para cualquier G-conjunto X, y por lo tanto para cualquier $X \in \mathbb{Q}B(G)$. Lo cual nos dice que la restricción de e_G^G a cualquier subgrupo propio de G es cero.

Inversamente, si la restricción de un elemento Y a cualquier subgrupo H de G es cero, entonces también $(\mathrm{Res}_H^G Y)^H = 0$ y así $0 = |(\mathrm{Res}_H^G Y)^H| = |Y^H|$ para tales subgrupos propios, entonces $|Y^G| \neq 0$ y por 1. $Y = |Y^G|e_G^G$, lo cual queríamos probar.

3. Si K es un subgrupo de H, entonces

$$\left|(\mathrm{Res}_H^G e_H^G)^K\right| = \left|\left(e_H^G\right)^K\right| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad K = H. \\ 0 & \text{si} \quad K \neq H. \end{cases}$$

Pero notemos que

$$|(e_H^H)^K| = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad K = H. \\ 0 & \text{si} \quad K \neq H. \end{cases}$$

Con lo cual $\left|(\mathrm{Res}_H^G e_H^G)^K\right| = \left|\left(e_H^H\right)^K\right|$ para cualquier subgrupo K de H, y por el teorema 1.4 $\mathrm{Res}_H^G e_H^G = e_H^H$.

Considerando ahora el siguiente elemento $\mathrm{Ind}_H^G e_H^H$. Si X es un elemento de $\mathbb{Q}B(G)$, entonces por la identidad de Frobenius de la proposición 1.2

$$X.\mathrm{Ind}_H^G e_H^H = \mathrm{Ind}_H^G \left((\mathrm{Res}_H^G X).e_H^H\right) =$$

que por 1. se sigue

$$= \mathrm{Ind}_H^G \left(\left|(\mathrm{Res}_H^G X)^H\right| e_H^H\right) = \mathrm{Ind}_H^G \left(\left|X^H\right| e_H^H\right) = \left|X^H\right| \mathrm{Ind}_H^G e_H^H.$$

Entonces por 1. se sigue que existe un número racional r_H^G tal que

$$\mathrm{Ind}_H^G e_H^H = r_H^G e_H^G.$$

Por la fórmula de Mackey de la proposición 1.2, la restricción del lado izquierdo a H es igual a

$$\mathrm{Res}^G_H \mathrm{Ind}^G_H e^H_H = \sum_{x \in [H \backslash G/H]} \mathrm{Ind}^H_{H \cap {}^x H} {}^x \mathrm{Res}^H_{H^x \cap H} e^H_H = \sum_{x \in [N_G(H)/H]} ({}^x e^H_H)$$

esto porque la restricción e inducción de e^H_H a $H^x \cap H$ y ${}^x e^H_H$ a $H \cap^x H$, respectivamente es cero si $H^x \neq H$. Más aun si $y \in G$, entonces para cualquier subgrupo K de ${}^y H$ tenemos que dado un X en $B(G)$, tenemos el siguiente isomorfismo dado por

$$({}^y X)^K \to X^{K^y}$$

$${}^y z \to z$$

con lo cual

$$\left|\left({}^y e^H_H\right)^K\right| = \left|\left(e^H_H\right)^{K^y}\right| = \begin{cases} 1 & \text{si } K^y = H, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } K =^y H, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} = \left|\left(e^{{}^y H}_{{}^y H}\right)^K\right|$$

y por el teorema 1.4 entonces ${}^y e^H_H = e^{{}^y H}_{{}^y H}$.

Finalmente de la igualdad al aplicar la fórmula de Mackey tenemos que

$$\mathrm{Res}^G_H \mathrm{Ind}^G_H e^H_H = |N_G(H)/H| e^H_H$$

y además

$$\mathrm{Res}^G_H \mathrm{Ind}^G_H e^H_H = \mathrm{Res}^G_H r^G_H e^G_H = r^G_H \mathrm{Res}^G_H e^G_H = r^G_H e^H_H$$

de estas dos igualdades concluimos entonces que $r^G_H = |N_G(H)/H|$ y por lo tanto

$$e^G_H = \frac{1}{|N_G(H)/H|} \mathrm{Ind}^G_H e^H_H$$

como se quería mostrar.

❑

Teorema 2.18. *(Gluck). Sea G un grupo finito. Si H es un subgrupo de G, entonces*

$$e^G_H = \frac{1}{[N_G(H) : H]} \sum_{K \subseteq H} |K| \mu(K, H) G/K,$$

donde μ es la función de Möbius de los copos de subgrupos de G, y G/K es el elemento $1 \otimes G/K \in \mathbb{Q}B(G)$.

Demostración. Escribimos en términos de la base a e^H_H, entonces

$$e^H_H = \sum_{K \subseteq H} r(K, H) H/K,$$

con $r(K,H)$ un número racional. Ya que por el lema anterior ${}^{y}e_H^H = e_{{}^yH}^{{}^yH}$ para $y \in G$, entonces

$$ {}^{y}e_H^H = \sum_{K\subseteq H} r(K,H)^{y}(H/K) = \sum_{{}^yK\subseteq {}^yH} r({}^yK, {}^yH)^{y}H/{}^{y}K = e_{{}^yH}^{{}^yH} $$

y podemos suponer $r({}^yK, {}^yH) = r(K,H)$ para $y \in G$. Tomando inducción de H a G, por el lema anterior nos dice que

$$ e_H^G = \frac{1}{[N_G(H):H]}\mathrm{Ind}_H^G e_H^H = \frac{1}{[N_G(H):H]}\mathrm{Ind}_H^G\left(\sum_{K\subseteq H} r(K,H)H/K\right) = $$

$$ = \frac{1}{[N_G(H):H]}\sum_{K\subseteq H} r(K,H)\mathrm{Ind}_H^G H/K = \frac{1}{[N_G(H):H]}\sum_{K\subseteq H} r(K,H)G/K \tag{4.1} $$

Si ahora sumamos los elementos e_H^G, para $H \in [s_G]$, tenemos que es igual a $\bullet = G/G$. Sin embargo si sumamos sobre todos los subgrupos H de G en vez de tomar uno por clase, nos da que

$$ G/G = \sum_{H\in[s_G]} e_H^G = \sum_{H\subseteq G}\frac{|N_G(H)|}{|G|}\frac{1}{[N_G(H):H]}\sum_{K\subseteq H} r(K,H)G/K = \sum_{H\subseteq G}\frac{|H|}{|G|}\sum_{K\subseteq H} r(K,H)G/K $$

El coeficiente de G/K del lado derecho es igual al coeficiente de G/K', para cualquier conjugado K' de K en G, y es igual a

$$ \sum_{K\subseteq H\subseteq G}\frac{|H|}{|G|}r(K,H). $$

Pero por el lado izquierdo tenemos que dicho coeficiente debe ser 0 si $K \neq G$ y 1 si $K = G$. Considerando $r'(K,H) = \frac{|H|}{|K|}r(K,H)$ para $K \subseteq H$, se tiene que

$$ \sum_{K\subseteq H\subseteq G}\frac{|H|}{|G|}r(K,H) = \sum_{K\subseteq H\subseteq G}\frac{|K|}{|G|}\frac{|H|}{|K|}r(K,H) = \frac{|K|}{|G|}\sum_{K\subseteq H\subseteq G}\frac{|H|}{|K|}r(K,H) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad K = G \\ 0 & \text{si} \quad K \neq G \end{cases} $$

entonces

$$ \sum_{K\subseteq H\subseteq G} r'(K,H) = \begin{cases} [G:K] = 1 & \text{si} \quad K = G, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} $$

Con lo cual $r'(K,H)$ es igual a $\mu(K,H)$, donde μ es la función de Möbius de los copos de los subgrupos de G. Por lo tanto $\frac{|H|}{|K|}r(K,H) = \mu(K,H)$ y entonces $r(K,H) = \frac{|K|}{|H|}\mu(K,H)$ y de la ecuación para e_H^G que obtuvimos arriba obetenemos

$$ e_H^G = \frac{1}{[N_G(H):H]}\sum_{K\subseteq H}\frac{|K|}{|H|}\mu(K,H)G/K = \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{K\subseteq H}|K|\mu(K,H)G/K $$

como queríamos probar. ❏

La fórmula para idempotentes primitivos en $\mathbb{Q}B(G)$ permite una pregunta natural: ¿cuándo estos idempotentes están de hecho en $B(G)$? Más general, si π es un conjunto de números primos, denotemos $\mathbb{Z}_{(\pi)}$ al subanillo de $\mathbb{Q}$ de fracciones irreducibles con denominador primo relativo a todos los elementos de π. En otras palabras $\mathbb{Z}_{(\pi)}$ es la localización de $\mathbb{Z}$ con respecto al conjunto $\mathbb{Z} - \cup_{p\in\pi} p\mathbb{Z}$. Se puede preguntar cuando los idempotentes de $\mathbb{Q}B(G)$ están de hecho en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$. La respuesta es como sigue:

Teorema 2.19. *(Dress) Sea G un grupo finito, y π un conjunto de primos. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G, cerrada bajo conjugación en G. denotemos $[\mathcal{F}]$ el conjunto $\mathcal{F} \cap [s_G]$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El elemento idempotente $\displaystyle\sum_{H\in[\mathcal{F}]} e_H^G$ está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.*
2. *Sean H y K cualquier par de subgrupos de G tal que H es un subgrupo normal de K y el cociente K/H es cíclico de orden primo $p \in \pi$. Entonces $H \in \mathcal{F}$ si y sólo si $K \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que 1. implica 2., es decir que el idempotente $e = \sum_{H\in[\mathcal{F}]} e_H^G$ está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$. Esto es equivalente a la existencia de un entero m que sea primo relativo a todos los elementos de π, tal que $me \in B(G)$. Si ahora H y K son subgrupos de G tal que $H \trianglelefteq K$ y K/H es cíclico de orden primo p, entonces para cualquier elemento X de $B(G)$ se tiene que $\left|X^K\right| = \left|\left(X^H\right)^{K/H}\right| \equiv \left|X^H\right| \bmod p$ y así

$$|me^H| = m|e^H| \equiv |me^K| = m|e^K| \mod p$$

pero

$$m|e^H| = m\left|\left(\sum_{H'\in[\mathcal{F}]} e_H^G\right)^H\right| = m\sum_{H'\in[\mathcal{F}]}\left|\left(e_H^G\right)^H\right| = \begin{cases} m & \text{si } H \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{de otra manera}\end{cases}$$

Por lo tanto, si $p \in \pi$ y ya que $m \not\equiv 0$ tenemos que $H \in \mathcal{F}$ si y sólo si $K \in \mathcal{F}$.

Inversamente, supongamos cierto 2. Consideremos π un conjunto de primos y sea $H \leq G$ π-perfecto, es decir, $O^\pi(H) = H$. Considerando que

$$\begin{array}{ccc} B(G) & \hookrightarrow & \prod \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_{(\pi)}B(G) & \hookrightarrow & \prod \mathbb{Z}_{(\pi)} \end{array}$$

sea $e = \displaystyle\sum_{\substack{O^\pi(L)=_G H \\ L\in[s_G]}} e_L^G$ y $m = |G|_{\pi'}$, veamos entonces que $me \in B(G)$ y ya que m es unidad en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$ entonces $e \in \mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$. Tenemos entonces

$$\sum_{aT\in N_G(T)/T} |me^{\langle a,T\rangle}| = m \sum_{aT\in N_G(T)/T} |e^{\langle a,T\rangle}| = m|\{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(\langle a, T\rangle) =_G H\}|$$

Sea $A = \{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(\langle a, T\rangle) =_G H\}$. Si $A = \emptyset$ se tiene el resultado. Supongamos entonces que existe a_0 tal que $O^\pi(\langle a_0, T\rangle) =_G H$.

