



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

“ESTABILIDAD MULTIDIMENSIONAL DE TRANSICIONES DE
FASE PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE PRIMER
ORDEN”

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

MAT. IGNACIO PÉREZ PÉREZ

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. RAMÓN GABRIEL PLAZA VILLEGAS

MÉXICO, D.F.

FEBRERO, 2012



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Antecedentes	2
1.3. Conclusión	4
I TEORÍA MATEMÁTICA	5
2. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación	7
2.1. Leyes de conservación hiperbólicas	8
2.2. Sistemas simétricos	12
2.2.1. Simetrización	13
2.3. Problema Bien Planteado	14
2.3.1. Espacios de funciones y normas	14
2.3.2. Problemas bien planteados localmente	15
2.3.3. Rompimiento de las Soluciones (blow-up)	16
2.3.4. Teoría No-Lineal	17
2.4. Ondas de Choque	18
2.4.1. Condiciones de Lax	19
2.4.2. Choques No Clásicos	21
2.4.3. Estabilidad Multidimensional	22
2.4.4. Estabilidad de frentes de choque planos	23
2.5. Problemas de valores iniciales y en la frontera	31
2.5.1. Análisis de modos normales	31
2.5.2. Teoría de Kreiss	32
II TRANSICIONES DE FASE	39
3. Estabilidad de los choques subcompresivos	43
3.1. Introducción	43
3.2. Ecuaciones de Euler para un fluido de van der Waals	45
3.2.1. Relaciones cinéticas	51
3.3. Estabilidad de transiciones de fase con el criterio de capilaridad	58
3.3.1. Condiciones adicionales	60
3.3.2. Determinante de Lopatinskii	70
3.3.3. El determinante de Lopatinskii	71
3.3.4. Desarrollo del determinante de Lopatinskii	79

3.3.5. Estabilidad débil para transiciones de fase diferentes de las que cumplen el equilibrio de Maxwell	81
4. Estabilidad de transiciones de fase con el criterio de viscosidad-capilaridad	87
4.1. Transiciones de fase admisibles	87
4.2. Transiciones de fase dinámicas	89
4.3. Estabilidad de las transiciones de fase	90
4.4. La condición de Kreiss-Lopatinskii	93
4.5. El determinante de Kreiss-Lopatinskii	94
4.6. La condición de Lopatinskii en una dimensión	95
4.7. Condición de Lopatinskii completa	97
4.8. La estabilidad uniforme de las transiciones de fase	105

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Las ondas de choque aparecen como soluciones débiles de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. El análisis de su estabilidad en espacios multidimensionales aparece por primera vez en los trabajos pioneros de Andrew Majda [A. Majda, 1983,1984], quien estableció el criterio fundamental de estabilidad conocido como la **condición uniforme** como una extensión de la condición de Kreiss-Lopatinskii.

Los fluidos con una ecuación de estado dada por la ecuación de van der Waals exhiben fronteras fase las cuales se propagan cuando la temperatura del fluido está dentro de un rango crítico. Es interesante el estudio de estas fronteras fase porque aparecen propiedades que las ondas de choque llamadas *clásicas* (como las ondas de choque de Lax) no tienen, como es la velocidad subsónica del fluido. Es decir, para una frontera de fase la velocidad antes y después del frente es menor que la velocidad del sonido. Así, debido a que el fluido es subsónico no se cumplen las desigualdades de Lax que garantizan la estabilidad de la frontera de fase. Por otro lado el criterio de disipación de Lax se cumple por muchos frentes de fase que no son físicamente admisibles. Este problema es subsanado cuando se le impone algún criterio de admisibilidad adicional a la frontera de fase. Sin embargo, no existe aún, la manera de seleccionar este criterio. Ésta es la razón principal de por que hay varios criterios alternativos que se desarrollan para seleccionar el frente de fase admisible.

En esta tesis se explora la aplicación de una metodología y de criterios de estabilidad que A. Majda aplicó al caso de las ondas de choque *clásicas* pero para la variante de las fronteras de fase planas. Nos basamos en los trabajos de Sylvie Benzoni Gavage [S. Benzoni-Gavage, 1998/1999], quien aplicó los criterios de capilaridad y capilaridad-viscosidad, a los fluidos de van der Waals, para obtener estabilidad débil con el primer criterio y estabilidad uniforme para el segundo.

1.2. Antecedentes

Dado un sistema de leyes de conservación hiperbólico no lineal en un espacio de dimensión mayor que uno, la pregunta sobre la existencia y estabilidad de la solución, entendiendo estabilidad como una dependencia continua de los datos iniciales, permanece como un problema abierto.

Para el caso de las ecuaciones de Euler para un fluido isotérmico en un espacio multidimensional la respuesta fue dada por A. Majda en los inicios de los ochentas. Andrew Majda demostró la estabilidad lineal y la no-lineal tomando la hipótesis de estabilidad uniforme. También demostró la existencia local en el tiempo de las ondas de choque para las ecuaciones de Euler [A. Majda,1984].

Para el estudio de las ecuaciones de Euler que gobiernan el movimiento de un fluido isentrópico no-viscoso en \mathbb{R}^d

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

cuando la ecuación de estado, para la función de presión p es función únicamente de la densidad ρ . Esta característica aparece cuando hay transición de fase, digamos de líquido a vapor. La ecuación de estado tiene una región llamada *espinodal*

donde el sistema es elíptico, fuera de esta región el sistema es hiperbólico, para una temperatura más allá de un punto crítico.

El procedimiento aplicado por A. Majda para las ondas de choque de Lax, fue extendido por J.F. Coulombel [J.F. Coulombel, 2003] para el caso de los sistemas que violan la hipótesis que Majda usó para los choques *clásicos*, siguiendo las ideas propuestas por Freistühler [H. Freistühler, 1998] para extender los resultados de Majda, y haciendo algunas adaptaciones a este proceso Coulombel determinó las condiciones para encontrar estabilidad débil (según la definición establecida por Majda).

En resumen, el método de Majda consiste en transformar un problema de frontera libre a un problema con valores iniciales y en la frontera. Es decir, mediante un cambio de variables las ecuaciones de Euler son expresadas en el semiespacio, digamos $\{(x, y, z) | z > 0\}$. Después se linealizan las ecuaciones en la vecindad de una solución simple como onda plana para obtener las ecuaciones linealizadas de un problema de valores iniciales y valores en la frontera. Para este problema de valores iniciales y en la frontera lineal se demuestra que es un problema bien planteado para obtener que el sistema de las ecuaciones de Euler es linealmente estable. De la teoría de los problemas de valores iniciales y en la frontera para sistemas hiperbólicos lineales [R.L. Higdon, 1986], el primer paso es obtener el determinante de Lopatinskii y entonces verificar la posición de sus ceros para concluir si se tiene estabilidad uniforme o estabilidad débil.

Para el caso de las transiciones de fase se tiene subcompresividad de grado uno (siguiendo la nomenclatura propuesta por Freistühler) esto implica que se requiere de una condición (cinética) adicional en el problema de valores iniciales y en la frontera. Esta condición cinética adicional, y que proviene en muchos casos de aspectos de la física (tal como la capilaridad y la viscosidad), y que permita obtener un problema de valores iniciales y en la frontera que sea bien planteado a la Hadamard, y de esta manera se puede calcular el determinante del sistema para verificar la condición de Lopatinskii.

En el trabajo de Sylvie Benzoni Gavage [S. Benzoni-Gavage, 1998] se describe el proceso de Andrew Majda aplicado a las ecuaciones de Euler isotrópicas, para un fluido de van der Waals. Obteniendo, primero con las condiciones de capilaridad que la solución es débilmente estable. Pero al cambiar la condición cinética adicional, usando en lugar de sólo capilaridad también la viscosidad, se verifica la condición uniforme de Lopatinskii obteniéndose estabilidad uniforme. En esos trabajos se resalta el papel que juega la condición cinética adicional, para los choques subcompresivos que permitió obtener la estabilidad uniforme. También es importante resaltar el método que Majda creó y su extensión. Con esto como antecedente se elaboró el presente trabajo.

En el capítulo 2, exponemos algo de la teoría matemática de las ondas de choque y se dan algunas definiciones. Se expone el método de Majda para los choques de Lax.

En el capítulo 3, se plantea el criterio de capilaridad, siguiendo el trabajo de Sylvie Benzoni Gavage para obtener estabilidad débil.

En el capítulo 4, se cambia el criterio de capilaridad por viscosidad-capilaridad teniendo como resultado la estabilidad uniforme.

1.3. Conclusión

El tema central de este trabajo es el estudio de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden expresados como sistemas de leyes de conservación. Las ecuaciones de Euler para los fluidos isotrópicos, con una la ecuación de estado que no es estrictamente creciente o decreciente presenta el problema de ser subcompresivo, dado que se requiere de una condición adicional para obtener el problema de valores iniciales y en la frontera linealizado que sea bien planteado. En matemáticas un tema de investigación es la caracterización de aquellos criterios que permitan obtener la condición adicional que, aplicando el método descrito por Majda, nos permita obtener el tipo de estabilidad, débil o uniforme según la condición (generalizada) de Kreiss-Lopatinskii.

Algunos de los objetivos planteados son

A) Describir la estabilidad de las ondas planas que cumplen la condición de Lax, lineales y no-lineales, para espacios multidimensionales.

B) Presentar el método que usó A. Majda para las ondas clásicas y la extensión correspondiente para los choques sub-compresivos.

C) Se presenta, siguiendo el trabajo de Benzoni [S.Benzoni-Gavage, 1998/1989], el caso de estudio para cuando las ecuaciones de Euler para un fluido de van der Waals. Donde se muestra la estabilidad lineal débil de la solución bajo un criterio de admisibilidad de capilaridad, y la estabilidad uniforme bajo el criterio de viscosidad-capilaridad.

Parte I

TEORÍA MATEMÁTICA

Capítulo 2

Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

En este capítulo queremos hacer mención de algunos aspectos relacionados con los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en espacios multidimensionales. Las soluciones continuas y las soluciones débiles, originadas por el efecto de rompimiento de la solución continua en un tiempo finito. La definición de las ondas de choque de Lax y la teoría de A. Majda para la estabilidad de estas ondas de choque *clásicas*. Se describe la condición uniforme de Lopatinskiĭ, establecida para obtener que el problema linealizado tenga la propiedad de ser un problema bien planteado.

2.1. Leyes de conservación hiperbólicas

En esta sección damos una breve introducción a la teoría matemática de los sistemas de leyes de conservación hiperbólicas. Los sistemas de leyes de conservación se originan como resultado de la modelación macroscópica de problemas dinámicos de la mecánica del medio continuo dentro de la física. Las leyes de conservación expresan el hecho de que la razón de cambio de la cantidad total de la densidad \mathbf{u} de una substancia macroscópica, digamos: masa, momento o energía, contenida en un dominio fijo, sea Ω , es igual al flujo de esa substancia $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ que cruza la frontera, $\partial\Omega$, de este dominio. Si despreciamos el término fuente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

con \mathbf{n} la normal unitaria exterior de $\partial\Omega$.

La forma conservativa de esta ecuación para la función vectorial \mathbf{u} suave se ve como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ con t la variable en el tiempo y \mathbf{x} la variable en el espacio, $\nabla_{\mathbf{x}}$ denota la divergencia con respecto a \mathbf{x}

Ejemplos de sistemas de leyes de conservación incluyen ecuaciones de la dinámica de gases, sistemas de magnetohidrodinámica, ecuaciones de elastodinámica, óptica no-lineal y muchos más. Los sistemas de la dinámica de gases se verán con más detalle. En general la ecuación (2.2) puede ser un sistema de m ecuaciones en un espacio de d variables y el número de variables m no es necesariamente igual al número de variables independientes d . Usando coordenadas cartesianas podemos escribir $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, y $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\mathbf{f}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{f}_d(\mathbf{u})) : \mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m)^d$ con $\mathbf{f}_j(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ para $j = 1, 2, \dots, d$

La forma *semilineal*, suponiendo que el flujo $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ es diferenciable, y usando la regla de la cadena, queda como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

donde las matrices jacobianas de $m \times m$, \mathbf{A}_j son:

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \equiv \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}) \quad (2.4)$$

Consideremos soluciones como ondas planas $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}, t)$ de (2.3) para $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ con $|\mathbf{k}| = 1$. Sea $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = x$, entonces $\mathbf{w}(x, t)$ satisface

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

con

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \equiv \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{w}) k_j \quad (2.6)$$

Para que una onda plana sea solución estable se requiere que la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ definida como (2.6) tenga m valores propios todos reales y que sea diagonalizable. Introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.1 (Hiperbolicidad) Decimos que el sistema (2.3) es hiperbólico si para cualquier \mathbf{w} y para todo real distinto de cero k_j , la matriz (2.6) tiene m valores propios reales y un conjunto completo de vectores propios.

Definición 2.2 (Genuinamente no-lineal) La j -ésima familia característica es llamada genuinamente no-lineal, si el j -ésimo valor propio $\lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ y el correspondiente vector propio $\mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k})$ de la matriz (2.6), determinada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k})$$

si satisfacen

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \neq 0 \text{ para cualquier } \mathbf{w} \text{ y } \mathbf{k} \text{ con } |\mathbf{k}| = 1. \quad (2.7)$$

Definición 2.3 (Linealmente degenerado) Decimos que la j -ésima familia de características es linealmente degenerada si

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = 0 \text{ para cualquier } \mathbf{w} \text{ y } \mathbf{k} \text{ con } |\mathbf{k}| = 1.$$

Observación: G. Boillat [G.Boillat, 1972] mostró que si se tiene

$$\lambda_i(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \quad \forall \mathbf{w} \text{ y } \mathbf{k} \text{ con } |\mathbf{k}| = 1 \text{ donde } i \neq j$$

entonces

$$\nabla_{\mathbf{w}} \lambda_i(\mathbf{w}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i(\mathbf{w}, \mathbf{k}) = 0 = \nabla_{\mathbf{w}} \lambda_j \cdot \mathbf{r}_j(\mathbf{w}, \mathbf{k})(\mathbf{w}, \mathbf{k}).$$

La teoría matemática de leyes de conservación fue desarrollada principalmente bajo las suposiciones de *hiperbolicidad estricta* y *genuinamente no-lineal*. Esas suposiciones, sin embargo, son muy restrictivas para el tratamiento de muchas de las aplicaciones. De hecho, los sistemas estrictamente hiperbólicos son excepciones. Lax [P.D. Lax, 1982] y otros autores como Friedlands, Robbin, Sylvester [S. Friedlands, J.W. Robbin, J. Sylvester, 1984] mostraron que para $m = 2, 3, 4, 5, 6$, con $d = 3$, cualquier sistema hiperbólico de $m \times m$ debe ser no-estictamente hiperbólico, (de hecho para 3 dimensiones, también los sistemas con $m = 10, 11, 12$, etc. son hiperbólicos no-estictamente ver [P.D. Lax, 1982] y [S. Friedlands, J.W. Robbin, J. Sylvester, 1984] para detalles. De ahí que las soluciones como ondas planas para tales sistemas en tres dimensiones son descritos por sistemas hiperbólicos unidimensionales con valores propios colindantes.

Algunos ejemplos de sistemas de leyes de conservación

Veamos algunos ejemplos de tales sistemas de leyes de conservación expresados como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_+}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u}_+)}{\partial x_j} = 0$$

Uno de estos es el sistema de las ecuaciones de la física la tenemos en las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{B} + \text{rot} \vec{E} &= 0, \\ \partial_t \vec{E} - \text{rot} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ representa el campo magnético y $\vec{E} \in \mathbb{R}^3$ el campo eléctrico.

La ecuación de segundo orden, la ecuación de onda

$$\partial_{tt} u - \Delta u = 0$$

la cual planteamos como un sistema de primer orden tomando $v = \nabla u$ y $w = -u_t$ con $n = d + 1$

$$\begin{aligned} v_t + \nabla w &= 0 \\ w_t + \text{div} v &= 0 \end{aligned}$$

El caso de las ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de la dinámica de gases en variables eulerianas que nos servirá a lo largo del trabajo, está dado por:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{v} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p &= 0 \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) + \text{div} \left[\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e + p \right) \mathbf{v} \right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

y usando la notación tradicional de las cantidades físicas

- ρ : es la densidad del fluido
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$: es la velocidad
- p : es la presión
- e : es la energía interna por unidad de masa (energía interna específica)

El vector correspondiente a \mathbf{u} de la ecuación (2.3) esta dado por:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \end{pmatrix}$$

\mathbf{u} es el vector de las variables conservadas. El sistema (2.8) esta relacionado con una ecuación de estado que describe el comportamiento del gas bajo consideración. Esta ecuación se plantea, usualmente, como:

$$p = p(\rho, e)$$

Es decir, la presión en el interior del gas está determinada por la densidad y la energía interna. La ecuación de estado más simple es la de un gas ideal politrópico, para la cual tenemos

$$p = (\gamma - 1) \rho e,$$

donde la γ es una constante adiabática ($\gamma = \frac{5}{3}$ para un gas monoatómico y $\gamma = \frac{7}{5}$ para un gas diatómico). Trataremos con detalle las ecuaciones de estado para los modelos de transición de fase. El sistema (2.8) puede describir el comportamiento de un líquido. Por esta razón, también se le llama ecuaciones de la hidrodinámica. Su derivación formal se remonta a d'Alambert, no obstante, nos referiremos a ellas como las ecuaciones de Euler. Un simple modelo de (2.8) es el sistema de la dinámica de gases isentrópicos. Recordamos que la segunda ley de la termodinámica asegura la existencia de una función s llamada entropía específica, que satisface

$$T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

donde T es la temperatura. Si (ρ, \mathbf{v}, e) es una solución regular (digamos de clase C^1) de (2.8), se muestra que s satisface

$$\partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0.$$

La entropía resulta ser constante a lo largo de las *líneas de corriente*. Si suponemos que s es constante en todo el espacio, esta última ecuación es trivialmente satisfecha y (2.8) se reduce a las ecuaciones de la dinámica de gases isentrópicos:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p &= 0 \end{aligned} \right\}$$

la presión p es una función de la densidad ρ . Este último sistema constituye el ejemplo simple de un sistema no lineal.

Regresemos al ejemplo de la dinámica de fluidos no compresibles. Expresaremos el sistema semilineal (2.8) en las variables (ρ, \mathbf{v}, s) , de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \\ \partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde la presión p es en adelante una función de ρ y de s .

La matriz $A(\mathbf{u}, \xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j df^j(\mathbf{u})$ correspondiente está dado por

$$A(\mathbf{u}, \xi) := \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \xi & \rho \xi^t & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \xi & (\mathbf{v} \cdot \xi) I_d & \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial s} \xi \\ 0 & 0 & \mathbf{v} \cdot \xi \end{pmatrix}$$

Se puede verificar (ver por ejemplo [S. Benzoni-Gavage, D. Serre, 2007]) que $A(\mathbf{u}, \xi)$ es diagonalizable sobre \mathbb{R} si y solamente si

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$$

Desde un punto de vista físico, esto es una restricción razonable, ver [S. Jaouen, 2001]. La cantidad $\partial_\rho p$ es homogénea y definimos la velocidad del sonido como

$$c := \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

Con esta definición, los valores propios de $A(\mathbf{u}, \xi)$ son

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{u}, \xi) &:= \mathbf{v} \cdot \xi - c|\xi| && \text{con multiplicidad } m_1 = 1, \\ \lambda_2(\mathbf{u}, \xi) &:= \mathbf{v} \cdot \xi && \text{con multiplicidad } m_2 = d, \\ \lambda_3(\mathbf{u}, \xi) &:= \mathbf{v} \cdot \xi + c|\xi| && \text{con multiplicidad } m_3 = 1. \end{aligned}$$

De igual manera se puede ver [S. Benzoni-Gavage, D. Serre, 2007] que el sistema (2.8) admite un simetrizador de Friedrichs (ver sección 2.2.1 de este capítulo) ya que la velocidad del sonido está bien definida.

2.2. Sistemas simétricos

El desarrollo histórico de la teoría de leyes de conservación fue motivado principalmente en la dinámica de fluidos. Para referencias recomendamos los libros de R. Courant y K. O. Friedrichs [34], P. D. Lax [P.D. Lax, 1957] o A. Majda [A. Majda, 1983]. Kurt Friedrichs fue el primero en observar que no solamente en la dinámica de gases sino que también las ecuaciones de la mecánica continua pueden ser representados como sistemas *simétricos* o *simetrizables*. La definición original de Friedrichs abarca ecuaciones más generales que el sistema (2.3).

Definición 2.4 (*Hiperbólico simétrico*) *El sistema semilineal de ecuaciones*

$$\mathbf{L}\mathbf{u} \equiv \mathbf{A}_0(\mathbf{u})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.9)$$

es hiperbólico simétrico si

- todas las matrices $\mathbf{A}_j(\mathbf{u})$ son simétricas para $j = 0, 1, \dots, d$
- la matriz $\mathbf{A}_0(\mathbf{u})$ es positiva definida

Observación: Para el sistema (2.3), donde $\mathbf{A}_0(\mathbf{u}) = I$ es la identidad, esta definición obviamente se reduce al requerimiento único de la simetría de las matrices $\mathbf{A}_j(\mathbf{u})$ con $j = 1, \dots, d$

Observación: En ocasiones sucede que las aplicaciones que tienen el sistema (2.3) no es simétrico, pero existe una matriz definida positiva, digamos \mathbf{S} , tal que cuando el sistema es multiplicado por \mathbf{S} el sistema se hace hiperbólico simétrico. En estos casos el sistema (2.3) es llamado *simetrizable*.

El sistema (2.3) se dice que es **simetrizable** en el sentido de Friedrichs, si existe una aplicación

$$\mathbf{S} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

tal que, para toda $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ y para toda $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbf{S}(\mathbf{u})A_j(\mathbf{u})$ es simétrica y $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ es simétrica definida positiva. Además, $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ es de clase C^∞ .

La hiperbolicidad es una condición *necesaria* para resolver (2.3). Una condición *suficiente* para resolver (2.3) localmente (con una condición inicial \mathbf{u}_0 en un espacio de Sobolev H^k , con k lo suficientemente grande) es que el sistema (2.3) sea simetrizable según Friedrichs.

Un resultado es que, todo sistema simetrizable es hiperbólico, damos la referencia [D. Serre, 1999] y [K.O Friedrichs, 1958].

2.2.1. Simetrización

La idea de la simetrización de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas viene de S.K. Godunov [S.K. Godunov, 1962] al ser el primero en simetrizar las ecuaciones de la dinámica de gases.

Después Friedrichs y Lax [K. O. Friedrichs, P. Lax, 1971] generalizan la idea de Godunov a sistemas hiperbólicos abstractos de leyes de conservación. El Hessiano de una *función de entropía matemática* sirve como un simetrizador.

Definición 2.5 (Función de entropía matemática) Una función de valores vectoriales $\eta(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una función de entropía matemática asociada con (2.3) con (2.4), si existe una función de valores vectoriales (flujo entrópico) $\mathbf{q}(\mathbf{u}) = (q_1(\mathbf{u}), \dots, q_d(\mathbf{u}))$ con $q_j(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ para $j = 1, 2, \dots, d$ tal que

$$(\nabla_{\mathbf{w}}\eta)(\nabla_{\mathbf{w}}f_j) = (\nabla_{\mathbf{w}}q_j)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_d(\mathbf{u}))$

Definición 2.6 (Entropía estrictamente convexa) La función de entropía $\eta(\mathbf{u})$ es llamada estrictamente convexa si su Hessiano es estrictamente definido positivo, esto es si

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}\mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq 0$$

donde $\mathbf{H} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}(\nabla_{\mathbf{u}}\eta(\mathbf{u}))$

Teorema 2.1 (Simetrización) Supongamos que $\eta(\mathbf{u})$ es una función entrópica estrictamente convexa asociada con los sistemas (2.3) o (2.4), entonces

$$\mathbf{H}\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{H},$$

tal que los sistemas (2.3) o (2.4) son simetrizables.

Definición 2.7 (Solución entrópica) Una función \mathbf{u} es una solución entrópica si satisface (2.3) para toda función entrópica, $\eta(\mathbf{u})$, una desigualdad adicional es satisfecha

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(\mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{u}) \leq 0$$

en el sentido de las distribuciones.

La pregunta básica sobre existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones entrópicas para sistemas generales no lineales hiperbólicos esta abierta. La noción de una solución entrópica está íntimamente relacionada a la noción de solución como límite viscoso la cual fue introducida como una salida sencilla a una *unicidad* relevantemente física, que sea solución débil de (2.3) por el procedimiento de pasar al límite.

Definición 2.8 (Solución viscosa) Una función \mathbf{u} es una solución viscosa de (2.3) si $\mathbf{u} = \lim \mathbf{u}^\epsilon$ donde \mathbf{u}^ϵ satisface

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (Q \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^\epsilon), \quad \text{con } Q\epsilon > 0 \quad (2.10)$$

La ventaja general de la simetrización es que localmente el problema de Cauchy es bien planteado para el sistema simetrizado.

2.3. Problema Bien Planteado

Que un problema sea *bien planteado* define la existencia, unicidad y estabilidad de la solución para este problema. La propiedad de si un problema es bien planteado es importante para el modelo matemático. Antes de pasar a los teoremas acerca de problemas con valores iniciales para sistemas no-lineales hiperbólicos, damos algunos aspectos sobre espacios de funciones y normas. Es importante el espacio que será seleccionado y con que tipo de topología estará provisto este espacio, ya que esto determina la noción de convergencia.

2.3.1. Espacios de funciones y normas

Espacios L^p y Espacios de Sobolev

El espacio de funciones de cuadrado integrable L^2 es muy útil en la teoría lineal. Tiene una interpretación física de energía finita. Las estimaciones de las soluciones en la norma L^2 da un problema bien planteado con una solución débil. Gracias a Friedrichs aplicó la técnica de *multiplicadores* para obtener un problema bien planteado con solución clásica es necesario solamente hacer la estimación en espacios de Sobolev. En otras palabras se tiene para estimar las derivadas de la soluciones en al norma L^2 .

Ahora definiremos los espacios de Sobolev H^m . La función $f \in L^2$ pertenece al espacio de Sobolev H^m si es m veces diferenciable débilmente, y si cada una de las derivadas débiles $f^{(j)} \in L^2$, $j = 1, \dots, m$. En particular $H^0 = L^2$.

El espacio H^m esta provisto naturalmente con la norma asociada

$$\|f\|_{H^m} = \|f\|_{L^2} + \|f^{(m)}\|_{L^2}.$$

Definimos también la norma en L^p :

$$\text{si } 1 \leq p < \infty, \|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\text{si } p = \infty, \|f\|_{L^p} = \sup \text{ess}_x |f(x)|$$

De forma análoga que para H^m , podemos definir el espacio de Sobolev $W^{m,p}$. La función $f \in L^p$ pertenece al espacio de Sobolev $W^{m,p}$ si es m -veces diferenciable débilmente y cada una de las derivadas $f^j \in L^p$, con $j = 1, \dots, m$. Tenemos en particular que $W^{m,0} = H^m$ y $W^{0,p} = L^p$. $W^{m,p}$ tiene la norma asociada

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f^{(m)}\|_{L^p}.$$

Teoría lineal

Que un problema sea bien planteado, ya sea el **Problema con Valores Iniciales** (PVI) o el **Problema de Valores Iniciales y en la Frontera** (PVIF) para ecuaciones diferenciales parciales lineales hiperbólicas, es entendido gracias a los resultados del análisis funcional, como el teorema de representación de Riesz y el teorema de Hahn-Banach. La estimación de energía (*a priori*) en L^2 por él dada y el problema adjunto con el uso de los teoremas mencionados se obtiene existencia de la solución *débil* en el espacio L^2 para un problema dado. Así, en estimaciones similares en los espacios de Sobolev junto con la técnica de molificadores de Friedrichs que implica la regularidad y una existencia global en el tiempo de una solución clásica para los problemas lineales hiperbólicos.

2.3.2. Problemas bien planteados localmente

La suposición de simetría asumida anteriormente permite usar la estimación de energía para mostrar existencia y unicidad en tiempo local de la solución clásica del problema de Cauchy (2.9). La idea de la prueba de la existencia local en el tiempo para las ecuaciones semilineales en espacios generales de Banach se hace con la ayuda de un principio de contracción y el teorema de punto fijo, usando un esquema iterativo, y se debe al matemático polaco J. P. Schauder. Su más moderna versión con aplicaciones a sistemas hiperbólicos de primer orden semilineales se puede encontrar en P. D. Lax [P.D. Lax, 1957], ver también [A. Majda, 1983], [T. Kato, 1975].

Teorema 2.2 (Problema bien planteado localmente) *Consideremos el problema de Cauchy*

$$\mathbf{L}\mathbf{u} := \mathbf{A}_0(\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j\mathbf{u}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

Suponemos que $\mathbf{u}_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s > \frac{n}{2} + 1$. Entonces existe un intervalo de tiempo $[0, T]$ con $T > 0$, de tal manera que, el problema de Cauchy tiene una solución clásica $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$.

Observación: Un teorema similar es cierto para los sistemas no-homogeneos $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

El teorema proporciona solamente una existencia local de una solución suave para sistemas hiperbólicos simétricos semilineales. Para ecuaciones no-lineales hiperbólicas existe un tiempo T_* tal que \mathbf{u} o sus derivadas se rompen (blow-up) cuando $t \rightarrow T_*$

2.3.3. Rompimiento de las Soluciones (blow-up)

Del teorema anterior se puede ver que las *soluciones clásicas* del problema de Cauchy para sistemas no-lineales simétricos hiperbólicos existe sólo en *un corto tiempo*. Aún cuando los datos iniciales sean suaves, las singularidades se desarrollan en un tiempo finito. La ruptura de la solución clásica se puede relacionar con la formación de ondas de choque y obligar a extender la clase de soluciones admisibles para los problemas no-lineales con el fin de incluir las soluciones débiles que contienen discontinuidades. Desafortunadamente, las soluciones débiles en general no son únicas, tenemos que imponer un criterio de admisibilidad adicional para seleccionar una solución. Tal criterio en los sistemas físicos son, de alguna forma, como desigualdad entrópica. Veremos diferentes criterios de admisibilidad en la sección dedicada a las ondas de choque.

Esta situación se empeora si tratamos con sistemas de 3 por 3 y datos semiperiódicos. Lo que hace relevante a estos casos es una interacción de ondas tal que pueden tener un efecto desestabilizador. Durante tales interacciones las amplitudes de onda pueden magnificarse y en un tiempo finito explotar (*blow-up*) tanto en las normas de L^2 como en los espacios de variación acotada (BV). Los ejemplos de *blow-up* pueden ser encontrados en [H.K. Jenssen, 2000], [J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, 1993], [R. Young, 2003], [R. Young, W. Szeliga, 2005].

En dinámica de gases hay una clase de datos iniciales que dan soluciones continuas no globales que ya fueron tratadas por Sideris [T.C. Sideris, 1985]. Por otra parte, Grassin ha construido las soluciones regulares globales ver [M. Grassin, 1998].

La ruptura de las soluciones del sistema hiperbólico (2.3) en un tiempo finito está relacionada con la formación de **ondas de choque**; estas ondas de choque son consideradas las soluciones de (2.3) y resultan ser regulares de uno y otro lado de una hipersuperficie en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Como un ejemplo, la solución de la ecuación de Burgers, la cual se escribe en forma conservativa como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

esta es la ecuación de Burgers sin viscosidad. Se ve que la ecuación tiene todas las características de una ecuación escalar convexa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave *convexa*. En particular, el problema de Cauchy para la ecuación de Burgers puede tener soluciones discontinuas para una función dada u_0 como dato inicial suave. La onda se desplaza progresivamente hacia la derecha y deja de ser regular al cabo de un tiempo finito.

Naturalmente el problema es resolver el sistema hiperbólico (2.11) con los datos iniciales \mathbf{u}_0 que son regulares, tanto de un lado como del otro de una hipersuperficie, en \mathbb{R}^d . Estas consideraciones nos llevan a un problema cada vez más complejo, pues una sola superficie de discontinuidad puede instantáneamente generar muchas

otras discontinuidades. De hecho, cuando se considera el problema de Riemann unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_r & x > 0, \\ u_l & x < 0, \end{cases}$$

la solución u en el instante $t > 0$ presenta puntos de discontinuidad (o de no derivabilidad), sin importar si esta solución tiene solamente un punto de discontinuidad en el instante inicial, ver por ejemplo [P.D. Lax, 1957], [P.D. Lax, 1973], [D. Serre, 1999]). En el caso multidimensional, la situación no cambia, y se espera que esta única hipersuperficie de discontinuidad en el instante inicial genere muchas otras en la solución. Pero, si la condición inicial cumple con ciertas relaciones de compatibilidad, la solución no presentará más allá que esta hipersuperficie de discontinuidad. Nos limitaremos a este caso. Así que las soluciones que consideraremos toman la forma de ondas de choque (a diferencia de las ondas de rarefacción y las ondas sónicas).

2.3.4. Teoría No-Lineal

En lo relacionado a la teoría no-lineal, un método desarrollado para que un problema hiperbólico no-lineal sea bien planteado es considerar sus aproximaciones viscosas y dispersivas (difusivas) para evitar el problema con discontinuidades. Tales efectos como la difusión o la viscosidad suavizan las soluciones discontinuas de los problemas no-lineales hiperbólicos. Lo siguiente es pasar al límite, tomando la dispersión o la viscosidad tendiendo a cero, sin embargo, las oscilaciones rápidas y concentraciones de soluciones encontradas en este proceso pueden causar serios problemas.

Además, en los problemas no-lineales multidimensionales permanece desconocido cuál es el espacio funcional apropiado para que estos problemas sean bien planteados. Se está aún lejos de los resultados relacionados con la existencia de soluciones débiles de sistemas de leyes de conservación. Las dos suposiciones básicas es sobre la estructura de los valores propios del sistema hiperbólico: *estrictamente hiperbólico*, esto es determinado por los valores propios, y *genuinamente no lineal*, que es la monotonicidad de los valores propios en la dirección del correspondiente vector propio derecho. Bajo estas suposiciones la existencia global en el tiempo de las soluciones débiles para el problema de Cauchy con datos iniciales de variación acotada fue probada por J. Glimm [J. Glimm, 1988]. Resultados similares fueron también obtenidos por S. Bianchini y A. Bressan [S. Bianchini, A. Bressan, 2005], (ver también [A. Bressan, 2000]) con la ayuda de una aproximación viscosa. Su logro fue obtenido por primera vez estimando la variación total directamente del método de anulación de la viscosidad.

Por otro lado existe una aproximación analítica funcional basada en la convergencia débil. Esta aproximación fue usada por L. Tartar, F. Murat, R. DiPrima. La principal dificultad para probar lo bien planteado de las ecuaciones diferenciales parciales no-lineales es el hecho de que las funciones no-lineales o funcionales no necesitan ser continuas en la topología débil. Esta manifestación en si misma se refleja en la dificultad para convertir la convergencia débil en convergencia fuerte

y pasar al límite en el problema no-lineal. Los métodos de funcionales analíticas requiere que en estos casos de la acotación uniforme sobre todas las derivadas parciales.