Notemos que si $a_0 = a_{\pi'}a_\pi$ entonces $O^\pi(\langle a_0, T\rangle) = O^\pi(\langle a_{\pi'}, T\rangle)$, ya que se tiene que por ser $\frac{\langle a_0,T\rangle}{T}$ cíclico entonces cualquier subgrupo es normal y entonces

$$\frac{\langle a_{\pi'}, T\rangle}{T} \trianglelefteq \frac{\langle a_0, T\rangle}{T}$$

y así $\langle a_{\pi'}, T\rangle \trianglelefteq \langle a_0, T\rangle$ y además $\left|\frac{\langle a_0,T\rangle}{\langle a_{\pi'},T\rangle}\right|$ es un π-elemento, por lo tanto $O^\pi(\langle a_0, T\rangle) \subseteq \langle a_{\pi'}, T\rangle$. Pero

$$O^\pi(\langle a_0, T\rangle) \subseteq O^\pi(\langle a_{\pi'}, T\rangle) \subseteq O^\pi(\langle a_0, T\rangle).$$

Es decir $O^\pi(\langle a_0, T\rangle) = O^\pi(\langle a_{\pi'}, T\rangle)$. Así que sin pérdida de generalidad podemos suponer a_0 un π'-elemento. Ahora bien, también tenemos que si $O^\pi(\langle a, T\rangle) = O^\pi(\langle a_0, T\rangle)$ con aT un π'-elemento entonces $\langle a, T\rangle = \langle a_0, T\rangle$. Esto pues ya que aT es un π'-elemento, entonces

$$O^\pi\left(\frac{\langle a, T\rangle}{T}\right) = \frac{\langle a, T\rangle}{T}$$

pero

$$O^\pi\left(\frac{\langle a, T\rangle}{T}\right) = \frac{O^\pi(\langle a, T\rangle)T}{T} = \frac{O^\pi(\langle a_0, T\rangle)T}{T} = O^\pi\left(\frac{\langle a_0, T\rangle}{T}\right) = \frac{\langle a_0, T\rangle}{T}$$

por ser también a_0 un π'-elemento. Por lo tanto

$$\langle a, T\rangle = O^\pi(\langle a, T\rangle)T = O^\pi(\langle a, T\rangle)T = \langle a_0, T\rangle.$$

Consideremos entonces $B = \{aT \in N_G(T)/T \mid O^\pi(a_{\pi'}, T) =_G H\}$. Por los argumentos anteriores tenemos que $|A| = |B|$. Pero de igual forma tenemos que

$$|B| = \left| \bigsqcup_{\substack{a_0T\in\left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \\ O^\pi(\langle a_0,T\rangle)=_G H}} \{a_0bT \in N_G(T)/T \mid bT \text{es un } \pi-\text{elemento}\} \right|$$

pero a su vez

$$= \left| \bigsqcup_{\substack{a_0T\in\left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \\ O^\pi(\langle a_0,T\rangle)=_G H}} \{bT \in N_G(T)/T \mid bT \text{es un } \pi-\text{elemento}\} \right|$$

$$= \left|\frac{N_G(T)}{T}\right|_\pi \left|\{a_0 \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \mid O^\pi(\langle a_0, T\rangle) =_G H\}\right|$$

y entonces si $r = \left|\{a_0 \in \left(\frac{N_G(T)}{T}\right)_{\pi'} \mid O^\pi(\langle a_0, T\rangle) =_G H\}\right|$ se tiene

$$m|A| = |G|_{\pi'} \left|\frac{N_G(T)}{T}\right|_\pi r$$

pero $\left|\frac{N_G(T)}{T}\right|_{\pi'}$ divide a $|G|_{\pi'}$ y por lo tanto

$$m|A| = t\left|\frac{N_G(T)}{T}\right|_{\pi'}\left|\frac{N_G(T)}{T}\right|_\pi r = t\left|\frac{N_G(T)}{T}\right| r \equiv 0 \mod \left|\frac{N_G(T)}{T}\right|$$

❏

Corolario 2.20. *Sea G un grupo finito y π un conjunto de primos. Si J es un subgrupo π-perfecto de G, consideremos*

$$f_J^G = \sum_{\substack{H\in[s_G]\\ O^\pi(H)=_G J}} e_H^G.$$

Entonces el conjunto de elementos f_J^G, para elementos J π-perfectos de $[s_G]$, es el conjunto de idempotentes primitivos de $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

En particular, el conjunto de idempotentes primitivos de $B(G)$ está en correspondencia uno a uno con el conjunto de clases de conjugación de subgrupos perfectos de G.

El grupo G es soluble si y sólo si G/G es un idempotente primitivo de $B(G)$.

Demostración. Sea J un subrupo de G π-perfecto y sea

$$\mathcal{F} = \{H \subseteq G | O^\pi(H) =_G J\}.$$

Sea $x \in G$, entonces $O^\pi(H^x) = O^\pi(H)^x$, sea $y \in G$ tal que $O^\pi(H)^y = J$, entonces sea $z = x^{-1}y$, tendremos que $O^\pi(H^x)^z = (O^\pi(H)^x)^z = (O^\pi(H)^x)^{x^{-1}y} = O^\pi(H)^y = J$, por lo tanto $O^\pi(H^x) =_G J$ y entonces $\mathcal{F}$ es cerrada bajo conjugación y satisface la condición 2. del teorema 2.19. Esto pues dados H y K subgrupos de G tal que H sea subgrupo normal de K y el cociente sea un p-grupo con $p \in \pi$, consideremos que $H \in \mathcal{F}$, entonces $O^\pi(H) =_G J$. Veamos que $O^\pi(H) = O^\pi(K)$. Dado que $H \leq K$, entonces $O^\pi(H) \leq O^\pi(K)$. Pero ya que $|K/H| = p \in \pi$ entonces $O^\pi(K) \subseteq H$, por lo tanto $O^\pi(K) \subseteq O^\pi(H) \subseteq O^\pi(K)$. Y por lo tanto $K \in \mathcal{F}$. Por lo tanto f_J^G está en $\mathbb{Z}_{(\pi)}B(G)$.

Para probar que es primitivo, es suficiente probar que $\mathcal{F}$ no tiene subfamilias no vacías propias que satisfagan la condición 2. del teorema 2.19. Supongamos que $\mathcal{F}'$ es una tal subfamilia no vacía de $\mathcal{F}$. Notemos que si $H \in \mathcal{F}$ entonces $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$ pues al considerar los factores de composición de $H/O^\pi(H)$, estos son cíclicos de orden $p \in \pi$ y de la forma $L/O^\pi(H)$ con $L \triangleleft H$ y por el teorema de correspondencia se preservan los índices de los cociente por lo tanto aplicando la condición 2. inductivamente tenemos que $O^\pi(H) \in \mathcal{F}$. Así pues esto aplica también para $\mathcal{F}'$, entonces sea $H' \in$

$\mathcal{F}'$ entonces $O^{\pi}(H') \in \mathcal{F}'$ y ya que $\mathcal{F}'$ es cerrada bajo conjugación entonces $J \in \mathcal{F}'$. Consideremos ahora $H \in \mathcal{F}$ entonces por el mismo argumento $O^{\pi}(H) =_G J \in \mathcal{F}$. Pero entonces $O^{\pi}(H) \in \mathcal{F}'$ y aplicando 2. tenemos que $H \in \mathcal{F}'$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ y el idempotente f_J^G es primitivo.

La última afirmación del corolario es el caso de considerar π el conjunto de todos los números primos. ❑

5. Espectro primo

El espectro primo de $B(G)$ ha sido determinado por Dress ([**6**]):

Teorema 2.21. *(Dress). Sea G un grupo finito, y denote p un número primo o cero, y H un subgrupo de G. Sea*

$$I_{H,p}(G) = \{X \in B(G) \mid \left|X^H\right| \equiv 0 \mod p\}.$$

Entonces:

1. *El conjunto $I_{H,p}(G)$ es un ideal primo de $B(G)$.*
2. *Si I es un ideal primo de $B(G)$, entonces existe un subgrupo de G y un entero p igual a cero o a un número primo, tal que $I = I_{H,p}(G)$.*
3. *Si H y K son subgrupos de G, y si p y q son números primos o cero, entonces $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,q}(G)$ si y sólo si se da una de las siguientes afirmaciones:*
   a) Se tiene que $p = q = 0$, y entonces los subgrupos H y K son conjugados en G. En este caso mas aún $I_{H,p}(G) = I_{K,q}(G)$.
   b) Se tiene que $p = 0$ y $q > 0$, entonces los grupos $O^q(H)$ y $O^q(K)$ son conjugados en G. En este caso más aún $I_H(G) \neq I_{K,q}(G)$.
   c) Se tiene $p = q > 0$, y entonces los subgrupos $O^p(H)$ y $O^p(K)$ son conjugados en G. Más aún $I_{H,p}(G) = I_{K,q}(G)$.

Demostración.

1. Consideremos el homomorfismo de anillos φ de $B(G)$ a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ que toma a X y lo lleva a la clase $\left|X^H\right|$. Notemos que $I_{H,p}(G)$ es el kernel de φ por lo tanto es un ideal de $B(G)$. Ahora, dado que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un dominio entero entonces $I_{H,p}(G)$ es primo.
2. Inversamente, si I es un ideal primo de $B(G)$, entonces el anillo $R = B(G)/I$ es un dominio entero. Sea $\pi : B(G) \to R$ la proyección canónica. Dado que $R \neq \{0\}$, existe un subgrupo H de G minimal tal que $\pi(G/H) \neq 0$. Tomemos entonces la imagen bajo π de la equación 1.1

y usando la mininalidad de H nos da

$$\pi(G/H)\pi(G/K) = \pi\left(\sum_{x\in[H\backslash G/K]} G/(H\cap^x K)\right) = \sum_{x\in[H\backslash G/K]} \pi\left(G/(H\cap^x K)\right) = \sum_{\substack{x\in[G/K]\\ H^x\subseteq K}} \pi(G/H)$$

pues $HxK = xK$ si $x^{-1}HxK = K$ es decir, $H^x \subseteq K$. Dado que R es un dominio entero y $\pi(G/H) \neq 0$ tenemos que despejando $\pi(G/K)$

$$\pi(G/K) = \pi(G/H)^{-1} \sum_{\substack{x\in[G/K]\\ H^x\subseteq K}} \pi(G/H) = \sum_{\substack{X\in[G/K]\\ H^x\subseteq K}} \pi(G/H)^{-1}\pi(G/H) =$$

$$= \sum_{\substack{x\in[G/K]\\ H^x\subseteq K}} 1_R = |\{x \in [G/K] \mid H^x \subseteq K\}|\, 1_R = \left|(G/K)^H\right| 1_R$$

Y así por linealidad

$$\pi(X) = \pi(\sum_{K\in[s_G]} G/K) = \sum_{K\in[s_G]} \left|(G/K)^H\right| 1_R = |X^H| 1_R$$

para cualquier $X \in B(G)$. Denote p la característica de R. Entonces p es igual a cero o un número primo. Por definición, el kernel de π es I pero también es igual a $I_{H,p}(G)$.

3. Supongamos primero que H y K son conjugados en G. Entonces para cualquier $X \in B(G)$, tenemos que $\left|X^H\right| = \left|X^K\right|$. Si $p = 0$ denotemos $I_{H,p} = I_H$. Así en particular, $I_H(G) = \{X \in B(G) | \left|X^H\right| = 0\} = \{X \in B(G) | \left|X^K\right| = 0\} = I_K(G)$.

   Si ahora p es un número primo, y si X es un G-conjunto finito, tenemos que

$$X^H = \left(X^{O^p(H)}\right)^{H/O^p(H)}$$

   y ya que $H/O^p(H)$ es un p-grupo, entonces

$$\left|X^H\right| = \left|\left(X^{O^p(H)}\right)^{H/O^p(H)}\right| \equiv \left|X^{O^p(H)}\right| \mod p$$

   para cualquier $X \in B(G)$. En particular $I_H(G) \subseteq I_{O^p(H),p}(G)$ pues dado $X \in I_H(G)$, entonces $\left|X^H\right| = 0$ y dado que $O^p(H) \subseteq H$, entonces $\left|X^{O^p(H)}\right| = 0$ y así $\left|X^{O^p(H)}\right| \equiv 0$ mod p, por lo tanto, $I_H(G) \subseteq I_{O^p(H),p}(G)$. Además $I_{H,p}(G) = I_{K,p}(G)$ si $O^p(H)$ y $O^p(K)$ son conjugados en G, pues por lo anterior

$$I_{H,p}(G) = I_{O^p(H),p}(G) = I_{O^p(K),p}(G) = I_{K,p}(G).$$

   Por lo tanto $I_{H,p}(G) = I_{O^p(H),p}(G)$ para cualquier $H \subseteq G$.

   Inversamente , supongamos que $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,q}(G)$. Entonces existe un homomorfismo de anillos sobreyectivo de $B(G)/I_{H,p}(G)$ a $B(G)/I_{K,q}(G)$. Ya que p es la característica del anillo $B(G)/I_{H,p}(G)$, existen tres posibles casos:

a) Primero si $p = q = 0$. Entonces la inclusión $I_H(G) \subset I_K(G)$ significa que si $X \in B(G)$ es tal que $\left|X^H\right| = 0$, entonces $\left|X^K\right| = 0$. Por el teorema 2.18, $X = |N_G(K)|e_K^G$ está en $B(G)$ pues es una combinación lineal la base G/H y entonces

$$\left|X^K\right| = \left|\left(|N_G(K)|e_K^G\right)^K\right| = |N_G(K)|\left|\left(e_K^G\right)^K\right| = |N_G(K)| \neq 0$$

Por lo tanto $|X^H| \neq 0$ y así $|X^H| = |N_G(K)|\left|\left(e_K^G\right)^H\right| \neq 0$, es decir, H es conjugado a K en G. Finalmente en este caso por ser conjugados

$$I_H(G) = \{X \in B(G) \mid \left|X^H\right| = 0\} = \{X \in B(G) \mid \left|X^K\right| = 0\} = I_K(G).$$

b) El siguiente caso posible es $p = 0$ y $q > 0$. En este caso si $X \in B(G)$ es tal que $|X^H| = 0$, entonces dado que el homomorfismo es de anillos se tiene que $|X^K| \equiv 0 \mod q$. Consideremos ahora el idempotente

$$f_{O^q(K)}^G = \sum_{\substack{L \in [s_G] \\ O^q(L) =_G O^q(K)}} e_L^G.$$

Por el corolario 2.20, existe un entero m primo relativo a q tal que $X = mf_{O^q(K)}^G$ está en $B(G)$. Ahora bien

$$\left|X^K\right| = \left|(mf_{O^q(K)}^G)^K\right| = m\left|\left(\sum_{\substack{L \in [s_G] \\ O^q(L) =_G O^q(K)}} e_L^G\right)^K\right| = m \not\equiv 0 \mod q$$

Por lo tanto $|X^H| \neq 0$ lo que nos dice que $O^q(H) =_G O^q(K)$. La inclusión $I_H(G) \subseteq I_{K,q}(G)$ es propia ya que los cocientes que usamos en el homomorfismo tienen característica 0 y q respectivamtente.

c) El último caso es $p = q > 0$. Dado que ya vimos que $I_H(G) \subseteq I_{H,p}(G)$ y suponemos que $I_{H,p}(G) \subseteq I_{K,p}(G)$ entonces $I_H(G) \subseteq I_{K,p}(G)$. Y por un argumento como en el caso anterior tenemos que $O^p(H) =_G O^p(K)$. Y por lo tanto en este caso $I_{H,p}(G) = I_{K,p}(G)$.

❏

Capítulo 3

Invariantes

El anillo de Burnside es un análogo para G-conjuntos finitos del anillo $\mathbb{Z}$ para conjuntos finitos (y $\mathbb{Z}$ es de hecho isomorfo al anillo de Burnside del grupo trivial). A cada conjunto finito es asociada su cardinalidad. Similarmente, se pueden ligar varios elementos en el anillo de Burnside, llamados *invariantes*, a G-conjuntos estructurados, tales como G-copos o G-complejos simpliciales.

Esta sección es una exposición algebraica auto-contenida de las propiedades de estos invariantes. Las definiciones y métodos originales de Quillen ([**8**] [**9**]) son usadas lo largo de la sección, evitando sin embargo la parte topológica de este material. Así por ejemplo no se hará uso de la realización geométrica de un copo y se enfatizará en copos acíclicos en vez de los contraíbles.

En otras palabras, para definir y establecer propiedades de los invariantes ligados a G-copos finitos en el anillo de Burnside, se puede olvidar el grupo fundamental de estos copos y considerar sólo grupos de homología.

1. Homología de copos

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado (abreviado copo). Como es usual, si x, x' están en X, la notación $x < x'$ significa $x \leq x'$ y $x \neq x'$. La notación $[x, x']_X$ (respectivamente $[x, x'[_X$, $]x, x']_X$, $]x, x'[_X$) significa el conjunto de elementos $z \in X$ con $x \leq z \leq x'$ (respectivamente $x \leq z < x'$, $x < z \leq x'$, $x < z < x'$). La notación $[x, .[_X$ (respectivamente $]x, .[_X$, $]., x]_X$, $]., x[_X$) significa el conjunto de elementos $z \in X$ con $x \leq z$ (respectivamente $x < z$, $z \leq x$, $z < x$).

Si $n \in \mathbb{N}$, denotemos $Sd_n(X)$ como el conjunto de cadenas $x_0 < \cdots < x_n$ de elementos de X de cardinalidad n+1. El complejo de cadenas $C_*(X, \mathbb{Z})$ es el complejo de $\mathbb{Z}$-módulos definido como sigue: para $n \in \mathbb{N}$, el módulo $C_n(X, \mathbb{Z})$ es el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $Sd_n(X)$. El diferencial $d_n : C_n(X, \mathbb{Z}) \to C_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ está dado por

$$d_n(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n).$$

donde $x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$ denota la cadena $(x_0, \ldots, x_n) - \{x_i\}$. Verifiquemos que $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Sea $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in C_{n+1}(X, \mathbb{Z})$ entonces

$$d_n \circ d_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) = d_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_n(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{0=j<i}^{n}(-1)^i(-1)^j(x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{i\leq j}^{n}(-1)^i(-1)^j(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_{j+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

El objetivo de separar la suma en éstas dos es ver que para cada término de la primer suma hay uno en la segunda, de signo contrario y por lo tanto se eliminan. Así que sea

$$(-1)^i(-1)^j(x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

un sumando de la primera, supongamos que se elimina con un elemento

$$(-1)^k(-1)^l(x_0 \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_{l+1}, \ldots, x_{n+1})$$

entonces $j = k$ y $i = l + 1$, con lo cual $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq l \leq n$, por lo tanto este último término pertenece a la segunda parte de la suma y el signo es cada uno respectivamente es $(-1)^{j+i}$ y $(-1)^{j+i-1}$, es decir, efectivamente difieren en un signo y se eliminan. Por lo tanto $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

El complejo de cadena *reducido* $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$ es el complejo aumentado obtenido de poner $C_{-1}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, la aplicación aumentación $d_0 : C_0(X\mathbb{Z}) \to C_{-1}(X, \mathbb{Z})$ manda cada $x_0 \in X$ a $1 \in \mathbb{Z}$.

El n-ésimo grupo de homología del complejo $C_*(X, \mathbb{Z})$ (respectivamente $\tilde{C}_*(X, \mathbb{Z})$) es denotado por $H_n(X, \mathbb{Z})$, y llamado el n-ésimo *grupo de homología* (respectivamente *grupo de homología reducido*) de X. Un copo X es *acíclico* si todos sus grupos de homología reducidos son iguales a cero.

Más generalmente, si K es un anillo, el n-ésimo grupo de homología de X con coeficientes en K es el n-ésimo grupo de homología del complejo $K \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(X, \mathbb{Z})$. Cuando K es un campo, se tiene $H_n(X, K) = K \otimes H_n(X, \mathbb{Z})$.

La *característica de Euler-Poicaré* $\chi(X)$ de un copo finito X está definido por

$$\chi(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} C_n(X, \mathbb{Z}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n |S\,d_n(X)|.$$

Similarmente, la característica de Euler-Poicaré *reducida* $\tilde{\chi}(X)$ es definida por

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{n\geq -1}(-1)^n \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \tilde{C}_n(X, \mathbb{Z}) = \chi(X) - 1.$$

Si K es un campo, entonces consideramos $k_n = \dim_K \mathrm{Ker}(K \otimes_{\mathbb{Z}} d_n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \dim_K H_n(X, K) &= \dim_K K \otimes_{\mathbb{Z}} H_n(X, \mathbb{Z}) = k_n - \dim_K \mathrm{Im}(K \otimes d_{n+1}) \\ &= k_n + k_{n+1} - \dim_K K \otimes_{\mathbb{Z}} C_{n+1}(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\chi(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dim_K H_n(X,K)$$

pues $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} C_n(X,\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} C_n(X,\mathbb{Z}) - \dim_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker} d_n$ y asi sustituyendo en $\chi(X)$ y sumando $k_n - k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos lo que queremos.

Y de forma similar obtenemos que

$$\tilde{\chi}(X) = \sum_{n\geq -1}(-1)^n \dim_K \tilde{H}_n(X,K)$$

Remark 3.1. En particular, si X es finito y acíclico, entonces $\tilde{\chi}(X) = 0$, pues es una suma finita que por ser acíclico todos los $\tilde{H}_n(X,K)$ son cero y por lo tanto su dimensión también es nula. Similarmente, si X y Y son copos finitos, y si existe una equivalencia homotópica f_* del complejo $C_*(X,\mathbb{Z})$ al complejo $C_*(Y,\mathbb{Z})$ (f_* se dice que es una *equivalencia homotópica* si existe $g_* : C_*(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_*(X,\mathbb{Z})$ continua tal que $(f_* \circ g_*)$ y $(g_* \circ f_*)$ son homotópicas a las identidades en $C_*(X,\mathbb{Z})$ y $C_*(Y,\mathbb{Z})$ respectivamente), entonces $\chi(X) = \chi(Y)$, dado que f induce un isomorfismo de grupos de $H_n(X,\mathbb{Z})$ a $H_n(Y,\mathbb{Z})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Si X y Y son copos, una *aplicación de copos* $f : X \to Y$ es una aplicación de X a Y tal que $f(x) \leq f(x')$ si cuando x y x' son elementos de X tales que $x \leq x'$. Si f es una tal aplicación, existe una aplicación inducida $C_*(f,\mathbb{Z}) : C_*(X,\mathbb{Z}) \to C_*(Y,\mathbb{Z})$ definida para $n \in \mathbb{N}$ por

$$C_n(f,\mathbb{Z})(x_0,\ldots,x_n) = \begin{cases} (f(x_0,\ldots,f(x)) & \text{si } f(x_0) < \cdots < f(x_n), \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Dicha aplicación es de complejo de cadenas, pues veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "C_n(f,\mathbb{Z})"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(Y,\mathbb{Z}) \arrow[d, "d_n"] \\
C_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "C_{n-1}(f,\mathbb{Z})"] & C_{n-1}(Y,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Sea pues $(x_0,\ldots,x_n) \in C_n(X,\mathbb{Z})$, entonces por un lado

$$d_n \circ C_n(f,\mathbb{Z})(x_0,\ldots,x_n) = d_n\left((f(x_0),\ldots,f(x_n))\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f(x_0),\ldots,\widehat{f}(x_i),\ldots,f(x_n))$$

si $f(x_0) < \cdots < f(x_n)$; y por el otro

$$C_{n-1}(f,\mathbb{Z}) \circ d_n(x_0,\ldots,x_n) = C_{n-1}(f,\mathbb{Z})\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f(x_0),\ldots,\hat{x}_i,\ldots,f(x_n))$$

si para cada sumando tenemos desigualdanes propias, pero esto es cierto si $f(x_0) < \cdots < f(x_n)$. Por lo tanto el diagrama si conmuta.

También se define una aplicación reducida $\tilde{C}_*(f,\mathbb{Z}) : \tilde{C}_*(X,\mathbb{Z}) \to \tilde{C}_*(Y,\mathbb{Z})$ por $\tilde{C}_n(f,\mathbb{Z}) = C_n(f,\mathbb{Z})$ si $n \geq 0$, y $\tilde{C}_{-1}(f,\mathbb{Z}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Si f y g son aplicaciones de copos de X a Y, la notación $f \leq g$ significa que $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in X$. Las aplicaciones f y g se dicen *comparables* si $f \leq g$ o $g \leq f$.