Entre otros métodos, mencionamos el de *compacidad compensada* de los matemáticos franceses L. Tartar y F. Murat [L. Tartar, 1983] con la ventaja de que permite pasar al límite en el problema no-lineal. Sin embargo, solamente se puede aplicar a algunos sistemas escalares y sistemas de 2×2 ver [E. Tadmor, M. Rascle, P. Bagherini, 2005]. Otro mque citamos aquí, s'olo con el fon de referenciarlo es *measure-valued* para detalles ver [J. Málek, J. Necas, M. Rokita, M. Ruzucka, 1996], [S. Müller, 1999]

2.4. Ondas de Choque

Para los sistemas de leyes de conservación hiperbólicos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0$$

Las ondas de choque son soluciones discontinuas especiales de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. El desarrollo de la teoría de ondas de choque tanto como las leyes de conservación tienen su origen en la investigación en la dinámica de fluidos. El libro clásico de Richard Courant y Kurt Friedrichs *Supersonic Flow and Shock Waves*, [R. Courant, K. O. Friedrichs, 1948] trata principalmente con los fluidos compresibles en una dimensión. Uno de los problemas centrales en la teoría de ondas de choque es definir las clases de choques admisibles. En la actualidad la teoría no esta desarrollada completamente.

En la literatura matemática, ver A. Majda [A. Majda, 1983], las ondas de choque son definidas como soluciones especiales discontinuas suaves a pedazos de sistemas hiperbólicos de primer orden. De acuerdo a esta definición, una onda de choque está determinada por una tripleta: una *superficie suave* Γ a través de la cual la cantidad conservada u sufre un salto, y *dos funciones* \mathbf{u}^+ y \mathbf{u}^- definidas en dominios Ω^+ y Ω^- respectivamente a cada lado de esta superficie. Las funciones \mathbf{u}^+ y \mathbf{u}^- son soluciones suaves de la forma semilineal de las leyes de conservación en Ω^+ y Ω^- respectivamente. Estas funciones satisfacen las condiciones de *Rankine-Hugoniot* las cuales relacionan los valores de los saltos de las cantidades conservadas y los flujos correspondientes, con la velocidad del choque. Por otro lado, las ondas de choque deben satisfacer ciertos requerimientos de estabilidad los cuales usualmente siguen la forma de la segunda ley de la termodinámica y están relacionados con el aumento de la entropía.

Buscamos soluciones discontinua del sistema hiperbólico, dado por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = 0$$

donde las matrices \mathbf{A}_j de $m \times m$, son los jacobianos de los flujos $\mathbf{f}(\mathbf{u})_j$.

La siguiente proposición establece las propiedades de las soluciones regulares por partes, para el sistema (2.3). Adoptamos la notación de tomar a y como el vector (x_1, \dots, x_{d-1}) .

Proposición 2.1 (Condiciones de Rankine-Hugoniot) *Sea*

$$\Gamma := \{(y, x_d, t) \mid x_d - \varphi(t, y) = 0\}$$

una hipersuperficie regular de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ y \mathbf{u} una función regular hasta el borde de $\{x_d > \varphi(y, t)\}$ y $\{x_d < \varphi(y, t)\}$. Entonces \mathbf{u} es solución débil de (2.3) si y solamente si \mathbf{u} es una solución clásica de (2.3) de un lado y del otro de Γ , y si las condiciones de Rankine-Hugoniot son satisfechas en todos los puntos de Γ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} [\mathbf{u}](\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} [f_j(\mathbf{u})](\mathbf{x}) - [f_d(\mathbf{u})](\mathbf{x}) = 0 \quad (2.12)$$

$$\forall \mathbf{x} = (y, x_d, t) \in \Gamma.$$

Las derivadas parciales de φ son evaluadas en (y, t) y $[f_j(\mathbf{u})](\mathbf{x})$ define el salto de $f_j(\mathbf{u})$ en los puntos \mathbf{x} . Siendo más precisos,

$$[f_j](\mathbf{u}(\mathbf{x})) := \lim_{s \rightarrow 0^+} (f_j(\mathbf{u}(\mathbf{x} + s\mathbf{n})) - f_j(\mathbf{u}(\mathbf{x} - s\mathbf{n})))$$

donde $\mathbf{n} := (-\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{d-1}}, 1)$ es el vector normal a Γ en el punto \mathbf{x} .

El resultado se obtiene aplicando la fórmula de Green [D.Serre,1999].

2.4.1. Condiciones de Lax

Como se mencionó los primeros artículos matemáticos dedicados a la estabilidad de ondas de choque venían de la dinámica de fluidos. Basandose en las publicaciones en estos campos, P. D. Lax [P.D. Lax, 1957] formuló una condición de estabilidad general para las ondas planas en sistemas hiperbólicos de $m \times m$. La condición de Lax para la estabilidad de los fluidos incompresibles, al tomar la velocidad del fluido antes del frente de choque y la velocidad después de este frente. Esta condición especifica las desigualdades para cualquier choque el cual tiene velocidad σ y que debe satisfacer para poder definir un frente de choque (compresivo) estable. Es decir, la velocidad σ del choque debe ser tal que $\lambda_k^+ < \sigma < \lambda_k^-$, y $\lambda_{k-1}^- < \sigma < \lambda_{k+1}^+$ donde λ_k^+ y λ_k^- son velocidades de onda linealizadas de una k -onda (evaluada en el lado apropiado de la discontinuidad). En otras palabras, la condición de Lax determina la cantidad de características entrantes y la cantidad de características salientes del lado izquierdo y derecho del frente de choque.

Para sistemas que vienen de la mecánica del medio continuo esas condiciones tienen una interpretación natural relacionada con la función de entropía, es decir, que el material que cruza la discontinuidad debe sufrir un incremento de entropía. Para fluidos clásicos compresibles, como un gas perfecto, la condición de Lax y la condición de entropía son equivalentes.

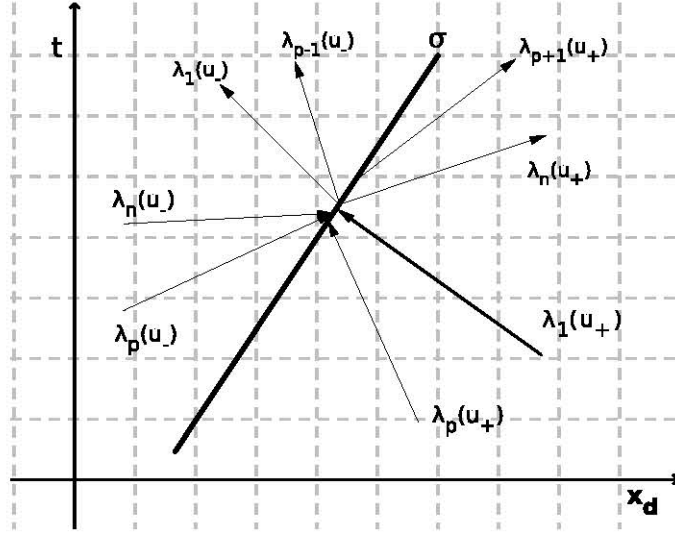


Figura 2.1: Velocidades características para un choque de Lax

Existen soluciones muy simples del sistema hiperbólico de leyes de conservación, que corresponden a las soluciones constantes, tanto de uno como del otro lado del hiperplano.

En efecto, tenemos la onda de choque siguiente

$$\mathbf{u} := \begin{cases} \mathbf{u}_r & \text{si } x_d > \sigma t + \nu \cdot y \\ \mathbf{u}_l & \text{si } x_d < \sigma t + \nu \cdot y \end{cases} \quad (2.13)$$

donde \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_l son dos elementos distintos de \mathcal{U} , $\sigma \in \mathbb{R}$ y ν es un vector en \mathbb{R}^{d-1} . Además, \mathbf{u} es solución si y solamente si, satisface la condición de Rankine-Hugoniot

$$\sigma[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^{d-1} \nu_j [f_j(\mathbf{u})] = [f_j(\mathbf{u})]$$

Observación: Se puede hacer un cambio de variables para tener al caso cuando $\nu = 0$ y $\sigma = 0$ (esto simplifica mucho los cálculos), pero no lo vamos a hacer aquí, por el momento.

Diremos que, siguiendo a Lax [P.D. Lax, 1957] \mathbf{u} es un **choque de Lax** si existe un entero

$$p \in \{1, \dots, q\}$$

tal que

$$\lambda_{p-1}(\mathbf{u}_l, \xi) < \sigma < \lambda_p(\mathbf{u}_l, \xi) \quad \text{y} \quad \lambda_p(\mathbf{u}_r, \xi) < \sigma < \lambda_{p+1}(\mathbf{u}_r, \xi) \quad (2.14)$$

donde $\xi := (-\nu, 1) \in \mathbb{R}^d$. En el caso $p = 1$, respectivamente $p = q$, decimos que el

choque es extremo, y omitimos la primera desigualdad a la izquierda, respectivamente la segunda desigualdad a la derecha.

Decimos que, \mathbf{u} es una discontinuidad de contacto si existe un entero $p \in \{1, \dots, q\}$ tal que

$$\lambda_p(\mathbf{u}_l, \xi) = \sigma = \lambda_p(\mathbf{u}_r, \xi)$$

Nota: Esquemáticamente se entiende que, los choques de Lax son estructuralmente estables (más allá de la observación física) y entonces las discontinuidades de contacto están obligadas a ser *estructuralmente inestables* [A. Majda, 1983]. Nos referimos a que, si un choque plano de Lax es perturbado ligeramente en el instante inicial, entonces la solución del sistema (2.11) tendrá el mismo aspecto que la condición inicial. Por el contrario, si perturbamos el instante inicial de una discontinuidad de contacto plana, entonces la solución desarrolla muy rápidamente las singularidades (y no se puede establecer condiciones para un teorema general de existencia con tales datos iniciales).

2.4.2. Choques No Clásicos

Sin embargo, nos encontramos que aún en la dinámica de fluidos existen ondas de choque que no satisfacen las condiciones de Lax. Esto es típico para los fluidos como los de van der Waals, helio superfluido, y algunos gases densos llamados gases de Bethe-Zeldovich-Thompson (BZT).

Esto es contrastante con el caso clásico donde las perturbaciones de la onda avanzan a la forma del choque compresivo. Estos choques no clásicos (como los gases densos) violan la condición de Lax. Ellos son caracterizados como choques con demasiadas características entrantes en el frente de choque (llamados *choque sobrecompresivos*) o demasiado pocas características entrantes (llamados *choques subcompresivos*).

Los choques no clásicos pueden también aparecer en sólidos como en el caso donde la relación esfuerzo-torsión es convexa, ver [R. Abeyaratne, J.K. Knowles, 1991], [S. Alinhac, 1989, 1993], [R.G. Plaza, 2008].

La pérdida de convexidad en la función flujo, ofrece dificultades en el análisis de choques. Analíticamente esto está relacionado con la pérdida (local) de *hiperbolicidad estricta*, o pérdida (local) de *no linealidad genuina* o cuando las ecuaciones cambian de tipo. Esta última situación, físicamente puede ser relacionada a los *fenómenos de transición de fase*.

En todo lo anteriormente mencionado la situación puede volverse tal que, las condiciones de Lax no sean aplicables. Se tienen muchas condiciones diferentes de admisibilidad en la literatura matemática; como la condición evolutiva de Jeffrey y Taniuti [A. Jeffrey, T. Taniuti, 1964], la condición de Liu y muchas otras. Esas condiciones son apropiadas para algunos casos en particular, pero en general no es así, la teoría matemática desarrollada aún no es suficiente para manejar el problema de estabilidad de todos los choques no clásicos.

La pregunta: ¿ cuál es el criterio correcto de estabilidad para un choque no clásico ?, es aún imposible de resolver para este problema en forma puramente matemática, puesto que una idealización no es suficiente, se debe considerar una situación más realista físicamente y permitir disipación o dispersión o ambas para que estén presentes en las ecuaciones. Usando el criterio de viscosidad o de viscosidad-capilaridad, se puede derivar algunos resultados de estabilidad. Estos criterios están basados en el estudio de las soluciones como ondas viajeras para los sistemas de leyes de conservación que disfrutan los términos viscoso y gradiente de esfuerzos. El problema de la estabilidad de choques es reducido a la existencia de trayectorias (perfiles viscosos) que unen los puntos críticos del sistema dinámico obtenido. Para tratar con estos choques se requiere de una condición adicional de admisibilidad asociada al modelo difusivo-dispersivo. Esta condición es llamada la *relación cinética*, ver [R. Abeyaratne, J. K. Knowles, 1991] y [P. G. LeFloch, 2002]

En presencia de los choques subcompresivos, el problema de Riemann unidimensional asociado al sistema de N leyes de conservación admite múltiples soluciones distintas.

2.4.3. Estabilidad Multidimensional

S.P Dyakov en 1954 y V.M. Kantorovich en 1957 formularon las condiciones para la estabilidad de ondas de choque, en gases, en varias dimensiones, tanto para la emisión espontánea de sonido y las ondas entrópicas. La primera teoría matemática rigurosa de estabilidad multidimensional para ondas de choque para sistemas generales hiperbólicos de leyes de conservación fue establecida en los ochentas por A. Majda [A. Majda, 1983a], [A. Majda, 1983b], [A. Majda, 1984]. Esta teoría se basa en la transformación de un problema de frontera libre a un dominio fijo, linealización y análisis del problema de valores iniciales y en la frontera obtenido para un sistema lineal hiperbólico. La estabilidad de los choques es equivalente a que el problema linealizado de valores iniciales y en la frontera sea bien planteado, lo cual se puede probar con estimaciones en el espacio $L^2(H^s)$ de las soluciones y para los términos en la frontera con derivadas normales, como datos, en $L^2(H^s)$. Las desigualdades en energía son obtenidas con la técnica del simetrizador de Kreiss [H. O. Kreiss, 1970], y con la ayuda de operadores pseudodiferenciables bajo la condición uniforme de *Kreiss-Lopatinskií*. Esta condición puede ser caracterizada de forma puramente algebraica como definida positiva para un rango de parámetros de cierto determinante llamado el determinante de Lopatinskií.

La teoría matemática que fue motivada por las aplicaciones en la dinámica de fluidos, aunque *útil* en general, no es adecuada para muchas otras aplicaciones. La razón principal es la pérdida de derivadas en las estimaciones en energía, lo cual causa que la condición de Lopatinskií resulte muy restrictiva para el manejo de condiciones en la frontera típicas de la física, ver Domański [W. Domański, 1989].

La multiplicidad de los valores propios en el sistema original puede causar problemas, ya que pueden llevar a la pérdida de las derivadas en la frontera y esto implica dificultades para generalizar las estimaciones del problema lineal. Sin embargo, Métivier [G. Métivier, 1990], [G. Métivier, 2000], logró probar que para el sistema simetrizable, se puede construir el simetrizador y derivar la estimación en

energía (aún para cuando la frontera es característica uniformemente).

En general para las condiciones físicas típicas dadas en la frontera, no se obtiene un problema bien planteado. Las direcciones a lo largo de las cuales la condición de Kreiss-Lopatinskii falla, son llamadas resonantes. Majda y Artola [M. Artola, A. Majda, 1987], usaron óptica geométrica débilmente no-lineal para fluidos. Y éstos parecen ser los únicos resultados obtenidos, aplicando tal método a la estabilidad de ondas no-lineales multidimensionales, pero sigue siendo un problema abierto.

La falla principal de la condición uniforme de Kreiss-Lopatinskii está relacionada con la aparición de fenómenos interesantes como: la emisión espontánea, la formación de ondas de choque de rarefacción y choques que se dividen. Un fluido de van der Waals es un ejemplo típico de una emisión acústica en materiales con reflexión resonante, cuando para cierto ángulo de incidencia la razón de reflectado a ondas incidentes se hace finita. No hay una teoría matemática para describir rigurosamente esos fenómenos especialmente en espacios multidimensionales. En el estudio de una onda de choque como una solución discontinua de un sistema hiperbólico de leyes de conservación y el cual es un concepto matemático, se necesita de una aproximación más real, es decir, incluir efectos de viscosidad y de conducción de calor y el estudio de choques disipativos.

Ahora vamos a considerar la **estabilidad de frentes de choque planos**, digamos

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^+, & \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t > 0 \\ \mathbf{u}^-, & \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t < 0 \end{cases}$$

donde \mathbf{u}^+ , \mathbf{u}^- son estados constantes en \mathcal{U} y $\mathbf{u}^+ \neq \mathbf{u}^-$, siendo \mathbf{n} el vector normal a la superficie Γ en \mathbb{R}^{d-1} y es la dirección fija de propagación, con la velocidad constante $\sigma \in \mathbb{R}^+$ del choque. Usando la notación donde $\mathbf{f}(\mathbf{u}) := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^d$ las condiciones de Rankine-Hugoniot se pueden escribir como

$$-s[\mathbf{u}] + [\mathbf{f}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - st = 0$$

2.4.4. Estabilidad de frentes de choque planos

Sea $\Gamma := \{x_d - \varphi(y, t) = 0\}$ y \mathbf{u} , con la notación $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$, una solución débil del sistema hiperbólico de leyes de conservación

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0$$

de manera general, podemos suponer que las condiciones de salto son dadas por una función vectorial suave $h(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, s, \mathbf{n})$, en donde se han cambiado los límites a cada lado de la superficie por $\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$ respectivamente, y a \mathbf{n} por $\nabla_y \varphi$ además se sustituye a σ por $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, de tal manera que las condiciones se pueden escribir de la siguiente forma:

$$h(\lim^+ \mathbf{u}, \lim^- \mathbf{u}, -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla_y \varphi) = 0$$

por ejemplo para las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$h(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, \sigma, \mathbf{n}) := -\sigma[\mathbf{u}] + [\mathbf{f}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{n}$$

la expresión $\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ es por convención.

Otra suposición aún más general es que la onda de choque sea no-característica, es decir, σ no es un valor propio de la matriz $A(\mathbf{n}, \mathbf{u}^\pm)$. En relación a esto damos la definición siguiente:

Definición 2.9 (*Onda de choque es no-característica*) Una onda de choque es no-característica si se tiene que para cada vector \mathbf{n} normal a Γ existen dos enteros $p, q \in \{1, \dots, m\}$ tales que $a_{q-1}(\mathbf{u}^-; \mathbf{n}) < \sigma < a_q(\mathbf{u}^-; \mathbf{n})$ y $a_p(\mathbf{u}^+; \mathbf{n}) < \sigma < a_{p+1}(\mathbf{u}^+; \mathbf{n})$. Si $q = 1$, respectivamente $p = m$ tenemos $\sigma < a_1(\mathbf{u}^-; \mathbf{n})$, respectivamente $\sigma > a_m(\mathbf{u}^+; \mathbf{n})$, donde a_i son los valores propios de la matriz $A(\mathbf{n}, \mathbf{u}^\pm)$, y α_i siendo la multiplicidad de a_i

Entonces, para las ondas de choque no-características podemos definir las cantidades

$$i_+ := \dim \sum_{a < s} \ker_{\mathbb{R}}(A(\mathbf{n}; \mathbf{u}^+)) = \alpha_1 + \dots + \alpha_p,$$

$$i_- := \dim \sum_{a > s} \ker_{\mathbb{R}}(A(\mathbf{n}; \mathbf{u}^-)) = \alpha_q + \dots + \alpha_m,$$

como las dimensiones de los espacios propios estable e inestable de $A(\mathbf{n}; \mathbf{u}^\pm - \sigma I)$, en cada caso. Estas cantidades determinan las características entrantes desde el lado derecho y del lado izquierdo $+/-$ del choque y por lo tanto definimos,

$$\kappa := i_+ + i_- - d$$

como el indicador para el exceso de **características entrantes** en relación con d y esta definido solamente para las ondas de choque no-características, [H. Freistühler, 1994], [H. Freistühler, 1995], de donde se hace la siguiente clasificación:

Decimos que la onda de choque $(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-, s)$ es

- **Lax (o clásico)** cuando $\kappa = 1$
- **Subcompresivo** cuando $\kappa \leq 0$
- **Sobrecompresivo** cuando $\kappa \geq 1$

Exclusivamente consideraremos ondas de choque de Lax, o choques subcompresivos. El siguiente indicador es el **grado de subcompresividad**

$$l := d + 1 - \kappa \geq 1,$$

Para los choques de Lax, $l = 0$. Cuando $l > 0$ se tiene que las condiciones de Rankine-Hugoniot son **insuficientes** para obtener una única solución suave en partes, y entonces se requieren restricciones adicionales, y precisamente l nos indica la cantidad de relaciones *cinéticas* adicionales que se necesitan para garantizar un problema bien planteado [H. Freistühler, 1995]. Como se verá mas adelante, para transiciones de fase esas condiciones están determinadas por varios criterios de admisibilidad.

Problema de frontera libre

Para el sistema hiperbólico de leyes de conservación,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0$$

con las condiciones de Rankine-Hugoniot sobre la superficie

$$\Gamma := \{(y, x_d, t) \mid x_d - \varphi(y, t) = 0\}$$

con la notación de $y := (x_1, \dots, x_{d-1})$

$$N_0[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^d N_j[f_j(u)] = 0, \text{ en } \Gamma$$

la hipersuperficie Γ no es conocida hasta este momento, lo que nos lleva a un problema de frontera libre.

El problema general de frontera libre puede plantearse como:

- Encontrar una hipersuperficie de codimensión uno Γ en $\mathbb{R}^d \times [0, T]$, que divide a $\{\mathbb{R}^d \times [0, T]\} \setminus \Gamma$ en dos componentes conectados D_- y D_+ , y encontrar \mathbf{u} tal que $\mathbf{u}|_{D_\pm} \in \mathcal{C}(D_\pm)$ que satisface el problema de Cauchy (2.3) en D_\pm , con alguna condición de admisibilidad que será especificada mas adelante, a través de Γ .

Se puede ver que una condición necesaria para tener una solución al problema de frontera libre es que el vector

$$\sum_{j=1}^d n_j [f_j(\mathbf{u}|_{t=0})]$$

donde n_1, \dots, n_d son los componentes del vector normal del frente de choque inicial $\Gamma|_{t=0}$, resulta ser paralelo a $[\mathbf{u}|_{t=0}]$. Esta es la primera condición natural de compatibilidad.

Existen muchas soluciones triviales para el problema de frontera libre, las cuales corresponden a ondas de choque planas, con Γ un hiperplano fijo, que corresponde a la propagación con velocidad constante de un hiperplano en el espacio físico, y $\mathbf{u}|_\pm \equiv \mathbf{u}_\pm$ independiente de t y \mathbf{x} .

Consideramos el conjunto de estados que pasan a través de un estado de referencia, tal conjunto lo llamamos *conjunto de Hugoniot*, digamos $w \in \mathcal{U}$ (el dominio en \mathbb{R}^n donde los flujos f_j están bien definidos y son suaves) definido como:

$$\mathcal{H}(w) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid f_d(\mathbf{u}) - f_d(w) \parallel \mathbf{u} - w\}.$$

donde $f_d(\mathbf{u}) - f_d(w) \parallel \mathbf{u} - w$ define que los dos vectores son paralelos. La derivación de la onda de choque plana es básicamente algebraica. Es decir, se toma una dirección de propagación, por ejemplo x_d .

Asumiremos, la **hiperbolicidad estricta** para el sistema hiperbólico de leyes de

conservación, se puede mostrar que \mathcal{H} es localmente la unión de curvas [P.D. Lax, 1957]. Consideremos a \mathbf{u}_+ sobre cualquiera de esas curvas y tomamos $\mathbf{u}_- = w$, entonces por definición de $\mathcal{H}(w)$ existe una $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $f_d(\mathbf{u}_+) - f_d(\mathbf{u}_-) = \sigma(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)$. Así, tomando $\Gamma := \{(x_1, \dots, x_d, t) \mid x_d = \sigma t\}$ se obtiene una onda de choque plana que se propaga a velocidad σ en la dirección x_d . En este paso, la onda de choque podría ser una discontinuidad o cualquier otra clase de onda discontinua, no necesariamente una onda de choque (esto resalta la necesidad de un criterio de admisibilidad de las discontinuidades).

Condiciones de compatibilidad y condiciones de estabilidad.

Es mucho más difícil, en general, encontrar soluciones para el problema de frontera libre cuando Γ no es plana. Pero se puede mostrar que tales soluciones existen para un tiempo suficientemente pequeño, cuando se proporcionan datos iniciales que satisfacen: 1) condiciones de *compatibilidad* y 2) condiciones de *estabilidad*. Las condiciones de compatibilidad implican, en particular, que en principio, en cada punto del frente, los estados de cada lado del frente están conectados por una onda de choque plana en dirección normal al frente. Las condiciones de estabilidad requieren, adicionalmente, que este choque sea *uniformemente estable* (en el sentido de la condición uniforme de Lopatinskiĭ) con respecto a la perturbación multidimensional. Dicha condición de Lopatinskiĭ será definida más adelante en la sección 2.5.2.

Fijar la frontera

Por claridad, en lo que sigue buscaremos soluciones cercanas a una onda de choque plana de referencia o *referencial*.

Se puede mostrar que el sistema de leyes de conservación es invariante bajo rotaciones, éste es el caso para las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos. Por ejemplo, sin pérdida de generalidad, podemos tomar coordenadas, tales que, la dirección de propagación del choque de referencia sea la última coordenada x_d . Entonces esta onda de choque referencial puede ser representada por un mapeo:

$$\underline{\mathbf{U}} : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \setminus \underline{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\underline{\mathbf{U}} := \begin{cases} \underline{\mathbf{U}}_+ & \text{si } x_d > \sigma t \\ \underline{\mathbf{U}}_- & \text{si } x_d < \sigma t \end{cases}$$

donde $\underline{\Gamma} := \{(x_1, \dots, x_d, t) \mid x_d = \sigma t\}$ y $f_d(\underline{\mathbf{U}}_+) - f_d(\underline{\mathbf{U}}_-) = \sigma(\underline{\mathbf{U}}_+ - \underline{\mathbf{U}}_-)$. Buscamos una onda de choque perturbada

$$\mathbf{u} : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{u} := \begin{cases} \mathbf{u}_+ & \text{si } x_d > \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t) \\ \mathbf{u}_- & \text{si } x_d < \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t) \end{cases}$$

con $\Gamma := \{(x_1, \dots, x_d, t) \mid x_d = \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t)\}$ el frente de choque perturbado (que supondremos cercano a $\underline{\Gamma}$), las incógnitas \mathbf{u}_+ , \mathbf{u}_- son soluciones en el interior, y φ cumple las condiciones de frontera de Rankine-Hugoniot.

Ahora queremos mostrar que \mathbf{u} existe en al menos un tiempo pequeño en $[0, T]$, si la onda de choque de referencia es *uniformemente estable* (en el sentido que se dará mas adelante). Pero primero, algunos conceptos adicionales.

El sistema de ecuaciones para \mathbf{u}_+ , \mathbf{u}_- , y φ es como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_+}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u}_+)}{\partial x_j} = 0, \quad x_d > \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t),$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_-}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f_j(\mathbf{u}_-)}{\partial x_j} = 0, \quad x_d < \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} [f_j(\mathbf{u})] - [f_d(\mathbf{u})] = 0, \quad x_d = \varphi(x_1, \dots, x_{d-1}, t)$$

Retomando la notación corta para $y := (x_1, \dots, x_{d-1})$ para las variables independientes a lo largo de la frontera. Mientras la función $\varphi \in \mathcal{C}^1$ permanezca cerca de la función referencial $x_d \mapsto \sigma t$

$$\Phi_+ : (y, x_d, t) \mapsto (y, (x_d - \varphi(y, t)), t)$$

$$\Phi_- : (y, x_d, t) \mapsto (y, -(x_d - \varphi(y, t)), t)$$

estas funciones son difeomorfismos de

$$\Omega_+ = \{(y, x_d, t) \mid x_d > \varphi(y, t)\},$$

y

$$\Omega_- = \{(y, x_d, t) \mid x_d < \varphi(y, t)\}$$

al semiespacio

$$\Omega = \{(y, z, t) \mid z > 0\},$$

y ambas funciones Φ_- y Φ_+ mapean Γ al hiperplano $\{z = 0\}$.

En adelante sustuiremos \mathbf{u}_\pm por $\mathbf{u}_\pm \circ \Phi_\pm^{-1}$ y sólo usaremos \mathbf{u}_\pm (por simplicidad en la notación), consideramos el problema de valores iniciales y en la frontera en Ω obtenido como consecuencia de ese cambio de las funciones incógnitas $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$.

Introducimos una función $\varphi(y, t) \in \mathbb{R}$ siendo al menos una vez diferenciable

$$A(u, \nabla \varphi) := A_d(u) - \sum_{j=1}^{d-1} (\partial_j \varphi) A_j(u) - (\partial_t \varphi) A_0(u)$$

en donde

$$A(u, -\partial_t \varphi, -\partial_1 \varphi, \dots, -\partial_{d-1} \varphi, 1) \quad \text{con} \quad A(u, \xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j (A_0(u))^{-1} A_j(u)$$

denota la matriz característica (generalizada).

En estas nuevas variables, el sistema de ecuaciones anterior se plantea como

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(\mathbf{u}_+) \partial_{x_j} \mathbf{u}_+ + A_d(\mathbf{u}_+, \nabla \varphi) \partial_z \mathbf{u}_+ &= 0; \quad z > 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(\mathbf{u}_-) \partial_{x_j} \mathbf{u}_- - A_d(\mathbf{u}_+, \nabla \varphi) \partial_z \mathbf{u}_- &= 0; \quad z > 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\partial_t \varphi[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \varphi [f_j(\mathbf{u})] = [f_d(\mathbf{u})], \quad z = 0 \quad (2.16)$$

Se puede notar que el problema de valores en la frontera (2.15) y (2.16) para las incógnitas $(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+, \varphi)$ involucra las variables desconocidas de $\nabla \varphi$ tanto en el interior de las ecuaciones (2.15) como en las condiciones de frontera (2.16).

Problema linealizado

Una vez que, el problema no-lineal es planteado sobre un dominio fijo Ω , se puede linealizar, de otra manera no sería posible y como la idea es un esquema iterativo, entonces vamos a linealizar en torno a una solución especial. Así, vamos a sustituir \mathbf{u} por $\mathbf{u} + \varepsilon \hat{\mathbf{u}}$ y $\varphi + \varepsilon \hat{\varphi}$ por φ en (2.15) y (2.16), diferenciando esas ecuaciones con respecto a ε y evaluando en $\varepsilon = 0$, obtenemos el problema linealizado. Por ejemplo, consideremos la onda de choque plana que viaja en la dirección x_d , es decir

$$u(y, x_d, t) = \begin{cases} u^+, & x_d - st > 0 \\ u^-, & x_d - st < 0 \end{cases}$$

La superficie $\mathcal{S}^0 = \{x_d - st = 0\}$. Supongamos que se perturban los datos iniciales

$$u(y, x_d, 0) = \begin{cases} u^+ + \varepsilon v_0^+ \\ u^- + \varepsilon v_0^- \end{cases}$$

con ε pequeño. Supongamos que existe una hipersuperficie de forma

$$\mathcal{S} = \{\psi^\varepsilon(y, x_d, t) = 0\}$$

y una solución u_\pm^ε para el sistema de ecuaciones en ambos lados de \mathcal{S} . Puesto que estamos perturbando un frente plano en la dirección x_d podemos tomar ψ^ε casi plano, así tenemos que

$$\psi^\varepsilon(y, x_d, t) := x_d - \phi^\varepsilon(y, t)$$

Las nuevas incógnitas son

$$\begin{aligned}\phi^\varepsilon(y, t) &= st + \varepsilon\phi(y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ u_\pm^\varepsilon(y, t) &= \begin{cases} u^+ + \varepsilon v^+(y, x_d, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & x_d > \phi^\varepsilon \\ u^- + \varepsilon v^-(y, x_d, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & x_d < \phi^\varepsilon \end{cases}\end{aligned}$$

y son soluciones de

$$\begin{aligned}\partial_t u_+^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u_+^\varepsilon) &= 0 \quad x_d > \phi^\varepsilon \\ \partial_t u_-^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u_-^\varepsilon) &= 0 \quad x_d < \phi^\varepsilon\end{aligned}$$

hacemos la localización del frente, haciendo z de la forma

$$z := x_d - \phi^\varepsilon(y, t)$$

y definimos

$$U_\pm^\varepsilon(y, x_d, t) := u_\pm^\varepsilon(y, z + \phi^\varepsilon(y, t), t)$$

En estas nuevas variables se obtiene $U_\pm^\varepsilon = u^\pm + \varepsilon V^\pm + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, con $V^\pm(y, z, t) := v^\pm(y, z + \phi^\varepsilon, t)$. Así como las condiciones de transición son trasladadas a $z = 0$. Para escribir el sistema en estas nuevas variables, sustituimos y hacemos los cálculos siguientes:

el primer término es

$$\partial_t u_+^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(u_+^\varepsilon) = 0 \quad \text{para } x_d > \phi^\varepsilon$$

tomamos

$$\partial_t u_+^\varepsilon$$

sustituimos y aplicamos la regla de la cadena en cada término

$$\partial_t u_+^\varepsilon = \partial_t U_+^\varepsilon - \partial_t \phi^\varepsilon \partial_z U_+^\varepsilon$$

$$\partial_{x_d} f_d(u_+^\varepsilon) = \partial_z f_d(U_+^\varepsilon)$$

y

$$\partial_{x_j} f_j(u_+^\varepsilon) = \partial_{x_j} f_j(U_+^\varepsilon) - \phi_{x_j}^\varepsilon \partial_z f_j(U_+^\varepsilon)$$

y el sistema completo queda como

$$\begin{aligned}\partial_t U_+^\varepsilon - \partial_t \phi^\varepsilon \partial_z U_+^\varepsilon + \partial_z f_d(U_+^\varepsilon) + \\ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} f_j(U_+^\varepsilon) - \partial_{x_j} \phi^\varepsilon \partial_z f_j(U_+^\varepsilon) &= 0, \quad z > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t U_-^\varepsilon - \partial_t \phi^\varepsilon \partial_z U_-^\varepsilon + \partial_z f_d(U_-^\varepsilon) + \\ \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} f_j(U_-^\varepsilon) - \partial_{x_j} \phi^\varepsilon \partial_z f_j(U_-^\varepsilon) &= 0, \quad z < 0\end{aligned}$$

Continuamos haciendo ahora la linealización de estas ecuaciones, para obtener un problema de transmisión linealizado, para esto vamos a tomar la derivada con respecto a ε y después evaluamos con $\varepsilon = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial f_d(U_+^\varepsilon)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (df_d(U_+^\varepsilon) \frac{\partial U_+^\varepsilon}{\partial z})$$

aplicando la regla de la cadena y recordando que U_+^ε esta definido como $U_+^\varepsilon = u^+ + \varepsilon V^+ + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ y $\phi^\varepsilon = st + \varepsilon \phi(y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (U_+^\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (u^+ + \varepsilon V^+ + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\ &= V^+ + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

y además

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\phi) = \phi(y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

tomamos el primer término del sistema y diferenciamos con respecto a ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f_d(U_+^\varepsilon))_z &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (df_d(U_+^\varepsilon) \partial_z U_+^\varepsilon) \\ &= d^2 f_d(U_+^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (U_+^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial z} (U_+^\varepsilon) + d^2 f_d(U_+^\varepsilon) + df_d(U_+^\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z} (U_+^\varepsilon) \right) \right) \end{aligned}$$

tenemos la igualdad

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z} (U_+^\varepsilon) \right) \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u^+ + \varepsilon V^+ + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon V_z^+) = V_z^+$$

así, llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f_d(U_+^\varepsilon))_z = d^2 f_d(U_+^\varepsilon) (V^+ + \mathcal{O}(\varepsilon)) (\varepsilon V_z) + df_d(U_+^\varepsilon) V_z^+$$

y evaluando en $\varepsilon = 0$ nos queda

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z} (U_+^\varepsilon) \right) = df_d(u^+) V_z^+$$

consideremos lo siguiente

$$\phi_t^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} (st + \varepsilon \phi(y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) = s + \varepsilon \phi_t$$

para terminar este ejemplo mostramos el sistema linealizado

$$df_d(u^+) V_z^+ + \sum_{j=1}^{d-1} df_j(u^+) V_{x_j}^+ = 0, \quad z > 0$$

$$df_d(u^-) V_z^- + \sum_{j=1}^{d-1} df_j(u^-) V_{x_j}^- = 0, \quad z < 0$$

Supondremos que existen las aplicaciones $\lambda_1(\mathbf{u}, \xi), \dots, \lambda_q(\mathbf{u}, \xi)$ de clase C^∞ sobre $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, y los enteros m_1, \dots, m_q tal que las $\lambda_i(\mathbf{u}, \xi)$ sean los valores propios de multiplicidad m_i de la matriz $A(\mathbf{u}, \xi)$ y son tal que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \lambda_1(\mathbf{u}, \xi) < \dots < \lambda_q(\mathbf{u}, \xi).$$

Esta hipótesis, que se verifica para el sistema de dinámica de gases.