Lema 3.2. *Sean f y g aplicaciones de copos de X a Y. Si f y g son comparables, entonces las aplicaciones de complejos $C_*(f,\mathbb{Z})$ y $C_*(g,\mathbb{Z})$ son homotópicas asi como $\tilde{C}_*(f,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g,\mathbb{Z})$.*

Demostración. Considerando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "C_{n+1}(g,\mathbb{Z})"', "C_{n+1}(f,\mathbb{Z})"] & C_n(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "C_n(g,\mathbb{Z})"', "C_n(f,\mathbb{Z})"] & C_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "C_{n-1}(g,\mathbb{Z})"', "C_{n-1}(f,\mathbb{Z})"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1}(Y,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(Y,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "d_{n-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

veremos que son homotópicas si existen $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(Y,\mathbb{Z})$ tal que $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = C_n(g,\mathbb{Z}) - C_n(f,\mathbb{Z})$.

Dado que f y g son comparables, sin pérdida de generalidad supongamos $f \leq g$. Consideremos entonces la aplicación $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(Y,\mathbb{Z})$ definida para $n \in \mathbb{N}$ por

$$h_n(x_0,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f(x_0),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_n))$$

donde la sucesión $(f(x_0),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_n))$ es remplazada por 0 si no es estrictamente creciente. Verifiquemos ahora lo que queremos, para esto aplicamos el lado izquierdo a un elemento básico $(x_0,\dots,x_n)$.

$$(d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n)(x_0,\dots,x_n) = (d_{n+1} \circ h_n)(x_0,\dots,x_n) + (h_{n-1} \circ d_n)(x_0,\dots,x_n) =$$

$$= d_{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f(x_0),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_n))\right) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-1}(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)\right) =$$

$$= d_{n+1}\left((-1)^0(f(x_0),g(x_0),\dots,g(x_n)) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(f(x_0),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_n))\right)$$

$$+h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-1}(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)\right).$$

Trataremos de desarrollar cada suma en partes de forma que sea claro como se eliminan los términos.

$$= (-1)^0(-1)^0(\widehat{f}(x_0), g(x_0), \dots, g(x_n)) + (-1)^0 \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}(f(x_0), g(x_0), \dots, \widehat{g}(x_j), \dots, g(x_n)) \tag{1.1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{0\leq j\leq i}(-1)^j(f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_j), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)) \tag{1.2}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{i<j}^{n+1}(-1)^j(f(x_0), \dots, f(x_i), g(x_i), \dots, \widehat{g}(x_{j-1}), \dots, g(x_n)) \tag{1.3}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{i\leq j}(-1)^j(f(x_0), \dots, \hat{x}_{i-1}, \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, g(x_n)) \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{j<i}(-1)^j(f(x_0), \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, \hat{x}_i, \dots, g(x_n)) \tag{1.5}$$

Notemos que los primeros tres renglones son los del desarrollo de $d_{n+1} \circ h_n$ y los últimos dos son del desarrollo de $h_{n-1} \circ d_n$, asi tendremos entonces que en los tres primeros hay cadenas cuyos subíndices son todos distintos, por ejemplo,

$$f(x_0), \dots, f(x_{i-1}), \widehat{f}(x_i), g(x_i).$$

Mientras que en los dos últimos todos los sumandos son cadenas con subíndices repetidos, por ejemplo,

$$(f(x_0), \dots, f(x_j), g(x_j), \dots, \hat{x}_i, \dots, g(x_n))$$

La forma en que se eliminan es como sigue: en la suma 1.1 el término que es extremo inferior, es decir, para $j = 0$ y el término para $i = j = 1$ de la suma 1.2 coinciden, pero con signos $(-1)^{0+1} = -1$ y $(-1)^1(-1)^1 = 1$ respectivamente, por lo tanto se eliminan. Los otros términos de la suma 1.1 son aquellos que tienen al comienzo $f(x_0)$ y $g(x_0)$ y se van eliminando los $g(x_j)$ para $j \geq 1$, consideremos ahora en la suma 1.5 la siguiente parte, $j = 0$, entonces $(-1)^0 \sum_{i=1}^{n}(f(x_0), g(x_0), \dots, \hat{x}_i, \dots, g(x_n))$ tiene exactamente los mismos términos pero con signos con respecto a su subíndice en la primera $(-1)^{j+1}$ y en la otra $(-1)^j$, es decir se anulan. Tomemos ahora en la suma 1.2 para $2 \leq j = i$ pues $j = 0, 1$ ya los contemplamos en la suma 1.1, se tiene

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i(-1)^i(f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n)) = \sum_{i=2}^{n}(f(x_0), \dots, \widehat{f}(x_i), g(x_i), \dots, g(x_n))$$

y en la suma 1.3, tomamos $j = i + 1 < n$ con lo cual

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(-1)^{i+1}(f(x_0),\dots,f(x_i),\widehat{g}(x_{i+1-1}),\dots,g(x_n)) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)(f(x_0),\dots,f(x_i),\widehat{g}(x_i),\dots,g(x_n))$$

y claramente ya que difieren en un signo se eliminan. Veamos ahora que pasa con el resto de los sumandos de 1.2, es decir,

$$\sum_{\substack{i=1\\0\le j<i}}(-1)^i(-1)^j(f(x_0),\dots,\widehat{f}(x_j),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_n))$$

Podemos ver que ésta y la suma 1.4 tendrán los mismos sumandos si $\widehat{f}(x_j)$ y x_{i-1} ocupan la misma posición, es decir, $j = i - 1$, por lo tanto al sustitir este valor en ambas sumas, los signos quedan de la siguiente manera $(-1)^{i+i-1} = -1$ para la primera y $(-1)^{i-1+i-1} = 1$ para la segunda, lo que hace que difieran en un signo y se eliminen. Análogamente para lo que resta de la suma 1.3 y la suma 1.5, se tiene que $i = j - 1$ y se anulan las sumas. Observemos que el caso extremo en la suma 1.3, $i = n$ y $j = n + 1$, no estaba dentro de las sumas que se eliminaron. Finalmente tenemos entonces que sólo sobreviven los términos $(g(x_0),\dots,g(x_n)) - (f(x_0),\dots,f(x_n))$ que efectivamente es $(C_n(g,\mathbb{Z}) - C_n(f,\mathbb{Z}))(x_0,\dots,x_n)$ y por lo tanto $C_n(g,\mathbb{Z})$ y $C_n(f,\mathbb{Z})$ son homotópicas. Para los complejos reducidos sólo faltaria considerar h_{-1} la aplicación cero. Con lo cual tendremos

$$(d_1\circ h_0 + h_{-1}\circ d_0)(x_0) = (d_1\circ h_0)(x_0) + (h_{-1}\circ d_0)(x_0) = d_1(f(x_0),g(x_0)) + h_{-1}(1)$$

$$= g(x_0) - f(x_0) + 0 = C_0(g,\mathbb{Z})(x_0) - C_0(f,\mathbb{Z})(x_0)$$

Y tendremos que las aplicaciones reducidas son también homotópicas. ❑

Corolario 3.3. *(Quillen).*

1. *Sean X y Y copos, y $f: X\to Y$ y $g: Y\to X$ aplicaciones de copos. Si $g\circ f$ es comparable a Id_X y $f\circ g$ es comparable a Id_Y, entonces las aplicaciones de complejos $\tilde{C}_*(f,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g,\mathbb{Z})$ son equivalencias homotópicas inversas mutuamente entre $\tilde{C}_*(X,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(Y,\mathbb{Z})$.*
2. *Si el copo X tiene un elemento máximo, o mínimo, la cadena de complejos $\tilde{C}_*(X,\mathbb{Z})$ es contraíble, es decir, es homotópicamente equivalente a $C_*(\bullet,\mathbb{Z})$.*

Demostración.

1. Por el lema anterior tenemos que $\tilde{C}_*(g\circ f,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(\mathrm{Id}_X,\mathbb{Z})$ son homotópicas, lo mismo que $\tilde{C}_*(f\circ g,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(\mathrm{Id}_Y,\mathbb{Z})$ pero notemos que

$$\tilde{C}_n(\mathrm{Id}_X,\mathbb{Z})(x_0,\dots,x_n) = (x_0,\dots,x_n) = \mathrm{Id}_{\tilde{C}_n(X,\mathbb{Z})}(x_0,\dots,x_n)$$

y

$$\tilde{C}_n(g\circ f,\mathbb{Z})(x_0,\dots,x_n) = ((g\circ f)(x_0),\dots,(g\circ f)(x_n)) = \tilde{C}_n(g,\mathbb{Z})(f(x_0),\dots,f(x_n))$$
$$= \tilde{C}_n(g,\mathbb{Z})\circ\tilde{C}_n(f,\mathbb{Z})(x_0,\dots,x_n)$$

para toda $n\in\mathbb{N}$, siempre que $((g\circ f)(x_0),\dots,(g\circ f)(x_n))$ sea estrictamente creciente y 0 en caso contrario. De forma análoga $\tilde{C}_n(\mathrm{Id}_Y,\mathbb{Z}) = \mathrm{Id}_{\tilde{C}_n(Y,\mathbb{Z})}$ y $\tilde{C}_n(f\circ g,\mathbb{Z}) = \tilde{C}_n(f,\mathbb{Z})\circ\tilde{C}_n(g,\mathbb{Z})$ para cualquier $n\in\mathbb{N}$. Y por lo tanto, $\tilde{C}_n(f,\mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_n(g,\mathbb{Z})$ son equivalentes homotópicamente e inversa una de la otra.

2. Llamemos m al elemento máximo (o mínimo) de X, y denote $\bullet$ un copo de cardinalidad uno. Considerando la aplicación única $f : X\to\bullet$ y la aplicación $g:\bullet\to X$ que manda el elemento único $\bullet$ a m. Claramente son de copos ya que para $x\le x'$ elementos de X, $f(x)=\bullet\le\bullet=f(x')$ y ya que $\bullet$ consta de un solo elemento g también lo es. Ahora bien, $(f\circ g)(\bullet) = f(g(\bullet)) = f(m) = \bullet = \mathrm{Id}_\bullet(\bullet)$ por lo tanto $f\circ g$ es comparable a $\mathrm{Id}_\bullet$; ahora dado $x\in X$ se tiene que $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\bullet) = m$, por lo tanto $\mathrm{Id}_X\le(g\circ f)$ ($(g\circ f)\le\mathrm{Id}_X$), es decir, son comparables. Aplicando 1. a éstas, tenemos que hay una equivalencia homotópica entre $C_*(X,\mathbb{Z})$ y $C_*(\bullet,\mathbb{Z})$ y se sigue el resultado.

❑

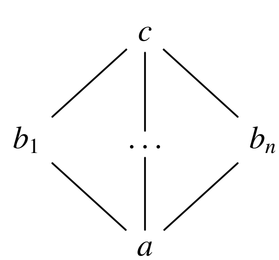
2. Invariantes ligados a G-copos

La siguiente definición de los invarantes de Lefschetz se debe a Thénevaz ([**12**]):

Definición 3.4. Sea G un grupo finito. Un *G-copo* X es un G-conjunto equipado con una relación de orden $\le$ compatible con la G-acción, esto es: si $x\le x'$ son elementos de X y si $g\in G$, entonces $gx\le gx'$.

Aquí un pequeño ejemplo

Ejemplo 3.5. Consideremos el siguiente copo X



y $G=S_n$ con la siguiente acción: dada $\sigma\in G$, $\sigma.a=a$, $\sigma.c=c$ y $\sigma.b_i=b_{\sigma(i)}$.

Claramente la acción de G es compatible con el orden parcial de X, por lo tanto es un G-copo.

Si X y Y son G-copos, una *aplicación de G-copos* $f : X \to Y$ es una aplicación tal que $f(gx) = gf(x)$ si $g \in G$ y $x \in X$ y tal que $f(x) \leq f(x')$ en Y, siempre que $x \leq x'$ en X. Si $y \in Y$, entonces

$$f^y = \{x \in X | f(x) \leq y\}, \quad f_y = \{x \in X | f(x) \geq y\}.$$

Estos conjuntos son sub-G_y-copos de la restricción de X al estabilizador G_y de y en G

Si $x \leq y$ son elementos de X, el conjunto $]x, y[_X$ es un $G_{x,y}$-copo, donde $G_{x,y}$ es el estabilizador del par (x, y). Similarmente, los conjuntos $]x, .[_X$ y $]., x[_X$ son G_x-copos.