2.5. Problemas de valores iniciales y en la frontera

Vamos a exponer algunos resultados sobre los problemas con valores iniciales y en la frontera de tipo estándar, haciendo resaltar la condición uniforme de Kreiss-Lopatinski.

Se plantean las condiciones en la frontera para las ecuaciones diferenciales parciales lineales de tipo hiperbólico en varias dimensiones espaciales. El propósito es dar una interpretación de la teoría desarrollada por Kreiss [H.O. Kreiss,1970], [A. Majda, S. Osher,1975], [D. Michelson, 1980], [J.V. Ralston,1971], [J. Rauch,1972], [R. Sakamoto,1970], para determinar si un conjunto de condiciones es apropiado para unas ecuaciones dadas. En esta sección damos una descripción del contexto de esta teoría.

En general no es posible tomar condiciones de frontera arbitrarias para una ecuación hiperbólica. Esto puede verse en el caso de sistemas de primer orden en una dimensión espacial, en donde hay varias partes de la solución que representan ondas viajeras, puede verse que cualquier condición de frontera es aceptable si se prescribe el comportamiento de las ondas que entran al espacio del dominio, pero no describe el comportamiento de las ondas que lo dejan.

En el espacio de varias dimensiones la situación es peor. En este caso no es tan fácil identificar los componentes *entrantes* y *salientes* de la solución. Pueden ser ondas que se mueven tangencialmente a la frontera, y no queda claro cual condición debe ser satisfecha. Esta dificultad es el principal tópico de esta sección.

De lo expuesto, tenemos que es difícil determinar si una condición de frontera es apropiada para una ecuación dada en varias dimensiones. Una respuesta es dada por el método de Friedrichs, Courant, Hilbert, este método ofrece criterios sobre las condiciones de frontera sean suficientes para tener un problema bien planteado, es decir, un problema que admita una solución única que dependa continuamente de los datos prescritos. Sin embargo, la condición es muy restrictiva, y no incorpora a una clase de problemas que, gracias al posterior análisis de Kreiss [H.O. Kreiss, 1970], resultan bien planteados. De este modo, un método alternativo mas preciso es el *análisis de modos normales*. Esta teoría brinda los criterios que son esencialmente necesarios y suficientes para que una condición lleve a un problema bien planteado [H.O. Kreiss, 1970].

2.5.1. Análisis de modos normales

En los años 80's, Majda mostró como extender el método de Kreiss para problemas con valores en la frontera no estándar, es decir, aquellos que involucran derivadas de la frontera como parte del problema, que estan asociados con problemas de persistencia de choques, como las ecuaciones (2.15) y (2.16), o más apropiadamente a sus versiones linealizadas. Para el caso del problema con valores en la frontera estándar, un paso crucial es lo que se conoce como **análisis de modos normales** para problemas con coeficientes constantes.

Consideremos un problema de valores iniciales y en la frontera (estándar) lineal, con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned}
\partial u_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u &= f & x_d > 0, t > 0, \\
Bu &= g, & x_d = 0, t > 0, \\
u|_{t=0} &= u_0, & x_d > 0, t = 0,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

con $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Esto dentro del contexto de los sistemas hiperbólicos de multiplicidad constante, y como ya se mencionó, supondremos que la matriz A_d es invertible. La frontera $\{x_d = 0\}$ es no característica. Si q representa el número de valores propios estrictamente positivos de A_d (contando su multiplicidad), por un resultado conocido [D.Serre,1999] se sabe que es necesario imponer exactamente q condiciones escalares independientes en $\{x_d = 0\}$ para obtener un problema bien planteado. Además, supondremos que $q = p$ y que B es de rango maximal.

2.5.2. Teoría de Kreiss

Para saber si el problema es bien planteado (digamos en L^2), empezaremos por dar el problema homogéneo sin condiciones iniciales (haciendo que u sea 0 para los tiempos negativos). Después aplicamos la transformada de Laplace en t y la transformada de Fourier en $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$, para encontrar que u verifica que:

$$\begin{aligned}
\left(\tau I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right) \hat{u} + A_d \frac{d\hat{u}}{dx_d} &= 0 & x_d > 0 \\
B\hat{u} &= 0, & x_d = 0,
\end{aligned}$$

con $\tau \in \mathbb{C}$ con parte real estrictamente positiva, τ es la variable compleja dual a t y $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ es el vector de onda asociado a $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$. La matriz A_d siendo invertible, se obtiene que \hat{u} es la solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$\frac{d\hat{u}}{dx_d} = \mathcal{A}(\tau, \eta) \hat{u} \tag{2.18}$$

sobre $]0, \infty[$, con la condición en la frontera $B\hat{u}(0) = 0$. La matriz $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ esta definida por

$$\mathcal{A}(\tau, \eta) := -A_d^{-1} \left(\tau I + i \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right).$$

Hersh, [R.Hersh,1963] comienza por hacer la observación de que (2.18) es hiperbólico en el sentido de los sistemas dinámicos, es decir, para $\text{Re } \tau > 0$, la matriz $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ no tiene valores propios imaginarios puros. El espacio \mathbb{C}^n se descompone en la suma directa de los subespacios: estable, denotado con $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$; y el subespacio inestable, $\mathcal{E}^+(\tau, \eta)$, de $\mathcal{A}(\tau, \eta)$. Recordamos que tales subespacios son los subespacios propios generalizados asociados a los valores propios de \mathcal{A} con parte real estrictamente negativa (\mathcal{E}^-), y de parte real estrictamente positiva (\mathcal{E}^+). Un argumento de continuidad-conexidad muestra que la dimensión de estos subespacios es independiente de (τ, η) . Si seleccionamos a $\tau = 1$ y $\eta = 0$, encontramos que la dimensión de $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ es igual a p .

Hersh [R.Hersh,1963] demuestra que la condición necesaria para que el problema de valores iniciales y en la frontera (2.17) sea bien planteado es que se cumpla con:

$\text{Ker } B \cap \mathcal{E}^-(\tau, \eta) = \{0\}$ para todo (τ, η) tal que $\text{Re } \tau > 0$.

en caso contrario el problema es mal planteado en el sentido de Hadamard en los espacios de Sobolev H^s

Condición de Lopatinskii

La condición necesaria, que llamaremos la condición de *Lopatinskii o condición débil*, puede ser reformulada de la manera siguiente:

- para todo (τ, η) con $\text{Re } \tau > 0$, existe una constante $c(\tau, \eta) > 0$ tal que se verifica

$$\forall Z \in \mathcal{E}^-(\tau, \eta), \quad |BZ| \geq c(\tau, \eta)|Z|.$$

El gran inconveniente de esta condición es que no permite (únicamente por sí misma) mostrar las estimaciones de energía *a priori* (no excluye las derivadas, aunque sean grandes). Pero permite resolver (2.17) para condiciones en C^∞ , (pero no puede decirse nada más para cuando las condiciones están en espacios de Sobolev).

La condición de Lopatinskii tiene la propiedad siguiente [T.Kato,1976]: para todo (τ, η) , se tiene que, tomando una base $Z_1(\tau, \eta), \dots, Z_p(\tau, \eta)$ de $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$, entonces el problema (2.17) satisface la condición de Lopatinskii si y solamente si

$$\Delta(\tau, \eta) := \det(BZ_1(\tau, \eta), \dots, BZ_p(\tau, \eta))$$

no se anule para ningún valor de (τ, η) . La función Δ es llamada el determinante de Lopatinskii, y depende de la elección de la base de \mathcal{E}^- .

La caracterización del problema con valores iniciales y en la frontera de que es bien planteado en L^2 se debe a Kreiss [H.O.Kreiss,1970] (y para la extensión a H^s). Para obtener un problema bien planteado se espera que las funciones de las condiciones f y g pertenezcan a $L^2(\{x_d > 0\})$ y $L^2(\{x_d = 0\})$, que (2.17) admita una solución única $v \in L^2(\{x_d = 0\})$ y así en L^2 , además con una estimación de energía. Esta estimación será retomada mas adelante, pero aquí damos una descripción sucinta. El punto importante es que tales problemas (diremos que son fuertemente bien planteados) están caracterizados por la condición **uniforme de Lopatinskii** (o Kreiss-Lopatinskii). Esta condición se enuncia de la siguiente manera:

- existe una constante $c > 0$ tal que, para todo (τ, η) con $\text{Re } \tau > 0$, tenemos

$$\forall Z \in \mathcal{E}^-(\tau, \eta), \quad |BZ| \geq c|Z|.$$

Desde un punto de vista práctico es difícil verificar esta condición, dada bajo esta forma. Para verificarla, se recurre a una prolongación por continuidad del subespacio estable. Es decir, el subespacio $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ es de dimensión constante para $\text{Re } \tau > 0$ y se puede demostrar [S. Benzoni-Gavage, D.Serre, 2007] que este subespacio se prolonga continuamente a los puntos $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$.

Es importante resaltar que la extensión es únicamente continua para $\text{Re } \tau = 0$, lo cual implica que Δ es **analítico** en $\text{Re } \tau > 0$, pero sólo continua en $\text{Re } \tau \geq 0$.

Notamos que la prolongación así obtenida contiene siempre al subespacio estable de la matriz $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ pero puede contener parte o todo el subespacio central. Con $\tau \in i\mathbb{R}$, el subespacio central de $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ (es decir, se asocian los valores propios puramente imaginarios) no es vacío. Vamos a denotar con $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ la prolongación del subespacio estable en los puntos $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, con el riesgo de crear confusión. Ahora, haciendo uso de la homogeneidad de \mathcal{A} , verificamos que el problema (2.17) satisface la condición uniforme de Lopatinskii si y solamente si

$$\text{Ker } B \cap \mathcal{E}^-(\tau, \eta) = \{0\}$$

para todo (τ, η) tal que $\text{Re } \tau \geq 0$ (desigualdad en el sentido no estricto) y $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$. Además, el determinante de Lopatinskii es una *herramienta adecuada* para probar esta condición. Se trata solamente de encontrar una base (Z_1, \dots, Z_p) del subespacio prolongado \mathcal{E}^- a los puntos (τ, η) , con $\tau \in i\mathbb{R}$, y después calcular el determinante $\Delta(\tau, \eta)$ definido anteriormente (el punto delicado es encontrar una base del prolongamiento de \mathcal{E}^-).

El sistema de Euler para un fluido no-viscoso (2.8) es, en general, no lineal (las condiciones en la frontera que se le adicionan pueden serlo también), para verificar la condición de Lopatinskii uniforme se linealiza (2.8) y sus condiciones de frontera en torno de un estado constante. Para pasar a los resultados no lineales, (ver [A.Mokrane,1987]), y sin entrar en los detalles en este momento, la condición de Lopatinskii uniforme (cuando se comprueba) permite poner un esquema iterativo del tipo de Picard y resolver el problema no lineal.

Cuando la condición de Lopatinskii uniforme no es satisfecha y el problema no es mal planteado, no se dispone de resultados generales de existencia de soluciones para los problemas (no) lineales. Ciertos casos particulares, no obstante, han sido resueltos. El sistema de Euler (2.8) con una frontera deslizante se ha tratado, ver por ejemplo [S.Scholot,1986] [P.Secchi,1998], [H.Beirão da Veiga,1993], [O.Guès,1990]. En este caso, la frontera del problema es característica, pero dispone de una propiedad de disipatividad. El caso de un sistema de elasticidad, con las famosas ondas de Rayleigh, es tratado por Sablé-Tougeron [M.Sablé-Tougeron,1993]. Ciertos problemas lineales (con las condiciones en la frontera particulares) son resueltos por Domanski en [W.Domanski,1989].

Estabilidad de Ondas de Choque de Lax

Para el estudio sobre estabilidad de las ondas de choque (de Lax) seguimos el método descrito por A. Majda [A. Majda, 1983] para los problemas con valores iniciales y de frontera. Iniciamos por linealizar las ecuaciones en un entorno de una onda de choque plana \mathbf{u} dado por:

$$\mathbf{u} := \begin{cases} \mathbf{u}_r & \text{si } x_d > \sigma t + \nu \cdot y \\ \mathbf{u}_l & \text{si } x_d < \sigma t + \nu \cdot y \end{cases}$$

Supondremos que $\nu = 0$ y $\sigma = 0$. Las ecuaciones linealizadas cerca de la onda estacionaria \mathbf{u} se escriben como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v &:= \partial_t v + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j \partial_{x_j} v = f, & x_d > 0 \\ \mathcal{B}(v, \psi) &:= \partial_t \psi[\mathbf{u}] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi[f_j(\mathbf{u})] + Mv = g, & x_d = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$\mathcal{A}_j := \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u}_r) & 0 \\ 0 & A_j(\mathbf{u}_l) \end{pmatrix} \quad \text{para } 1 \leq j \leq d-1, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{A}_d := \begin{pmatrix} A_d(\mathbf{u}_r) & 0 \\ 0 & -A_d(\mathbf{u}_l) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$M := \begin{pmatrix} -A_d(\mathbf{u}_r) & A_d(\mathbf{u}_l) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Observemos que (2.19) es un problema de valores iniciales y en la frontera no estándar, (ya que aparecen derivadas del frente desconocido en las condiciones en la frontera). Las derivadas parciales del frente desconocido ψ intervienen en las condiciones en la frontera. Una etapa importante en el análisis de (2.19), y sobre la cual regresaremos más adelante, consiste en eliminar el frente de las condiciones en la frontera.

Las desigualdades de Lax (2.14) aseguran que la matriz \mathcal{A}_d es invertible y que la frontera $\{x_d = 0\}$ es no característica. El análisis modal de (2.19) es, entonces, como se describió antes, para los problemas con valores iniciales y en la frontera estándares. Después de aplicar la transformada de Laplace en el tiempo y la transformada de Fourier en las variables espaciales tangenciales, se obtiene el sistema siguiente:

$$\frac{d\hat{v}}{dx_d} = \mathcal{A}(\tau, \eta)\hat{v}, \quad x_d > 0, \quad \left(\tau[\mathbf{u}] + \imath \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j [f_j(\mathbf{u})] \right) \hat{\psi} + M\hat{v}(0) = 0,$$

donde $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ esta definida, como anteriormente, por

$$\mathcal{A}(\tau, \eta) := -(A)_d^{-1} \left(\tau I + \imath \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j \mathcal{A}_j \right).$$

Para simplificar la notación, escribiremos

$$b(\tau, \eta) := \tau[\mathbf{u}] + \imath \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j [f_j(\mathbf{u})].$$

A causa de que \mathcal{A}_j tiene estructura de bloques, como se muestra en (2.20)-(2.21), el sistema (2.19) es hiperbólico con multiplicidad constante. Los resultados de Hersh [R.Hersh,1963] se aplican, y denotamos con $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ para $\text{Re } \tau > 0$ como el espacio estable.

Hersh [R. Hersh, 1963] demostró que la dimensión de $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ es constante, y también el número de valores propios estrictamente positivos de \mathcal{A}_d . Un resultado de Boillat, que se puede consultar en [D. Serre,1999], capítulo 3, asegura que el campo característico de $\lambda_p(\mathbf{u}, \xi)$ es linealmente degenerado si λ_p es de multiplicidad $m_p \geq 2$. En este caso, no se puede tener la desigualdad estricta como en (2.14) (estos campos conducen a las discontinuidades de contacto). Supondremos, además de las desigualdades de Lax (2.14), que λ_p es un valor propio simple, $m_p = 1$. En general λ_p es un valor propio no lineal de (2.20). Entonces se puede verificar que $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ es de dimensión $N - 1$ con $\text{Re } \tau > 0$. Como ya se ha observado anteriormente, el subespacio $\mathcal{E}^-(\tau, \eta)$ se prolonga continuamente en los puntos

$$(\tau, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, (\tau, \eta) \neq (0, 0).$$

Majda, en [A.Majda,1983], define el concepto de estabilidad uniforme de un choque plano de la siguiente manera:

Definición 2.10 [Estabilidad uniforme] *La onda de choque plana u se dice uniformemente estable si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ con $|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1$ y $\text{Re } \tau \geq 0$, se tiene que*

$$\forall (\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathcal{E}^-(\tau, \eta), \quad |\chi b(\tau, \eta) + M Z| \geq c(|\chi| + |Z|).$$

En consecuencia, el concepto de estabilidad uniforme de un choque (de Lax) es la extensión directa de la condición uniforme de Kreiss-Lopatinskii. A razón de la homogeneidad, de grado uno, de $b(\tau, \eta)$, es más cómodo restringirse a los valores *normalizados* de (τ, η) .

Definición 2.11 *Para un choque uniformemente estable se cumple*

$$|b(\tau, \eta)| \geq \sqrt{|\tau|^2 + |\eta|^2},$$

para toda $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$, el símbolo $b(\tau, \eta)$ no se anula sino cuando $(\tau, \eta) = (0, 0)$. En este caso diremos que $b(\tau, \eta)$ es *elíptica*.

Observación: Esta propiedad no es verificable para las leyes de conservación escalares en dimensión espacial $d \geq 2$. Por otro lado, en el caso de la dinámica de gases (isentrópicos o no), $b(\tau, \eta)$ es siempre elíptico. Aparte de las leyes de conservación escalares, no se conocen otros casos donde b no sea elíptico.

La estabilidad de las ondas de choque en la dinámica de gases es un tema que se estudia desde la segunda guerra mundial [R. Courant, K.O. Friedrichs,1976], [S.P. D'yakov, 1954], [J. Erpenbeck, 1962], [V.M. Kontorovi, 1958]. Existen muchos artículos en revistas sobre este tema, resaltando el completo análisis de Majda [A.Majda,1983], en donde se pueden encontrar detalles de los cálculos en [S. Benzoni-Gavage, D. Serre, 2007], [H.K. Jenssen, G. Lyng, 2002]. La mayor parte de los otros autores se quedan en el análisis de las condiciones necesarias de estabilidad (el parámetro τ verifica que $\text{Re } \tau > 0$). En este análisis, resulta que, la estabilidad (uniforme o no uniforme) de los choques planos esta ligada a la ley de presión ver [J.F. Coulombel, 2002] para el caso isentrópico, y [S. Benzoni-Gavage, D.Serre, 2007], [H.K. Jenssen, G.Lyng, 2002], [A. Majda, 1983] para el caso no isentrópico. Para un gas perfecto politrópico, se tiene que **todos los choques de Lax son uniformemente estables**. Para leyes de presión más complicadas, el hecho general es que: los choques de amplitud débil o moderada son uniformemente estables, mientras que los choques de amplitud fuerte pueden ser neutralmente estables. En cuanto a las inestabilidades violentas, tienen un carácter muy especial.

Para los sistemas generales existen pocos resultados sobre estabilidad uniforme. Métivier en [G. Métivier, 1986], anexo A, muestra que los choques que tienen amplitud débil son uniformemente estables para los sistemas de 2×2 en dimensión 2, cuando los dos campos característicos son auténticamente no lineales.

Este resultado es extendido por Métivier en [G. Métivier, 1990] al caso de los choques extremos para sistemas arbitrarios (siempre bajo la hipótesis de auténtica

no linealidad y una hipótesis adicional de convexidad del valor propio λ_p).

Para terminar, los sistemas de la magneto-hidrodinámica como los que se encuentran en [C.M. Dafermos, 2000] y [D. Serre, 1999], no son de multiplicidad constante, y los resultados de Majda no son aplicables. Independientemente de Majda, Blokhin [A.M. Blokhin, 1981], [A.M. Blokhin, 1982] propuso un método alternativo para el estudio de los choques multidimensionales.

Este método llega a los mismos resultados de Majda, y se basa, de la misma manera que los de Majda, sobre la condición de estabilidad uniforme. Para aplicaciones de este método a los sistemas de la magneto-hidrodinámica ver [A.M. Blokhin, 1982] y [L. Trakhinin, 2001] para resultados en magneto-hidrodinámica relativista.

Parte II

TRANSICIONES DE FASE

El objetivo de este capítulo es mostrar en detalle la existencia (local en el tiempo) de los choques subcompresivos multidimensionales, enunciados por Freistühler [H.Freistühler,1998], bajo una hipótesis de estabilidad uniforme.

Capítulo 3

Estabilidad de los choques subcompresivos

En este capítulo se presenta un estudio de la estabilidad lineal y no lineal de los choques subcompresivos para sistemas de leyes de conservación hiperbólicos en espacios multidimensionales. Primero vamos a describir la idea de Freisthüler para extender el trabajo desarrollado por A. Majda sobre choques de Lax (clásicos) hacia los choques subcompresivos. Quien finalmente resolvió el problema, a partir del planteamiento de Freisthüler fue Coulombel [J. F. Coulombel, 2003].

Así, para mostrar como la condición de estabilidad uniforme lleva a un resultado de estabilidad lineal en los términos de una estimación maximal en L^2 de Kreiss. Seguimos la estrategia de Majda sobre los choques de Lax, con varias adecuaciones según los trabajos de Métivier. Los problemas linealizados son resueltos por dualidad y las ecuaciones no lineales por medio de un esquema iterativo de tipo de Newton. Este estudio se usará para mostrar el tipo de estabilidad de las soluciones en las transiciones de fase en un fluido isotérmico de van der Waals.

3.1. Introducción

En el tema de los sistemas de leyes de conservación hiperbólicos, el problema central son las discontinuidades que se originan en las soluciones, relacionadas con la formación de choques. El primer estudio general de este fenómeno data de los trabajos de Lax [P.D. Lax, 1957], [P.D. Lax, 1973], sin embargo, el interés por las ondas de choque en la dinámica de gases era ya un campo activo tanto en la investigación física como en la investigación matemática. Recomendamos los trabajos [H. Weyl, 1949], [R. Courant, D. Hilbert, 1962], [R. Courant, K.O. Friedrichs, 1948], [S.P. D'yakov, 1954], [J. Erpenbeck, 1962], [V.M. Kontorovic, 1958]. Con el tiempo la teoría de los sistemas de leyes de conservación hiperbólicas empezaron a recibir un tratamiento más general: el caso escalar fue resuelto por S.N. Kružkov [S.N. Kružkov, 1969], [S.N. Kružkov, 1970] en los sesentas, mientras que los resultados de Glimm [J. Glimm, 1965], iniciaron una serie de trabajos en problemas con espacios de una dimensión, para lo cual se recomienda [A. Bressan, 2000], donde se hace una revisión de los resultados en este caso. Para los sistemas multidimensionales, hay menos resultados que para una dimensión. Usando técnicas distintas Gårding y Kato probaron la existencia local de soluciones suaves [L. Gårding, 1962], [T.

Kato, 1975]. Aunque hay una prueba alternativa que usa la simetrización según Friedrichs y que se puede encontrar en [A. Majda, 1984]. Sin embargo, las soluciones suaves de sistemas hiperbólicos desarrollan singularidades en un tiempo finito, como fue mostrado en un caso destacable dado por Sideris [T.C. Sideris, 1985]. Con este fenómeno de *blow-up* en mente, es necesario considerar la existencia de soluciones discontinuas. Recomendamos [A.Majda 1984], [D. Serre, 2000] para una revisión del método para demostrar existencia de ondas de choque multidimensionales, (usando los resultados del cálculo paradiferencial) y sus aplicaciones a la dinámica de gases.

En varias aplicaciones tales como la magnetohidrodinámica o la modelación de transiciones de fase, sucede que ciertas ondas de choque no cumplen con las desigualdades entrópicas de Lax. Dependiendo de su naturaleza, esas soluciones discontinuas tienen el nombre de ondas de choque **subcompresivas** o sobrecompresivas (como se definió en el capítulo anterior). Para hacer una selección de la discontinuidad que sea físicamente relevante se requiere de un criterio de admisibilidad adicional (aunque este no es el caso para las ondas de choque sobrecompresivas). Para las transiciones de fase subsónicas isotérmicas, Slemrod (para dinámica de gases) y Truskinovsky (para elastodinámica) en forma independiente derivaron un criterio basado en la teoría de capilaridad [M. Slemrod, 1983b], [L. Truskinovsky, 1994], ver también [M. Shearer, 1982/83]. Ahora seguiremos con una aproximación general, con un criterio de admisibilidad abstracto, como el sugerido por Freistühler, el cual se aplica a algunos problemas concretos (esta aproximación fue también usada por Colombo y Corli [R. Colombo, A. Corli, 1999] para problemas en una dimensión).

Nuestro propósito es estudiar la estabilidad lineal de las ondas de choque subcompresivas multidimensionales con respecto a pequeñas perturbaciones, y que es la extensión del trabajo de Majda sobre ondas de choque propuesto por Freistühler en [H. Freistühler, 1994]. Se sigue el trabajo de Majda pero con algunas adecuaciones técnicas para el caso subcompresivo. En [A. Majda, 1983] Majda usó una H^s -versión de el cálculo pseudodiferencial que lleva a las desigualdades de Moser [J. Moser, 1966]. Mokrane en su tesis doctoral [A. Mokrane, 1987] y Métivier [G. Métivier, 2001] usaron el cálculo paradiferencial de Bony y Meyer. La ventaja de esta técnica es usar la regularidad minimal (concepto del cálculo paradiferencial, aplicado por Majda) para derivar una estimación de energía similar a la de Majda. En [A. Majda, 1983] Majda definió una condición de estructura de bloque que le permitió aplicar una construcción simbólica y obtener estimaciones de energía satisfactorias. Métivier probó recientemente que, ver [G. Métivier, 2000], la condición de estructura de bloque es válida para todos los sistemas hiperbólicos con multiplicidades constantes.

En la sección siguiente, vamos a introducir el marco de nuestro estudio y establecer nuestras suposiciones principales. Escribimos la definición de onda de choque subcompresiva. Después, estudiamos la estabilidad lineal de un choque subcompresivo plano y mencionamos la condición de estabilidad uniforme con la estimación maximal en L^2 . El estudio de ondas de choque planas puede ser extendido al caso con coeficientes variables. Mostramos, siguiendo el trabajo de Benzoni, las aplicaciones a transiciones de fase planas en un fluido de van der Waals. Este problema es tratado en [S.Benzoni-Gavage, 1998] y en [S.Benzoni-Gavage, 1999].

Estamos interesados en fluidos compresibles más generales, los cuales pueden

ser gases (gases ideales no politrónicos) pero también líquidos o mezclas de líquido y vapor (fluidos de van der Waals). Aunque su complejidad en el comportamiento termodinámico es mayor, aún así, estas consideraciones sobre gases no son tan reales, ya que la disipación debida a la viscosidad o también a la conducción de calor es despreciada, excepto en lo referente a la admisibilidad de ondas de choque. En el análisis siguiente no tomamos en cuenta el fenómeno de disipación, para permanecer en el ámbito de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas.

3.2. Ecuaciones de Euler para un fluido de van der Waals

El sistema de las ecuaciones de la dinámica de fluidos en variables eulerianas

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p &= 0 \\ \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e\right) + \operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho e + p\right)\mathbf{v}\right] &= 0\end{aligned}$$

describe la evolución de un fluido compresible (líquido o gas). La ley de presión de uno de estos fluidos es generalmente determinada por una función de la densidad y de la energía interna, $p = p(\rho, e)$. Esta función puede ser dada también como función de la densidad y de la temperatura. En el caso del gas perfecto politrónico, se tiene

$$p = \frac{RT}{M}\rho,$$

donde R es la constante del gas perfecto y M la masa específica (o molar) del gas en consideración. En las unidades del sistema internacional, tenemos

$$R = 8.3144 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

El modelo del gas perfecto se basa en dos hipótesis principales: las moléculas son asimiladas en los puntos materiales y el gas es suficientemente diluido para que las moléculas no interactúen entre ellas.

Ley de van der Waals

El modelo de van der Waals aporta dos correcciones al modelo del gas perfecto: las moléculas tienen un volumen no nulo y ellas interactúan. Denotemos $v := \frac{M}{\rho}$ el volumen específico, la ecuación de estado de van der Waals toma la forma

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (3.1)$$

con a y b constantes estrictamente positivas (que dependen del fluido) y R la constante del gas perfecto. Notemos que p no está definida para $v > b$ (lo que se convierte en pedir que $\rho < \frac{M}{b}$).

Veamos algunas propiedades de las curvas isotérmicas de la ecuación de la presión termodinámica (3.1)

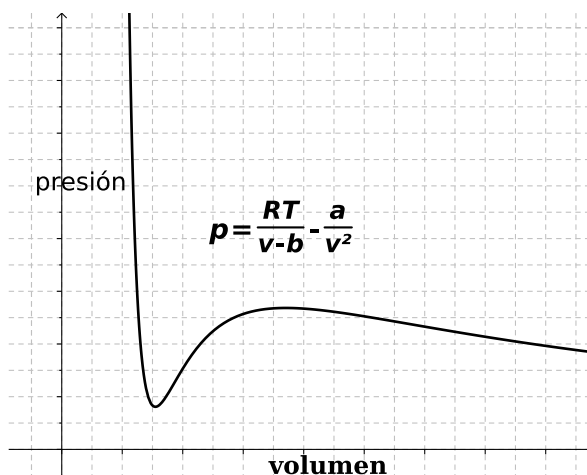


Figura 3.1: Ley de van der Waals para agua isentrópica

La función p (vista como función de v) es estrictamente positiva sobre $]b, \infty[$ si y sólo si $T > T_{min}$ en donde la temperatura *mínima* es $T_{min} := \frac{a}{(4bR)}$. Si la temperatura T es más grande o igual a la temperatura *crítica* $T_c := \frac{8a}{(27bR)}$, la curva isoterma ($v \rightarrow p(v)$) es estrictamente decreciente en $]b, \infty[$. Por el contrario, para $T < T_c$, la curva isoterma es estrictamente decreciente en el intervalo $]b, v_*[$, y estrictamente creciente en un intervalo $]v_*, v^*[$ y estrictamente decreciente sobre el intervalo $]v^*, \infty[$. Además, la isoterma tiene dos puntos de inflexión v_i y v^i que satisfacen

$$b < v_* < v_i < v^* < v^i$$

En el caso $T_{min} < T < T_c$ la isoterma de van der Waals es una función no monótona del volumen específico. Además los puntos particularmente exhibidos (extremos locales, puntos de inflexión), se tienen otros dos puntos, los llamados puntos de Maxwell. Los puntos de Maxwell v_m y v^m están definidos por las relaciones

$$p(v_m) = p(v^m) =: \bar{p} \quad \text{y} \quad \int_{v_m}^{v^m} (p(v) - \bar{p}) dv = 0 \quad (3.2)$$

Estos puntos admiten una interpretación geométrica simple, son dados por la regla de áreas iguales.

Transición de fase isotérmica

Estamos interesados en la evolución de un fluido isotérmico en el espacio \mathbb{R}^d . Como el flujo es isotérmico, no es necesaria la ecuación de conservación de la energía y solamente tenemos las ecuaciones de conservación de masa y conservación de momento. Las ecuaciones de la hidrodinámica se reducen a

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Haciendo algunas manipulaciones se puede mostrar que este sistema, para soluciones suaves, es equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla p = 0, \end{cases}$$

Supondremos que el fluido obedece la ley de presión de van der Waals

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (3.4)$$

con $v = \frac{1}{\rho}$ el volumen específico (para simplificar, la masa específica es tomada igual a 1), y T la temperatura, tal que $T_{min} < T < T_c$, de tal manera que la presión p sea una función no monótona de la densidad ρ .

El sistema (3.3) no es hiperbólico en la región $\{p'(\rho) > 0\}$. El símbolo $A(U, \xi)$, $U := (\rho, \mathbf{u})$, es determinado por

$$A(U, \xi) := \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \xi & \rho \xi^T \\ \frac{p'(\rho)}{\rho} \xi & (\mathbf{u} \cdot \xi) I_d \end{pmatrix}$$

Sea $(\dot{\rho}, \dot{\mathbf{u}})$ un vector propio de $A(U, \xi)$ asociado con un valor propio $\lambda(U; \xi)$ entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \xi - \lambda(U; \xi)) \dot{\rho} + \rho \xi \cdot \dot{\mathbf{u}} &= 0 \\ \rho^{-1} p'(\rho) \dot{\rho} \xi + (\mathbf{u} \cdot \xi - \lambda(U; \xi)) \dot{\mathbf{u}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Así, vemos que $\lambda(U; \xi) = \mathbf{u} \cdot \xi$ es un valor propio con un espacio propio de dimensión $d-1$ dado por

$$\{(\dot{\rho}, \dot{\mathbf{u}}) \mid \xi \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0, p'(\rho) \dot{\rho} = 0\}$$

Los vectores propios asociados con otros valores propios deben de cumplir con

$$p \dot{\rho} = 0$$

Tomando el producto interno por ξ de la segunda ecuación de (3.5), y eliminando $\mathbf{u} \cdot \dot{\xi}$ por medio de la primera, obtenemos

$$(p'(\rho) |\xi|^2 - (\mathbf{u} \cdot \xi - \lambda)^2) \dot{\rho} = 0$$

Esto lleva a la relación

$$(\mathbf{u} \cdot \xi - \lambda(U; \xi))^2 = |\xi|^2 p'(\rho)$$

de lo cual las soluciones $\lambda(U; \xi)$ son reales si y sólo si

$$p'(\rho) \geq 0$$

por lo tanto se obtiene que los valores propios son

$$\begin{aligned}\lambda_1(U, \xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi - c|\xi| && \text{con multiplicidad } m_1 = 1, \\ \lambda_2(U, \xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi && \text{con multiplicidad } m_2 = d - 1, \\ \lambda_3(U, \xi) &:= \mathbf{u} \cdot \xi + c|\xi| && \text{con multiplicidad } m_3 = 1.\end{aligned}$$

y también, vamos a designar con c la velocidad del sonido en el fluido

$$c := \sqrt{p'(\rho)}$$

tal que $p'(\rho) > 0$, con vectores propios asociados

$$\begin{aligned}r_1(U; \xi) &:= \begin{pmatrix} \rho \\ \xi \\ -c\frac{\xi}{|\xi|} \end{pmatrix} \\ r_2(U; \xi) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \text{ con } \dot{\mathbf{u}} \cdot \xi = 0, \\ r_3(U; \xi) &:= \begin{pmatrix} \rho \\ \xi \\ c\frac{\xi}{|\xi|} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

además, el campo característico (λ_2, r_2) es linealmente degenerado, es decir, $d\lambda_2 \cdot r_2 \equiv 0$ (donde d representa la diferenciación con respecto a U) y los campos (λ_1, r_1) y (λ_3, r_3) (llamados campos acústicos) son genuinamente no lineales, esto es, $d\lambda_{1,3} \cdot r_{1,3} \neq 0$.