Si X es un G-copo, entonces para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $Sd_n(X)$ es un G-conjunto. Cuando X es finito, el *invariante de Lefschetz* Λ_X de X es el elemento de $B(G)$ definido por

$$\Lambda_X = \sum_{n \geq 0} (-1)^n Sd_n(X).$$

El *invariante de Lefschetz reducido* $\tilde{\Lambda}_X$ es el elemento de $B(G)$ definido por

$$\tilde{\Lambda}_X = \Lambda_X - G/G.$$

Si $x < y$ son elementos de X, el *invariante de Möbius* $\mu_X(x, y)$ está definida como el invariante de Lefschetz reducido del copo $]x, y[_X$. Este es un elemento del anillo de Burnside $B(G_{x,y})$. Por convención, el invariante de Möbius $\mu_X(x, x)$ es igual a G_x/G_x

Se sigue de estas definiciones que $|\Lambda_X|$ es igual a la característica de Euler- Poincaré de X. Se puede decir más:

Lema 3.6. *Sea G un grupo finito*

1. *Si X es un G-copo finito, entonces para cualquier subgrupo H de G*

$$(\Lambda_X)^H = \Lambda_{X^H}$$

   en $B(N_G(H)/(H)$. En particular $|(\Lambda_X)^H| = \chi(X^H)$.
2. *Si X y Y son G-copos finitos, entonces $\Lambda_X = \Lambda_Y$ en $B(G)$ si y sólo si $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ para cualquier subgrupo H de G.*

Demostración.

1. Tenemos que $Sd_n(X)^H = Sd_n(X^H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pues dado una cadena $(x_0, \ldots, x_n) \in Sd_n(X)^H$ tenemos que para todo $h \in H$, $h(x_0, \ldots, x_n) = (hx_0, \ldots, hx_n) = (x_0, \ldots, x_n)$ es

decir, $hx_i = x_i\ \forall i = 0, \ldots, n$, por lo tanto $x_i \in X^H$ y asi $Sd_n(X)^H = Sd_n(X^H)$. Con lo cual

$$(\Lambda_X)^H = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X)\right)^H = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X)^H = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X^H) = \Lambda_{X^H}$$

En particular cuando tomamos cardinalidad, por la anotación anterior al lema tenemos que $|(\Lambda_X)^H| = |(\Lambda_{X^H})| = \chi(X^H)$

2. Recordando el teorema 1.4 de Burnside y aplicado a elementos de $B(G)$ tenemos que $X = Y$ en $B(G)$ si y sólo si $\left|X^H\right| = \left|Y^H\right|$ para cualquier $H \leq G$. Asi pues tendremos que dado que Λ_X y Λ_Y están en $B(G)$ entonces $\Lambda_X = \Lambda_Y$ si y sólo si $\left|(\Lambda_X)^H\right| = \left|(\Lambda_Y)^H\right|$ para cualquier H subgrupo de G, pero por 1. tenemos que $\chi(X^H) = \left|(\Lambda_X)^H\right| = |(\Lambda_Y)^H| = \chi(Y^H)$

❏

Definición 3.7. Un G-copo X es llamado G-acíclico si el conjunto X^H es acíclico para cualquier H subgrupo de G

Lo siguiente es una consecuencia directa de esta definición:

Lema 3.8. *Sea G un grupo finito, y X un G-copo finito. Si X es G-acíclico entonces $\tilde{\Lambda}_X = 0$ en $B(G)$.*

Demostración. Si X es G-acíclico por definición X^H es acíclico y asi $\tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ y entonces $\dim_K \tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ y asi $\tilde{\chi}(X^H) = \sum_{n\geq -1} \dim_K \tilde{H}_n(X^H, K) = 0$ pero por 1. del lema anterior y la nota anterior a éste tenemos que $\chi(X^H) = |\Lambda_{X^H}| = |(\Lambda_X)^H|$ pero además

$$0 = \tilde{\chi}(X^H) = \chi(X^H) - 1 = |(\Lambda_X)^H| - 1 = |(\Lambda_X)^H - (G/G)^H| = |(\Lambda_X - G/G)^H| = |(\tilde{\Lambda}_X)^H|$$

para cualquier H subgrupo de G, entonces $\tilde{\Lambda}_X = 0$. ❏

Proposición 3.9. *Sea G un grupo finito*

1. *Sean X y Y G-copos finitos, y $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ aplicaciones de G-copos. Si $g \circ f$ es comparable a Id_X y si $f \circ g$ es comparable a Id_Y, entonces $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$ en $B(G)$.*
2. *Si un G-copo X tiene un elemento máximo, o elemento mínimo, entonces es G-acíclico.*

Demostración.

1. Considerando cualquier subgrupo H de G y las restricciones de f y g a los copos X^H y Y^H se satisfacen las hipótesis del corolario 3.3 y así $\tilde{C}_*(f^H, \mathbb{Z})$ y $\tilde{C}_*(g^H, \mathbb{Z})$ son una equivalencia homotópica inversa una de la otra lo mismo que $C_*(f^H, \mathbb{Z})$ y $C_*(g^H, \mathbb{Z})$ y asi por la nota 3.1

tenemos que $\chi(X^H) = \chi(Y^H)$ y por el lema 3.6 esto ocurre si y sólo si $\Lambda_X = \Lambda_Y$. Restando a ambos lados de la igualdad G/G se sigue el resultado.

2. Sea m el elemento máximo, o mínimo de X, veamos que también lo es para X^H. Dado $h \in H$ y $x \in X^H$ tenemos que $x \leq m$ y entonces $h^{-1}x = x \leq h^{-1}m \leq m$ pero entonces $m \leq hm \leq m$ por lo tanto $hm = m$ es decir, $m \in X^H$ y es máximo. Entonces aplicando el corolario 3.3 parte 2. tenemos que $\tilde{C}_*(X^H, \mathbb{Z})$ es contraíble y entonces X^H es acíclico para cualquier subgrupo H de G por lo tanto X es G-acíclico

❑

Ejemplo 3.10. Sea $f : X \to Y$ una aplicación de G-copos finitos. Denotemos por $X *_f Y$ el G-copo definido como sigue: el G-conjunto señalado es la unión disjunta $X \sqcup Y$ de X y Y. El orden está definida para z y z' en $X *_f Y$ por

$$z \leq z' \Leftrightarrow \begin{cases} z, z' \in X & \text{y } z \leq z' \text{ en } X, \\ z, z' \in Y & \text{y } z \leq z' \text{ en } Y, \\ z \in X, z' \in Y & \text{y } f(z) \leq z' \text{ en } Y \end{cases}$$

Denote $\tilde{f}$ la inyección de Y a $X *_f Y$ y g la aplicación de $X *_f Y$ a Y definida por

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in X, \\ z & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ y g son de G-copos pues, ya que $\tilde{f}$ es la inyección de Y a $X *_f Y$, si $z \leq z'$ en Y entonces $z \leq z'$ en $X *_f Y$. Ahora bien, dados $z \leq z'$ en $X *_f Y$, tenemos que $g(z) \leq g(z')$ pues si $z, z' \in X$ $g(z) = f(z) \leq f(z') = g(z')$ por ser f de G-copos; si $z, z' \in Y$ $g(z) = z \leq z' = g(z')$; finalmente si $x \in X$ y $z' \in Y$ $g(z) = f(z) \leq z' = g(z')$, por lo tanto g es de copos. Resta ver que es de G-conjuntos. Sea $g \in G$, si $z \leq z' \in X$ o $z \leq z' \in Y$ entonces $gz \leq gz'$ por ser X y Y G-copos; si $z \leq z'$ con $z \in X$ y $z' \in Y$ entonces se tiene $gz \leq gz'$ si y sólo si $f(gz) = gf(z) \leq gz'$ en Y, lo cual es cierto. Notemos que dado $y \in Y$, $(g \circ \tilde{f})(y) = g(y) = y$ entonces $g \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_Y$. Ahora considerando $z \in X *_f Y$, $(\tilde{f} \circ g)(z) = \tilde{f}(f(z)) = f(z)$ si $z \in X$ y $(\tilde{f} \circ g)(z) = z$ si $z \in Y$ y considerando que $f(z) \leq f(z)$ entonces $z \leq f(z)$ y por lo tanto, $\mathrm{Id}_{X *_f Y} \leq f \circ g$, es decir son comparables y por la proposición 3.9, $\tilde{\Lambda}_{X *_f Y} = \tilde{\Lambda}_Y$ lo cual implica que $\Lambda_{X *_f Y} = \Lambda_Y$

Una consecuencia es la siguiente relación entre $\tilde{\Lambda}_X$ y $\tilde{\Lambda}_Y$:

Proposición 3.11. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación de G-copos. Entonces en $B(G)$*

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y \in [G \backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G}(\tilde{\Lambda}_{f^y} \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y}),$$

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G(\tilde{\Lambda}_{f_y}\tilde{\Lambda}_{].,y[_Y}),$$

En particular, si $\tilde{\Lambda}_{f^y} = 0$ para todo $y \in Y$ (por ejemplo si f^y es G_y-acíclico), entonces $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$ en $B(G)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $Sd_n(X *_f Y)$ es la unión disjunta de $Sd_n(X)$ y el conjunto de sucesiones $z_0 < \cdots < z_n$ para los cuales $z_n \in Y$. Una tal sucesión tiene un elemento mínimo $y = z_i$ en Y, entonces se puede escribir como

$$x_0 < \cdots < x_{i-1} < y < \cdots < y_{n-i-1},$$

donde $x_0 < \cdots < x_{i-1}$ está en $Sd_{i-1}(f^y)$ (para $i = 0$, la convención es que $Sd_{-1}(f^Y)$ es un conjunto de cardinalidad uno), y $y_0 < \cdots < y_{n-i-1}$ está en $Sd_{n-i-1}(]y, .[_Y)$ (para $i = n$, la convención es que $Sd_{-1}(]y, .[_Y)$ tiene cardinalidad uno).

Sin perder de vista la acción de G, ésta nos lleva al siguiente isomorfismo de G-conjuntos

$$Sd_n(X *_f Y) = Sd_n(X) \sqcup \bigsqcup_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left(\bigsqcup_{i=0}^{n}(Sd_{i-1}(f^y)\times Sd_{n-i-1}(]y, .[_Y))\right)$$

Dado por $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0 \ldots, x_n)$ si $(x_0, \ldots, x_n) \in Sd_n(X)$ y $(x_0, \ldots, x_{i-1}, y, y_0, \ldots, y_{n-i-1}) \mapsto [(x_0, \ldots, x_{i-1}), (y_0, \ldots, y_{n-i-1})]$ para $y \in [G\backslash Y]$.

Tomando sumas alternadas en ambos lados y del ejemplo anterior tenemos

$$\Lambda_Y = \Lambda_{X*_fY} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X *_f Y) =$$

$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(Sd_n(X) \sqcup \bigsqcup_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left(\bigsqcup_{i=0}^{n}(Sd_{i-1}(f^y)\times Sd_{n-i-1}(]y, .[_Y))\right)\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X) + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(Sd_{i-1}(f^y)Sd_{n-i-1}(]y, .[_Y))\right)$$

$$= \Lambda_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left((-G_y/G_y + \Lambda_{f^y})(-G_y/G_y + \Lambda_{]y,.[_Y})\right) = \Lambda_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left(\tilde{\Lambda}_{f^y}\tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y}\right)$$

Sumando a ambos lados $-G/G$ se tiene

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G\left(\tilde{\Lambda}_{f^y}\tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y}\right)$$

Para la segunda igualdad, consideremos la aplicación $f : X^{\mathrm{op}} \to Y^{\mathrm{op}}$ entre los copos opuestos de X y Y, pues sabemos que $x \leq x'$ en X si y sólo si $x' \leq x$ en X^{op} y entonces existe una biyección entre

$Sd_n(X)$ y $Sd_n(X^{\mathrm{op}})$; una cadena $(x_0, \ldots, x_n) \in Sd_n(X)$ se corresponde con $(x_n, \ldots, x_0) \in Sd_n(X^{\mathrm{op}})$, es decir, en $B(G)$ $Sd_n(X) = Sd_n(X^{\mathrm{op}}$ y asi

$$\Lambda_X = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X^{\mathrm{op}}) = \Lambda_{X^{\mathrm{op}}}$$

Y por lo tanto, $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_{X^{\mathrm{op}}}$

Finalmente

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_{Y^{\mathrm{op}}} = \tilde{\Lambda}_{X^{\mathrm{op}}} + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f_y}\tilde{\Lambda}_{].,y[_Y}\right) = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G \left(\tilde{\Lambda}_{f_y}\tilde{\Lambda}_{].,y[_Y}\right)$$

❏

Corolario 3.12. *Sea X un G-copo finito*

1. *El invariante reducido de Lefschetz de X es igual a*
$$\tilde{\Lambda}_X = -G/G - \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G \tilde{\Lambda}_{]x,.[_X}.$$
2. *Si $x \leq y$ en X, entonces*
$$\sum_{z\in[G_{x,y}\backslash[x,y]]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \mu_X(z,y) = \begin{cases} 0 & si\ x < y, \\ G_x/G_x & si\ x = y, \end{cases}$$
3. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación de G-copos finitos, entonces*
$$\Lambda_X = -\sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f^y}\tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y} = -\sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^G \Lambda_{f_y}\tilde{\Lambda}_{].,y[_Y}.$$

El inciso 2. es la razón para el nombre del invariante de Möbius

Demostración.