Cuando el volumen específico v pertenece al intervalo $[v_*, v^*]$, la velocidad del sonido es un número imaginario puro y la matriz $A(U, \xi)$ no es diagonalizable sobre \mathbb{R} . Esta región es llamada la *zona espi-nodal*, no es observable físicamente, y corresponde a los estados violentamente inestables. Estas inestabilidades son estudiadas en [H. Fon, 2000], [D.Y. Hsieh, X.P. Wang, 1997]. El dominio de hiperbolicidad del sistema (3.3) tiene dos componentes conexos:

$$\mathcal{D} := (]0, \frac{1}{v^*}[\times \mathbb{R}^d) \cup (] \frac{1}{v_*}, \frac{1}{b}[\times \mathbb{R}^d)$$

Cada uno de estos componentes conexos es llamado una *fase*. La zona $v \in]b, v_*[$ es la fase líquida y la zona $v \in]v_*, \infty[$ es la fase de vapor.

Para evitar la inestabilidad ligada a la zona espinodal, nos interesan las soluciones discontinuas de (3.3) para las que el volumen molar toma valores en cada una de las dos fases. Tal solución será llamada una *transición de fase*. El volumen molar no está nunca en la zona espinodal, y la velocidad del sonido está bien definida.

Una transición de fase plana está dada por

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t \end{cases}$$

donde los estados *a la derecha* y a la izquierda están relacionados por las condiciones de Rankine-Hugoniot:

$$\sigma[\rho] = [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_d] \tag{3.6}$$

$$\sigma[\rho\mathbf{u}] = [\rho(\mathbf{u} \cdot e_d)\mathbf{u}] + [p]e_d \quad (3.7)$$

donde, e_d designa el último vector de la base canónica de \mathbb{R}^d , tomando (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma[\rho] &= \sigma(\rho_r - \rho_l) \\ [\rho\mathbf{u} \cdot e_d] &= (\rho_r u_r - \rho_l u_l) \cdot e_d = (\rho_r u_r \cdot e_d - \rho_l u_l \cdot e_d) \end{aligned}$$

así se obtiene

$$\sigma\rho_r - \rho_r u_r \cdot e_d - \sigma\rho_l + \rho_l u_l \cdot e_d = 0;$$

factorizando y reacomodando,

$$\rho_l(u_l \cdot e_d - \sigma) = \rho_r(u_r \cdot e_d),$$

y podemos escribir (3.6) bajo la forma (llamada la densidad del momento)

$$j := \rho_r(\mathbf{u}_r \cdot e_d - \sigma) = \rho_l(\mathbf{u}_l \cdot e_d - \sigma).$$

Aquí j denota el flujo de la materia a través de $\{x_d = \sigma t\}$. La ecuación (3.7), mediante los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} \sigma[\rho(\mathbf{u})] - [\rho(\mathbf{u} \cdot e_d)\mathbf{u}] &= [p]e_d \\ [\rho\sigma\mathbf{u} - \rho(\mathbf{u} \cdot e_d)\mathbf{u}] &= [p]e_d \\ [\rho(\sigma\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot e_d)\mathbf{u})] &= [p]e_d \\ [\rho(\sigma - (\mathbf{u} \cdot e_d))\mathbf{u}] &= [p]e_d \end{aligned}$$

se convierte en

$$-j[\mathbf{u}] = [p]e_d \quad (3.8)$$

lo que define el flujo como un vector paralelo al vector e_d . Estamos en el caso donde los estados ρ_l y ρ_r no están en la misma fase.

Si $j = 0$, se tiene un equilibrio de las presiones $p(\rho_r) = p(\rho_l)$, pero esto no implica que $\rho_r = \rho_l$ (la función p no es monótona). Esta situación corresponde a una transición de fase estática, para la cual no hay transferencia de masa a través de la interfase. La velocidad en la dirección normal $\mathbf{u} \cdot e_d$ es entonces continua a través de la interfase. Este caso fue visto antes en las discontinuidades de contacto en la definición de los choques de Lax. Para la curva isotérmica que no es monótona, existe *a priori*, una infinidad de interfases estáticas. La única observable físicamente es la que corresponde a la recta de Maxwell, es decir, que $\frac{1}{\rho_r}$ y $\frac{1}{\rho_l}$ son los puntos de Maxwell v_m y v^m . Sin entrar en detalles ver [S. Jaouen, 2001], los puntos de Maxwell son los únicos puntos en los cuales la entalpía libre es la misma de un lado y del otro de la interfase (lo que es un requisito de la termodinámica).

Si $j \neq 0$ (hablamos de una transición de fase dinámica, en oposición al caso estático), esto es, la velocidad tangencial debe ser continua y solamente la velocidad normal experimenta un salto a través de $\{x_d = \sigma t\}$, la ecuación (3.8) asegura

que el salto de la velocidad es colineal al vector e_d , aún más, manipulando las ecuaciones de Rankine-Hugoniot vemos que $-j[\mathbf{u}] = [p]e_d$ implica que $[u] = -\frac{[p]}{j} \cdot e_d$ y esto es $[\mathbf{u} \cdot e_d] = -\frac{[p]}{j}$ y por otro lado de la definición de $j := \rho_r(\mathbf{u}_l \cdot e_d - \sigma)$ se tiene que $[\mathbf{u} \cdot e_d] = j[v]$ entonces sustituyendo en la condición de salto de la ecuación de momento $j[\mathbf{u} \cdot e_d] + [p] = 0$ obtenemos que $[p] = -j^2[v]$, y se tienen las relaciones

$$j^2 = -\frac{[p]}{[v]}, \quad [\mathbf{u} \cdot e_d] = \frac{-[p]}{j}.$$

Introducimos los números de Mach:

$$M_r := \frac{|\mathbf{u}_r \cdot e_d - \sigma|}{c_r} \quad \text{y} \quad M_l := \frac{|\mathbf{u}_l \cdot e_d - \sigma|}{c_l}$$

La velocidad del sonido c esta bien definida pues los volúmenes molares $v_r := \frac{1}{\rho_r}$ y $v_l := \frac{1}{\rho_l}$ no estan en la zona espinodal. Verificamos, entonces, que los números de Mach satisfacen

$$M_r^2 = \frac{\frac{[p]}{[v]}}{p'(v_r)} \quad \text{y} \quad M_l^2 = \frac{\frac{[p]}{[v]}}{p'(v_l)} \quad (3.9)$$

Cuando los volúmenes molares están próximos a los puntos de Maxwell, se tienen las desigualdades

$$M_r < 1 \quad \text{y} \quad M_l < 1$$

En lo que sigue solamente trataremos con estas transiciones de fase las cuales son conocidas como fase **subsónica**. Las transiciones de fase que nos interesan **no satisfacen las desigualdades** de Lax, pero verifican que, en el caso de que $j > 0$:

$$\lambda_1(U_l, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_l, e_d) \quad \text{y} \quad \lambda_1(U_r, e_d) < \sigma < \lambda_2(U_r, e_d)$$

en el otro caso con $j < 0$:

$$\lambda_2(U_l, e_d) < \sigma < \lambda_3(U_l, e_d) \quad \text{y} \quad \lambda_2(U_r, e_d) < \sigma < \lambda_3(U_r, e_d)$$

Los choques de Lax tienen las propiedades siguientes

- una transferencia de masa a través de la discontinuidad distinta de cero,
- un estado supersónico atrás de la discontinuidad, y uno subsónico al frente de la discontinuidad,

Choques subcompresivos

En la terminología de Freistühler [H. Freistühler, 1994/1998], las transiciones de fase subsónicas son las ondas de **choque subcompresivo** cuando hay menos características entrantes que para un choque de Lax. Tales discontinuidades son mal modeladas por las ecuaciones de Euler, por un lado, hay muchas transiciones de fase estáticas (aunque sólo una siendo físicamente admisible) y nos damos cuenta de que, en este modelo, las transiciones de fase son inestables violentamente frente

a pequeñas perturbaciones (esto viene del hecho de que tenemos muy pocas características entrantes en la discontinuidad). Un criterio de admisibilidad es entonces requerido para modelar propiamente las transiciones de fase subsónicas. Este criterio se unirá a las condiciones de Rankine-Hugoniot corrigiendo los dos estados U_r y U_l de uno y otro lado de la interfase.

De la misma manera que las ondas de choque poseen diversos criterios de admisibilidad (desigualdades de Lax, perfil viscoso, criterio entrópico), todos ellos casi equivalentes (ver [S.Benzoni-Gavage, D.Serre, 2007]), existen muchos criterios de admisibilidad para transiciones de fase subsónicas. Las primeras fueron propuestas, independientemente, por Slemrod [M. Slemrod,1985], [M. Slemrod,1983] y Truskinovsky [L. Truskinovsky,1994] ver también [M. Shearer, 1982/83]. Expondremos el criterio de *capilaridad* (daremos la definición más adelante). La principal ventaja de este criterio, es la de proporcionar una condición de salto suplementaria explícita.

El Problema de Riemann

Una pregunta natural (pero que no será tratada aquí) es la resolución del problema de Riemann en presencia de transiciones de fase. El criterio de admisibilidad que se plantea, juega un rol importante en la construcción del conjunto de Hugoniot. La literatura sobre el tema es bastante amplia, algunas obras son [H. Hattori, 1986], [R.D. James, 1980], [S. Jaouen, 1980], [M. Shearer, 1982], [M. Shearer, 1986], entre otras.

3.2.1. Relaciones cinéticas

La extensión de los resultados de Majda, por parte de Freistühler, para el caso de los choques subcompresivos especifica la cantidad de condiciones en la frontera (además de las condiciones de Rankine-Hugoniot) en función de las características entrantes y el tamaño del sistema. Las transiciones de fase subsónicas necesitan un criterio de admisibilidad, este criterio es llamado una *relación cinética* (ver [R. Abeyaratne, J. Kowles, 1991]).

El criterio de visco-capilaridad

El criterio de visco-capilaridad propuesto por Slemrod [M. Slemrod, 1985] requiere que los estados U_r y U_l sean corregidos por una onda progresiva que es solución del sistema (2.4) en la cual se han añadido los términos *regularizantes*. Así, si tenemos

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > n \cdot y + \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < n \cdot y + \sigma t, \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{R}^{d-1}$ y $\sigma \in \mathbb{R}$, diremos que la transición de fase \mathbf{U} es **admisibile** en el sentido del criterio de visco-capilaridad, si existe una onda progresiva

$$\begin{aligned} \rho(t, y, x_d) &= \rho((x_d - n \cdot y - \sigma t)/\varepsilon), \\ \mathbf{u}(t, y, x_d) &= \mathbf{u}((x_d - n \cdot y - \sigma t)/\varepsilon) \end{aligned}$$

que es solución del sistema

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nu \varepsilon \Delta \mathbf{u} - \varepsilon^2 \nabla(\Delta v)$$

con las condiciones

$$\rho(+\infty) = \rho_r, \rho(-\infty) = \rho_l, \quad \mathbf{u}(+\infty) = \mathbf{u}_r, \mathbf{u}(-\infty) = \mathbf{u}_l$$

Recordemos que $v = \frac{1}{\rho}$ designa el volumen molar. Los coeficientes de viscosidad ν y la capilaridad ε son estrictamente positivos. Esta onda progresiva será llamada un perfil visco-capilar de la transición de fase \mathbf{U} .

El criterio puramente capilar

Se obtiene despreciando los efectos de la viscosidad y tomando $\nu = 0$ en el criterio de visco-capilaridad. Esta operación es físicamente discutible, pero vamos a ver que conduce a una relación de salto explícita.

Designaremos por F la energía libre específica, definida por

$$F'(v) = -p(v)$$

La energía libre por unidad de volumen, denotada por $f(\rho)$, es entonces definida por $f(\rho) := \rho F(1/\rho)$. Más adelante en la segunda parte de este capítulo, basado en [S. Benzoni-Gavage, 1998], se muestra que una transición de fase \mathbf{U} admite un perfil capilar si y solamente si los estados U_r y U_l verifican las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\sigma[\rho] = [\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}],$$

$$\sigma[\rho(\mathbf{u})] = [\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}] + [p]\mathbf{n}$$

con $\mathbf{n} := (-n, 1) \in \mathbb{R}^d$. Así, la relación de salto suplementaria es

$$[F] + [v] \frac{p(v_r) - p(v_l)}{2} = 0 \quad (3.10)$$

Esta condición de salto es explícita, en el sentido que **no hace intervenir el perfil**. Si se adopta el criterio de visco-capilaridad con un coeficiente de viscosidad $\nu > 0$ la relación cinética obtenida hace intervenir el perfil y se escribe como:

$$[F] + [v] \frac{p(v_r) - p(v_l)}{2} = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(z)^2 dz \quad (3.11)$$

en donde j es el flujo de la materia a través de la interfase y $z \mapsto v(z)$ en un perfil visco-capilar.

Si las condiciones de Rankine-Hugoniot son satisfechas, (3.10) es equivalente a

$$\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)^2 + |\mathbf{n}|^2 f' \right] = 0. \quad (3.12)$$

La condición de salto (3.10) no es otra cosa que la ley de áreas iguales generalizada. Recordemos que para una transición de fase dinámica, $j \neq 0$, por lo tanto, no existe equilibrio en las presiones, y se tiene $[p][v] < 0$.

La igualdad (3.10) recuerda la dinámica de gases (no isentrópicos), si se reemplaza la energía libre F por la energía interna E . En los dos casos, se reduce a la conservación de la energía total del sistema.

Además del carácter subsónico, que las diferencia de los choques de Lax, las transiciones de fase admisibles (usando el criterio de capilaridad) tienen otra propiedad interesante: el de ser *reversibles*. Veamos, si se tiene

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

es una transición de fase admisible, entonces

$$\mathbf{U}' := \begin{cases} (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

es igualmente una transición de fase admisible. Los choques son procesos irreversibles, pues la entropía física crece al atravesar el choque.

Por otra parte, si se da un estado (ρ_l, \mathbf{u}_l) , con $v_l = 1/\rho_l$ cercano a los puntos de Maxwell:

$$v_l \in]v_m - \delta, v_m[\quad \text{o,} \quad v_l \in]v^m, v^m + \delta[,$$

entonces existe un único real $\sigma < \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{e}_d$ y un único estado (ρ_r, \mathbf{u}_r) tal que

$$\mathbf{U} := \begin{cases} (\rho_r, \mathbf{u}_r) & \text{si } x_d > \sigma t, \\ (\rho_l, \mathbf{u}_l) & \text{si } x_d < \sigma t, \end{cases}$$

define una transición de fase admisible [S. Benzoni-Gavage, 1998]. El estado de la izquierda determina tanto la velocidad de la propagación de la interface y el estado a la derecha.

Estabilidad de transiciones de fase visco-capilares

La relación de salto suplementaria, proporcionada por uno de los dos criterios dados anteriormente. Esperamos que las transiciones de fase (admisibles) definan las estructuras estables. Vamos a pedir que se pueda resolver el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Euler (3.3), con datos iniciales en forma de una transición de fase (dinámica o estática). Este problema no está contemplado en el cuadro definido por Majda para el estudio de los choques de Lax (es una relación de salto suplementaria). Más bien, en el marco propuesto por Freistühler [H.Freistühler,1994] [H.Freistühler,1998] y esperamos obtener los resultados de Majda, pero con los choques subcompresivos. La manera propuesta por Freistühler sigue fielmente aquella que propuso Majda, y se basa en una extensión apropiada de la *condición de estabilidad uniforme*.

La definición es análoga a la definición de *Estabilidad Uniforme* (2.10) la cual dice que la onda de choque plana \mathbf{u} es uniformemente estable si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ con $|\tau|^2 + |\eta|^2 = 1$ y $\text{Re } \tau \geq 0$, se tiene que

$$\forall (\chi, Z) \in \mathbb{C} \times \mathcal{E}^-(\tau, \eta), \quad |\chi b(\tau, \eta) + M Z| \geq c(|\chi| + |Z|).$$

para las ondas de choque planas dada por A. Majda en [A. Majda, 1983], pero que además tiene en cuenta tanto las condiciones de Rankine-Hugoniot como la condición de salto suplementaria. Por ejemplo, si se eligió el criterio de viscosidad-capilaridad, con $\nu > 0$, las transiciones de fase verifican la condición de estabilidad uniforme, como lo mostró Benzoni-Gavage en [S. Benzoni-Gavage, 1999]. El teorema general anunciado por Frestühler [H. Freistühler, 1998] asegura entonces la existencia, local en el tiempo, de las transiciones de fase no triviales (es decir, de soluciones regulares a pedazos) para

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(v) &= 0 \end{aligned}$$

que verifican la condición de salto suplementaria

$$[F] + [v] \frac{p(v_r) - p(v_l)}{2} = 0$$

o bien

$$[F] + [v] \frac{p(v_r) - p(v_l)}{2} = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(z)^2 dz$$

Estabilidad de transiciones de fase puramente capilares

Como se muestra en [S. Benzoni-Gavage, 1998], las transiciones de fase reversibles (aquellas que verifican el criterio puramente capilar) no son uniformemente estables. Es por esto que no se puede decir nada *a priori* sobre la estabilidad lineal ni no lineal de tales transiciones de fase. Tendríamos así, que retomar el trabajo de Majda para estudiar las modificaciones por hacer para mostrar la existencia de transiciones de fase no triviales.

La existencia de las transiciones de fase *reversibles* es un problema no-lineal de frontera libre al seguir el proceso de Majda [A. Majda, 1983]. Tomaremos en cuenta las condiciones de Rankine-Hugoniot tanto como las condiciones de salto complementarias que sean según el caso (capilaridad o viscosidad-capilaridad). Después de fijar el frente desconocido, este problema no-lineal con valores en la frontera se formula como un problema de valores iniciales y en la frontera en el semiespacio, y que podemos escribir en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \partial_t u^+ + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^+) \partial_{x_j} u^+ + \tilde{A}_d(u^+, \nabla \varphi) \partial_{x_d} u^+ &= 0, \quad x_d > 0, \\ \partial_t u^- + \sum_{j=1}^{d-1} A_j(u^-) \partial_{x_j} u^- + \tilde{A}_d(u^-, \nabla \varphi) \partial_{x_d} u^- &= 0, \quad x_d > 0, \\ \partial_t \varphi b_0(u) + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \varphi b_j(u) - b_d(u) &= 0, \quad x_d = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde se usa la notación

$$\tilde{A}_d(v, \nabla \psi) := A_d(v) - \partial_t - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi A_j(v)$$

los vectores $b_0(u), \dots, b_d(u)$ son construidos a partir de las condiciones de Rankine-Hugoniot (1.18) y de la relación (3.8).

En una primera etapa estudiamos el problema (3.12) linealizado en un entorno de una transición de fase plana. El problema obtenido es un problema no estándar mixto con coeficientes constantes.

El problema linealizado con coeficientes constantes se plantea como

$$\begin{cases} \mathcal{L}v := \partial_t v + \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j \partial_{x_j} v = f & x_d > 0 \\ \mathcal{B}(v, \psi) := \partial_t \psi b_0 + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} \psi b_j + Mv_{x_d=0} = g & x_d = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

y reuniendo todo ésto se obtiene el problema linealizado (2.12) del estudio de choques de Lax. Siguiendo la idea de Majda, trataremos de mostrar una estimación de energía en los espacios de pesos (ponderados): ponemos $\tilde{v} := \exp(-\gamma t)v$ y $\tilde{\psi} := \exp(-\gamma t)\psi$. Verificamos que (3.14) es entonces equivalente al sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\gamma \tilde{v} := \gamma \tilde{v} + \mathcal{L} \tilde{v} = \exp(-\gamma t)f & x_d > 0 \\ \mathcal{B}^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi}) := \gamma \tilde{\psi} b_0 + \mathcal{B}(\tilde{v}, \tilde{\psi}) = \exp(-\gamma t)g & x_d = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Tomamos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ con la norma

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma^2 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

y el espacio $L^2(\mathbb{R}^+, H^s(\mathbb{R}^d))$ con la norma

$$\|u\|_{s,\gamma}^2 := \int_0^{+\infty} \|u(\cdot, x_d)\|_{s,\gamma}^2 dx_d$$

En este caso los choques de Lax son uniformemente estables, Majda [A. Majda, 1983] demostró la desigualdad siguiente:

$$\gamma \|\tilde{v}\|_{0,\gamma}^2 + \|\tilde{v}|_{x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{L}^\gamma \tilde{v}\|_{0,\gamma}^2 + \|\mathcal{B}^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi})\|_{0,\gamma}^2 \right)$$

Puede verse [J.F. Coulombel, 2003] que esta estimación es verdadera aún para las ondas de choque subcompresivas uniformemente estables en el sentido de Freistühler.

Para el caso de las transiciones de fase reversibles, que no son uniformemente estables, se demuestra la siguiente estimación:

Teorema 3.1 (Estabilidad de las transiciones de fase plana) *Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $\tilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$ y para todo $\tilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$, se tiene:*

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \|\tilde{v}\|_{1/2,\gamma}^2 + \gamma^2 \|\tilde{v}|_{x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \gamma^2 \|\tilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \\ & \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{L}^\gamma \tilde{v}\|_{1,\gamma}^2 + \|\mathcal{B}^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi})\|_{1,\gamma}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Al tomar el caso uniformemente estable, se pierden las derivadas, tanto en el interior del dominio como sobre la frontera, en la estimación. Además, la violación de la condición de estabilidad uniforme contempla usualmente la pérdida de una derivada sobre la frontera $\{x_d = 0\}$. Cuando se pierden las derivadas en el interior, depende de la localización de los puntos donde la condición de estabilidad uniforme no es satisfecha. La comparación entre las transiciones de fase y los choques de Lax en hidrodinámica clásica ilustran los diferentes comportamientos posibles (ver [J.F. Coulombel, 2002]). De hecho, cuando se estudia la estabilidad de los choques de Lax en dinámica de gases isentrópicos, el problema linealizado en torno a un choque plano toma la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\gamma \tilde{v} = \exp(-\gamma t) f & x_d > 0, \\ \mathcal{B}^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi}) = \exp(-\gamma t) g & x_d = 0 \end{cases}$$

y mostraremos el resultado siguiente (ver [J.F. Coulombel, 2002])

Teorema 3.2 (Estabilidad de los choques de Lax planos) *Existe una constante $C > 0$ tal que, para toda $\tilde{v} \in H^2(\{x_d > 0\})$ y para toda $\tilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$, tenemos*

$$\gamma \|\tilde{v}\|_{0,\gamma}^2 + \|\tilde{v}|_{x_d=0}\|_{0,\gamma}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{1,\gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \|\mathcal{L}^\gamma \tilde{v}\|_{1,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\mathcal{B}^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi})\|_{1,\gamma}^2 \right)$$

Se verá que en el caso más favorable, se pierde una derivada completa en el interior (siempre en las variables tangenciales). Es pues, muy importante localizar los puntos donde la condición de estabilidad uniforme no es satisfecha. Un caso patológico (pero totalmente excepcional), que no será abordado aquí, se produce cuando la condición de estabilidad uniforme es violada en los puntos $(\tau, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ para los cuales la matriz $\mathcal{A}(\tau, \eta)$ no es diagonalizable, pero admite uno o dos bloques de Jordan.

Para los teoremas anteriores, se hace uso de un simetrizador de Kreiss. Se hizo inicialmente para los problemas uniformemente estables, la técnica de Kreiss [H. O. Kreiss, 1970] es muy general, de tal manera que se puede adaptar a muchas de los problemas débilmente estables.

Observación. Si se quisiera seguir el análisis de Majda, es necesario hacer la estimación en energía de (3.16) para el caso de un sistema linealizado con coeficientes variables. Mostraremos la analogía que hay entre (1.23) linealizado en torno de una solución aproximada \mathbf{a} no constante. Este problema linealizado se puede ver de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathbf{a}}(v, \psi) := \partial_t v + \sum_{j=0}^d \mathcal{A}_j \partial_{x_j} v - \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} \psi \mathcal{A}_j \partial_{x_d} \mathbf{a} + \mathcal{C}v = f & x_d > 0, \\ \mathcal{B}_{\mathbf{a}}(v, \psi) := \partial_t \psi b_0 + \sum_{j=0}^{d-1} \partial_{x_j} \psi b_j + Mv|_{x_d=0} = g & x_d = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

donde las matrices \mathcal{A}_j , M , y los vectores b_j no son constantes, sino que dependen de (t, y, x_d) . Esas **aplicaciones** tienen generalmente la misma regularidad que la solución aproximada \mathbf{a} . En cuanto a la matriz \mathcal{C} , que constituye el principal cambio que se tiene en el problema linealizado con coeficientes constantes, esta solución posee la misma regularidad que las primeras derivadas de \mathbf{a} .

Un esquema linealizado de forma (3.17) por una solución aproximada \mathbf{a} en la clase de funciones C^1 o C^2 pero no en C^∞ . Las herramientas usadas para mostrar una estimación de energía semejante a (3.16) es el cálculo paradiferencial, introducido por Bony [J.M. Bony, 1981].

Se puede ver que para una solución aproximada $\mathbf{a} \in C^2$, que verifica cierta condición, el problema (3.17) cumple con la misma estimación de energía que el problema linealizado con coeficientes constantes. Siendo más precisos, se tiene el siguiente resultado:

Para el siguiente teorema se puede consultar [A. Majda, 1983]

Teorema 3.3 (Estabilidad lineal de las transiciones de fase) *Existen dos constantes $C > 0$ y $\gamma_0 \geq 1$ tales que, para toda $\tilde{\psi} \in H^2(\{x_d = 0\})$ y para toda $\gamma \geq \gamma_0$, se tiene*

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \|\tilde{v}\|_{1/2, \gamma}^2 + \gamma^2 \|\tilde{v}|_{x_d=0}\|_{0, \gamma}^2 + \gamma^2 \|\tilde{\psi}\|_{1, \gamma}^2 \\ & \leq C \left(\frac{1}{\gamma} \|\mathcal{L}_a^\gamma \tilde{v}\|_{1, \gamma}^2 + \|\mathcal{B}_a^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi})\|_{1, \gamma}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

En el caso de los choques de Lax en dinámica de gases isentrópicos, la versión *con coeficientes constantes* del teorema de estabilidad de los choques de Lax planos, se formula de la siguiente manera:

Teorema 3.4 (Estabilidad lineal de ondas de choque de Lax) *Existen dos constantes $C > 0$ y $\gamma_0 \geq 1$ tales que, para toda $\tilde{v} \in H^2(\{x_d = 0\})$ y para toda $\gamma \geq \gamma_0$, se tiene*

$$\gamma \|\tilde{v}\|_{0, \gamma}^2 + \|\tilde{v}|_{x_d=0}\|_{0, \gamma}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{1, \gamma}^2 \leq C \left(\frac{1}{\gamma^3} \|\mathcal{L}_a^\gamma \tilde{v}\|_{1, \gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|\mathcal{B}_a^\gamma(\tilde{v}, \tilde{\psi})\|_{1, \gamma}^2 \right).$$

Observación: Gracias al análisis con coeficientes constantes, conocemos la estimación mostrada. Además, es muy importante, mas de lo que parecería a primera vista, pues condiciona toda la etapa relativa a la *paralinealización de las ecuaciones*, y la estimación del error. Así, el análisis con coeficientes constantes es importante para saber a que resultado.

3.3. Estabilidad de transiciones de fase con el criterio de capilaridad

Como nuestro interés es la estabilidad estructural de los cambios de fase dinámicos que ocurren al cruzar la interfase de un fluido de van der Waals en un espacio multidimensional, estas transiciones de fase se parecen a la propagación de discontinuidades. Sin embargo, son en general subsónicas, y por lo tanto subcompresivas. La información que falta es una condición adicional, la cual se puede obtener de los criterios de viscosidad-capilaridad. Esta condición, para el caso de transiciones de fase reversibles, se reduce a la regla de áreas iguales generalizada. Se prueba que las fronteras fase planas reversibles tienen estabilidad lineal débil (es decir que tienen estabilidad no uniforme), en el sentido introducido por Majda para el caso de los frentes de choque clásicos. Esto es, estas fronteras de fase o transiciones de fase, satisfacen una condición generalizada de Lopatinskii, aunque no la condición uniforme de Lopatinskii. La importancia recae en la condición de salto adicional, la cual se plantea en forma explícita, esto es, no depende de la estructura interna de la interfase (la que es desconocida). Al final se obtiene que las fronteras fase planas tienen estabilidad lineal débil.

Al estudiar el caso de las transiciones de fase reversibles, las cuales satisfacen el criterio de capilaridad, la condición de salto se reduce a una simple regla de áreas iguales. Los cálculos relacionados a la estabilidad linealizada multidimensional se pueden efectuar explícitamente. Se obtiene la condición de Lopatinskii y se prueba que esta condición es satisfecha, también se muestra que la condición uniforme de Lopatinskii no se cumple y esto origina la existencia de ondas superficiales que están relacionadas al caso en que se tiene estabilidad pero no estabilidad uniforme [D. Serre, 1999].

Preliminares Consideremos la ecuación de Euler que gobierna el movimiento en \mathbb{R}^d , con $d = 3$, de un fluido compresible isotérmico:

$$\left. \begin{aligned} \rho_t + (\rho v_1)_x + (\rho v_2)_y + (\rho v_3)_z &= 0 \\ (\rho v_1)_t + (\rho(v_1)^2 + p)_x + (\rho v_1 v_2)_y + (\rho v_1 v_3)_z &= 0 \\ (\rho v_2)_t + (\rho v_2 v_1)_x + (\rho(v_2)^2 + p)_y + (\rho v_2 v_3)_z &= 0 \\ (\rho v_3)_t + (\rho v_3 v_1)_x + (\rho v_3 v_2)_y + (\rho(v_3)^2 + p)_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Aquí ρ denota la densidad, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la velocidad y p la presión del fluido.

Adicionalmente a (3.19) consideremos la ley de presión suave de van der Waals:

$$p = p(v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (3.20)$$

donde $v = \frac{1}{\rho}$ denota el volumen específico, T la temperatura, R la constante del gas perfecto, con a y b constantes positivas. Supongamos que el movimiento del fluido es *isotérmico*. Por debajo de una temperatura crítica $T_c := 8a/(27bR)$, esta función p es decreciente pero en alguna región no física (a_0, b_0) es creciente. así, existe a_0 y b_0 con $0 < a_0 < b_0$

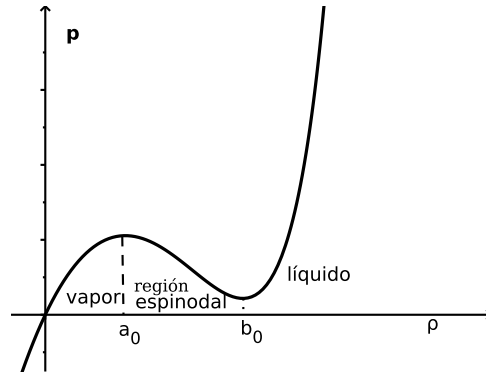


Figura 3.2: Ley de presión no-monótona

$$\begin{cases} p'(\rho) > 0, & \rho \in (0, a_0), \rho > b_0 \\ p'(\rho) < 0, & \rho \in (a_0, b_0) \end{cases}$$

Al hacer esta suposición se toma en cuenta la coexistencia de la fase de líquido ($\rho > b_0$) y del vapor ($\rho < a_0$) cuando $p \in (p(a_0), p(b_0))$. Si $\rho \in (0, a_0)$ o $b_0 < \rho$, entonces el sistema (3.19) no es hiperbólico cuando $\rho \in (a_0, b_0)$, ésta es llamada la región *espinodal*, el sistema (3.19) se convierte en elíptico en tal región y corresponde a estados no-físicos, se dice que no tienen sentido físico alguno.

Como antes, las soluciones que analizaremos aquí son las soluciones débiles de (3.19) que involucran la propagación de las discontinuidades de los estados conectados desde la fase de líquido hasta el estado en fase de vapor. Estamos interesados en la estabilidad dinámica de la propagación de estas discontinuidades, llamadas *transiciones de fase dinámicas*.

La estabilidad de las **discontinuidades clásicas**, en espacios multidimensionales, que se propagan, por ejemplo: los frentes de choques de Lax, las discontinuidades de contacto, fueron estudiadas por Majda [A.Majda, 1983]. Dos de los principales resultados fueron:

- i) la **estabilidad uniforme lineal** para los frentes de choques planos, y
- ii) la estabilidad no-lineal. Como las discontinuidades de contacto y las hojas de vórtice resultaron ser inestables, siendo esta inestabilidad tan violenta como la inestabilidad de Kelvin-Helmoltz, en el caso incompresible.

En esta sección se trabaja con el método de Majda en las transiciones de fase dinámicas, mediante la creación de un **problema de frontera libre (PFL)** y transformando este problema a un problema de valores iniciales y en la frontera, S. Benzoni probó [S. Benzoni-Gavage, 1998] que las transiciones de fase dinámicas planas tienen estabilidad lineal débil (es decir, no-uniforme) utilizando el criterio de capilaridad. De cierta manera resulta que esta estabilidad débil se relaciona con la existencia de ondas superficiales.

Cuando tratamos con fluidos más realistas, se debe tomar en cuenta la viscosidad. En el artículo de S. Benzoni [S.Benzoni-Gavage,1999] se plantea que la

principal dificultad es la condición de salto adicional que involucra un parámetro no dimensional para describir la competencia entre la viscosidad y la capilaridad, al igual que un término desconocido relacionado a la estructura interna de la interface. Este término es una integral a lo largo del perfil de visco-capilaridad asociado con la transición de fase Sylvie Benzoni aplica un argumento de capilaridad para el sistema dinámico el cual gobierna el perfil de visco-capilaridad con el fin de evaluar los efectos de primer orden con respecto al parámetro de viscosidad del término desconocido. Esto le permitió derivar una condición de Lopatinskii perturbada. Significando esto que, en particular las ondas superficiales son estabilizadas en modos decrecientes. Y como es de esperar, la viscosidad provoca la estabilidad, hace notar que las transiciones de fase expansivas son estables incondicionalmente mientras que las transiciones de fase compresivas son estables para números de Mach suficientemente pequeños. Esta condición parece ser satisfecha por la mayoría de los casos físicos.

Esta sección consta de tres partes.

- La primera trata de las condiciones de Rankine-Hugoniot y se establece el criterio de capilaridad para transiciones de fase.
- En la segunda se obtiene el determinante de Lopatinskii para problemas iniciales y en la frontera.
- En la tercera parte, se muestra la estabilidad lineal débil de las transiciones de fase dinámicas y se mostrarán las ondas superficiales ya mencionadas.

3.3.1. Condiciones adicionales

Consideremos una transición de fase dinámica que cruza una hipersuperficie suave que se mueve, $\Sigma(t)$, $t \geq 0$. Si $\Sigma(t)$ permanece transversal a una dirección dada, entonces hacemos un cambio de coordenadas a la ecuación de $\Sigma(t)$, quedando de la siguiente manera:

$$z = X(x, y, t)$$

donde $X : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, es lo suficientemente suave. Entonces como cualquier discontinuidad que se propaga, la transición de fase debe satisfacer las **condiciones de Rankine-Hugoniot**:

$$[f_{(3)}(\mathbf{u})] = \partial_t X[f_0(\mathbf{u})] + \partial_x X[f_1(\mathbf{u})] + \partial_y X[f_2(\mathbf{u})] \quad (3.21)$$

donde $[q]$ es el salto de la cantidad q , que cruza Σ , donde f_0 debe ser un difeomorfismo sobre su rango, es decir, siempre es invertible y

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$f_0(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix}$$

$$f_1(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho(v_1)^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_1 v_3 \end{pmatrix},$$

$$f_2(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho(v_2)^2 + p \\ \rho v_2 v_3 \end{pmatrix},$$

$$f_3(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_3 v_1 \\ \rho v_3 v_2 \\ \rho(v_3)^2 + p \end{pmatrix},$$

En caso de que, la superficie es justamente un hiperplano, digamos

$$\Sigma_0(t) := \{z = \sigma t\} = \{x_1, x_2, z \mid z = \sigma t\}$$

las condiciones de Rankine-Hugoniot se reducen a

$$[\rho v_3] = \sigma [\rho]$$

$$[\rho v_3 v_1] = \sigma [\rho v_1]$$

$$[\rho v_3 v_2] = \sigma [\rho v_2]$$

$$[\rho(v_3)^2 + p] = \sigma [\rho v_3]$$

(3.22)

Estas condiciones reducidas de Rankine-Hugoniot son las condiciones de salto del sistema reducido siguiente:

$$\rho_t + (\rho v_3)_z = 0$$

$$(\rho v_1)_t + (\rho v_1 v_3)_z = 0$$

$$(\rho v_2)_t + (\rho v_2 v_3)_z = 0$$

$$(\rho v_3)_t + (\rho(v_3)^2 + p)_z = 0$$

(3.23)

una solución de este sistema es la onda plana $\mathbf{u} = \mathbf{u}(z, t)$ que también es solución del sistema de ecuaciones de Euler (3.19).