1. Consideremos la inclusión $i : \emptyset \to X$. Tenemos asi que $\Lambda_\emptyset = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(\emptyset) = 0$ y por lo tanto $\tilde{\Lambda}_\emptyset = -G/G$. Notemos que entonces $i^x = \{x' \in \emptyset \mid x' < x\} = \emptyset$. Aplicando ahora la proposición 3.11 tenemos que
$$\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G(\tilde{\Lambda}_{i^x}\tilde{\Lambda}_{]x,.[_X}) = -G/G + \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G(-G/G\tilde{\Lambda}_{]x,.[_X}) =$$
$$= -G/G - \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G \tilde{\Lambda}_{]x,.[_X}$$

2. Consideremos $Y = [x, y[_X$ y aplicando 1. tenemos que

$$\tilde{\Lambda}_{[x,y[_X} = -G_{x,y}/G_{x,y} - \sum_{z\in[G\backslash[x,y[_X]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \tilde{\Lambda}_{]z,.[_Y} =$$

$$= -G_{x,y}/G_{x,y} - \sum_{z\in[G\backslash[x,y[_X]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \tilde{\Lambda}_{]z,y[_Y} =$$

$$-G_{x,y}/G_{x,y} - \sum_{z\in[G_{x,y}\backslash[x,y[_X]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \mu_X(z, y)$$

Por otro lado considerando la igualdad que queremos ver, si $x = y$ tenemos que $z = x = y$ y nuestra suma es en realidad sólo un término y además $G_{x,y} = G_{x,y,z} = G_{y,z} = G_x$, entonces

$$\mathrm{Ind}_{G_x}^{G_x} \mathrm{Res}_{G_x}^{G_x} \mu_X(x, x) = \mathrm{Ind}_{G_x}^{G_x} \mathrm{Res}_{G_x}^{G_x} G_x/G_x = G_x/G_x$$

Si consideramos ahora $x < y$ entonces

$$\sum_{z\in[G_{x,y}\backslash[x,y]]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \mu_X(z, y) =$$

$$= \sum_{z\in[G_{x,y}\backslash[x,y[_X]} \mathrm{Ind}_{G_{x,y,z}}^{G_{x,y}} \mathrm{Res}_{G_{x,y,z}}^{G_{y,z}} \mu_X(z, y) + \mathrm{Ind}_{G_x}^{G_x} \mathrm{Res}_{G_x}^{G_x} \mu_X(x, x) = \tilde{\Lambda}_{[x,y[_X}$$

pero Y tiene a x como elemento mínimo entonces $\tilde{\Lambda}_{[x,y[_X} = 0$ y se sigue nuestro resultado.

3. De la proposición 3.11 y de saber que $\tilde{\Lambda}_X = \Lambda_X - G/G$ tenemos que a

$$\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} \left((\Lambda_{f^y} - G_y/G_y) \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y} \right)$$

$$= \Lambda_X - G/G + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} (\Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y}) - \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} (\tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y})$$

pero de 1. tenemos que $\tilde{\Lambda}_Y = -G/G - \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y}$, sustituyendo esto en el desarrollo anterior

$$\tilde{\Lambda}_Y = \Lambda_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y} + \tilde{\Lambda}_Y$$

y entonces se tiene $\Lambda_X + \sum_{y\in[G\backslash Y]} \mathrm{Ind}_{G_y}^{G} \Lambda_{f^y} \tilde{\Lambda}_{]y,.[_Y} = 0$. Pasando para el otro lado la suma se tiene el resultado. La segunda igualdad de se obtiene al considerar la segunda igualdad de la proposición 3.11 y hacer el mismo proceso.

❏

Corolario 3.13. *Sea G un grupo finito y X un copo finito. Denotemos por $X_\sharp$ (respectivamente $X^\sharp$) el conjunto de elementos $x \in X$ tal que $\tilde{\Lambda}_{].,x[_X} \neq 0$ (respectivamente $\tilde{\Lambda}_{]x.,[_X \neq 0}$) en $B(G)$. Si Y es un sub-G-copo de X tal que $X_\sharp \subseteq Y \subseteq X$ (respectivamente $X^\sharp \subseteq Y \subseteq X$), entonces $\tilde{\Lambda}_Y = \tilde{\Lambda}_X$ en $B(G)$.*

Demostración. Dado que podemos considerar el copo opuesto, es suficiente probar la afirmación para $X_\sharp$, y esto lo haremos por inducción en la cardinalidad de X; si $X = \emptyset$, entonces $X = X_\sharp = Y$ y no hay nada que probar. Para el paso inductivo consideremos la aplicación inclusión $i : X_\sharp \to Y$. Claramente ésta es una aplicación de G-copos. Más aún, si $y \in X_\sharp$, entonces $i^y = \{x \in X_\sharp \mid x \leq y\}$ tiene un elemento máximo y, por lo tanto es G_y-acíclico y $\tilde{\Lambda}_{i^y} = 0$ en $B(G)$. Si ahora $y \notin X_\sharp$, entonces $\tilde{\Lambda}_{]., y[_Y} = 0$ en $B(G_y)$ por definición de $X_\sharp$. Más aún en este caso

$$\begin{aligned} i^y =]., y[_X \cap X_\sharp &= \{z \in X \mid z < y, \tilde{\Lambda}_{]., z[_X} \neq 0 \text{ en } B(G)\} \\ &\supseteq \{z \in X \mid z < y, \tilde{\Lambda}_{]., z[_X} \neq 0 \text{ en } B(G_x \cap G_y)\} \\ &= \{z \in X \mid z < y, \mathrm{Res}^{G_z}_{G_{y,z}} \tilde{\Lambda}_{]., z[_X} \neq 0 \text{ en } B(G_z \cap G_y)\} = (]., y[_X)_\sharp. \end{aligned}$$

La última contensión se da pues si $z \in X$ es tal que $\mathrm{Res}^{G_z}_{G_{y,z}} \tilde{\Lambda}_{]., z[_X} \neq 0$ en $B(G_{y,z})$ entonces $\tilde{\Lambda}_{]., z[_X} \neq 0$ en $B(G_z)$. Tendremos así que existe una inclusión de G_y-copos

$$(]., y[_X)_\sharp \subseteq i^y \subseteq]., y[_X$$

pero ya que $y \in X$ y $y \notin]., y[_X$, entonces $|]., y[_X| < |X|$ y podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción y se sigue que $\tilde{\Lambda}_{i^y} = \tilde{\Lambda}_{]., y[_X} = 0$. De esto y lo anterior tenemos que $\tilde{\Lambda}_{i^y} = 0$ para todo $y \in Y$ y por la proposición 3.11 tenemos que $\tilde{\Lambda}_X = \tilde{\Lambda}_Y$ ❏

3. Invariantes de Steinberg

Definición 3.14. Sea G un grupo finito y p un número primo. El *invariante de Steinberg* $St_p(G)$ de G en p es el invariante de Lefschetz reducido del copo $s_p(G)$ de p-subgrupos no triviales de G, en el cual G actúa por conjugación.

La razón para esta terminología es que si G es un grupo de Chevalley simple finito en característica p, entonces el carácter de permutación (virtual) asociado a $St_p(G)$ es igual salvo un signo al carácter de Steinberg de G

Proposición 3.15. *Sea G un grupo finito y p un número primo. Entonces $St_p(G) = 0$ en $B(G)$ si y sólo si G tiene un p-subgrupo normal no trivial.*

Demostración. Si $St_p(G) = 0$ dado que $St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{s_p(G)}$ entonces $|(\tilde{\Lambda}_{s_p(G)})^G| = 0 = \tilde{\chi}(s_p(G)^G) = 0$. Y ya que $\tilde{\Lambda}_\emptyset = -G/G$, entonces $s_p(G)^G$ es no vacío y por lo tanto G tiene un p-subgrupo normal no trivial.

Inversamente, supongamos que $R \neq \mathbb{I}$ es un p-subgrupo normal de G no trivial. Sea f la aplicación de $s_p(G)$ a $[R, .[_{s_p(G)}$ definida por $f(Q) = Q.R$, y sea g la inclusión de $[R., [_{s_p(G)}$ a $s_p(G)$. Tenemos que dados $P \leq Q \in s_p(G)$, $f(P) = P.R \leq Q.R = f(Q)$; y dado $h \in G$ ya que la acción es la conjugación y ésta preserva contensiones, entonces ${}^hP \leq^h Q$. Por lo tanto f es de G-copos y claramente g también lo es. Además dado $Q \in s_p(G)$, $(g \circ f)(Q) = g(Q.R) = Q.R \geq Q$, por lo tanto $Id_{s_p(G)} \leq g \circ f$. Ahora bien dado $Q \in [R, .[_{s_p(G)}$, $(f \circ g)(Q) = f(Q) = Q.R = Q$, por lo tanto $Id_{[R,.[_{s_p(G)}} = f \circ g$, es decir, son comparables. Dado que $[R, .[_{s_p(G)}$ tiene un elemento mínimo, de la proposición 3.9 se tiene que $St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{[R,.[_{s_p(G)}} = 0$ en $B(G)$. ❏

Remark 3.16. Quillen ha conjeturado que $s_p(G)$ es contraible si y sólo si $O_p(G) \neq \mathbb{I}$. La prueba anterior de hecho prueba que $s_p(G)$ es G-contraible si y sólo si $O_p(G) \neq \mathbb{I}$ (ver Thénevaz y Webb [**13**]).

Proposición 3.17. *Sea G un grupo finito, y p un número primo. Sea $a_p(G)$ el sub-G-copo de $s_p(G)$ que consiste en los p-subgrupos elementales Abelianos no triviales de G y $b_p(G)$ denota el sub-G-copo de $s_p(G)$ que consiste de los p-subgrupos P de G no triviales tal que $P = O_p(N_G(P))$. Entonces*

$$St_p(G) = \tilde{\Lambda}_{a_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{b_p(G)} \text{ en } B(G)$$

Demostración. Sea P un p-subgrupo no trivial de G. Supongamos que P no es elemental Abeliano, y denotemos por $\Phi(P)$ el subgrupo de Frattini de P. Sea $f :]., P[_{s_p(G)} \rightarrow [\Phi(P), P[_{s_p(G)}$ la aplicación definida por $f(Q) = Q.\Phi(P)$ y sea g la, inclusión de $[\Phi(P), P[_{s_p(G)}$ a $]., P[_{s_p(G)}$. Ahora dados $Q \leq Q' \in]., P[_{s_p(G)}$ dado que $\Phi(P)$ es normal en P, entonces $Q.\Phi(P) \leq Q'.\Phi(P)$ y asi f es de copos; ahora bien dado $h \in N_G(P)$ tenemos que ${}^hQ \leq^h Q'$ pues la conjugación mantiene contensiones. Asi que f es de $N_G(P)$-copos; claramente g también lo es. Si ahora tomamos $Q \in]., P[_{s_p(G)}$, entonces $(g \circ f)(Q) = g(Q.\Phi(P)) = Q.\Phi(P) \geq Q$, por lo tanto $\mathrm{Id}_{].,P[} \leq g \circ f$. Ahora si $Q \in [\Phi(P), P[_{s_p(G)}$, entonces $(f \circ g)(Q) = f(Q) = Q.\Phi(P) = Q$ y por lo tanto $\mathrm{Id}_{[\Phi(P),P[_{s_p(G)}} = f \circ g$. Es decir, son comparables, y entonces $\tilde{\Lambda}_{].,P[_{s_p()G}} = \tilde{\Lambda}_{[\Phi(P),P[_{s_p(G)}}$. Ya que $[\Phi(P), P[$ tiene mínimo, entonces $\tilde{\Lambda}_{[\Phi(P),P[_{s_p(G)}} = 0$ en $B(N_G(P))$ por la proposición 3.9. Lo que nos dice que tenemos las siguientes contensiones

$$(s_p(G))_\sharp \subseteq a_p(G) \subseteq s_p(G)$$

y aplicando el corolario 3.13 se tiene que $\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{a_p(G)}$.