Designaremos con e a la energía interna del fluido, la cual está caracterizada por la ecuación:

$$p = \rho e' - e$$

donde la prima es la derivada con respecto a ρ , ($e' = \frac{de}{d\rho}$); según las propiedades de $p(\rho)$, la función e es estrictamente convexa en $(0, a_0)$ y (b_0, ∞) , y estrictamente

concava sobre (a_0, b_0) . De donde, bajo una condición razonable, como sería que $e'(0) \leq e'(b_0)$, se puede presumir la existencia de un par único de puntos sobre su gráfica que comparten la misma tangente. Esos son llamados los puntos de Maxwell. Los denotaremos por $\rho_m < \rho_M$. Así, todos los estados de la forma

$$\mathbf{u}_{l,r} := \begin{pmatrix} \rho_{m,M} \\ (v_1)_{l,r} \\ (v_2)_{l,r} \\ \sigma \end{pmatrix}$$

están conectados por una discontinuidad de onda plana que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22). Tales discontinuidades, para las que $[v_3] = 0$ y $[p] = 0$, son similares a una discontinuidad de contacto. Esto es un caso muy especial de transición de fase. En lo siguiente consideraremos transiciones de fase diferentes de las llamadas *equilibrio de Maxwell*.

Haciendo un cambio de coordenadas, cualquier discontinuidad de onda plana puede ser descrita por su velocidad de propagación σ y por los estados a la izquierda y a la derecha de la discontinuidad

$$\mathbf{u}_{l,r} := \begin{pmatrix} \rho_{l,r} \\ (v_1)_{l,r} \\ (v_2)_{l,r} \\ (v_3)_{l,r} \end{pmatrix}$$

la cual estaría relacionado por el sistema de las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22).

Una transición de fase tiene propiedades distintas a las discontinuidades de Lax, o las discontinuidades de contacto, las cuales son llamadas *clásicas*. Esas diferencias consisten en los siguientes aspectos:

- las densidades $\rho_{l,r}$ pertenecen a dos diferentes partes conectadas de la región hiperbólica,
- el número de *modos salientes* se supone igual al número de *modos entrantes*, es decir:

$$(\lambda_i(u_l) - \sigma)(\lambda_i(u_r) - \sigma) \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.24)$$

donde λ_i define los valores propios del sistema reducido (3.23).

Criterio de capilaridad

De acuerdo a (3.24), una transición de fase es parecida a un choque subcompresivo de tipo 0, según Freistühler. Así que, las condiciones de Rankine-Hugoniot no son suficientes para determinar una transición de fase y por lo tanto se requiere de una condición de salto adicional. Para derivar tal condición ver [R. Hagan, M. Slemrod 1983], [M.Slemrod, 1983a], [M. Slemrod, 1983b]. Muchos de los criterios son de viscosidad-capilaridad. Estos criterios enfocan el estado a la derecha y a la izquierda conectados por un perfil de visco-capilaridad, que es una solución de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(z - \sigma t)$$

tal que

$$\mathbf{u}(-\infty) = \mathbf{u}_l \text{ y } \mathbf{u}(\infty) = \mathbf{u}_r$$

de la ecuación de conservación del momento modificada, la cual toma en cuenta los efectos de viscosidad y de capilaridad.

Mostramos esta ecuación modificada. Dado que, los perfiles son *ondas planas* podemos considerar la ecuación reducida (que está en una dimensión) dada por (3.23). De hecho estamos buscando solamente una condición de salto escalar. De esta forma nos concentramos en la ecuación de momento:

$$(\rho v_3)_t + (\rho(v_3)^2 + p)_z = 0$$

De la teoría de Kortoweg [D.J. Kortoweg, 1895] sobre capilaridad se pueden adicionar términos de viscosidad y capilaridad como sigue:

$$(\rho v_3)_t + (\rho(v_3)^2 + p)_z = (\mu v_z)_z - \left(\frac{1}{2}\epsilon_z V_z + \epsilon V_{zz}\right)_z \quad (3.25)$$

donde $V := \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico y μ la viscosidad, ϵ la capilaridad, son funciones suaves de ρ . Como lo hace notar Slemrod [M. Slemrod, 1983], en el equilibrio donde $v_3 \equiv 0$, la ecuación de viscosidad-capilaridad (3.25) lleva a la ecuación de Maxwell de áreas iguales. Es decir, si V es una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$p_z = -\left(\frac{1}{2}\epsilon_z V_z + \epsilon V_{zz}\right)_z$$

tal que $V(-\infty) = V_l$ y $V(+\infty) = V_r$ entonces integramos esta última ecuación para obtener

$$p(V_l) - p(V) = \frac{1}{2}\epsilon(V_z)V_z + \epsilon V_{zz}$$

Esta ecuación puede ser integrada explícitamente después de multiplicar por V_z :

$$2 \int_{V_l}^V (p(V_l) - p(v)) dv = \epsilon(V) V_z^2$$

lo cual implica que

$$\int_{V_i}^{V_r} (p(V_i) - p(v)) dv = 0$$

la misma relación es cierta intercambiando V_r y V_i :

$$\int_{V_i}^{V_r} (p(V_r) - p(v)) dv = 0$$

Así, tenemos lo siguiente

$$\begin{cases} p(V_i) = p(V_r) = \bar{p} \\ \int_{V_i}^{V_r} (p(v) - \bar{p}) dv = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Esta ecuación es conocida como la regla de áreas iguales de Maxwell y determina los puntos V_i y V_r como los valores inversos de los puntos de Maxwell definidos en la sección anterior.

Notemos que la ecuación (3.25) se puede escribir en una forma no conservativa de la siguiente manera:

- Sea k la función $k(\rho) \mapsto \frac{\epsilon}{\rho^3}$. Entonces con algunos cálculos directos se muestra que

$$-\left(\frac{1}{2}\epsilon_z V_z + \epsilon V_{zz}\right)_z = \rho(k\rho_{zz} + \frac{1}{2}k_z \rho_z)_z$$

Usando la ecuación de balance de masa y la relación entre p y e , la ecuación (3.25) es equivalente para soluciones suaves a:

$$v_t + v_3(v_3)_z + (e')_z = \frac{1}{\rho}(\mu(v_3)_z)_z + (k\rho_{zz} + \frac{1}{2}k_z \rho_z)_z$$

Si el término de la viscosidad es despreciado entonces la ecuación última proporciona una relación de salto. Es decir, para $\rho = \rho(z - \sigma t)$ y $v_3 = v_3(z - \sigma t)$ esta ecuación con $\mu \equiv 0$ es una ecuación equivalente a la ecuación diferencial ordinaria:

$$(v_3 - \sigma)(v_3)_\xi + (e')_\xi = (k\rho_{\xi\xi} + \frac{1}{2}k_\xi \rho_\xi)_\xi \quad (3.27)$$

donde $\xi := z - \sigma t$. Al integrar esta ecuación con respecto ξ , directamente se obtiene que dos estados conectados por un perfil que cumple con la ecuación (3.27) serán tal que

$$\left[\frac{1}{2}(v_3 - \sigma)^2 + e' \right] = 0 \quad (3.28)$$

Esta última ecuación (3.28) es la condición adicional. Notemos que en el caso $(v_3)_r = \sigma = (v_3)_l$, la ecuación (3.28) implica que $[e'] = 0$, esto es, recuperamos los puntos de Maxwell tanto en los estados a la derecha y a la izquierda.

Observación:

1. Nos referimos a la ecuación de la condición adicional de salto (3.28) como un criterio de *capilaridad* ya que la viscosidad ha sido despreciada, y es una condición necesaria para la existencia de un perfil de capilaridad. En efecto, junto con las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la ecuación (3.28) asegura la existencia de un perfil de capilaridad para $k > 0$. Es decir, si las ecuaciones (3.22) y (3.28) son ciertos entonces la forma integrada

$$\frac{1}{2}(v_3 - \sigma)^2 + e' - C = k\rho_{\xi\xi} + \frac{1}{2}k_{\xi}\rho_{\xi},$$

de la ecuación diferencial ordinaria (3.27), donde

$$C := \frac{1}{2}((v_3)_{r,l} - \sigma)^2 + e'(\rho_{l,r}),$$

también concuerda con la ecuación de balance de masa y de la ecuación

$$j := \rho_l((v_3)_l - \sigma) = \rho_r((v_3)_r - \sigma),$$

dada como:

$$\frac{j^2}{2\rho^2} + e' - C = k\rho_{\xi\xi} + \frac{1}{2}k_{\xi}\rho_{\xi}.$$

Esta ecuación puede ser integrada una vez más, después multiplicada por ρ_{ξ} , y así, sabiendo que

$$-j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = [p] = [\rho e' - e],$$

con la ecuación

$$D := -\frac{j^2}{2\rho_l} + e(\rho_l) - C\rho_l = -\frac{j^2}{2\rho_r} + e(\rho_r) - C\rho_r.$$

Obtenemos así

$$\frac{1}{2}k\rho_{\xi}^2 = \frac{j^2}{2\rho} + e(\rho) - C\rho - D,$$

donde el lado derecho es positivo entre los puntos ρ_l y ρ_r si son cercanos a los puntos de Maxwell. Si $k > 0$ entonces existe una órbita heteroclínica que contiene a ρ_l y ρ_r .

En la siguiente proposición se utiliza la condición inicial adicional con el criterio de capilaridad (3.28) para obtener una ecuación equivalente en la cual no aparece la velocidad σ .

Proposición 3.1 Sea $\sigma \in \mathbb{R}$ y

$$\mathbf{u}_{l,r} := \begin{pmatrix} \rho_{l,r} \\ (v_1)_{l,r} \\ (v_2)_{l,r} \\ (v_3)_{l,r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^3$$

la condición de Rankine-Hugoniot (3.22) junto con la condición adicional (3.28) son equivalentes a las ecuaciones (3.22) y la ecuación siguiente donde todas las velocidades han sido eliminadas:

$$(\rho_r - \rho_l)(\rho_l e'(\rho_l) + \rho_r e'(\rho_r)) - (e(\rho_r) - e(\rho_l))(\rho_l + \rho_r) = 0 \quad (3.29)$$

Prueba: La primera ecuación de (3.22), es decir: $[\rho v_3] = \sigma[\rho]$, nos permite introducir

$$j := \rho_l((v_3)_l - \sigma) = \rho_r((v_3)_r - \sigma)$$

y la última ecuación de (3.22), se pone como $[p] = \sigma[\rho v_3] - [\rho(v_3)^2]$

$$\begin{aligned} &= \sigma(\rho_r(v_3)_l - \rho_l(v_3)_l) - (\rho_r((v_3)_r)^2 - \rho_l((v_3)_l)^2) \\ &= \sigma\rho_r(v_3)_l - \sigma\rho_l(v_3)_l - \rho_r((v_3)_r)^2 + \rho_l((v_3)_l)^2 \end{aligned}$$

reacomodando y factorizando del primero y tercero de los términos, así como del segundo y cuarto

$$\begin{aligned} [p] &= \sigma\rho_r(v_3)_r - \rho_r((v_3)_r)^2 - \sigma\rho_l((v_3)_l)^2 + \rho_l((v_3)_l)^2 \\ -[p] &= \rho_r(v_3)_r((v_3)_r - \sigma) - \rho_l(v_3)_l((v_3)_l - \sigma) \\ &= (v_3)_r j - (v_3)_l j = ((v_3)_r - (v_3)_l)j \end{aligned}$$

y tenemos

$$j[(v_3)] = -[p]$$

de tal forma que se obtiene

$$-j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = [p] = [\rho e' - e]$$

en otras palabras la condición adicional (3.28) se convierte en

$$[e'] = -\frac{j^2}{2} \left[\frac{1}{\rho^2} \right].$$

Combinando esta relación con $-j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = [p] = [\rho e' - e]$ tenemos

$$[\rho e' - e] = 2 \frac{[e']}{\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_r}}$$

que es equivalente a (3.29) \square

Observación: La relación (3.29) puede ser escrita en términos de la presión p y la energía interna específica $E := \frac{e}{\rho}$ como:

$$[E] + \frac{p_l + p_r}{2} \left[\frac{1}{\rho} \right] = 0,$$

la cual es una relación conocida para ondas de choque no isentrópicas. Esto no es de sorprender puesto que la adición del término de capilaridad en la ecuación de momento como se indicó implica una ley conservativa adicional relacionada a la energía total.

A continuación se muestra que las transiciones de fase están determinadas en una vecindad de la línea de Maxwell por las ecuaciones de Rankine-Hugoniot (3.22) y la ecuación de la proposición (3.29).

Proposición 3.2 *Existen a, b, ρ_m, ρ_M tales que $a < \rho_m$, $b > \rho_M$ y para todo*

$$\mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} \rho_l \\ (v_1)_l \\ (v_2)_l \\ (v_3)_l \end{pmatrix} \in (a, \rho_m) \times \mathbb{R}^d$$

existe un único real $\sigma < (v_3)_l$ y un único estado

$$\mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} \rho_r \\ (v_1)_r \\ (v_2)_r \\ (v_3)_r \end{pmatrix} \in (\rho_M, b) \times \mathbb{R}^d$$

tal que las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la proposición (3.29) y la condición adicional (3.28) se cumplen.

Las ecuaciones (3.22), (3.29) y (3.28) son **reversibles**, la misma proposición es cierta con $\rho_l \in (\rho_M, b)$ y $\rho_r \in (a, \rho_m)$, la velocidad de propagación puede ser tomada más grande que v_1^d

Prueba: Se ve que necesariamente debe cumplirse con

$$[p] [\rho] \geq 0.$$

ya que los estados de la llamada región metaestable $(\rho_m, a_0) \cup (b_0, \rho_M)$ no son considerados en la proposición. Ahora sea φ la función determinada por la ecuación (3.29), tal que para todo $a > 0$, $b > 0$:

$$\varphi(a, b) := (b - a)(ae'(a) + be'(b)) - (e(b) - e(a))(a + b)$$

Por definición de los puntos de Maxwell

$$\varphi(\rho_m, \rho_M) = 0$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial b}(\rho_m, \rho_M) = \rho_M(\rho_M - \rho_m)e''(\rho_M) > 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a}(\rho_m, \rho_M) = \rho_m(\rho_M - \rho_m)e''(\rho_m) > 0. \end{cases}$$

Del teorema de la función implícita existe $a < \rho_m$ y $b > \rho_m$ tal que

$$\forall \rho_l \in]a, \rho_m], \quad \exists! \quad \rho_r \in]\rho_M, b[; \text{ donde la ecuación (3.29) es cierta}$$

en particular si $\rho_l = \rho_m$ entonces $\rho_r = \rho_M$.

Sea $\rho_l \in]a, \rho_m[$. Una vez que $\rho_r \in]\rho_M, b[$ está determinado, la ecuación $-j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] = [p]$ queda como

$$j = \sqrt{\frac{[p]}{[\rho]} \rho_r \rho_l}.$$

Tomamos $j > 0$ ya que estamos buscando para $\sigma < (v_3)_l$. De la definición de $j := \rho_l((v_3)_l - \sigma)$ tenemos que

$$\sigma = (v_3)_l - \frac{j}{\rho_l}$$

y de $j[v] = -[p]$ tenemos que

$$(v_3)_r = (v_3)_l - \frac{[p]}{j}.$$

Puesto que $j \neq 0$, la ecuación de las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22) implica que

$$(v_1)_r = (v_1)_l \quad (v_2)_r = (v_2)_l$$

las desigualdades que deben satisfacer los valores propios (3.24) se cumplen. Es decir, tenemos $\lambda_2 = v_3$ y $\lambda_3 = v_3$:

$$(\lambda_2(\mathbf{u}_l) - \sigma)(\lambda_2(\mathbf{u}_r) - \sigma) = \frac{j^2}{\rho_l \rho_r} > 0.$$

y

$$(\lambda_3(\mathbf{u}_l) - \sigma)(\lambda_3(\mathbf{u}_r) - \sigma) = \frac{j^2}{\rho_l \rho_r} > 0.$$

Además, $\lambda_1 = v_3 - c$, $\lambda_3 = v_3 - c$ donde c denota la velocidad del sonido fuera de la región espinodal, esto es:

$$c := \sqrt{p'};$$

tenemos

$$(\lambda_1(u_l) - \sigma)(\lambda_1(u_r) - \sigma) = \left(\frac{j}{\rho_l} - c_l\right) \left(\frac{j}{\rho_r} - c_r\right) = \left(\sqrt{\frac{[p]}{[\rho]}} \frac{\rho_r}{\rho_l} - c(\rho_l)\right) \left(\sqrt{\frac{[p]}{[\rho]}} \frac{\rho_l}{\rho_r} - c(\rho_r)\right).$$

Pero

$$\sqrt{\frac{[p]}{[\rho]}} < c_{l,r} = \sqrt{p'(\rho_{l,r})},$$

y

$$\frac{\rho_l}{\rho_r} \leq \frac{\rho_m}{\rho_M} < 1,$$

tal que

$$\sqrt{\frac{[p]}{[\rho]}} \frac{\rho_l}{\rho_r} < c(\rho_r).$$

Por otro lado, cuando a tiende hacia ρ_m , ρ_l tiende hacia ρ_m y ρ_r tiende hacia ρ_M . De donde $\frac{\rho_r}{\rho_l}$ está acotado mientras que $\frac{[p]}{[\rho]}$ tiende a cero y $p'(\rho_l)$ tiende a

$p'(\rho_m) > 0$. Así, si a esta muy próxima a ρ_m tenemos que $\sqrt{\frac{[p]}{[\rho]}} \frac{\rho_r}{\rho_l} < c(\rho_l)$

Finalmente, $\lambda_4 = v_3 + c$ es claramente positivo en ambos lados de la frontera ya que j ha sido tomada como positiva. \square

Ahora extendemos la condición adicional $\left[\frac{1}{2}(v_3 - \sigma)^2 + e'\right]$ a las transiciones de fase cuya *frontera fase no es necesariamente plana* sino que está dada por $\Sigma(t) = \{(x, y, t) \mid z = X(x, y, t)\}$. Localmente $\Sigma(t)$ puede ser identificada con su espacio tangente (hiperplano), el cual tiene como vector normal unitario

$$\mathbf{n} := \frac{1}{\sqrt{1 + \|\partial_x X + \partial_y X\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x X \\ -\partial_y X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces reemplazamos v_3 por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, y σ por la velocidad normal de propagación de $\Sigma(t)$, dada por

$$\frac{\partial_t X}{\sqrt{1 + \|\partial_x X + \partial_y X\|^2}}$$

en la ecuación $\left[\frac{1}{2}(v_3 - \sigma)^2 + e'\right]$.

Así, la **condición de salto general** queda como

$$[f_{(3)}(\mathbf{u})] = \partial_t X[f_{(0)}(\mathbf{u})] + \partial_x X[f_{(1)}(\mathbf{u})] + \partial_y X[f_{(2)}(\mathbf{u})]$$

y se obtiene la condición de salto para la perturbación:

$$\left[\frac{1}{2} \left(v_3 - \sum_{\alpha=1}^2 v^\alpha \partial_\alpha X - \partial_t X \right)^2 + \left(1 + \sum_{\alpha=1}^2 (\partial_\alpha X)^2 \right) e' \right] = 0 \quad (3.30)$$

3.3.2. Determinante de Lopatinskii

Problema linealizado

Consideremos la transición de fase plana (u_l, u_r, σ) , diferente del equilibrio de Maxwell de tal manera que la condición de Rankine-Hugoniot reducida (3.22), la condición adicional (3.28) y (3.24) son ciertas. Las dos proposiciones anteriores muestran que tales transiciones de fase existen. Denotaremos por \hat{u} la onda plana correspondiente:

$$\hat{u} : (x, y, z, t) \mapsto \hat{u}(x, y, z, t) := \begin{cases} u_l, & z < \sigma t, \\ u_r, & z > \sigma t \end{cases}$$

Lo que nos interesa es saber si tales transiciones de fase persisten después de una pequeña modificación. En otros términos, ¿el problema de Cauchy asociado a las ecuaciones de Euler (3.19) y el dato inicial u_0 cercano a $\hat{u}_0 := \hat{u}(\cdot, 0)$ admitirá una solución próxima a \hat{u} ?

Este problema es equivalente a buscar una solución débil de la ecuación de Euler (3.19) la cual involucra una transición de fase a través de una superficie $\Sigma(t) = z = X(x, y, t)$, cerca de $\hat{\Sigma}(t) = z = \sigma t$, y la cual es suave y próxima a u_l y u_r respectivamente en ambos lados de la frontera Σ . Este problema es un problema de frontera libre (**PFL**), dado que $\Sigma(t)$ no se conoce.

Las ecuaciones a resolver son las ecuaciones de Euler (3.19), en ambos lados de la frontera, acoplada con las condiciones de salto (3.21) y (3.30) a través de la frontera. Siguiendo el trabajo de Majda [A.Majda, 1983] podemos transformar el problema de frontera libre en un problema con valores iniciales y en la frontera, mediante el cambio de variable

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*} \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2, z)$$

donde $\mathbb{R}^{+*} := \{s \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ y un cambio de funciones incógnitas

$$\begin{aligned} u_\pm : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, z, t) &\longmapsto u(x_1, x_2, \pm z + X(x_1, x_2, t), t) \end{aligned}$$

Así, las 4 ecuaciones de Euler (3.19) llevan a $2(4) = 8$ ecuaciones diferenciales parciales de evolución relacionadas a u_- , u_+ y X en el semiespacio $z > 0$, mientras las $(d+2)$, con $d = 3$, condiciones de salto (3.21) y (3.30) llevan a $(d+2)$ condiciones de frontera para u_- , u_+ sobre $z = 0$ las cuales son ecuaciones diferenciales parciales en X .

Se van a linealizar todas estas ecuaciones en la vecindad de la onda plana

$$(\hat{u}_\pm, \hat{X}),$$

con la notación $\hat{X}(x_1, x_2, t) = \sigma t$. La ecuación linealizada queda como [D. Serre, 1996] la ecuación en el semiespacio $z > 0$:

$$\begin{cases} \partial_t u_+ + \sum_{\alpha=1}^2 A^\alpha(u_r) \partial_\alpha u_+ + (A^{(3)}(u_r) - \sigma) \partial_z u_+ = 0 \\ \partial_t u_- + \sum_{\alpha=1}^2 A^\alpha(u_l) \partial_\alpha u_- - (A^{(3)}(u_l) - \sigma) \partial_z u_- = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

donde $A^\alpha := (df^0)^{-1} df^\alpha$ para $\alpha = 1, 2$. Las condiciones de frontera vienen de que la transición de fase satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\partial_t X[f^0(u)] + \sum_{\alpha=1}^2 \partial_\alpha X[f^\alpha(u)] = [f^{(3)}(u)]$$

de tal manera que

$$\partial_t X[f^{(0)}(u)] + \sum_{\alpha=1}^2 \partial_\alpha X[f^{(3)}(u)] = \quad (3.32)$$

$$(df^{(3)}(u_r) - \sigma df^{(0)}(u_r))u_{+|z=0} - (df^{(3)}(u_l) - \sigma df^{(0)}(u_l))u_{-|z=0}$$

y como tenemos las condiciones de frontera linealizadas que se derivan de (3.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t X[v_3] + \sum_{\alpha=1}^2 \partial_\alpha X[v_\alpha(v_3 - \sigma)] = \\ ((v_d)_r - \sigma)(v_d)_{+|z=0} - ((v_3)_l - \sigma)(v_3)_{-|z=0} + \\ e''(\rho_r)\rho_{+|z=0} - e''(\rho_l)\rho_{-|z=0} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Linealmente estable Las ecuaciones linealizadas (3.31), y sus condiciones (3.32) y (3.33) las funciones incógnitas $(u_-, u_+ X)$ representan la diferencia entre la solución perturbada y la solución particular $(\hat{u}_+, \hat{u}_+, \hat{X})$ y permanecen pequeñas para datos iniciales pequeños, los cuales son considerados al decir que el problema de valores iniciales y en la frontera (3.31), (3.32) y (3.33) es bien planteado, y decimos que \hat{u} es **linealmente estable**.

3.3.3. El determinante de Lopatinskii

Análisis Modal

La condición de Lopatinskii, como se vió en el capítulo 2, es conocida por ser una condición necesaria para que problemas con valores iniciales y en la frontera sean bien planteados. Primero vamos a derivar esta condición, en nuestro caso buscamos las soluciones particulares para (3.31), y sus condiciones (3.32) y (3.33) de la forma

$$\begin{cases} u_\pm(y, z, t) = U_\pm(z) e^{\eta \cdot y} e^{\tau t} \\ X(y, t) = \mu e^{\eta \cdot y} e^{\tau t} \end{cases} \quad (3.34)$$

con $y = (x_1, x_2)$, $\eta \in \mathbb{R}^2$, $\tau \in \mathbb{C}$.

La condición de Lopatinskii se plantea como: si una solución de la forma (3.34) es tal que si $U_{\pm}(+\infty) = 0$ con $Re \tau > 0$ implica que $U \equiv 0$, $\mu = 0$.

Cuando esta condición de Lopatinskii es satisfecha decimos que \hat{u} es **estable linealmente débil**.

Sustituyendo la solución particular de la ecuación linealizada (3.34) en el sistema linealizado (3.31) se llega al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} (\tau + A(u_r; \eta))U_+ + (A^{(3)}(u_r) - \sigma)\frac{dU_+}{dz} = 0 \\ (\tau + A(u_l; \eta))U_- - (A^{(3)}(u_l) - \sigma)\frac{dU_-}{dz} = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

en donde $A(u; w) := \sum_{\alpha} w^{\alpha} A^{\alpha}(u)$ para toda $w \in \mathbb{R}^3$, el vector $\eta \in \mathbb{R}^2$ es identificado con $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0)^T$

Sustituyendo la solución particular (3.34) del sistema linealizado, en las ecuaciones de salto (3.32) y (3.33) se obtienen las **condiciones iniciales** con $Z_{\pm} := U_{\pm}(0)$ como sigue:

$$\mu(\tau [f^{(0)}(u)] + \sum_{\alpha=1}^2 \eta^{\alpha} [f^{\alpha}(u)]) = (df^{(3)}(u_r) - \sigma df^{(0)}(u_r))Z_+ \quad (3.36)$$

$$-(df^{(3)}(u_l) - \sigma df^{(0)}(u_l))Z_-$$

$$\mu(\tau [v_3] + \sum_{\alpha=1}^2 \eta^{\alpha} [v^{\alpha}(v_3 - \sigma)]) =$$

$$((v_3)_r - \sigma)Z_+^3 - ((v_3)_l - \sigma)Z_-^3 \quad (3.37)$$

$$+e''(\rho_r)Z_+^0 - e''(\rho_l)Z_-^0$$

donde $Z = (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3)$.

La transición de fase \hat{u} distinta del equilibrio de Maxwell, no es característica y así las desigualdades en los valores propios (3.24) son satisfechas estrictamente. Por lo tanto las matrices $(A^{(3)}(u_{l,r}) - \sigma)$ son invertibles.

Para $u = u_{l,r}$ denotamos:

$$B(u; \tau, \eta) := (A^{(3)}(u) - \sigma)^{-1}(\tau + A(u; \eta))$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.35) es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dU_+}{dz} = -B(u_r; \tau, \mu)U_+ \\ \frac{dU_-}{dz} = B(u_l; \tau, \mu)U_- \end{cases} \quad (3.38)$$

Una solución de la forma (U_-, U_+) del sistema lineal (3.38) se va a cero en $+\infty$, si y sólo si $Z_- = U_-(0)$ pertenece al subespacio invariante $E_-(u_l; \tau, \eta)$ de $B(u_l; \tau, \eta)$ asociado a los valores propios que tienen parte real negativa y $Z_+ = U_+(0)$ pertenece al espacio invariante $E_+(u_r; \tau, \eta)$ de $B(u_r; \tau, \eta)$ asociado a los valores propios con parte real positiva. Describiremos el espacio $E_-(u_l; \tau, \eta)$ y $E_+(u_r; \tau, \eta)$ de los *datos iniciales admisibles* Z_- y Z_+ . Notese que por un argumento de continuidad su dimensión es constante para $\text{Re } \tau > 0$.

Observación: Existe una transformación Galileana tal que en la nueva referencia se tiene:

- la velocidad tangencial \check{v} del fluido, la cual es igual en ambos lados de la frontera fase de acuerdo a la ecuación de las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), es igual a cero,
- la velocidad normal σ de propagación de la frontera no perturbada también es igual a cero,

Estos cambios de referencia no afectan los resultados de estabilidad. Así, podemos suponer que

$$\begin{cases} (v_1)_l = (v_1)_r = 0 \\ (v_2)_l = (v_2)_r = 0 \\ \sigma = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Entonces la velocidad v esta definida sólo por su componente v_3 diferente de cero de la velocidad del fluido $v = (0, 0, v_3)$.

Resultados para establecer la condición de Lopatinskii

A continuación se muestran dos resultados que serán utilizados para establecer la condición del determinante de Lopatinskii.

Lema 3.1 [*S. Benzoni Gavage, 1998*] *Tomemos una transición de fase (u_l, u_r, σ) diferente del equilibrio de Maxwell, que satisface las ecuaciones*

- a) *Rankine-Hugoniot (3.22)*
- b) *los valores propios son tales que cumplen (3.24)*

- c) la condición adicional (3.28)
- d) la condición referencial (3.39)

todavía más, supondremos que $v_{l,r} > \sigma = 0$.

Sea $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Re } \tau > 0$, entonces existe una única ω_r de **parte real positiva** y una única ω_l de **parte real negativa** tal que

$$\begin{cases} (c_l^2 - (v_3)_l^2)\omega_l^2 + 2(v_3)_l\tau\omega_l - c_l^2 \|\eta\|^2 - \tau^2 = 0 \\ (c_r^2 - (v_3)_r^2)\omega_r^2 + 2(v_3)_r\tau\omega_r - c_r^2 \|\eta\|^2 - \tau^2 = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

donde $c = c(\rho)$ la velocidad del sonido, y denotamos $\omega_0 := \frac{\tau}{v_r}$ y

$$F_2 := \left\{ Z \in \mathbb{C}^3 \mid \exists Y = (Y_1, Y_2) \in \mathbb{C}^2, Z = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 Y_1 \\ \omega_0 Y_2 \\ i(\eta_1, \eta_2) \cdot (Y_1, Y_2) \end{pmatrix} \right\} \quad (3.41)$$

Tenemos que, el espacio estable dado como

$$E_-(u_l; \tau, \eta) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \rho_l(\tau - v_l\omega_l) \\ -c_l^2\eta_1 \\ -c_l^2\eta_2 \\ c_l^2\omega_l \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

y para $\tau \neq v_r\|\eta\|$, esto es, para $\omega_0 \neq \omega_r$:

$$E_+(u_r; \tau, \eta) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \rho_r(\tau - v_r\omega_r) \\ -c_r^2\eta_1 \\ -c_r^2\eta_2 \\ c_r^2\omega_r \end{pmatrix} \oplus F_2 \quad (3.43)$$

y si $\tau = v_r\|\eta\|$ nos queda

$$E_+(u_r; \tau, \eta) = (\omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) + \tau(v_3)_r, \rho_r(v_3)_r\eta_1, \rho_r(v_3)_r\eta_2, -p_r\tau)^\perp \quad (3.44)$$

Prueba: Para el caso $\omega \in \mathbb{C}$, $Z \in \mathbb{C}^3$ y $u = u_{l,r}$ tenemos

$$(B(u; \tau, \eta) - \omega I_{d+1})Z = 0 \Leftrightarrow (A(u; \eta - \omega e_d) + \tau)Z = 0$$

por definición de A y de B . Ahora para $u = (\rho, 0, 0, v_3)^\dagger$ tenemos

$$A(u; \eta - \omega e_d) = \begin{pmatrix} -v_3\omega & \rho\eta^\dagger & -\rho\omega \\ \eta c^2/\rho & -v_3\omega I_2 & 0 \\ -\omega c^2/\rho & 0 & -v\omega \end{pmatrix}$$

donde $c = c(\rho)$. Así que $(A(u; \eta - \omega e_d) + \tau)Z = 0$ es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = v_3\omega, \exists Y \in \mathbb{C}^2; Z = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega Y \\ i\eta \cdot Y \end{pmatrix} \\ o \\ (\tau - v_3\omega)^2 = c^2(\omega^2 - \|\eta\|^2), \exists \gamma \in \mathbb{C}; Z = \begin{pmatrix} \gamma\rho(\tau - v_3\omega) \\ -\gamma c^2 i\eta \\ \gamma c^2 \omega \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

- el primer caso proporciona los valores propios ω de parte real positiva y así esta contribuyendo al espacio $E_+(u_r; \tau, \eta)$.
- para el segundo caso, la ecuación de segundo orden sobre ω también puede quedar como

$$(c^2 - (v_3)^2)\omega^2 + 2v_3\tau\omega - c^2 \|\eta\|^2 - \tau = 0$$

para $\eta = 0$ las raíces son

$$\omega = \frac{\tau}{v_3 \pm c}$$

la cual tiene parte real de signo opuesto, de las características de los valores propios (3.24) y de la suposición de (3.39) tenemos según la proposición 2:

$$|(v_3)_{l,r}| < c_{l,r}$$

Por continuidad las raíces tienen parte real de signos opuestos para toda $\eta \in \mathbb{R}^2$. De donde se obtiene que existe una única ω_r con $\text{Re}\omega_r > 0$ y una única ω_l con $\text{Re}\omega_l < 0$ tales que las ecuaciones (3.41) del lema son satisfechas. El valor propio ω_l es el único que contribuye al espacio estable $E_-(u_l; \tau, \eta)$ y es simple.

Esto prueba que (3.42) se cumple. Finalmente observamos que $\omega_l \neq \omega_0$, ($\omega_0 := \tau/v_r$) excepto si $\tau = (v_3)_r \|\eta\|$, de la descripción (3.43) de $E_+(u_r; \tau, \eta)$, es un hiperplano. La prueba de (3.44) se puede ver directamente. \square .

Observación: La elección de $v > \sigma = 0$ es tan esencial aquí como en la proposición (3.2). Un argumento de simetría podría llevarse y se llegaría al mismo resultado de estabilidad si v fuera del signo opuesto.

Siguiendo la notación del Lema 3.1 y bajo las mismas hipótesis, planteamos el siguiente lema.

Lema 3.2 *Si (u_l, u_r, σ) es una transición de fase diferente al equilibrio de Maxwell, que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la condición adicional (3.28), y los valores propios son tal que satisfacen (3.24), y suponemos de (3.39), y además $v_{l,r} > \sigma = 0$, entonces para*

$$(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \quad \text{y } \text{Re}\tau > 0$$

la existencia de $(Z_-, Z_+, \mu) \in E_-(u_l; \tau, \eta) \times E_+(u_r, \tau, \eta) \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que las ecuaciones de las condiciones iniciales (3.36) y (3.37) son ciertas es equivalente a que el determinante $\Delta(\tau, \|\eta\|) = 0$ con

$$\Delta(\tau, \|\eta\|) := \begin{vmatrix} \tau [\rho] & \omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) + (v_3)_r\tau \\ [\rho] & -(v_3)_r c_r^2 \\ 0 & \omega_r(v_3)_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) + ((v_3)_r^2 + c_r^2)\tau \\ & -\omega_l(c_l^2 - (v_3)_l^2) - (v_3)_l\tau \\ & (v_3)_l c_l^2 \\ & -\omega_l(v_3)_l(c_l^2 - (v_3)_l^2) - ((v_3)_l^2 + c_l^2)\tau \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

Notese que $\Delta(\tau, \|\eta\|)$ es función de $\|\eta\|$ a través de los valores propios ω_l y ω_r , los cuales satisfacen la ecuación del primer lema (3.40).

Prueba: Tomando en cuenta la relación

$$c^2 = \rho e''$$

y con la simplificación de (3.39), las ecuaciones de las condiciones (3.36) y (3.37) se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \mu\tau[\rho] = (v_3)_r Z_+^0 + \rho_r Z_+^3 - (v_3)_l Z_-^0 - \rho_l Z_-^3 \\ \mu\eta[p] = \rho_r (v_3)_r \check{Z}_+ - \rho_l (v_3)_l \check{Z}_- \\ 0 = ((v_3)_r^2 + c_r^2) Z_+^0 + 2\rho_r (v_3)_r Z_+^3 - ((v_3)_l^2 + c_l^2) Z_-^0 - 2\rho_l (v_3)_l Z_-^3 \\ \mu\tau[v_3] = \frac{c_r^2}{\rho_r} Z_+^0 + (v_3)_r Z_+^d - \frac{c_l^2}{\rho_l} Z_-^0 - (v_3)_l Z_-^3 \end{cases} \quad (3.46)$$

Según el Lema 1, $Z_- \in E_-(u_l; \tau, \eta)$ si y sólo si existe $\delta \in \mathbb{C}$ tal que

$$Z_- = \delta \begin{pmatrix} \rho_l(\tau - v_l\omega_l) \\ -c_l^2\eta_1 \\ -c_l^2\eta_2 \\ c_l^2\omega_l \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Para el caso de cuando $\tau \neq (v_3)_r \|\eta\|$, $Z_+ \in E_+(u_r; \tau, \eta)$ si y sólo si existe $\gamma \in \mathbb{C}$ y $Y \in \mathbb{C}^2$ tales que:

$$Z_+ = \gamma \begin{pmatrix} \rho_r(\tau - v_r\omega_r) \\ -c_r^2\eta_1 \\ -c_r^2\eta_2 \\ c_r^2\omega_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 Y_1 \\ \omega_0 Y_2 \\ \eta \cdot Y \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Ahora vamos a sustituir estas dos últimas expresiones de Z_- y Z_+ (3.47) y (3.48) en el segundo renglón de (3.46) lo que muestra que Y debe ser proporcional a η . Todavía más, de las ecuaciones

$$\begin{aligned} j &:= \rho_l((v_3)_l - \sigma) = \rho_r((v_3)_r - \sigma) \\ j[v_3] &= -[p] \end{aligned}$$

y de la suposición (3.39), se tiene que

$$[v_3] = -\frac{[p]}{(\rho v_3)_{l,r}} \quad (3.49)$$

Esto nos permite deducir del segundo y del cuarto renglón de (3.46) que

$$\rho_r(\tau^2 - (v_3)_r^2 \|\eta\|^2)(\eta \cdot Y) = 0$$

Consecuentemente, para $\tau \neq (v_3)_r \|\eta\|$, las expresiones de Z_- y de Z_+ según (3.47) y (3.48) resultan compatibles con (3.46) si y sólo si $Y = 0$. En cuyo caso las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) llevan a un sistema lineal de la forma

$$M \cdot \begin{pmatrix} -\mu \\ \gamma \rho_r \\ \delta \rho_l \end{pmatrix} = 0$$

con el determinante de M igual a $\Delta(\tau, \|\eta\|)$ dado anteriormente en (3.45).

En el otro caso para cuando $\tau = (v_3)_r \|\eta\|$ y $\eta \neq 0$, la forma lineal en la descripción del espacio estable E_- en la ecuación del lema 1 (3.40):

$$E_+(u_r; \tau, \eta) = (\omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2)\tau(v_3)_r, \rho_r(v_3)_r \eta_1, \rho_r(v_3)_r \eta_2, -p_r \tau)^\perp$$

esto se reduce a

$$l(u_r; (v_3)_r \|\eta\|, \eta) = (\|\eta\| c_r^2, \rho_r(v_3)_r \eta_1, \rho_r(v_3)_r \eta_2, -\rho_r(v_3)_r \|\eta\|)$$

si $l(u_r; (v_3)_r \|\eta\|, \eta) Z_+ = 0$ entonces

$$\rho_r(v_3)_r \eta \cdot \check{Z}_+ = \rho_r(v_3)_r \|\eta\| Z_+^3 - \|\eta\| c_r^2 Z_+^0$$

Al sustituir esta relación y la ecuación de Z_- (3.47) en la ecuación (3.46) llegamos a un sistema lineal

$$M_0 \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ Z_+^0 \\ Z_+^3 \\ -\delta \rho_l \end{pmatrix} = 0,$$

encontramos que

$$M_0 = \begin{pmatrix} -(v_3)_r \|\eta\| [\rho] & (v_3)_r & \rho_r & (v_3)_l (v_3)_r \|\eta\| + (c_l^2 - (v_3)_l^2) \omega_l \\ \|\eta\|^2 [p] & -\|\eta\| c_r^2 & \rho_r (v_3)_r \|\eta\| & (v_3)_l c_l^2 \|\eta\|^2 \\ 0 & (v_3)_r^2 + c_r^2 & 2\rho_r (v_3)_r & (v_3)_l \omega_l (c_l^2 - (v_3)_l^2) + (v_3)_r \|\eta\| ((v_3)_l^2 + c_l^2) \\ -(v_3)_r \|\eta\| [v_3] & \frac{c_r^2}{\rho_r} & (v_3)_r & \frac{c_l^2}{\rho_l} (v_3)_r \|\eta\| \end{pmatrix}$$

de la ecuación $[v_3] = \frac{[p]}{(\rho(v_3))_{l,r}}$ nos permite simplificar el segundo con el cuarto renglón y entonces desarrollar el determinante de M_0 con respecto al segundo renglón. Finalmente usando la relación

$$\frac{[p]}{[\rho]} = v_l v_r \quad (3.50)$$

aplicando las igualdades

$$j := \rho_l((v_3)_l - \sigma) = \rho_r((v_3)_r - \sigma), \quad j [v_3] = -[p]$$

y (3.39) se puede ver que

$$\det M_0 = \|\eta\|^3 2c_r^2 (v_3)_r [\rho] [v_3] ((v_3)_l^2 - c_l^2) ((v_1)_r - (v_3)_l \omega_l / \|\eta\|)$$

de aquí tenemos que

$$\|\eta\|^3 2c_r^2 (v_3)_r [\rho] [v_3] ((v_3)_l^2 - c_l^2) \neq 0.$$

También tenemos que si $(v_3)_r \neq (v_3)_l \omega_l / \|\eta\|$. Esto es, por definición de ω_l cuando $\tau = (v_3)_r \|\eta\|$, $(v_3)_l \omega_l / \|\eta\|$ es una raíz de

$$\Pi(X) := \left(\frac{c_l^2}{(v_3)_l^2} - 1 \right) X^2 + 2(v_3)_r X - c_l^2 - (v_3)_l^2$$

mientras se tenga que

$$\Pi((v_3)_r) = c_l^2 \left(\frac{(v_3)_r^2}{(v_3)_l^2} - 1 \right) \neq 0.$$

Dado que M_0 es invertible, lo cual define que las soluciones de (3.46) son tal que

$$l(u_r; (v_3)_r \|\eta\|, \eta) Z_+ = 0$$

y la ecuación (3.47) de Z_- se cumple correspondiendo a

$$\mu = 0, \quad Z_+^0 = 0, \quad Z_+^{(3)} = 0, \quad \delta = 0$$

Esto también implica que

$$(Z_1)^+ = 0, (Z_2)^+ = 0$$

y ya que debe ser proporcional a η y tal que $\eta_1 (Z_1)^+ + \eta_2 (Z_2)^+ = 0$. Por lo tanto, el caso particular de $\tau = (v_3)_r \|\eta\|$ con $\eta \neq 0$ no proporciona ninguna solución **no trivial**. \square

3.3.4. Desarrollo del determinante de Lopatinski

Lema 3.3 [S. Benzoni Gavage, 1998] Si (u_l, u_r, σ) es una transición de fase diferente al equilibrio de Maxwell, que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la condición adicional (3.28), y los valores propios son tal que satisfacen (3.24), y suponemos que (3.39), además de $v_{l,r} > \sigma = 0$, entonces para todo $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } \tau > 0$, se tiene que $\Delta(\tau, 0) \neq 0$.

Adicionalmente, también se tiene que, para todo $(\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Re } \tau > 0$ y $\eta \neq 0$, y usando la notación

$$\Omega_{r,l} := \frac{\omega_{r,l}}{i \|\eta\|}$$

y

$$V := \frac{\tau}{i \|\eta\|}$$

tenemos

$$\Delta(\tau, \|\eta\|) = -\|\eta\|^2 [\rho] [v_3] (v_3)_r (v_3)_l F(V) \quad (3.51)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} F(V) := & \frac{c_r^2 c_l^2 - (v_3)_r^2 (v_3)_l^2}{(v_3)_l (v_3)_r} V^2 - ((v_3)_r (c_l^2 - (v_3)_l^2) \Omega_l + (v_3)_l (c_r^2 - (v_3)_r^2) \Omega_r) V \\ & - \Omega_l \Omega_r (c_l^2 - (v_3)_l^2) (c_r^2 - (v_3)_r^2) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Prueba: Del segundo lema, el determinante Δ esta definido como:

$$\Delta(\tau, \|\eta\|) := \begin{vmatrix} \tau [\rho] & \omega_r (c_r^2 - (v_3)_r^2) + (v_3)_r \tau & -\omega_l (c_l^2 - (v_3)_l^2) - (v_3)_l \tau \\ [\rho] & -(v_3)_r c_r^2 & (v_3)_l c_l^2 \\ 0 & \omega_r (v_3)_r (c_r^2 - (v_3)_r^2) + ((v_3)_r^2 + c_r^2) \tau & -\omega_l v_l (c_l^2 - (v_3)_l^2) - ((v_3)_l^2 + c_l^2) \tau \end{vmatrix}$$

Si $\eta = 0$, entonces de acuerdo a (3.40), de la existencia de valores propios ω_r y ω_l se tiene que

$$\omega_l = \frac{\tau}{v_l - c_l} \quad \text{y} \quad \omega_r = \frac{\tau}{v_r + c_r};$$

usando la igualdad $\frac{[\rho]}{[\rho]} = (v_3)_l (v_3)_r$ tenemos

$$\Delta(\tau, 0) = \tau^2 [\rho] c_l c_r \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (v_3)_r (v_3)_l & -(v_3)_r c_r & (v_3)_l c_l \\ 0 & c_r + (v_3)_r & (v_3)_l - c_l \end{vmatrix}$$

$$= \tau^2 c_r c_l [\rho] [v_3] (c_r c_l + (v_3)_r (v_3)_l)$$

el cual no es igual a cero. Así, queda probada la primera parte del lema.

Para $\eta \neq 0$, Δ queda expresado en términos de las nuevas variables V y $\Omega_{l,r}$, de la forma siguiente

$$\Delta(\tau, \|\eta\|) = -\|\eta\|^2 [\rho] \begin{vmatrix} V & \Omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) + (v_3)_r V \\ (v_3)_r (v_3)_l & -(v_3)_r c_r^2 \\ 0 & \Omega_r(v_3)_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) + ((v_3)_r^2 - c_r^2)V \\ & -\Omega_l(c_l^2 - (v_3)_l^2) - (v_3)_l V \\ & (v_3)_l c_l^2 \\ & -\Omega_l(v_3)_l(c_l^2 - (v_3)_l^2) - ((v_3)_l^2 + c_l^2)V \end{vmatrix}$$

El último determinante se puede desarrollar y se encuentra que es igual a $(v_3)_r (v_3)_l [v_3] F(V)$, donde F esta dado por (3.52) \square

Notemos que la ecuación que define a F la determina como una función de V ya que de la ecuación (3.40) tenemos que Ω_r , Ω_l y V están relacionados por

$$\begin{cases} (c_l^2 - (v_3)_l^2)\Omega_l^2 + 2(v_3)_l V\Omega_l + c_l^2 - V^2 = 0 & \text{con } \text{Im } \Omega_l > 0, \\ (c_r^2 - (v_3)_r^2)\Omega_r^2 + 2(v_3)_r V\Omega_r + c_r^2 - V^2 = 0 & \text{con } \text{Im } \Omega_r < 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

Lema 3.4 Sea $V \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Im } V < 0$, entonces $F(V) \neq 0$

Prueba: Denotemos por R a la función raíz cuadrada compleja, esto es

$$\begin{aligned} R : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ &\mapsto \{\zeta \in \mathbb{C}; \text{Im } \zeta > 0\} \\ w &\mapsto R(w) = \zeta; \quad \zeta^2 = w \end{aligned}$$

entonces de (3.53) tenemos

$$\begin{aligned} \Omega_l &= \frac{-(v_3)_l V + c_l R(V^2 - (c_l^2 - (v_3)_l^2))}{c_l^2 - (v_3)_l^2} \\ \Omega_r &= \frac{-(v_3)_r V - c_r R(V^2 - (c_r^2 - (v_3)_r^2))}{c_r^2 - (v_3)_r^2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

substituyendo a Ω_l y Ω_r en $F(V)$, encontramos que

$$F(V) = \frac{c_r^2 c_l^2}{(v_3)_r (v_3)_l} V^2 + c_r c_l R (V^2 - (c_l^2 - (v_3)_r^2)) R (V^2 - (c_l^2 - (v_3)_l^2))$$

Consecuentemente, si $F(V) = 0$ entonces $P(V^2) = 0$ con

$$P(X) := \frac{c_r^2 c_l^2 - (v_3)_r^2 (v_3)_l^2}{(v_3)_r^2 (v_3)_l^2} X^2 + (c_l^2 - (v_3)_l^2 + c_r^2 - (v_3)_r^2) X - (c_l^2 - (v_3)_l^2)(c_r^2 - (v_3)_r^2) \quad (3.55)$$

Pero de acuerdo a $|(v_3)_{l,r}| < c_{l,r}$ las raíces de P son reales. Así, si $F(V) = 0$ y $\text{Im } V < 0$ entonces $V \in i\mathbb{R}^{*-}$. Ahora para $V = iW$ con $W \in \mathbb{R}$ tenemos

$$F(V) = -\frac{c_r^2 c_l^2}{(v_3)_r (v_3)_l} W^2 - c_r c_l \sqrt{W^2 + c_r^2 - (v_3)_r^2} \sqrt{W^2 + c_l^2 - v_l^2} \quad (3.56)$$

el cual pertenece a \mathbb{R}^{*-} . \square

3.3.5. Estabilidad débil para transiciones de fase diferentes de las que cumplen el equilibrio de Maxwell

Estabilidad débil

El siguiente teorema es el resultado principal del artículo de [S.Benzoni-Gavage, 1998], para establecer la estabilidad débil para las transiciones de fase diferentes al equilibrio de Maxwell.

Teorema 3.5 *Si (u_l, u_r, σ) es una transición de fase diferente al equilibrio de Maxwell, que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la condición adicional (3.28), y los valores propios son tal que satisfacen (3.24); entonces su estabilidad es linealmente débil. Es decir, que no existen soluciones no-triviales para el problema linealizado (3.31), (3.32), (3.33) con la forma (3.34)*

$$\begin{aligned} u_{\pm}(y, z, t) &= U_{\pm}(z) e^{i\eta \cdot y} e^{\tau t} \\ X(y, t) &= \mu e^{i\eta \cdot y} e^{\tau t} \end{aligned}$$

y que $\text{Re } \tau > 0$ la cual decrece a cero cuando z tiende a infinito.

Prueba: No es restrictivo suponer que las ecuaciones para los valores propios (3.24) son ciertas y $(v_3)_{l,r} > 0$. La existencia de una solución no trivial para (3.31), (3.32) y (3.33) de la forma (3.34) con $\text{Re } \tau > 0$ tal que $U(+\infty) = 0$ es equivalente a la existencia de $(Z_-, Z_+, \mu) \in E_-(u_l; \tau, \eta) \times E_+(u_r; \tau, \eta) \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que la ecuación (3.46) es satisfecha. De acuerdo al segundo y tercer lema, es equivalente afirmar la existencia de V tal que $\text{Im } V < 0$ y

$$F(V) = 0$$

donde F esta dada por la definici3n en el segundo lema (3.52) y (3.53). Y aplicando el cuarto lema se tiene que no existe tal V . \square

Existencia de ondas superficiales

Una vez que la estabilidad d3bil ha sido establecida, el siguiente paso es buscar soluciones de la forma

$$\begin{aligned} u_{\pm}(y, z, t) &= U_{\pm}(z)e^{\eta y}e^{\tau t} \\ X(y, t) &= \mu e^{\eta y}e^{\tau t} \end{aligned}$$

con $\text{Re } \tau = 0$. Si no hubiera de estas soluciones no triviales, la condici3n uniforme podr3a ser satisfecha. Esto definitivamente, asegurari3a que el problema de valores iniciales y en la frontera linealizado (3.31), (3.32), (3.33) *es bien planteado* y entonces se podr3a tener la estabilidad no-lineal de \hat{u} .

Ahora veremos que, la condici3n uniforme de Lopatinskii no es satisfecha pero que existen **ondas superficiales**.

El procedimiento consiste en *extender por continuidad* los espacios $E_{-}(u_l; \tau, \eta)$ y $E_{+}(u_l; \tau, \eta)$ para la dupla τ, η tal que $\text{Re } \tau \geq 0$. Entonces para $\text{Re } \tau = 0$ los espacios $E_{-}(u_l; \tau, \eta)$ o, tambi3n en $E_{+}(u_l; \tau, \eta)$ pueden contener vectores propios de $B(u_l, r; \tau, \eta)$ asociados a los valores propios puramente imaginarios, los cuales corresponden a las soluciones de problema de Cauchy.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_{+}}{dz} &= -B(u_r; \tau, \eta)U_{+} \\ \frac{dU_{-}}{dz} &= B(u_l; \tau, \eta)U_{-} \end{aligned} \right\}$$

$$U_{\pm}(0) = Z_{\pm}$$

la cual no tiende a cero en $+\infty$.

En el caso de que exista $(Z_{-}, Z_{+}) \in E_{-}(u_l; \tau, \eta) \times E_{+}(u_l; \tau, \eta) \setminus \{(0, 0)\}$ con $\text{Re } \tau = 0$ tal que las ecuaciones (3.36) y (3.37) se cumplen, se pueden resaltar dos aspectos principales y tenemos que alguna de las dos alternativas es cierta:

- Ya sea que Z_{-} corresponde a valores propios de parte real negativa y Z_{+} corresponde a valores propios de parte real positiva, o bien
- que al menos uno de ellos corresponda a un valor propio puramente imaginario

En la primera situaci3n se tienen **ondas superficiales**, ya que los vectores iniciales (Z_{-}, Z_{+}) corresponden a soluciones del problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_+}{dz} &= -B(u_r; \tau, \eta)U_+ \\ \frac{dU_-}{dz} &= B(u_l; \tau, \eta)U_- \end{aligned} \right\}$$

$$U_{\pm}(0) = Z_{\pm}$$

las cuales son exponencialmente decrecientes en $+\infty$. Estas son las **llamadas ondas superficiales**, porque están localizadas cerca de la orilla $Z = 0$.

Estabilidad débil de primer tipo Algunas ondas superficiales son las ondas de Rayleigh en elasticidad, las cuales son responsables por los daños causados por los terremotos. Matemáticamente hablando, si todas las soluciones

$$(Z_-, Z_+) \in E_-(u_l; \tau, \eta) \times E_+(u_l; \tau, \eta) \setminus \{(0, 0)\}$$

de (3.36) y (3.37) pertenecen al primer caso, cuando se tienen ondas superficiales, entonces decimos que la estabilidad débil es de *primer tipo*. Vamos a mostrar que las transiciones de fase admiten ondas superficiales y que su estabilidad es del primer tipo.

Teorema 3.6 *Si (u_l, u_r, σ) es una transición de fase diferente al equilibrio de Maxwell, que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la condición adicional (3.28), y los valores propios son tal que satisfacen (3.24); existen $V_0 \in \mathbb{R}$ tal que para toda*

$$\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

el siguiente conjunto consiste de un subespacio de dos dimensiones de \mathbb{C}^2

$\{(Z_-, Z_+) \in E_-(u_l; \pm i \|\eta\| V_0, \eta) \times E_+(u_l; \pm i \|\eta\| V_0, \eta) \text{ son tal que las ecuaciones (3.36) y (3.37) son ciertas} \}$ y es generado por $(Z_l, 0)$ y $(0, Z_r)$ donde Z_l es un vector propio de

$$B(u_l; \|\eta\| V_0, \eta)$$

asociado a un valor propio de parte real negativa y

Z_r es un vector propio de $B(u_r; \pm i \|\eta\| V_0, \eta)$ asociado a un valor propio de parte real positiva.

Aún más, para todo $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$\tau^2 \neq -\|\eta\|^2 V_0^2$$

tenemos

$$\{(Z_-, Z_+) \in E_-(u_l; \tau, \eta) \times E_+(u_l; \tau, \eta) \text{ tal que las ecuaciones (3.36) y (3.37) son ciertas} \} = \{(0, 0)\}$$

Prueba: De nuevo asumiremos que las ecuaciones (3.39) son ciertas y $(v_3)_{l,r} > 0$. Extendiendo por continuidad los espacios $E_-(u_l; \tau, \eta)$ y $E_+(u_r; \tau, \eta)$ a la dupla $(\tau, \eta) \neq (0, 0)$ tal que $\text{Re } \tau \geq 0$ determina la extensión del determinante $\Delta(\tau, \|\eta\|)$ a dicha dupla. Se puede ver que $\Delta(\tau, 0)$ no se anula para cuando $\text{Re } \tau = 0$ y $\tau \neq 0$ (como esta en la prueba del lema 3.3, en la primera parte). Por ese lema el determinante de Lopatinskii $\Delta(\tau, \|\eta\|)$ se anula para $(\tau, \eta) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \setminus 0$ si y sólo si $\tau/i\|\eta\|$ es un cero de la función F extendida a los valores reales de V . Es directo extender a F a los valores reales de V tal que

$$V^2 < \min(c_r^2 - (v_3)_r^2, c_l^2 - v_l^2)$$

ya que $\Omega_{l,r}$ están definidos en forma única ya sea por la ecuación (3.53) o la ecuación (3.54)

Ahora consideremos el polinomio de segundo orden P definido por (3.56) tiene raíces reales de signos opuestos. Denotando por X_0 el positivo, tenemos que

$$X_0 < \min(c_r^2 - (v_3)_r^2, c_l^2 - (v_3)_l^2)$$

de la ecuación $|v_{l,r}| < c_{l,r}$ tenemos

$$P(c_{r,l}^2 - (v_3)_{r,l}^2) = \frac{c_r^2 c_l^2}{(v_3)_r^2 (v_3)_l^2} (c_{r,l}^2 - (v_3)_{r,l}^2) > 0$$

De donde, denotando a $V_0 := \sqrt{X_0}$, el determinante de Lopatinskii se anula cuando $V = \pm V_0$. De la prueba del segundo lema tenemos que las soluciones (Z_-, Z_+) pertenecen a

$$\text{Ker}(B(u_l; i\|\eta\|V, \eta) - \omega_l I_4) \times \text{Ker}(B(u_r; i\|\eta\|V, \eta) - \omega_r I_4).$$

todavía más, el valor propio ω_l es de parte real positiva puesto que $\text{Im } \Omega_l > 0$, mientras que ω_r es de parte real negativa ya que $\text{Im } \Omega_r < 0$.

Por lo tanto los ceros $\pm V_0$ de F aportan con soluciones de (3.35) que decrecen exponencialmente y que representa la onda superficial con velocidad absoluta V_0 . Buscaremos otros ceros reales de F . Extendiendo F a valores reales de V tal que $V^2 \geq c_{l,r}^2 - (v_3)_{l,r}^2$ eligiendo $\Omega_{l,r}$ entre las dos raíces reales de

$$(c_{l,r}^2 - (v_3)_{l,r}^2)\Omega_{l,r}^2 + 2(v_3)_{l,r}V\Omega_{l,r} + c_{l,r}^2 - V^2$$

Puesto que $\text{Im } \Omega_l > 0$ y $\text{Im } \Omega_r < 0$ cuando $\text{Im } V < 0$ debemos tener

$$\begin{cases} \frac{d\Omega_r}{dV} \geq 0 & , & V \in \mathbb{R}, & V^2 \geq c_r^2 - (v_3)_r^2 \\ \frac{d\Omega_l}{dV} \leq 0 & , & V \in \mathbb{R}, & V^2 \geq c_l^2 - (v_3)_l^2 \end{cases}$$

Con este criterio encontramos que, en particular, para $V^2 \geq \max(c_r^2 - v_r^2, c_l^2 - v_l^2)$;

$$F(V) = -\frac{c_r^2 c_l^2}{(v_3)_r c_l} V^2 - c_r c_l \sqrt{V^2 - (c_r^2 - (v_3)_r^2)} \sqrt{V^2 - (c_l^2 - (v_3)_l^2)} > 0$$

Por lo tanto, F no se anula cuando Ω_r y Ω_l son simultáneamente reales.

La siguiente observación completa la prueba. Supongamos que $V \in \mathbb{R}$ es tal que $F(V) = 0$ tal que $\Omega_r \in \mathbb{R}$. Entonces de la definición de F tenemos que

$$(c_l^2 - (v_3)_l^2)((v_3)_r V + \Omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2))\Omega_l$$

es real, lo cual obliga a que Ω_l sea real, excepto si

$$(v_3)_r V + \Omega_r(c_r^2 - (v_3)_r^2) = 0$$

Pero tal relación implica que

$$F(V) = \frac{c_r^2 c_l^2}{(v_3)_r^2 (v_3)_l^2} V^2,$$

lo cual no es compatible con $F(V) = 0$ y $V^2 \geq c_r^2 - (v_3)_r^2 > 0$. Consecuentemente Ω_l es en verdad real. Un argumento similar muestra que si $V \in \mathbb{R}$ es tal que $F(V) = 0$ y que $\Omega_l \in \mathbb{R}$ entonces $\Omega_r \in \mathbb{R}$ \square

Esta clase de estabilidad lineal no-uniforme, aunque es mejor que la estabilidad débil de segundo tipo, como lo establece Kreiss en [H.O.Kreiss, J.Lorenz, 1989], es un obstáculo para derivar estimadores esenciales para la estabilidad no-lineal. Esto podría ser resuelto al considerar una condición adicional (como una consecuencia del criterio tomado aquí el criterio de capilaridad) que tome en cuenta la viscosidad distinta de cero. Pero esta cuestión ha sido investigada por Coulombel [J.F. Coulombel, 2004].

Terminamos con una proposición sobre las ondas superficiales exhibidas.

Proposición 3.3 *Para (u_l, u_r, σ) una transición de fase diferente al equilibrio de Maxwell, que satisface las condiciones de Rankine-Hugoniot (3.22), la condición adicional (3.28), y los valores propios son tal que satisfacen (3.24), las cuales son ondas superficiales de la forma*

$$\begin{cases} u_{\pm}(y_1, y_2, z, t) &= U_{\pm}(z) e^{i(\eta \cdot y \pm \|\eta\| V_0 t)} \\ x(y_1, y_2, t) &= \mu e^{i(\eta \cdot y \pm \|\eta\| V_0 t)} \end{cases}$$

donde η es cualquier vector de \mathbb{R}^2 . La velocidad absoluta V_0 de estas ondas superficiales es tal que

$$V_0 < \sqrt{((v_3)_l^d - \sigma)((v_3)_r^d - \sigma)}.$$

Además

$$V_0 \approx \sqrt{((v_3)_l^d - \sigma)((v_3)_r^d - \sigma)},$$

cuando (u_l, u_r, σ) esta próxima al equilibrio de Maxwell

Prueba: Con la simplificación usual vamos a suponer (3.39) y tenemos

$$V_0 < \sqrt{(v_3)_l (v_3)_r}.$$

Como V_0^2 es la raíz positiva de el polinomio P de segundo orden, el cual tiene un coeficiente dominante positivo, lo que se tiene que mostrar aquí es que $P((v_3)_r, (v_3)_l)$ es positivo. De la definición de $P(X)$ en (3.56) se tiene

$$P((v_3)_l(v_3)_r) = (v_3)_r(v_3)_l(c_l^2 - (v_3)_l^2) + (v_3)_r(v_3)_l(c_r^2 - (v_3)_r^2) + c_r^2(v_3)_l^2 + c_l^2(v_3)_r^2 - 2(v_3)_r^2(v_3)_l^2$$

Puesto que $c_{l,r}^2 - (v_3)_{l,r}^2 > 0$. Esto implica que de acuerdo a la ecuación $|(v_3)_{l,r}| < c_{l,r}$

$$P((v_3)_r(v_3)_l) > c_r^2(v_3)_l^2 + c_l^2 v_r^2 - 2(v_3)_r^2(v_3)_l^2 \geq |c_r^2(v_3)_l^2 - c_l^2(v_3)_r^2| \geq 0$$

Así, siempre se tiene que

$$V_0 < \sqrt{(v_3)_r(v_3)_l}$$

Recordando que de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} j &:= \rho_l((v_3)_l - \sigma) = \rho_r((v_3)_r - \sigma), \\ -j^2 \left[\frac{1}{\rho} \right] &= [p] = [\rho e' - e], \\ v_{1l} = v_{1r} &= 0, \\ v_{2l} = v_{2r} &= 0, \quad \sigma = 0 \end{aligned}$$

que

$$(v_3)_l^2 = \frac{[p]}{[\rho]} \frac{\rho_r}{\rho_l} \quad \text{y} \quad (v_3)_r^2 = \frac{[p]}{[\rho]} \frac{\rho_l}{\rho_r}$$

cuando la transición de fase esta cerca del equilibrio de Maxwell la razón $\frac{[p]}{[\rho]}$ es aproximadamente cero, mientras que las razones $\frac{\rho_r}{\rho_l}$ y $\frac{\rho_l}{\rho_r}$ son acotados. La velocidad del sonido c_l y c_r siendo acotadas por abajo, se puede ver que la raíz positiva X_0 de P es tal que

$$\frac{X_0}{(v_3)_r(v_3)_l} \approx 1 \quad \square$$

Capítulo 4

Estabilidad de transiciones de fase con el criterio de viscosidad-capilaridad

Como un primer caso se estudiaron en el capítulo anterior las transiciones de fase reversibles, la cual satisface el criterio puramente capilar. La condición de salto adicional se reduce a una regla de áreas iguales. Se derivó la condición de Lopatinskii y se probó que se cumple. También se mostró que la condición uniforme de Lopatinskii no es satisfecha debido a algunas ondas superficiales. Pero al tratar con fluidos más reales, debemos de tomar en cuenta la viscosidad. Este es el objetivo en esta sección.

4.1. Transiciones de fase admisibles

Consideremos un fluido que obedece la ley de presión de van der Waals

$$p = p(v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (4.1)$$

Las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(v) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

tienen soluciones discontinuas. Las más simples son las **fronteras de fase planas** que se propagan a velocidad normal constante σ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_l \text{ y } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_l \text{ si } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t < 0, \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_r \text{ y } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_r \text{ si } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t > 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde \mathbf{n} denota un vector unitario constante. Decimos que una transición de fase (4.3) es admisible si y sólo si tiene un perfil visco-capilar, es decir, una onda plana de la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho((\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t)/\varepsilon), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}((\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \sigma t)/\varepsilon) \quad (4.4)$$

con

$$\begin{aligned}\rho(-\infty) &= \rho_l \\ \mathbf{u}(-\infty) &= \mathbf{u}_l \\ \rho(+\infty) &= \rho_r \\ \mathbf{u}(+\infty) &= \mathbf{u}_r\end{aligned}$$

esta es una solución de la ecuación de Euler complementada con un coeficiente de capilaridad $\varepsilon^2 > 0$ y un coeficiente de viscosidad $\nu\varepsilon$ con $\nu \geq 0$

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(v) &= \nu \varepsilon \Delta \mathbf{u} - \varepsilon^2 \nabla (\Delta v)\end{aligned}\quad (4.5)$$

En otras palabras, un perfil viscoso-capilar tiene que ser solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}(\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma))' &= 0 \\ (\rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)\mathbf{u} + p(v)\mathbf{n})' &= \nu \mathbf{u}'' - (v\mathbf{u})'''\end{aligned}\quad (4.6)$$

y satisface los límites (4.4). Integrando la ecuación (4.6) se puede decir que una transición de fase admisible de la forma (4.3) debe satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\begin{aligned}\rho_l(\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} - \sigma) &= \rho_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} - \sigma) \\ \rho_l(\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} - \sigma)\mathbf{u}_l + p(v_l)\mathbf{n} &= \rho_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} - \sigma)\mathbf{u}_l + p(v_r)\mathbf{n}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Más todavía, si la transferencia de masa que pasa a través de la discontinuidad

$$j := \rho_l(\mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} - \sigma) = \rho_r(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} - \sigma)\quad (4.8)$$

es distinta de cero, la ecuación (4.7) puede escribirse en forma equi-valente como

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ p(v_l) + j^2 v_l &= p(v_r) + j^2 v_r := \pi\end{aligned}\quad (4.9)$$

Por lo tanto, probando que (4.9) se cumple, la existencia de un perfil visco-capilar es equivalente a la existencia de una solución de la ecuación de un perfil

$$v'' = \nu j v' + \pi - p(v) - j^2 v\quad (4.10)$$

tal que

$$v(-\infty) = v_l, \quad v(+\infty) = v_r\quad (4.11)$$

Definición 4.1 (*Transición de fase ν -admisible*) Para toda $\nu \geq 0$, $j \in \mathbb{R}$, $(v_l, v_r) \in (b, v_*) \times (v^*, +\infty)$ decimos que (j, v_V, v_L) es una transición de fase ν -admisible si existe un ν -perfil, es decir una solución de las ecuaciones (4.10) y (4.11)

Como antes, sólo vamos a considerar las transiciones de fase **dinámicas** para las cuales la cantidad j es distinta de cero. En particular, esto indica que $\{v_l, v_r\}$ son diferentes de los puntos de equilibrio de Maxwell v_m, v_M definido por la regla de áreas iguales clásica.

$$\int_{v_m}^{v_M} (\bar{p} - p(v)) dv = 0, \quad \bar{p} = p(v_m) = p(v_M)\quad (4.12)$$

y $v_m < v_*$, $v_M > v^*$.