La otra igualdad es similar: sea P un p-subgrupo no trivial de G. Sea $R = O_p(N_G(P))$, y supongamos $R \neq P$. Sea $f :]P, .[_{s_p(G)} \rightarrow s_p(N_G(P)/P)$ definida por $f(Q) = N_Q(P)/P$, y sea $g : s_p(N_G(P)/P) \rightarrow]P, .[_{s_p(G)}$ definida por $g(Q/P) = Q$. Considerando $Q \leq Q' \in]P, .[_{s_p(G)}$, tenemos que $f(Q) = N_Q(P)/P \leq N_{Q'}(P)/P = f(Q')$, y dado $h \in G$ $f({}^hQ) = N_{{}^hQ}(P)/P =^h N_G(P)/{}^hP =^h (N_G(P)/P) = h.f(Q)$. Por lo tanto f es de G-copos. Si ahora tenemos $Q/P \leq Q'/P \in s_p(N_G(P)/P)$, por el teorema de correspodencia tenemos que $g(Q/P) = Q \leq Q' = g(Q')$ y finalmente dado $h \in G$, $g({}^h(Q/P)) = g({}^hQ/{}^hP) =^h Q =^h .g(Q/P)$, por lo tanto g es de G-copos. Ahora bien, si consideramos

$Q \in]P,.[$, entonces $(g \circ f)(Q) = g(N_Q(P)/P) = N_Q(P) \leq Q$, por lo tanto $g \circ f \leq \mathrm{Id}_{]P,.[_{s_p(G)}}$. Sea ahora $Q/P \in s_p(N_G(P)/P)$, entonces $(f \circ g)(Q/P) = f(Q) = N_Q(P)/P \leq Q/P$ por el teorema de correspondencia, por lo tanto, $f \circ g \leq \mathrm{Id}_{s_p(N_G(P)/P)}$. Es decir, son comparables y así por la proposición 3.9

$$\tilde{\Lambda}_{]P,.[_{s_p(G)}} = \tilde{\Lambda}_{s_p(N_G(P)/P)} = Inf^{N_G(P)}_{N_G(P)/P} St_p(N_G(P)/P)$$

visto como $N_G(P)$-conjunto pues $\tilde{\Lambda}_{]P,.[_{s_p(G)}}$ lo es. Dado que $O_p(N_G(P)/P) = O_p(N_G(P))/P = R/P \neq \mathbb{I}$ entonces $s_p(N_G(P)/P)$ es G-contraíble y $0 = \tilde{\Lambda}_{s_p(N_G(P)/P)} = \tilde{\Lambda}_{]P,.[_{s_p(G)}}$ en $B(N_G(P)/P)$. Es decir,

$$(s_p(G))^\sharp \subseteq b_p(G) \subseteq s_p(G)$$

y por el corolario 3.13

$$\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = \tilde{\Lambda}_{b_p(G)}$$

Uniendo lo anterior y considerando que $\tilde{\Lambda}_{s_p(G)} = St_p(G)$ se tiene el resultado deseado. ❏

Notación 3.18. Para el resto de la sección, el grupo G será un grupo finito y $\underline{\mathcal{F}}$ denotará una familia de subgrupos de G tal que:

1. $\mathbb{I} \in \underline{\mathcal{F}}$.
2. $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo conjugación.
3. $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo productos, i.e., si P y Q son elementos de $\underline{\mathcal{F}}$ tal que P normaliza a Q, entonces $P.Q \in \underline{\mathcal{F}}$.

Si H es un subgrupo de G, entonces $\underline{\mathcal{F}}(H)$ es el conjunto de subgrupos de H que están en $\underline{\mathcal{F}}$. Esta es una familia de subgrupos de H que tienen las tres propiedades anteriores.

Denotamos por $\mathcal{F}$ la familia $\underline{\mathcal{F}}$ quitando el grupo trivial. Entonces $\underline{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F}$ están ordenadas por la inclusión de subgrupos, y son G-copos. Cuando H es un subgrupo de G, denotamos similarmente por $\mathcal{F}(H)$ el conjunto de subgrupos no triviales de H que están en $\mathcal{F}$.

Definición 3.19. El *invariante de Steinberg* $St_{\mathcal{F}}(G)$ de G con respecto a $\mathcal{F}$ es el invariante reducido de Lefschetz del G-copo $\mathcal{F}$.

Por lo tanto si $\mathcal{F} = s_p(G)$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G) = St_p(G)$.

Lema 3.20. *Sean G y $\mathcal{F}$ como en 3.18. Si $P \in \mathcal{F}$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G)^P = 0$ en $B(N_G(P)/P)$.*

Demostración. Denotemos por a la aplicación inclusión de $[P,.[_{\mathcal{F}^P}$ a $\mathcal{F}$, y por b la aplicación de $\mathcal{F}^P$ a $[P,.[_{\mathcal{F}^P}$ definida por $b(F) = P.F$. Claramente a es de G-copos, ahora bien si $F \leq F' \in \mathcal{F}^P$, $P.F \leq P.F'$ y dado $g \in G$ $b({}^gF) = P.{}^gF ={}^g PF = g.b(F)$, por lo tanto b es de G-copos. Consideremos ahora $Q \in [P,.[_{\mathcal{F}^P}$, entonces $(b \circ a)(Q) = b(Q) = P.Q = Q$ por lo tanto $Id_{[P,.[_{\mathcal{F}^P}}$. Si ahora $Q \in \mathcal{F}^P$,

$(a \circ b)(Q) = a(P.Q) = P.Q \geq Q$, entonces $Id_{\mathcal{F}^P} \leq a \circ b$. Es decir, son comparables, por lo tanto $St_{\mathcal{F}}(G)^P = \tilde{\Lambda}^P_{\mathcal{F}} = \tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}^P} = \tilde{\Lambda}_{[P,.[_{\mathcal{F}^P}} = 0$ pues $[P,.[_{\mathcal{F}^P}$ tiene elemento mínimo P. ❑

Teorema 3.21. *(Bouc). Sea G y $\mathcal{F}$ como en 3.18. Si $X \in B(G)$, sea*

$$St_{\mathcal{F}}(G,X) = \sum_{P\in[G\backslash\underline{\mathcal{F}}]} \mathrm{Ind}^G_{N_G(P)}(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I},P)\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}X^P).$$

Entonces la aplicación $X \mapsto St_{\mathcal{F}}(G,X)$ es un endomorfismo de grupos idempotente de $B(G)$, y su imagen es el conjunto de elementos X de $B(G)$ tal que $X^P = 0$ en $B(N_G(P)/P)$ para todo $P \in \mathcal{F}$.

Demostración. Notemos que si $X^P = 0$ para $P \in \mathcal{F}$, entonces

$$St_{\mathcal{F}}(G,X) = \mathrm{Ind}^G_{N_G(\mathbb{I})}(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I},\mathbb{I})\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}X^{\mathbb{I}} + \sum_{P\in[G\backslash\mathcal{F}]} \mathrm{Ind}^G_{N_G(P)}(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I},P)\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}X^P)$$

$$= \mathrm{Ind}^G_G(G/G.\mathrm{Inf}^G_{G/\mathbb{I}}X) = X$$

Por lo tanto lo único que resta por verificar es que si $P \in \mathcal{F}$, entonces $St_{\mathcal{F}}(G,X)^P = 0$.

Por linealidad, podemos suponer que X es un G-copo finito, visto como un G-copo para el orden discreto. Denotemos por Z al subcopo de $X \times \mathcal{F}$ que consiste de los pares (x,P) tal que $P \subseteq G_x$. $X \times \mathcal{F}$ es G-copo con el orden de la contensión en la segunda entrada, es decir, $(x,P) \leq (y,Q)$ si $P \subseteq Q$, pues dado que X es discreto $x = y$. La acción de G, es entrada a entrada, en la primera la acción sobre X y en la segunda la conjugación. Sea $a : Z \to X$, definida por $a((x,P)) = x$. Claramente a es de G-copos, y $a^x = \{(y,P) \in Z \mid y \leq x\} = \{(x,P) \mid P \subseteq G_x\}$ es isomorfo a $\mathcal{F}(G_x)$, considerando $(x,P) \mapsto P$ tal isomorfismo.

Para cualquier G-copo discreto X, tenemos que $\Lambda_X = \sum_{n\geq 0}(-1)^n Sd_n(X) = Sd_0(X) = X$. Más aun, todos los elementos de S son máximos en X, por lo tanto $\tilde{\Lambda}_{]x,.[_X} = \tilde{\Lambda}_{\emptyset} = -G_x/G_x$ para todo $x \in X$. De la proposición 3.11 tenemos que

$$\Lambda_X = X = \Lambda_Z + \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}^G_{G_x}(\tilde{\Lambda}_{a^x}\tilde{\Lambda}_{]}x,.[_X) = \Lambda_Z - \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}^G_{G_x}(\tilde{\Lambda}_{\mathcal{F}(G_x)}G/G) =$$

$$X = \Lambda_Z - \sum_{x\in[G\backslash X]} \mathrm{Ind}^G_{G_x} St_{\mathcal{F}(G_x)(G_x)} \tag{3.1}$$

Consideremos ahora $b : Z \to \mathcal{F}$ la aplicación definida por $b((x,P)) = P$. Entonces si $(x,P) \subseteq (x,P')$, es porque $b((x,P)) = P \subseteq P' = b((x,P'))$ y dado $h \in G$ tenemos que $b(h.(x,P)) = b((h.x,^g P)) =^h P = h.b((x,P))$. Por lo tanto, b es de G-copos, y para $Q \in \mathcal{F}$

$$g_Q = \{(x,P) \in X \times \mathcal{F} \mid Q \subseteq P \subseteq G_x\}.$$

Veamos que g_Q es un $N_G(Q)$-copo. Es copo con el orden de la inclusion en la segunda entrada. Ahora bien, sea e el neutro de G entonces $e \in N_G(Q)$ y así $e.(x, P) = (e.x, {}^e P) = (x, P)$. Ahora consideremos $h, h' \in N_G(Q)$, entonces $(hh').(x, P) = ((hh').x, {}^{hh'} P) = (h.(h.x), {}^h({}^{h'}P)) = h.(h'.(x, P))$. Así, g_Q es un $N_G(Q)$-copo. Ahora consideremos las aplicaciones $c : g_Q \to X^Q$ y $d : x^Q \to g_Q$ definidas por $c((x, P)) = x$ y $d(x) = (x, Q)$. Si $(x, P) \leq (y, P')$, entonces $x = y$ y $P \subseteq P'$, y entonces $c((x, P)) = x = y = c((y, P'))$. Y dado $h \in N_G(Q)$ $c(h.(x, P)) = c((h.x, h.P)) = h.x = h.c((x, P))$, por lo tanto c es de G-copos. Ahora bien, dado que X lo estamos viendo como G-copo discreto, entonces X^Q tambien lo es y así d es de copos y dado $h \in N_G(Q)$, $d(h.x) = (h.x, Q) = (h.x, {}^h({}^{h^{-1}}Q)) = h.(x, {}^{h^{-1}} Q) = h.(x, Q) = h.d(x)$ pues $h^{-1} \in N_G(Q)$. Por lo tanto d también es de $N_G(Q)$-copos. Ahora dado $(x, P) \in g_Q$, $(d \circ c)((x, P)) = d(x) = (x, Q) \leq (x, P)$, es decir, $d \circ c \leq \mathrm{Id}_{g_Q}$. Y dado $x \in X^Q$, $(c \circ d)(x) = c((x, Q)) = x$, por lo tanto $c \circ d = \mathrm{Id}_{X^Q}$; con lo cual son comparables y $\Lambda_{g_Q} = \Lambda_{X^Q} = X^Q$ por ser X^Q $N_G(Q)$-copo discreto. Ahora por el corolario 3.12 parte 3. aplicado a b

$$\Lambda_Z = -\sum_{Q \in [G \backslash \mathcal{F}]} \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G \Lambda_{b_Q} \tilde{\Lambda}_{]., Q[_{\mathcal{F}}}$$