Multiplicando (4.10) por v' , vemos que la existencia de un 0-perfil es equivalente a la regla de áreas iguales generalizada

$$\int_{v_l}^{v_r} (\pi - p(v) - j^2 v) dv = 0 \quad (4.13)$$

Tomando la definición de π de las ecuaciones (4.9) la ecuación (4.13) se puede ver como

$$[E(v)] + \frac{1}{2}[v](p(v_l) + p(v_r)) = 0 \quad (4.14)$$

donde E es la energía libre por unidad de volumen, tal que $d_v E = -p$, y los paréntesis cuadrados denotan el salto de la cantidad q a través de la interfase:

$$[q] := q_r - q_l$$

Ahora se puede ver que la ecuación (4.14) proporciona una condición de salto independiente de las condiciones de Rankine-Hugoniot. El equivalente a la ecuación (4.14) relacionada al ν -perfil se expresa como

$$[E(v)] + \frac{1}{2}[v](p(v_l) + p(v_r)) = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi)^2 d\xi \quad (4.15)$$

la cual no es una condición adicional de salto *explícita* cuando $\nu > 0$. El término integral del lado derecho esta relacionado a la estructura interna de la interfase. La integral depende de ν y de j puesto que el perfil también lo hace. Sin embargo, para determinar la influencia de un pequeño parámetro ν en el análisis de estabilidad se pueden despreciar todos los términos de primer orden con respecto a ν en el problema linealizado. Se puede sustituir según [S.Benzoni-Gavage, 1999] $\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, \nu)^2 d\xi$ por $\int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, 0)^2 d\xi$ antes de linealizar la condición de salto (4.15).

4.2. Transiciones de fase dinámicas

Buscamos los valores de j^2 para que las ecuaciones (4.9) y (4.13) tengan solución. Listamos algunas de las propiedades de la ley de presión de van der Waals, hacemos notar primero que

$$\frac{a}{4bR} < T < T_c = \frac{8a}{27bR}$$

y

$$p(v) > 0 \quad \forall v > b$$

$$p(v) \rightarrow +\infty \quad v \searrow b,$$

$$p(v) \rightarrow 0 \quad v \rightarrow +\infty,$$

$$\begin{aligned} &\exists v^* \text{ y } v_*, \text{ tal que } v^* > v_* > b \\ &d_v p(v) < 0 \quad \text{si } b < v < v_* \quad \text{ó } v > v^*, \\ &d_v p(v) > 0 \quad \text{si } v_* < v < v_*, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} &\exists v^i \text{ y } v_i, \text{ tal que } v^* > v_i > v_* \\ &d_{vv}^2 p(v) > 0 \quad \text{si } b < v < v_i \quad \text{ó } v > v^i, \\ &d_{vv}^2 p(v) > 0 \quad \text{si } v_* < v < v_*, \end{aligned}$$

Esto implica en particular en la existencia y unicidad de los puntos de Maxwell v_m y v_M con $v_m < v_*$, $v_M > v_*$ tal que

$$\int_{v_m}^{v_M} (\bar{p} - p(v)) dv = 0, \quad \bar{p} = p(v_m) = p(v_M)$$

se cumpla. Es más, como la velocidad del sonido en la fase de vapor es menor que en la fase del líquido, se debe tener que

$$\begin{aligned} &|d_v p(u_V)| < |d_v p(v_L)| \quad \forall u_V \text{ y } u_L \\ &\text{con } u_L < v_m < v_M < v_V. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Si las ecuaciones (4.16) y (4.17) son satisfechas, entonces existe un punto único $v_1 < v_M$ por el cual la tangente a la gráfica de p pasa a través de v_m , y esta cuerda toca a la gráfica de p en otro punto exactamente, el cual esta entre v_m y v_1 . De donde, en base a argumentos geométricos, se puede ver que j_0 satisface

$$0 < j_0^2 < -d_v p(v_1) := j_1^2 \tag{4.18}$$

existe un par único $(v_l^0, v_r^0) \in (b, v_m) \times (v_M, v_1)$ que satisface (4.9) y (4.13). En particular tenemos que

$$j_0^2 < -d_v p(v_{l,r}^0).$$

Para cualquier tripleta (j_0, v_l^0, v_r^0) , existe una solución única v_0 , para una traslación, del perfil (4.10) con $\nu = 0$, tal que

$$v_0(-\infty) = v_l^0, \quad v_0(+\infty) = v_r^0$$

4.3. Estabilidad de las transiciones de fase

Consideremos una frontera de fase plana (4.3) que involucra los estados $\rho_l = 1/v_l$ y $\rho_r = 1/v_r$ tales que las ecuaciones (4.8) y (4.9) son ciertas. Consideremos la ecuación (4.9) la cual establece que la velocidad tangencial del fluido es continua

a través de la frontera. Por lo que, haciendo un cambio de observador, el cual no influye en la estabilidad de las ondas, podemos suponer que la velocidad tangencial del fluido es igual a cero en ambos lados, tanto como la velocidad normal de la frontera. Con un cambio adecuado de las coordenadas, el problema se reduce al análisis de la estabilidad de las ondas planas simples:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) = \rho_l \text{ y } \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_l = (0_{d-1}, u_l) \text{ si } x_d < 0. \\ \rho(x, t) = \rho_r \text{ y } \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_r = (0_{d-1}, u_r) \text{ si } x_d > 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

de donde, con la ecuación (4.8) se tiene

$$\rho_l u_l = \rho_r u_r = j > 0. \quad (4.20)$$

y en este caso de las ecuaciones (4.8) y (4.9) también tenemos que

$$c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2 > 0 \quad (4.21)$$

donde $c_{l,r} > 0$ es la velocidad del sonido

$$c_{l,r} := d_\rho p(1/v_{l,r}) = -v_{l,r}^2 d_v p(v_{l,r})$$

y el número de Mach $M_{l,r} > 0$, son definidos como

$$u_{l,r} = \frac{|u_{l,r} \cdot n - \sigma|}{c_{l,r}}$$

Consideremos el siguiente problema de frontera libre:

(PFL) Encontrar una hipersuperficie en movimiento $\Sigma(t) \subset \mathbb{R}^d$ y una solución (ρ, \mathbf{u}) para las ecuaciones de Euler que sea suave para $x \notin \Sigma(t)$ y sea una transición de fase ν -admisibles a través de cada punto de $\Sigma(t)$.

La onda plana (4.19) de forma natural satisface el (PFL), con $\Sigma(t)$ el hiperplano constante $x_d = 0$. Estamos interesados en su estabilidad estructural como una solución para el problema de frontera libre (PFL). Es decir, queremos saber si un ligero cambio en cualquier parámetro lleva a una solución de (PFL) que permanece cerca de (4.19), con $\Sigma(t)$ cerca del hiperplano constante $x_d = 0$ y (ρ, \mathbf{u}) cerca de $(\rho_{l,r}, \mathbf{u}_{l,r})$ sobre los dos lados. La propuesta clásica, en particular la de Majda, consiste en cambiar el problema de frontera libre (PFL) en un problema valores iniciales y en la frontera. En este sentido, vamos a suponer una ecuación de $\Sigma(t)$ de la forma $x_d = X(y, t)$, donde $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, y asociamos con cada función desconocida

$$f : (\mathbf{x} = (y, x_d), t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{+*}; x_d \neq X(y, t) \mapsto f(\mathbf{x}, t),$$

las dos funciones

$$f_\pm : (y, z, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto f_\pm(y, z, t) = f(y, \pm z + X(y, t), t). \quad (4.22)$$

Entonces podemos escribir las ecuaciones de Euler en las nuevas variables

$$(y, z, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$$

con las nuevas incógnitas $(\rho_{\pm}, \mathbf{u}_{\pm}, X)$. La condición de salto a través de $\Sigma(t)$ se convierte en las condiciones en la frontera en los puntos $(y, 0, t)$. Finalmente, el problema de valores iniciales y en la frontera se linealiza en el entorno de la solución particular

$$\rho_- \equiv \rho_l, \mathbf{u}_- \equiv \mathbf{u}, \rho_+ \equiv \rho_r, \mathbf{u}_+ \equiv \mathbf{u}. \quad (4.23)$$

Si el problema de valores iniciales y en la frontera lineal obtenido de esta manera y al que nos referiremos con (PVIFL), es bien planteado, decimos que la onda plana (4.19) es *linealmente estable*.

Vamos describir el (PVIFL). Hacemos notar que $\rho_{\pm}, \mathbf{u}_{\pm}$ denotan la diferencia entre los valores perturbados y $\rho_{l,r}, \mathbf{u}_{l,r}$. Las ecuaciones interiores del (PVIFL), las cuales son deducidas de las ecuaciones de Euler, para $z > 0$ quedan de la forma

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{\pm} + \rho_{r,l} \sum_{k=1}^{d-1} \partial_{y_k} u_{k_{\pm}} \pm \rho_{r,l} \partial_z u_{d_{r,l}} \pm u_{r,l} \partial_z \rho_{\pm} &= 0, \\ \rho_{r,l} \partial_t u_{k_{\pm}} \pm \rho_{r,l} u_{r,l} \partial_z u_{k_{\pm}} + d_{\rho} p(\rho_{r,l}) \partial_{y_k} \rho_{\pm} &= 0, \\ \rho_{r,l} \partial_t u_{d_{\pm}} + u_{r,l} \partial_t \rho_{\pm} + \rho_{r,l} u_{r,l} \sum_{k=1}^{d-1} \partial_{y_k} u_{k_{\pm}} \pm \\ 2\rho_{r,l} u_{r,l} \partial_z u_{d_{\pm}} \pm (u_{r,l}^2 + d_{\rho} p(\rho_{r,l})) \partial_z \rho_{\pm} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Las condiciones en la frontera del problema (PVIFL) se obtienen de las condiciones de Rankine-Hugoniot y la condición adicional (4.15). En esta relación, la velocidad normal σ debe ser entendida en términos de X como

$$\frac{\partial_t X}{(1 + \|\nabla_y X\|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

mientras el vector normal unitario esta dado por

$$\frac{(-\nabla_y X, 1)}{(1 + \|\nabla_y X\|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Así, las condiciones de frontera en $z = 0$ que se derivan de las condiciones de Rankine-Hugoniot quedan como

$$\begin{aligned} \rho_+ u_r + \rho_r u_+ - \rho_- u_l - \rho_l u_- &= [\rho] \partial_t X, \\ \rho_r u_r \check{u}_+ - \rho_l u_l \check{u}_- &= [p] \nabla_y X, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\rho_+(u_r^2 + d_{\rho} p(\rho_r)) + 2\rho_r u_r u_+ - \rho_-(u_l^2 + d_{\rho} p(\rho_l)) - 2\rho_l u_l u_- = 0,$$

con la notación $\mathbf{u}_{\pm} = (\check{u}_{\pm}, u_{\pm}) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, $y = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Así también, podemos escribir la ecuación (4.15) en vista de las ecuaciones (4.8) y (4.9) como

$$[d_{\rho} e(\rho) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sigma)^2] = -\nu j \int_{-\infty}^{+\infty} v'(\xi; j, \nu)^2 d\xi, \quad (4.26)$$

donde $e := \rho E$ es la energía libre por unidad de volumen. La linealización del lado izquierdo de (4.26) nos proporciona los términos

$$d_{\rho\rho}^2 e(\rho_r)\rho_+ + u_r(u_+ - \partial_t X) - d_{\rho\rho}^2 e(\rho_l)\rho_- - u_l(u_- - \partial_t X).$$

Finalmente podemos decir (ver detalles en [S.Benzoni-Gavage,1999]) que las condiciones de frontera linealizadas deducidas de (4.15) son

$$\begin{aligned} d_{\rho\rho}^2 e(\rho_r)\rho_+ + u_r u_+ + (\tilde{\nu} u_l - d_{\rho\rho}^2 e(\rho_l))\rho_- + (\tilde{\nu} \rho_l - u_l)u_- \\ = ([u] + \tilde{\nu} \rho_l) \partial_t X. \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde $\tilde{\nu} = \alpha(j)\nu + o(\nu)$

4.4. La condición de Kreiss-Lopatinskii

La condición de Kreiss Lopatinskii es necesaria para que el problema de valores iniciales y en la frontera (4.24), (4.25) y (4.27) sea bien planteado. Analíticamente, tal condición, requiere que no existan modos expansivos de la forma

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(\check{y}, z, t) &= R_{\pm}(z) e^{i\check{\eta} \cdot \check{y}} e^{\tau t}, \\ \mathbf{u}_{\pm}(\check{y}, z, t) &= e^{i\check{\eta} \cdot \check{y}} e^{\tau t} \mathbf{U}_{\pm}(z) \\ X(\check{y}, t) &= \chi e^{i\check{\eta} \cdot \check{y}} e^{\tau t} \end{aligned} \quad (4.28)$$

que cumplan con (4.24) para $z > 0$ y (4.25), (4.27) para $z = 0$, con $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\text{Re } \tau > 0$, $R_{\pm}(+\infty) = 0$, $\mathbf{U}_{\pm}(+\infty) = \mathbf{0}_d$, $\chi \in \mathbb{C}$. Para comprobar que la condición de Lopatinskii es satisfecha, empezamos con el siguiente resultado, el cual describe el *subespacio estable* del sistema dinámico para $(R_{\pm}, \mathbf{U}_{\pm})$. Los detalles ya fueron dados en el capítulo anterior.

Lema 4.1 *Supongase que existe un $\check{\eta} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } \tau > 0$, y una solución al sistema (4.24) de la forma*

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(\check{y}, z, t) &= R_{\pm}(z) e^{i\check{\eta} \cdot \check{y}} e^{\tau t}, \\ \mathbf{u}_{\pm}(\check{y}, z, t) &= e^{i\check{\eta} \cdot \check{y}} e^{\tau t} \mathbf{U}_{\pm}(z) \end{aligned} \quad (4.29)$$

con $R_{\pm}(+\infty) = 0$, $\mathbf{U}_{\pm}(+\infty) = \mathbf{0}$. entonces el vector $(R_-(0), \mathbf{U}_-(0))$ tiene que ser colineal al vector

$$(\rho_l(\tau - u_l \omega_l), -i c_l^2 \check{\eta}, c_l^2 \omega_l), \quad (4.30)$$

mientras que $(R_+(0), \mathbf{U}_+(0))$ tiene que ser ortogonal a

$$(\omega_r(c_r^2 - u_r^2)) + \tau u_r, i \rho_r u_r \check{\eta}, -\rho_r \tau), \quad (4.31)$$

donde $\omega_{r,l}$ están definidas por

$$(c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2) \omega_{l,r}^2 + 2u_{l,r} \tau \omega_{l,r} \omega_{l,r} - c_{l,r}^2 \|\check{\eta}\|^2 - \tau^2 = 0, \quad (4.32)$$

con $\text{Re } \omega_l < 0$ y $\text{Re } \omega_r > 0$.

La ecuación (4.32) unicamente define $\omega_{l,r}$ tal que $\operatorname{Re} \omega_l < 0$ y $\operatorname{Re} \omega_r > 0$ siguiendo (4.21). En particular, para $\check{\eta} = \check{0}$ tenemos

$$\omega_l = \frac{\tau}{u_l - c_l}, \quad \omega_r = \frac{\tau}{u_l + c_l} \quad (4.33)$$

Corolario 4.1 La existencia de los modos expansivos (4.28) que satisfacen (4.24) para $z > 0$ y (4.25), (4.27) en $z = 0$, con $\check{\eta} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\operatorname{Re} \tau > 0$, $R_{\pm}(+\infty) = 0$, $\mathbf{U}_{\pm}(+\infty) = \mathbf{0}$, $\chi \in \mathbb{C}$, es equivalente a la existencia de la tripleta no trivial $(Z_-, Z_+, \chi) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} Z_- &= (Z_-^0, \check{Z}_-, Z_-^d) \parallel (\rho_l(\tau - u_l \omega_l), -i c_l^2 \check{\eta}, c_l^2 \omega_l), \\ Z_+ &= (Z_+^0, \check{Z}_+, Z_+^d) \perp (\omega_r(c_r^2 - u_r^2) + \tau u_r, i \rho_r u_r \check{\eta}, -\rho_r \tau), \end{aligned} \quad (4.34)$$

la cual satisface el sistema

$$\begin{aligned} u_r Z_+^0 + \rho_r Z_+^d - u_l Z_-^0 - \rho_l Z_-^d &= \tau[\rho]\chi, \\ \rho_r u_r \check{Z}_+ - \rho_l u_l \check{Z}_- &= i[p]\chi \check{\eta}, \\ (u_r^2 + c_r^2) Z_+^0 + 2\rho_r u_r Z_+^d - (u_l^2 + c_l^2) Z_-^0 - 2\rho_l u_l Z_-^d &= 0, \\ (c_r^2/\rho_r) Z_+^0 + u_r Z_+^d + (\check{\nu} u_l - c_l^2/\rho_l) Z_-^0 + (\check{\nu} \rho_l - u_l) Z_-^d &= \\ \tau([u] + \check{\nu} \rho_l) \chi. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.5. El determinante de Kreiss-Lopatinskii

De lo anterior podemos derivar la condición de Kreiss-Lopatinskii en su forma algebraica.

Proposición 4.1 Denotemos con

$$a_{l,r} := \omega_{l,r}(c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2) + \tau u_{l,r}. \quad (4.36)$$

La existencia de $(\zeta, Z_+, \chi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C} \setminus (0, \mathbf{0}, 0)$ tal que

$$a_r Z_+^0 + i \rho_r u_r \check{\eta} \cdot \check{Z}_+ - \rho_r \tau Z_+^d = 0, \quad (4.37)$$

y tal que el sistema (4.35) es satisfecho por

$$Z_- := \zeta(\rho_l(\tau - u_l \omega_l), -i c_l^2 \check{\eta}, c_l^2 \omega_l), \quad (4.38)$$

es equivalente a

$$\Delta(\tau, \|\check{\eta}\|) = 0.$$

donde

$$\Delta(\tau, \|\check{\eta}\|) := \begin{vmatrix} -\tau[\rho] & u_r & \rho_r & a_l \\ \|\check{\eta}\|^2 [p] & -a_r & \rho_r \tau & u_l c_l^2 \|\check{\eta}\|^2 \\ 0 & u_r^2 + c_r^2 & 2\rho_r u_r & u_l a_l + c_l^2 \tau \\ -\tau([u] + \check{\nu} \rho_l) & c_r^2/\rho_l & u_l & \tau c_l^2/\rho_l - \check{\nu} a_l \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

Prueba: Si las ecuaciones (4.37), (4.38) y el sistema (4.35) son satisfechos, entonces de la segunda linea de (4.35) tenemos

$$\check{Z}_+ \parallel \check{\eta}.$$

Dado que, \check{Z}_+ esta completamente determinado por $(\check{Z}_+ \cdot \check{\eta})$. Multiplicando la segunda linea de (4.35) por $\check{\eta}$ y eliminando $(\check{Z}_+ \cdot \check{\eta})$ mediante (4.37), llegamos a un sistema de 4×4 ,

$$\begin{pmatrix} -\tau[\rho] & u_r & \rho_r & a_l \\ \|\check{\eta}\|^2[p] & -a_r & \rho_r\tau & u_l c_l^2 \|\check{\eta}\|^2 \\ 0 & u_r^2 + c_r^2 & 2\rho_r u_r & u_l a_l + c_l^2 \tau \\ -\tau([u] + \tilde{\nu}\rho_l) & c_r^2/\rho_r & u_r & \tau c_l^2/\rho_l - \tilde{\nu}a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ Z_+^0 \\ Z_+^d \\ -\zeta\rho_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual sólo tiene soluciones no triviales si el determinante Δ es igual a cero. Inversamente, si $\Delta = 0$ entonces existen soluciones no triviales para (4.35), (4.37), (4.38). \square

Ya que el determinante de Lopatinskii Δ depende solamente de $\eta := \|\check{\eta}\|$, la estabilidad multidimensional se reduce a la estabilidad en dos dimensiones.

Vamos a denotar $\mathbb{C}^+ := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \tau > 0\}$.

Corolario 4.2 *Una condición necesaria para que el problema (PVIFL) sea bien planteado es que la función $\Delta(\tau, \eta) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \Delta(\tau, \eta) \in \mathbb{C}$, definido por (4.39) no se anule.*

Todavía más, el hecho de que el problemas (PVIFL) sea bien planteado es asegurado si la condición uniforme de Kreiss-Lopatinskii es cierta. En nuestro caso, esta condición cuestiona la continuidad de la extensión del determinante de Lopatinskii Δ al semi-espacio cerrado $\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^+$ para ver si no se anula, a excepción naturalmente del punto $(0, 0)$. Si este es el caso, diremos que la transición de fase (4.19) es *estable uniformemente lineal*.

A continuación vamos a exponer algunas propiedades de la función establecida por el determinante Δ . Mostraremos que

1. la función Δ , definida por (4.39), no se anula en $\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}$,
2. si ν es distinto de cero y suficientemente pequeño, la extensión continua de Δ no se anula en $i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\}$.

4.6. La condición de Lopatinskii en una dimensión

Primero estudiaremos el determinante de Lopatinskii en el caso $\eta = 0$, el cual se puede ver como el análisis de estabilidad en una dimensión.

Lema 4.2 Si $\tilde{\nu} \geq 0$, entonces $\Delta(\tau, 0) \neq 0$ para todo $\tau \in \mathbb{C}^+$. Aún más, la extensión continua de $\Delta(\cdot, 0)$ a \mathbb{C}^2 sólo se anula en $\tau = 0$

Prueba: En particular el caso cuando $\eta = 0$, de la ecuación (4.33) y de (4.36) tenemos

$$a_l = -\tau c_l, \quad a_r = \tau c_r$$

Sustituyendo esas igualdades en (4.39) obtenemos que

$$\Delta(\tau, 0) = \begin{vmatrix} -\tau[\rho] & u_r & \rho_r & -\tau c_l \\ 0 & -\tau c_r & \rho_r \tau & 0 \\ 0 & u_r^2 + c_r^2 & 2\rho_r u_r & -c_l u_l \tau + c_l^2 \tau \\ -\tau([u] + \tilde{\nu} \rho_l) & c_r^2 / \rho_r & u_r & \tau c_l^2 / \rho_l - \tilde{\nu} \tau c_l \end{vmatrix}$$

Algunas operaciones muestran que

$$\Delta(\tau, 0) = \tau^3 \rho_r c_l (u_r + c_r) \begin{vmatrix} [\rho] & 1 & -1 \\ 0 & u_r + c_r & c_l - u_l \\ [u] + \tilde{\nu} \rho_l & c_r / \rho_r & c_l / \rho_l + \tilde{\nu} \end{vmatrix}$$

Ahora, de las condiciones de Rankine-Hugoniot, tenemos

$$j[u] = -[p] = j^2[1/\rho]$$

en vista de (4.20), esto implica que la relación

$$j[u] = -u_l u_r [\rho]$$

esto se obtiene de

$$\begin{aligned} \dot{j} &:= \rho_l u_l = \rho_r u_r \\ j[u] &= j u_r - j u_l \\ \text{pero multiplicando por } u_l & \quad j u_l = \rho_r u_r u_l \\ \text{y por } u_r & \quad j u_r = \rho_l u_l u_r \end{aligned}$$

y entonces

$$\Delta(\tau, 0) = -\tau^3 \rho_r c_l \frac{u_r + c_r}{u_l u_r} \begin{vmatrix} u_r - u_l & 1 & -1 \\ 0 & u_r + c_r & c_l - u_l \\ -u_r(u_l[u] + \tilde{\nu} j) & c_r u_r & c_l u_l + \tilde{\nu} j \end{vmatrix}$$

Finalmente, encontramos que

$$\Delta(\tau, 0) = \tau^3 \rho_r c_l \frac{u_r + c_r}{u_l u_r} \{ [u]^2 (c_l c_r + u_l u_r) + \tilde{\nu} j (c_l u_r + u_l c_r) \}$$

lo cual concluye la prueba ya que los términos del factor τ^3 son positivos. \square

4.7. Condición de Lopatinskii completa

Ahora estudiaremos el determinante de Lopatinskii para el caso cuando $\eta > 0$. Denotemos con

$$V := \frac{\tau}{v\eta}, \quad A_{l,r} := \frac{a_{l,r}}{v\eta}$$

entonces tenemos

$$\Delta(\tau, \eta) := -v\eta^3 \begin{vmatrix} -V[\rho] & u_r & \rho_r & A_l \\ -[\rho] & -A_r & \rho_r V & -u_r c_l^2 \\ 0 & u_r^2 + c_l^2 & 2\rho_r u_r & u_l A_l + c_l^2 V \\ -V([u] + \tilde{v}\rho_l) & c_r^2/\rho_r & u_r & V c_l^2/\rho_l - \tilde{v}A_l \end{vmatrix}$$

De nuevo usamos las relaciones

$$j[u] = -[p] = -u_l u_r [\rho] \quad (4.40)$$

con $j = \rho_l u_l = \rho_r u_r$ y vemos que

$$\Delta(\tau, \eta) := \frac{v\eta^3}{u_r u_l} \begin{vmatrix} -V[u] & u_r & \rho_r & A_l \\ -u_r u_l [u] & -A_r & \rho_r V & -u_l c_l^2 \\ 0 & u_r^2 + c_r^2 & 2\rho_r u_r & u_l A_l + c_l^2 V \\ V u_r (u_l [u] + \tilde{v}j) & c_r^2 u_r & \rho_r u_r^2 & V c_l^2 u_l - \tilde{v}j A_l \end{vmatrix}$$

Ahora, de (4.36) tenemos

$$A_{l,r} := \Omega_{l,r}(c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2) + V u_{l,r}$$

donde

$$\Omega_{l,r} := \frac{\omega_{l,r}}{v\eta} \quad (4.41)$$

son tales que $\text{Im } \Omega_l > 0$ y $\text{Im } \Omega_r < 0$. Más todavía, de la ecuación (4.32) tenemos que

$$\Omega_l = (-u_l V + c_l W_l)/(c_l^2 - u_l^2),$$

$$\Omega_r = (-u_r V - c_r W_r)/(c_r^2 - u_r^2),$$

donde $W_{l,r}$ son definidos para todo

$$V \in \mathbb{C}_- := \{V \in \mathbb{C} \mid \text{Im } V < 0\}$$

por

$$W_{l,r}^2 = V^2 - (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2), \quad \text{Im } W_{l,r} > 0 \quad (4.42)$$

De la ecuación (4.21) tenemos que $W_{l,r}$ son funciones holomórficas de V en \mathbb{C}_- . Usando la misma notación tenemos

$$A_l = c_l W_l, \quad A_r = -c_r W_r$$

y Δ queda como

$$\Delta(\tau, \eta) := \frac{v\eta^3 \rho_r c_l}{u_r u_l} \tilde{\Delta}(V), \quad (4.43)$$

donde

$$\tilde{\Delta}(V) := \begin{vmatrix} -V[u] & u_r & 1 & W_l \\ -u_l u_r[u] & c_r W_r & V & -u_l c_l \\ 0 & u_r^2 + c_r^2 & 2u_r & u_l W_l + c_l V \\ V u_r(u_r[u] + \mu) & c_r^2 u_r & u_r^2 & V c_l u_l - \mu W_l \end{vmatrix}$$

$$\mu := \tilde{\nu}j \tag{4.44}$$

El determinante $\tilde{\Delta}$, aunque no es como $\Delta(\tau, 0)$, puede ser desarrollado. Usando la definición (4.42) de $W_{l,r}$, encontramos

$$\tilde{\Delta}(V) = \phi(V) + \mu\psi(V), \tag{4.45}$$

donde las funciones holomórficas ϕ, ψ , están definidas en \mathbb{C}_- por (4.42) y

$$\begin{aligned} \phi(V) &:= -[u]^2(c^2V - u_r W_r)(c_r c_l V^2 + u_l u_r W_l W_r), \\ \psi(V) &:= V(c_r V - u_r W_r)(c_l u_r W_r + c_r u_l W_l) \\ &\quad - u_r[u](c_r^2 - u_r^2)(c_l V - u_l W_l). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Las funciones ϕ, ψ tienen algunas propiedades analíticas adicionales, las cuales vamos a sintetizar en la siguiente proposición

Proposición 4.2 *Denotemos con*

$$m := (\min(c_l^2 - u_l^2, c_r^2 - u_r^2))^{1/2}.$$

i. Las funciones ϕ y ψ son holomórficas en el dominio simplemente conexo

$$D := \mathbb{C} \setminus \{V \in \mathbb{R} \mid V^2 \geq m^2\}.$$

ii. Tienen extensiones continuas, denotadas por Φ y Ψ al semi-plano cerrado $\overline{\mathbb{C}_-}$.

iii. La función Φ tiene solamente dos ceros en $\overline{\mathbb{C}_-}$. Existen números reales opuestos $\pm V_0$, y que pertenecen a D .

iv. La función ϕ tiene solamente un cero diferente de $\pm V_0$ en D , el cual es iu_r .

Prueba: i. El dominio D es el más grande donde W_l y W_r son funciones holomórficas de V . Mas todavía, ϕ y ψ son polinomiales en V, W_l y W_r .

ii. La extensión continua de ϕ y ψ a $D \cap \overline{\mathbb{C}_-}$ es inmediata de i. Ahora, si $V \in \mathbb{R}$ y $V^2 \geq c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2$, donde tenemos que hacer una elección cuidadosa de las raíces $W_{l,r}$ de

$$W_{r,l}^2 = V^2 - (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2),$$

y para asegurar la continuidad de $V \in \overline{\mathbb{C}_-} \mapsto W_{l,r}$. Dado que tenemos $\text{Im } W_{l,r} > 0$ cuando $\text{Im } V < 0$, se debe cumplir lo siguiente

$$\frac{dW_{r,l}}{dV}(V) < 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}, \quad V^2 \geq (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2).$$

Elegimos

$$W_{l,r} = -\text{sgn}(V)\sqrt{V^2 - (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2)}$$

iii. Debemos notar que el factor $c_r V - u_r W_r$ no se anula en $\overline{\mathbb{C}_-}$. Si $V \in \overline{\mathbb{C}_-}$ es tal que $c_r V = u_r W_r$, entonces

$$c_r^2 V^2 = u_r^2 (V^2 - (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2)),$$

y así $V^2 = -u_r^2$. Esto implica que V es puramente imaginario y entonces $\text{Im}(c_r V - u_r W_r) < 0$, lo cual contradice $c_r V = u_r W_r$. El resto del punto iii. está relacionado con el factor $F(V) := c_l c_r V^2 + u_l u_r W_l W_r$ y es conocido de [S.Benzoni-Gavage,1999] y de lo expuesto en la sección anterior. Lo planteamos por conveniencia. Si $F(V) = 0$, entonces

$$c_l^2 c_r^2 V^4 = u_l^2 u_r^2 (V^2 - (c_l^2 - u_l^2))(V^2 - (c_r^2 - u_r^2)).$$

Así V^2 es una raíz del polinomio de segundo orden

$$P(X) = \frac{c_l^2 c_r^2 - u_l^2 u_r^2}{u_l^2 u_r^2} X^2 + (c_l^2 - u_l^2 + c_r^2 - u_r^2) X - (c_l^2 - u_l^2)(c_r^2 - u_r^2) \quad (4.47)$$

Pero, a causa de (4.21), las raíces de P son reales. Así, V es real o puramente imaginaria.

En el último caso, es decir si $V = i\tilde{V}$, tenemos

$$W_{l,r} = i\sqrt{\tilde{V}^2 + (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2)}.$$

y así $c_l c_r V^2 + u_l u_r W_l W_r$ es un número real distinto cero, negativo, por lo tanto, $F(V)$ no se anula en \mathbb{C}_- . Sin embargo, se anula dos veces en el intervalo real $(-m, m)$. Se puede comprobar que P tiene una única raíz positiva X_0 que es menor que m^2 . Se comprueba entonces que $F(V)$ se anula en $V = \pm V_0$, con $V_0 := \sqrt{X_0}$. Finalmente, notamos que si $F(V) = 0$ con V en los reales, y ya sea que alguno de los dos W_l o W_r sea real, entonces el otro W es también necesariamente real. Así, si $F(V)$ se anula en algún lugar de \mathbb{R} , lo hace para

$$V \geq M := (\max(c_l^2 - u_l^2, c_r^2 - u_r^2))^{1/2}$$

Pero, si $V^2 \geq M^2$, entonces $c_l c_r V^2 + u_l u_r W_l W_r$ es un real positivo, distinto de cero.

iv. En el punto iii se mostró que $F(V)$ no se anula en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por otro lado, si $V \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es tal que $c_r V = u_r W_r$, entonces $V^2 = -u_r^2$ y necesariamente se tiene que $V = iu_r$. \square

Esta proposición expresa en particular que, para $\mu = 0$, el determinante de Lopatinskii $\Delta(\tau, \eta)$ es igual a cero para $\text{Re } \tau \geq 0$ si y sólo si $\tau = \pm iV_o \eta$. Esto muestra que las transiciones de fase de reversibles son estables débilmente lineales y que existe una onda superficial de velocidad V_0 (como se mostró en la sección anterior). Para la estabilidad de transiciones de fase débilmente disipativas, debemos mostrar cómo los ceros de ϕ son perturbados por la adición de $\mu\psi$ en $\tilde{\Delta}$ para

μ pequeña positiva. Esto se verá en la siguiente proposición.