Pero $b_Q = \{(x, P) \in Z \mid Q \subseteq P\} = \{(x, P) \in X \times \mathcal{F} \mid Q \subseteq P \subseteq G_x\} = g_Q$ y entonces $\Lambda_{b_Q} = \Lambda_{g_Q}$. Además $\tilde{\Lambda}_{]., Q[_{\mathcal{F}}} = \tilde{\Lambda}_{]\mathbb{I}, Q[_{\mathcal{F}}} = \mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, Q)$. Sustituyendo todo esto en la suma anterior

$$\Lambda_Z = -\sum_{Q \in [G \backslash \mathcal{F}]} \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G X^Q \mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, Q).$$

Así al sustituir en 3.1 nos dice que

$$X = -\sum_{Q \in [G \backslash \mathcal{F}]} \mathrm{Ind}_{N_G(Q)}^G (\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, Q) X^Q) - \sum_{x \in [G \backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G St_{\mathcal{F}(G_x)(G_x)}$$

pero al pasar el primer sumando del lado derecho al izquierdo y por como se define $St_{\mathcal{F}}(G, X)$ tenemos que

$$St_{\mathcal{F}}(G, X) = -\sum_{x \in [G \backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G St_{\mathcal{F}(G_X)}(G_x).$$

Ahora para cualquier $x \in X$ y cualquier $P \in \mathcal{F}$, si $P \subseteq G_x$, entonces $St_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x)^P = 0$ por el lema 3.20. Finalmente de la proposición 1.2 inciso 3.

$$\begin{aligned}
St_{\mathcal{F}}(G, X)^P &= (-\sum_{x \in [G \backslash X]} \mathrm{Ind}_{G_x}^G St_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x))^P = -\sum_{x \in [G \backslash X]} (\mathrm{Ind}_{G_x}^G St_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x))^P = \\
&= -\sum_{x \in [G \backslash X]} \sum_{y \in [N_G(P) \backslash G / G_x], P^y \subseteq G_x} \mathrm{Ind}_{N_{{}^y G_x}(P)}^{N_G(P)/P} ({}^y St_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x))^P = \\
&= -\sum_{x \in [G \backslash X]} \sum_{y \in [N_G(P) \backslash G / G_x], P^y \subseteq G_x} \mathrm{Ind}_{N_{{}^y G_x}(P)}^{N_G(P)/P} (St_{\mathcal{F}(G_x)}(G_x)^P)^{y^{-1}} = \\
&= -\sum_{x \in [G \backslash X]} \sum_{y \in [N_G(P) \backslash G / G_x], P^y \subseteq G_x} \mathrm{Ind}_{N_{{}^y G_x}(P)}^{N_G(P)/P} (0)^{y^{-1}} = 0
\end{aligned}$$

como queríamos. ❏

REMARK 3.22. Otra prueba del teorema 3.21 puede ser encontrada en [**1**], donde las descomposiciones de $B(G)$ asociadas a $\mathcal{F}$ son construídas.

COROLARIO 3.23. *Sean G y $\underline{\mathcal{F}}$ como en 3.18, y supongamos más aun que $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrada bajo tomar subgrupos.*

1. *Si $P \in \underline{\mathcal{F}}$ y $X \in B(G)$, existe un entero $m_{P,X}$ tal que*

$$\operatorname{Res}^G_P St_{\mathcal{F}}(G, X) = m_{P,X} P/\mathbb{I}.$$

2. *Denotemos por $|G|_{\mathcal{F}}$ al m.c.m de los órdenes de elementos de $\mathcal{F}$. Entonces para cualquier G-copo finito X*

$$\tilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} |\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)| \tilde{\chi}(X^P) \equiv 0 \quad mod \ \ |G|_{\mathcal{F}}$$

y en particular

$$\tilde{\chi}(\mathcal{F}) \equiv 0 \quad mod \ \ |G|_{\mathcal{F}}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Y un elemento de $B(G)$ tal que $Y^P = 0$ para todo $P \in \mathcal{F}$. Consideremos la restricción de Y a un elemento Q de $\mathcal{F}$. Entonces

$$\operatorname{Res}^G_Q Y = \sum_{R \in [s_Q]} |Y^R| e^Q_R.$$

Dado que $\underline{\mathcal{F}}$ es cerrado al tomar subgrupos, el único término no cero en esta suma se obtiene cuando para $R = \mathbb{I}$. Así

$$\operatorname{Res}^G_Q Y = |Y| e^Q_{\mathbb{I}} = \frac{|Y|}{|Q|} Q/\mathbb{I}$$

la última igualdad nos la da el lema 2.17 inciso 3., pero ya que $\frac{|Y|}{|Q|} \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $|Y| \equiv 0$ mod $|Q|$ y por lo tanto $\operatorname{Res}^G_Q Y$ es un múltiplo entero de $Q/\mathbb{I}$.

1. Basta considerar $Y = St_{\mathcal{F}}(G, X)$, $Q = P$ y entonces el entero $m_{P,X}$ buscado será $|St_{\mathcal{F}}|/|P|$.
2. Considerando ahora X un G-copo, entonces $\widetilde{\Lambda}_X \in B(G)$ y aplicamos 1. entonces

$$\operatorname{Res}^G_P St_{\mathcal{F}}(G, \widetilde{\Lambda}_X) = m_{P,\widetilde{\Lambda}_X} P/\mathbb{I}$$

Tomamos la cardinalidad en ambos lados y tendremos que

$$\left|\operatorname{Res}^G_P St_{\mathcal{F}}(G, \widetilde{\Lambda}_X)\right| = \left|m_{P,\widetilde{\Lambda}_X} P/\mathbb{I}\right| = m_{P,\widetilde{\Lambda}_X} |P|$$

pero ademaás para cualquier $Y \in B(G)$ se tiene que $|\mathrm{Res}^G_H Y| = |Y|$, con lo cual y por el teorema 3.21

$$\left|\mathrm{Res}^G_P St_{\mathcal{F}}(G, \widetilde{\Lambda}_X)\right| = \left|St_{\mathcal{F}}(G, \widetilde{\Lambda}_X)\right| = \left|\sum_{P \in [G \backslash \underline{\mathcal{F}}]} \mathrm{Ind}^G_{N_G(P)}(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}\widetilde{\Lambda}^P_X)\right| =$$

$$= \left|\mathrm{Ind}^G_G\left(\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, \mathbb{I})\mathrm{Inf}^{N_G(\mathbb{I})}_{N_G(\mathbb{I})/\mathbb{I}}\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{I}}_X\right)\right| + \sum_{P \in [G \backslash \mathcal{F}]} \left|\mathrm{Ind}^G_{N_G(P)}\left((\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}\widetilde{\Lambda}_{X^P}\right)\right| =$$

$$= \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, \mathbb{I})\right| \left|\mathrm{Inf}^{N_G(\mathbb{I})}_{N_G(\mathbb{I})/\mathbb{I}}\widetilde{\Lambda}_X\right| + \sum_{P \in [G \backslash \mathcal{F}]} \frac{|G|}{|N_G(P)|} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \left|\mathrm{Inf}^{N_G(P)}_{N_G(P)/P}\widetilde{\Lambda}_{X^P}\right| =$$

$$= |G/G| \left|\widetilde{\Lambda}_X\right| + \sum_{P \in [G \backslash \mathcal{F}]} \frac{|G|}{|N_G(P)|} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \left|\widetilde{\Lambda}_{X^P}\right| = \left|\widetilde{\Lambda}_X\right| + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \left|\widetilde{\Lambda}_{X^P}\right| =$$

$$= \widetilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \widetilde{\chi}(X^P)$$

Pero para cada $P \in \mathcal{F}$, su orden divide a esta suma, entonces el mínimo común múltiplo de todos estos órdenes, $|G|_{\mathcal{F}}$, también lo divide, es decir

$$\widetilde{\chi}(X) + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \widetilde{\chi}(X^P) \equiv 0 \mod |G|_{\mathcal{F}}.$$

La segunda congruencia se obtiene al considerar en particular $X = \mathcal{F}$. Tendremos entonces

$$\widetilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \widetilde{\chi}(\mathcal{F}^P) = \widetilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \left|\widetilde{\Lambda}^P_{\mathcal{F}}\right| =$$

$$= \widetilde{\chi}(\mathcal{F}) + \sum_{P \in \mathcal{F}} \left|\mu_{\underline{\mathcal{F}}}(\mathbb{I}, P)\right| \left|St_{\mathcal{F}}(G)^P\right| \equiv 0 \mod |G|_{\mathcal{F}}$$

pero por el lema 3.20, $St_{\mathcal{F}}(G)^P = 0$ si $P \in \mathcal{F}$. Por lo tanto el segundo sumando se anula y se sigue la congruencia.

❑

Remark 3.24. Cuando $\mathcal{F}$ es el copo $S_p(G)$ de los p-subgrupos no triviales de G, la segunda congruencia es entonces $\widetilde{\chi}(s_p(G)) \equiv 0 \bmod |G|_p$, ésta se debe a Brown ([**3**]). Una prueba de esta congruencia usando los idempotentes del anillo de Burnside fue dada por Gluck ([**7**]) y Yoshida ([**14**]). Congruencias similares han sido estableciecidas por Thénevaz ([**11**]) y Brown y Thénevaz ([**4**]).

El cálculo de los invarientes de Steinberg de los grupos simétricos, o más generalmente productos trenzados de un grupo finito con grupos simétricos, puede encontrarse en ([**2**]). Este requiere el uso de un anillo de series de potencias formales con coeficientes en anillos de Burnside.

Bibliografía

[1] S. Bouc *Projecteurs dans l'anneau de Burnside, projecteurs dans l'anneau de Green, et modules de Steinberg géneralisés*. J. Algebra **139**(2): 395-445, 1991.

[2] S. Bouc *Exponentielle et modules de Steinberg*. J. Algebra **150**(1): 118-157, 1992.

[3] K. Brown *Euler characteristics of groups: the p-fractional part*. Invent. Math. **29**: 1-5, 1975.

[4] K. Brown; J. Thénevaz *A generalization of Sylow's third theorem*. J. Algebra **115**: 414-430, 1988.

[5] A. Dress *A characterization of solvable groups*. Math. Z. **110**: 213-217, 1969.

[6] A. Dress *Notes on the theory of representations of finite groups*. Bielefeld Notes. 1971.

[7] D. Gluck *Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the p-subgroup simplicial complex*. Illinois J. Math. **25**: 63-67, 1981.

[8] D. Quillen *Higher algebraic K-theory*. Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin: 85-147, 1973.

[9] D. Quillen *Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgrups*. Adv. in Math. **28**(2): 101-128, 1978.

[10] L. Solomon *The Burnside algebra of a finite group*. J. Combin. Theory **2**: 603-615, 1967.

[11] J. Thénevaz *Idempotents de l'anneau de Burnside et caractéristique d'Euler*. Séminaire Claude Chevalley sur les groupes finis, Vol. 25, Tome 3, Publications mathématiques de l'Université Paris 7: 207-217, 1985.

[12] J. Thénevaz *Permutation representation arising from simplicial complexes*. J. Combin. Theory Ser. A **46**: 122-155, 1987.

[13] J. Thénevaz; P. Webb *Homotopy equivalences of posets with a group action*. J. Combin, Theory **56**(2): 173-181,1991.

[14] T. Yoshida *Idempotents in Burnside rings and Dress induction theorem*. J. Algebra **80**: 90-105, 1983.