Proposición 4.3 *Sea $V^0 \in \mathbb{R}$ que denota a alguno de los dos valores V_0 o $-V_0$. Entonces*

i. *Existe un número real positivo k_0 tal que*

$$\frac{d\phi}{dV}(V^0) = -\frac{k_0}{V^0}(c_r V^0 - u_r W_r^0), \quad (4.48)$$

con la notación

$$W_r^0 = W_r(V^0) = \iota\sqrt{c_r^2 - u_r^2 - V_0^2}, \quad (4.49)$$

y

$$\text{Im} \left(-\psi(V^0) \Big/ \frac{d\phi}{dV}(V^0) \right) = \frac{V_0^2}{k_0} \left((1 - \delta)c_l u_r |W_r^0| + (1 + \delta)c_r u_l |W_l^0| \right). \quad (4.50)$$

donde

$$\delta := \frac{u_r[u]}{V_0^2 + u_r^2} \quad (4.51)$$

ii. *El punto u_r es también un simple cero de ϕ , y*

$$-\psi(u_r) \Big/ \frac{d\phi}{dV}(u_r) \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Prueba: i. Los cálculos de $\frac{d\phi}{dV}(V^0)$ son directos, tomando en cuenta la relación que define V_0^2 :

$$F(V^0) = c_l c_r V_0^2 + u_l u_r W_l^0 W_r^0 = 0 \quad (4.52)$$

encontramos que

$$k_0 := \frac{[u]^2}{c_l c_r} (2(c_l^2 c_r^2 - u_l^2 u_r^2) V_0^2 + u_l^2 u_r^2 (c_l^2 - u_l^2 + c_r^2 - u_r^2)),$$

lo cual es positiva en vista de (4.21). De nuevo usamos la ecuación (4.52) y obtenemos,

$$\psi(V^0) = -(c_l V^0 - u_l W_l^0)((c_r V^0 - u_r W_r^0)^2 + u_r[u](c_r^2 - u_r^2))$$

lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left(-\psi(V^0) \Big/ \frac{d\phi}{dV}(V^0) \right) \\ &= -\frac{V^0}{k_0} \left\{ \text{Im}((c_l V^0 - u_l W_l^0)(c_r V^0 - u_r W_r^0)) \right. \\ & \quad \left. + u_r[u](c_r^2 - u_r^2) \text{Im} \left(\frac{c_l V^0 - u_l W_l^0}{c_r V^0 - u_r W_r^0} \right) \right\} \end{aligned}$$

Puesto que $W_{l,r}^0$ son puramente imaginarios, definimos que

$$\text{Im}((c_l V^0 - u_l W_l^0)(c_r V^0 - u_r W_r^0)) = -(c_l u_r |W_r^0| + c_r u_l |W_l^0|) V^0$$

mientras que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{c_l V^0 - u_l W_l^0}{c_r V^0 - u_r W_r^0} \right) = \frac{c_l u_r |W_r^0| - c_r u_l |W_l^0|}{(c_r^2 - u_r^2)(V_0^2 + u_r^2)} V^0.$$

Esto prueba (4.50). En el caso de una transición de fase expansiva, es decir para cuando $v_r > v_l$, (4.20) implica que

$$\frac{u_r}{u_l} = \frac{v_r}{v_l} > 1.$$

Se tiene que

$$0 < \delta < 1,$$

y así obtenemos

$$\operatorname{Im} \left(-\psi(V^0) / \frac{d\phi}{dV}(V^0) \right) > 0. \quad (4.53)$$

En el caso de una transición de fase *compresiva*, δ es negativo. Si es más grande que -1 , entonces la desigualdad (4.53) se sigue de forma inmediata. A continuación se prueba que una condición, menos restrictiva que asegura $\delta > -1$, esto es

$$u_l u_r - V_0^2 < 2u_r^2. \quad (4.54)$$

ii. Usando (4.42) se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dV}(iu_r) &= [u]^2 u_r (c_r^2 - u_r^2) \left(c_l u_r + u_l \sqrt{c_l^2 - u_l^2 + u_r^2} \in \mathbb{R}^{+*} \right), \\ \psi(iu_r) &= iu_r (c_r^2 - u_r^2) (u_l - u_r) \left(c_l u_r - u_l \sqrt{c_l^2 - u_l^2 + u_r^2} \right). \end{aligned}$$

De la ecuación (4.20) y (4.21), tenemos

$$c_l u_r > u_l \sqrt{c_l^2 - u_l^2 + u_r^2} \iff u_r > u_l.$$

hacemos notar que $u_r \neq u_l$, de la ecuación (4.20) se tiene

$$\frac{u_r}{u_l} = \frac{v_r}{v_l} \quad (4.55)$$

Además, en cualquier caso, $\psi(iu_r)$ pertenece a $i\mathbb{R}^{-*}$. \square

Lema 4.3 Sea X_0 la raíz positiva real de el polinomio definido con (4.47), donde

$$M_{l,r} = \frac{u_{l,r}}{c_{l,r}} \in (0, 1), \quad (c_r - c_l)(u_r - u_l) < 0, \quad (4.56)$$

y

$$\text{si } \frac{u_r}{u_l} < \frac{1}{2}, \quad \text{entonces } M_l \leq \frac{u_r}{u_l}, \quad (4.57)$$

Entonces, de cualquier manera

$$u_l u_r - X_0 < 2u_r^2 \quad (4.58)$$

La suposición (4.56) es planteada por conveniencia. Se satisface en forma automática para las transiciones de fase que consideramos. Los cocientes $u_{l,r}/c_{l,r}$ son los números de Mach.

Prueba: Primero notemos que (4.58) es trivial si $u_r/u_l \geq \frac{1}{2}$, puesto que X es positivo por definición. Por otro lado, de (4.56), (4.57) tenemos

$$0 < M_r < M_l \leq \frac{u_r}{u_l} < \frac{1}{2}.$$

Tenemos

$$P(u_l u_r - 2u_r^2) = c_l^2 c_r^2 Q(1 - 2u_r/u_l),$$

donde

$$Q(Y) := (1 - M_l^2 M_r^2) Y^2 + \left(\frac{u_l}{u_r} M_r^2 (1 - M_l^2) + \frac{u_r}{u_l} M_l^2 (1 - M_r^2) \right) Y - (1 - M_l^2)(1 - M_r^2)$$

La prueba será terminada si se muestra que $Q(1 - 2\alpha) < 0$, donde por simplicidad denotamos

$$\alpha = \frac{u_r}{u_l}.$$

Tenemos

$$Q(1 - 2\alpha) = -4\alpha(1 - \alpha) + M_l^2(1 + \alpha(1 - 2\alpha)) + M_r^2 \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) - M_l^2 M_r^2 \left((1 - 2\alpha)^2 + \frac{1 - 2\alpha}{\alpha} + \alpha(1 - 2\alpha) + 1 \right)$$

Puesto que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, tenemos así que

$$Q(1 - 2\alpha) < -4\alpha(1 - \alpha) + M_l^2(1 + \alpha) + \frac{M_r^2}{\alpha}.$$

Es más, la desigualdad $M_r < M_l \leq \alpha$ implica que

$$Q(1 - 2\alpha) < -4\alpha(1 - \alpha) + M_l^2(1 + \alpha) + M_l,$$

esto es negativo, pues las raíces del polinomio

$$(1 + \alpha)Y^2 + Y - 4\alpha(1 - \alpha)$$

son números reales de signo opuesto, y el positivo es más grande que $\alpha \geq M_l$. \square

Teorema 4.1 *Supongamos que los números positivos $u_{l,r}, c_{l,r}$ son tales que (4.56), (4.57), se cumplen, y consideremos las funciones Φ y Ψ como se definieron en (4.42) y (4.46) junto con la proposición 4.2 sección ii. Entonces existe un positivo μ_1 , que depende continuamente de los parámetros $(u_{l,r}, c_{l,r})$ tal que para todo $\mu \in (0, \mu_1)$, la función $\Phi + \mu\Psi$ no se anula en $\overline{\mathbb{C}}_- = \{V \in \mathbb{C} \mid \text{Im } V \leq 0\}$*

Prueba De las proposiciones (4.2) y (4.3) se puede ver que para μ suficientemente pequeño la función $\phi + \mu\psi$ tiene al menos tres ceros en D , los cuales son parametrizados por μ y toman los valores $\pm V_0$ y iu_r cuando μ es 0. Es más, de la proposición 4.3 y del último lema, esos ceros caen en el semi-plano abierto $\mathbb{C}_+ := \{V \in \mathbb{C} \mid \text{Im } V > 0\}$ cuando $\mu > 0$. Sólo quedan dos aspectos:

- i. La función $\phi + \mu\psi$ tiene solamente tres ceros en D .
- ii. La función $\Phi + \mu\Psi$ no se anula en $\{V \in \mathbb{R} \mid V^2 \geq m^2\}$.

i. Primero notamos que ϕ y ψ son del mismo orden en el infinito. Es decir, cuando $|V| \rightarrow \infty$, tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \phi(V) \sim -(c_r + u_r)aV^3 \\ \psi(V) \sim -(c_r + u_r)bV^3 \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad \text{Im } V < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(V) \sim -(c_r - u_r)aV^3 \\ \psi(V) \sim -(c_r - u_r)bV^3 \end{array} \right\} \quad \text{si} \quad \text{Im } V > 0$$

donde

$$a := [u]^2(c_l c_r + u_l u_r) > 0, \quad b := c_l u_r + u_l c_r > 0.$$

Tomemos $\mu_0 < \bar{\mu} < a/b$. Entonces, para toda $A > 0$, existe $R > m$ tal que

$$|\phi(V)| \geq Aa \quad \text{y} \quad |\psi(V)| \geq Ab \quad \text{para todo} \quad V \in D, |V| \geq R,$$

$|\phi(V) + \mu\psi(V)| \geq A(a - \bar{\mu}b)$ para toda $V \in D$ $|V| \leq R$, para toda $\mu \in [0, \mu_0]$.

En particular, $\phi + \mu\psi$ no se anula fuera del círculo $\mathcal{C} := \{V \in \mathbb{C} \mid |V| = R\}$.

Puesto que, las funciones ϕ y ψ pueden extenderse continuamente al semi-plano $\overline{\mathbb{C}_-}$ (como se mostró en la proposición 4.2.ii) o, por argumentos similares, al semiplano cerrado $\overline{\mathbb{C}_+}$, los cuales están acotados sobre \mathcal{C} y tenemos

$$\min_{\mathcal{C}} |\phi| \geq Aa > 0, \quad \max_{\mathcal{C}} |\psi| \geq Ab > 0.$$

Además, sea $\varepsilon_0 > 0$ más pequeño que $m - V_0$ y consideremos las regiones compactas en $\overline{\mathbb{C}_+}$

$$Q_{\pm} := \{V \mid m - \varepsilon_0 \leq \pm \text{Re } V \leq R; -\varepsilon_0 \leq \text{Im } V \leq 0\}.$$

Sabemos de la proposición (3.2) que Φ no se anula en Q_{\pm} . Así tenemos

$$\min_{Q_{\pm}} |\Phi| > 0$$

Consecuentemente, la razón

$$\frac{\min_{\mathcal{C} \cup Q_{\pm}} |\Phi|}{\max_{\mathcal{C} \cup Q_{\pm}} |\Psi|}$$

es un número positivo real. Podemos usar un argumento similar en las regiones simétricas para Q_{\pm} con respecto al eje real, usando las extensiones continuas de ϕ y ψ al semi-espacio cerrado $\overline{\mathbb{C}_+}$. (notese que la proposición (4.2.iii) también es cierta por la continuación de ϕ a $\overline{\mathbb{C}_+}$). Finalmente, para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, denotemos con Γ_{ε} el contorno cerrado que consiste de

$$\begin{aligned} & \{V \in D \mid |V| = R, \quad |\text{Im } V| \geq \varepsilon\} \\ & \cup \{V \in D \mid |\text{Re } V| = m - \varepsilon, |\text{Im } V| \leq \varepsilon\} \\ & \cup \{V \in D \mid m - \varepsilon \leq |\text{Re } V| \leq \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}, |\text{Im } V| = \varepsilon\} \end{aligned}.$$

Entonces la cantidad

$$\frac{\min_{\Gamma_\varepsilon} |\Phi|}{\max_{\Gamma_\varepsilon} |\Psi|}$$

tiene una cota inferior positiva, uniforme en $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Por lo tanto existen $\mu_1 \in (0, \mu_0]$ tal que para todo $\mu \in [0, \mu_1]$, para todo $V \in \Gamma_\varepsilon$, tenemos

$$\mu|\psi(V)| \leq |\phi(V)|.$$

Consecuentemente, de acuerdo al teorema de Rouché, el número de ceros de $\phi + \mu\psi$ en el interior de Γ_ε es igual al número de ceros de ϕ , el cual es 3. Esto prueba i.

ii. Primero notemos que, como la función F en la proposición (3.2), la función $\Phi + \mu\Psi$ no se puede anular para los valores reales de V tal que

$$m^2 \leq V^2 \leq M^2.$$

De hecho, supongamos que $\Phi(V) + \mu\Psi(V) = 0$ con V real y W_l real: Entonces W_r es real o puramente imaginario y en vista de la ecuación (4.46) tenemos

$$c_r u_r ([u]^2 + \mu)V(c_l V - u_l W_l)W_r \in \mathbb{R}.$$

Puesto que, $-VW_r > 0$ por la proposición (3.2.ii), el factor de W_r es un número real positivo. Así, W_r tiene que ser real. Por un argumento similar, si $\Phi(V) + \mu\Psi(V) = 0$ con V real y W_r real, entonces W_l debe ser real. Para probar esto, es conveniente usar (4.42) para escribir

$$\begin{aligned} \psi &= (c_r W_r - u_r V)(c_l u_r V^2 + u_l c_r W_l W_r) \\ &\quad + u_l (c_r^2 - u_r^2)((c_r^2 + u_r^2 - u_l u_r)W_l + u_r c_l V) \end{aligned}$$

Entonces, si $\Phi(V) + \mu\Psi(V) = 0$ con V real y W_r real, tenemos

$$\begin{aligned} &\{-[u]^2 u_l u_r (c_r V - u_r W_r)W_r \\ &\quad + \mu u_l (u_l c_r (c_r W_r - u_r V)W_r + (c_r^2 - u_r^2)(c_r^2 + u_r^2 - u_l u_r))\}W_l \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De la proposición (4.2.ii), tenemos que $-VW_r > 0$, y notando que $c_r^2 + u_r^2 - u_l u_r > 0$, por la suposición (4.56). Así, el factor de W_l es un número positivo y W_l tiene que ser real.

En consecuencia, solamente tenemos que verificar que $\Phi + \mu\Psi$ no se anule en $\{V \in \mathbb{R} \mid V^2 > M^2\}$. Para hacer esto, aplicamos el teorema de Rouché para funciones holomórficas que coinciden con $\Phi + \mu\Psi$ sobre $\{V \in \mathbb{R} \mid V > M\}$ o $\{V \in \mathbb{R} \mid V < -M\}$. Empecemos con $\{V \in \mathbb{R} \mid V > M\}$. Consideraremos el dominio conexo más simple

$$\Omega := \{V \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} V > 0\} \setminus \{V \in \mathbb{R} \mid 0 \leq V \leq M\}$$

Entonces, para todo $V \in \Omega$, $V^2 - c_{l,r}^2 + u_{r,l}^2 \notin \mathbb{R}^-$. Por lo tanto, existen dos funciones holomórficas $\zeta_{l,r}$ en Ω tal que

$$\zeta_{l,r}^2 = V^2 - (c_{l,r}^2 - u_{l,r}^2) \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} \zeta_{l,r} < 0 \quad \text{para todo } V \in \Omega \quad (4.59)$$

Entonces debemos tener que las funciones holomórficas $\tilde{\Phi}$ y $\tilde{\Psi}$ definidas por

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(V) &:= -[u]^2 (c_r V - u_r \zeta_r)(c_l c_r V^2 + u_l u_r \zeta_l \zeta_r), \\ \tilde{\Psi}(V) &:= V(c_r V - u_r \zeta_r)(c_l u_r \zeta_r + c_r u_l \zeta_l) \\ &\quad - u_r [u](c_r^2 - u_r^2)(c_l V - u_l \zeta_l). \end{aligned} \quad (4.60)$$

coincide con Φ y Ψ , respectivamente, sobre el conjunto $\{V \in \mathbb{R} \mid V > M\}$. Por el mismo argumento como el de Φ y Ψ , vemos que existe $\tilde{\mu}_0 > 0$ y $R > 0$ tal que para todo $\mu \in [0, \tilde{\mu}_0]$, $\tilde{\Phi} + \mu\tilde{\Psi}$ no se anula fuera del círculo $\mathcal{C} := \{V \in \mathbb{C} \mid |V| = R\}$. Notemos que, $\tilde{\Phi}$ y $\tilde{\Psi}$ tienen límites cuando $V \rightarrow M$ con $V \in \Omega$ y que

$$\lim_{V \rightarrow M} \tilde{\Phi} \neq 0, \quad \text{para } V \in \Omega$$

De donde, existe $\tilde{\mu}_1 \in (0, \tilde{\mu}_0]$ y algún $\varepsilon_0 > 0$ más pequeño que $R - M$ tal que para todo $\mu \in (0, \tilde{\mu}_1]$, la función $\tilde{\Phi} + \mu\tilde{\Psi}$ no se anula en $\{V \in \Omega \mid |V - M| < 2\varepsilon_0\}$. Aún más, la función $\tilde{\Phi}$ no se anula en Ω . Podemos hacer lo mismo como en la proposición (3.2.iii). Si $V \in \Omega$ fuera tal que $c_r V = u_r \zeta_r$, entonces tomando el cuadrado se tiene $V^2 = -u_r^2$, lo cual es imposible puesto que $V \notin i\mathbb{R}$. Por otro lado, si $V \in \Omega$ fuera tal que $c_l c_r V^2 + u_l u_r \zeta_l \zeta_r = 0$, entonces podríamos tener $P(V^2) = 0$, lo cual es imposible pues $V \notin i\mathbb{R}$ y $V \notin (0, m)$. De donde, si consideramos el círculo \mathcal{C}_0 que tiene la línea $[M + \varepsilon_0, R + \varepsilon_0]$ como un diámetro, el teorema de Rouché muestra que existe un número positivo, denotado por $\tilde{\mu}_1$, tal que para todo $\mu \in [0, \tilde{\mu}_1]$, la función $\tilde{\Phi} + \mu\tilde{\Psi}$ no se anula en el interior de \mathcal{C}_0 . Esto prueba en particular que, para $\mu \in [0, \tilde{\mu}_1]$, la función $\Phi + \mu\Psi$ no se anula en $\{V \in \mathbb{R} \mid V > M\}$. Para usar algo análogo a $\zeta_{l,r}$, pero de parte real positiva, la prueba de que $\Phi + \mu\Psi$ no se anula en $\{V \in \mathbb{R} \mid V < -M\}$ se trabaja de la misma manera. \square

4.8. La estabilidad uniforme de las transiciones de fase

En esta sección se va a establecer la estabilidad de las transiciones de fase.

Teorema 4.2 (S. Benzoni Gavage, 1999) *Sea $p : v \in (b, +\infty) \mapsto p(v)$ una función suave que satisface (4.16) y (4.17) tal que $-j_l^2$ es la inclinación de la cuerda trazada desde v_m , tangente a la gráfica de p en v_l . Sea \mathcal{H} un subconjunto compacto de $(0, |j_1|)$.*

1.- Sea \mathcal{R}_e la curva de las transiciones de fase reversibles expansivas:

$$\mathcal{R}_e := \{(b, v_r) \in (v_M, v_1) \times (v_m, v_l) \mid \exists j \in \mathcal{H}, \\ (j, v_l, v_r) \text{ es una transición de fase } 0\text{-admisibles}\}$$

Entonces se dice que existe $\nu_e > 0$, un subconjunto abierto \mathcal{O}_e , tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_e \subset \subset (0, |j_1|)$, tanto como $\mathcal{A}_e, \mathcal{R}_e \subset \mathcal{A}_e \subset \subset (b, v_m) \times (v_M, v_1)$, tal que, para todo $\nu \in (0, \nu_e]$ la transición de fase ν -admisibles $(j, v_l, v_r) \in \mathcal{O}_e \times \mathcal{A}_e$ son estables uniformemente lineales.

2.- Sea \mathcal{R}_c la curva de las transiciones de fase reversibles compresibles:

$$\mathcal{R}_c := \{(v_l, v_r) \in (v_M, v_1) \mid \exists j \in \mathcal{H}, \\ (j, v_l, v_r) \text{ es una transición de fase } 0\text{-admisibles} \\ \text{y la siguiente condición se cumple}\}$$

$$\begin{aligned} \text{o se cumple que } \frac{v_r}{v_l} \geq \frac{1}{2} \\ \text{o bien} \\ M_l = \left(\frac{[p]/[v]}{d_v p(v_l)} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{v_r}{v_l} \end{aligned} \tag{4.61}$$

entonces existe $\nu_c > 0$, un subconjunto abierto \mathcal{O}_c , tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_c \subset \subset (0, |j_1|)$, y también se tiene $\mathcal{A}_c, \mathcal{R}_c \subset \mathcal{A}_e \subset \subset (v_m, v_1) \times (b, v_m)$ tal que, para todo $\nu \in (0, \nu_c]$, la transición de fase ν -admisibles $(j, v_l, v_r) \in \mathcal{O}_c \times \mathcal{A}_e$ son estables uniformemente lineales.

Prueba: 1. Por el lema 4.1 y la observación 3, existe $\nu_{\mathcal{H}} > 0$, un subconjunto abierto \mathcal{O}_e , tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_e \subset \subset (0, |j_1|)$, y $\mathcal{A}_e, \mathcal{R}_e \subset \mathcal{A}_e \subset \subset (b, v_m) \times (v_M, v_1)$ tal que, para $\nu \in [0, \nu_{\mathcal{H}}]$, las transiciones de fase ν -admisibles $(j, v_l, v_r) \in \mathcal{O}_e \times \mathcal{A}_e$ son parametrizadas por $(j, \nu) \in \mathcal{O}_e \times [0, \nu_{\mathcal{H}}]$. Por ser invariante a las transformaciones Galileanas, la estabilidad de cualquier frontera fase plana (4.3) con $\rho_{l,r} = 1/v_{l,r}(v_l, v_r) \in \mathcal{A}_e$, es equivalente a la estabilidad de la frontera fase plana mas simple. De acuerdo al Lema 4 la frontera fase plana satisface la condición uniforme de Lopatinskii unidimensional al probar que $\tilde{\nu}$ es positiva. Este es el caso para ν suficientemente pequeño. Por el Lema 4.2, la ecuación (27), y la (35), existe $\tilde{\nu}_{\mathcal{H}} \leq \nu_{\mathcal{H}}$ tal que, para todo $(j, \nu) \in \mathcal{O}_e \times [0, \tilde{\nu}_{\mathcal{H}}]$, $\tilde{\nu} > 0$. Aún más, la condición uniforme de Lopatinskii multidimensional requiere que la función $\Phi + \mu\Psi$ como se definió en la proposición (3.2.ii), no se anule en \mathbb{C}_- . Por el teorema (3.2.1), existe $\mu_1 > 0$ tal que, para todo $(j, \nu) \in \mathcal{O}_e \times [0, \tilde{\nu}_{\mathcal{H}}]$, y para todo $\mu \in (0, \mu_1)$, la función $\Phi + \mu\Psi$ no se anula en \mathbb{C}_- . Repasando (4.44) tenemos que $\mu = j\tilde{\nu}$. De donde, en vista de (35) y de (27), existe $\nu_e \leq \tilde{\nu}_{\mathcal{H}}$ tal que $j\tilde{\nu} < \mu_1$ para todo $(j, \nu) \in \mathcal{O}_e \times [0, \nu_e]$. Esto concluye la prueba para las transiciones de fase expansivas.

2.- La prueba es similar, se deduce de la observación 5. Sin embargo, tenemos que comprobar que (4.57) del Lema 5. Esto es cierto en una vecindad de \mathcal{R}_c ya que esas transiciones de fase reversibles deben satisfacer (4.61). Recordemos que esta condición es no restrictiva para la ley de van der Waals de un fluido estándar. \square

Naturalmente, de la observación 2, un resultado similar es cierto con el flujo de masa negativo j . Las transiciones de fase compresivas corresponden a $(v_l, v_r) \in (b, v_m) \times (v_M, v_1)$, mientras que las expansivas corresponden a $(v_l, v_r) \in (v_M, v_1) \times (b, v_m)$. Por lo que, tenemos un teorema más general.

Teorema 4.3 Sea \mathcal{H} un subconjunto compacto de $(0, |j_1|)$ o de $(-|j_1|, 0)$.

1. Sea \mathcal{R}_e la curva de las transiciones de fase reversibles expansivas. Entonces existe $\nu_e > 0$, una vecindad \mathcal{O}_e de \mathcal{H} , tanto como una vecindad \mathcal{A}_e de \mathcal{R}_e , tal que para toda $\nu \in (0, \nu_e]$, las transiciones de fase ν -admisibles $(j, v_l, v_r) \in \mathcal{O}_e \times \mathcal{A}_e$ son estables uniformemente lineales.
2. Sea \mathcal{R}_c la curva de las transiciones de fase reversibles que satisfacen

$$\begin{aligned} & \text{o se cumple } \frac{v_L}{v_V} \geq \frac{1}{2} \\ & \text{o bien} \\ & M_V = \left(\frac{[p]/[v]}{d_v p(v_V)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{v_L}{v_V} \end{aligned} \tag{4.62}$$

en donde los subindices L, V se refieren a la fase liquida y a la fase de vapor respectivamente. Entonces existe $\nu_c > 0$, una vecindad \mathcal{O}_c de \mathcal{H} , y una

vecindad, \mathcal{A}_c de \mathcal{R}_c tal que para toda $\nu \in (0, \nu_c]$, las transiciones de fase ν -admisibles $(j, v_l, v_r) \in \mathcal{O}_c \times \mathcal{A}_c$ son estables uniformemente lineales.

Este resultado completa el análisis de la estabilidad linealizada de las transiciones de fase disipativas. Ya que la condición uniforme de Lopatinskii es satisfecha, nos permite mostrar la existencia local en el tiempo de los frentes de las transiciones de fase perturbados que satisfacen el problema de frontera libre (PFL).

Bibliografía

- [1] R. Abeyaratne, J. K. Knowles, *Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids*. Arch. Rational Mech. Anal., 114, 119-154, 1991.
- [2] S. Alinhac, *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels* Comm. Partial Differential Equations,14(2) :173-230, 1989
- [3] S. Alinhac, *Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux* Advances in the theory of shock waves, vol. 47 de Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhuser Invent. Math., 111(3):627-670, 1993.
- [4] S. Alinhac, *Blow-up for nonlinear hyperbolic equations* Birkhäuser, Boston, 1995
- [5] M. Artola, A. Majda *Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets,I: the basic kink modes*. Phys.D., 28 :253-281, 1987.
- [6] S. Benzoni-Gavage. *Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid*. Nonlinear anal, 31(1-2) :243-263, 1998
- [7] S. Benzoni-Gavage. *Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid*. Arch. Rational Mech. Anal. 150 :23-55, 1999
- [8] S. Benzoni-Gavage, D. Serre. *First order system of hyperbolic partial differential equations with applications*. Oxford University Press, 2007
- [9] H. A. Bethe, *The Theory of Shock Waves for an Arbitrary Equation of State*. Technical Report PB-32189, Clearinghouse for Federal Scientific and Technical Information, U. S. Dept. of Commerce, Washington D. C., 1942.
- [10] G. Boillat, *Chocs caractéristiques*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 274, A1018-A1021, 1972.
- [11] J. M. Bony. *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Ann. Sci. Norm. Sup. (4), 14(2) :209-246, 1981.
- [12] S. Bianchini, A. Bressan *Vanishing viscosity solutions to nonlinear hyperbolic systems*. Annal. Math., 161, 223-342, 2005.
- [13] A. Bressan *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy problem*. Oxford University Press, Oxford, 2000

- [14] J. Chazarain, A. Piriou. *Introduction a la Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [15] J. F. Coulombel. *Weak stability of nonuniformly stable multidimensional shocks*. SIAM J. Math. Anal., 34(1) :142-172, 2002.
- [16] J. F. Coulombel. *Stability of multidimensional undercompressive shocks waves*. Interfaces Free Bound., 5(4):360-390, 2003.
- [17] J. F. Coulombel. *Weakly stable multidimensional shocks*. Ann. Inst. H. Poincaré (Analyse non linéaire), 21:401-444, 2004.
- [18] R. Colombo, A. Corli *Continuous dependence in conservation laws with phase transitions*. SIAM J. Math Anal., 31(1):34-62, 1999
- [19] R. Courant, K. O. Friedrichs. *Supersonic flow and shock waves*. Springer-Verlag, New York, 1976
- [20] W. Domański, *Stability of shock fronts for multidimensional conservation laws*. University, SFB, (256), 1-41, 1989.
- [21] S. P. D'yakov, *On the stability of shock waves*. J. Exp. Theor. Phys., 27, 288-296, 1954, [en Ruso].
- [22] J. Erpenbeck. *Stability of step shocks*. Phys. Fluids, 5(10) :1181-1187, 1962.
- [23] H. Fan. *On a model of the dynamics of liquid/vapor transitions*. SIAM J. Appl. Math., 60(4) :1270-1301, 2000.
- [24] J. Francheteau, G. Métivier. *Existence de chocs faibles pour des systemes quasi-linaires hyperboliques multidimensionnels*. Astérisque, 268:viii+198, 2000
- [25] K. O. Friedrichs, P. Lax, *Systems of conservation equations with a convex extension*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 68, 1636-1688, 1971.
- [26] S. Friedland, J. W Robbin, J Sylwester, *On the crossing rule*. Pure Appl. Math., 37, 19-38, 1984.
- [27] H. Freistühler. *The persistence of ideal shock waves*. Appl. Math. Lett., 7(6) :7-11, 1994.
- [28] H. Freistühler. *A short note on the persistence of ideal chok waves* Arch. Math. 64; 1995.
- [29] H. Freistühler. *Some result on the stability of non-classical schock waves*. J. Partial Differential Equations, 11(1) :25-38, 1998.
- [30] H. Freistühler, R.G. Plaza. *Normal modes and nonlinear stability behaviour of dynamic phase boundaries in elastic materials*. Arch. Rational Mech. Anal. 186 :1-24, 2007.
- [31] K. O. Friedrichs. *Symetric positive lineal diferential equations*. Comm. Pure Appl. Math. (11), :333-410, 1958.

- [32] J. Glimm *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations.* Comm. Pure Appl. Math., 18, 697-715, 1965.
- [33] J. Glimm *The interactions of nonlinear hyperbolic waves.* Comm. Pure Appl. Math., 41, 569-590, 1988.
- [34] S. K. Godunov, *The problem of generalized solution in the theory of quasi-linear equations in gas dynamics.* Russ. Math. Surveys, 17, 145-156, 1962.
- [35] L. Gårding *Problème de Cauchy pour les systèmes quasi-linéaires d'ordre un strictement hyperboliques.* In Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962), Pages 33-40. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.
- [36] M. Grassin. *Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas.* Indiana Univ. Math. J., 47(4) :1397-1432, 1998.
- [37] R. Hagan, M. Slemrod. *The viscosity-capillary criterion for shocks and phase transitions.* Arch. Rational Mech. Anal., 83 :333-361, 1983.
- [38] H. Hattori. *The Riemann problem for a van der Waals fluid with entropy rate admissibility creiterion-isothermal case.* Arch. Rational Mech. Anal, 92, 246-263, 1986
- [39] R. Hersh. *Mixed problems in several variables.* J. Math. Mech., 12 :317-334, 1963
- [40] R. L. Higdon. *Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems.* SIAM Rev., 28(2) :177-217, 1986
- [41] D. Y. Hsieh, X. P. Wang. *Phase transition in van der Waals fluid.* SIAM J. Appl. Math., 57(4) :871-892, 1997.
- [42] R. D. James. *The propagation of phase boundaries in elastic bars.* Arch. Rational Mech. Anl., 73(2) :125-158, 1980.
- [43] S. Jaouen. *Étude mathématique et numérique de stabilité pour des modeles hydrodynamiques avec transition de phase.* The, Université de Paris 6, 2001.
- [44] A. Jeffrey, T. Taniuti, *Non-linear Wave Propagation.* Academic Press, New York, 1964.
- [45] H. K. Jenssen, *Blowup for systems of conservation laws.* SIAM J. Math. Anal., 31, 894-908, 2000.
- [46] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *A nonlinear instability for 3 x 3 systems of conservation laws.* Comm. Math. Phys., 162, 47-59, 1994.
- [47] T. Kato. *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems.* Arch. Rat. Mech. Anal., 58 (3): 181-205, 1975.
- [48] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [49] V. M. Kontorovich *Stability of shock waves in relativistic hydrodinamics* Soviet Phisics JETP, 34(7) :127-132, 1958.

- [50] D.J Korteweg *Sur la forme que prennent les equations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires par des variations de densite.* Archives Neerlandaises des Sciences exactes and Naturelles, series II,(6),1-24, 1901
- [51] H. O. Kreiss. *Stability theory for difference approximations of mixed inicial boundary value problems. I* Math. Comp., 22 :703-714, 1968.
- [52] H. O. Kreiss. *Initial boundary value problems for hyperbolic systems* Comm. Pure Appl. Math., 23 :277-298, 1970.
- [53] S.N. Kruřkov *Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 187:29-32, 1969 [en Ruso]
- [54] S.N. Kruřkov *First order quasilinear equations with several independent variables.* Mat. Sb. (N.S.), 81 (123):228-255, 1970 [en Ruso]
- [55] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws II.* Comm Pure Appl. Math., 10 :537-566, 1957
- [56] P. D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves.* SIAM, Philadelphia, 1973.
- [57] P. D. Lax, *The multiplicity of eigenvalues.* Bull. AMS., 6, 213-214, 1982
- [58] P. G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The Theory of Classical and Nonclassical Shock Waves.* Birkhüser, Heidelberg, 2002.
- [59] A. Majda. *The existence of multidimensional shock fronts.* Mem Amer. Math. Soc., 43(281) :v+93, 1983
- [60] A. Majda. *The stability of multidimensional shock fronts.* Mem Amer. Math. Soc., 41(275) :iv+95, 1983
- [61] A. Majda. *Compressible Fluid Flow and Conservation Laws in Several Space Dimensions.* Appl. Math.Sci. 53, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [62] A. Makrone *Problmes mixtes hyperboliques non-linéaires.* Ph.D. Thesis, Université de Rennes I, 1987
- [63] J. Málek, J. Necas, M. Rokita, M. Ruzucka, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDE.* Chapman and Hall, London, 1996.
- [64] G. Métivier. *Stability of multiâdimensional weak shocks.* Comm. Partial Diff. Eqs., 15, 983-1028, 1990.
- [65] G. Métivier. *Stability of multidimensional shocks.* Advances in the theory of shock waves, volumen 47 de Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 25-103, 2001
- [66] G. Métivier. *The block structure condition for symmetric hyperbolic system.* Bull London Math Soc., 32(6) :689-702, 2000.

- [67] G. Métivier *Stability of multidimensional shocks*. In Advances in the Theory of shock waves, paginas 25-103. Birkhäuser Boston Inc., MA, 2001. Editado por H. Freistühler y A. Szepessy
- [68] J. Moser *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations*. I. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 20:265-315, 1966
- [69] S. Müller, *Variational models for microstructure and phase transitions*. in Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, Lecture Notes in Maths 1713, Springer Verlag, Berlin, 85-210, 1999.
- [70] R. G. Plaza. *Multidimensional stability of martensite twins under regular kinetics*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 :1998-2018, 2008.
- [71] D. Serre. *Systems of conservation laws 1*. Cambridge university Press, Cambridge, 1999.
- [72] D. Serre. *Systems of conservation laws 2*. Cambridge university Press, Cambridge, 2000.
- [73] D. Serre. *La transition vers l'instabilité pour les ondes de choc multidimensionnelles*. Trans. Amer. Math. Soc., 353(12) :5071-5093, 2001.
- [74] M. Shearer. *The Riemann problem for a class of conservation laws of mixed type*. J. Differential Equations, 46(3) :426-443, 1982.
- [75] M. Shearer. *Admissibility criteria for shock wave solutions of a system of conservation laws of mixed type*. Proc. Roy Soc. Edinburgh Sect. A, 93(3-4):233-244, 1982/83
- [76] T. C. Sideris. *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*. Comm. Math. Phys., 101(4) :475, 1985.
- [77] M. Slemrod. *An admissibility criterion for fluids exhibiting phase transitions*. In Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, ed J. Ball. Reidel, :423-432, 1983.
- [78] M. Slemrod. *Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid*. Arch. Rational Mech. Anal., 81(4) :301-315, 1983.
- [79] E. Tadmor, M. Rascle, P. Bagherini, *Compensated compactness for 2D conservation laws*. J. Hyp. Diff. Eq., 2 :697-712, 2005.
- [80] L. Tartar, *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*. 263-285, in Systems of Nonlinear PDEs, NATO Advanced Science Institutes Series, Vol. 3, Oxford, 1983.
- [81] L. Truskinovsky. *About the "normal growth" approximation in the dynamical theory of phase transitions*. Contin. Mech Thermodyn., 6(3) :185-208, 1994
- [82] H. Weyl *Shock waves in arbitrary fluids*. Comm. Pure Appl. Math., 2 :103-122, 1949.
- [83] R. Young, *Blowup of solutions and boundary instability in nonlinear hyperbolic equations*. Comm. Math. Sci., 1, 269-292, 2003.

- [84] R. Young, W. Szeliga, *Blowup with small BV data in hyperbolic conservation laws*. Arch. Rational Mech. Anal., 179, 31-54, 2005.
- [85] Y. B. Zeldovich, *On the possibility of rarefaction shock waves*. Exp. Theor. Phys., 4 :363-364, 1946, in Russian.